NUMERO: 1188

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Parisi

MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc..

Prof. Rolando

Analisi II : Sergio Rolando — Esercitazioni : Michela Guida

Calcolo numerico : Letizia Scuderi — Esercitazioni : Silvia Falletta

Materiale calcolo numerico nella cartella Letizia Scuderi

Esame : 4 es Analisi II — da fare min 10 pt
2 es Calcolo numerico + es matlab — da fare min 5 pt

Lezioni : Finite le ore di calcolo numerico aumentano le ore di Analisi (ore variabili)

Ricevimento : Ven ore 13 — Giov ore 16 => Rolando
Dip. Matematica (avvisare prima)

Email : sergio.rolando@polito.it — michela.guida@polito.it

Sito Web : link nel portale o materiale.
Consultare regolarmente : - Avvisi - Calendario
- Slide - Esercitazioni

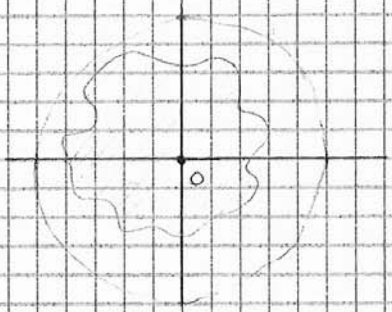
Materiale :
* - Slide (sul sito) e dispense (sul sito)
* - Canuto, Tabacco - Analisi matematica II (non tutto il suo programma va fatto)
* - Esercizi dal sito
* - Lancelotti - Esercizi di Analisi Matematica II
- Mascarello, Mazzi - Temi d'esame di Analisi Matematica II

- Insieme chiuso $A \subseteq \mathbb{R}^n$

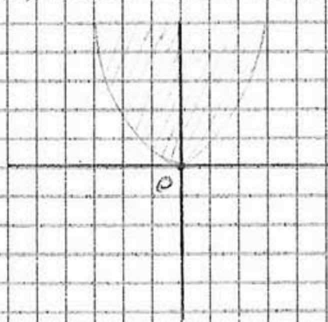
A è chiuso se $A = \bar{A}$, cioè se $\partial A \subseteq A$ (contiene tutta la sua frontiera)

- Insieme limitato: $A \subseteq \mathbb{R}^n$

A è limitato se $\exists r > 0$, $A \subseteq B_r(0)$ centrato nell'origine



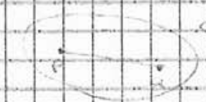
Insieme limitato



Insieme illimitato

- Insieme convesso: $A \subseteq \mathbb{R}^n$

A è convesso se $\forall P, Q \in A$ $\overline{PQ} \subseteq A$



- Insieme compatto: $A \subseteq \mathbb{R}^n$

A è compatto se è chiuso e limitato

- Insieme connesso: $A \subseteq \mathbb{R}^n$

A è connesso (per archi) se:

$\forall P, Q \in A$ esiste un arco che unisce P e Q tutto contenuto in A.

- Arco:

È l'immagine di una $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua e tra $\gamma(a) = P$ e $\gamma(b) = Q$

FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI

$f := \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$P = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$

punto — scalare reale

Per $n = 1$ $\longrightarrow$ f reale di 1 variabile

$n > 1$ $\longrightarrow$ f reale di n variabile o campo scalare

$\boxed{\text{Ripassare continuità e derivabilità}}$ ✓

Lezione 2:

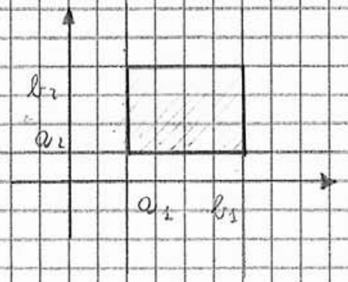
MISURA SECONDO PEANO-JORDAN IN $\mathbb{R}^n$:

Quando questa misura esiste, è definita tramite approssimazione.

- Intervallo n-Dimensionale:

$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Per $n = 2$:



$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

- Misura:

Chiamiamo misura di I il numero: $|I| := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) \geq 0$

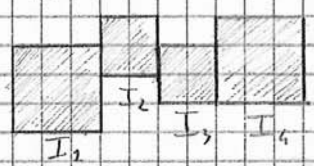
Per $n = 2$: rettangolo di area $|I|$

Per $n = 3$: parallelepipedo di volume $|I|$

- Plurintervallo n-dimensionale:

E' l'unione di N intervalli n-dimensionali I_k con interni a due a due disgiunti.

Si definisce come: $P = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$



Per $n = 2$ (o 3), allora $|P|$ = area (o volume) della figura P

- Misure interna ed esterna:

Si definiscono come: $\mu_*(A) := \sup |P|$

$\mu^*(A) := \inf |P|$

rispettivamente, e risulta: $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A)$

- Insieme quadrabile:

Se $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ si dice che A è misurabile secondo Peano-Jordan o quadrabile ed il numero $|A| = \mu_*(A) = \mu^*(A) \geq 0$ è detto misura di A (area o volume)

- Insiemi non misurabili:

Ad esempio: $A := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x, y \in \mathbb{Q}\}$ ossia tutti i punti razionali del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Essendo che non tutti i punti appartengono ad A, allora l'insieme non è misurabile

Dunque se l'integrale inferiore e superiore coincidono si dice che f è integrabile su A (secondo Riemann); il loro valore comune è detto integrale doppio di f su A. E' indicato come:

$$\int_A f \qquad \int_A f(x,y)\,dA \qquad \int_A f(x,y)\,dx\,dy \qquad \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

- Funzioni non integrabili:

Ad esempio la funzione di Dirichlet: Sia $f: A = [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definita $\forall (x,y) \in A$ da:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x,y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Non è integrabile poiché: $s(f,\sigma) = 0$ e $S(f,\sigma) = 1$

- Calcolo di aree:

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ quadrabile, allora: $\text{area}(A) = \int_A dx\,dy = \iint_A 1 \cdot dx\,dy$

INTEGRALE TRIPLO:

In modo del tutto analogo, si definisce la nozione di integrabilità secondo Riemann su insiemi $A \subset \mathbb{R}^3$ quadrabili di funzioni $f: A \to \mathbb{R}$ limitate su A. L'integrale triplo di f su A si indica con:

$$\int_A f \qquad \int_A f(x,y,z)\,dA \qquad \int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- Calcolo di volumi:

Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ quadrabile, allora: $\text{vol}(A) = \iiint_A 1 \cdot dx\,dy\,dz = \int_A dx\,dy\,dz$

CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI: (vedi slide)

- Se $f \geq 0$ quasi ovunque su A, allora per ogni $B \subset A$ risulta:

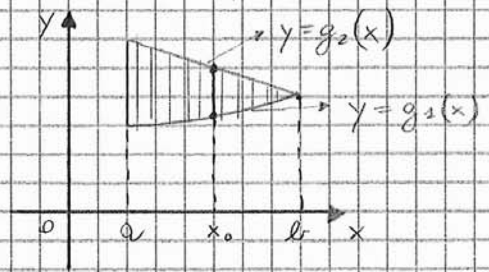
$$\int_B f \leq \int_A f$$

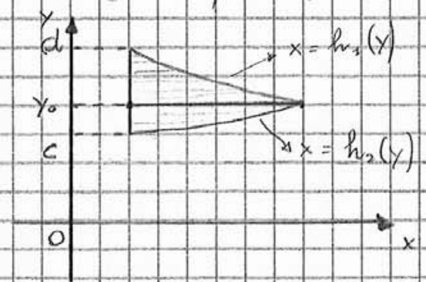
CALCOLO DI INTEGRALI DOPPI:

- Formule di riduzione a due integrazioni successive:

Definiamo gli insiemi di integrazione:

- $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice verticalmente / orizzontalmente convesso (oppure semplice rispetto all'asse y/x) se è la parte di piano compresa tra i grafici di due funzioni continue della variabile x/y definite su un intervallo chiuso e limitato (compatto).





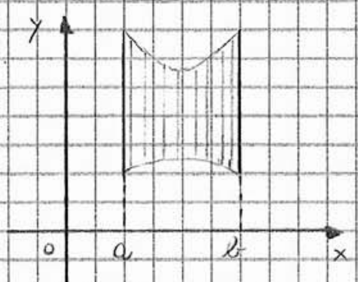
In formule: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

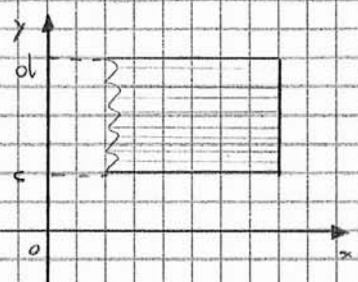
In altri termini, A è verticalmente convesso se:
- la proiezione di A sull'asse è un intervallo compatto $[a,b]$
- ogni retta verticale $x = x_0 \in [a,b]$ interseca A in un segmento verticale o punto (caso degenere).
- gli estremi di questi segmenti formano il grafico di due funzioni continue

Allo stesso modo per A orizzontalmente convesso.

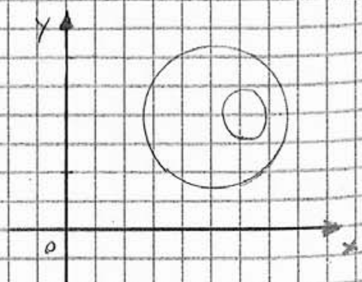
Un insieme A può essere solo orizzontalmente, solo verticalmente, sia verticalmente che orizzontalmente o non convesso.



Verticalmente convesso

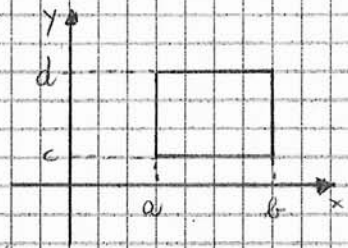


Orizzontalmente convesso



Non convesso

- Casi particolari:



- $\displaystyle\int_{[a,b]\times[c,d]\,=\,\text{rettangolo}} f(x,y)\,dx\,dy$

per orizzontali / per orizzontali

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

- $\displaystyle\int_{[a,b]\times[c,d]\,=\,\text{rettangolo}} \alpha(x)\,\beta(y)\,dx\,dy = \int_a^b \alpha(x)\,dx \cdot \int_c^d \beta(y)\,dy$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 246

Se: $\phi : \underset{(\rho,\vartheta)}{E} \to \underset{(x,y)}{A}$ biettiva (cambio coordinate polari) con

$E = (0,+\infty) \times [\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi)$ e $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$

$$\det J_\phi(\rho,\vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta = \boxed{\rho > 0} \quad \forall \rho,\vartheta \in E$$

• Teorema:

Siano:

• $\phi : E \to A$ un cambio di coordinate tra due regioni quadrabili $E, A \subseteq \mathbb{R}^2$ di equazioni:

$$\begin{cases} x = \phi_1(u,v) \\ y = \phi_2(u,v) \end{cases}$$

• $f : A \to \mathbb{R}$ limitata e continua. Allora:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))\,|\det J_\phi(u,v)|\,du\,dv$$

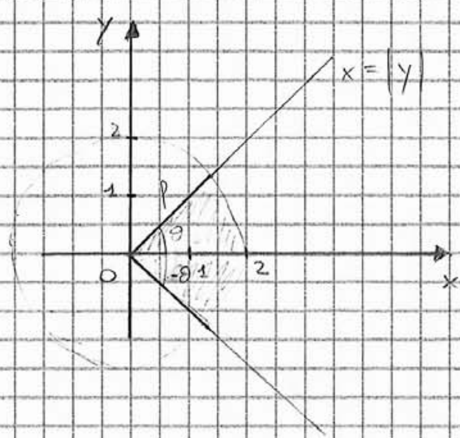
Formalmente:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \quad \text{e} \quad dx\,dy = |\det J_\phi(u,v)|\,du\,dv$$

• Esempio:

$$\int_A (x-y)\,dx\,dy$$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \le 4}_{\text{cerchio } C(0,0),\ R=2},\ \underbrace{x \ge |y|}_{\text{punti a dx di } x=|y|}\}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 246

(t, ϑ) coordinate ellittiche

$\phi : E \to A$

$E = (0, +\infty) \times [\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi]$ e $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

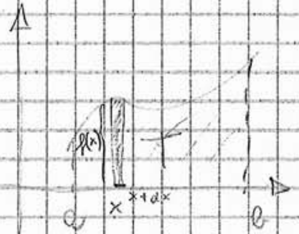
$\det J_\phi(t, \vartheta) = a \cdot b \cdot t$

- Interpretazione geometrica (fisica) delle formule di integrazione integrali doppi:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

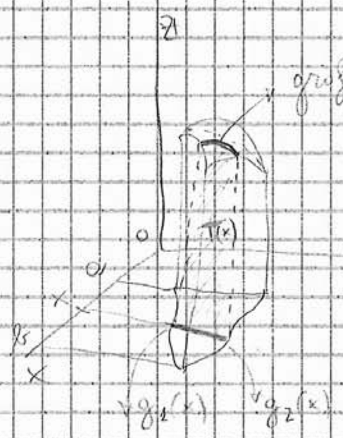
f continua su A

A verticalmente convesso e compatto



$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{altezza}} \underbrace{dx}_{\text{lunghezza infinitesima}} = \text{area}(T) = \text{integrale di aree infinitesime}$$

Allo stesso modo per gli integrali doppi:



$$\int_a^b \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy}_{\text{area } T(x)}\,dx = \int_a^b \underbrace{\text{area } T(x)}_{\text{area}} \underbrace{dx}_{\text{lunghezza infinitesima}} =$$

$=$ integrale di volumi infinitesimi $=$

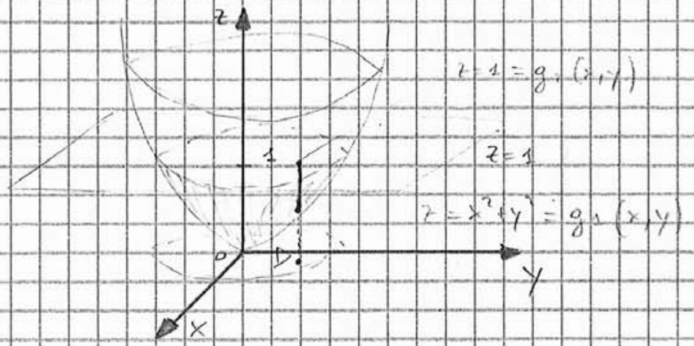
$=$ volume totale

• Esempio: Calcolare $\iiint_A z^2 \, dx\, dy\, dz$ dove

$$A=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2}_{g_1(x,y)} \le z \le \underbrace{1}_{g_2(x,y)}\Big\}$$

D è la proiezione di A sul piano xy

$z=x^2+y^2$ $\qquad z=1$



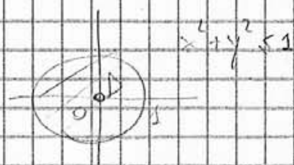
$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$ => cerchio di raggio 1

$$\iiint_A z^2\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{1} z^2\, dz\right) dx\, dz = \iint_D \left[\frac{z^3}{3}\right]_{x^2+y^2}^{1} dx\, dy =$$

$$= \iint_D \frac{1}{3}\left(1-(x^2+y^2)^3\right) dx\, dy =$$

Passiamo a coordinate polari:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta & \vartheta\in[0,2\pi) \\ y=\rho\sin\vartheta & \rho\in(0,1] \end{cases}$$



$$=\frac{1}{3}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^6)\,\rho \; d\rho\, d\vartheta = \frac{1}{3}\int_0^1 \rho-\rho^7\, d\rho \int_0^{2\pi} 1\, d\vartheta =$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^8}{8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_A z^2 \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} z^2 \, dx\,dy \right) dz = \int_0^1 z^2 \underbrace{\left(\iint_{D_z} 1 \, dx\,dy \right)}_{area(D_z) = \pi z} dz =$$

$$= \int_0^1 \pi z^3 \, dz = \pi \left\{ \frac{z^4}{4} \right\}_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

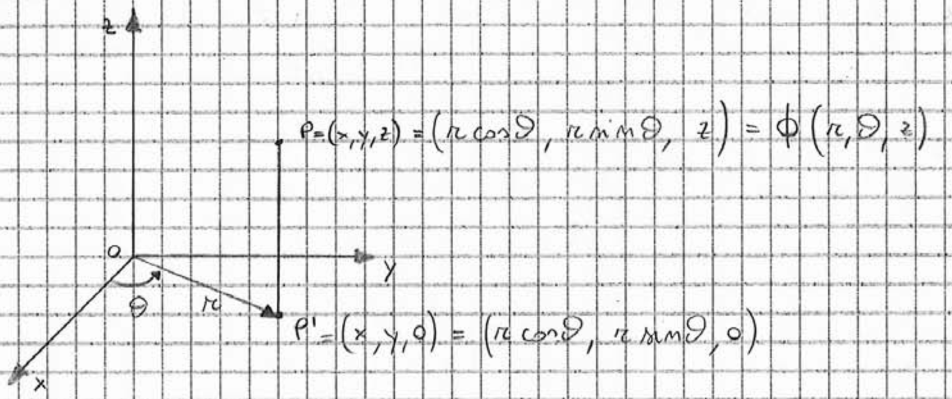
- Formule di integrazione per sostituzione:

Essendo un campo vettoriale e non più un campo scalare come nel piano, ϕ si rappresenta mediante 3 equazioni:

$$\phi : \begin{cases} x = \phi_1(u, v, w) \\ y = \phi_2(u, v, w) \\ z = \phi_3(u, v, w) \end{cases} \qquad e \qquad dx\,dy\,dz = \left| \det J_\phi(u, v, w) \right| du\,dv\,dw$$

Quindi come per il piano ma con un cambio di coordinate in più.

• Coordinate cilindriche:



$$\phi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h \end{cases}$$

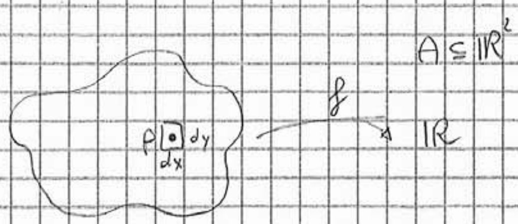
$\phi : E \to A$ cambio di coordinate, $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{asse\ z\}$, $E = \overset{r}{(0, +\infty)} \times \overset{\theta}{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]} \times \overset{h}{\mathbb{R}}$

$$J_\phi(r, \theta, h) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r > 0 \qquad \forall (r, \theta, h) \in E$$

Il passaggio a coordinate cilindriche trasforma cilindri, gusci cilindrici e loro spicchi in PARALLELEPIPEDI

Lezione 7

SIGNIFICATO FISICO E PROBABILISTICO DELL'INTEGRALE: (Vedi slides)



$f(P)$ = densità di P

$dx\,dy$ = area infinitesima contenente P, cioè tale che f sia pressoché costante su $dx\,dy$.

Se l'area è costante allora posso approssimare la funzione con $f(P)$

Dunque: $f(P)\,dx\,dy$ = massa dell'elemento infinitesimo $dx\,dy$

Allora: $\int_A f(P)\,dx\,dy$ = somma integrale di contributi infinitesimi =
= quantità totale, massa totale di A

BARICENTRO E MOMENTI D'INERZIA:

Sia: $P_k = (x_k, y_k)$ con $k = 1, \dots, n$ di masse μ_k

Il baricentro:

$$G = (\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{con} \quad \bar{x}_i = \frac{\int_A x_i\,\mu(P)\,dA}{\underbrace{\int_A \mu(P)\,dA}_{\text{massa}}} \quad \text{e} \quad \bar{y}_i = \frac{\int_A y_i\,\mu(P)\,dA}{\underbrace{\int_A \mu(P)\,dA}_{\text{massa}}}$$

In caso di μ omogeneo:

$$\bar{x}_i = \frac{\mu\int_A x_i\,dA}{\mu\int_A x_i\,dA} = \frac{1}{|A|}\int_A x_i\,dA$$

$$\bar{y}_i = \frac{\mu\int_A y_i\,dA}{\mu\int_A y_i\,dA} = \frac{1}{|A|}\int_A y_i\,dA$$

Il momento d'inerzia rispetto l'origine:

$$I_0 := \int_A |d(P,O)|^2\,\mu(P)\,dA = \int_A (x_1^2 + \dots + x_n^2)\,\mu(x_1, \dots, x_n)\,dA$$

Per $n = 2$:

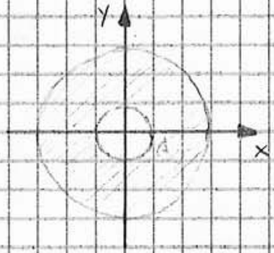
$$I_x = \int_A y^2\,\mu(x,y)\,dA \qquad I_y = \int_A x^2\,\mu(x,y)\,dA \qquad I_0 = \int_A (x^2+y^2)\,\mu(x,y)\,dA$$

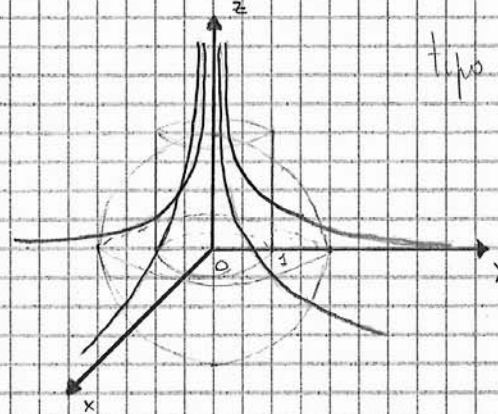
• Sia $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$. Calcolare $\int_A \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$

$z=\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ è la rotazione attorno all'asse z di:

$$\begin{cases} z=\frac{1}{|y|^\alpha} \\ x=0 \end{cases}$$

tipo vulcano





$$\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,dx\,dy \overset{def}{=} \lim_{r\to+\infty} \int_{A\cap B_r(0)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} =$$

Cambio di coordinate (polari):

$$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho\in[1,r] \\ \vartheta\in[0,2\pi] \end{matrix}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^r \frac{1}{(\rho^2)^{\alpha/2}}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_1^r \rho^{1-\alpha}\,d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi\left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_1^r =$$

$$= \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(r^{2-\alpha}-1\right)$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\frac{2\pi}{2-\alpha}\left(r^{2-\alpha}-1\right) = \begin{cases} +\infty & 2-\alpha>0, \Rightarrow \alpha<2 \\ \frac{2\pi}{\alpha-2} & 2-\alpha<0, \Rightarrow \alpha>2 \end{cases}$$

RICHIAMI SULLE SUCCESSIONI : (vedi slide)

- Una successione numerica è una funzione $a: n \to a(n) \in \mathbb{R}$ con dominio $\mathbb{N}$ o un sottoinsieme del tipo $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$

  La successione viene indicata con $(a_n)_{n \geq n_0}$

- Un limite di una successione è:
  un predicato $p(n)$ dipendente da una variabile $n \in \mathbb{N}$ è vero definitivamente se $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $p(n)$ è vero $\forall n > N$

- Una successione $(a_n)_{n \geq n_0}$ è:
  - convergente ad $\ell \in \mathbb{R}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell\right)$ se $\forall \varepsilon > 0$ risulta: $|a_n - \ell| < \varepsilon$
    ossia $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, \ell) = 0$

    Ricordiamo che: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ se e solo se $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$
  - divergente a $\pm\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty\right)$ se $\forall M > 0$ risulta: $a_n > M$ e viceversa per $-\infty \Rightarrow a_n < M$
  - indeterminata altrimenti
- Se due successioni sono uguali da un certo punto in poi, allora le due successioni sono uguali

- Teorema successione monotona:
  Ogni successione monotona ammette limite e si ha:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\limits_n a_n & (\text{finito}/+\infty) \text{ se } a_n \text{ crescente} \\ \inf\limits_n a_n & (\text{finito}/-\infty) \text{ se } a_n \text{ decrescente} \end{cases}$$

La crescenza (decrescenza) di una successione (a_n) equivale a:

$$\forall n, \quad a_n \leq a_{n+1} \qquad (a_n \geq a_{n+1})$$

ossia è sufficiente confrontare il generico termine con il successivo.

SOTTO SUCCESSIONI : (vedi slide)

- Teorema successioni irregolari:

Se a_n ammette due sottosuccessioni regolari (a_{n_k}) e $(a_{n'_k})$ tali che $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim_{k\to\infty} a_{n'_k}$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste

SERIE NUMERICHE (vedi slide)

Sta ad indicare un addizione infinita di termini. Il risultato, se esiste, si chiama somma.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Per attribuire un risultato alla serie, faccio delle somme parziali $(S_N)_{N\geq 0}$:

$$S_0 := \sum_{n=0}^{0} a_n = a_0$$

$$S_1 := \sum_{n=0}^{1} a_n = a_0 + a_1$$

$$\vdots$$

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + (a_{N-1}) + a_N$$

Se esiste: $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ (finito o infinito) si assume S come risultato:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \quad = \text{somma della serie}$$

La serie:
- converge ad S se $S \in \mathbb{R}$
- diverge positivamente se $S = +\infty$
- diverge negativamente se $S = -\infty$

Se il $\lim_{N\to\infty} S_N$ non esiste la serie è indeterminata (o irregolare) (o oscillante).

In sintesi:
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \begin{cases} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=n_0}^{N} a_n & \text{se tale limite esiste (finito o infinito)} \\ \text{indeterminata} & \text{se tale limite non esiste} \end{cases}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \quad \forall N$$

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

Dunque la serie di Mengoli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (converge a 1)

- Una serie telescopica una serie il cui termine generale a_n è la differenza di due termini consecutivi, ossia del tipo:

$$a_n = b_n - b_{n+1} \quad o \quad a_n = b_{n+1} - b_n$$

- $\sum_{n=0}^{N} (-1)^n$

$$S_N = (-1)^0 + (-1)^1 + \dots + (-1)^N = 1 - 1 + 1 + \dots + (-1)^N = \begin{cases} 1 & N \text{ pari} \\ 0 & N \text{ dispari} \end{cases}$$

Dunque S_N non ha limite e allora
$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n =$ indeterminato

STUDIO DEL CARATTERE DI UNA SERIE:

- Il carattere di una serie non cambia alterando un numero finito di termini.
  La loro somma è però differente.
  Se mi interessa solo il carattere della serie, posso non considerare il suo indice iniziale.
  La somma di una serie convergente dipende da tutti i suoi termini.

- $$\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\sum_{n=2}^{N} x^n + 1 + x}_{n=0} - 1 - x \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{n=0}^{N} x^n \right) - 1 - x \right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{n=0}^{N} x^n \right] - 1 - x = \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{x^2}{1-x}$$

- Se una serie converge, allora il termine generale tende a zero.
$$\sum_{n}^{\infty} a_n \text{ converge allora } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Non vale il viceversa.
Posso dire però che se: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ allora $\sum_{n}^{\infty} a_n$ non converge

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? se no, non converge; se sì, non so

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$$

Dunque $\lim |a_n| \neq 0$ e la serie non converge poiché non soddisfa la condizione necessaria della convergenza.

Il criterio del confronto si può applicare anche se $0 \leq a_n \leq b_n$ vale solo definitivamente.

Bisogna disporre di serie dal carattere noto con cui confrontare, come ad esempio la serie geometrica oppure la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

serie ARMONICA, GENERALIZZATA se $\alpha \neq 1$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

$a_n = \dfrac{\log n}{n} \to 0$ può convergere

$a_n = \dfrac{\log n}{n} \geq \dfrac{1}{n} = b_n$

$\log n \geq 1 \quad \forall n \geq 3 \implies \dfrac{\log n}{n} \geq \dfrac{1}{n} \quad \forall n \geq 3$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $+\infty$ $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge per confronto

Se $a_n, b_n \geq 0$ e $a_n = o(b_n)$, allora risulta $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente e quindi posso applicare il teorema del confronto.

- Criterio del confronto asintotico: $\leftarrow$ equigrandi $= \times \implies a_n \asymp b_n$

Se $a_n\ b_n \geq 0$ soddisfano $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$ finito e non nullo, allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)\left(n-\frac{5}{2}\right)}$$

$a_n \geq 0$ definitivamente $\forall n \geq 3$ poiché $\frac{5}{2} = 2,5$

$$\left.\begin{array}{l} p_n \sim p'_n \\ q_n \sim q'_n \end{array}\right| \implies \frac{p_n}{q_n} \sim \frac{p'_n}{q'_n} \quad \text{e} \quad p_n q_n \sim p'_n q'_n$$

$$\left.\begin{array}{l} n+1 \sim n \\ n - \frac{5}{2} \sim n \end{array}\right) \implies (n+1)\left(n-\frac{5}{2}\right) \sim n \cdot n = n^2$$

$a_n \sim \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} \qquad a_n \sim \dfrac{n^{1/2}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ ($\to 0$ allora può convergere)

- Criterio del rapporto:

Se $a_n > 0$ e $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ (finito ≥ 0 o infinito $+\infty$), allora:

$0 \leq L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge $\qquad$ $\underset{\text{anche } +\infty}{L > 1} \Rightarrow \sum a_n$ diverge

- Criterio della radice:

Se $a_n > 0$ e $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (finito o infinito $+\infty$), allora:

$l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge $\qquad$ $\underset{\text{anche } +\infty}{L > 1} \Rightarrow \sum a_n$ diverge

In questi due criteri se $l = 1$ non concludo nulla e quindi tocca usare un altro metodo risolutivo.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n^2}{3^n + n + 1}$ $\qquad$ $a_n \geq 0 \quad \forall n$

$$\left.\begin{array}{l} n^3 + n^2 \sim n^3 \\ 3^n + \underbrace{n+1}_{o(3^n)} \sim 3^n \end{array}\right| \Rightarrow a_n \sim \frac{n^3}{3^n}$$

Posso studiare equivalentemente: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

Applico il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{\overset{\to 1}{\sqrt[n]{n^3}}}{3} \longrightarrow \frac{1}{3} = l < 1$$

Dunque la serie $\sum b_n$ (e quindi anche $\sum a_n$) converge

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad$ con $x \in \mathbb{R}$ fissato > 0

$a_n \geq 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x^n \cdot x}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} = \frac{x}{n+1}$$

$$= \longrightarrow 0 = L < 1$$

Dunque la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Lezione 10:

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO:

Sono serie del tipo: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots$ con $b_n > 0$

- **Criterio di Leibniz:**

La serie converge se:

1) $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ (soddisfatta la condizione necessaria)

2) (b_n) è definitivamente decrescente ($b_{n+1} \leq b_n$ definitivamente)

Inoltre se S e S_N sono somma e ridotta N-esima della serie, si ha:

$$|S - S_N| \leq b_{N+1} \qquad \forall N$$

$$b_{N+1} \to \quad \forall N \to \infty$$

- Serie armonica a segni alterni:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ converge per ogni $\alpha > 0$

1) $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ se $\alpha > 0$

2) $b_n = \frac{1}{b_n}$ decrescente $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ converge per Leibniz

SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALSIASI:

- **Definizione di convergenza assoluta:**

Se $\sum |a_n|$ converge, si dice che $\sum a_n$ converge assolutamente

- **Criterio di convergenza assoluta:**

Se $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|}_{\text{serie a termini positivi}}$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Dunque la convergenza assoluta implica la convergenza semplice.
Il viceversa non vale.

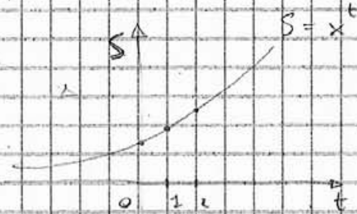
- la funzione $f: \Lambda \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad \forall x \in \Lambda$$ è detta funzione limite.

- $f_n(x) = x^n \qquad n \geq 0 \qquad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

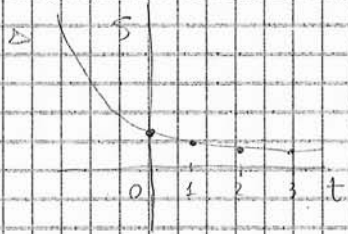
successione geometrica di ragione x : $\underset{f_0(x)}{1}, \underset{f_1(x)}{x}, \underset{f_2(x)}{x^2}, \underset{f_3(x)}{x^3} \dots$

$x > 1$: $\lim_{n \to \infty} x^n = +\infty$



$x = 1$: $\lim_{n \to \infty} x^n = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$

$0 < x < 1$: $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$



$x = 0$: $f_n(0) = 0 \quad \forall n \geq 1$

$\lim_{n \to \infty} x^n = \lim_{n \to \infty} 0^n = 0$

$-1 < x < 0$: $\lim_{n \to \infty} |x^n| = \lim_{n \to \infty} |x|^n = 0$

$x = -1$: $\lim_{n \to \infty} x^n = \lim_{n \to \infty} (-1)^n$ non esiste

$x < -1$: $\lim_{n \to \infty} x^n = \lim_{n \to \infty} (-|x|^n) = \lim_{n \to \infty} (-1)^n |x|^n$ non esiste

$$(-1)^n |x|^n = \begin{cases} +|x|^n & \text{se } n \text{ pari} \longrightarrow +\infty \\ -|x|^n & \text{se } n \text{ dispari} \longrightarrow -\infty \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto che:

$$\lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 & \text{diverge} \\ 1 & \text{se } x = 1 & \text{converge} \\ 0 & \text{se } x \in (-1, 1) & \text{converge} \\ \text{non } \exists & \text{se } x \leq -1 & \text{oscilla} \end{cases}$$

$\Lambda = (-1, 1]$ insieme di convergenza puntuale

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in (-1, 1) \end{cases} \qquad \text{funzione limite} \qquad \forall x \in \Lambda$$

Lezione 11:

- Convergenza uniforme:

Siano $f_n : D \to \mathbb{R}$ ed $f : \text{dom} f \to \mathbb{R}$.

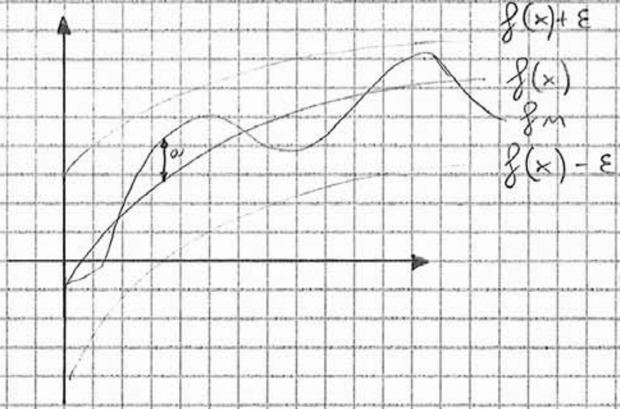
Si dice che (f_n) converge uniformemente ad f su un intervallo $I \subseteq D$ se:

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$$

cioè:

$$\lim_{n\to\infty} \sup | f_n(x) - f(x) | = 0$$

Graficamente: $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f\|_\infty = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\sup | f_n(x) - f(x)|}_{\| f_n - f \|_\infty} < \varepsilon$ def.:



tutti gli scarti verticali (distanze "a" tra $f(x)$ e f_n) sono compresi tra $f(x) \pm \varepsilon$.

- Proposizione:

Se $f_n \to f$ uniformemente su $I \Rightarrow f_n \to f$ puntualmente su I.

Dunque la convergenza uniforme implica quella puntuale.

TEOREMI DEL PASSAGGIO AL LIMITE:

- Continuità della funzione limite:

Siano $f_n : D \to \mathbb{R}$ e $I \subseteq D$ un intervallo qualsiasi. Se:

i) le f_n sono continue su I

ii) $f_n \to f$ uniformemente su I

allora f è continua su I

- Convergenza puntuale:

Date $f_n : D \to \mathbb{R}$ diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge:

- in un punto $x_0 \in D$ se la successione delle ridotte S_N converge in x_0 ossia la successione numerica $(S_N(x_0))_{N \geq 0}$ converge.

  Dunque la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ converge.

- puntualmente ad una funzione f su un insieme limitato $A \subseteq D$ se $S_N \to f$ puntualmente su A, cioè:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in A$$

$S_N(x) \to f(x) \quad \forall x \in A$ ossia converge ed ha per somma $f(x)$

- insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, l'insieme A di convergenza puntuale della successione (S_N), cioè l'insieme dei punti in cui la serie converge:

$$A = \{x \in D : \lim_{n \to \infty} S_N(x) \text{ esiste finito}\} = \{x \in D : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge}\}$$

- funzione somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ la funzione limite $S : A \to \mathbb{R}$ della successione (S_N) ossia la funzione:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in A$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad f_n(x) = x^n$

$S_0(x) = 1 \qquad S_1(x) = f_0(x) + f_1(x) = 1 + x$

$$S_N(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{se } x \in (-1, 1) \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \quad *$$

$* \quad A = (-1, 1)$

$$S(x) = \lim_{N \to \infty} S_N(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in A \qquad \begin{cases} f. \text{ lim di } S_N \\ f. \text{ somma di } \sum_{n=0}^{\infty} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^x} \sin\left(\frac{x^2}{n^3}\right) \geq 0 \quad \text{definitivamente}$$

Inoltre: $\frac{1}{n^x} \sin\left(\frac{x^2}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^x} \cdot \frac{x^2}{n^3} = \frac{x^2}{n^{x+3}}$

Dunque le serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \sin\left(\frac{x^2}{n^3}\right)$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^{x+3}} \quad (*)$$

hanno lo stesso carattere per il criterio del confronto

(*) è una serie armonica con $\alpha = x+3$ e

converge $\Leftrightarrow$ $x+3>1$ $\quad x>-2$ $\quad$ (per $x \neq 0$)

Per $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} \sin\left(\frac{0}{n^3}\right) = 0 \Rightarrow$ converge

Dunque $A = (-2, +\infty)$

- Convergenza assoluta:

Siccome il segno dei termini $f_n(x)$ può variare a seconda dei valori a cui viene fissata la x, nello studio della convergenza puntuale risulta utile il criterio di convergenza assoluta.

Sia $(f_n)_{n \geq n_0}$ una successione di funzione $f_n: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che la serie di funzione $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge assolutamente:

- in un punto $x_0 \in D$ se la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x_0)|$ converge
- su un insieme $A \subseteq D$ se la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge $\forall x \in A$

La convergenza assoluta implica quella semplice e quindi quella puntuale

iii) Considero $I = [-b, b]$ con $0 < b < 1$

In questo caso:

$$\| S_N - S \|_\infty = \sup \frac{|x|^{N+1}}{1-x} \leq$$

$$\forall x \in [-b, b] : \quad |x| \leq b \Rightarrow |x|^{N+1} \leq b^{N+1}, \quad x \leq b \Rightarrow \frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{1-b} \quad \Bigg\} \quad \frac{|x|^{N+1}}{1-x} \leq \frac{b^{N+1}}{1-b}$$

$$\leq \frac{b^{N+1}}{1-b} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \quad \text{perché } 0 < b < 1$$

Dunque vi è convergenza uniforme su ogni intervallo $I = [-b, b]$ con $0 < b < 1$

- Convergenza totale:

Sia $I \subseteq D$ un intervallo.

Si dice che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente su I se converge la serie numerica $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_\infty}_{\text{termini positivi}}$ (con $\| \ \|$ calcolata su I).

Oppure se: esiste una successione di numeri reali $M_n \geq 0$ tale che

i) $\forall n \geq 0$ e $\forall x \in I$ risulta $|f_n(x)| \leq M_n$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_\infty$ converge $\Rightarrow$ valgono i) e ii) con $M_n = \| f_n \|_\infty$

Se valgono i) e ii) $\Rightarrow$ $\| f_n \|_\infty \leq M_n$ e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_\infty$ converge per confronto.

- Criterio di Weierstrass:

Sia $I \subseteq D$ un intervallo.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente su I, allora converge uniformemente e puntualmente su I.

Il viceversa è falso ossia se converge uniformemente e puntualmente non è detto che converga totale

SERIE DI POTENZE:

Sono particolari tipi di serie di funzione i cui termini sono monomi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{con} \quad f_n(x) = a_n (x - x_0)^n \qquad a_n \in \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

ossia: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots +$

con x_0 = centro e a_n = successione dei coefficienti della serie.

$S_n(x_0)$ vale costantemente a_0 rispetto ad N per cui: ogni serie di potenze converge (ad a_0) nel proprio centro.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n^n}_{a_n} \underbrace{x^n}_{(x-x_0)^n}$ serie di potenza con centro $x_0 = 0$ e coeff. $a_n = n^n$

$0 \in \Lambda$

Fisso $x_0 \neq 0$. Allora $|f_n(x_0)| = |n^n x_0^n| = n^n |x_0|^n = (n|x_0|)^n =$

$= \longrightarrow +\infty^{+\infty} = +\infty$

Dunque il termine generale $f_n(x_0)$ non tende a 0 e allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ non converge.

Quindi $\Lambda = \{0\}$

Considereremo solo serie centrate in $x_0 = 0$.

- Lemma:

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

- converge in x_1 $\Rightarrow$ converge $\forall x$ tale che $|x| < |x_1|$ cioè converge puntualmente su tutto $(-|x_1|, |x_1|)$ e anche assolutamente.

- non converge in x_2 $\Rightarrow$ non converge in alcun x tale che $|x| > |x_2|$ cioè non converge in alcun punto degli intervalli $(-\infty, -|x_2|)$ e $(|x_2|, +\infty)$

per $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

non converge perché il termine generale $\frac{n}{n+1} \not\to 0$

e dunque $1 \notin A$

per $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} (-1)^n$

non converge perché il termine generale $\not\to 0$

Infatti: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} (-1)^n \right| = 1 \neq 0$

Quindi $-1 \notin A$

Dunque A $(-1, 1)$ e la serie converge:

- puntualmente su $(-1,1)$
- ass su $(-1,1)$
- totalmente e uniformemente su ogni $[a, b] \subseteq (-1, 1)$

- Derivazione termine a termine:

Per derivare termine a termine la somma di una serie, occorre la convergenza uniforme della serie derivata cioè:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n$$

Una serie di potenze e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza anche se nullo.
Di conseguenza $\sum a_n x^n$ e la sua serie integrale $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ hanno lo stesso raggio.

$$\bullet \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n n t^{n-1} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n \int_0^x t^{n-1} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n \frac{x^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Tra il primo e l'ultimo passaggio l'intervallo di convergenza può guadagnare gli estremi.

- Proprietà notevole dei coefficienti: (vedi slide)

Consideriamo una serie $\sum$

Lezione 14:

- Teorema di sviluppabilità:

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty$ in $x_0 \in \mathbb{R}$. Se esistono un intorno $I_\delta(x_0)$, un indice $\bar{n} \geq 0$ ed una costante $M > 0$ tali che:

$$\forall n \geq \bar{n} \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

allora

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

- Sviluppo di e^x su $\mathbb{R}$

$f(x) = e^x$. Fisso δ qualsiasi

$\forall n \geq 0 \qquad f^{(n)}(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$

$|f^{(n)}(x)| = e^x < e^{x_0 + \delta} = \bar{M}$

$$\Rightarrow \forall x \in I_\delta(x_0): \; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n =$$
$$= e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Vale $\forall x \in \mathbb{R}$ perché δ è qualsiasi

SERIE DI FOURIER:

- Richiami:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica se $\exists p > 0$ reale tale che:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + p) = f(x)$$

- Se f è periodica con periodo minimo e $\alpha \neq 0$, $g(x) = f(\alpha x)$ è periodica con $T_g = \dfrac{T_f}{(\alpha)}$
- Se f e g sono periodiche con $\dfrac{T_f}{T_g} \in \mathbb{N}$ allora $f \circ g$ è periodica con ...

DA COMPLETARE

Lezione 15:

- f continua a tratti:

Una funzione T-periodica si dice continua a tratti se è continua in tutti i punti di $[0,T)$ tranne al più in un numero finito, nei quali ha lim destro e sinistro entrambi finiti (cioè discontinuità solo eliminabili o di salto).

C_T = spazio vettoriale delle funzioni T-periodiche e continue a tratti, sottospazio di R_T

- funzione regolarizzata:

Se $f \in C_T$ si chiama funzione regolarizzata di f la funzione definita da: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \tilde{f}(x) := \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$

dove $f(x^\pm) := \lim\limits_{h \to 0^\pm} f(x+h)$ = lim dx e sx di f in x

- f regolarizzata:

Se $f \in C_T$, diciamo che f è regolarizzata se coincide con la sua funzione $\tilde{f}$

$\tilde{C}_T = \{ f \in C_T : f = \tilde{f} \}$ = spazio vettoriale delle funzioni C_T ...

- Convergenza quadratica e identità di Parseval:

$f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f : \mathrm{dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_n \to f$ quadraticamente su $[a,b]$ $\iff$ $\|f_n - f\|_2^2 \to 0$, $\quad n \to \infty$

$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0 \qquad n \to \infty$

convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza quadratica $\Rightarrow$ convergenza in media $\left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0 \quad n \to \infty \right)$

Non ci sono legami tra convergenza puntuale e convergenza integrale

Se convergenza media $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$

Se convergenza quadratica $\Rightarrow$ $\int_a^b [f(x)]^2 dx = \lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b [f_n(x)]^2 dx$

- Convergenza uniforme:

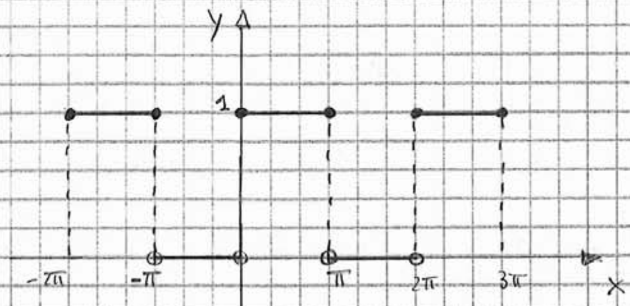
Se f è T-periodica e regolare a tratti allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su ogni intervallo compatto $[a,b]$ su cui f sia continua

Se f è T-periodica, regolare a tratti e continua su $\mathbb{R}$

COMPLETARE DA SLIDE

• Gradino unitario:

f: 2π-periodica tale che $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$



è regolare a tratti?

$f \in \mathcal{C}^1((0,\pi))$ $\qquad f \in \mathcal{C}^1(\pi, 2\pi)$

$f'(x) = 0 \quad \forall x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = 0$

$\lim_{x \to \pi^{\pm}} f'(x) = 0$

$\Rightarrow$ è regolare a tratti $\Rightarrow f \in R_{2\pi}$ $\qquad T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{=1}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{f(x)}_{=0}\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 \cdot dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{=1}\cos(nx)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{f(x)}_{=0}\cos(nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

NUMERI COMPLESSI E FUNZIONI ELEMENTARI

Esercizio 1:

Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

1) $(2-3i)(-2+i) = -4+2i+6i-3i^2 = -4+8i-(-3) = -1+8i$

2) $(3+i)(3-i)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right) = \left(9-3i+3i-(i^2)\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right) = 10\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right) =$
$= 2+i$

3) $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i} = \left(\frac{1+2i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}\right)+\frac{2-i}{5i} = \left(\frac{3+4i+6i-8}{9-16i^2}\right)+\frac{2-i}{5i} =$
$= \frac{-5+10i}{25}+\frac{2-i}{5i} = \frac{-5+10i}{25}+\frac{-i(2-i)}{5} = \frac{-5+10i-10i-5}{25} =$
$= -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}$

4) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{5}{(2-i-2i+i^2)(3-i)} = \frac{5}{(1-3i)(3-i)} = \frac{5}{\cancel{3}-i-9i+\cancel{3i^2}} =$
$= \frac{5}{-10i} = +\frac{1}{2}i$

Esercizio 2:

Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\vartheta}$

1) $z = i$

$x = r\cdot\cos\vartheta$ $\quad y = r\sin\vartheta$

$x = 0$ $\quad y = 1$ $\quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$ $\quad r = \sqrt{1^2} = 1$

$z = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}$ ⟵ forma trigonometrica

$z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ⟵ forma esponenziale

2) $z = -1$

$x = -1$ $\quad y = 0$

$r = 1$ $\quad \vartheta = \pi$

$z = \cos\pi + i\sin\pi$ ⟵ forma trigonometrica

$z = e^{i\pi}$ ⟵ forma esponenziale

3) $z = 1+i$

$x = 1$ $\quad y = 1$

$r = \sqrt{2}$ $\quad \vartheta = \frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

Esercizio 5:

Risolvere le seguenti equazioni:

1) $z^2 - 2z + 2 = 0$ $\quad a = 1 \quad b = -2 \quad c = 2$

$\Delta = +b^2 - 4ac = -4 + 8 = +4$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i(\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{+2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

2) $z^2 + 3iz + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = -9 - 4 = -13$

$$z_{1,2} = \frac{-3i \pm i\sqrt{13}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} i$$

3) $z|z| - 2z + i = 0$ $\quad$ per $z = x + iy$

$(x+iy)(\sqrt{x^2+y^2}) - 2x - 2iy + i = 0$

$x\sqrt{x^2+y^2} - 2x + i(\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1) = 0$

Uguagliando parte reale e immaginaria:

$$\begin{cases} x(\sqrt{x^2+y^2} - 2) = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ y|y| - 2y + 1 \wedge \text{impossib.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y|y| - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Per $y \geq 0$ e per $y < 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow z_1 = i \ \vee \ z_2 = i(-1 \pm \sqrt{2})$$

4) $z^2|z|^2 - i = 0$ $\quad$ per $z = x + iy$ con $|z|^2 = z\bar{z}$

$z^2 \cdot z \cdot \bar{z} - i = 0$

$z^3 \cdot \bar{z} - i = 0$ $\qquad (x+iy)^3(x-iy) - i = 0$

$(x+iy)(x+iy)(x+iy)(x-iy) - i = 0$

$(x^2 + ixy + ixy - y^2)(x+iy)(x-iy) - i = 0$

$(x^2 + 2ixy - y^2)(x+iy)(x-iy) - i = 0$

$(x^3 + ix^2y + 2ix^2y - 2xy^2 - xy^2 - iy^3)(x-iy) - i = 0$

$(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3)(x-iy) - i = 0$

$x^4 - ix^3y + 3ix^3y + 3x^2y^2 - 3x^2y^2 + 3ixy^3 - ixy^3 - y^4 - i = 0$

$x^4 + 2ix^3y + 2ixy^3 - y^4 - i = 0$

$x^4 - y^4 + i(2x^3y + 2xy^3 - 1) = 0$

Esercizio 7:

Calcolare z^2, z^9, z^{20} per:

1) $z = \frac{1 - i}{i} = \frac{1}{i} - \frac{i}{i} = -i - 1$

$z = \rho e^{i\vartheta} = \sqrt{2}\, e^{i -\frac{3}{4}\pi}$

$z = (\rho e^{i\vartheta})$
$\rho^2 = x^2 + y^2 = 2$
$\vartheta = \arctan \frac{-1}{-1} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$

• $z^2 = 2 e^{i -\frac{3\pi}{4}\cdot 2} = 2 e^{-i\left(\frac{3}{2}\pi\right)} = 2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2i$

• $z^9 = (\sqrt{2})^9 e^{-i\frac{3}{4}\pi \cdot 9} = 2^{\frac{9}{2}} e^{-i\frac{27}{4}\pi} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} e^{-i(-6\pi) + \left(-\frac{3}{4}\pi\right)} = 16 \cdot \sqrt{2}\, e^{i0} \cdot e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} =$

$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$ $\qquad -\frac{27}{4} = -6 - \frac{3}{4}$

$= 16\sqrt{2}\, e^{i -\frac{3}{4}\pi} = 16\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right) = 16\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= -8\sqrt{2}\sqrt{2} - 8\sqrt{2}\sqrt{2}\, i = -16 - 16i = -16(1 + i)$

• $z^{20} = (\sqrt{2})^{20} e^{-\frac{3}{4}\pi i \cdot 20} = 2^{\frac{20}{2}} e^{i -15\pi} = 2^{10} e^{-i 15\pi} = 2^{10} \cdot e^{-\pi i} =$

$= 2^{10}\left(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)\right) = 2^{10}(-1 + i0) = -2^{10}$

2) $z = \frac{2}{\sqrt{3} - i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{\sqrt{3} - i} - i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i - i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

$z = (\rho e^{i\vartheta})$
$\rho = x^2 + y^2 = 1$
$\vartheta = 30° = -\frac{1}{6}\pi$

• $z^2 = e^{-i\frac{\pi}{6}\cdot 2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

• $z^9 = e^{-i\frac{\pi}{6}\cdot 9} = e^{-3\pi} = -1$

• $z^{20} = e^{-i\frac{\pi}{6} 20} = e^{-i\frac{\pi}{3} 10} = e^{-i\frac{10}{3}\pi} = e^{-3\pi i} \cdot e^{-\frac{1}{3}\pi i} =$

$\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$

$= \left(\cos(-3\pi) + i \sin(-3\pi)\right) \cdot \left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right) =$

$= (-1 + i0)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Esercizio 8:

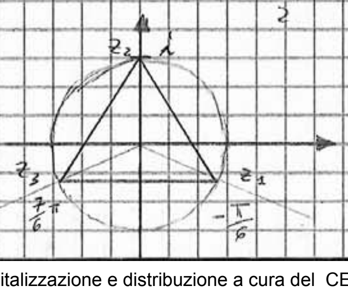
Calcolare e rappresentare graficamente i seguenti numeri complessi:

1) $z = \sqrt[3]{-i}$ $\qquad z^3 = -i = \frac{1}{i}$ $\qquad |z| = 1$

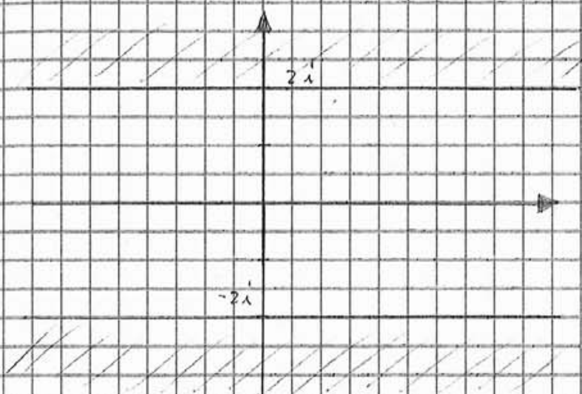
$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\qquad \vartheta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}$

$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$ $\qquad z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

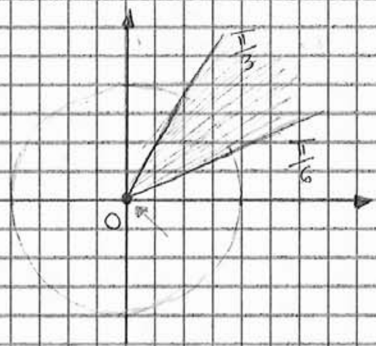


3) $\Omega_3 = \{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| > 2 \}$



L'insieme è aperto e non connesso.
La frontiera è:
$\partial \Omega_3 = \{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| = 2 \}$

4) $\Omega_4 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > 0, \ \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3} \}$



Ω_4 non è né aperto o chiuso ma è connesso.
La frontiera è:
$\partial \Omega_4 = \{ \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{6} \} \cup \{ \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3} \} \cup \{ 0 \}$

Esercizio 10:
Trovare il dominio di definizione delle seguenti funzioni:

1) $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$

$z^2+4 \neq 0 \qquad z^2 \neq -4 \qquad z \neq \pm 2i \qquad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{ \pm 2i \}$

2) $f(z) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \qquad z \neq 0 \qquad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

3) $f(z) = \frac{z}{z+\bar{z}} \qquad z = x+iy$

$z+\bar{z} = x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy} \qquad f(z) = \frac{x+iy}{2x} \qquad 2x \neq 0 \qquad \operatorname{Re} z = x \neq 0$

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ \operatorname{Re} z = 0 \}$

4) $f(z) = \frac{1}{9-|z|^2} \qquad |z|^2 \neq 9 \qquad |z| \neq 3$

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ |z| = 3 \}$

Esercizio 11:
Per le seguenti funzioni $f(z)$ si trovino $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ e $g(z) = |f(z)|$

1) $f(z) = z^3 + z + 1 \qquad z = x+iy$

$f(z) = (x+iy)(x+iy)(x+iy) + x+iy+1 = (x^2+2ixy+y^2)(x+iy) + x+iy+1 =$

Esercizio 12:

Data $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + 2ix(1-y)$ esprimerla in funzione della variabile complessa $z = x + iy$

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + 2ix - 2ixy = \qquad x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + i(z-\bar{z}) + i(z+\bar{z}) - 2i\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{\cancel{2i}}\right) =$$

$$= \frac{(z+\bar{z})^2}{4} + \frac{(z-\bar{z})^2}{4} + i(z-\bar{z}) + i(z+\bar{z}) - \frac{1}{2}(z+\bar{z})(z-\bar{z}) =$$

$$= \frac{1}{4}(z^2 + \cancel{2z\bar{z}} + \bar{z}^2) + \frac{1}{4}(z^2 - \cancel{2z\bar{z}} + \bar{z}^2) + iz - \cancel{i\bar{z}} + iz + \cancel{i\bar{z}} -$$

$$- \frac{1}{2}(z^2 - \cancel{z\bar{z}} + \cancel{z\bar{z}} - \bar{z}^2) = \frac{1}{\cancel{2}4}(\cancel{2}z^2 + \cancel{2}\bar{z}^2) + 2iz - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\bar{z}^2 =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}z^2} + \frac{1}{2}\bar{z}^2 + 2iz - \cancel{\frac{1}{2}z^2} + \frac{1}{2}\bar{z}^2 = \bar{z}^2 + 2iz$$

Sono dunque verificate le condizioni di C-R $\Rightarrow f(z)$ è olomorfa $\Rightarrow f(z)$ è derivabile nel suo dominio.

Tutto questo se e solo se $x = y \Rightarrow z = x + ix \quad x \in \mathbb{R}$

In tali punti si ha: $f'(x+ix) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i0 = 2x$

3) $f(z) = z \operatorname{Im} z = (x+iy)y = xy + iy^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

C-R $\begin{cases} y = 2y \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Le C-R sono verificate solo in $z = 0$ dove risulta:

$f'(0) = 0 + 0 = 0$

Esercizio 4:

Sia $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$; allora $u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 3x^2$. Perché $f'(z) = 3x^2$ solo nel punto $z = i$?

Poiché $\quad u(x,y) = x^3 \qquad v(x,y) = -(y-1)^3$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -3(y-1)^2$

C-R $\begin{cases} 3x^2 = -3(y-1)^2 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ è verificata solo se $x = 0$ e $y = 1$

Dunque sono verificate solo in $z = i$ e la funzione f è derivabile solo in $z = i$ dove $f'(i) = 0$

Esercizio 5:

Dire se le seguenti funzioni sono analitiche nel loro dominio:

1) $f(z) = 3x + y + i(3y - x) = (3-i)(x+iy) = (3-i)z$

$u(x,y) = 3x + y \qquad v(x,y) = 3y - x$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3$

C-R $\begin{cases} 3 = 3 \\ 1 = -(-1) \end{cases}$ La funzione è analitica

6) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$ $\qquad dom(f(z)) = z \neq 2, \quad z \neq -1 \pm i$

Essendo un polinomio è derivabile nel suo dominio.
Dunque è analitico in $\mathbb{C} \setminus \{ z \neq 2 , \quad z \neq -1 \pm i \}$

Esercizio 7:

Verificare che le seguenti funzioni $u(x,y)$ sono armoniche nel loro dominio e trovare la corrispondente armonica coniugata $v(x,y)$:

1) $u(x,y) = 2x(1-y) = 2x - 2xy$

$\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Delta u = 0 \qquad u(x,y)$ è armonica in $\mathbb{C}$

Per determinare $v(x,y)$, imponiamo l'uguaglianza $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

da cui $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2 - 2y \Rightarrow v(x,y) = 2y - y^2 + \phi(x)$

in questo modo $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 + \phi'(x)$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \phi'(x) = +2x \qquad \phi(x) = x^2 + c$

Dunque: $v(x,y) = 2y - y^2 + x^2 + c$

2) $u(x,y) = y^2 - x^2 \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2 \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \qquad \Delta u = 0$

$u(x,y)$ è armonica in $\mathbb{C}$.

Per determinare $v(x,y)$, imponiamo l'uguaglianza: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

da cui: $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x \Rightarrow v(x,y) = 2xy + \phi(x)$

dunque: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y + \phi'(x)$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \phi'(x) = -2y - 2y = -4y \qquad \phi(x) = -4yx + c$

Dunque: $v(x,y) = 2xy - 4xy + c = -2xy + c$

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ $\qquad\qquad$ $\overline{f(z)} = u(x,y) - i\,v(x,y)$

C-R: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ e $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

Allora: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$

ossia $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ in Ω e quindi $u(x,y)$ e' costante in Ω.
Analogamente: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ e anche la funzione $v(x,y)$ e' costante in Ω.

2) $\mathrm{Im}\, f(z) = 0$ in Ω $\qquad\qquad$ $f(z) = u(x,y)$

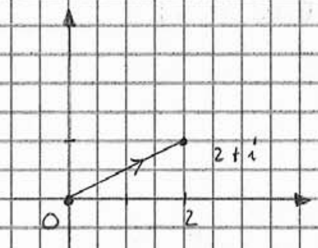
C-R $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$

Allora: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ in Ω e quindi $u(x,y)$ e' costante in Ω.
Essendo $\mathrm{Im}\, f(z) = 0$ anche $v(x,y)$ e' costante in Ω

<u>Esercizio 12:</u>
Calcolare direttamente dalla definizione, l'integrale di linea delle seguenti funzioni lungo il cammino in cui e' indicato il sostegno:

1) $f(z) = z^2$ $\qquad$ C = segmento che unisce l'origine a $2+i$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$



$\gamma(t) = 0 + t(2+i-(0)) = 2t + it$ $\qquad\qquad$ $\gamma'(t) = 2+i$

$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = t \end{cases}$ $\qquad t \in [0,1]$

$$\int_0^1 (2t+it)^2 (2+i)\,dt = \int_0^1 (2t+it)(2t+it)(2+i)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (4t^2 + 2it^2 + 2it^2 - t^2)(2+i)\,dt = \int_0^1 (3t^2 + 4it^2)(2+i)\,dt =$$

$$= \int_0^1 6t^2 + 3it^2 + 8it - 4t^2\,dt = \int_0^1 2t^2 + 11it^2\,dt = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

5) $f(z) = \frac{1}{(z+2+i)^2}$ $\qquad C =$ circonferenza $\quad R = 4 \quad C(-2 \; -i)$

$$\gamma(t) = (x_0 + R\cos t) + i(y_0 + R\sin t) = -2 + 4\cos t + 1 + i\,4\sin t =$$
$$= 4(\cos t + i\sin t) - 1 = 4e^{it} - 1$$

$$\gamma'(t) = 4ie^{it}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(4e^{it} - 1 + 2 + i)^2} \cdot 4ie^{it}\,dt = \dots = \left[-\frac{1+i}{(4+4i)e^{it} + 2i} \right]_0^{2\pi} =$$

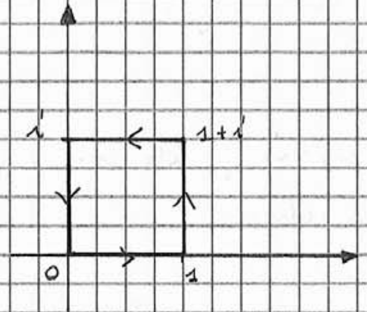
$$= +\frac{1+i}{4+4i+2i} - \frac{1+i}{4+4i+2i} = 0$$

Per evitare i calcoli si poteva verificare che $f(z)$ è olomorfa, e dunque per il teorema di Cauchy - Goursat, l'integrale:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Esercizio 13:

Sia γ il cammino percorso in senso antiorario il cui sostegno è la frontiera del quadrato con vertici nei punti $z=0$, $z=1$, $z=1+i$, $z=i$.
Calcolare: $\int_\gamma e^{\pi\bar{z}}\,dz$



$$\gamma(t) = x_0 + t(y_0 - x_0)$$

$$\gamma_1(t) = 0 + t(1-0) = t \qquad \gamma_1'(t) = 1$$
$$\gamma_2(t) = 1 + t(i+1-1) = 1 + it \qquad \gamma_2'(t) = i$$
$$\gamma_3(t) = i + 1 + t(i - i - 1) = i + 1 - t \qquad \gamma_3'(t) = -1$$
$$\gamma_4(t) = i + t(0 - i) = i - it \qquad \gamma_4'(t) = -i$$

$$\int_\gamma e^{\pi\bar{z}}\,dz = \int_0^1 e^{\pi\bar{t}} \cdot 1\,dt + \int_0^1 e^{\pi\overline{(1+it)}} \cdot i\,dt + \int_0^1 e^{\pi\overline{(i+1-t)}} \cdot (-1)\,dt + \int_0^1 e^{\pi\overline{(i-it)}} \cdot (-i)\,dt =$$

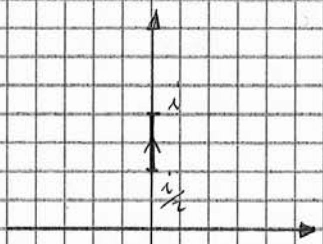
$$= \int_0^1 e^{\pi t}\,dt + i\int_0^1 e^{\pi - i\pi t}\,dt - \int_0^1 e^{\pi - \pi t - i\pi}\,dt - i\int_0^1 e^{-\pi i + \pi i t}\,dt =$$

$$= \left[\frac{e^{\pi t}}{\pi}\right]_0^1 + \cancel{i}\left[-\frac{e^{\pi - i\pi t}}{\cancel{i}\pi}\right]_0^1 - \left[-\frac{e^{\pi - \pi t - i\pi}}{\pi}\right]_0^1 - \cancel{i}\left[\frac{e^{-\pi i + \pi i t}}{\cancel{i}\pi}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{\pi} + \frac{e^\pi}{\pi} + \frac{e^\pi}{\pi} - \frac{e^{\pi - i\pi}}{\pi} - \left(\frac{e^{\pi - i\pi}}{\pi} - \frac{e^{-i\pi}}{\pi}\right) - \left(-\frac{e^{-\pi i}}{\pi} + \frac{e^{-\pi i + \pi i}}{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-2 + 2e^\pi + 2e^\pi - 2\right) = \frac{4}{\pi}\left(e^\pi - 1\right)$$

2) $\int_\gamma e^{\pi z}\, dz$ $\qquad$ $C =$ segmento da i a $\frac{i}{2}$



$$\gamma(t) = i + t\left(+\frac{i}{2} - i\right) = i - \frac{1}{2} i t$$

$$\gamma'(t) = -\frac{1}{2} i$$

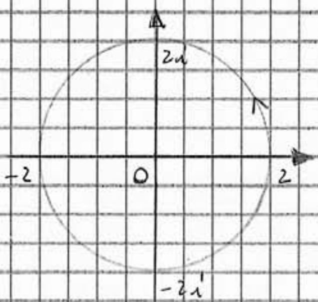
$$\int_0^1 e^{\pi\left(i - \frac{1}{2} i t\right)} \left(-\frac{1}{2} i\right) dt = -\frac{1}{2} i \int_0^1 e^{\pi\left(i - \frac{1}{2} i t\right)} dt$$

$$= -\frac{1}{2} i \int_0^1 e^{\pi i - \frac{1}{2}\pi i t}\, dt = -\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{i} \left\{ -\frac{e^{\pi i - \frac{1}{2}\pi i t}}{+\frac{1}{\cancel{2}}\pi \cancel{i}} \right\}_0^1 =$$

$$= -\frac{e^{\pi i}}{\pi} + \frac{e^{\frac{\pi}{2} i}}{\pi} = +\frac{1}{\pi}\left(-e^{\pi i} + e^{\frac{\pi}{2} i}\right) = \frac{1}{\pi}(1 + i)$$

$e^{\pi i} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$ $\qquad$ $e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$

3) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz$ $\qquad$ $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \}$



$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 8}$$

$f(z)$ è analitica $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{ \sqrt{-8} \}$

$z_0 = 0$? ✓

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - 0}\, dz$$

$$f(0) = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{8} \cdot 2\pi i = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - 0}\, dz = \int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz = \frac{\pi i}{4}$$

4) $\int_\gamma \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz$ $\qquad$ $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2 \}$

All'interno di C, la funzione $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$ ha un unico punto di non analiticità: $z = 2i$

Usando: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$ $\qquad$ con $n = 1$ e $f(z) = \frac{1}{(z + 2i)^2}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz = 2\pi i \left. \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + 2i)^2} \right|_{z = 2i} = \frac{\pi}{16}$$

SERIE DI TAYLOR E DI LAURENT

Esercizio 1:

Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di funzioni:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1 \qquad R = 1 \qquad B_1(0) \Rightarrow |z| \leq 1$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} \right| \to \infty \qquad R = \frac{1}{\infty} = 0$

L'insieme di convergenza è 0.

Esercizio 2:

Verificare che:

1) $\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}} = \qquad$ per $0 < |z| < 4$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{4z} = \frac{1}{4z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n = \qquad \omega = \frac{z}{4}$

$= \frac{1}{4z} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n = \frac{1}{4z} \cdot \frac{1}{1-\omega} = \frac{1}{4z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{4}} = \frac{1}{\cancel{4}z} \cdot \frac{1}{\frac{4-z}{\cancel{4}}} =$

$= \frac{1}{4z - z^2}$ ✓

2) $\frac{\sin z^2}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \dots \qquad$ per $z \neq 0$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor:

$f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot z^n =$

$\frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{1}{3!}$

$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{1}{5!} \qquad \frac{f^{(14)}(0)}{14!} = -\frac{1}{7!}$

$= \frac{z^2}{z^4} - \frac{z^6}{z^4 \cdot 3!} + \frac{z^{10}}{z^4\, 5!} - \frac{z^{14}}{z^4 \cdot 7!} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!}$

2) $f(z) = \dfrac{\cos 2z^2}{z^5}$ in $|z|>0$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n!)} \Rightarrow \cos(2z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z^2)^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} \cdot z^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n} \cdot z^{4n-5}}{(2n)!}$$

3) $f(z) = \dfrac{6iz^2}{z^2+9}$ in $|z|<3$ e in $|z|>3$

Se $|z|>3$:

$$f(z) = 6i \frac{z^2}{z^2\left(1+\frac{9}{z^2}\right)} = 6i \frac{1}{1+\frac{9}{z^2}} = 6i \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{9}{z^2}\right)^n =$$

$$= 6i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (9)^n}{z^{2n}}$$

Se $|z|<3$:

$$f(z) = 6iz^2 \cdot \frac{1}{z^2+9} = 6iz^2 \frac{1}{9\left(1+\frac{z^2}{9}\right)} = 6iz^2 \cdot \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z^2}{9}\right)^n =$$

$$= 6i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z^{2n} \cdot z^2)}{9^n \cdot 9} = 6i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z^{2n+2})}{9^{n+1}}$$

4) $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$ in $|z-1|<2$

$$f(z) = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-3)} = \frac{Az-3A+Bz-B}{(z-1)(z-3)} = \frac{z(A+B)-3A-B}{(z-1)(z-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-B=2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ +3B-B=2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-3)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

Se $|z|<1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}} z^n$$

Se $|z|>1$ e $|z-1|<2$:

$$-\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 246

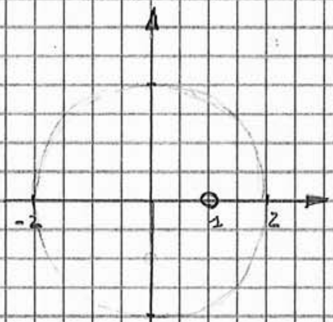
4) $f(z) = \dfrac{1}{3+2iz}$ $\qquad z = -\dfrac{3}{2i} = \dfrac{3i}{2}$ $\qquad$ polo semplice

$$\mathrm{Res}_f\left(\frac{3i}{2}\right) = \left\{ \frac{1}{\frac{d}{dz}(3+2iz)} \right\}\Bigg|_{\frac{3i}{2}} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

Esercizio 8:

Calcolare i seguenti integrali

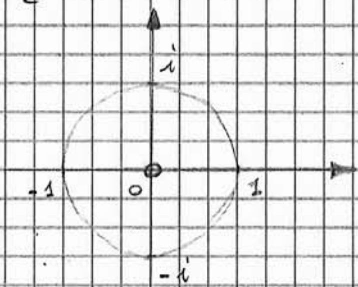
1) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$ $\qquad$ con $C = \{|z| = 2\}$



$z = 1$ polo doppio.

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{dz} e^{-z}\Big|_{z=1} = -2\pi i\, e^{-1} = -\frac{2\pi i}{e}$$

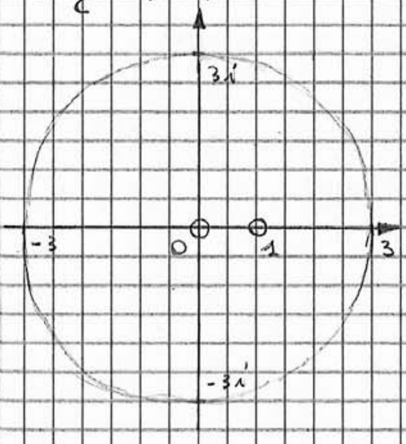
2) $\displaystyle\int_C \frac{e^1}{z^2}\, dz$ $\qquad$ con $C = \{|z| = 1\}$



$z^2 =$ polo doppio

$$I = 2\pi i \; \frac{1}{1!} \; \frac{d}{dz}\, e \Big|_{z=0} = 0$$

3) $\displaystyle\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\, dz$ $\qquad$ con $C = \{|z| = 3\}$



$z = 0$ polo semplice

$z = 1$ polo semplice

$$I = 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}_f(0) + \mathrm{Res}_f(1) \right\} =$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{5z-2}{z-1}\Big|_{z=0} + \frac{5z-2}{z}\Big|_{z=1} \right\} =$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{-2}{-1} + \frac{3}{1} \right\} = 10\pi i$$

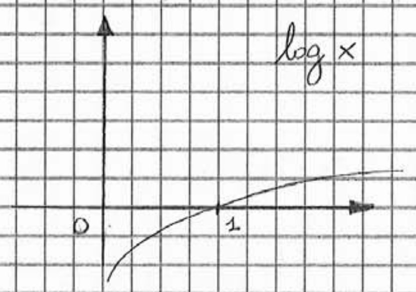
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 246

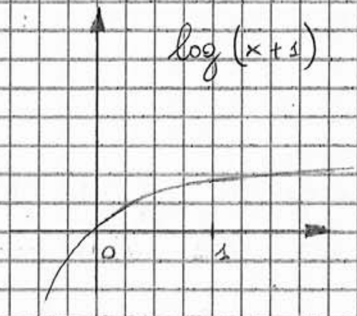
DISTRIBUZIONI

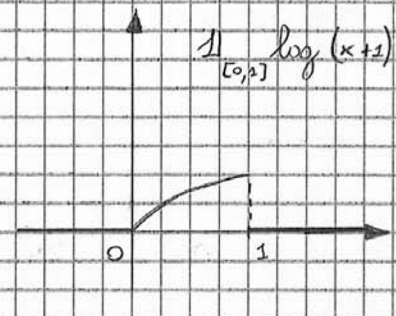
Esercizio 1:

Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti applicazioni da D in $\mathbb{R}$ sono effettivamente delle distribuzioni:

1) $\langle T_1, \varphi \rangle = \int_0^1 \log(x+1)\, \varphi(x)\, dx$







$1\!\!1_{[0,1]} \log(x+1)$ è localmente sommabile $\quad f \in R^1_{loc} \Rightarrow T_1 = T_f \in D' \Rightarrow$

$\Rightarrow T_1$ è una distribuzione.

2) $\langle T_2, \varphi \rangle = \int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx = \|\varphi(x)\|^2_{2,(0,1)}$

Verifico la linearità:

$\langle T_2, \varphi \rangle = \|\varphi(x)\|^2_{2,(0,1)}$ $\qquad \langle T_2, -\varphi \rangle = \|-\varphi(x)\|^2_{2,(0,1)} = \|\varphi(x)\|^2_{2,(0,1)}$

Dunque: $\langle T_2, -\varphi \rangle \neq -\langle T, \varphi \rangle \Rightarrow$ non è lineare $\Rightarrow$

$\Rightarrow T_2$ non è una distribuzione.

3) $\langle T_3, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi'(x)\, dx = \varphi(1) - \varphi(0) = \delta_1 - \delta_0 = \langle \delta_1 - \delta_0, \varphi \rangle$

$\Rightarrow T_3 = \delta_1 - \delta_0 \in D' \Rightarrow T_3$ è una distribuzione.

4) $\langle T_4, \varphi \rangle = |\varphi(5)|$

Verifico la linearità:

$\langle T_4, \varphi \rangle = |\varphi(5)| = \delta_5$ $\qquad \langle T_4, -\varphi \rangle = |-\varphi(5)| = |\varphi(5)| = \delta_5$

Dunque: $\langle T_4, -\varphi \rangle \neq -\langle T_4, \varphi \rangle \Rightarrow$ non è lineare $\Rightarrow$

$\Rightarrow T_4$ non è una distribuzione.

5) $\langle T_5, \varphi \rangle = \varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = \langle \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4, \varphi \rangle$

$T_5 = T_f \in D' \Rightarrow T_5$ è una distribuzione.

5) $< T_5 , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sin h x - 4x)\, \varphi(x)\, dx + e^{12} \varphi(e) =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sin h x - 4x)\, \varphi(x)\, dx + e^{12} \delta_e =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]} (\sin h x - 4x)\, \varphi(x)\, dx + e^{12} \delta_e$

$f = \mathbb{1}_{[a,b]} (\sin h x - 4x) \in R^1_{loc} \Rightarrow T_5 = < T_f + e \delta_e , \varphi > \in D'$

T_5 è una distribuzione

6) $< T_6 , \varphi > = 1$

Verifico la linearità: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$1 = < T_6 , \varphi_1 + \varphi_2 = < T_6 , \varphi_1 > + < T_6 , \varphi_2 > = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow T_6$ non è lineare $\Rightarrow T_6$ non è una distribuzione.

Esercizio 9:

Sia $\varphi \in D$, dimostrare che $\varphi' \in D$ e vale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(\infty) - \varphi(-\infty) = 0 - 0 = 0$

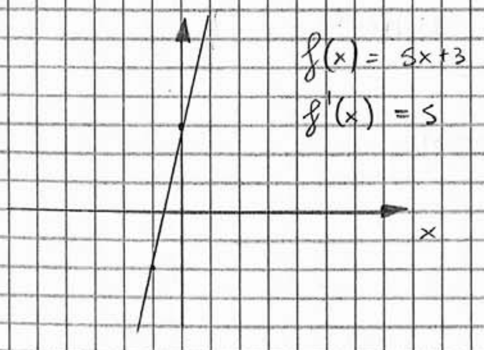
$\varphi' \in D \iff$ i) $\varphi' \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ ✓

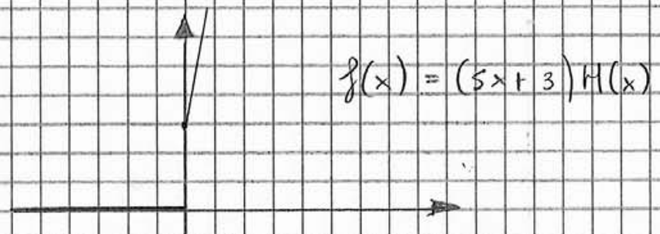
ii) $\exists\, a, b \in \mathbb{R} : \varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ ✓

Esercizio 10:

Calcolare la derivata delle distribuzioni regolari aventi i seguenti simboli:

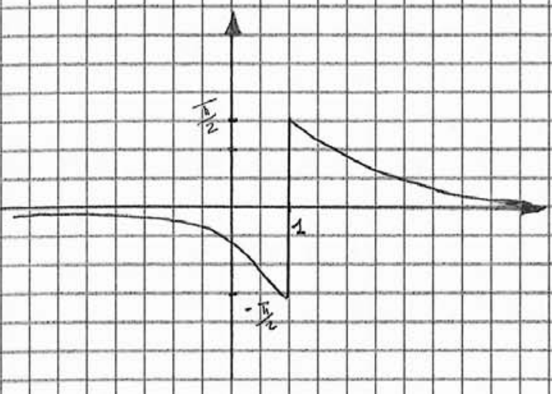
1) $f(x) = (5x + 3) H(x)$





$< T_f' , \varphi > = T_{f'} + 3 \delta_0 = 5 T_H + 3 \delta_0$

6) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$ $\qquad \frac{d}{dx}\arctan = \frac{1}{x^2-1}$



$$T_f' = T_{f'} + \pi\delta_1$$

$$f'(x) = \frac{1}{-x^2+2x-2}$$

Esercizio 11:

Calcolare le derivate delle distribuzioni seguenti:

1) $T = T_{H(2x)} + 5\delta_3(2x)$

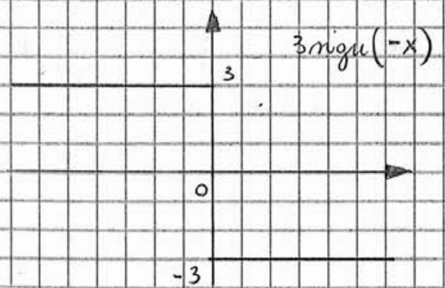
$$\delta_a(bx) = \frac{1}{|b|}\delta_{\frac{a}{b}} \quad \Rightarrow \quad 5\delta_3(2x) = 5\cdot\frac{1}{2}\delta_{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\delta_{\frac{3}{2}}$$

$$T_{H(2x)} = H(2x) = H(x) \quad \Rightarrow \quad H(x)' = \delta_0$$

$$T' = \delta_0 + \frac{5}{2}\delta_{\frac{3}{2}}'$$

2) $T = e^{x^2}\delta_{-1} + T_{3\,\mathrm{sgn}(-x)}$

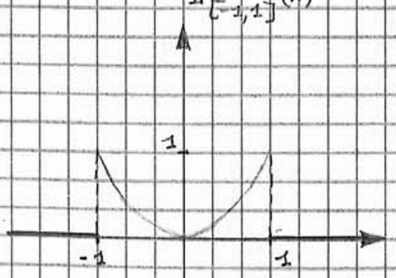
$$\psi\delta_a = \psi(a)\delta_a \quad \Rightarrow \quad e^{x^2}\delta_{-1} = e^1\delta_{-1}$$



$$T'_{3\,\mathrm{sgn}(-x)} = -6\delta_0$$

$$T' = e\,\delta_{-1}' - 6\delta_0 + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{T_{f'}}}$$

3) $T = x^2\, T_{\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}$



$$T_f' = T_{f'} + \delta_{-1} - \delta_1 = 2x\,T_{\mathbb{1}_{[-1,1]}} + \delta_{-1} - \delta_1$$

2) $T_n = \sqrt{n}\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$

$$< T_n, \varphi > = < \sqrt{n}\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right), \varphi > = \frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \overset{(H)}{=}$$

$$\overset{(H)}{=} \frac{-\frac{1}{n^2}\varphi'\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\varphi'\left(\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{2\sqrt{n^3}}} = +2\sqrt{n^3}\cdot\frac{1}{n^2}\left(\varphi'\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi'\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\varphi'\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi'\left(-\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= 0\cdot\left(\varphi'\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi'\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

Esercizio 17:

Dimostrare che la successione $T_n = n\left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_0\right)$ non converge.

$$< T_n, \varphi > = < n\left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_0\right), \varphi > =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 246

7) $g(t) = |t| \cdot e^{-|t|} = t \cdot H(t)\, e^{-t} - t \cdot H(-t)\, e^{t}$

$$\mathcal{F}\left(t \cdot H(t) e^{-t}\right)(\nu) + \mathcal{F}\left((-t) H(-t) e^{t}\right)(\nu) = \mathcal{F}\left(t H(t) e^{-t}\right)(\nu) + \mathcal{F}\left(t H(t) e^{-t}\right)(-\nu) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\, \mathcal{F}\left(H(t) e^{-t}\right)'(\nu) - \frac{1}{2\pi i}\, \mathcal{F}\left(H(t) e^{-t}\right)'(-\nu) =$$

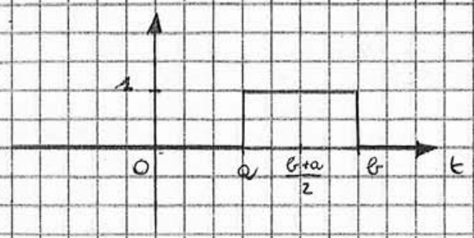
$$= -\frac{1}{2\pi i}\left\{\left(\frac{1}{1+2\pi i\nu}\right)' + \left(\frac{1}{1+2\pi i \nu}\right)'(-\nu)\right\} = -\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{-2\pi i}{(1+2\pi i \nu)^2} + \frac{-2\pi i}{(1-2\pi i\nu)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{(1+2\pi i\nu)^2} + \frac{1}{(1-2\pi i \nu)^2}$$

8) $g(t) = p_T(t-t_0)$

$$\mathcal{F}\left(p_T(t-t_0)\right)(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu}\, \mathcal{F}\left(p_T(t)\right)(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu} \cdot \frac{\sin(\pi \nu T)}{\pi \nu}$$

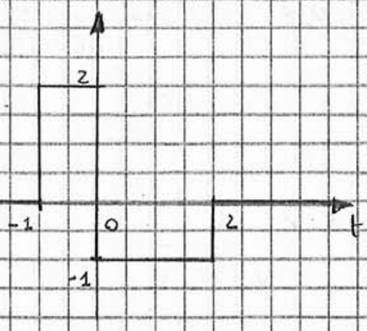
9) $g(t) = \mathbb{1}_{[a,b]} = p_{(b-a)}\left(t - \left(\frac{b+a}{2}\right)\right)$



$$\mathcal{F}\left(p_{(b-a)}\left(t - \left(\frac{b+a}{2}\right)\right)\right)(\nu) = e^{-2\pi i \nu \left(\frac{b+a}{2}\right)} \cdot \mathcal{F}\left(p_{(b-a)}(t)\right) =$$

$$= e^{-\pi i \nu (b+a)} \cdot \frac{\sin\left((b-a)\pi\nu\right)}{\pi \nu}$$

10) $g(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1<t<0 \\ -1 & \text{se } 0<t<2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = 2p_1\left(t+\frac{1}{2}\right) - p_2(t-1)$



$$\mathcal{F}\left(2p_1\left(t+\tfrac{1}{2}\right)\right)(\nu) - \mathcal{F}\left(p_2(t-1)\right)(\nu) =$$

$$= 2e^{-2\pi i \nu\left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot \mathcal{F}\left(p_1(t)\right) - e^{-2\pi i \nu (1)} \cdot \mathcal{F}\left(p_2(t)\right) =$$

$$= 2e^{\pi i \nu} \cdot \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi \nu} - e^{-2\pi i \nu} \cdot \frac{\sin(2\pi\nu)}{\pi\nu}$$

11) $g(t) = t \cdot e^{-\frac{|t+2|}{2}}$

$$\mathcal{F}\left(t \cdot e^{-\frac{|t+2|}{2}}\right)(\nu) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\mathcal{F}\left(e^{-|t+2| \cdot \frac{1}{2}}\right)\right)'(\nu) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(e^{+4\pi i \nu} \cdot \mathcal{F}\left(e^{-\frac{1}{2}|t|}\right)(\nu)\right)' = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(e^{4\pi i \nu} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4} + 4\pi^2\nu^2}\right)' =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\frac{16 i \pi\, e^{4 i \pi \nu}\left(16\pi^2\nu^2 + 8i\pi\nu + 1\right)}{\left(1 + 16\pi^2\nu^2\right)^2}\right)$$