NUMERO: 1189

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Parisi

MATERIA: Calcolo Delle Probabilità

Prof. Pellerey

Lezione 1

CALCOLO DELLE PROBABILITA':

Supponiamo di utilizzare un dado regolare a 6 facce:

$$E = \{\text{risultato pari}\} \qquad \mathbb{P}(E) = \frac{1}{2} = \frac{\#(2,4,6)}{\#(1,2,3,4,5,6)} = \frac{3}{6}$$

- **Definizione classica di probabilità (Laplace):**

La probabilità di un evento E, è data dalla proporzione dei casi favorevoli ad E sui casi possibili, ossia quando tutti i casi possibili sono ugualmente possibili:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\#(\text{casi favorevoli } E)}{\#(\text{casi possibili})}$$

- **Definizione frequentista di probabilità:**

Supponiamo $n(E)$ numero di volte in cui in n lanci il risultato è pari:

$$\frac{n(E)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(E)$$

- **Definizione soggettiva di probabilità (Definetti):**

La probabilità è una misura della fiducia che il soggetto ripone nel verificarsi di E.

$\mathbb{P}(E)$ è la somma che si è disposti a scommettere su E.
Questa vale: 1 se si verifica
0 se non si verifica

- **Definizione di Kolmogorov:**

$0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$

$\mathbb{P}(E) = 1$ se E è un evento certo

$E \cap F = \emptyset$

$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$

- **Combinatoria:**

E' un metodo per contare i casi possibili e favorevoli.

• Permutazioni:

$N = \{x_1, \dots x_n\}$ è un insieme con $\#(N) = n$ (piccolo) di elementi distinti

Le permutazioni di N:

$$\mathcal{P}(N)$$

sono tutti i possibili ordinamenti di N.

• Consideriamo $N = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(N) = \{(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)\}$$

Dunque: $\#(\mathcal{P}(N)) = n \cdot (n-1) = n!$

• Consideriamo l'anagramma di PEPPER:

$\#(\mathcal{P}(P_1E_1P_2P_3E_2R)) = 6! =$

$1!$ possibili permutazioni di R

$2!$ possibili permutazioni di E

$3!$ possibili permutazioni di P $=$

$= \#(\mathcal{P}(PEPPER)) \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$

con $\#(\mathcal{P}(PEPPER)) = \dfrac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$

Dunque se N è costituito da n elementi, di cui n_1 indistinguibili tra di loro, ..., n_r che non distinguo tra loro allora le permutazioni di N sono:

$$\#(\mathcal{P}(N)) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r}$$

• Combinazioni:

Le combinazioni $\mathcal{C}_{n,k}(N)$ di classe k con $(k \le n)$, sono tutti i sottoinsiemi non ordinati con k elementi scelti da N.

$$= \binom{6}{4} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5}$$

3) # (scelte con e ed h) + # (scelte senza e e h) =

$$= \binom{6}{3} + \binom{6}{5}$$

• <u>Coefficiente multinomiale</u>:

Quanti sono i possibili modi di dividere l'insieme N in r sottoinsiemi distinti di numerosità $n_1, \dots, n_r$?

$(n_1 + n_2 + \dots + n_r = n)$

1° Scelgo il primo gruppo di n_1 elementi
2° Scelgo il secondo gruppo di n_2 elementi
ecc...

1° $\binom{n}{n_1}$ possibili esiti

2° $\binom{n-n_1}{n_2}$ possibili esiti

n° $\binom{n_r}{n_r}$ possibili esiti

La soluzione è: $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n_r}{n_r} =$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1)!\,(n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot 1 = \underbrace{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!}}_{\text{coeff. multinomiale}} =$$

$$= \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$$

• 9 bambini devono essere divisi in 3 squadre da 3. Quanti sono i possibili modi?

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \left(\frac{9}{(3!)^3}\right) = \binom{9}{3, 3, 3}$$

• 6 persone $\quad N = \{A, B, C, D, E, F\}$

i) # (file indiane)

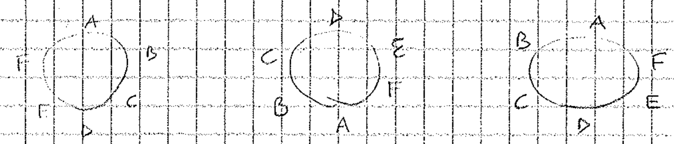
ii) # (ordinamenti attorno ad un tavolo rotondo)?

iii) in entrambi i casi $\longrightarrow$ $\mathbb{P}$(C, F vicini)?

i) $\#(\mathcal{P}(N)) = 6!$

ii) $\#(\mathcal{O}(N)) = ?$

ordinamenti attorno al tavolo



$6 \begin{cases} A\,B\,C\,D\,E\,F \\ \,B\,C\,D\,E\,F\,A \\ \,C\,D\,E\,F\,A\,B \\ \end{cases}$

$\mathcal{O} \longrightarrow 12$ file indiane

$6! = \#(\mathcal{P}(N)) = \#(\mathcal{O}(N)) \cdot 12$

$$\#(\mathcal{O}(N)) = \frac{6!}{12}$$

iii) $\mathbb{P}(C, F \text{ vicini}) = \frac{2 \cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3}$ se è fila indiana

$(2 \cdot 1 \cdot 4! + 4 \cdot 2 \cdot 4!) = 4 \cdot 5!$

$$\mathbb{P}(C, F \text{ vicini}) = \frac{\frac{12 \cdot 4!}{12}}{\frac{6!}{12}} = \frac{12 \cdot 4!}{6!} = \frac{2}{5}$$

6 (posti a sedere per C) · 2 (posti a sedere per F vicino a C)

(permutazioni degli altri) $= 6 \cdot 2 \cdot 4!$

• n studenti nati nel 1993

i) $\mathbb{P}$(non ci sono 2 o + studenti con il compleanno nello stesso giorno) $= \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \ldots (365-(n-1))}{365^n}$

• 

caratteri Braille

i) # (caratteri Braille)

ii) # (caratteri con 4 vertici sollevati)

iii) se i caratteri con 4 vertici sollevati sono equiprobabili

$\mathbb{P}$(4 vertici formino un quadrato o un rettangolo)

$x_i \in \{0, 1\}$ $\quad x_i = 0$ vertice "i" non sollevato

$\phantom{x_i \in \{0, 1\}} \quad x_i = 1$ vertice "i" è forato

ALGEBRA :

- Proprietà di simmetria : $E \cap F = F \cap E \qquad E \cup F = F \cup E$
- Proprietà associativa : $E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$
  $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$
- Proprietà distributiva : $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
  $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

LEGGI DI DE MORGAN :

$$\left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{m} E_n^c \qquad \left(\bigcap_{n=1}^{m} E_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{m} E_n^c$$

DEFINIZIONE ASSIOMATICA KOLMOGOROV :

$\mathcal{S}$, spazio campionario $\qquad \mathcal{E}$ famiglia di eventi

La probabilità di E, $E \in \mathcal{E}$ è :

1) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$

2) $\mathbb{P}(\mathcal{S}) = 1$

3) $(E_n, n \geq 1)$ successione di eventi a due a due incompatibili $\quad E_n \cap E_m = \phi \quad n \neq m$
$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \rightarrow$ σ - additività

- Proposizione 1 :

$\mathbb{P}(\phi) = 0 \qquad (E_n, n \geq 1) \qquad E_1 = \mathcal{S} \qquad E_n = \phi \quad n > 1$

$$\Rightarrow 1 \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{S})}_{=1} + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(\phi)}_{=0}$$

- Proposizione 2 :

$E_n, n: 1, \dots m \quad : \quad E_n \cap E_m = \phi \qquad n \neq m$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(E_n)$$

- Proposizione 3 :

$\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$

$E, E^c \longrightarrow E \cup E^c = \mathcal{S} \qquad E \cap E^c = \phi$

$$\underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{S})}_{=1} = \mathbb{P}(E \cup E^c) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(E^c)$$

- Proposizione 4 :

$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

• Spazi campionari uniformi + finiti:

$\mathcal{S} = \{ s_1, \dots, s_n \}$

$\#(\mathcal{S}) = N \qquad \mathbb{P}(s_i) = c = \frac{1}{N} \qquad \forall i$

$c \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\overset{1}{\overset{\parallel}{\mathcal{S}}}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} s_i\right) = \sum_{i=1}^{N} c \qquad \frac{1}{N} = \frac{N c}{N}$

E evento $\qquad E \subseteq \mathcal{S} \qquad E_i = \bigcup_{i = s_i \in E} s_i$

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i = s_i \in E} s_i\right) = \sum_{i = s_i \in E} \frac{1}{N} = \frac{\#(E)}{N}$

• Lancio due dadi (rosso / verde) a 6 facce equi

$\mathcal{S} = \{(i, j),\ i, j \in \{1, 2, \dots 6\}\}$

$\#(\mathcal{S}) = 36$

1) $\mathbb{P}(\text{somma sia } 8) = \frac{5}{36}$

2) $\mathbb{P}(\text{somma } 12) = \frac{1}{36}$

• Un'urna con 5 palline nere e 6 bianche.
Ne estraggo 3 in blocco.

1) $\mathbb{P}(1 \text{ bianca}, 2 \text{ nere}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{1}^{=6}}{\binom{11}{3}}$

$U = \{\underbrace{1 \dots 5}_{\text{nere}}, \underbrace{6 \dots 11}_{\text{bianche}}\}$

$\#(\mathcal{S}) = \#(\mathcal{C}_{11,3}(U)) = \binom{11}{3}$

• Poker: 52 carte $\qquad$ 4 semi ♡ ♢ ♧ ♤

$A, 2 \dots, 10, J, Q, K$

mano: 5 carte scelte dal mazzo

1) $\mathbb{P}(\text{coppia}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \binom{12}{3} \cdot 4^3}{\binom{52}{5}}$ $\qquad$ A A J Q K

$\#(\text{scelte della carta della coppia}) = 13$

$\#(\text{scelte semi}) = \binom{4}{2}$

$\#(3 \text{ carte che non sono } A) = \binom{12}{3}$

$\#(\text{seme delle 3 carte}) = \binom{4}{1}^3 = 4^3$

2) $\mathbb{P}(\text{tris}) = \frac{13 \binom{4}{3} \binom{12}{2} 4^2}{\binom{52}{5}}$ $\qquad$ A A A J Q

PROBABILITÀ CONDIZIONATA:

Se abbiamo un'informazione parziale aggiuntiva, cambia il risultato. Questa aggiunta è denominata: condizionamento.

- $E = \{\text{passo l'esame al primo appello}\}$

$\mathbb{P}(E) = \frac{40}{100}$

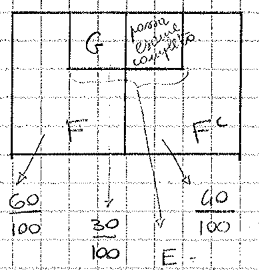
$F = \{\text{passa la prova in itinere (esonero)}\}$

$\mathbb{P}(F) = \frac{60}{100}$

$G = \{\text{passa la 2° prova parziale}\}$

$\mathbb{P}(G) = \frac{30}{100}$

1) $\mathbb{P}(E \mid F)$?   2) $\mathbb{P}(E \mid F^c)$?



1) $$\mathbb{P}(E \mid F) = \frac{\mathbb{P}(\overbrace{E \cap F}^{G})}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{1}{2}$$

2) $$\mathbb{P}(E \mid F^c) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F^c)}{\mathbb{P}(F^c)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{1}{4}$$

Dato un evento F, tale che $\mathbb{P}(F) > 0$, la probabilità condizionata di E, dato F:

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

• Proposizione:

$\mathbb{P}(\cdot \mid F)$ è una probabilità.

Dimostrazione:

A.1: $0 \leq \mathbb{P}(E \mid F) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} \leq 1$

A.2: $\mathbb{P}(\mathcal{S} \mid F) = \dfrac{\mathbb{P}(\mathcal{S} \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \dfrac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)} = 1$

A.3: $\{E_n, n \geq 1\}$ successione di eventi $E_n \cap E_m \neq \emptyset$ se $n \neq m$ allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \mid F\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap F\right)}{\mathbb{P}(F)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap F)\right)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n \cap F)}{\mathbb{P}(F)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n \mid F)$$

• $\mathbb{P}(\text{croce al } 1° \text{ lancio} \mid \text{Testa al } 2°) =$

$= 1 - \mathbb{P}(\text{testa al } 1° \text{ lancio} \mid F) = 1 - \mathbb{P}(E \mid F) =$

$= 1 - \dfrac{4}{6} = \dfrac{1}{3}$

• Formula del prodotto totale:

Se E è un evento e F, $0 < \mathbb{P}(F) < 1$,

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) \cdot \mathbb{P}(E \mid F) + \mathbb{P}(F^c) \cdot \mathbb{P}(E \mid F^c)$

$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap F^c) = \mathbb{P}(F) \cdot \mathbb{P}(E \mid F) + \mathbb{P}(F^c)\, \mathbb{P}(E \mid F^c)$

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) \cdot \mathbb{P}(E \mid F_i)$

$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i)\, \underbrace{\mathbb{P}(E \mid F_i)}$ → MEDIA PONDERATA

• Una compagnia di assicurazione che divide gli assicurati in 2 categorie: quelli più inclini agli incidenti e quelli che non lo sono.

$E = \{\text{più inclini agli incidenti}\}$

$\mathbb{P}(F) = \dfrac{30}{100}$ $\qquad \mathbb{P}(E \mid F) = 0{,}4$

$\mathbb{P}(E \mid F^c) = 0{,}2$

$E = \{\text{incidenti entro l'anno}\}$

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) \cdot \mathbb{P}(E \mid F) + \mathbb{P}(F^c) \cdot \mathbb{P}(E \mid F^c) = \dfrac{30}{100} \cdot 0{,}4 + \dfrac{70}{100} \cdot 0{,}2 =$

$= \dfrac{12}{100} + \dfrac{14}{100}$

• Prova lancio di una moneta non equa

$\mathbb{P}(\text{successo}) = \mathbb{P}(\text{testa}) = \frac{2}{3}$

1) $\mathbb{P}$ (almeno 1 successo nelle prime n prove)

2) $\mathbb{P}$ (esattamente K successi nelle prime n prove)

1) $T_i = \{$ successo all'i-esima prova $\}$

$T_i = \{$ testa all'i-esimo lancio $\}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i^{\,c}\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_i^{\,c}\right) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(\mathbb{P}(T_i^{\,c})\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \underbrace{\mathbb{P}(T_i)}_{p}\right) =$$

$$= 1 - (1-p)^n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

2) $\mathbb{P}(\underbrace{\text{2 teste in 4 lanci}})$ $\qquad n=4 \quad K=2$

$$\mathbb{P}\big((T_1 T_2 C_3 C_4) \cup (TCTC) \cup (TCCT) \cup (CTTC) \cup (CTCT)$$

$$\cup (CCTT)\big) = \mathbb{P}(TTCT) + \mathbb{P}(TCTC) + \mathbb{P}(TCCT) +$$

$$+ \underbrace{\mathbb{P}(CTTC)} + \mathbb{P}(CTCT) + \mathbb{P}(CCTT)) =$$

$$\mathbb{P}(T_1^c \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4^c) = (1-p)\,p\,p\,(1-p) = (1-p)^2 p^2$$

Generalizzazione : $= \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$

- Un album con n figurine. In ogni pacchetto ce ne sono K.

$p_i = \mathbb{P}(\text{figurina sia di tipo } i: 1, \dots, n)$

Si acquista un pacchetto. Calcolare:

i) $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\text{c'è almeno 1 figurina di tipo } i \text{ nel pacchetto})$

ii) $\mathbb{P}(A_i \cup A_j)$, $\mathbb{P}(A_i | A_j)$

i) $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\text{almeno una delle } K \text{ figurine è di tipo } i) =$
$= \mathbb{P}((\text{nessuna è di tipo } i)^c) =$
$= 1 - \mathbb{P}(\text{nessuna è di tipo } i) = 1 - (1 - p_i)^K$

ii) $\mathbb{P}(A_i \cup A_j) = \mathbb{P}(\text{almeno una figurina di tipo } i \text{ o tipo } j) =$
$= \mathbb{P}((\text{nessuna di tipo } i \text{ o } j)^c) = 1 - (1 - (p_i + p_j))^K$

$$\mathbb{P}(A_i | A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap A_j)}{\mathbb{P}(A_j)}$$

$\mathbb{P}(A_i \cup A_j) = \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_j) - \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$

- Test per diagnosticare l'HIV.

$\mathbb{P}(HIV^+) = 0{,}001$

$\mathbb{P}(T^+ | HIV^+) = 0{,}99$

$\mathbb{P}(T^- | HIV^-) = 0{,}99$ $\qquad \mathbb{P}(T^- | HIV^-) = 0{,}01$

$$\mathbb{P}(HIV^+ | T^+) = \frac{\mathbb{P}(T^+ \cap HIV^+)}{\mathbb{P}(T^+)} = \frac{99}{99 + 999} \approx 9\% \approx 0{,}09$$

$\mathbb{P}(T^+) = \mathbb{P}(HIV^+) \cdot \mathbb{P}(T^+ | HIV^+) + \mathbb{P}(HIV^-) \mathbb{P}(T^+ | HIV^-) =$
$= 0{,}001 \cdot 0{,}99 + 0{,}999 \cdot 0{,}01$

$$\mathbb{P}(HIV^+ | T_1^+ \cap T_2^+) = \frac{\mathbb{P}(HIV^+ \cap T_1^+ \cap T_2^+)}{\mathbb{P}(T_1^+ \cap T_2^+)}$$

$\mathbb{P}(T_1^+ \cap T_2^+) = \mathbb{P}(HIV^+) \mathbb{P}(T_1^+ \cap T_2^+ | HIV^+) + \mathbb{P}(HIV^-) \cdot$
$\cdot \mathbb{P}(T_1^+ \cap T_2^+ | HIV^-) =$
$= 0{,}001 (0{,}99)^2 + 0{,}999 (0{,}01)^2$

$$\mathbb{P}(HIV^+ | T_1^+ \cap T_2^+) = \frac{\mathbb{P}(HIV^+ \cap T_1^+ \cap T_2^+)}{\mathbb{P}(T_1^+ \cap T_2^+)} =$$
$$= \frac{0{,}001 \cdot (0{,}99)^2}{0{,}001 (0{,}99)^2 + 0{,}999 (0{,}01)^2} \approx 0{,}9$$

• 10 partecipanti ad una gara.
? Numero possibili podi ?

$n = 10 \quad K = 3 \qquad D_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

• Permutazioni :

Nel caso particolare in cui : $n = K$
allora : $D_{n,n} = n! = P_n$

• Disposizioni con Ripetizione :

Supponiamo di dover estrarre K individui su n, ma con l'ipotesi di poter reestrarre un individuo tutte le volte, allora :

$$D^{(r)}_{n,K} = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{K \text{ volte}} = n^K$$

• ? Possibili colonne totocalcio ?

$3 = 1 \times 2 = n \qquad 13 = \text{partite} = K$

$D^{(r)}_{n,K} = 3^{13} \rightarrow$ posso ottenere 13 volte 1,
13 volte x, o
13 volte 2.

• ? Numeri Binari ?

$D^{(r)}_{n,K} = 2^K$ posso ottenere K volte 0 o 1

• Permutazioni con elementi indistinguibili :

Consideriamo la parola "ALA".
Quanti anagrammi ?

$$\left.\begin{array}{l} AAL \\ ALA \\ LAA \end{array}\right\} 3$$

Se consideriamo il numero di permutazioni : $P_n = 3! = 6 \neq 3$
Questo perché due elementi ("A") sono indistinguibili.

Se avessimo considerato invece "$A_1 L A_2$", allora avremmo ottenuto :

$$\left.\begin{array}{l} A_1 A_2 L \\ A_2 A_1 L \\ A_1 L A_2 \\ A_2 L A_1 \\ L A_1 A_2 \\ L A_2 A_1 \end{array}\right\} 6 = P_n = \text{numero permutazioni}$$

Dunque definiamo una nuova quantità :

$$\tilde{P}_n = \frac{\#\ \text{Permutazioni}}{\#\ \text{ogg. Indistinguibili}} = \text{nel nostro caso} = \frac{3!}{2!} = 3$$

- Ho 20 persone. Ne considero 2.
Quante sono le possibili coppie?

$$C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\,(20-2)!} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20\cdot 19\cdot \cancel{18!}}{2\cdot \cancel{18!}} = 190$$

- Consideriamo tutte le possibili coppie (i,j) con $i,j \in \{0,\dots,9\}$
i) Quante possibili coppie?
ii) " " " con $i \neq j$?
iii) " " " " $i < j$?
iv) " " " " $i \leq j$?

i) $x = 10^2 = 10\cdot 10 = 100$
ii) $x = 10\cdot 9 = 90 = D_{10,2}$
iii) $x = \frac{10\cdot 9}{2} = 45 = C_{10,2}$
iv) $x = \frac{10\cdot 9}{2} + 10 = 55$

- Anagrammi della parola "PALLA"?
$n_1 = 2$ lettere A
$n_2 = 2$ lettere L
$n_3 = 1$ lettera P

$$\tilde{P}_5 = \binom{5}{2,2,1} = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$$

- Urna con 20 palle numerate da 1 a 20.
Abbiamo 5 estrazioni <u>con reimbussolamento</u>
(viene rimessa la palla nell'urna ad ogni estrazione).
Quante sono le possibili sequenze nelle estrazioni?
$x = 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20 = 20^5$ <u>(perché ho reimbussolato)</u>

- Stesso esempio di prima, ma <u>senza reimbussolamento</u>.

$$x = 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16 = \frac{20!}{15!} = D_{20,5}$$

Videolezione 2:

PROBABILITA':

Non esiste una vera e propria definizione.

- **Esperimento:**

Un qualunque fenomeno senza esito a priori. $\quad$ sottoinsieme di Ω

Ω = insieme dei possibili risultati. $\qquad A \subseteq \Omega$

$P(A)$ = Probabilità di successo di A.

- **Concezione classica:** (non veritiero perché i casi devono essere equiprobabili)

La probabilità è il rapporto tra i casi favorevoli e quelli possibili.

$$P(A) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{n_A}{n_\Omega}$$

Con questa definizione assumiamo che i possibili casi abbiano la stessa probabilità di uscita. Sono dunque equiprobabili.

- **Concezione frequentista:** (solo se cond. iniziale = cond. finale)

E' utilizzata nella fisica.

La probabilità la si calcola calcolandola infinite volte. Dunque è il limite:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{\# prove effettuate}} = \frac{n_A}{n}$$

Difetto della definizione:
- Correttezza del limite: non è inteso come in analisi I dove vi è un ε tra la quale varia la funzione.
- Ripetibilità: non è detto che condizioni iniziali = condizioni finali

Anche questa definizione è utilizzata, ma non convince a pieno.

- **Concezione soggettivista:**

Data dal matematico De Finetti.

Sosteneva che la probabilità dipende da individuo ad individuo.

La probabilità è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce al verificarsi di A (possibili risultati).

Per grado di fiducia intendeva la cifra che sono disposto a scommettere per guadagnare 1 se A si verifica.

Per individuo coerente intendeva che bisogna essere disposti ad

- $\Omega = \{a, b, c, d\}$ $\qquad \mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$

  - $\Omega \in \mathcal{A}$ ✓
  - ×
  - ✓

  $\mathcal{A}$ non è un algebra.

- $\Omega = \{a, b, c, d\}$ $\qquad \mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \Omega, \emptyset\}$

  - ✓
  - ✓
  - ✓

  $\mathcal{A}$ è un algebra

Osservazione:
Supponiamo che i punti i) e ii) siano soddisfatti; allora posso sostituire il punto iii) con il punto iii)'.

iii)' $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B$

Questo grazie alle leggi di De Morgan: $\begin{cases} \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \\ \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} \end{cases}$

Infatti se: iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

iii)' $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

Se vale iii)' abbiamo: $A, B \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow \overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{A}$ (per ii))
$\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \in \mathcal{A}$ (per iii)')
$\Rightarrow \overline{A \cup B} \in \mathcal{A}$ (per De Morgan)
$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ (per ii))

$\Downarrow$

e allora vale iii).

- σ - Algebre:

E' una famiglia $\mathcal{A} = \{A_i, A_i \in \Omega\}$

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

iii) $A_i \in \mathcal{A}, \; i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

La differenza con l'algebra è che nell'algebra si usano unioni finite (unioni finite di oggetti); nel caso delle σ-algebre sono infinite.

Videolezione 3:

- **Misure:**

Sono misure tutte le funzioni che ad un insieme assegnano un reale: $f: \mathcal{A} \longmapsto P(A)$

Le probabilità non sono altro che casi particolari delle misure

- **Misura additiva:**

Se soddisfa iii)' ossia: $A, B \in \mathcal{A}$ incompatibili $\Rightarrow$
$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- **Misura σ-additiva:**

Se soddisfa iii) ossia: $A_n \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ con A_n incompatibili $\Rightarrow P(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

- Consideriamo un'urna: $\{R_1, R_2, B\}$

biglie: rossa rossa bianca

Esperimento: estrazione di una biglia.

$\Omega = \{r, b\}$ spazio campione

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{r\}, \{b\}, \Omega\}$

$P: \mathcal{A} \longmapsto P(A)$

A	P(A)
$\emptyset$	0
$\{r\}$	$1/2$
$\{b\}$	$1/2$
Ω	1

E' una probabilità poiché soddisfa le proprietà i), ii) e iii) però non soddisfa il nostro caso in quanto abbiamo 2 rosse e 1 bianca. (no equiprobabili)

A	$\tilde{P}(A)$
$\emptyset$	0
$\{r\}$	$2/3$
$\{b\}$	$1/3$
Ω	1

E' una probabilità e soddisfa il nostro caso.

• Lancio di un dado equilibrato

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\qquad\qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$P: P(\{a\}) = \frac{1}{6}$ ← assegna ad ogni possibile risultato la stessa probabilità

$A = \{$esce un numero pari$\}$?

$P(A) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

↳ graffe perché è una funzione associata ad un insieme

$B = \{$esce un multiplo di $3\}$?

$P(B) = P(\{3, 6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$C = \{$esce un pari o un multiplo di $3\}$? $= A \cup B$

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(\{6\}) =$

$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

$D = \{$esce un dispari$\}$

$P(D) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

• 5 componenti indistinguibili.

3 funzionanti

2 guasti.

Ne estraiamo 2.

i) Probabilità entrambi guasti $\quad A$

ii) $\quad$ " $\quad$ uno $\quad$ " $\quad B$

iii) $\quad$ " $\quad$ almeno uno $\quad$ " $\quad C$

$\Omega = \{(g_1, g_2), (g_1, f_1), \dots, (g_2, g_1) \dots\}$ $\qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\# \Omega = ?$ $\qquad \# \Omega = 5 \cdot 4 = 20$ ← cardinalità

$P(\{a, b\}) = \frac{1}{20}$

$A = \{(g_1, g_2), (g_2, g_1)\}$ $\qquad P(A) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$

$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{2}{5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$

$B = \{(g_1, f_1), (g_1, f_2), (g_1, f_3), (g_2, f_1), (g_2, f_2), (g_2, f_3),$

$(f_1, g_1), (f_2, g_1), (f_3, g_1), (f_1, g_2), (f_2, g_2), (f_3, g_2)\}$

Videolezione 4:

PROBABILITÀ CONDIZIONATA:

$A, B \in \mathcal{A}$ e $P(B) \neq 0$ ← probabilità non nulla.

E' detta PROBABILITÀ CONDIZIONATA dell'evento A dato l'evento B, :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ci viene data un informazione aggiuntiva dopo il verificarsi dell'evento: tiro il dado e prima di leggere il risultato mi viene detto che è uscito un numero pari cambiando così la probabilità dell'evento stabilita all'inizio dell'esperimento.

Questa è la definizione secondo la concezione assiomatica data da Kolmogorov.

• Concezione Classica:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} \Rightarrow P(A|B) = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{\frac{n_{A\cap B}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

• Concezione Frequentista:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} \Rightarrow P(A|B) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

• Lancio dado: $\Omega = \{1, 2, ... 6\}$

i) A = esce il 2

ii) B = esce pari

$$P(A) = \frac{1}{6} \qquad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Oppure: $\Omega_B = \{2, 4, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

• Relazioni tra $P(A)$ e $P(A|B)$:

• A = esce 2 B = esce pari

$$P(A) = \frac{1}{6} < P(A|B) = \frac{1}{3}$$

Sapere che si è verificato B, ha fatto crescere la probabilità del verificarsi di A.

• A = esce 2 B = esce dispari

$$P(A) = \frac{1}{6} > P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$$

Ora è invece diminuita.

- <u>Estensione dell'indipendenza a più eventi:</u>

Supponiamo di avere: $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$

i) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

ii) $\begin{cases} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) P(A_3) \end{cases}$ devono valere tutte e tre insieme.

i) e ii) non sono equivalenti infatti i) $\overset{\text{non implica}}{\not\Rightarrow}$ ii)

- Urna con $\{R_1, R_2, B\}$. (tre palle $\begin{cases} 2 \text{ rosse} \\ 1 \text{ bianca} \end{cases}$)

Estraggo due palle <u>con reimbussolamento</u>.

A_1 = 1° palla estratta è rossa

A_2 = 2° palla estratta è rossa

$\Omega = \{(r,r), (r,b), (b,r), (b,b)\}$

$A_1 = \{(r,r), (r,b)\}$ $\qquad$ $A_2 = \{(r,r), (b,r)\}$

$P(A_1) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $P(A_2) = \frac{2}{3}$

Sono indipendenti?

$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = P(A_2)$ ← per intuizione

Dunque sono indipendenti.

<u>Senza reimbussolamento:</u>

$P(A_2 | A_1) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\left(\frac{1 \text{ rossa}}{2 \text{ nell'urna}}\right)$

Dunque non sono indipendenti.

• <u>Senza reimbussolamento:</u>

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = P(A_1 \cap \overline{A}_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2|A_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(D) = P(C) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) = \frac{1}{3} + P(\overline{A}_1)\,P(A_2|\overline{A}_1) = $$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$P(E) = 0 = 1 - P(B) - P(D) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

<u>Osservazione:</u>

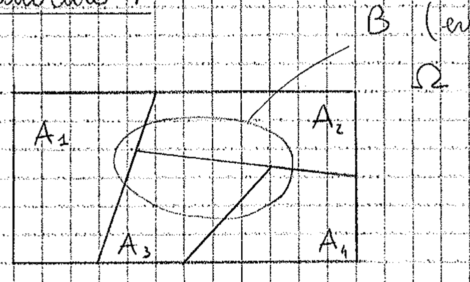
Mentre le intersezioni ($\cap$) di eventi si trasformano in prodotti di probabilità, le unioni ($\cup$) si trasformano in somme solo se gli eventi sono incompatibili.
Se non lo fossero bisogna ancora sottrarre l'intersezione tra le probabilità.

• <u>Teorema delle probabilità totali:</u>

Sia $\{A_1, \dots A_n\}$ una partizione di Ω.
$A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.
Sia $B \in \mathcal{A}$. Allora:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

<u>Graficamente:</u>



$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + P(B\cap A_3) + P(B\cap A_4)$$
$$= P(A_1)\cdot P(B|A_1) + \dots$$

Queste formula si applica quando le scelte influiscono sul passo successivo. (fasi temporali diverse)

• Due monete: $M_1 \begin{cases} T = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$ $M_2 \begin{cases} T = \frac{1}{3} \\ C = \frac{2}{3} \end{cases}$

Estraggo una moneta e la lancio
$\Omega = \{T, C\}$ non va bene come spazio campione

Dunque il teorema ci dice che:
Siano $\{A_1, \dots, A_n\}$ e B come nel teorema precedente, $P(B) \neq 0$.
Allora, $\forall i = 1, \dots n$:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B | A_j)}$$

• Due monete: $M_1 \begin{cases} T & \frac{1}{2} \\ C & \frac{1}{2} \end{cases}$

$M_2 \begin{cases} T & \frac{1}{3} \\ C & \frac{2}{3} \end{cases}$

Supponiamo che esce testa.
Qual è la probabilità che la moneta estratta sia M_1?

A_1 = estraggo M_1
A_2 = " M_2
B = esce testa

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1) P(B | A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$$

→ calcolato nell'esercizio precedente

$$P(A_2 | B) = 1 - P(\overset{A_1}{\overset{\shortparallel}{\bar{A_2}}} | B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Se è uscita testa è più probabile che la moneta che ho in mano sia M_1.

• Due urne: $U_1 = \{R, R, V, V, V\}$
$U_2 = \{R, R, R, B, V, V\}$

Due estrazioni dalla stessa urna presa a caso.

i) B = escono 2 rosse
ii) C = " almeno 1 rossa
iii) D_1 = estraggo dall'urna 1 → $P[D_1 | 2 \text{ rosse}]$
iv) $P[2^\circ \text{ rossa} | 1^\circ \text{ rossa}]$

$$\Omega = \{(U_1, r, r), (U_1, r, b) \dots\}$$

$\left.\begin{array}{l} D_1 = \text{seleziono } U_1 \\ D_2 = \text{seleziono } U_2 \end{array}\right\}$ partizione di Ω

<u>Senza reimbussolamento.</u>

Videolezione 6 :

- Tre cacciatori A, B, C e tirano ad un bersaglio.
  - i) Probabilità che tutti facciano centro
  - ii) 〃 〃 almeno uno faccia centro
  - iii) 〃 〃 esattamente un centro
  - iv) 〃 〃 A faccia centro | esatt. un centro
  - v) 〃 〃 A faccia centro | almeno un centro

E_A = "il cacciatore A fa centro"
E_B = " 〃 〃 B 〃 〃 "
E_C = " 〃 〃 C 〃 〃 "

i) $P[E_A \cap E_B \cap E_C] = P(E_A) \cdot P(E_B | E_A) \cdot P(E_C | E_A \cap E_B) =$

$$= p_A \cdot \underbrace{P[E_B]}_{\text{perché A non influisce su B}} \cdot P[E_C] = p_A \cdot p_B \cdot p_C$$

ii) $P[\text{"almeno un centro"}] = 1 - P[\overline{E}_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_C] =$

$$= 1 - (1-p_A)(1-p_B)(1-p_C)$$

iii) $P[\text{"esatt. un centro"}] = P[(E_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_C) \cup (\overline{E}_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_C) \cup (\overline{E}_A \cap \overline{E}_B \cap E_C)]$

$$= P[E_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_C] + P[\dots] + P[\dots] =$$

$$= p_A(1-p_B)(1-p_C) + (1-p_A)p_B(1-p_C) + (1-p_A)(1-p_B)p_C$$

iv) $P[E_A | \text{"esatt. 1 centro"}] = \dfrac{P[E_A \cap \text{"esatt. 1 centro"}]}{P[\text{"esatt. 1 centro"}]} =$

$$= \frac{P[E_A] \cdot P[\text{"esatt. 1 centro"} | E_A]}{p_A(1-p_B)(1-p_C) + (1-p_A)p_B(1-p_C) + \dots} =$$

$$= \frac{p_A(1-p_B)(1-p_C)}{〃} \leq 1$$

v) $P[E_A | \text{"almeno 1 centro"}] = \dfrac{P[E_A] \cdot P[\text{"almeno 1 centro"} | E_A]}{〃} =$

$$= \frac{1}{〃}$$

• Test HIV:

		HIV 0	HIV 1
Risp	0	1	0
	1	0,1	0,9

0 = stai tranquillo

1 = preoccupati

% malati = 2% $\qquad P[HIV] = 0{,}02 \qquad P[\overline{HIV}] = 1 - 0{,}02$

M = malato

$$P[M \mid R=1] = \frac{P[M \cap (R=1)]}{P[R=1]} = \frac{P[M] \cdot P[R=1 \mid M]}{P[M]P[R=1 \mid M] + P[\bar{M}]P[R=1 \mid \bar{M}]} =$$

$$= \frac{0{,}02 \cdot 0{,}9}{0{,}02 \cdot 0{,}9 + 0{,}98 \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}018}{0{,}018 + 0{,}098} = 0{,}15$$

• Test con 5 domande: 4 risposte, 1 giusta.
Si risponde a caso. Si supera il test se almeno 3 sono giuste.

P[supero test] ?

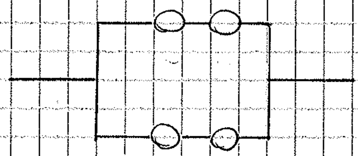
Sia p prob. risposta corretta alla singola domanda

$p = \frac{1}{4}$

$$P[\text{sup test}] = P[\text{almeno } 3 \text{ su } 5] =$$
$$= P[\{5 \text{ giuste}\} \cup \{4 \text{ giuste}\} \cup \{3 \text{ giuste}\}] =$$
$$= P[\{5 \text{ giuste}\}] + P[\{4g\}] \cup P[\{3g\}] =$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)\binom{5}{1} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \binom{5}{2} =$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left\{ \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 5 + \frac{9}{16} \cdot 10 \right\} = \frac{106}{4^5} \sim 0{,}1$$

$$3)\ P[\bar{D}|S] = \frac{P[\bar{D}\cap S]}{P[S]} = \frac{P[\bar{D}]\,P[S|\bar{D}]}{P[S]} =$$

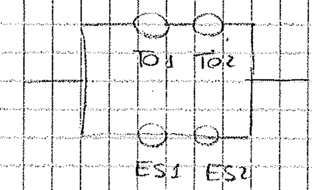
$$= \frac{(1-p_D)\,p_C\,\cancel{(p_A+p_B-p_Ap_B)}}{(p_D+p_C-p_Cp_D)\,\cancel{(p_A+p_B-p_Ap_B)}} = \frac{p_C(1-p_D)}{p_C+p_D-p_Cp_D}$$



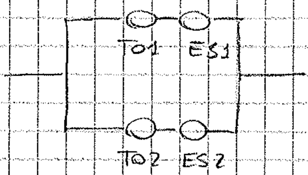
4 componenti

2 TO p_1 — 2 EST p_2

$p_1 > p_2$



S_1



S_2

Qual è delle due configurazioni ottimizza la probabilità di funzionare del sistema.

$$1)\ P[S_1] = P[(TO1 \cap TO2) \cup (E_1 \cap E_2)] =$$

$$= P[(TO1 \cap TO2)] + P[E_1 \cap E_2] - P[TO1 \cap TO2 \cap E_1 \cap E_2]$$

$$= p_1^2 + p_2^2 - p_1^2 p_2^2$$

$$2)\ P[S_2] = P[(TO1 \cap E_1) \cup (T_2 \cap E_2)] =$$

$$= P[TO1 \cap E_1] + P[TO2 \cap E_2] - P[TO1 \cap TO2 \cap E_1 \cap E_2] =$$

$$= p_1p_2 + p_1p_2 - p_1^2p_2^2 = 2p_1p_2 - p_1^2p_2^2$$

$$P[S_1] \overset{?}{\geq} P[S_2] \qquad p_1^2 + p_2^2 \overset{?}{\geq} 2p_1p_2$$

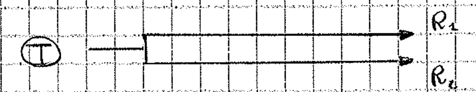
$$p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \overset{?}{\geq} 0$$

$$(p_1 - p_2)^2 \overset{?}{\geq} 0 \quad ✓$$

- Canale di Trasmissione II:

Come prima:

p = prob. trasm. singolo canale



Se ricevo $(1,0)/(0,1)$ chiedo ritrasmissione coppia e proseguo fino a $(0,0)/(1,1)$

R^1_{00} = "alla prima trasmissione ricevo $(0,0)$"
R^1_{10} = " " " " " $(1,0)$"

R^n_{ab} = " " n-esimo " " (a,b)"

$$
\begin{aligned}
P[T \mid T_0] &= P[\{R=1\} \mid T_0] = \\
&= P[R^1_{11} \cup ((R^1_{10} \cup R^1_{01}) \cap R^2_{11}) \cup \dots] = \\
&= p^2 + 2p(1-p)\cdot p^2 + 2p(1-p)\cdot 2p(1-p)\cdot p^2 + \dots = \\
&= p^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} [2p(1-p)]^n \right) = \\
&= p^2 \cdot \frac{1}{1-2p(1-p)}
\end{aligned}
$$

serie geometrica

- Ovetti:

10% ovetti contiene Tom o Jerry

n? ovetti da comprare per garantirmi al 95% la presenza di almeno 1 T o J

$n=1$ $\quad P[\text{"almeno 1 TJ"}] = 1 - P[\text{no TJ}] = 1 - 0{,}9$

$n=2$ $\quad P[\text{" // // //"}] = 1 - 0{,}9^2$

$n=n$ $\quad P[\text{" // // //"}] = 1 - 0{,}9^n \geq 0{,}95$

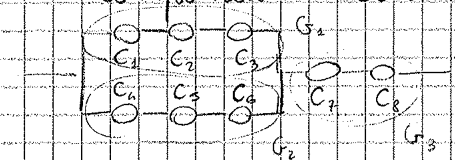
$1 - 0{,}95 \geq 0{,}9^n$

$0{,}05 \geq 0{,}9^n \longrightarrow \log 0{,}05 \geq \log 0{,}9^n$

$\log 0{,}05 \geq n \log 0{,}9$

$n \geq \dfrac{\log 0{,}05}{\log 0{,}9} \cong 29$

- 8 componenti elettronici.



\# possibili disposizioni di 8 componenti?

Soluzione banale ma lunga:
numero tutti i componenti e cerco le possibili combinazioni

Soluzione più semplice:
$n = 8$ da suddividere in 3 gruppi:
$G_1 = \# 3$
$G_2 = \# 3$
$G_3 = \# 2$
Allora: $\# \text{disposizione} = \binom{8}{3,3,2} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = 280$

- Teorema Multinomiale:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ← per il coeff. binomiale

Allo stesso modo:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1 \dots n_r) \in \mathbb{N}^r \\ \text{t.c. } n_1 + \dots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

- Numero soluzioni intere di un equazione:

Consideriamo l'equazione: $x_1 + \dots + x_r = n$
\# soluzioni intere $(x_i > 0)$?
Vincolo $r \leq n$ => altrimenti non vi sono soluzioni.
Pensiamo di avere n individui: $A_1 / A_2 / \dots , A_{n-1} / A_n$
Considero r gruppi da almeno un individuo per gruppo
r gruppi → / ← $r-1$
posizioni → $n-1$ possibili posizioni
\# soluzioni intere = \# possibili scelte di / $= \binom{n-1}{r-1}$ per $x_i > 0$

- n° soluzioni intere e >0 di: $x_1 + x_2 = 4$

$n = 4$, $r = 2$

$\Rightarrow \# \binom{4-1}{2-1} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$

$(x_1, x_2) = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

• Overbooking:

Ipotesi:

i) Indipendenza tra i passeggeri

ii) sia $p \in (0,1)$ la probabilità che il singolo passeggero non si presenti

1

AO → CN 20 posti disponibili

Prenotazioni = 22

P[overbook] ?

Sia N = numero individui presenti alla partenza

$$P[\text{overbook}] = P[N \geq 21] = P[\{N=21\} \cup \{N=22\}] =$$
$$= P[\{N=22\}] + P[\{N=21\}] =$$
$$= (1-p)^{22} + 22 \cdot p\,(1-p)^{21} =$$

↳ casi in cui ho 21 passeggeri

$$= \binom{22}{22}(1-p)^{22}p^0 + \binom{22}{21}(1-p)^{21} \cdot p^1 + \dots$$

tutti complementari
- la "più piccola" famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contiene tutti insiemi definiti come sopra e che soddisfa la proprietà di σ-additività.

Si ottiene dunque la σ-algebra di Borel (σ algebra).

Vogliamo mettere in relazione i due spazi:

$(\Omega, \mathcal{A})$ $\qquad\qquad$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$: \omega \longmapsto x \in \mathbb{R}$

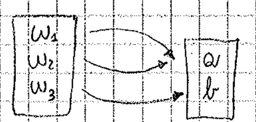
Ossia una funzione che ad ogni spazio campione, associa un numero reale (al posto di avere "Paolo" "Enrico" abbiamo "1" "2")
Dunque una variabile casuale non è altro che una funzione che ad ogni risultato dell'esperimento associa un numero.
Deve però essere soddisfatta una proprietà, ossia devono essere delle <u>funzioni misurabili</u>.

• <u>Funzioni Misurabili</u>:

Una funzione $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ che relaziona uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$ con $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, è detta misurabile se:

$$\forall B \in \mathcal{B}, \text{ la controimmagine } h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

• $(\Omega, \mathcal{A}) \qquad (\Omega', \mathcal{A}')$



$\Omega : \quad \omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3$

$\Omega' : \quad a, \ b$

$\mathcal{A} = \{ \emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}\}$

$\mathcal{A}' = \{ \emptyset, \Omega', \{a\}, \{b\}\}$

$$h: \begin{array}{l} \omega_1 \longmapsto a \\ \omega_2 \longmapsto a \\ \omega_3 \longmapsto b \end{array}$$

È misurabile?

$h^{-1}(\{a\}) \overset{?}{=} \{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{A}$

$h^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$

$h^{-1}(\{b\}) = \{\omega_3\} \in \mathcal{A}$

Dunque è una funzione misurabile

$B = (5, 10]$

$P_X(B) = P[X^{-1}(B)] = P[\{\text{carte il cui valore} \in (5, 10]\}] =$

$= P[\{6\heartsuit, 6\clubsuit, \dots, 10\spadesuit, 10\diamondsuit\}] = \frac{20}{52}$

- <u>Osservazione</u>:

Una variabile casuale $(X, Y, Z, W, \dots)$ e' una grandezza che descrive il risultato di un esperimento <u>prima</u> che venga effettuato.
Il valore assunto effettivamente dopo aver effettuato l'esperimento e' detto: <u>realizzazione della variabile casuale.</u>
Per la notazione si usano lettere minuscole: $(x, y, z, w \dots)$

Come descrivere una variabile casuale?

- <u>Funzione di ripartizione</u>:

Data una variabile casuale X, e' detta funzione di ripartizione di X la funzione:

$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad F_X(t) = P_X[(-\infty, t]] = P[\{\omega : X(\omega) \in (-\infty, t]\}] = P[X \leq t] \qquad t \in \mathbb{R}$

Ad esempio posso anche cercare valori compresi tra due valori: $a < x < b$

$P[X \in (a, b]] = P[X \in (-\infty, b]] - P[X \in (-\infty, a]] = F_X(b) - F_X(a)$

Per cercare i valori maggiori di un determinato valore:

$P[X > b] = 1 - P_X[(-\infty, b)] = 1 - F_X(b)$

- <u>Proprietà delle Funzioni di ripartizione</u>:

Devono soddisfare queste 4 proprietà per essere funzioni di ripartizione.

1) F_X sono monotone crescenti (non strettamente)
2) $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$
3) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$
4) $\lim_{t \to t_0^+} F_X(t) = F_X(t_0) \quad \leftarrow$ continuità da destra

• Proprietà della densità discreta di probabilità:

1) $\sum_{t_i \in S} f_X(t_i) = 1$

2) $f_X(t) \geq 0$

• Urna $\{R, R, B, B, B\}$

Estraggo 2 palle senza reimbussolamento:

- per ogni palla R : $+10$ euro
- per ogni palla B : -5 euro

X = cifra guadagnata / persa dopo aver giocato 1 volta.

Supporto: $S = \text{Supp}(X) = \{-10, +5, +20\}$

$f_X(t) = 0$ se $t \neq -10, 5, 20$

Se $t = -10$:

$$f_X(-10) = P[X = -10] = P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -10\}] = $$
$$= P[\text{"estraggo 2 B"}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Se $t = 5$:

$$f_X(5) = P[X = 5] = P[\text{"estraggo 1 B e 1 R"}] =$$
$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

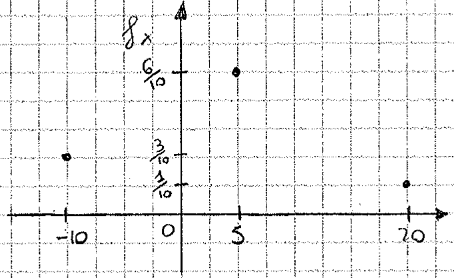
Se $t = 20$:

$$f_X(20) = P[X = 20] = P[\text{"estraggo 2 R"}] =$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Osservazione:

- $\sum f_X(t) = \frac{10}{10} = 1$ $\qquad f_X(t) \geq 0$
- Probabilità di perdere?

$$P[X < 0] = P[X \leq 0] - P[X = 0] = F_X(0) - f_X(0) =$$
$$= \frac{3}{10} - 0 = \frac{3}{10}$$



- Probabilità di vincere?

$$P[X > 0] = 1 - P[X \leq 0] = 1 - F_X(0) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

• <u>Osservazione</u> :

Sia X assolutamente continua. Sia $t \in \mathbb{R}$.

$$P[X \in (a,b]] = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,dt$$

Per calcolare la probabilità di cadere in determinati intervalli, lo potrò fare o con la funzione di ripartizione o calcolando l'integrale.

• <u>Osservazione</u> :

Sia X assolutamente continua. Sia $t \in \mathbb{R}$.

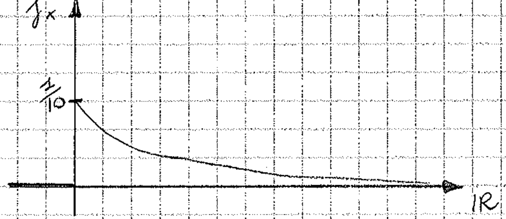
$$P[X \in [a,b]] = P[X \in (a,b]] + \underbrace{P[X=a]}_{=0} = P[X \in (a,b]]$$

• Voglio comprare una Vespa.

X = tempo vita della Vespa.

X assolutamente continua

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}} & t \geq 0 \end{cases}$$



$P[X > 10]$?

$f_X(t)$ è una funzione di densità?

1) $f_X(t) \geq 0$ ✓

2) $$\int_{\mathbb{R}} f_X(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_0^{\infty} f_X(t)\,dt =$$

$$= 0 + \int_0^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}t}\,dt =$$

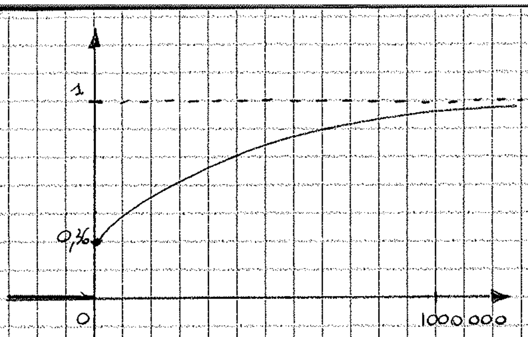
$$= \left[-e^{-\frac{1}{10}t}\right]_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^{-0} = 0 + 1 = 1 \quad ✓$$

E' una funzione di densità.

$F_X(t)$?

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\frac{t}{10}} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^t \frac{1}{10} e^{-\frac{s}{10}}\,ds = \left[-e^{-\frac{1}{10}s}\right]_0^t = 1 - e^{-\frac{t}{10}}$$



0,36 è un punto singolare, ossia c'è una probabilità non nulla che venga assunto.

• Variabili Casuali Multiple : (doppie) (o vettori casuali)

(Ω, A, P)

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad X: \omega \longmapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$

Ora consideriamo invece :

$(X,Y): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad (X,Y): \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$

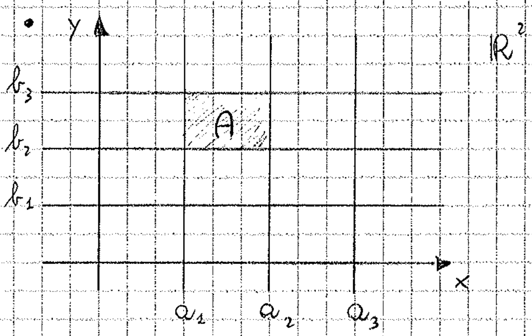
Ci vengono dunque restituiti due valori o meglio una coppia di valori.

Si parla quindi di v.c. doppie: $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, P_{(X,Y)})$

Possiamo anche in questo caso definire delle funzioni che ne descrivono il comportamento :

• Funzione di ripartizione congiunta :

Data una coppia (X,Y) allora : $F_{(X,Y)}(t,s) = P[X \leq t, Y \leq s]$



$$P[(X,Y) \in (a_1, a_2] \times (b_2, b_3]] = ?$$
$$= P[X \leq a_2, Y \leq b_3] - P[X \leq a_2, Y \leq b_2] - P[X \leq a_1, Y \leq b_3] + P[X \leq a_1, Y \leq b_2]$$
$$= F_{(X,Y)}(a_2, b_3) - F_{(X,Y)}(a_2, b_2) - F_{(X,Y)}(a_1, b_3) + F_{(X,Y)}(a_1, b_2)$$

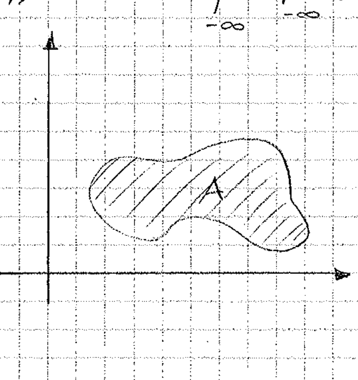
• Variabili Casuali Doppie Discrete :

Se X, e Y con supporto finito / numerabile di valori assumibili

• Variabili Casuali Doppie Assolutamente Continue :

Se esiste $f_{(X,Y)}(t,s)$ tale che :

$$F_{(X,Y)}(t,s) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} f_{(X,Y)}(u,v)\, du\, dv$$



$$P[(X,Y) \in A] = \iint_A f_{(X,Y)}(u,v)\, du\, dv$$

- Media, Valore atteso:

Se $\Phi(x) = x$ (funzione identità), la grandezza che si ottiene viene denotata come: $E(x)$: Media, Valore atteso
↳ Expected value

Dunque in questo caso:

$$E(x) = \sum_{t_i \in Supp(x)} t_i f_x(t_i) \quad \leftarrow \text{Se DISCRETA}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} t f_x(t)\, dt \quad \leftarrow \text{Se ASS. CONTINUA}$$

La media non è necessariamente uno dei valori effettivamente assumibili.
La media si troverà più vicina ai valori che "pesano" di più.

- Proprietà della media:

1) Non sempre esiste o è finita.

- N a valori t_K $K = 1 \dots \infty$

$t_K = \frac{2^K}{K}$ ← DISCRETA

$f_N(t_K) = \frac{1}{2^K}$ $\qquad f_N(t_K) \geq 0$ ✓

$$\sum_{K=1}^{\infty} f_N(t_K) = \sum_{K=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1 \quad ✓$$

$$E[N] = \sum_{t_K} t_K f_N(t_K) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2^K}{K} \cdot \frac{1}{2^K} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K}$$

È una serie divergente e quindi la media non è finita.

2) Se x è costante (cioè $P[x=a]=1$) allora $E[x] = a$.
Infatti:
$$E[x] = \sum_{t_i} t_i f_x(t_i) = a \cdot P[x=a] = a \cdot 1 = a$$

3) $E[aX+b] = a\,E[x] + b$ ← proprietà di linearità che esiste perché abbiamo a che fare con integrali e sommatorie

Domandiamoci ora quanto valgono i 3 valori attesi:

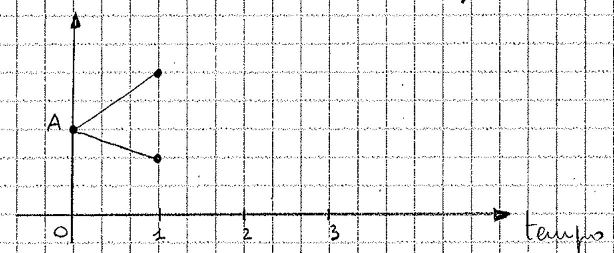
$$E[x_1] = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E[x_2] = E[x_3] = \frac{1}{3}$$

$$E[G] = 100 + 50\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 150$$

5) Data la coppia (x, y) se x e y sono stocasticamente indipendenti allora: $E[x \cdot y] = E[x] \cdot E[y]$

• Investimento della cifra A in titoli azionari.



$x_0 = A$ cifra iniziale (giorno 0)

$$x_1 = A \cdot Y_1 \quad \text{con} \quad Y_1 = \begin{cases} 1{,}2 & \text{con prob } \frac{1}{3} \\ 0{,}9 & \text{con prob } \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x_2 = (x_1) \cdot Y_2 = A \cdot Y_1 \cdot Y_2 \quad \text{con} \quad Y_2 = \begin{cases} 1{,}2 & \text{con prob } \frac{1}{3} \\ 0{,}9 & \text{con prob } \frac{2}{3} \end{cases}$$

Supponiamo che Y_1 sia indipendente da Y_2, ossia l'andamento nel giorno 2 non dipende dal giorno 1.

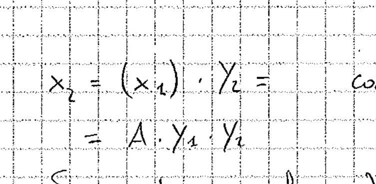
$E[x_2] = ?$

$$E[x_2] = E[A \cdot Y_1 \cdot Y_2] = A\,E[Y_1 \cdot Y_2] = A\,\underbrace{E[Y_1] \cdot E[Y_2]}_{\text{solo se indipendenti}} =$$

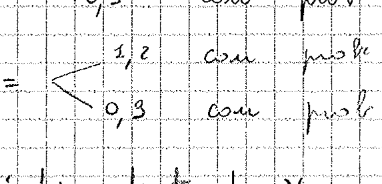
$$E[Y_1] = E[Y_2] = 1{,}2 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}9 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$$

$$E[x_2] = A \cdot E[Y_1]\,E[Y_2] = A \cdot 1 \cdot 1 = A$$

• x_1 $f_{x_1}(t)$:



x_2 $f_{x_2}(t)$:



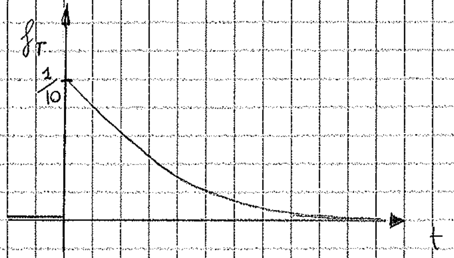
$$E[x_1] = \int_{\mathbb{R}} t\,f_{x_1}(t)\,dt = \int_1^3 t \cdot \frac{1}{2}\,dt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_1^3 = 2$$

$$E[x_2] = \int_{\mathbb{R}} t\,f_{x_2}(t)\,dt = \int_0^4 t \cdot \frac{1}{4}\,dt = \left[\frac{1}{8}t^2\right]_0^4 = 2$$

$$E[x_1] = E[x_2] \longrightarrow ?$$

• T = tempo vita Vespa

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}t} & t \geq 0 \end{cases}$$



Quanto vive mediamente la Vespa?

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} t\, f_T(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t\, \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}t}\, dt = \dots = \text{per parti} =$$

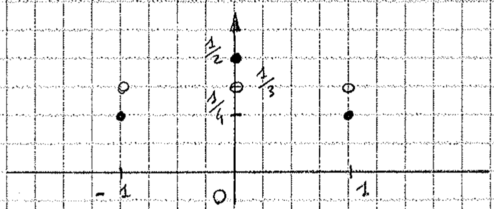
$$= +10 \cdot \left[-e^{-\infty} + e^{0}\right] = 10\,[1 - 0] = 10$$

iii) $E[X] = \int_{\mathbb{R}} t\, f_X(t)\, dt = \int_0^1 t\, 6t(1-t)\, dt =$

$$= 6 \int_0^1 [t^2 - t^3]\, dt = 6 \left\{ \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right\}_0^1 = \frac{1}{2}$$

- $\left.\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\}$ stesso supporto $\quad Supp(X) = Supp(Y) = \{-1, 0, 1\}$

$$\overset{\circ}{X} = \begin{cases} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{cases} \text{ (prob)} \qquad \overset{\bullet}{Y} = \begin{cases} -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (prob)}$$



$E[X] = \sum_{t_i} t_i\, P[X = t_i] = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$

$E[Y] = \sum_{t_i} t_i\, P[Y = t_i] = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$

$E[X] = E[Y]$ non hanno la stessa funzione ma la media è uguale.

Il loro comportamento è però diverso.

- Varianza :

Sia X una variabile casuale. Sia $E[X]$ la sua media (esistente e finita).

Consideriamo $E[\phi(X)]$ con $\phi(X) = (X - E[X])^2 = (X - a)^2$

$V[X] = E[(X - E[X])^2] = \sum_{t_i \in Supp(X)} (t_i - E[X])^2 f_X(t_i)$ ← DISCRETE

$= \int_{\mathbb{R}} (t - E[X])^2 f_X(t)\, dt$ ← ASS. CONTINUE

La varianza è "grande" quando la X può assumere, con "alta probabilità", valori lontani da $E[X]$ (ossia alta variabilità di possibili risultati).

- X $\quad f_X(t) = \begin{cases} 6t(1-t) & t \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$E[X] = \frac{1}{2}$

$$V[X] = \int_{\mathbb{R}} \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 f_X(t)\, dt = \int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 6\,t(1-t)\, dt =$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2 = \int_0^1 t^2 \cdot 6t(1-t)\, dt - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \dots = \frac{1}{20}$$

Ho preferito usare $E[X^2] - (E[X])^2$ perché mi ha semplificato i calcoli.

$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{20}} \cong 0{,}22$

Dunque il valore medio è $\frac{1}{2}$ e ci possiamo aspettare che ci si sposti da questo valore con un ordine di 0,22

4) Data X, dati due valori $a, b \in \mathbb{R}$, vale:

$V[aX+b] = a^2 V[X]$

Questo perché sommare o sottrarre una costante significa traslare ma la traslazione non può modificare la variazione di risultato.

5) Date X, Y, se sono stocasticamente indipendenti, allora:

$V[X+Y] = V[X] + V[Y]$

$V[X-Y] = V[X] + V[Y]$

DISTRIBUZIONI NOTEVOLI : (DISCRETE)

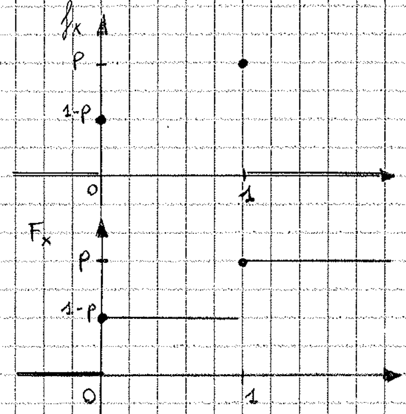
• Bernoulli :

X distribuita secondo Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$ e scriviamo $X \sim Bern(p)$ se :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{prob. } p \\ 0 & \text{prob. } 1-p \end{cases}$$

"$\sim$" non circa ma "DISTRIBUITA COME"

- $$f_X(t) = \begin{cases} p & t=1 \\ 1-p & t=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ 1-p & \text{se } t \in [0,1) \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

- $E[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$
- $V[X] = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)[p+1-p] = (1-p)p$

• Distribuzione Binomiale :

Siano $X_1, X_2 \dots X_n$ con $n \in \mathbb{N}^+$, n variabili indipendenti, di Bernoulli, di identico parametro p.

$$X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & (1-p) \end{cases} \qquad Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Y è detta distribuita secondo una binomiale di parametri $n \in \mathbb{N}^+$ e $p \in [0,1]$: $\quad Y \sim Bin(n,p)$

- $Supp(Y) = \{0, 1, \dots, n\}$
- $f_Y(t) = ?$

Sia $K \in Supp(Y)$

$P[Y=N] = ?$

$P[Y=0] = P[X_1=0] \cdot P[X_2=0] \dots P[X_n=0] = (1-p) \cdot (1-p) \dots (1-p) = (1-p)^n$

$P[Y=1] = n \cdot p\,(1-p)^{n-1}$

$P[Y=2] = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$

In generale :

$$P[Y=K] = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} = f_Y(K) \qquad \text{per } K=0,\dots,n$$

- $$F_Y(K) = P[Y \leq K] = P[Y=0] + \dots + P[Y=K] = \sum_{j=0}^{K} P[Y=j] = \sum_{j=0}^{K} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Sia Y_{50} = posizione all'istante $t = 50$

$P[Y_{50} = 25] = 0$ perché si dovrebbe trovare in una posizione pari.

$P[Y_{50} = 26] = P[Bin(50, \frac{1}{2}) = 38] = \binom{50}{38} \left(\frac{1}{2}\right)^{38} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$

• <u>Distribuzione di Poisson</u> :

E' un caso limite della distribuzione Binomiale.

Binomiale = $P[X=K] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k$

Nel far uso del binomiale si ha a che fare con i fattoriali. Dunque per numeri troppo grossi si hanno problemi di calcolo.

Per n troppo grande allora si usa la distribuzione di Poisson: una v.c. X e' detta distribuita come una Poisson di parametro λ, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda > 0$, Supp(X) = $\mathbb{N}$ (incluso 0) :

$$P[X=K] = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \qquad K \in \mathbb{N}$$

Scriviamo : $X \sim Poiss(\lambda)$.

E' detta anche <u>distribuzione degli eventi rari</u>.

• <u>Proprieta'</u> :

Sia $X \sim Poiss(\lambda)$.

- $E[X] = \sum_{K=0}^{\infty} K \cdot P[X=K] = \sum_{K=0}^{\infty} K \cdot \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\lambda^K}{(K-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\lambda^{K'+1}}{K'!} =$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{K'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{K'}}{K'!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

con $K' = K-1$

Questo risultato si poteva anche ottenere osservando che:

$X \sim Bin(n,p) \longrightarrow X \sim Poiss(\lambda)$

$E[X] = n \cdot p \longrightarrow E[X] = \lambda$ poiche' $n \cdot p = \lambda$

- $V[X] = n \cdot p(1-p) = np - np^2$ ← per una Binomiale.

Se $\xrightarrow[n \cdot p = \lambda]{n \to \infty}$: $\lambda - \lambda \cdot p = \lambda - 0 = \lambda$

$V[X] = \lambda$ ← per una Poisson

Quindi, se $X \sim Poiss(\lambda) \Rightarrow E[X] = \lambda = V[X]$

- Siano $X_1 \sim Poiss(\lambda_1)$ e $X_2 \sim Poiss(\lambda_2)$ con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

X_1 e X_2 indipendenti.

Si consideri : $S = X_1 + X_2 \Rightarrow S \sim Poiss(\lambda_1 + \lambda_2)$

IMPORTANTE $\rightarrow$ • Siano: $X_1 \sim Poiss(\lambda_1)$, $X_2 \sim Poiss(\lambda_2)$ } indipendenti

X_1 chiamate di maschi

X_2 = = femmine

$P[X_1 = K \mid X_1 + X_2 = n]$ ossia calcolare la probabilità che nelle n chiamate K siano maschi.

$K = 0, \dots, n$

$$P[X_1 = K \mid X_1 + X_2 = n] = \frac{P[X_1 = K, X_1 + X_2 = n]}{P[X_1 + X_2 = n]} =$$

$$= \frac{P[X_1 = K, X_2 = n-K]}{P[X_1 + X_2 = n]} = \frac{P[X_1 = K]\, P[X_2 = n-K]}{P[X_1 + X_2 = n]} =$$

$$= \frac{\frac{\lambda_1^K}{K!} \cancel{e^{-\lambda_1}} \cdot \frac{\lambda_2^{n-K}}{(n-K)!} \cancel{e^{-\lambda_2}}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}} = \frac{n!}{K!(n-K)!} \cdot \underbrace{\frac{\lambda_1^K}{(\lambda_1+\lambda_2)^K}}_{p^K} \cdot \underbrace{\frac{\lambda_2^{n-K}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n-K}}}_{(1-p)^{n-K}} =$$

$$= \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} \sim Bin(n, p)$$

- Proprietà di Non-Memoria:

Sia $X \sim Geo(P)$. Siano $m, K \in \mathbb{N}^+$.

Allora:

$P[X = K+m \mid X > K] = P[X = m]$

Tutto quello che è successo fino a quel momento non influisce sul futuro.

- Urna di componenti elettronici.

3 funzionanti, 2 guasti

Estraggo con reimbussolamento.

N = numero estrazioni per trovare un funzionante.

$$P = \begin{cases} \frac{3}{5} & \text{funzionante} \\ \frac{2}{5} & \text{guasto} \end{cases}$$

i) $P[N \geq 10] = (1-p)^{K-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^9$

- Proprietà:

- La somma di geometriche non è geometrica.
- Siano $X_1 \sim Geo(p_1)$ e $X_2 \sim Geo(p_2)$

  $M = \min(X_1, X_2)$

  Allora: $M \sim Geo(x_1 + x_2 - x_1 x_2)$

- Lancio un dado fino a quando esce 4 o 6.

Sia N = numero di lanci

N_1 = numero lanci fino uscita 4

N_2 = numero lanci fino uscita 6

$N = \min(N_1, N_2)$

$N_1 \sim Geo\left(\frac{1}{6}\right)$ $\qquad N_2 \sim Geo\left(\frac{1}{6}\right)$

$$P[N \geq 2] = P[N_1 \geq 2, N_2 \geq 2] = P[N_1 \geq 2] \cdot P[N_2 \geq 2] = \left(\frac{5}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Oppure $N \sim Geo\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36}\right) \sim Geo\left(\frac{11}{36}\right)$

$$P[N \geq 2] = \left(1 - \frac{11}{36}\right)^{2-1} = \left(\frac{25}{36}\right)$$

• Distribuzione Ipergeometrica:

Supponiamo di avere degli oggetti di due tipologie: A, B.

n_A = oggetti di tipo A $\qquad$ n_B = oggetti di tipo B

Estraiamo n oggetti

X = n° oggetti di tipo A estratti.

$Supp(X) = \{ K : K \in [\max(0, n - n_B), \min(n, n_A)] \}$

• Urna $n_A = 3$ $\qquad$ $n_B = 3$

estraggo = 4

X = estratte di tipo A

$Supp(X) = \{1, 2, 3\}$

X definita in questo modo si dice: $X \sim Iperg(n_A, n_B, n)$

- $P[X = K] = \dfrac{\binom{n_A}{K}\binom{n_B}{n-K}}{\binom{n_A+n_B}{n}}$ $\qquad$ $K \in Supp(X)$

• Cesta: 10 componenti < 3 guasti, 7 funzionanti

Estraggo 4 componenti.

Qual è la probabilità che sui 4 estratti almeno 3 siano funzionanti? (senza reimbussolamento)

X = n° componenti funzionanti estratti

$X \sim Iperg(7, 3, 4)$

$P[X \geq 3] = P[X = 3] + P[X = 4] = \dfrac{\binom{7}{3}\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}} + \dfrac{\binom{7}{4}\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}}$

Si poteva raggiungere lo stesso risultato usando la probabilità condizionata.

- $E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_n] = n \cdot \dfrac{n_A}{n_A + n_B}$

Videolezione 18:

DISTRIBUZIONI NOTEVOLI CONTINUE:

• Proprietà:

Valida anche per le distribuzioni notevoli discrete.

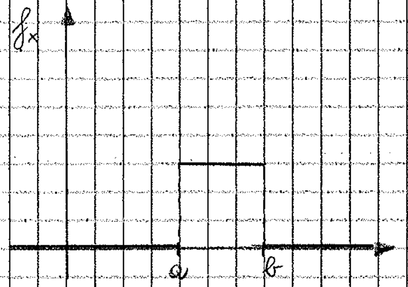
Sia X una v.c. assolutamente continua definita su $\mathbb{R}^+$.

Sia f la sua densità.

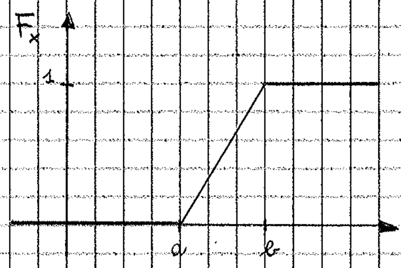
Allora: $$E[X] = \int_0^{\infty} t\, f(t)\, dt = \int_0^{\infty} P[X > t]\, dt$$

• Distribuzione Uniforme:

$X \sim U[a, b]$ è definita se è di questo tipo:



$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a, b] \end{cases}$$



$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ \frac{1}{(b-a)}(t-a) & \text{se } t \in [a, b] \\ 1 & \text{se } t > b \end{cases}$$

$$- E[X] = \int_a^b t \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{a+b}{2}$$

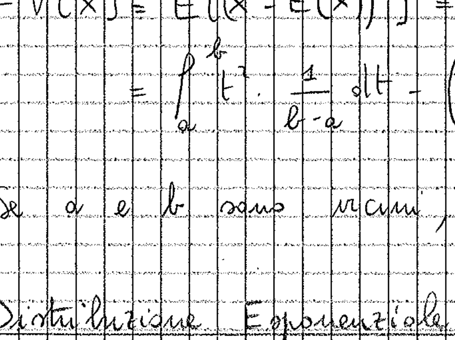
$$- V[X] = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_X(t)\, dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \int_a^b t^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \dots = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Se a e b sono vicini, la varianza è molto piccola e viceversa.

• Distribuzione Esponenziale:

$X \sim Exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$, se: $$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du = \int_0^t f_X(u)\, du =$$

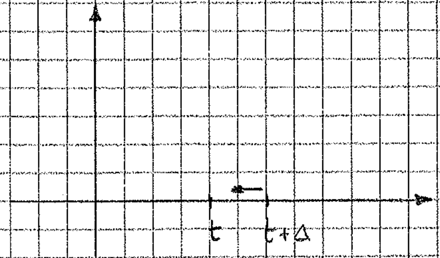
$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda u}\, du = \dots = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{per } t \geq 0$$

$$F_X(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

• Proprietà:
La distribuzione esponenziale ha un TASSO DI RISCHIO costante.

• Tasso di Rischio:

$$r(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} P[t < X \le t+\Delta \mid X > t]$$



Se $\Delta \to 0$ ottengo una probabilità istantanea di guasto.

Questo mi dice qual è la probabilità che avendo sopravvissuto fino a t mi guasti in t.

Possiamo riscrivere come:

$$r(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \frac{P[t < X \le t+\Delta \mid X > t]}{P[X > t]} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \frac{P[t < X \le t+\Delta]}{\overline{F}(t)} =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \frac{F(t+\Delta) - F(t)}{\overline{F}(t)} \overset{(H)}{=} \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$$

Dunque:

$$r(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$$

Nel caso particolare di $X \sim Exp(\lambda)$: $\quad r(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \leftarrow$ cost.

• Relazioni tra $r(t)$ e $\overline{F}(t)$:

$$r(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{d}{dt} \log(\overline{F}(t))$$

$$\int_0^t r(u)\,du = \int_0^t \left(-\frac{d}{du} \log(\overline{F}(u))\right) du = -[\log(\overline{F}(t)) - \log(\overline{F}(0))] =$$

$$= -\log(\overline{F}(t)) + \log 1 = -\log(\overline{F}(t)) \qquad \text{se } X \ge 0$$

Dunque: $\overline{F}(t) = e^{-\int_0^t r(u)\,du}$

• Proprietà:
Se il componente si usura nel tempo, il tasso di rischio sarà crescente.

Videolezione 19:

- Distribuzione Gamma:

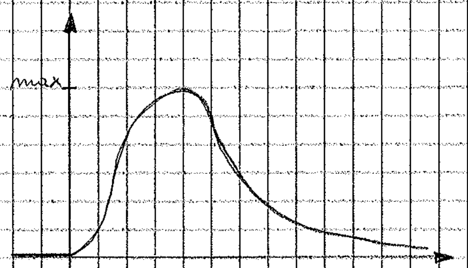
La funzione gamma e' definita come:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \qquad \text{con } \alpha > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} - \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \\ - \Gamma(1) = 1 \\ - \Gamma(n) = (n-1)! \end{array}\right\} \text{con } n \in \mathbb{N}^+$$

Dunque: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ con $\alpha, \lambda > 0$ se:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



Risultano essere particolarmente interessanti se $\alpha = n \in \mathbb{N}^+$ (distribuzioni di Erlang):
la gamma e' la distribuzione di una somma di esponenziali indipendenti e di identico parametro λ.
Ossia siano $X_1, X_2, \dots X_n$ indipendenti e $X_i \sim Exp(\lambda)$, allora:

$X_1 + X_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$

$X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

$X_1 \sim \Gamma(1, \lambda) \equiv Exp(\lambda)$

- Lavoro da compiere singolarmente.
Due operai con tempo di rottura $T_1, T_2 \sim Exp(\lambda)$
$\lambda = \frac{1}{5}$.
Necessita di 12 ore per concludere il lavoro.
Qual e' la probabilita' di concludere il lavoro?

$$P[\text{riesco concludere}] = P[T_1 + T_2 > 12] = P[S > 12] =$$

$$= \int_{12}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^1}{1} dt = e^{-\lambda t}(1+\lambda t) = e^{-\frac{12}{5}}\left(1 + \frac{12}{5}\right) = \frac{17}{5} e^{-\frac{12}{5}}$$

• $X \sim N(10, 16)$ $\quad \mu = 10 \quad \sigma^2 = 16 \quad \sigma = 4$

i) $P[X \leq 15] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right] = P\left[Z \leq \frac{15-10}{4}\right] =$

$= P\left[Z \leq \frac{5}{4}\right] = P[Z \leq 1,25] = 0,894$

ii) $P[X < 8] = P\left[\frac{X-\mu}{4} < \frac{8-10}{4}\right] = P\left[Z < -\frac{1}{2}\right] =$

$= P\left[Z > \frac{1}{2}\right] = 1 - P[Z \leq 0,5] = 1 - 0,691 = 0,31$

iii) $P[|X-10| > 3] = P[(X<7) \cup (X>13)] = P[X<7] + P[X>13] =$

$= P\left[Z < \frac{7-10}{4}\right] + P\left[Z > \frac{13-10}{4}\right] =$

$= P[Z < -0,75] + P[Z > 0,75] =$

$= 2P[Z > 0,75] = 2(1 - P[Z < 0,75]) =$

$= 2(1 - 0,77) = 2 \cdot 0,23 = 0,46$

• Proprietà:

Sia $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ indipendenti.

$S = X_1 + X_2$.

Allora: $S \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

• $X_1, X_2 \sim N(1, 16)$

i) $P[X_1 < 2, X_2 < 2] = P[X_1 < 2]\,P[X_2 < 2] = (P[X_1 < 2])^2 =$

$= \left(P\left[Z < \frac{2-1}{4}\right]\right)^2 = \left(P\left[Z < \frac{1}{4}\right]\right)^2 = (0,599)^2 \cong 0,36$

ii) $P[X_1 + X_2 < 4] = P[S < 4] =$ con $S \sim N(2, 32)$

$= P\left[\frac{S-2}{\sqrt{32}} < \frac{4-2}{\sqrt{32}}\right] = P[Z < 0,35] = 0,63$

SOMME :

• Consideriamo 2 dadi equilibrati.

X_1 = risultato dado rosso
X_2 = // // verde
} indipendenti

$S = X_1 + X_2$ S ?

$Supp(S) = \{2, ..., 12\}$

$P[S=2] = ? = P[X_1 = 1, X_2 = 1] = P[X_1 = 1] \cdot P[X_2 = 1] =$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$P[S=7] = P[X_1 = 1, X_2 = 6] + P[X_1 = 2, X_2 = 5] + ... =$
$= \sum_{i=1}^{6} P[X_1 = i, X_2 = 7-i] =$
$= \sum_{i=1}^{6} P[X_1 = i] P[X_2 = 7-i] = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

In generale :

$$P[S=n] = \sum_{i}^{\infty} P[X_1 = i] \cdot P[X_2 = n-i]$$

Se X_1, X_2 sono continue anziché discrete :
Consideriamo : $X_i \sim F_i$ con densità f_i (indipendenti)
$S = X_1 + X_2$

$f_S(t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(s) f_2(t-s)\, ds \longrightarrow$ convoluzione

• X_1 = risultato 1° moneta $\begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{cases}$

X_2 = risultato 2° moneta $\begin{cases} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{cases}$

$S = X_1 + X_2 = ?$
$Supp(S) = \{0, 1, 2\}$

$P[S=n] = \sum_{i} P[X_1 = i] P[X_2 = n-i]$

$P[S=1] = P[X_1 = 0] P[X_2 = 1-0] + P[X_1 = 1] P[X_2 = 1-1] + ... =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$