NUMERO: 1187

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Pitruzzella

MATERIA: Vibration Mechanics + Eserc.

Prof. Fasana

SISTEMI A UN GRADO DI LIBERTA'

- Sistema libero
- Risposta al gradino e AMMETTENZA INDICIALE
- Risposta alla forzante armonica – diagramma del modulo e della fase.
- Diagramma di Bode per un sistema sottoposto ad una funzione armonica.
- Diagramma di Nyquist per un sistema sottoposto ad una forzante armonica
- Definizioni di FRF
  - → Recettanza $\alpha(\Omega)$
  - → MOBILITA' $Y(\Omega)$
  - → IMPEDENZA $Z(\Omega)$
  - → INERTANZA $I(\Omega)$
- TRASMISSIBILITA $|T|$ e forze scaricate a terra tramite il vincolo
- ACCELEROMETRO E SISMOGRAFO
- BATTIMENTO
  - → $\omega \to \omega_n$ → risonanza infinita.
  - → $\omega \simeq \omega_n$ → fenomeno del battimento
- PENDOLO →
  - schema
  - modellazione dell'attuato Columbiano
  - eq. del moto e risposta $\dot{\varepsilon} < 0$, $\dot{\varepsilon} > 0$
  - retta dei minimi e sue equazioni.
  - metodo d'identificazione DPE (stima dei parametri diretta)
- MASSA ECCENTRICA
- SMORZAMENTO ISTERETICO
  - lavoro dissipato in un ciclo
  - smorzatore viscoso equivalente e fattore di perdita η
  - Grafici
- RISPOSTA ALL'IMPULSO → DELTA DI DIRAC
- INTEGRALE DI CONVOLUZIONE → risposta ad una forzante casuale

SISTEMI A n GRADI DI LIBERTA'

- Equazione del moto di un sistema a n gradi di libertà
- matrice di massa di un sistema a n gradi di libertà simmetrica e definita positiva.
- Teorema di Maxwell-Betti e coefficienti d'influenza → dimostrazione che la matrice di rigidezza è simmetrica e semi-definita positiva.
- Problema agli autovettori e autovalori. $[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$
- Principio di ortogonalità
- Teorema di espansione e Trasformata modale
- Normalizzazione degli autovettori
- Analisi modale di un sistema a n gradi di libertà con smorzamento proporzionale:
  $$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\}$$
  con $[c] = \alpha[m] + \beta[K]$
  - Risposta libera transitorio ⇒ $[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$
  - Integrale particolare - soluzione a regime.
  - Risposta ad una forzante armonica
    - recettanza $\alpha_{sK}(\Omega)$
    - recettanza in funzione dei parametri modali
    - Diagrammi per far evidenziare la risonanza e l'antirisonanza
      - recettanza punto-punto
      - recettanza incrociata.

- Analisi modale di un sistema viscoso non proporzionale.
  - Metodo di Duncan e spazio degli stati.
  - Risposta dell'omogenea associata
  - Risposta forzata.
  - Risposta ad una forzante armonica.

- Sistemi con un modello di smorzamento isteretico.

ANALISI DEI SEGNALI

- Distribuzione di densità di probabilità
  - definizioni.
  - Distribuzione uniforme e rettangolare
  - Distribuzione gaussiana.

- Parametri caratteristici delle variabili casuali
  - valore medio μ_x
  - Varianza σ_x^2 – Deviazione standard σ_x
  - Valore quadratico medio Ψ_x^2 – RMS Ψ_x
  - relazione tra μ_x, σ_x^2 e Ψ_x^2
  - miglior stima del parametro caratteristico
  - momenti statici del 2° ordine. (Skewness, Kurtosis)

- Funzione di Autocorrelazione R_{xx}
  - processo stazionario
  - processo ERGODICO

- Funzione di Correlazione incrociata R_{xy}
  - Calcolo di $R_{xy}(-\tau)$
  - Calcolo di $R_{xx}(-\tau)$

→ Definizione di Densità spettrale di potenza $S_{xy}(\Omega)$ e di AUTOSPETTRO $S_{xx}(\Omega)$ e loro proprietà

→ $R_{xx}(\tau=0) = RMS^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\Omega)\, df$ ⇒ Definizione e utilizzo del PERIODOGRAMMA

→ Stima delle funzioni di risposta in frequenza.
  → definizione di H_1 ed H_2
  → definizione di ~~funzioni~~ di coerenza γ_{xy}^2

⇒
  - sistema SISO ~ rumore in uscita
  - sistema SISO ~ rumore in entrata
  - sistema SISO – rumore in uscita e in entrata
  - Andamento della coerenza in funzione di Ω
  - sistema MIMO – con rumore in uscita.

→ Calcolo della funzione di autocorrelazione per un segnale armonico.

→ Conversione Analogico – digitale.

→ Trasformata di Fourier discreta →
  - Definizione di DFT e sue proprietà
  - Risoluzione in frequenza.
  - Operazioni di Zero Padding.

→ leakage e finestre utilizzate – tecnica overlapping.

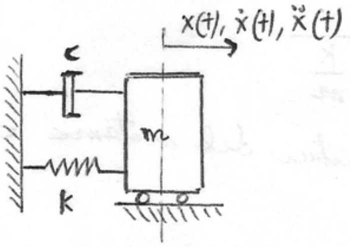
SISTEMI A UN GRADO DI LIBERTA' — 1ª LEZIONE

- SISTEMA LIBERO

Gli elementi di cui si compone il sistema oggetto di studio sono:

- un elemento di massa, caratterizzato dalla costante m ed infinitamente rigido
- un elemento molla, lineare, privo di massa, incapace di dissipare energia e che produce una forza di richiamo elastico proporzionale, tramite la rigidezza k, allo spostamento relativo dei suoi estremi.
- un elemento smorzante viscoso, anch'esso lineare e privo di massa, deputato a rappresentare tutte le forme di dissipazione eventualmente presenti e che produce una forza proporzionale, tramite la costante c, alla velocità relativa ai due estremi.

Quindi lo schema sarà:



$m \Rightarrow$ massa vincolata a traslare orizzontalmente
$K \Rightarrow$ rigidezza della molla
$c \Rightarrow$ costante di smorzamento viscoso.

Prendiamo in esame la risposta libera, ovvero l'andamento nel tempo del moto della massa a partire da generiche condizioni iniziali.

Con $x(t)$ si indica lo spostamento della massa m a partire dalla configurazione di equilibrio statico, il che permette di affermare che se anche il moto avvenisse in direzione verticale non si dovrebbe tener conto della forza peso in quanto già bilanciata dalla forza statica di richiamo elastico della molla.

L'equazione di equilibrio alla traslazione ci dice che:

$$① \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

Essendo l'eq. del moto libero non vi sono forze esterne applicate e la molla viene considerata lineare

Si ha un'equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti ed omogenea, la cui soluzione avrà la forma:

$$x(t) = Ae^{st}$$

dove A ed s sono due costanti eventualmente complesse.

Derivando la soluzione si ottiene:

$$\dot{x}(t) = As\,e^{st}$$
$$\ddot{x}(t) = As^2 e^{st}$$

Sostituendo nella ① si ottiene:

le condizioni iniziali sono caratterizzate da uno spostamento iniziale:

$$x(t=0) = x_0$$

e da una velocità iniziale:

$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

si ha che

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \quad ; \quad s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

la soluzione della 1 : $\ddot{x}m + \dot{x}c + kx = 0$ diventa:

$$x(t) = A_1 e^{s_1} + A_2 e^{s_2}$$

dove le costanti A_1 ed A_2 si trovano imponendo le due condizioni iniziali.
La soluzione ci restituisce uno spostamento $x(t)$ che col passare del tempo decresce, tornando a zero.

- Se $\boxed{\xi = 1}$ $\Rightarrow$ SISTEMA CRITICAMENTE SMORZATO

Gli zeri sono coincidenti:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

La soluzione assume la forma:

$$x(t) = (A_1 + A_2)e^{-\omega_n t}$$

Anche questa soluzione decresce nel tempo. Le costanti A_1 ed A_2 si trovano imponendo le condizioni iniziali.

- Se $\boxed{\xi < 1}$ $\Rightarrow$ SISTEMA SOTTOSMORZATO

È la situazione che normalmente si riscontra nella pratica.
Considerando l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ le due soluzioni diventano:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

cioè abbiamo due soluzioni complesse e coniugate.
La soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x}m + \dot{x}c + Kx = 0$ diventa:

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

sostituendo s_1 ed s_2 si ha:

$$x(t) = A_1 e^{-\xi\omega_n t} e^{-i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t} + A_2 e^{-\xi\omega_n t} e^{i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t}$$

Indichiamo con:

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ $\Rightarrow$ PULSAZIONE DEL SISTEMA SMORZATO

quindi:

$$x(t) = A_1 e^{-\xi\omega_n t} e^{-i\omega_d t} + A_2 e^{-\xi\omega_n t} e^{i\omega_d t}$$

Cioè si dice che:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A_2^* \\ B_1 = B_2^* \end{array}\right\}$$ con * si indica il complesso coniugato.

Sostituendo nella:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[(A_1+A_2)\cos\omega_d t + i(A_2-A_1)\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\right]$$

si ottiene:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[x_0\cos\omega_d t + \frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\right]$$

indichiamo con:

$$a = x_0$$

$$b = \frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}$$

L'espressione:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[a\cos\omega_d t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\right]$$ ⇒ rappresenta una funzione armonica.

Equivalentemente quest'ultima può essere scritta come:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[a\cos\omega_d t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\right] =$$

$$= e^{-\xi\omega_n t}\left[d\cos(\omega_d t + \vartheta)\right] =$$

$$= e^{-\xi\omega_n t}\left[d\,\mathrm{sen}(\omega_d t + \alpha)\right]$$

dove d è l'ampiezza modulata dal coefficiente $e^{-\xi\omega_n t}$.

Il precedente passaggio può essere dimostrato nel seguente modo:

$$d\,\mathrm{sen}(\omega_d t + \underset{\text{fase o angolo di fase}}{\alpha}) = d\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\cos\alpha + d\cos\omega_d t\,\mathrm{sen}\,\alpha =$$

$$= \underbrace{d\cos\alpha}_{\parallel a}\,\mathrm{sen}\,\omega_d t + \underbrace{d\,\mathrm{sen}\,\alpha}_{\parallel b}\cos\omega_d t =$$

$$= a\,\mathrm{sen}\,\omega_d t + b\cos\omega_d t$$

La funzione:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[a\cos\omega_d t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\right]$$

rappresenta una funzione armonica con andamento (ampiezza) decrescente.

Il termine tra parentesi rappresenta una oscillazione armonica di

pulsazione $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

periodo $T_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d}$

La differenza tra pulsazione naturale e pulsazione del sistema smorzato è di solito piccola.

Supponendo che:

$\omega_n = 20$ rad/s
$\xi = 4\% = \frac{4}{100}$
$\Rightarrow$ si ha: $\omega_d \cong 19,98$ rad/s

si ha cioè una differenza di un millesimo e quindi agli effetti pratici tale differenza è trascurabile.

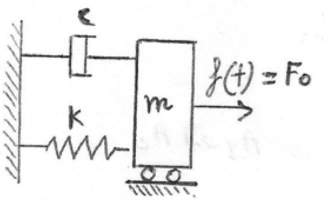
Per far sì che l'ampiezza di oscillazione passi dal valore massimo al 5% del valore massimo occorrono circa 12 oscillazioni, quindi la presenza dello smorzamento è fisicamente visibile.

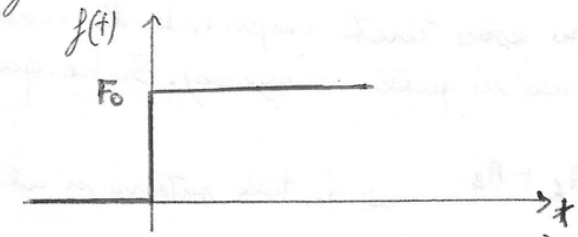
Inoltre l'oscillazione non andrà mai a zero nei modelli matematici in quanto $e^{-\xi\omega_n t}$ non va mai a zero mentre nella realtà sì.

o

— RISPOSTA AL GRADINO

Si consideri il sistema schematizzato in figura sottoposto all'azione di una forza esterna $f(t)$ costante. Tale forza viene detta FORZANTE A GRADINO.





L'applicazione della forzante costante viene utilizzata nei test di creep.

L'equazione di equilibrio della massa è per $t \geq 0$ del tipo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0$$

le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases}$$

La soluzione è data dalla sovrapposizione dell'integrale particolare dell'equazione completa $x_p(t)$ e dell'integrale generale dell'omogenea associata $x_G(t)$.

$$x(t) = \underbrace{x_p(t)}_{\text{Integrale particolare che rappresenta la soluzione a regime}} + \underbrace{x_G(t)}_{\text{Integrale generale dell'omogenea associata } m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0\text{, che descrive il comportamento del sistema durante il transitorio.}}$$

La soluzione diventa:

$$x(t) = \frac{f_0}{k} + e^{-\xi\omega_n t}\left[a \cos\omega_d t + b \operatorname{sen} \omega_d t\right]$$

Troviamo a e b imponendo le condizioni iniziali:

$$x(t=0) = 0 = \frac{f_0}{k} + a$$

inoltre:

$$\dot{x}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left[a \cos\omega_d t + b \operatorname{sen}\omega_d t\right] + e^{-\xi\omega_n t}\omega_d\left[-a \operatorname{sen}\omega_d t + b \cos\omega_d t\right]$$

quindi:

$$\dot{x}(t=0) = -\xi\omega_n a + \omega_d b = 0$$

si ottiene quindi il sistema:

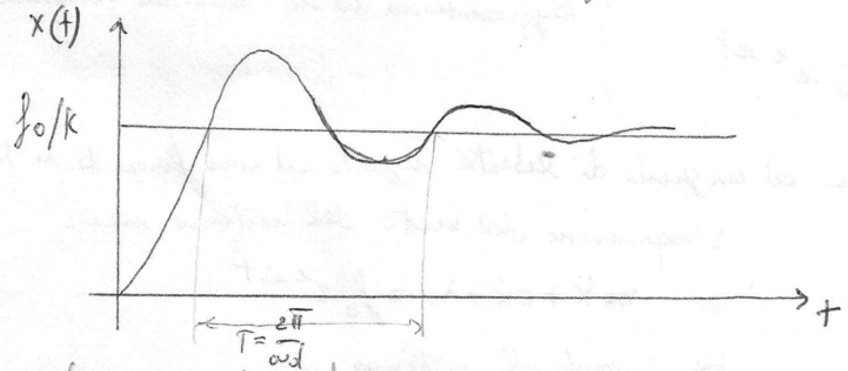
$$\begin{cases} \frac{f_0}{k} + a = 0 \\ -\xi\omega_n a + \omega_d b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{f_0}{k} \\ b = -\frac{\xi\omega_n \frac{f_0}{k}}{\omega_d} = -\frac{\xi\omega_n f_0}{k\omega_d} = -\frac{\xi\omega_n f_0}{k\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{f_0}{k}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$$

sostituendo si ottiene:

$$x(t) = \frac{f_0}{k} + e^{-\xi\omega_n t}\left[-\frac{f_0}{k}\cos\omega_d t - \frac{f_0}{k}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right] =$$

$$= \frac{f_0}{k}\left[1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right)\right].$$

L'andamento della risposta $x(t)$ è il seguente:



Se il gradino è unitario $f_0 = 1\,[N]$ la risposta assume il nome di AMMETTENZA INDICIALE

Derivando si ottiene

$$\dot{x} = i\Omega X e^{i\Omega t}$$
$$\ddot{x} = i^2\Omega^2 X e^{i\Omega t} = -\Omega^2 X e^{i\Omega t}$$

sostituendo nella (1) si ottiene:

$$-m\Omega^2 X \cancel{e^{i\Omega t}} + c i\Omega X \cancel{e^{i\Omega t}} + K X \cancel{e^{i\Omega t}} = f_0 \cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$X\left(K - m\Omega^2 + ci\Omega\right) = f_0$$

quindi si ha che

Ampiezza della forza.

$$X = \frac{f_0}{K - m\Omega^2 + ci\Omega}$$ è una quantità complessa.

ciò non sorprende in quanto la funzione in ingresso $f_0 e^{i\Omega t}$ è complessa e quindi anche l'uscita è complessa.

Il numero X può essere espresso anche in funzione del suo modulo $|X|$ e della sua fase φ, o anomalia o sfasamento, cosicché lo spostamento (risposta) a regime sarà:

$$x(t) = X e^{i\Omega t} = |X| e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

se dunque l'ingresso fosse nella forma:

$$f(t) = f_0 \cos \Omega t = \mathrm{Re}\left(f_0 e^{i\Omega t}\right)$$

l'uscita sarebbe:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[|X| e^{i(\Omega t + \varphi)}\right] = |X| \cos(\Omega t + \varphi)$$

se l'ingresso fosse nella forma:

$$f(t) = f_0 \,\mathrm{sen}\, \Omega t = \mathrm{Im}\left(f_0 e^{i\Omega t}\right)$$

l'uscita sarebbe:

$$x(t) = \mathrm{Im}\left[|X| e^{i(\Omega t + \varphi)}\right] = |X| \,\mathrm{sen}(\Omega t + \varphi)$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si può calcolare in modo analogo la risposta ad una forzante nella forma $f_1 \cos(\Omega t) + f_2 \,\mathrm{sen}(\Omega t)$.

La differenza tra l'ingresso e l'uscita sta nello sfasamento φ che prende il nome di <u>FASE</u> o anche <u>RITARDO</u> (poiché all'angolo φ si può associare un tempo), che ci dice di quando la risposta giunge in ritardo rispetto all'applicazione del carico.

Il modulo di x, cioè $|X|$ ci dice di quanto si sposta la massa rispetto alla posizione iniziale in seguito all'applicazione del carico.

Nel caso in cui lo smorzamento è nullo $\xi=0$, quando $r=1$ cioè $\Omega=\omega_n$ l'ampiezza delle oscillazioni tende ad infinito, si dice che il sistema è nelle condizioni di RISONANZA.

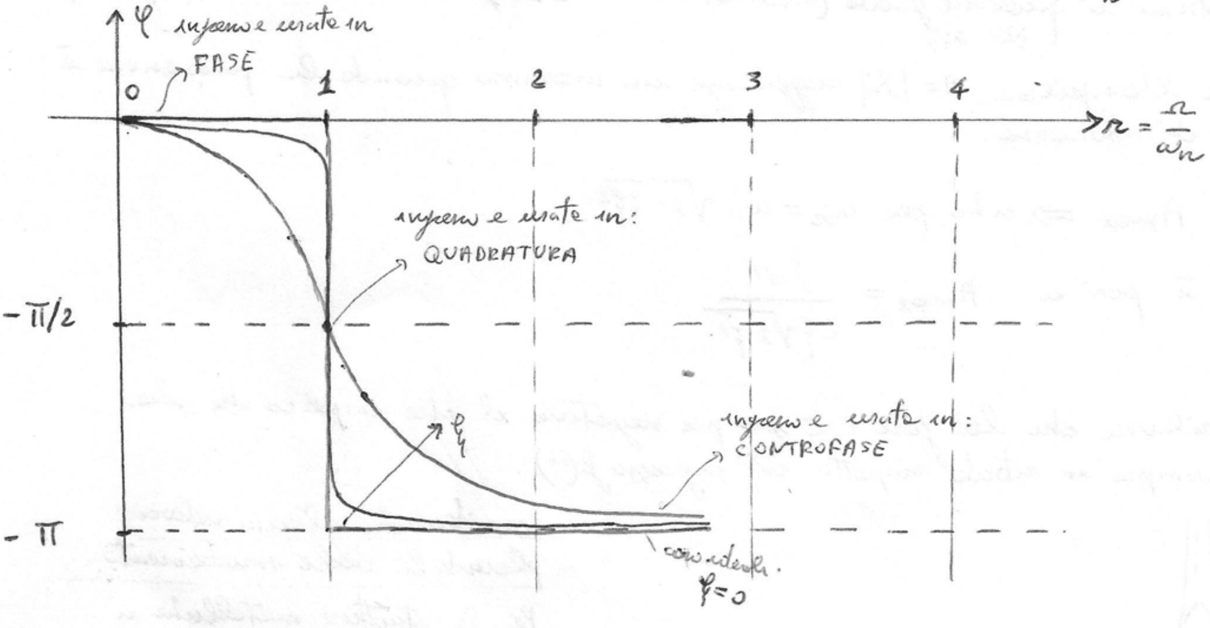
Nel caso in cui lo smorzamento non è nullo $\xi\neq 0$ per $\omega_r=\Omega$ si ha un massimo. Tale massimo si trova imponendo che:

$$\frac{\partial A}{\partial r}=0 \Rightarrow \Omega=\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow$$ ω_r è detta FREQUENZA DI RISONANZA

questa relazione (e quindi l'esistenza di ω_r) è reale finché il radicando è positivo. Quindi ω_r esiste solo per $\xi<\frac{\sqrt{2}}{2}$, per valori superiori non si ha più risonanza e la curva si appiattisce senza massimo.

Indipendentemente dal valore dello smorzamento ξ, per valori di $\Omega\to 0$ e quindi $r\to 0$ siamo in una situazione di applicazione statica della forza e l'ampiezza delle oscillazioni rappresenta lo spostamento della massa attorno alla posizione di equilibrio cioè pari a F_0/K. Per valori di frequenza elevati $\Omega\gg\omega_n$ e quindi per $r\to\infty$ si hanno ampiezze molto piccole in quanto se impongo frequenze molto elevate ovvero accelerazioni molto elevate e quindi la forza d'inerzia è elevata a cui devono corrispondere ampiezze molto piccole tendenti a zero.
Quindi a frequenze elevate per sportare un effetto dovrò imporre forze elevate.

• Consideriamo l'andamento della fase φ in funzione del rapporto $r=\frac{\Omega}{\omega_n}$



Si osserva che per $r=0$ si ha che qualsiasi sia lo smorzamento si ha $\varphi=0$ cioè non vi è ritardo.
Quando $r=1 \Rightarrow \omega_n=\Omega$ la fase φ per $\xi=0$ (assenza di smorzamento) assume una forma indeterminata passando da 0 a $-\pi$ e si dice che il sistema è in condizioni di risonanza.

Facendo i calcoli si ottiene:

$$\zeta = 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\omega_r}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta^2} = 0{,}997$$

$$\zeta = 0{,}10 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\omega_r}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta^2} = 0{,}990$$

Quindi lo smorzamento ζ influenza poco il valore della frequenza di risonanza ω_r. Molto spesso il valore della pulsazione di risonanza ω_r si confonde con la frequenza naturale del sistema ω_n anche se le due grandezze sono fisicamente differenti.

Consideriamo alcuni valori numerici di Ω/ω_n:

Pulsazione con cui eccitiamo il sistema piccola rispetto a quella naturale. $\frac{\Omega}{\omega_n} = 0{,}5$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{A}{f_0/K} = 1{,}314 & \text{con } \zeta = 0{,}05 \\ \frac{A}{f_0/K} = 1{,}305 & \text{con } \zeta = 0{,}10 \end{cases}$$

Condizione di risonanza. $\frac{\Omega}{\omega_n} = 1$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{A}{f_0/K} = 10{,}01 & \text{con } \zeta = 0{,}05 \\ \frac{A}{f_0/K} = 5{,}01 & \text{con } \zeta = 0{,}10 \end{cases}$$

Quindi se siamo distanti dalla zona di risonanza le due curve di A in funzione di Ω si sovrappongono mentre sono diverse in prossimità della risonanza

⇓

Gli effetti dello smorzamento si vedono solo in prossimità della risonanza:
- smorzamenti piccoli ⇒ curve ripide
- smorzamenti alti ⇒ curve piatte

Quando da una curva A in funzione di Ω si vogliono vedere gli effetti dello smorzamento che dissipa energia si deve andare a la zona di risonanza.

La presenza dello smorzamento a parità di forza esterna riduce le ampiezze di oscillazione dissipando energia.

- <u>DIAGRAMMA DI BODE DEL SISTEMA CON SMORZAMENTO VISCOSO</u>

Le quantità che descrivono l'ampiezza $A=|X|$ e la fase φ della risposta di un sistema ad un grado di libertà sottoposto a forzante armonica possono essere rappresentate anche attraverso un <u>diagramma di BODE</u>.

Si considera l'ampiezza delle oscillazioni $|X|$ rispetto ad un valore di riferimento che nel nostro caso è f_0/K che rappresenta lo spostamento statico della massa (spostamento che la massa compie se sottoposta ad una forza costante di ampiezza f_0):

$$\frac{|X|}{f_0/K} = \frac{A}{\delta_{statico}} = Q(\Omega) \Longrightarrow$$ viene detto <u>GUADAGNO</u> o <u>FATTORE DI AMPLIFICAZIONE</u>

Il modulo del guadagno $|Q(\Omega)|$ molto spesso viene espresso in decibel che è definito come 20 volte il logaritmo della quantità considerata (nel nostro caso $|Q(\Omega)|$)

$$|Q|_{dB} = 20 \log |Q(\Omega)|$$

• DIAGRAMMA DI NYQUIST DEL SISTEMA CON SMORZAMENTO VISCOSO

La quantità che descrivono l'ampiezza $A=|X|$ e la fase φ della risposta di un sistema ad un grado di libertà sottoposto a forzante armonica può essere rappresentato attraverso un diagramma di Nyquist.

Se

$$X = \frac{f_0}{K - m\Omega^2 + ic\Omega}$$

possiamo separare la parte reale da quella immaginaria:

$$X = \frac{f_0\left[(K-m\Omega^2) - i\Omega c\right]}{\left[(K-m\Omega^2)^2 + (\Omega c)^2\right]}$$

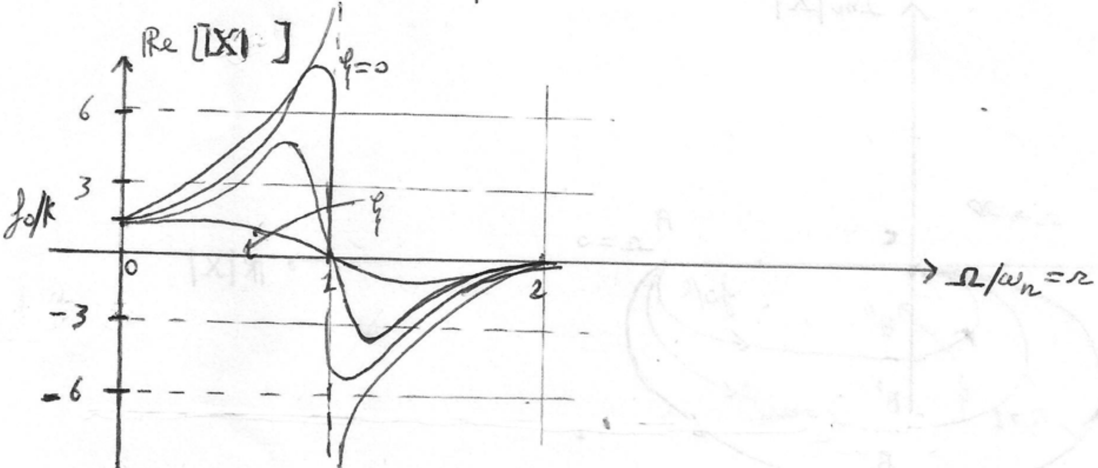
metto in evidenza k ottenendo:

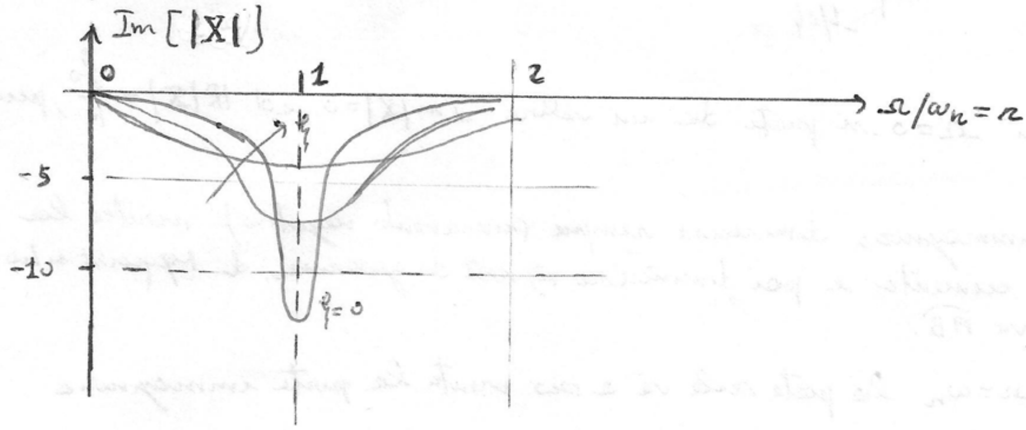
$$X = \frac{f_0 k\left[(1-r^2) - i(2\xi r)\right]}{k^2\left[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2\right]} = \frac{f_0\left[(1-r^2) - i(2\xi r)\right]}{k\left[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2\right]}$$

Possiamo riportare parte reale e parte immaginaria nel piano di Argand-Gauss.

Infatti:

$$\frac{X}{f_0/k} = Q(r) = \frac{\left[(1-r^2) - i(2\xi r)\right]}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$





assume il valore $-\frac{1}{2\xi}$, ossia nel punto B del diagramma.

se $\Omega > 1$ la parte immaginaria cresce mentre quella reale diventa negativa $\Rightarrow$ nel diagramma di Nyquist si trovano i punti sulla curva $\overline{BC}$.

se $\Omega \gg 1$ e quindi $\Omega \to \infty$ si ha che sia la parte immaginaria che quella reale vanno a zero, punto C.

In alcuni casi la curva di Nyquist è un cerchio.

All'aumentare dello smorzamento diminuisce la parte immaginaria e le curve di Nyquist si riducono diventando più piccole, ma passano sempre per i punti C ed A, quindi anche con questa rappresentazione l'effetto dello smorzamento è più evidente nella parte della risonanza caratterizzata dai punti sull'asse verticale.

→ DEFINIZIONI DI FRF

Tutte le funzioni dipendenti dalla pulsazione della forzante armonica Ω:

$$X = \frac{f_0}{k - m\Omega^2 + ic\Omega}$$

$$Q = \frac{X}{f_0/K}$$

vengono generalmente indicate come FUNZIONI DI RISPOSTA IN FREQUENZA (FRF) indipendentemente dal fatto che rappresentino una grandezza fisica o il rapporto tra esse.
Queste ci dicono come risponde un certo sistema ad un ingresso che sia di forma armonica.

Nel campo della meccanica delle vibrazioni tra le FRF usate vi è:

- La RECETTANZA $\alpha(\Omega)$ che è il rapporto tra lo spostamento e la forza

$$\boxed{\alpha(\Omega) = \frac{X}{f_0}}$$

Ampiezza della risposta rispetto a quella della forza entrante.

- La MOBILITA' $Y(\Omega)$ che è il rapporto tra la velocità e la forza.

La velocità è data dalla derivata della risposta:

$$x(t) = X e^{i\Omega t}$$

$$\dot{x}(t) = i\Omega X e^{i\Omega t} = V e^{i\Omega t}$$

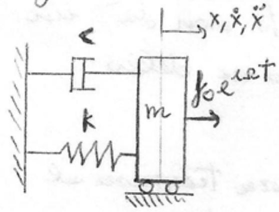
$V = (i\Omega X)$ ci dice quanto è grande la velocità al variare della pulsazione.

quindi:

$$\boxed{Y(\Omega) = \frac{V}{f_0} = \frac{i\Omega X}{f_0}}$$

Osserviamo che tutte le grandezze appena definite valgono quando si ha un ingresso di tipo armonico.

Si definisce TRASMISSIBILITA' T del sistema il rapporto tra la forza applicata e la forza che si scarica a terra tramite il vincolo. Più in generale si indica con trasmissibilità il rapporto tra le due grandezze commensurabili una delle quali è interpretata come ingresso e l'altra come uscita.



$$T = \frac{f_v(t)}{f(t)} = \frac{(K + i\Omega c)X}{f_0}$$

Frequentemente tale rapporto viene indicato come rapporto "MONTE/VALLE".

Essendo:

$$X = \frac{f_0}{K - m\Omega^2 + i c\Omega}$$

si ha:

$$T(\Omega) = (K + i\Omega c) \cdot \frac{1}{K - m\Omega^2 + i\Omega c}$$

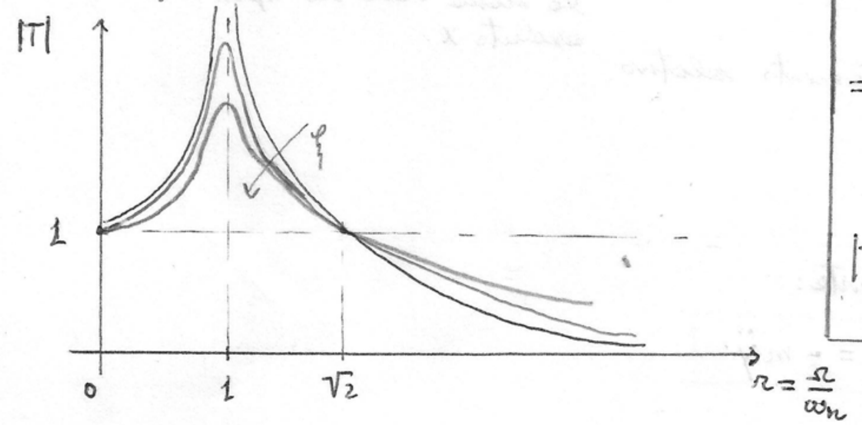
Il modulo della trasmissibilità è dato da:

$$|T| = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

dove $r = \frac{\Omega}{\omega_n}$.

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{K + i\Omega c}{K - m\Omega^2 + i\Omega c} &= \frac{\frac{K}{K} + \frac{i\Omega c}{K}}{\frac{K}{K} - \frac{m\Omega^2}{K} + \frac{i\Omega c}{K}} = \\
&= \frac{1 + i\frac{\Omega c}{K}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + \frac{i\Omega c}{K}} = \frac{1 + i\left(\frac{\Omega c}{K}\right)\frac{2\sqrt{Km}}{2\sqrt{Km}}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + \frac{i\Omega c}{K}\frac{2\sqrt{Km}}{2\sqrt{Km}}} = \\
&= \frac{1 + i\frac{\Omega 2\sqrt{Km}}{K}\cdot\frac{c}{2\sqrt{Km}}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + \frac{i\Omega 2\sqrt{Km}}{K}\cdot\frac{c}{2\sqrt{Km}}} = \\
&= \frac{1 + i\frac{\Omega 2\sqrt{Km}\,\xi}{K}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + \frac{i\Omega 2\sqrt{Km}\,\xi}{K}} = \\
&= \frac{1 + i2\xi\Omega\frac{\sqrt{K}\sqrt{m}}{\sqrt{K}\sqrt{K}}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\Omega\xi\frac{\sqrt{K}\sqrt{m}}{\sqrt{K}\sqrt{K}}} = \\
&= \frac{1 + \frac{i2\xi\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2i\xi\Omega}{\omega_n}} = \frac{\overbrace{1}^{Re_N} + \overbrace{i2\xi r}^{Im_N}}{\underbrace{1 - r^2}_{Re_D} + \underbrace{2i\xi r}_{Im_D}} \\
|T| &= \frac{\sqrt{Re_N^2 + Im_N^2}}{\sqrt{Re_D^2 + Im_D^2}}
\end{aligned}}$$

Il grafico del modulo della trasmissibilità in funzione di r è il seguente:



Se $r = 0$ applico una forza costante e si ha che $|T| = 1$ quindi a terra arriva esattamente la forza f_0.

Se $r = 1$ si ha che $|T|$ tende ad infinito, si ha un'amplificazione della forza che viene scaricata a terra.

Se $r = \infty$ si ha che $|T|$ tende a zero, si annulla la forza che viene scaricata a terra.

Un altro metodo è quello di esplicitare il secondo termine:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx = Ky + c\dot{y} = Ky_0 e^{i\Omega t} + i c\Omega y_0 e^{i\Omega t} = \underbrace{(K+i\Omega c)\, y_0}_{F_0} e^{i\Omega t}$$

Esplicitiamo il secondo termine:

$$m\ddot{z}+c\dot{z}+Kz = -m\ddot{y} = -m\left(i^2 y_0 \Omega^2\right) e^{i\Omega t} = m y_0 \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

chiamiamo con $F_0 = m y_0 \Omega^2$ che non sarà un termine costante ma varia con Ω.

$$m\ddot{z}+c\dot{z}+Kz = F_0 e^{i\Omega t}$$

La risposta sarà del tipo:

$$z(t) = Z e^{i\Omega t} = A e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

il cui modulo è dato da:

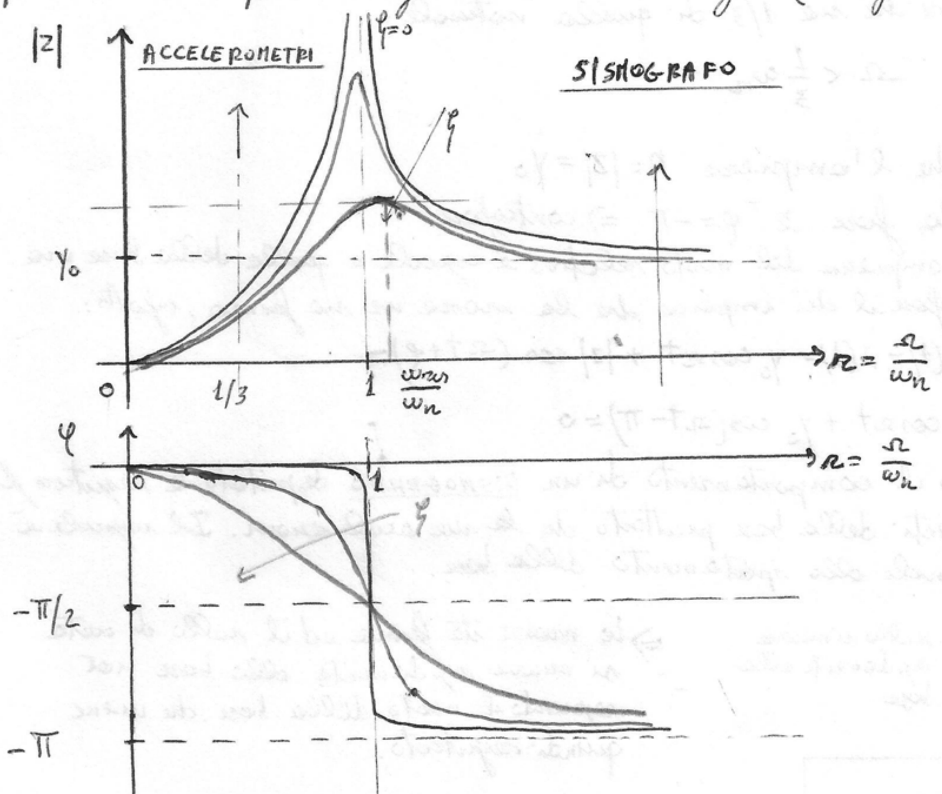
$$|Z| = A = \frac{\dfrac{m y_0 \Omega^2}{K}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = y_0 \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

mentre la fase è data da:

$$tg\,\varphi = -\frac{2\xi r}{1-r^2}$$

Nel caso di tale sistema possiamo allora studiare lo spostamento relativo.

Riportiamo l'ampiezza in funzione di r e la fase φ in funzione di r.



BATTIMENTO

Le espressioni finora trovate e, di conseguenza, i grafici tracciati indicano essenzialmente che l'ampiezza di oscillazione dipende in modo marcato non solo dall'intensità della forza applicata ma anche dalla frequenza alla quale essa agisce sul sistema.
Consideriamo la risposta di un sistema sollecitato da una forzante armonica nella condizione di regime in cui il transitorio si è estinto e la soluzione è caratterizzata dal solo integrale particolare.
Dall'equazione:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

la risposta è del tipo:

$$x(t) = x_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

φ ritardo di fase.

Si suppone di non considerare l'integrale generale in quanto nei sistemi reali vi è sempre un'azione smorzante che prima o poi fa esaurire la risposta generale. Però il tempo in cui agisce l'integrale generale può essere grande e quindi diventa d'interesse studiare anche il transitorio.

Poniamo lo smorzamento uguale a zero $c=0$, l'equazione dinamica diventa:

$$m\ddot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t$$

il secondo termine può essere scritto come $F_0 e^{i\omega t}$ che comprende il caso di funzione seno e funzione coseno.

La risposta è:

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

l'integrale generale dell'omogenea associata sarà: $x_g(t) = a \cos \omega_n t + b \operatorname{sen} \omega_n t$

l'integrale particolare sarà: $x_p(t) = \dfrac{F_0}{K - m\omega^2} \cos \omega t$ $\Rightarrow$ non vi è la fase φ in quanto non vi è smorzamento.

In assenza di smorzamento la risposta completa sarà:

$$x(t) = \underbrace{a \cos \omega_n t + b \operatorname{sen} \omega_n t}_{} + \frac{F_0}{K - m\omega^2} \cos \omega t$$

essendo $c \neq 0$ non si esaurisce mai (non vi è il termine esponenziale che fa esaurire la risposta del sistema libero)

Consideriamo le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Si ha che

$$x(0) = a + \frac{F_0}{K - m\omega^2} = x_0$$

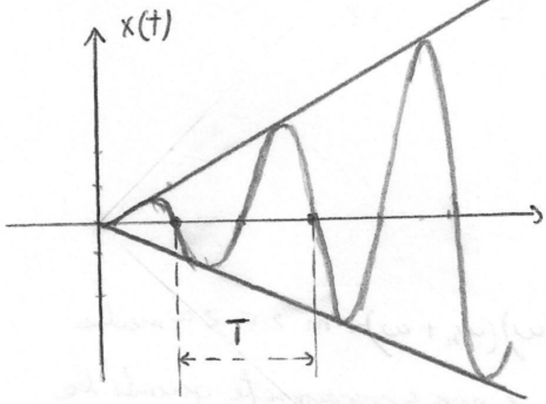
$= \dfrac{F_0}{2m\omega_n} t \operatorname{sen} \omega_n t$

quindi si ha che:

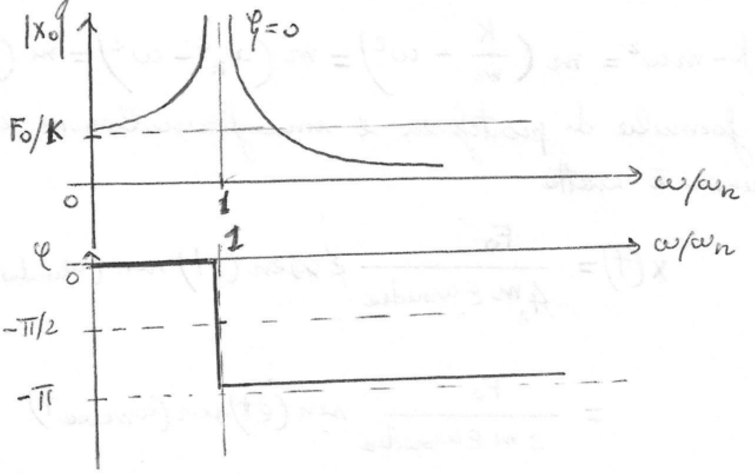
$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_n} t \operatorname{sen} \omega_n t}$$

soluzione completa dell'eq. in assenza di smorzamento.

Nella soluzione vi è il termine t che non rende armonica la soluzione.
La risposta ha un andamento crescente con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$, cioè il fenomeno si amplifica.



Consideriamo che se lo smorzamento è nullo e siamo nelle condizione di risonanza $\omega = \omega_n$ nel diagramma di Bode si osserva un comportamento anomalo dove l'ampiezza è infinita e la fase è indeterminata (o di 90° facendo un'estensione).



Nella realtà ciò che succede nella zona di risonanza considerando uno smorzamento nullo è descritto dal diagramma della funzione $x(t) = (F_0/2m\omega_n) t \operatorname{sen} \omega_n t$.

Il sistema in risonanza tende ad assumere un'ampiezza di oscillazione infinita ma in un tempo anch'esso infinito anche se, ovviamente il cedimento di una struttura reale si manifesta ben prima del raggiungimento di queste condizione. (non si ha cioè una risposta stazionaria come quelle che si possono considerare in altri punti del diagramma di Bode).

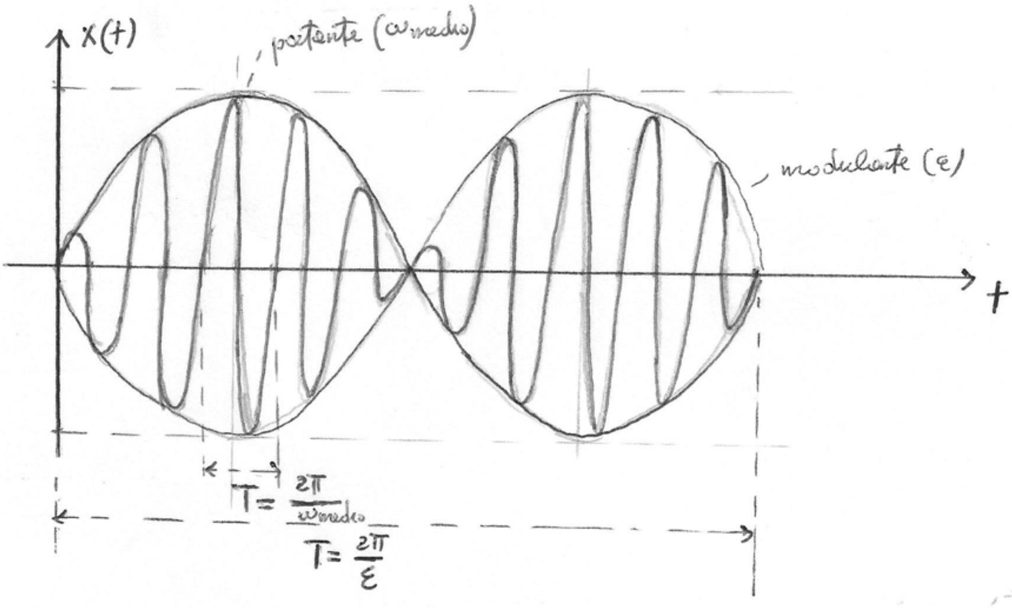
Tale fenomeno è la <u>RISONANZA INFINITA</u>.

Dal punto di vista ingegneristico si devono fissare due vincoli:
- in tutti i sistemi reali vi è smorzamento e quindi non si va ad infinito
- ho considerato un modello lineare (valido per piccoli spostamenti)

Però anche se nel sistema reale vi è smorzamento quando si ha una pulsazione di risonanza si hanno ampiezze elevate.

E' importante non confondere la <u>risonanza con l'instabilità</u>.
Nell'instabilità la tendenza di amplificazione è dovuta a dei fenomeni di natura interna che riguardano l'omogenea associata ed ha un andamento esponenziale rispetto alla risonanza che dipende da una forzante esterna.
Quindi l'origine dell'amplificazione tra risonanza e instabilità (aeroelastica) è diversa.

Il fenomeno generale è un'amplificazione e una riduzione periodica ⇒ (non è armonica), che prende il nome di battimento.

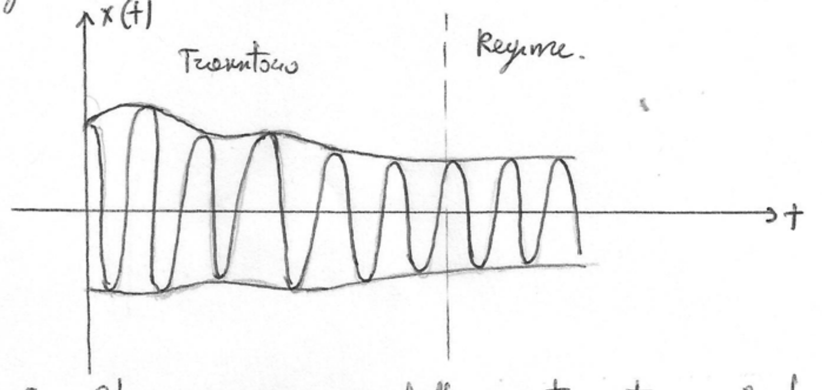


Quindi nel battimento si ha un'armonica di ampiezza elevata (ε è a denominatore) alla pulsazione ω_{m} detta portante, ampiezza però modulata da una seconda armonica di pulsazione ε detta modulante. Il battimento è il risultato della somma di due armoniche con frequenze vicine.

Per evidenziare il battimento non è sufficiente che le ampiezze siano vicine fra loro ma anche che le AMPIEZZE SIANO PARAGONABILI. A tale fenomeno è associato un fenomeno acustico quindi quando accade può essere udito.
Il battimento accade ogni qual volta si hanno forzanti armoniche che hanno pulsazioni ω_1 ed ω_2 vicine.

□.

Consideriamo che lo smorzamento non sia nullo ($c \neq 0$). La risposta può assumere la forma:



Se do una forzante armonica avrò una risposta con una zona di risposta a regime e una iniziale di transitorio (dove si ha un andamento che tende ad estinguersi). Il transitorio si estingue dopo un tempo che può essere anche lungo.

Se l'acquisizione viene fatta nel transitorio il diagramma di Bode non vale è sballato ⇒ il diagramma di Bode e la costruzione dell'FFT vale a regime.

Essendo:
$\overline{OD} = L$
$\zeta = 60\%$
$\theta_{max} = 5°$
$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{y}{L}\right)$
$\overline{AB} = R$
Determinare ω_n, ω_{ris}, K_T

• Determiniamo la rigidezza K_T

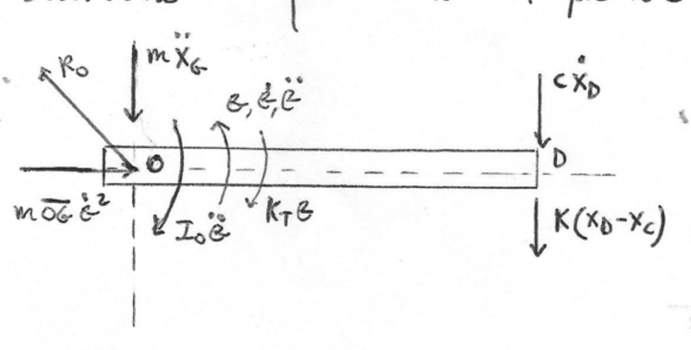
La molla rappresenta un'asta di rigidezza assiale K; la manovella è collegata ad un motore.
L'ampiezza dell'oscillazione dell'alettone dipende da K_T. Si è immaginato che vi sia uno smorzamento dovuto allo smorzatore tra il telaio e l'asta. Nella realtà non si ha uno smorzatore reale ma quest'ultimo rappresenta lo smorzamento del sistema che comunque esiste realmente. Si è assunto $\zeta = 60\%$.
Facendo oscillare a varie velocità è stato osservato che $\theta_{max} = 5°$ e ciò è concorde con l'ipotesi delle piccole oscillazioni.
Lo spostamento verticale del punto C è dato da:

$$x_C(t) = \overline{AB}\, \mathrm{sen}\,\alpha = R\, \mathrm{sen}\,\omega t$$

Il momento d'inerzia dell'alettone rispetto ad un asse trasversale passante per il punto O sarà dato da:

$$I_0 = \int_0^L \mu\, dy\, y^2 = \int_0^L \mu_0 \left(1 - \frac{y}{L}\right) y^2 dy = \mu_0 \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4L}\right]_0^L = \mu_0 \frac{1}{12} L^3$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene $I_0 = 1{,}042\,[kg \cdot m^2]$
Scriviamo l'equazione del moto per l'alettone.



le azioni che intervengono utilizzando il diagramma di corpo libero sono:
• il momento di richiamo elastico $K_T\theta$ (momento opposto alla rotazione)
• La forza peso non si mette in quanto pur non essendo trascurabile non è d'interesse (osserviamo che tale semplificazione non può essere sempre fatta).
• La forza lineare verso il basso dovuta all'azione dello smorzatore $c\dot{x}_D$
• La forza della molla $K(x_D - x_C)$.
• La forza d'inerzia dovrebbe essere applicata al baricentro ma in questo caso è difficile trovare il baricentro e quindi posso spostare la forza d'inerzia in un punto (origine) con un elemento di trasporto. Quindi la forza d'inerzia $m\ddot{x}_G$ viene spostata nel punto O.
• In più vi è la forza centrifuga $m\overline{OG}\,\dot{\theta}^2$ e la reazione vincolare R_0 inclinata come si vuole.

Quindi la nostra soluzione sarà la parte immaginaria della risposta $z = z_0 e^{i\omega t}$. A noi interessa solo l'ampiezza e lo sfasamento di z.
Quindi:

$$\theta_0 = \frac{KLR/K_{eq}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \qquad \text{dove } r = \frac{\omega_{ris}}{\omega_n} = \sqrt{1-2\xi^2}$$

si ha che:

$$\theta_{max} = \frac{KLR/K_{eq}}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}}$$

essendo θ_{max}, ξ, L, K noti dalla precedente ricavo il valore di K_{eq} pari a:

$$K_{eq} = 117\,100 \text{ Nm/rad}$$

essendo $K_{eq} = K_T + KL^2$ ricavo:

$$K_T = 19000 \text{ Nm/rad}$$

Posso ricavare:

$\omega_n = 335{,}2$ rad/s

$\omega_{ris} = 177{,}4$ rad/s

determino quindi la fase φ.

Poiché si è uno smorzamento molto alto del 60% si è una notevole differenza tra la pulsazione propria ω_n e quella di risonanza.
In questo caso quindi si vede come la risonanza è il valore di pulsazione in cui si ha il massimo dell'ampiezza.
□

Quindi ponendo $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$ si ha:

$$I_0\ddot{\theta} + mgl\theta = -c_0 \operatorname{sign}\dot{\theta}$$

con $I_0 = I_G + ml^2$

Per l'equazioni non lineari non esiste una soluzione valida per tutto ma soluzioni approssimate per il caso.

Per il caso in cui compare $\operatorname{sign}\dot{\theta}$ si osserva che per:

$\dot{\theta} > 0 \implies \operatorname{sign}\dot{\theta} = 1$

$\dot{\theta} < 0 \implies \operatorname{sign}\dot{\theta} = -1$

Fissiamo delle condizioni generali.

Facciamo delle misure spostando il peso dalla posizione iniziale di equilibrio e lasciando andare. Ciò comporta che all'inizio si avrà una velocità negativa $\dot{\theta} < 0$. Lasciare andare significa avere una condizione iniziale $\dot{\theta}(0) = 0$.

In questa prima fase l'eq. del moto diventa:

$$I_0\ddot{\theta} + mgl\theta = c_0 \implies \text{questa è un'equazione lineare.}$$

Osserviamo che la soluzione è data dall'integrale particolare più (non possiamo parlare di soluzione a regime nel caso del pendolo) l'integrale generale:

$$\theta(t) = \frac{c_0}{mgl} + a\cos\omega_n t + b\operatorname{sen}\omega_n t$$

dove:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{I_0}} \implies \text{pulsazione propria del pendolo}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\theta(0) = \frac{c_0}{mgl} + a = \theta_0 \implies a = \theta_0 - \frac{c_0}{mgl}$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega_n(-a\operatorname{sen}\omega_n t + b\cos\omega_n t)$$

$$\dot{\theta}(0) = b\omega_n = 0 \implies b = 0$$

Quindi:

$$\boxed{\theta_I = \frac{c_0}{mgl} + \left(\theta_0 - \frac{c}{mgl}\right)\cos\omega_n t} \implies$$

Soluzione relativa alla prima fase quella iniziale. valida per $t < t_1$

E' una funzione armonica a media non nulla. Questa vale fin tanto che $\dot{\theta} < 0$.

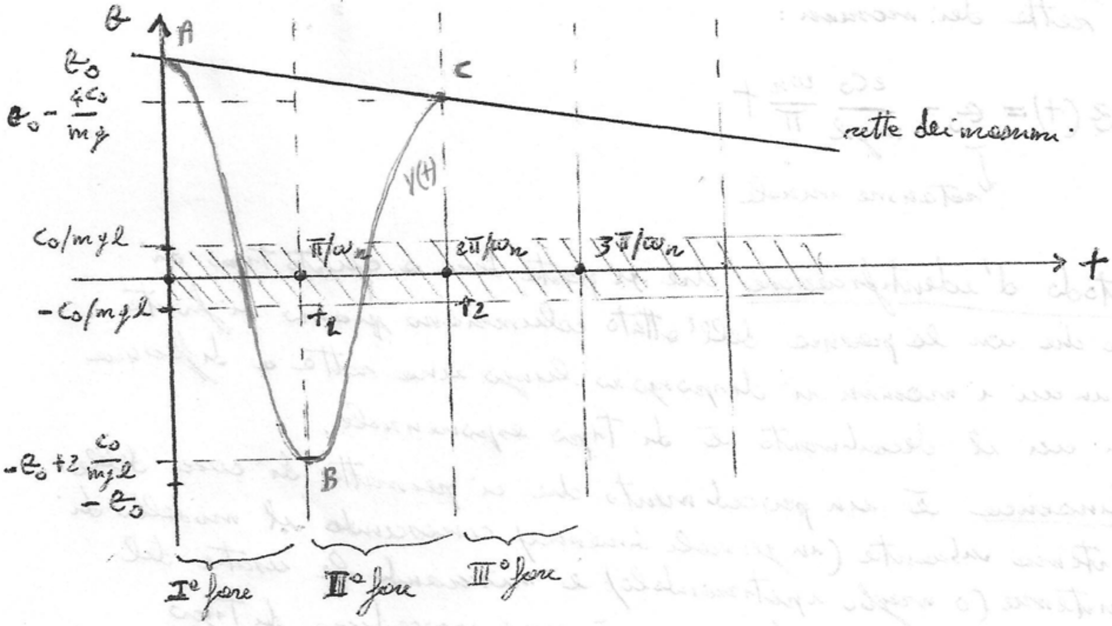
Calcoliamo la derivata prima per vedere quando cambia segno:

$$\dot{\theta}_I = \omega_n\left(\frac{c_0}{mgl} - \theta_0\right)\operatorname{sen}\omega_n t$$

trovare gli zeri della funzione è facile perchè compare $\operatorname{sen}\omega_n t$

Quindi:

c'è una certa periodicità nel campo di direzione:



Alla fine della seconda fase per $t = t_2$ l'ampiezza perde la quantità $4\frac{C_0}{mgl}$.

Nelle fasi iniziali guadagna una certa quantità.

Definisco un arco di inviluppo che passa da A e B e così faccio per gli altri punti.

La caratteristica di tale sistema è che i massimi stanno tutti su una stessa retta detta RETTA DEI MASSIMI.

Facciamo un'analogia con il decadimento esponenziale.

Osserviamo che la retta dei massimi non è tangente ai punti massimi A e C (contrariamente al decadimento esponenziale in cui vi è tangenza nei punti di contatto). Si ha un arresto (si estingue il moto) quando il massimo (o il minimo) si trovano in una zona morta compresa tra (C_0/mgl) e $(-C_0/mgl) \Rightarrow$ il moto si estingue perché interviene l'attrito statico.

In realtà non dovrebbe esserci messo C_0 ma l'attrito di primo distacco.

Osserviamo che nella realtà non è così ma il modello parte dalle condizioni di attrito columbiano che non sono esatte in quanto non è chiaro ciò che avviene per $\dot{\theta} = 0$. Comunque il modello è valido nelle zone in cui si accetta il moto.

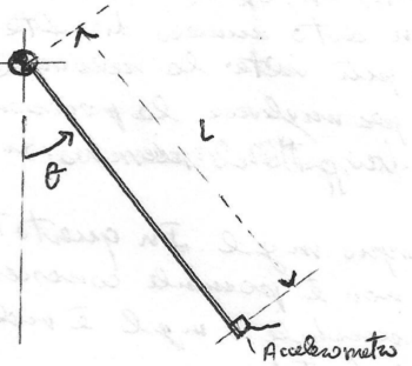
Quindi l'andamento dell'attrito Coulumbiano rappresentato dall'andamento dell'angolo $\theta(t)$ in funzione del tempo ci dice che i massimi si dispongono lungo una retta che non

rotazione del pendolo fisico

è una retta di tangenza (in quanto essendo una retta inclinata non possiamo avere una tangenza nel punto dei massimi effettivi) ai massimi a differenza di ciò che accade con lo smorzamento viscoso.

L'eq. della retta che è una funzione $y(t)$ è del tipo:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



La distanza tra l'accelerometro e la cerniera la chiamiamo L (non è detto che L sia la lunghezza del pendolo).
Ricaviamo l'accelerazione angolare dividendo il segnale dell'accelerazione lineare per L:

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_{acc}}{L}$$

chiaramente in ogni passaggio che viene indicato è soggetto ad un errore. Ad esempio vi è un errore nel non misurare e misurare bene L ed inoltre nell'accelerazione misurata dall'accelerometro compare una componente trasversale. Queste sono due fonti d'errore.

In realtà il segnale analogico viene campionato, quindi si avrà una storia temporale finita che viene fotografata in tanti istanti. La frequenza di campionamento si chiama f_s e viene impostata dalla scheda di acquisizione. In generale le frequenze di campionamento sono costanti perché quasi sempre si fa un'analisi spettrale con Fourier, la trasformata di Fourier richiede che Δt (tempo di acquisizione sia costante).

$$\Delta t = 1/f_s = \text{costante}.$$

Non tutte le schede hanno il Δt costante, ma quelle moderne sì.
Si ha quindi

$$t_K = K\Delta t$$

e chiamiamo l'accelerazione al tempo t_K:

$$\ddot{\theta}_K = \ddot{\theta}(t_K)$$

dopodiché si ottengono $\dot{\theta}_K \Rightarrow$ velocità e le rotazioni: $\theta_K \Rightarrow$ spostamenti mediante integrazione numerica.
Osserviamo che passare dalle accelerazioni alle velocità e agli spostamenti non è un'operazione semplice perché gli errori contenuti nel segnale di accelerazione potrebbero amplificarsi durante l'integrazione. Per l'integrazione numerica esistono vari metodi e tutti richiedono di filtrare il segnale. Quando il segnale ha un contenuto spettrale molto ridotto (ad esempio quello armonico) allora l'operazione di filtro funziona bene se invece il segnale contiene tante armoniche l'operazione di filtro non funziona bene. Nel nostro caso abbiamo un segnale che contiene una sola armonica e quindi l'operazione d'integrazione numerica funziona bene. Nel nostro caso per l'integrazione si è usato il metodo di Simpson (ma va bene anche quello dei trapezi).
Quindi a partire dalle accelerazioni lineari si riescono ad ottenere le rotazioni e le velocità angolari:

$$① \quad I_0 \ddot{\theta}_K + C_0 \,\text{sign}\, \dot{\theta}_K + m g l \theta_K = 0$$

queste risultano note.

20 c

Dato un sistema di molte equazioni in poche incognite la decomposizione ai valori singolari permette di determinare le incognite.
Matlab tira fuori quindi i valori:

$$\frac{I_0}{myl} \quad e \quad \frac{c_0}{myl}$$

se si conosce myl si ottengono i valori I_0 e c_0 se no ottengo il rapporto.
Con una misura libera non posso identificare tutte e tre i parametri ci vuole una prova forzata. Con una prova forzata, conoscendo la forzante, ottengo tutte e tre i valori (I_0, c_0, myl).
[osserviamo che anche gli esercizi del decremento logaritmico sono prove libere ed infatti viene assegnata la massa m]

Col DPE è possibile comunque l'identificazione anche per sistemi non lineari:
Non è richiesta la linearità delle eq. del moto; potremo quindi tener conto anche del seno.
Il problema sta nel fatto che è necessario ottenere velocità e spostamenti come che altri metodi d'identificazione non richiedono come ad esempio quello dei sottoporre che lavora semplicemente con le accelerazioni per determinare i modi di vibrare del sistema.
Se il sistema è semplice (a pochi gradi di libertà) ed il segnale di uscita si presta ad essere integrato allora il DPE funziona bene anche se non vi sono linearità.
Il grosso problema riguarda l'integrazione numerica ⇒ non funziona per segnali Random in quanto ha un contenuto armonico notevole.

si ha:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = \underbrace{M\varepsilon\Omega^2}_{\text{questa la pongo uguale alla forza } F_0} \operatorname{sen}\Omega t$$

La risposta sarà quindi data da:

$$x(t) = X e^{i\Omega t}$$

(considerando la presenza del seno la forzante ha solo la parte immaginaria e quindi anche la risposta può essere considerata come la sola parte immaginaria)

da cui si ha:

$$X = \frac{M\varepsilon\Omega^2}{K - m\Omega^2 + i\Omega c}$$

Scriviamo la trasmissibilità in termini di rapporto tra forze:

forza trasmessa al vincolo

$$T = \frac{f_{vincolo}}{f_{riferimento}} = \frac{Kx + c\dot{x}}{f_{riferimento}} = \frac{(K + i\Omega c) X e^{i\Omega t}}{f_{riferimento}}$$

Come forza di riferimento utilizziamo $f_{riferimento} = M\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t}$ ma ciò potrebbe essere fuorviante in quanto $M\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t}$ non è costante né col tempo né con la frequenza. Quindi utilizzando $f_{riferimento} = M\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t}$ si avrebbe una trasmissibilità data dal rapporto di una forza dovuta al vincolo e una forza che varia con la frequenza. Quindi si sceglie una forza costante del tipo $M\varepsilon\omega_n^2 e^{i\Omega t}$ che non varia con la frequenza. Si ha quindi:

$$T = \frac{(K + i\Omega c) X e^{i\Omega t}}{M\varepsilon\omega_n^2 e^{i\Omega t}} = \frac{\cancel{M\varepsilon}\Omega^2 (K + i\Omega c)}{(K - m\Omega^2) + i\Omega c} \cdot \frac{1}{\cancel{M\varepsilon}\omega_n^2}$$

essendo:

$$\frac{c}{K} = \frac{2\xi}{\omega_n}$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

mettendo in evidenza K si ha:

$$T = r^2 \frac{1 + 2\xi r}{(1 - r^2) + 2i\xi r}$$

Il modulo di tale quantità è:

$$|T| = r^2 \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

→ questa quantità ci dice il valore della quantità di forza che viene scaricata a terra.

Vediamo l'andamento di $|T|$ in funzione di r

Esiste anche la fase di T che ci dice con quale ritardo la vera forza che va a terra si dispone rispetto a quella di riferimento ⇒ ma la fase non interessa molto.

Quanto detto è quello che accade nelle lavatrici.

Nel caso della lavatrice si ha un sistema con un basso smorzamento e con pulsazione propria bassa rispetto alla velocità di rotazione del cestello durante la centrifuga, che invece deve essere alta perché l'operazione stessa sia efficace. Dunque non è possibile lavorare nella zona $\Omega \ll \omega_n$ dove si otterrebbero forze e spostamenti ridotti. Infatti volendo Ω elevati dovremmo costruire un sistema con ω_n grande, ed essendo $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ si dovrà avere un k grande cioè si ridurrebbe un sistema di sospensioni del cestello e del motore ad esso collegato particolarmente rigido. [se $\Omega = 600$ giri/min $= 10$ giri/s, quindi per lavorare nel campo $\Omega \ll \omega_n$, si deve avere un ω_n elevato e quindi si devono avere molle rigide e quindi molto grandi $\Rightarrow$ ingombranti e costose $\Rightarrow$ osserviamo che una lavatrice moderna lavora con una centrifuga $\Omega = 1000$ giri/min]. Quindi si lavora nel campo $\Omega > \omega_n$ accettando che nel passaggio dalla velocità nulla alla velocità di centrifuga il sistema attraversa la zona di risonanza, a questo punto lo smorzamento dovrà essere piccolo altrimenti le forze trasmesse a terra diventano grandi.

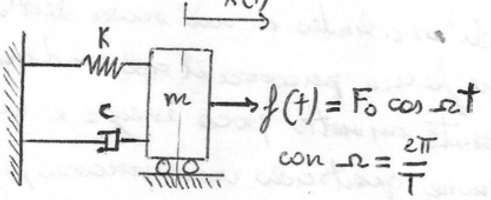
D

SMORZAMENTO ISTERETICO

Oltre allo smorzamento modellato con $c\dot{x}$ e allo smorzamento dovuto all'attrito coulombiano esiste uno smorzamento isteretico. Tale modello di smorzamento è detto anche STRUTTURALE O INTERNO.

Per definire lo smorzamento strutturale si deve definire il lavoro dissipato in un ciclo dello smorzatore viscoso.

Si prende quindi un sistema massa-molla-smorzatore e gli si fa percorrere un ciclo di lavoro.



Il lavoro lo calcoliamo come il lavoro compiuto dalla forza $c\dot{x}$ oppure come il lavoro compiuto dalla forza esterna in quanto il lavoro accumulato (energia di deformazione elastica) dalla molla viene restituita sotto forma di energia cinetica alla massa, quindi tutta l'energia che forniamo dall'esterno viene dissipata dallo smorzatore.

Quindi il lavoro può essere calcolato o come lavoro compiuto dalla forza $c\dot{x}$ oppure come il lavoro compiuto dalla forza esterna in quanto sono uguali.

Quindi:

$$\mathcal{L}_{ciclo} = \int_{ciclo} c\dot{x}\, dx$$

In questo caso devo essere sicuro di avere una forza armonica se no non ho un ciclo.

Possiamo scrivere:

Se $\mathcal{L}_{adv}$ è quello che abbiamo imposto con il modello di smorzamento viscoso e $\mathcal{L}_I$ è ciò che risulta sperimentalmente possiamo rappresentare il comportamento isteretico del materiale attraverso uno smorzatore viscoso equivalente.
Per imporre l'equivalenza tra ciò che misuriamo in realtà e ciò che vogliamo modellare imponiamo che il lavoro dissipato in un ciclo dallo smorzatore viscoso sia uguale al lavoro dissipato in un ciclo da uno smorzatore di tipo isteretico.

$$\mathcal{L}_{adv} = \mathcal{L}_I$$

Avrò quindi uno smorzatore equivalente in cui la quantità c non è più costante ma varia con la frequenza.

$$c_{eq} A^2 \Omega \pi = \alpha A^2$$

$$\boxed{c_{eq} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\Omega}}$$ → parametro di smorzamento viscoso equivalente allo smorzamento isteretico.

L'equazione del sistema diventa:

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + Kx = F_0 e^{i\Omega t}$$

e con la soluzione a regime $x = X e^{i\Omega t}$

essendo $\dot{x} = i\Omega X e^{i\Omega t} = i\Omega\, x(t)$

sostituendo:

$$m\ddot{x} + c_{eq}\, i\Omega x + Kx = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$m\ddot{x} + \underbrace{Kx\left(1 + i\frac{\Omega c_{eq}}{K}\right)}_{} = F_0 e^{i\Omega t}$$

Nel modello di smorzamento isteretico compare una rigidezza con parte reale e parte immaginaria. La parte reale svolge il solito compito di accumulare e di restituire energia potenziale elastica mentre la parte immaginaria è quella responsabile della dissipazione. Soltanto che in tale modello la dissipazione non sarà più proporzionale alla velocità con cui il ciclo viene percorso ma all'ampiezza con cui il ciclo viene percorso. ⇒ è indipendente dalla frequenza.

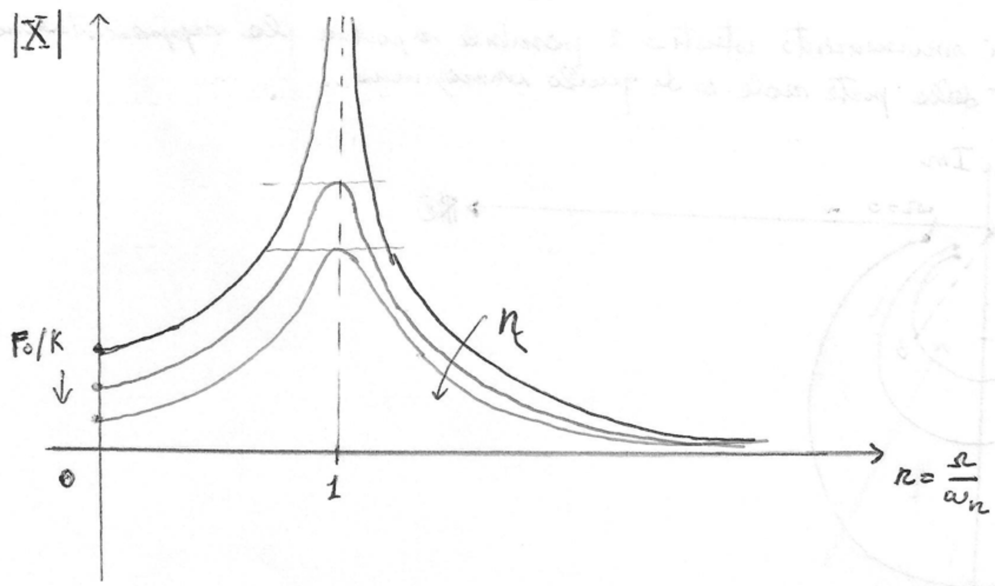
Si ha che:

$$\frac{\Omega c_{eq}}{K} = \frac{\Omega}{K}\frac{\alpha}{\pi\Omega} = \frac{\alpha}{\pi K} \Rightarrow$$

→ viene indicato con η
→ viene indicato con β

} viene detto FATTORE DI PERDITA (loss factor)

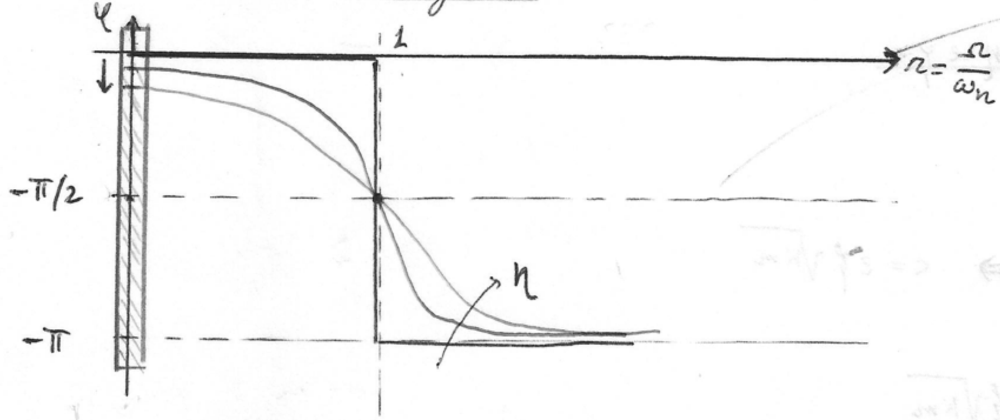
Il fattore di perdita è il modo con cui specifichiamo la capacità di un materiale di dissipare energia secondo un modello di smorzamento isteretico.



Se $\eta = 0$ non si ha smorzamento, quindi si ha il classico andamento si parte dallo spostamento statico F_0/K si va ad infinito per $\Omega = \omega_n$ e si va poi a zero per $r \gg 1$.

Se $\eta \neq 0$ non si parte più dallo stesso punto in quanto η cambia F_0/K e quindi maggiore è η più il punto iniziale del diagramma si abbassa. La pulsazione di risonanza coincide con $\omega_n \Rightarrow \omega_{ris} = \omega_n$ e man mano che lo smorzamento cresce i massimi delle curve diventano più piccoli.

Tracciamo l'andamento della fase.



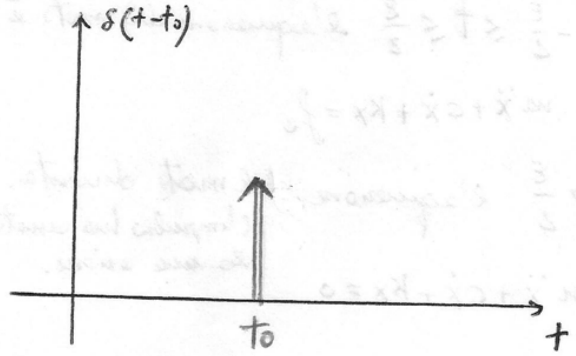
In assenza di smorzamento $\eta = 0$ la fase va da zero a $-\pi$ istantaneamente nel punto $\Omega = \omega_n$
In presenza di smorzamento $\eta \neq 0$ se $r = 1$ la $tg\,\varphi \to \infty$ e quindi la fase passa comunque a $-\pi/2$. Quando $\eta \neq 0$ per $r = 0$ la fase non è zero ed il valore diminuisce al crescere di η.
Osserviamo che il significato di fase indica che se applico una forza lo spostamento nel punto non segue la forza esattamente ma avviene un po' dopo. Il fatto che nella zona tratteggiata se applico una forza costante ($r = 0$) non si ha immediatamente il rispettivo spostamento ma questo avviene un po' dopo ci dice che il modello isteretico per $r = 0$ non va bene. $\Rightarrow$ infatti per $\Omega = 0$ il ciclo isteretico non c'è e quindi non ha senso parlare di modello con attrito isteretico $\Rightarrow$ $\boxed{\text{il modello vale per } r > 0}$

RISPOSTA ALL'IMPULSO

Consideriamo lo studio della risposta di un sistema massa - molla - smorzatore quando la forzante non è periodica.
Il calcolo della risposta ad una forzante generica richiede la conoscenza della risposta all'impulso.
L'impulso o Delta di Dirac è una funzione definita lungo l'asse tempo che assume il valore zero $\forall t \neq t_0$ e quando $t = t_0$ tende ad infinito.

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq t_0 \\ +\infty & t = t_0 \end{cases}$$

La rappresentazione che si dà è la seguente:



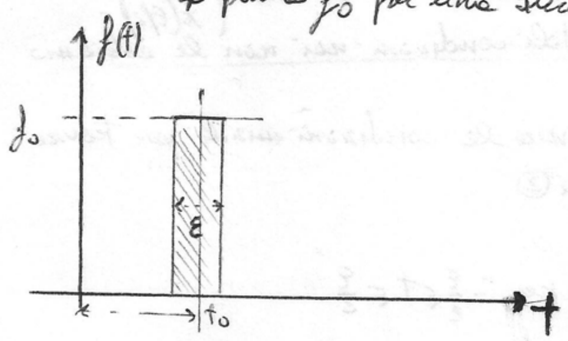
A volte la Delta di Dirac viene indicata non come funzione ma come distribuzione.
Questa funzione tende ad infinito non in modo troppo repentino in quanto il suo integrale nel tempo è per sua definizione pari ad uno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1$$

Quindi la Delta è una funzione sempre nulla tranne in un istante in cui tende all'infinito non troppo velocemente da produrre un integrale da zero all'infinito e non troppo lentamente da produrre un integrale nullo. Un'altra definizione equivalente di Delta di Dirac è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\cdot f(t)\, dt = f(t_0)$$

Cioè la Delta moltiplicata per qualunque funzione $f(t)$ ed integrata nel tempo dà il valore della funzione f nel tempo t_0. Infatti essendo $\delta(t-t_0)$ zero in ogni istante tranne t_0 la funzione $f(t)$ sarà nulla tranne nel punto t_0 dove assume il suo valore $f(t_0)$.
Immaginiamo che la Delta di Dirac si possa rappresentare come il limite di una funzione che è costante e pari a f_0 per una durata limitata ε e che è centrata in t_0.



Si ha per definizione:

$\varepsilon \cdot f_0 \doteq 1$ si impone uguale per definizione

quindi

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ f_0 \to \infty}} f(t)$$

Osserviamo che f_0 si deve far tendere ad infinito e ε deve tendere a zero.
Per trattare tale caso integro questa equazione tra $-\frac{\varepsilon}{2}$ ed un istante generico τ compreso tra $-\frac{\varepsilon}{2}$ ed $\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left(-\frac{\varepsilon}{2} \leq \tau \leq \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

τ è l'istante generico dove sto applicando la martellata.

$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} (m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx)\,dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} f_0\,dt$$

f_0 costante.

si ha quindi:

$$m\Big[\dot{x}(\tau) - \underbrace{\dot{x}\left(-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}_{0}\Big] + c\Big[x(\tau) - \underbrace{x\left(-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}_{0}\Big] + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} Kx\,dt = f_0\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

quindi si ottiene:

$$m\dot{x}(\tau) + c\,x(\tau) + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} Kx\,dt = f_0\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Integriamo una seconda volta tra i due estremi $-\frac{\varepsilon}{2}$ e $\frac{\varepsilon}{2}$ ottenendo:

$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2} m\dot{x}(\tau)\,d\tau + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2} c\,x(\tau)\,d\tau + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2}\left(\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} Kx\,dt\right)d\tau = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2} f_0\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right)d\tau$$

ottenendo:

$$m\left[x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2} c\,x\,d\tau + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2}\left(\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} Kx\,dt\right)d\tau = f_0\left[\frac{\tau^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\tau\right]_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

Imponiamo il limite per $\varepsilon \to 0$ ed $f_0 \to \infty$ di quest'ultima equazione.

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ f_0 \to \infty}} \left\{ m\left[x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2} c\,x\,d\tau + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2}\left(\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} Kx\,dt\right)d\tau = f_0\left[\frac{\tau^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\tau\right]_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \right\} \quad (3)$$

Consideriamo il secondo membro:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ f_0 \to \infty}} f_0\left[\frac{\tau^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\tau\right]_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

si ha un f_0 che va ad infinito che moltiplica un ε va a zero, ma ε va a zero con una velocità doppia con cui f_0 va all'infinito (compare un ε^2), si ha quindi un infinitesimo di

$$\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\,dt = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f_0\,dt$$

$$m\left[\dot{x}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \underbrace{\dot{x}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{=0}\right] + c\left[x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \underbrace{x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{=0}\right] + \underbrace{k\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} x\,dt}_{=0} = 1$$

in quanto x è limitato e quindi l'integrale in un tempo infinitesimo vale zero.

Per definizione l'integrale $\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f_0 dt = 1$ in quanto l'impulso è unitario. Osserviamo che l'unità di grandezza di questo 1 è una forza per un tempo, se f è una pressione eccentrica ~~sarà~~ una pressione per un tempo, l'unità di misura varia al variare del sistema di riferimento considerato. Nel nostro caso avremo una quantità di moto e quindi 1 avrà delle dimensioni non è un numero adimensionale.

imponendo che $\varepsilon \to 0$ si ottiene:

$$m\dot{x}(0^+) + c(0) + 0 = 1$$

$t = 0^+$ quando è finito l'impulso

Quindi la velocità al termine dell'applicazione dell'impulso vale:

$$\dot{x}(0^+) = \frac{1}{m}$$

Quindi le due condizioni iniziali per trovare le due costanti d'integrazione a e b della soluzione ② sono:

$$x(0^+) = 0$$
$$\dot{x}(0^+) = \frac{1}{m}$$

limitandoci al caso di un sistema sottosmorzato $\zeta < 1$ la cui soluzione è:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(a\cos\omega_d t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_d t)$$

si ha:

$$x(t = 0^+) = 0 = a$$

$$\dot{x}(t = 0^+) = \frac{1}{m} = -\zeta\omega_n \cdot 0 + 1 \cdot \omega_d \cdot b \cdot 1$$

quindi:

$$a = 0$$

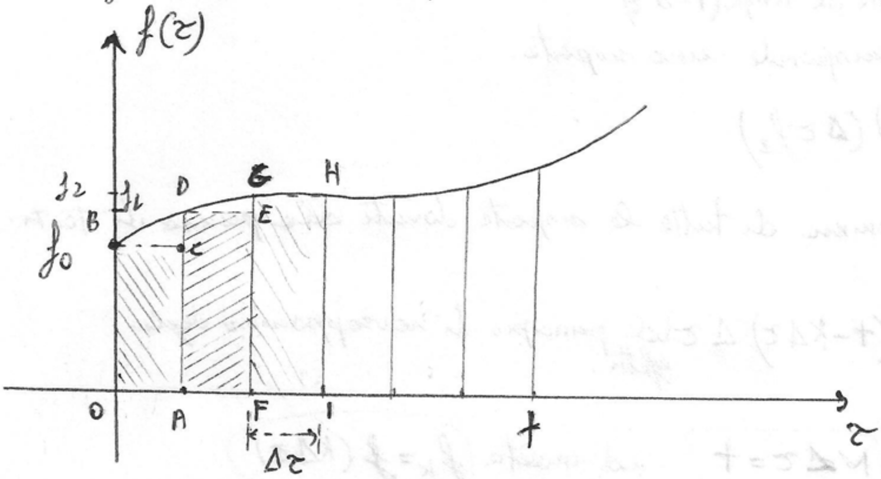
$$b = \frac{1}{m\omega_d}$$

sostituendo le soluzioni dell'equazione del moto $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ valida per $t > \frac{\varepsilon}{2}$ cioè finita l'applicazione dell'impulso diventa:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}\,\omega_d t}$$

questo è l'intensità dell'impulso. Se l'impulso ha area 1.

Ci chiediamo quale sia la risposta del sistema quando su di esso, in equilibrio statico, incomincia ad agire una certa forza f. Quindi prima dell'applicazione della forza il sistema è fermo e poi con l'applicazione di essa incomincia a muoversi.



Per studiare questo caso suppongo di suddividere l'andamento della forza in tanti pezzettini ognuno di durata finita ⇒ cioè suddividiamo l'asse dei tempi τ in cui è definita la forza in tanti intervalli finiti $\Delta\tau$.

L'eq. del moto è:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(\tau)$$

Vogliamo determinare $x(t)$.

Indichiamo con τ l'asse dei tempi nel quale è definita la forza.

Se si vuole sapere all'istante $t = 10\,s$ quanto vale x (cioè quanto vale x dopo $10\,s$) si deve avere un altro contatore che mi dice come è variata la forza all'interno di questi $10\,s$ e quindi ho bisogno di un altro nome per indicare l'asse tempi tra 0 e t.

Indico quindi con t l'istante ben definito al quale mi chiedo quanto vale lo spostamento (che dipende dalla forza che ho applicato dall'inizio fino all'istante t considerato)

Indico con f_0 la forza letta a $\tau = 0$ ⇒ $f_0 = f(\tau = 0)$.

Immagino che il rettangolo OABC sia un impulso con intensità $f_0\Delta\tau$.

Quindi suddivido l'asse tempi in tanti pezzettini e rappresento la successione dei valori della forza $f(\tau)$ con un treno (successione) di impulsi:

Se il sistema è lineare posso applicare un principio di sovrapposizione degli effetti.

La risposta al primo impulso di area OACB è data da:

$$x_0(t) = \underbrace{h(t)}_{\text{impulso unitario}}\ \underbrace{(\Delta\tau f_0)}_{\text{intensità dell'impulso.}}$$

questo integrale estendendolo da 0 a T e o ad ∞, tanto se il sistema è causale con condizione nulla in quanto h è zero. (29)
Quindi:

$$x(t) = \int_0^\infty f(\tau) h(t-\tau) \, d\tau$$

Posso estendere tale integrale anche tra $-\infty$ ad ∞:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) \, d\tau}$$

Infatti se vedo con dei valori τ negativi si ha che la $f(\tau)=0$ in quanto si è detto che la f è nulla prima dell'applicazione della forza ⇒ il contatore di τ si fa partire quando viene applicata la forza.

Facciamo la sostituzione:

$$t - \tau = \gamma$$

si ha che:

$$-d\tau = d\gamma$$ in quanto t è il tempo fisso a cui ho la risposta

quindi:

$$x(t) = \int_t^0 f(t-\gamma) \cdot h(\gamma) \, (-d\gamma)$$

ribaltando l'integrale

$$x(t) = \int_0^t f(t-\gamma) \, h(\gamma) \, d\gamma$$ ⇒ analogo alla (4)

A volte si trova la notazione:

$$x(t) = h(t) * f(t)$$

significa convoluzione e fa le veci dell'integrale di convoluzione.

Matlab ha un comando <u>conv</u> e che fa la convoluzione; calcola l'integrale per altra via.

Si ha quindi:

$$\int_0^{T_0} f(t)\,dt = T_0 a_0 + \sum_K \Big[a_K \underbrace{\int_0^{T_0} \cos(K\Omega_0 t)\,dt}_{\substack{\text{L'integrale di un coseno su un periodo}\\ \text{è nullo } \forall K \\ = 0}} + b_K \underbrace{\int_0^{T_0} \operatorname{sen}(K\Omega_0 t)\,dt}_{\substack{\text{L'integrale di un seno su un periodo è nullo}\\ \text{per qualsiasi } K \\ = 0}} \Big]$$

quindi:

$$\int_0^{T_0} f(t)\,dt = T_0 a_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)}$$

Tale valore rappresenta il valore medio della funzione $f(t)$

Data una funzione che oscilla periodicamente si calcola (facendogli passare in mezzo) il valore medio ed intorno a tale valore medio faccio oscillare le armoniche.

Calcolo di a_K e b_K

Si prende la funzione $f(t)$ e prima d'integrarla su un periodo si moltiplica primo e secondo membro per il $\cos(m\Omega_0 t)$. Si ha quindi:

$$\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\Omega_0 t)\,dt = \int_0^{T_0} a_0 \cos(m\Omega_0 t)\,dt + \sum_K a_K \int_0^{T_0} \cos(m\Omega_0 t)\cos(K\Omega_0 t)\,dt +$$
$$+ \sum_K b_K \int_0^{T_0} \cos(m\Omega_0 t)\operatorname{sen}(K\Omega_0 t)\,dt$$

dove m è un numero qualsiasi (non necessariamente il K che stiamo considerando).

Osserviamo che:

$$\int_0^{T_0} a_0 \cos(m\Omega_0 t)\,dt = 0 \quad \text{in quanto è l'integrale di un coseno su un periodo.}$$

Essendo:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$\Rightarrow$ sommando membro a membro si ottiene:

$$\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

quindi $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$

quindi:

$$\int_0^{T_0} \cos(m\Omega_0 t)\cos(K\Omega_0 t)\,dt = \int_0^{T_0} \frac{\cos(m+K)\Omega_0 t + \cos(m-K)\Omega_0 t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\int_0^{T_0} \cos((m+K)\Omega_0 t)\,dt}_{\substack{0 \\ \text{integrale del coseno su un periodo}}} + \underbrace{\int_0^{T_0} \cos((m-K)\Omega_0 t)\,dt}_{\substack{=0 \text{ per } m\neq K \\ =T_0 \text{ per } m=K}} \Big] = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq K \\ \underbrace{\tfrac{1}{2}T_0}_{\text{essendo per } m=K \Rightarrow \cos(m-K)\Omega_0 t = 0} & \text{per } m = K \end{cases}$$

Di tutti i termini $\sum_K a_K \int_0^{T_0} \cos(m\Omega_0 t)\cos(K\Omega_0 t)\,dt$ rimane solo il termine per $K=m$

FORMA ESPONENZIALE DELLA SERIE DI FOURIER

Data una funzione $f(t)$ con periodo T_0

$$f(t) = f(t+T_0)$$

questa attraverso la serie di Fourier può essere scritta come la somma di funzioni armoniche:

$$f(t) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} \left(a_K \cos(K\Omega_0 t) + b_K \operatorname{sen}(K\Omega_0 t)\right)$$

dove $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ è la prima armonica, e $K\Omega_0 = \Omega_K$ la K-esima armonica.
Questa forma della serie di Fourier è detta forma trigonometrica.
Dove si ha:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,dt$$

$$a_K = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(K\Omega_0 t)\,dt$$

$$b_K = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\operatorname{sen}(K\Omega_0 t)\,dt$$

La serie di Fourier va in teoria da 1 ad ∞ e più sono i termini che si aggiungono migliore è l'approssimazione della funzione di partenza.
I termini sono tutti quanti periodici e con una frequenza che un multiplo intero (K volte) della pulsazione fondamentale Ω_0.
I valori a_K e b_K ci dicono quale sia l'importanza della K-esima armonica.
In particolare si ha:

$$a_K \cos(K\Omega_0 t) + b_K \operatorname{sen}(K\Omega_0 t) = c_K \operatorname{sen}(K\Omega_0 t + \underset{\text{fase K-esima}}{\varphi_K}) \quad \text{con } c_K^2 = a_K^2 + b_K^2$$

quindi a_K e b_K ci dicono quanto è grande l'armonica K-esima all'interno di una certa funzione misurata nel tempo.

Dal punto di vista numerico invece che la serie di Fourier in forma trigonometrica risulta di miglior utilizzo la serie di Fourier in forma esponenziale.
Utilizziamo le formule di Eulero:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$$

$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = -i\,\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2}$$

Quindi F letto in $-K$ che è come dire F letto in K ma complesso coniugato mi dà:

$$F_{-K} = \frac{a_K + i b_K}{2} = F_K^* \rightarrow \text{complesso coniugato di } F_K$$

quindi:

$$F_K = \frac{a_K - i b_K}{2} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\, e^{-iK\Omega_0 t}\, dt$$

$$F_{-K} = \frac{a_K + i b_K}{2} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\, e^{iK\Omega_0 t}\, dt = F_K^*$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$f(t) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty}\left(F_K e^{iK\Omega_0 t} + F_{-K} e^{-iK\Omega_0 t}\right)$$

osserviamo che esplicitando tale termine posso scrivere:

$$f(t) = a_0 + F_1 e^{i\Omega_0 t} + F_{-1} e^{-i\Omega_0 t} + F_2 e^{2i\Omega_0 t} + F_{-2} e^{-2i\Omega_0 t} + \ldots\ldots$$

Posso quindi usare due sommatorie una che va da valori di K da 1 ad ∞ ed un'altra che va da valori di K da -1 a -∞ :

$$f(t) = a_0 + \left(\sum_{K=1}^{\infty} F_K e^{-iK\Omega_0 t}\right) + \left(\sum_{K=-1}^{-\infty} F_K e^{iK\Omega_0 t}\right)$$

i segni negativi sono indicati nel simbolo di sommatoria

resta fuori il termine per K=0, ma si osserva che:

$$F_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t) \underbrace{e^0}_{=1} dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\, dt = a_0 \Rightarrow \text{per } K=0 \text{ si ricottiene } a_0$$

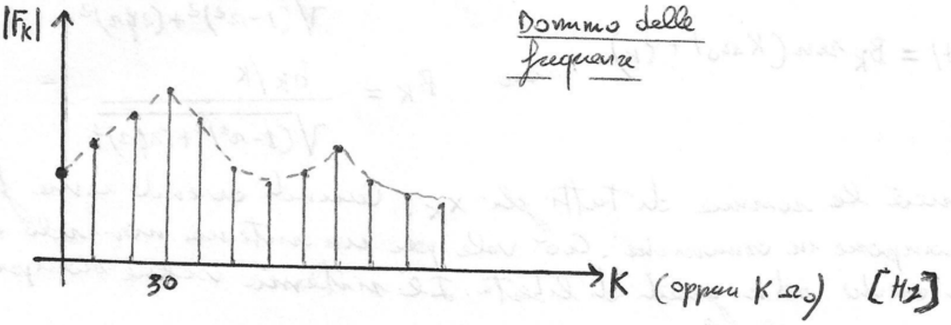
quindi la $f(t)$ va da $-\infty$ ad 1, passa per lo zero e poi va da 1 ad ∞ e quindi si può ridurre ad un unica somma e possiamo scrivere:

$$\boxed{f(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} F_K\, e^{i\Omega_0 K t} \qquad \text{con } F_K = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\, e^{-iK\Omega_0 t}\, dt}$$

Forma esponenziale della serie di Fourier

E' questa la forma più utilizzata per esprimere la serie di Fourier. In questo caso i coefficienti F_K, eventualmente complessi, ad indicare quale ne il contenuto in frequenza di $f(t)$.

reale e la parte immaginaria in quanto il modulo ci dice quanto sia importante l'armonica K) in funzione di K e perchè Ω_0 è noto il diagramma può essere lungo l'asse orizzontale $K\Omega_0$ si ha un diagramma del segnale nel dominio delle frequenze



Quindi per K=0 si ottiene un valore medio della funzione e al variare del numero k ottengo dei coefficienti di $|F_k|$ tanto più grandi quanto più è importante la frequenza alla quale si riferiscono.

Nel nostro esempio si ha che per un valore di $K\Omega_0 = 30\,Hz$ c'è una componente armonica del segnale importante.

Quindi si prende un sistema e si mette all'interno una forza che si prova, il sistema **modifica** questa forza secondo la sua funzione di risposta in frequenza e la restituisce più o meno grande a seconda delle frequenze più congeniali. Le trasformate di Fourier mi dice quali sono le frequenze più importanti all'interno di una certa misura nel dominio del tempo rappresentandole nel dominio delle frequenze.

La parte a sinistra del grafico del dominio delle frequenze con le frequenze negative non si rappresenta dando per scontato che è simmetrica rispetto all'asse K. ⇒ i coefficienti F_K e F_{-K} sono complessi coniugati e quindi il loro modulo è identico $|F_K| = |F_{-K}|$

Il passaggio tra dominio del tempo e dominio delle frequenze avviene con la FFT.

La serie di Fourier permette di vedere una misura (segnale) nel dominio del tempo sotto un altro dominio mettendo in evidenza altre caratteristiche fondamentali dell'andamento nel tempo della misura.

Ciò ci permette di capire il perchè si studia la risposta di un sistema massa-molla-smorzatore ad una forzante armonica.

Se ho un sistema del tipo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t)$$

ed $f(t)$ è periodica, questa può essere scritta come:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = a_0 + \sum_K \left[a_K \cos(\Omega_0 K t) + b_K \sin(\Omega_0 K t) \right]$$

se il sistema è lineare si può studiare separatamente il contributo di ogni elemento alla risposta totale.

si può scrivere che:

$$① \; F_k T_0 = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, dt$$

considero la funzione $f(t)$ scritta in forma esponenziale:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\, e^{i\Omega_k t}$$

moltiplico e divido per T_0 ottenendo:

$$f(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (F_k T_0)\, e^{i\Omega_k t}$$

poiché $\frac{1}{T_0} = \frac{\Delta\Omega}{2\pi}$ si ha che:

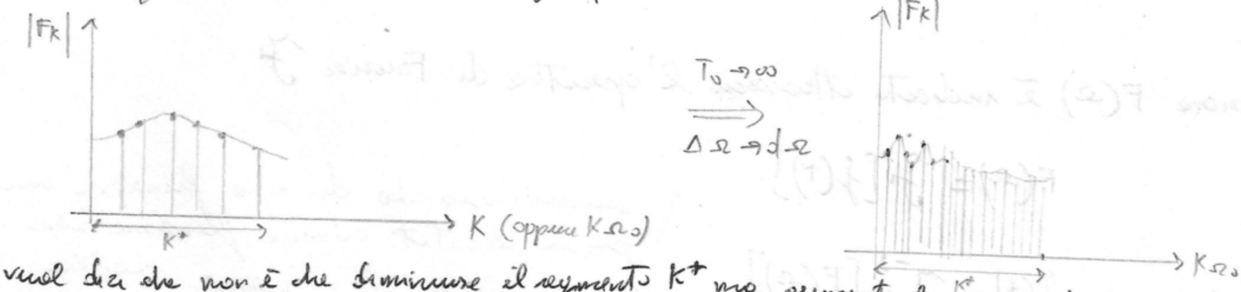
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (F_k T_0)\, e^{i\Omega_k t} \cdot \Delta\Omega$$

Supponiamo adesso che la funzione non sia periodica (quindi immaginiamo che la funzione sia periodica con periodo che tende ad infinito $T_0 \to \infty$)

se $T_0 \to \infty$ si ha che $\Delta\Omega$ tende a zero cioè da $\Delta\Omega = 2\pi/T_0$ si ha che la risoluzione in frequenza $\Delta\Omega$ diventa sempre più piccola e all'infinito un infinitesimo:

$\Delta\Omega \to d\Omega$) assumiamo che $\Delta\Omega$ tende a zero e non è zero in quanto T_0 non diventa zero ma tende ad infinito.

cioè nel diagramma del dominio in frequenza le righe si avvicinano sempre di più



ciò vuol dire che non è che diminuisce il segmento K^* ma aumenta il numero di linee verticale e ne arriva ad essere presente un'infinità di esse.

Quindi:

$\Omega_k = K\Omega_0$ ⇒ diventa una generica Ω ⇒ in frequenza non si avranno più tante linee separate ma si ha un CONTINUO

generica pulsazione armonica

È quindi la generica frequenza si chiama Ω.

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

Delle proprietà di cui gode la trasformata di Fourier ne introduciamo le due che verranno utilizzate più spesso:

— Linearità

Se indichiamo con $F_1(\Omega)$ ed $F_2(\Omega)$ le trasformate delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e siano a_1 ed a_2 due costanti. L'operatore di Fourier è lineare e quindi la trasformata di Fourier è lineare.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\Omega) \\ \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\Omega) \end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\Omega) + a_2 F_2(\Omega)$$

E' cioè possibile calcolare separatamente le due trasformate $F_1(\Omega)$ ed $F_2(\Omega)$ e sovrapporre gli effetti.

— Relazione di parità

Una qualunque funzione $f(t)$ (funzione reale) può essere suddivisa nella somma di due contributi, uno pari $p(t)$ e uno dispari $d(t)$.

$$f(t) = p(t) + d(t)$$

se considero la parte dei tempi negativi:

$$f(-t) = p(-t) + d(-t) = p(t) - d(t)$$

funzioni lette per tempi positivi.

funzione letta per tempi negativi

Sommando e sottraendo si ottiene:

la parte pari sarà: $p(t) = \dfrac{f(t) + f(-t)}{2}$

la parte dispari sarà: $d(t) = \dfrac{f(t) - f(-t)}{2}$

quindi applicando la trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[p + d] = \int_{-\infty}^{+\infty} (p+d) \cdot e^{-i\Omega t}\, dt =$$

usiamo l'espressione di Eulero:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (p+d)(\cos \Omega t - i \operatorname{sen} \Omega t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (p \cos \Omega t - i p \operatorname{sen} \Omega t + d \cos \Omega t - i d \operatorname{sen} \Omega t)\, dt$$

Una funzione pari per il seno che è una funzione dispari produce una funzione dispari che integrata tra due estremi simmetrici dà zero.

CONDIZIONE DI ESISTENZA DELLA TRASFORMATA

Data la funzione nel tempo $f(t)$ la trasformata di Fourier è data da:

$$F(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt$$

Alla trasformata di Fourier si accompagna la trasformata inversa:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, dt$$

La $F(\Omega)$ è una funzione che frequenza per frequenza ci dice qual'è l'intensità della funzione armonica collegata a quella frequenza. La $F(\Omega)$ è l'equivalente dei coefficienti F_K della serie di Fourier. Quindi la $F(\Omega)$ ci dice frequenza per frequenza quale sia l'importanza di quella armonica. Quindi $F(\Omega)$ è una funzione continua.

Non tutte le funzioni sono trasformabili secondo Fourier.
Condizione sufficiente affinché la trasformata di Fourier di una funzione $f(t)$ esista è che la funzione sia a modulo integrabile e cioè che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

cioè se si prende il modulo della funzione e lo si integra in tutto il suo dominio, il risultato di tale integrale non deve tendere ad infinito. Questo ad esempio esclude dal calcolo della trasformata di Fourier la funzione armonica [ad esempio la funzione sen$(\Omega_0 t)$ che preso in modulo è una quantità sempre positiva che si estende da meno infinito a più infinito e quindi il suo integrale tende ad infinito ⇒ quindi secondo la definizione vista prima il seno non è trasformabile secondo Fourier]. Se ad esempio si considera una funzione che oscilla a 50 Hz (il segnale della corrente di rete in Europa) se lo si trasforma secondo Fourier si dovrebbe ottenere l'informazione che lì dentro è presente un unico segnale a 50 Hz, invece secondo la condizione vista non possiamo fare il conto. In realtà si ci gira intorno a tale definizione facendo ricorso alla trasformata dell'impulso.

ESEMPI DI TRASFORMATA DI FOURIER

→ TRASFORMATA DELL' IMPULSO

Consideriamo la funzione Delta di Dirac centrata in t_0:

$$f(t)=\delta(t-t_0)$$

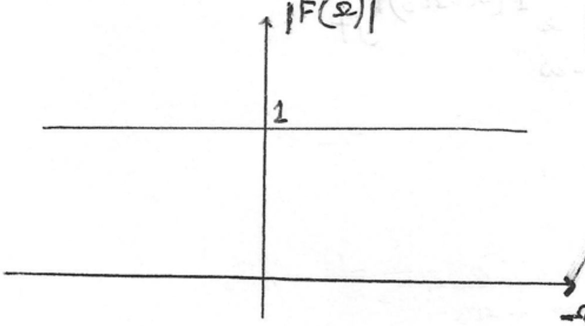
applichiamo la definizione di trasformata:

Si osserva che il modulo della trasformata dell'impulso è pari a:

$$|F| = \underbrace{|\cos \Omega t_0 - i \,\mathrm{sen}\, \Omega t_0|}_{\text{scritto tramite Eulero}} = 1$$

→ Il modulo è dato da una somma di $\cos^2$ più sen^2

quindi se si riuscisse a costruire un impulso ideale la sua trasformata avrebbe modulo 1 per qualunque frequenza.



La trasformata di Fourier dell'impulso unitario è quindi una costante che vale uno. Ciò vuol dire che l'impulso ideale contiene al suo interno tutte le frequenze: (la costante e la frequenza ad 1 Hz e 2 Hz e....) L'impulso ideale contiene quindi tutte le frequenze e se quindi applico ad una struttura un impulso ad un unico istante riuscirei ad "eccitare" cioè trasferire un'informazione su tutte le frequenze dello spettro.

Quindi mentre la funzione armonica contiene informazioni ad un unica frequenza (ad esempio a 50 Hz), l'impulso contiene informazioni a tutte le frequenze. Ecco perché alle strutture si dà un impulso (martelletto) in modo da trasferire un'informazione a tutte le frequenze.

→ TRASFORMATA DI UNA FUNZIONE ARMONICA

Si consideri la funzione armonica $f(t) = A\,\mathrm{sen}(\Omega_0 t)$ la cui trasformata non sarebbe calcolabile rispettando le condizioni di esistenza ma che si analizza sulla scorta del risultato ottenuto per l'impulso.

La trasformata è:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,\mathrm{sen}\,\Omega_0 t \; e^{-i\Omega t}\, dt$$

pongo:

$$\mathrm{sen}\,\Omega_0 t = \frac{e^{i\Omega_0 t} - e^{-i\Omega_0 t}}{2i}$$

quindi si ottiene:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \,\frac{e^{i\Omega_0 t} - e^{-i\Omega_0 t}}{2i}\, e^{-i\Omega t}\, dt$$

moltiplico e divido per i ottenendo:

$$F(\Omega) = -\frac{A}{2} i \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\Omega - \Omega_0)t}\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\Omega + \Omega_0)t}\, dt \right]$$

→ TRASFORMATA DI UNA COSTANTE

Si consideri una funzione costante nel tempo (misurazione nel tempo di una componente continua)

$$f(t) = f_0 = \text{costante}$$

Quello che ottengo in frequenza applicando la definizione di trasformata sarà:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 \, e^{-i\Omega t} \, dt = f_0 \, 2\pi \, \underbrace{\delta(\Omega)}_{\text{Impulso in frequenza, alla frequenza } \Omega_0 = 0}$$

Quindi la trasformata di Fourier di una costante è un impulso nell'origine di ampiezza $f_0 2\pi$. cioè contiene un'unica informazione e cioè che la frequenza non c'è cioè è nulla. A questo risultato ci saremmo potuti arrivare immaginando due i due impulsi della trasformata del seno e del coseno si vadano ad incontrare per $\Omega_0 = 0$ e quindi i due impulsi del seno (parte immaginaria) si annullano mentre quelli del coseno (parte reale) si sommano, ottenendo $2\pi B \delta(\Omega)$ e nel nostro caso $B = f_0$.

□

TEOREMA DI PARSEVAL

Il teorema di Parseval afferma che l'energia associata a un segnale nel dominio del tempo deve essere la stessa che il segnale ha rappresentato nel dominio delle frequenze.

Dato un segnale $f(t)$ se ne calcola l'energia nel dominio del tempo, se poi si trasforma nel dominio delle frequenze il valore associato all'energia calcolata deve essere lo stesso.

Se $x(t)$ è la funzione nel dominio del tempo, la quantità che si assimila all'energia del segnale è:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \, dt}_{\text{quantità proporzionale all'energia del segnale nel tempo}}$$

(il quadrato degli spostamenti è legato all'energia contenuta all'interno di un segnale)

Tale espressione nel tempo, dice Parseval, deve avere una sua equivalenza nel dominio delle frequenze perché se la misura è una si deve ottenere lo stesso risultato.

Utilizzando la definizione di trasformata di Fourier passiamo al dominio delle frequenze. Scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot x \cdot dt =$$

una delle x la scrivo come trasformata inversa di Fourier.

→ TRASFORMATA DELL'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

Supponiamo di avere una certa funzione $x(t)$ e che questa sia il risultato di un integrale di convoluzione:

$$x(t) = y(t) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) z(t-\tau) d\tau$$

si vuole calcolare la trasformata di Fourier.

$$\mathcal{F}\left[x(t) = y(t) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) z(t-\tau) d\tau\right]$$

quindi:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) z(t-\tau) d\tau\right] e^{-i\Omega t} dt =$$

poiché $e^{i\Omega t}$ è funzione di Ω e di t ma non di τ la introduciamo nell'integrale interno

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) z(t-\tau) e^{-i\Omega t} d\tau\right] dt =$$

inverto l'ordine d'integrazione:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) z(t-\tau) e^{-i\Omega t} dt\right) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} z(t-\tau) e^{-i\Omega t} dt\right)} d\tau =$$

E' una trasformata di Fourier tranne per il termine τ

Allora indico con $\gamma = t - \tau$

quindi $dt = d\gamma$

ed inoltre $t = \tau + \gamma$

gli estremi d'integrazione non cambiano.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z(\gamma) e^{-i\Omega\tau} e^{-i\Omega\gamma} d\gamma\right) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) e^{-i\Omega\tau} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z(\gamma) e^{-i\Omega\gamma} d\gamma\right) d\tau =$$

→ Trasformata di Fourier di $z(\gamma)$ cioè $Z(\Omega)$

La funzione di risposta in frequenza $FRF = H(\Omega)$ è data dall'uscita diviso l'ingresso:

$$FRF = H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F_0}$$

F_0 → Ampiezza della forza

Se F_0 invece di essere una costante varia con la frequenza la definizione di FRF non cambia:

$$① \quad FRF = H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)}$$

$F(\Omega)$ → Ampiezza della forza al variare della frequenza.

Metto una forzante a 10 Hz, lascio finire il transitorio, a regime avrò un'ampiezza $X(10)$, il rapporto è FRF

Stiamo considerando la risposta a regime.

Se di un sistema conosciamo la funzione di risposta all'impulso $h(\tau)$ allora possiamo determinare l'uscita del sistema in funzione della forza f

$$② \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau$$

① e ② sono due approcci differenti: in ① metto la forza in un'unica frequenza e leggo quanto vale la forza a quell'unica frequenza a regime, nella ② inserisco una forza che ha un andamento qualunque.

Trasformo la ② secondo Fourier:

$$\mathcal{F}\left[x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau\right]$$

Prendo una funzione che ha un andamento generico, prendo la $h(t)$ che è la risposta che si ottiene dando una martellata, faccio un conto e trovo che:

$$\mathcal{F}[h(t)] = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} \quad \begin{array}{l}\text{risposta a regim.}\\ \text{forzante a regim.}\end{array}$$

quindi

$$\underbrace{X(\Omega)}\ = \underbrace{F(\Omega)}\cdot \underbrace{\mathcal{F}[h(t)]}$$

Ampiezza dell'armonica contenuta all'interno di $x(t)$ alla frequenza Ω. Supponiamo che $\Omega = 10\,Hz$ la $X(10)$ è l'ampiezza della risposta a 10 Hz

contiene le frequenze contenute nella forzante.

La trasformata della risposta all'impulso

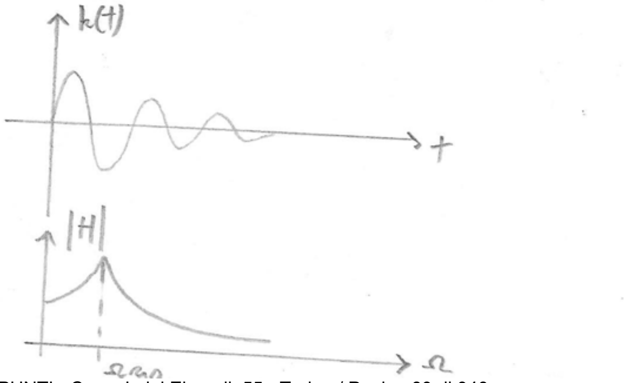
$$\mathcal{F}[h(t)] = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)}$$

quindi la trasformata di $h(t)$ è uguale alla definizione, trovata per altra via, data alla risposta all'impulso.

Quindi si trova che:

$$\boxed{\mathcal{F}[h(t)] = FRF}$$

⟹



La trasformata di Fourier della risposta ad un impulso che si smorza nel tempo è la funzione di risposta in frequenza FRF.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 348

→ TRASFORMATA DEL RETTANGOLO

Iniziamo con la serie di Fourier.

Un segnale periodico $f(t)$ può essere scritto come una serie di termini armonici

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \,\text{sen}\, n\omega_0 t\right)$$

dove

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ e T_0 è il periodo del segnale

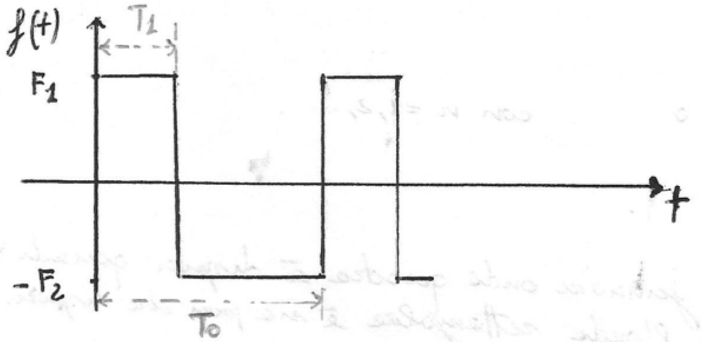
a_0 ⇒ valore medio integrale $\qquad a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,dt$

a_n ⇒ coefficiente del coseno $\qquad a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$

b_n ⇒ coefficiente del seno $\qquad b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt$

La finalità è quella di conoscere il contenuto in frequenza di un segnale. Se ad esempio $f(t)$ fosse una forza, conoscendo il contenuto in frequenza della forza posso capire per un sistema vibrante v'è in risonanza oppure no. Infatti la risonanza nasce a seguito della frequenza della forza e non della sua intensità; basta che la frequenza della forza sia vicina a quella propria del sistema. La serie di Fourier si applica a segnali periodici mentre la trasformata di Fourier si applica a segnali aperiodici.

Consideriamo il segnale costituito da un onda rettangolare.



Dove $F_1, F_2 > 0$. Abbiamo un segnale in parte positivo e in parte negativo.

- livello alto F_1
- livello basso $-F_2$

Il periodo è T_0.
La durata della fase positiva è T_1
Il segnale va da $-\infty$ a $+\infty$

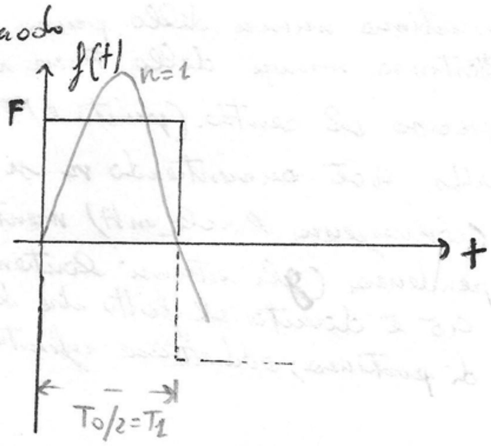
E' un segnale periodico ma non continuo quindi non è derivabile da per tutto, vi sono dei salti. Questo ha degli effetti sul risultato che viene detto fenomeno di Gibbs.
Sfruttando l'additività dell'integrale calcoliamo a_0

Non è detto che a_0 sia zero.

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{T_1} F_1\,dt - \int_{T_1}^{T_0} F_2\,dt\right] = \frac{F_1 T_1 - F_2(T_0 - T_1)}{T_0}$$

Calcoliamo a_n con $n > 0$

metà del periodo



Se $n=1$ si ha che:

$$b_1 = \frac{4}{\pi}F$$

si vede che $b_1 = \frac{4}{\pi}F > F$

In questo caso troncando la serie al primo termine si ha che:

$$f(t) \cong b_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_0} t$$

Diagrammando questo andamento sovrapponendolo a quello vero avremo la curva in rosso. Se si ribalta la funzione si ha la parte negativa con lo stesso grado di approssimazione.

Si vede che l'approssimazione della curva sono rispetto a quella vera è tale da avere lo stesso periodo. Vi è una sovrastima per ciò che riguarda l'ampiezza della funzione. Quello che abbiamo rappresentato è la prima armonica della funzione; una funzione periodica ha tante armoniche e le armoniche sono i termini della serie di Fourier. La prima armonica è quella con pulsazione più bassa.

Aumentiamo il numero di armoniche. Ricordiamo che le n pari danno armoniche nulle. Consideriamo $n=3$. Quello che considero è l'armonica di ordine 3 ma può essere anche intesa come seconda armonica.

Si ha:

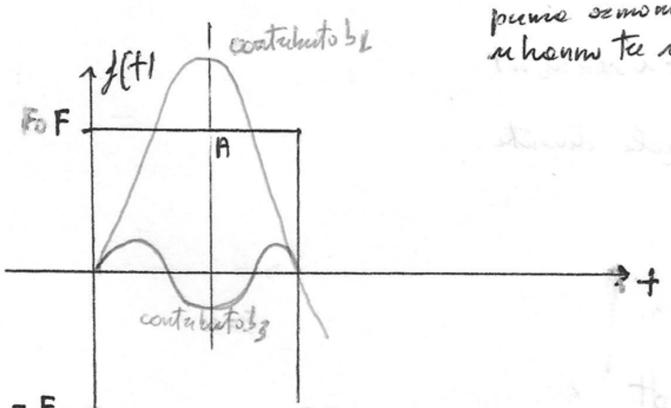
$a_0 = 0$

$b_3 = \frac{4F}{3\pi}$; $b_1 = \frac{4F}{\pi}$

quindi:

$$f(t) \cong \underbrace{\frac{4}{\pi} F \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_0}}_{\text{contributo di } b_1 \text{ prima armonica}} + \underbrace{\frac{4F}{3\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T_0} 3t\right)}_{\text{contributo di } b_3 \text{ terza armonica}}$$

Questa ha un periodo 3 volte più piccolo della prima armonica. Quindi in un mezzo periodo totale si hanno tre sinusoidi per questo contributo.



Volendo considerare l'effetto al centro (punto A) in quanto è un punto che mi permette di capire se sto approssimando bene o male, devo considerare:

$$b_1 - b_3 = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\right)F = \frac{4}{3\pi}F(3-1) = \frac{8}{3\pi}F < F$$

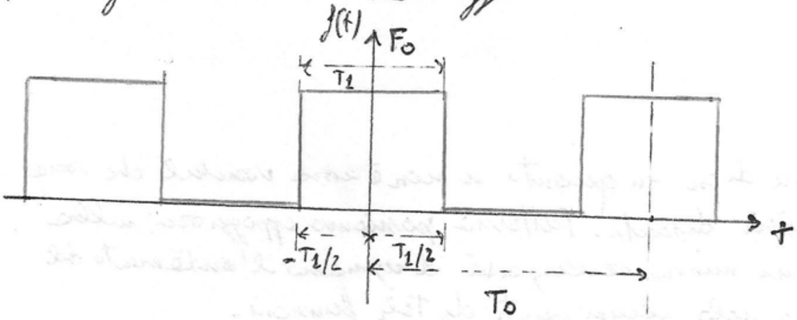
Avrò una sottostima del valore al centro A della funzione; cioè il valore della funzione sarà sottostimato rispetto a quello vero.

→ SERIE DI FOURIER DI UNA "SERIE DI IMPULSI"

Consideriamo l'espressione alternativa della serie di Fourier trigonometrica:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n \omega_0 t} \qquad \text{con } c_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\, e^{-i n \omega_0 t}\, dt$$

Vediamo come poter calcolare i coefficienti c_n (c_n è un numero che va da meno infinito a più infinito è un numero intero relativo).
Calcoliamo i c_n nel caso di funzioni periodiche. Ricordiamo che la serie di Fourier si applica a segnali periodici mentre la trasformata di Fourier a segnali aperiodici.
Consideriamo il seguente segnale periodico in cui il segnale si estende da meno infinito a più infinito con la stessa legge.



periodo fondamentale del segnale

Il periodo sarà T_0.
All'interno dell'intervallo T_1, tra $-T_1/2$ e $T_1/2$ la funzione è diversa da zero.
Vogliamo calcolare i coefficienti c_n.
È possibile calcolare tale quantità tra $-T_0/2$ e $T_0/2$ basta che si consideri un periodo, per la stessa definizione di periodo.

$$c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\, e^{-i n \omega_0 t}\, dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} F_0\, e^{-i n \omega_0 t}\, dt=\frac{F_0}{T_0}\left[\frac{e^{-i n \omega_0 t}}{-i n \omega_0}\right]_{-T_1/2}^{T_1/2}=$$

perché la funzione è diversa da zero solo nell'intervallo tra $-T_1/2$ e $T_1/2$ ritagliamo l'intervallo dell'integrale.

Applico le formule di Eulero

$$=\frac{i F_0}{T_0 n \frac{2\pi}{T_0}}\left[e^{-i n \frac{2\pi}{T_0}\frac{T_1}{2}}-e^{i n \frac{2\pi}{T_0}\frac{T_1}{2}}\right]=\frac{i F_0}{2\pi n}\left[\cos\left(n\pi\frac{T_1}{T_0}\right)-i\, \mathrm{sen}\left(n\pi\frac{T_1}{T_0}\right)+\right.$$

$$\left.-\cos\left(n\pi\frac{T_1}{T_0}\right)-i\,\mathrm{sen}\left(2\pi\frac{T_1}{T_0}\right)\right]=$$

$$=\frac{F_0}{\pi n}\,\mathrm{sen}\left(n\pi\frac{T_1}{T_0}\right)$$

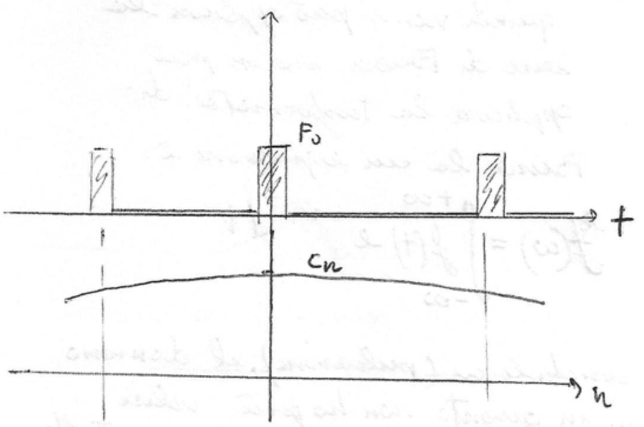
Si riscrive il tutto in modo da far comparire $\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}$ cioè:

$$c_n=\frac{F_0}{\pi n}\left(n\pi\frac{T_1}{T_0}\right)=F_0\frac{T_1}{T_0}\;\frac{\mathrm{sen}\left(n\pi\frac{T_1}{T_0}\right)}{n\pi\frac{T_1}{T_0}}$$

in questa forma potremo applicare dei limiti notevoli.

Vediamo come succede quando $T_0/T_1 \to \infty$.
Vuol dire che la funzione è quasi sempre nulla e l'intervallo di tempo in cui la funzione non è nulla è piccolo rispetto a T_0 ⇒ Stiamo considerando una "SERIE DI IMPULSI".

Ricordiamo che impulso vuol dire un fenomeno molto ridotto nel tempo e molto ampio come intensità. In generale un fenomeno ridotto nel tempo e con ampiezza elevata si può chiamare impulso ma non è un delta di Dirac in quanto nel nostro caso l'ampiezza è finita. (mentre nel delta di Dirac l'ampiezza è infinita).



Se $T_0/T_1 \to \infty$ vuol dire che $n_K \to \infty$.
Quindi se prendiamo n_1 che si ha quando $K=1$, è il primo zero, otteniamo $n_1 \to \infty$.
Disegnando l'andamento di c_n in funzione della frequenza (n) e dire che il primo zero tende ad infinito vuol dire che la funzione è quasi piatta.
Si è rappresentato un T_1 piccolo rispetto al T_0.
Si può dire che: il contenuto in frequenza è contenuto a basse frequenze. ⇒ lo spettro è piatto a basse frequenze.

Lo spettro è tanto più piatto quanto più T_1 è piccolo rispetto a T_0.

Vediamo come succede se $T_0/T_1 \to 1$ ⇒ Si ha una funzione al limite costante.
Si ha che:

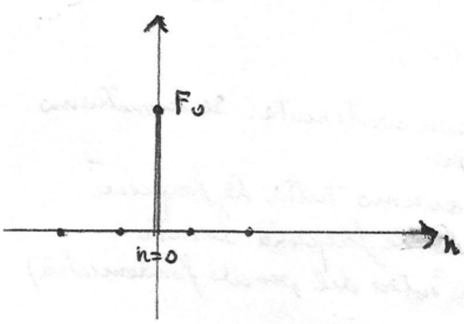
$$c_n = F_0 \frac{T_1}{T_0} \frac{\operatorname{sen}\left(n\pi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\right)}{n\pi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}$$

Se $T_0/T_1 \to 1$ si ha

$$c_0 = F_0 \qquad \text{per } n=0$$

mentre per tutti gli altri elementi $c_n = 0 \quad \forall n \neq 0$.

Se voglio rappresentare lo spettro la funzione avrà una sola linea spettrale.



Questa proprietà è qualcosa che capita sempre. Vi è una dualità nei domini del tempo e della frequenza nel senso che quando il supporto (la zona in cui la funzione è definita e quindi non nulla) nel dominio del tempo è ristretto (caso $T_0/T_1 \to \infty$) nel dominio della frequenza il supporto cresce. Al contrario nel dominio del tempo il supporto è esteso (caso $T_0/T_1 \to 1$) il supporto nel dominio delle frequenze è ristretto, infatti nel nostro caso vi è una sola linea spettrale.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 348