appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1183 DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Porcelli

MATERIA: Scienza delle Costruzioni + Temi + Eserc.

Prof. Valente

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

DOMANDA TEORIA

- figura
- passaggi chiave
- conclusione

PARTE A
- struttura chiusa
- carico, spostamento, isostatica
- geometria aree

PARTE B

① COS'È LA DEFORMAZIONE? componente simmetrica Jacobiano

② PERCHÈ SI CHIAMANO "INVARIANTI SCALARI della DEFORMAZIONE"? (Capitolo 7.4, pag 213)

B ③ CERCHI DI MOHR (prova B) → sito
↳ pag da 222 a 231.

PARTE A

- Diagrammi M,N,T per struttura isostatica (14 pt)
- carico di uno spostamento o rotazione mediante il PLV in una struttura isostatica (8 pt)
- Geometria delle aree, determinazione degli assi principali di inerzia di una figura piana (8 pt)

PARTE B

- Determinazione delle tensioni di una sezione del solido di SAINT VENANT (20 pt)
- Tracciamento dei 3 cerchi di Mohr per uno stato tensionale predefinito con domande su meccanismo da collasso (10 pt

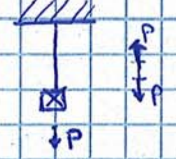
TEORIA del TRASPORTO => Geometria delle aree

- SCIENZE delle COSTRUZIONI -

Capitolo 1

MECCANICA DEI SOLIDI

FLUIDO = acquista la forma del recipiente che lo contiene
SOLIDO = ha una forma propria



dimensione 1 = FILO
FILO con peso attaccato ad un peso

- Il filo è sufficiente a reggere il carico?
- Come è sollecitato se il peso è P?

} 1° Problema di meccanica dei solidi.

Essa cerca di dare risposte a numerose domande alle quali per rispondere necessito sapere:

1. DISTRIBUZIONE INTERNA delle TENSIONI e delle DEFORMAZIONI
2. COMPORTAMENTO del MATERIALE o LEGGE - COSTITUTIVA

I problemi di meccanica dei corpi solidi sono di 2 tipi:

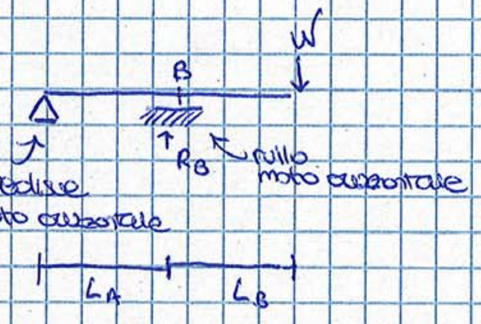
I PROBLEMA di RESISTENZA
II PROBLEMA di RIGIDEZZA

[CORPO RIGIDO = oggetto materiale le cui parti sono soggette al vincolo di rigidità, e cioè un corpo che sia da fermo che quando cambia posizione non si deforma mai]

Posso avere 2 cose:

A) L'ANALISI di un sistema dato → L'ANALISI di un problema può essere suddiviso in 4 fasi
   1. Definizione del problema
   2. Scelta del procedimento di soluzione
   3. Calcolo della soluzione
   4. Revisione critica della soluzione
B) Domande di PROGETTO

Faccio riferimento a dei modelli - matematici
→ MODELLO DEL CORPO RIGIDO



EQUILIBRIO DEI MOMENTI
R_B = reazione

A) $R_B L_1 - W(L_1 + L_2) = 0$ → eq. lineare dell'incognita R_B

B) $R_A L_1 - W L_2 = 0$ → eq. lineare dell'incognita R_A

R_A è positiva se verso il basso

Devo sempre considerare delle CONVENZIONI per esempio di rotazione

PROBLEMA ISOSTATICO = le reazioni sono determinate da condizioni di equilibrio delle forze

PROBLEMA IPERSTATICO = non sono sufficienti le condizioni di equilibrio del corpo rigido

Solitamente ho uno studio tridimensionale, a volte semplifico in modo bidimensionale.

Salto capitolo 2

- Capitolo 3 -

CINEMATICA E STATICA dei SISTEMI DI TRAVI

① CINEMATICA

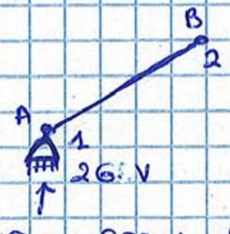
Gradi di Libertà — 2 DIMENSIONI

↳ + semplice astrazione

Un punto del piano ha 2 Gradi di libertà.

↳ elemento che collega 2 punti

Avendo 2 punti materiali A e B collegati da una BIELLA INESTENSIBILE

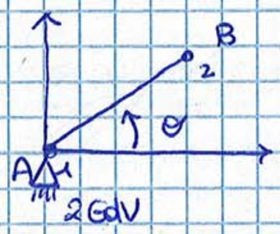


1 PUNTO → 2 GRADI di LIBERTÀ
2 PUNTI → 4 GRADI di LIBERTÀ
ma poiché la BIELLA è INESTENSIBILE essa introduce un blocco

Ponendo 1 cerniera fissa ho 2 GRADI DI VINCOLO

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell_{12}^2$$

Ponendo il punto 1 come origine

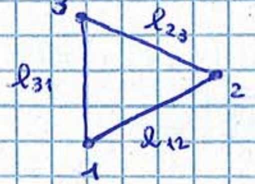


$$x_2^2 + y_2^2 = \ell_{12}^2$$

Il solido deve mantenere costante la distanza tra 2 punti (al contrario del liquido)

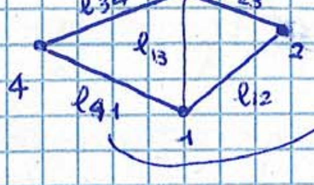
[2 PUNTI → 4 GdL − 2 GdV − 1 GdV = 1 GdL residuo]

- GdL = GRADO di LIBERTÀ
- GdV = Grado di VINCOLO



[GdL = 2×3 = 6 − 3(GdV) = 3 GdL residui]

- Aggiungendo un 4° punto



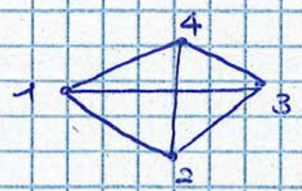
[+2 GdL − 2 GdV = 0]
↓
GdL = 3

→ Un corpo rigido nel piano ha 3 Gradi di LIBERTÀ

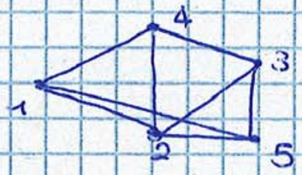
3 DIMENSIONI

1 BIELLA $\rightarrow$ 1 GdV
1 PUNTO $\rightarrow$ 3 GdL

$4 \times 3\ (GdL) - 6\ (GdV) = 6$ GdL residui



Aggiungendo un punto



$+3 GdL - 3 GdV = 0$

$\rightarrow$ UN CORPO RIGIDO nello SPAZIO (in 3D) ha 6 GRADI di LIBERTÀ

e ho anche
- 3 ANGOLI
- 3 POSIZIONE dei VERTICI

- VINCOLI -

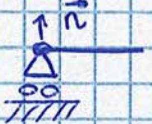
def. di cinematica

Impedisce un movimento. È un collegamento tra sistema ed il mondo esterno che impedisce un movimento

φ_P = rotazione su P
ds_P = spostamento da P

VINCOLI ESTERNI

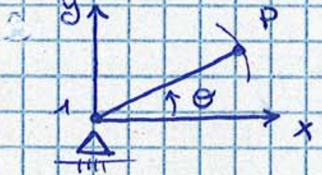
(1) CARRELLO = VINCOLO SEMPLICE



toglie 1 GdL lo spostamento verticale

$\{ds_P\}^T \{n\} = 0$

T = trasposto



$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell_{12}^2$ $\quad x_2^2 + y_2^2 = \ell_{12}^2$

$2x\,dx + 2y\,dy = 0$ $\rightarrow$ LINEARIZZAZIONE

$\rightarrow$ toglie 1 GdL

VINCOLO SEMPLICE

$\boxed{\{ds_P\}^T \{n\} = 0}$

spostamento VERTICALE

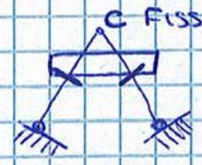
prodotto scalare
somma di prodotti dei componenti

$\vec{n}$ è il versore che indica la direzione di movimento che è $\perp$ a $\vec{n}$

Rimane il movimento ORIZZONTALE, ho un vincolo BILATERALE

S'può muovere solo ORTOGONALMENTE a $\vec{n}$

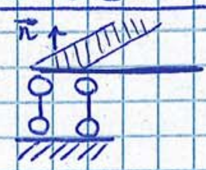
(2) CERNIERA FISSA → VINCOLO DOPPIO (toglie 2 GdL)



Il moto del corpo può essere una rotazione attorno al punto fisso

$\{ds_P\} = 0$ VINCOLO DOPPIO

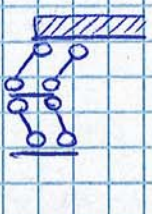
(3) DOPPIO PENDOLO o INCASTRO SCORREVOLE → VINCOLO DOPPIO



$\{ds_P\}^T \cdot \{n\} = 0$

$\varphi_P = 0$

(4) DOPPIO DOPPIO PENDOLO (come tecnigrafo) → VINCOLO SEMPLICE



$\varphi_P = 0$ rotazione su $P = 0$

ROTAZIONE ...

(5) INCASTRO → VINCOLO TRIPLO

Aggiungendo un pendolo orizzontale al doppio pendolo

$\{ds_P\} = 0$

$\varphi_P = 0$

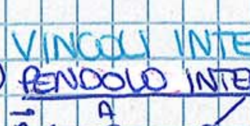
Non si sposta né in verticale, né in orizzontale

rotazione su $P = 0$ → $\varphi_P = 0$

|| TUTTI QUESTI VINCOLI VENGONO DETTI VINCOLI ESTERNI
|| OGNUNO DI QUESTI HA UN CORRISPONDENTE VINCOLO INTERNO

VINCOLI INTERNI

(1) PENDOLO INTERNO



basta immaginarne una delle 2 fisse l'altra ruota attorno alla fissa che diventa centro

$\{ds_B\}^T \{n\} = 0$

SEMPLICE

(2) CERNIERA INTERNA → DOPPIO

$\{ds_A - ds_B\} = \{0\}$

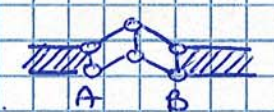
③ DOPPIO PENDOLO INTERNO → VINCOLO DOPPIO

$\varphi_A - \varphi_B = 0$

$\{dS_A - dS_B\}^T \cdot \{n\} = 0$

Toglie la rotazione e lo spostamento può avere solo direzione $\vec{n}$ e non $\vec{p}$

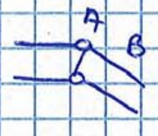
④ DOPPIO DOPPIO PENDOLO INTERNO → VINCOLO SEMPLICE



$\varphi_A - \varphi_B = 0$ lo spostamento rotazionale è nullo

lo spostamento mutuo può essere qualsiasi

⑤ INCASTRO INTERNO → VINCOLO TRIPLO



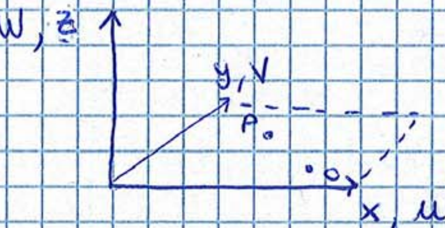
Blocca sia la rotazione (come cerniera fissa) che spostamento mutuo

$\{dS_A - dS_B\} = \{0\}$

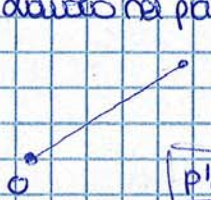
$\varphi_A - \varphi_B = 0$

Devo calcolare se i vincoli sono efficaci o meno

PROBLEMA di DISTRIBUZIONE delle VELOCITÀ in un PIANO



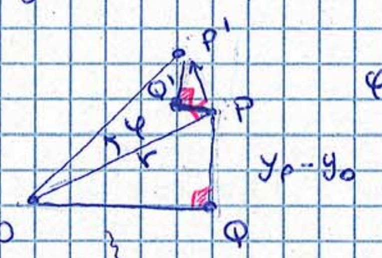
⇨ lavoro nel piano xy



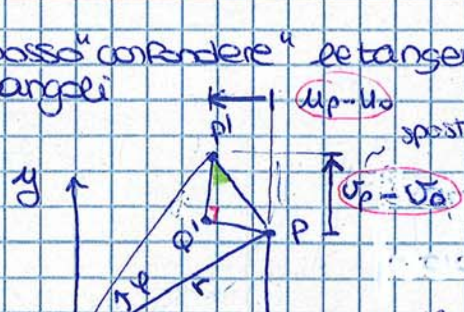
$$\boxed{\frac{P'Q'}{P'P} = \frac{QO}{PO}}$$

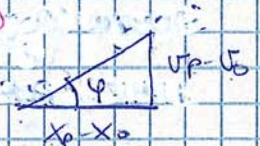
W = spostamento lungo z
V = spostamento lungo y
u = spostamento lungo x

Immagino che P si sposti in P' in seguito a rotazione



$\varphi \ll 1$ posso "confondere" le tangenti con gli angoli





$O\hat{Q}P$ simile $Q'\hat{P}P'$ $\quad \frac{P'Q'}{PP'} = \frac{OQ}{PO}$

3 angoli uguali
↓
TRIANGOLI SIMILI

$$\frac{P'Q'}{P'P} = \frac{P'Q'}{r \cdot \varphi} = \frac{\text{CATETO MAGGIORE}}{\text{IPOTENUSA}} = \frac{x_P - x_O}{r} \Rightarrow P'Q' = \frac{(x_P - x_O)}{\cancel{r}} \cancel{r}\,\varphi$$

① $\boxed{v_P - v_O = (x_P - x_O) \cdot \varphi}$ → 1ª LEGGE di DISTRIBUZIONE delle VELOCITÀ

$$\frac{Q'P}{r\varphi} = \frac{\text{CATETO CORTO}}{\text{IPOTENUSA}} = \frac{y_P - y_O}{r}$$

$$\boxed{\frac{Q'P}{PP'} = \frac{PQ}{PO}}$$

$$\boxed{u_P - u_O = -(y_P - y_O)\varphi}$$ (2) 2ª LEGGE

(1) + (2)

$$\boxed{\begin{cases} v_P - v_O = (x_P - x_O)\varphi \\ u_P - u_O = -(y_P - y_O)\varphi \end{cases}}$$

ho espresso lo stesso regola in 2 modi diversi

POSSO RISCRIVERE LO STESSO RAGIONAMENTO SU TUTTI E 3 I PIANI con versori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\boxed{(u_P - u_O)\,\vec{i} + (v_P - v_O)\,\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varphi_z \\ (x_P - x_O) & (y_P - y_O) & 0 \end{vmatrix}}$$

MATRICE SIMBOLICA

faccio DETERMINANTE SIMBOLICO cioè il det della MATRICE SIMBOLICA

- VALE la SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

REGOLA GENERALE DI DISTRIBUZIONE delle VELOCITÀ

$$\boxed{(u_P - u_O)\,\vec{i} + (v_P - v_O)\,\vec{j} + (w_P - w_O)\,\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ (x_P - x_O) & (y_P - y_O) & (z_P - z_O) \end{vmatrix}}$$

posso riscriverlo

$$\boxed{\{ds_P\} = \{ds_O\} + \{\varphi\} \wedge \{P - O\}}$$

Posso riscriverlo

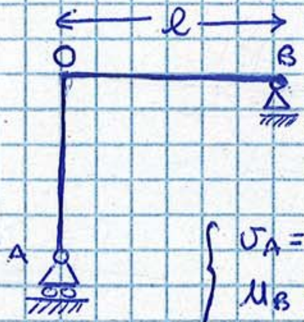
$$\boxed{\begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \\ z_P - z_O \end{Bmatrix}}$$

MATRICE ANTISIMMETRICA

$A_{ij} = -A_{ji}$

$A_{ii} = 0$

Concetti



VINCOLI: $v_A = 0$
$u_B = 0$
$v_B = 0$

$$\begin{cases} v_A = v_O + \overbrace{(x_A - x_O)}^{=0} \varphi = 0 \\ u_B = u_O - \overbrace{(y_B - y_O)}^{=0} \varphi = 0 \\ v_B = v_O + (x_B - x_O) \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ell \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_O \\ v_O \\ \varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

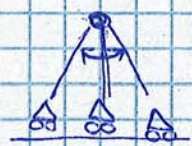
$$\boxed{\det | \ | = -\ell}$$

SISTEMA OMOGENEO

① se $\det \neq 0$ soluzione è unica ed esiste ed è il punto O $\leftrightarrow$ $\det \neq 0$ → VINCOLO EFFICACE $u_O = v_O = \varphi = 0$

② se $\det = 0$ esiste anche la soluzione NON banale
VINCOLO NON EFFICACE

Quando $B = 0 \rightarrow \ell = 0$
allora ho un sistema che può muoversi così



poiché VINCOLO NON EFFICACE

1ª ESERCITAZIONE

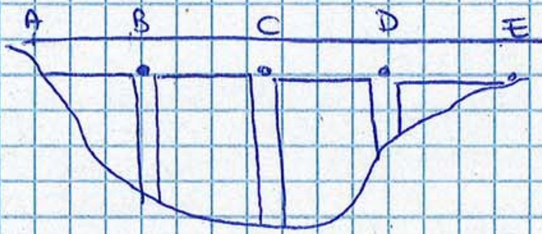
STUDIO GRAFICO DELLA CINEMATICA dei SISTEMI LABILI

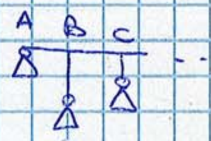
Sistemi LABILI
⇓ CATENE CINEMATICHE

1 grado di libertà

Se
- GdV = GdL ⇒ eq. ISOSTATICA
- GdV > GdL ⇒ eq. IPERSTATICA
- LABILE: GdV < GdL ⇒ eq. non stabile, la struttura si muove

(TH) studiare il CAMPO VETTORIALE degli SPOSTAMENTI
+
CONFIGURAZIONE DEFORMATA (Ricordo che parlo di corpo rigido)





1° TEOREMA delle CATENE CINEMATICHE

- Si applica se la catena ha ALMENO 2 CORPI RIGIDI
- CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE:
  - per ciascuna coppia di corpi i, j i centri assoluti e relativi (di rotazione) siano allineati

ovvero

Centri assoluti C_i e C_j
Centro relativo C_{ij}
SONO ALLINEATI ⇒ SISTEMA LABILE

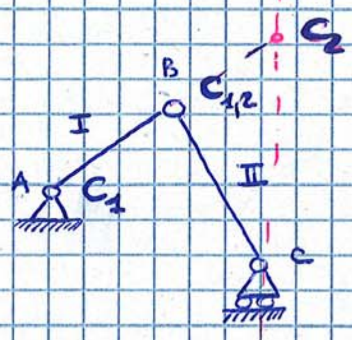
2° TEOREMA delle CATENE CINEMATICHE

- Si applica ad una catena con almeno 3 CORPI RIGIDI
- Ciascuna terna di corpi i, j, k →

i centri relativi sono allineati C_{ij}, C_{ik}, C_{jk}

ES. 1

Nel CARRELLO il CENTRO è sempre SULLA VERTICALE rispetto al movimento.



① 2 ASTE X 3 GdL = 6 GdL

$2+2+1 = 5$ GdV

cerniera interna *

$C_{1,2} \rightarrow \boxed{2(n-1)}$ per le cerniere interne

n° aste

$2(2-1) = 2$ *

6 GdL > 5 GdV ⇒ catena cinematica ⇒ permette lo spostamento

② CENTRI ASSOLUTI e RELATIVI

Struttura fatta da 2 BIELLE (2 Aste con 2 cerniere)

(BIELLA = Asta con 2 cerniere)

è o in trazione o compressione

1. Centri assoluti impediscono movimento
2. Centri relativi → conosco il moto che il vincolo mi permette o impedisce di fare

CERNIERA = mi permette di ruotare

Ⓐ ⇒ Per la CERNIERA passa il centro ASSOLUTO (perché vincolato al suolo)

DOVE CERNIERA ⇒ CENTRO

Ⓑ ⇒ Per B ho CENTRO RELATIVO $C_{1,2}$ che collega 2 aste

- Il centro di istantanea rotazione sta su una retta perpendicolare al movimento permesso

Ⓒ In C è permesso il moto orizzontale, il centro è sulla retta verticale

ma C_1, $C_{1,2}$ e C_2 devono essere allineati!

③ TRACCIO GLI SPOSTAMENTI

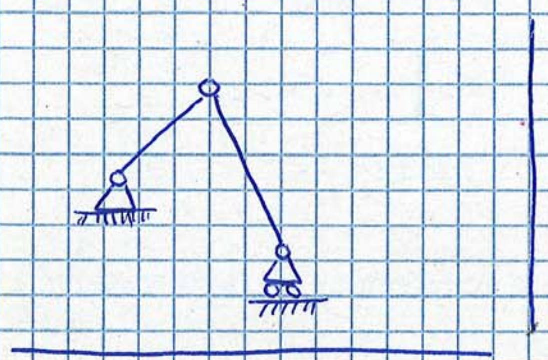


DIAGRAMMA SPOSTAMENTI ORIZZONTALI

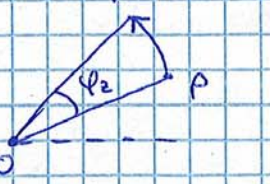
VERTICALI

Considero 3 cose

- Esiste una linearità tra gli spostamenti e le aste

EQUAZIONI LINEARI (3.8)

$$\begin{cases} u_P - u_O = -(y_P - y_O)\,\varphi_z \\ v_P - v_O = (x_P - x_O)\,\varphi_z \end{cases}$$



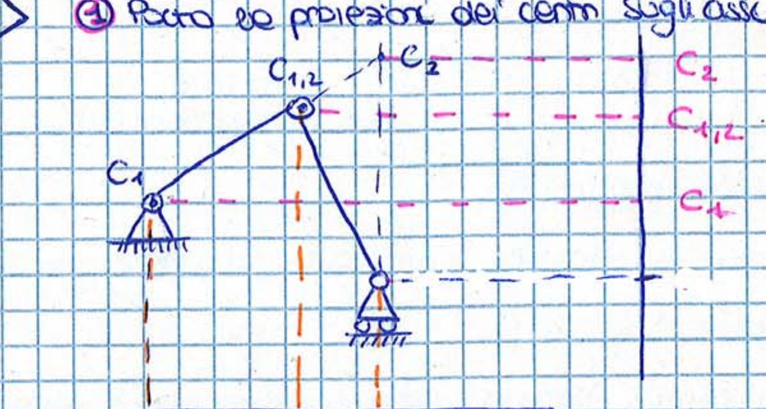
confondo $tg\varphi$ con φ

- POSIZIONE CENTRI ASSOLUTI

Dove spostamento nullo

- CONDIZIONI di CONTINUITÀ dei VINCOLI INTERNI

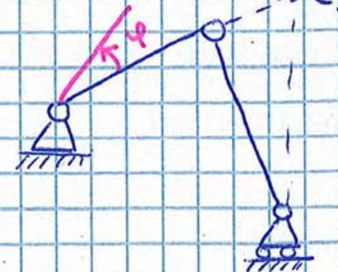
⇨ ① Posto le proiezioni dei centri sugli assi di spostamenti

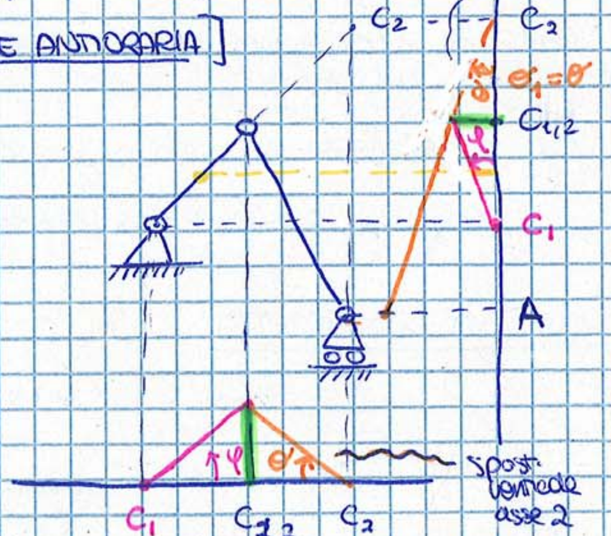


Non ho realmente una struttura, è come se fosse virtuale

② Impongo uno spostamento arbitrario che è una rotazione di un'asta applicata a qualsiasi corpo rigido

[Solitamente φ POSITIVO SE ANTIORARIA]





C_2 è centro assoluto e non si muove

In $C_{1,2}$ relativo ho una cerniera, permette la continuità degli spostamenti e la mantiene θ è orario

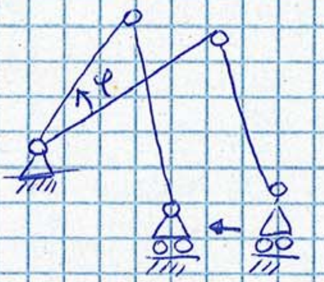
È possibile che abbia sia rotazione oraria che antioraria? No

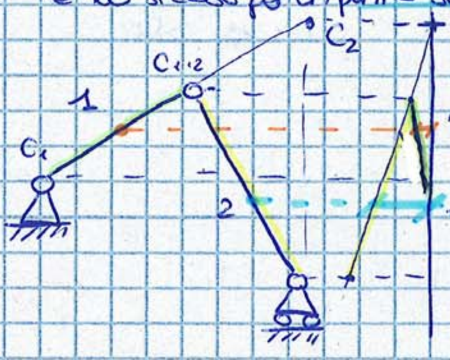
— → spostamento reale di $C_{1,2}$

C_1 non si sposta orizzontalmente

$C_{1,2}$ si sposta verso sx —

Prendendo un punto sull'asta uno faccio riferimento solo alle proiezioni dell'asta 1 e lo stesso per un punto sull'asta 2



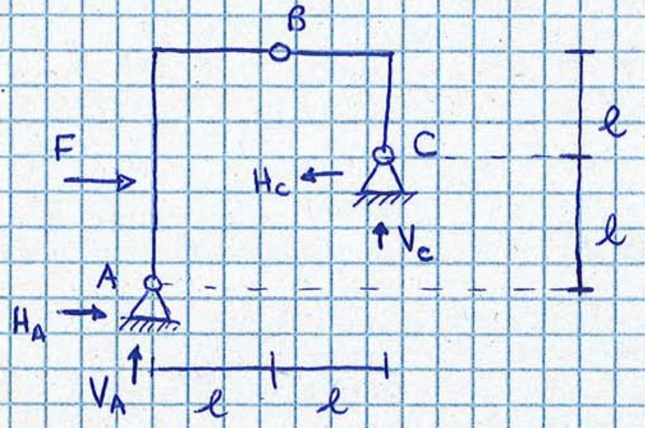


~ spostamento punto 1 su asta 1 riferito alla proiezione asta 1

~ spostamento punto 2 su asta 2 riferito alla proiezione asta 2

PORTALE ZOPPO

Ho una forza che agisce sul montante di sx



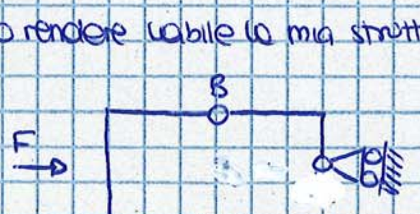
STABILE → TOLGO un GdV

Calcolo le REAZIONI AI VINCOLI V
VINCOLI H

Rendendo C labile posso calcolare la rotazione
Ad ogni GdL corrisponde una reazione

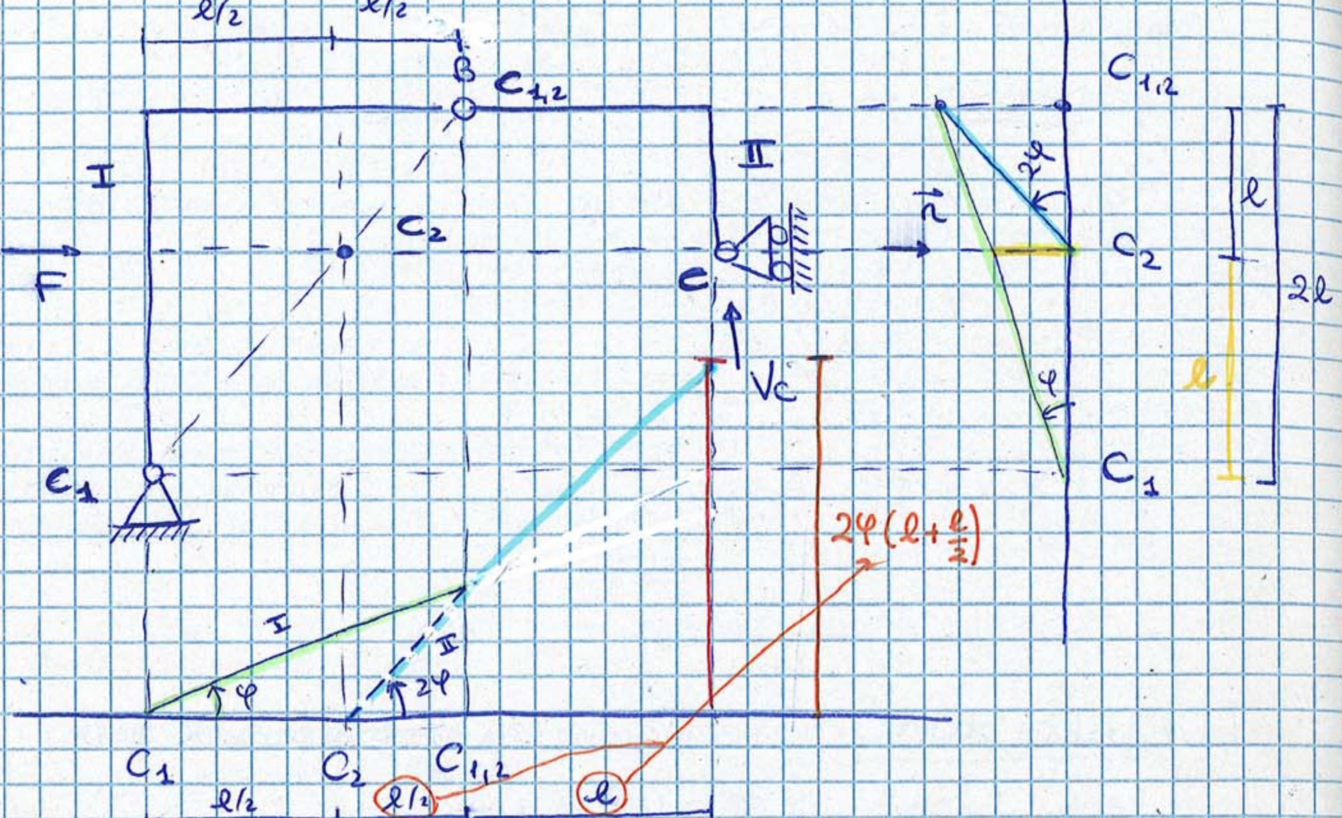
(1) CALCOLO V_C

Devo rendere labile la mia struttura → • togliere 1 GdV (TOLGO LA CERNIERA)
• e far sì che la struttura si muova in modo concorde alla reazione, ⊥ alla F applicata



⤴ metto in verticale per togliere H_C

→ CENTRI DI ISTANTANEA ROTAZIONE



L'asta 1 ruota in senso antiorario di φ

C_1 fermo perché centro assoluto

C_2 spostamento nullo

PRINCIPIO dei LAVORI VIRTUALI (PLV)

Devo avere equilibrio   LAVORI INTERNI = LAVORI esterni

ho $2\varphi(l+\frac{l}{2})$ = spostamento

lavoro di V_c = forza per spostamento

V_c

$+V_c\cdot(2\varphi)(l+\frac{l}{2})$

F   ho spostamento — $= \varphi(l)$

Poiché i 2 spostamenti hanno segno opposto

$+F(\varphi\cdot l)$ $V_c\,(2\varphi)(l+l/2) = F(\varphi\cdot l)$

$$V_c\,(2\varphi)(l+\frac{l}{2}) - F(\varphi\cdot l) = 0$$

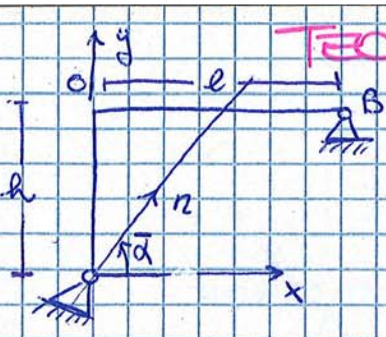
$$V_c = F/3$$

ES 3.4 catene cinematiche

TEORIA

5/03/2014

PAG 75



$$\{dS_P\}^T\{n\}=0$$

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \end{Bmatrix}^T \{n\} = 0$$

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix}$$

$u_0 \cos\alpha + h\varphi\cos\alpha + v_A \sin\alpha = 0$

$u_A \cos\alpha + v_A \sin\alpha = 0$ $\qquad$ $\underbrace{(u_0 + h\varphi)}_{=u_A} \cos\alpha + v_A \sin\alpha = 0$

$u_A = u_0 - \underbrace{(y_P - y_0)}_{=h}\varphi$

$$\begin{cases} u_P - u_0 = -\varphi(y_P - y_0) \\ v_P - v_0 = \varphi(x_P - x_0) \end{cases} \quad ① \begin{cases} u_A = u_0 + h\varphi \\ v_A = v_0 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} u_B = u_0 \\ v_B = v_0 + \varphi l \end{cases}$$

SISTEMA LINEARE SU CUI DISCUTERE LA MAL DISPOSIZIONE DEI VINCOLI

$$\begin{array}{c} \{dS_A\}^T\{n\} \\ u_B \; * \\ v_B \end{array} \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & h\cos\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{vmatrix}}_{[B]} \underbrace{\begin{vmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi \end{vmatrix}}_{\{x\}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

SISTEMA OMOGENEO *

se $\det \neq 0$ → soluzione unica banale cioè u_0, v_0, φ nulli
il sistema rigido non si muove

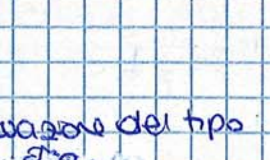
$\det |*| = -\sin\alpha\,(l) + h\cos\alpha$

CASO

mal disposizione vincoli

① $\alpha = 0,\ h = 0 \Rightarrow \boxed{\det = 0}$
↓
vincolo orizzontale

⇨ situazione del tipo



② $\alpha = 90°,\ h = 0 \Rightarrow \boxed{\det = 0}$ ⇨

situazione nostra $\bar{\alpha}$ assegnato tale per cui

→ ③ $tg\,\bar{\alpha} = \frac{\cos\bar{\alpha}}{\sin\bar{\alpha}} = \frac{h}{l}$ → $\boxed{\det = 0}$

$\det = -\frac{h}{\cancel{l}}\cos\bar{\alpha}\,\cancel{l} + h\cos\bar{\alpha} = 0$

MAL DISPOSIZIONE VINCOLI

④ se $\boxed{\det \neq 0}$ ⇒ VINCOLI BEN DISPOSTI

CAPITOLO 3.5 STATICA

Tutte le volte che blocco un grado di libertà ho una reazione !

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE di EQUILIBRIO

La sommatoria delle forze applicate (che sono vettori) è uguale a zero

$$\{R\} = \Sigma \{F_i\} = 0$$

momento rispetto polo O

$$M(O) = \Sigma M_i + \Sigma(\{r_i\} \wedge \{F_i\})^T \{K\} = 0$$

M_i = coppie applicate di forze
→ se è in equilibrio le coppie sono nulle

se avvito ho una forza uguale da entrambi gli estremi

K = versore ortogonale alla lavagna (uscente)

r = braccio

Poiché la risultante è nulla, il momento rispetto ad un altro punto O'

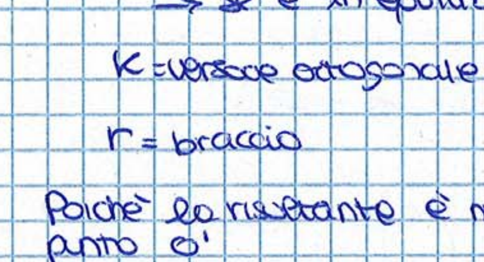
$$M(O') = M(O) + [(O - O') \wedge \{R\})^T \{K\}$$

O può essere un punto qualsiasi

Per garantire che il sistema è in equilibrio

- RISULTANTE FORZE = 0
- MOMENTO RISPETTO AD UN PUNTO ARBITRARIO = 0

- STRUTTURA dal PUNTO DI VISTA STATICO



- se il sistema è labile Dipende solo dai vincoli e non dai carichi
- Se è STABILE invece necessito di una F esterna altrimenti avrei reazioni tutte nulle

Assumo positive le F orizzontali

→) $R_A \cos\alpha + H_B = 0$

↑) $R_A \sin\alpha + V_B - F = 0$

O = polo

O) $\underbrace{R_A \cos\alpha}_{\text{componente orizzontale} > 0} \cdot h + V_B \cdot l - F\, l/2 = 0$

Incognite R_A, H_B, V_B

* $[A]$ → è la trasposta di * (inverto cioè righe e colonne)

$$
\begin{array}{c}
\rightarrow \\ \uparrow \\ \circ
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 1 \\ h\cos\alpha & 0 & l \end{bmatrix}}_{[A]}
\underbrace{\begin{Bmatrix} R_A \\ H_B \\ V_B \end{Bmatrix}}_{\{x\}}
= - \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ -F\,l/2 \end{Bmatrix} \; *
$$

R_A $\quad$ RANGO = 2 $\quad$ H_B $\quad$ V_B

Effettuo ecc:

2. (nelle fotocopie) STUDIO ALGEBRICO della STATICA dei SISTEMI di TRAVI PIANE

Ho un vettore termini noti

- se $\boxed{\det \neq 0}$ → VINCOLI BEN DISPOSTI → il sistema permette una ed una sola disposizione → ho vincoli efficaci ed equazione di equilibrio
- se $\boxed{\det = 0}$ → Faccio riferimento alla "matrice orlata"
  FOTOCOPIE!
  MATRICE ORLATA è quella che ottengo aggiungendo il vettore termini noti
  → NON E' POSSIBILE RICAVARE le REAZIONI
  → VINCOLI MAL DISPOSTI

↓ SOLUZIONE IMPOSSIBILE se carico GENERICO

* moltiplicando per $\frac{1}{l}$ ottengo $-\frac{F}{2} \neq F$ ⇒ non calcolabile

la componente // alle oscillazioni non può quindi essere assorbita

MATRICE ORLATA → $rg = 2$ → ci sono dei carichi che moltiplicati per $\frac{1}{l}$ danno la stessa eq.
→ ho caso particolare in cui il carico non va a modificare le oscillazioni

moltiplicando la terza riga otterrei per il termine noto $1/l$

$\frac{h}{l} = tg\alpha$

$$
\boxed{\begin{array}{l}
h\cos\alpha \cdot \frac{1}{l} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha = \text{sen}\alpha \\
0 \cdot \frac{1}{l} = 0 \\
l \cdot \frac{1}{l} = 1
\end{array}}
$$

⇒ seconda riga = 3ª riga

PLV

$\{S_0\}^T \{F\} + \{S_x\}^T \{X\} = 0$

Non è in grado di assorbire energia elastica, il lavoro virtuale viene ad essere zero

* $[A]\{x\}$

$[A]$ ↓ matrice di prima; $\{x\}$ ← reazioni

$-\{S_0\}^T [A] \{x\} + \{S_0\}^T [C]^T \{x\} = 0$

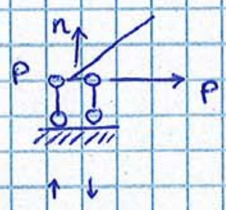
$\{S_0\}^T ([A] - [C]^T) = 0 \Rightarrow \boxed{[A] = [C]^T}$

DUALITÀ STATICO CINEMATICA del CORPO RIGIDO

Ho impedito solo spostamenti ⇒ ho forze

Impedendo la rotazione ⇒ ho una coppia

DOPPIO PENDOLO



① $\{dS_p\}^T\{n\} = 0 \rightarrow \{R_p\}^T\{n\} \neq 0$

② $\{dS_p\}^T\{p\} \neq 0 \rightarrow \{R_p\}^T\{P\} = 0$

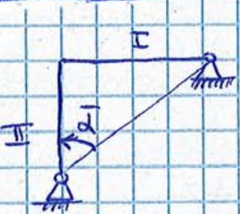
③ $\varphi_z = 0 \rightarrow M_p \neq 0$

① Spostamento non ha componente lungo n,
la reazione ha componente lungo n

② lo spostamento lungo p ha componente,
la reazione non ha componente lungo p

③ $M_p \neq 0$ ⇒ per impedire la rotazione deve esserci una coppia
→ 2 forze colineari opposte che danno momento ≠ 0
Bielle parallele → una in trazione ↑ una in compressione
↓ non danno rotazione

CASO PARTICOLARE



$\alpha = \bar{\alpha}$ → caso in cui C_1 allineato con C_2
e con $C_{1,2}$
→ sistema labile

NELL' INCASTRO

CASI PARTICOLARI

se ho $u_p = 0 \rightarrow H_p \neq 0$

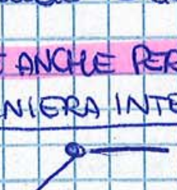
se ho $v_p = 0 \rightarrow V_p \neq 0$ non ho spost. verticale

se ho $\varphi_p = 0 \rightarrow M_p \neq 0$

Quando 1 GdL è impedito nasce una reazione

VALE ANCHE PER I GRADI DI LIBERTÀ INTERNI

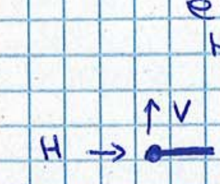
CERNIERA INTERNA



$\{dS_A - dS_B\} = \{0\}$

Si scambiano reazioni interne orizzontale e orizz.

↳ la spacco in 2
e trovo le reazioni
H = uguali e contrarie che agiscono sulla metà dx e metà sx



H = uguali e opposte
V = uguali e opposte

PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

PENDOLO INTERNO

→ FOTOCOPIA (4) Capitolo 4

FORZE RISULTANTI = 0
MOMENTO = 0
⇒ SISTEMA IN EQUILIBRIO

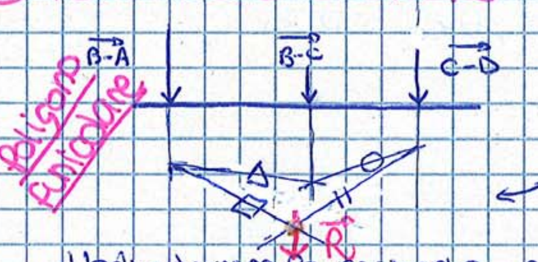
6/03/2014

Modulo della forza peso è lo stesso ma faccio una "fatica" maggiore se reggo il peso ad una distanza maggiore dal mio corpo

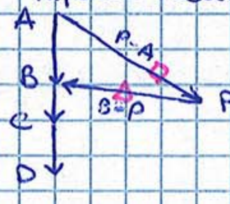
→ Conta NON SOLO IL PESO ma anche RETTA D'AZIONE = retta verticale

Devo trovare la RISULTANTE → quell'unica forza che ha effetto sul corpo rigido

(1) FORZE NOTE e DIVERSE



Riporto i vettori per poterli sommare



Voglio trovare la risultante, prendo un punto esterno e posso dire che $\overrightarrow{B-A}$ è dato dalla somma

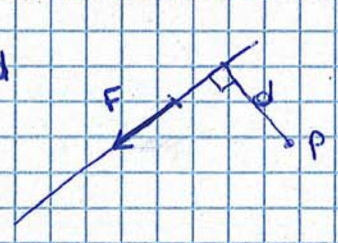
Le forze non cambiano se vengono fatte scorrere lungo la retta d'azione

Se la ... viene fatta scorrere lungo la sua retta d'azione con stesso modulo la risultante non varia → devo trovare la retta d'azione

↓

MOMENTO NON CAMBIA
BRACCIO NON CAMBIA → IL CONTRIBUTO della FORZA non CAMBIA

$M = F \cdot d$

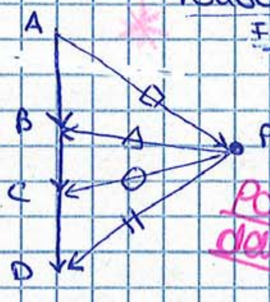


$\boxed{\overrightarrow{R} = \overrightarrow{D-A}}$

$\overrightarrow{R}$ = Risultante

POLIGONO FUNICOLARE

$$\begin{cases} \overrightarrow{B-A} = \overrightarrow{B-P} + \overrightarrow{P-A} \\ \overrightarrow{C-B} = \overrightarrow{C-P} + \overrightarrow{P-B} \\ \overrightarrow{D-C} = \overrightarrow{D-P} + \overrightarrow{P-C} \end{cases}$$

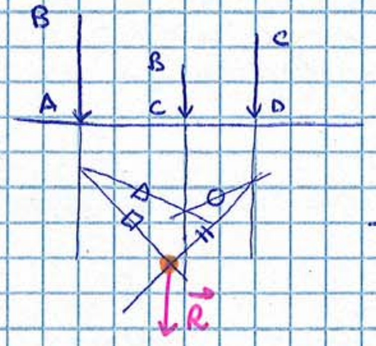


Come se avessi 2 fili che sostengono la forza

POLIGONO delle FORZE

Le rette d'azione del primo ⊥ e ultimo raggio // si incontrano nel punto • → LA RETTA D'AZIONE PASSA PER QUEL PUNTO

$\overrightarrow{R}$



→ quelle sotto sono TRAZIONI

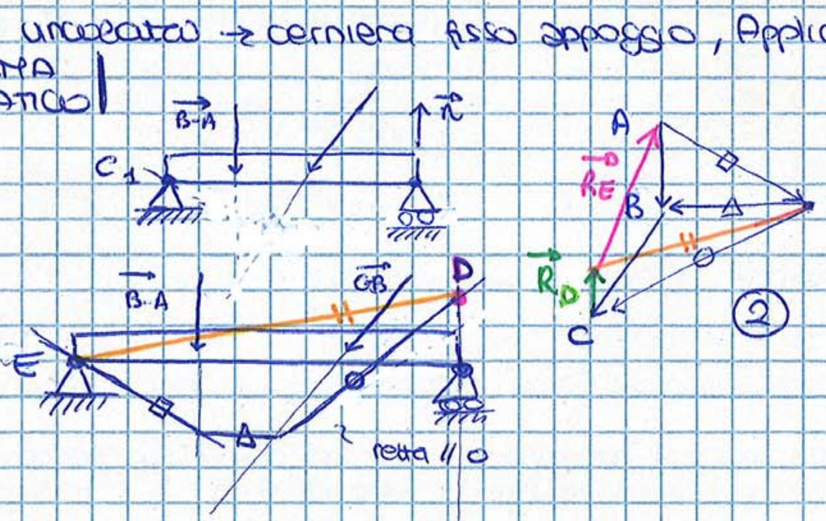
- Se i vettori sono LIBERI basta fare la coda sulla punta del primo vettore
- Se i vettori sono APPLICATI è necessario preoccuparsi della RETTA d'AZIONE costruendo il poligono FUNICOLARE

② FORZE NON TUTTE NOTE (reazioni)

Le reazioni nascono da condizioni di equilibrio

Trave vincolata → cerniera fisso appoggio, Applico 2 forze

| SISTEMA ISOSTATICO |



Traccio la prima retta // al raggio vettore □ partendo da C_1

↳ trovo // unendo C_1 e • e la disegno // passante per P

Non è completamente nota la forza ma lo è la retta d'azione! → trovo il punto di passaggio • D

Tirando verticalmente da C verso // ho trovato la Reazione $\vec{R_B}$

| SEQUENZA □, Δ, ○

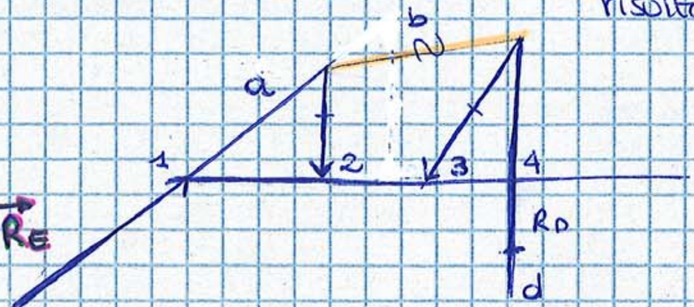
Posso inoltre trovare $\vec{R_E}$

- Trovo nel disegno ① -//- e le altre rette □, Δ, ○ in modo //
- Lo riporto sul disegno ②
- Trovo $\vec{R_B}$
- Trovo $\vec{R_E}$

Riporto i vettori $\vec{R}_E$, costruisco la CURVA DELLE PRESSIONI (C.D.P *) o
L'UOGO delle SUCCESSIVE RISULTANTI

E' il luogo dove viaggia la risultante

→ Caso particolare



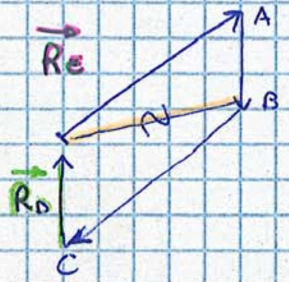
TRATTO	C.D.P *
$\overline{12}$	retta a
$\overline{23}$	retta b
$\overline{34}$	retta d

Caso particolare in cui il POLIGONO FUNICOLARE coincide con la CURVA delle PRESSIONI

E' come se ci fosse un arco che riprende le forze verso il basso

Posso ora sommare la reazione $\vec{R}_E$ costruendo un altro poligono

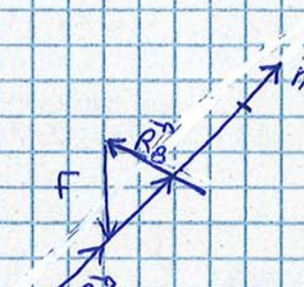
Ho ∞^2 possibilità di scegliere P



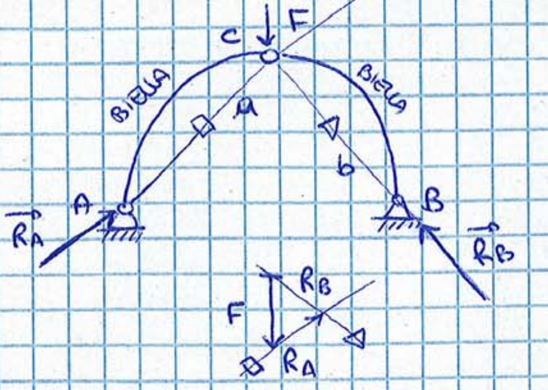
⇒ Sommo $\vec{R}_E$ e $\overline{B-A}$ ho la risultante che viaggia sulla retta

→ FOTOCOPIA (5)

PRINCIPIO DELLE 3 FORZE



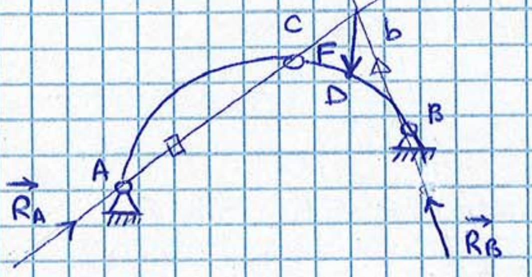
Se un sistema è soggetto a 3 forze bisogna che se deve essere in equilibrio le 3 forze passino da UN PUNTO, altrimenti esse danno momento su quel punto.

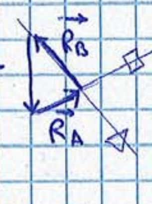


BIELLA = elemento tra 2 cerniere
→ elemento scarico collegato al mondo esterno attraverso 2 cerniere

TRATTO	C.D.P.
$\overline{AC}$	retta a
$\overline{CB}$	retta b

Somma di R_A e R_B = F





← Trovo così R_A e R_B

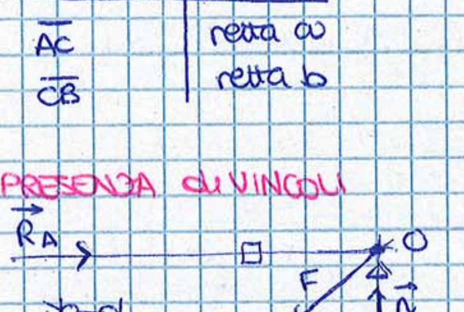
- Disegno F
- Traccio le parallele □ e Δ
- Trovo R_A e R_B

TRATTO	C.D.P.
$\overline{AC}$	retta a
$\overline{CB}$	retta b

Il punto D è il punto più sollecitato perchè più lontano dalla retta d'azione R_B

→ PIÙ IL PUNTO È LONTANO dalla RETTA D'AZIONE PIÙ ESSO È SOLLECITATO

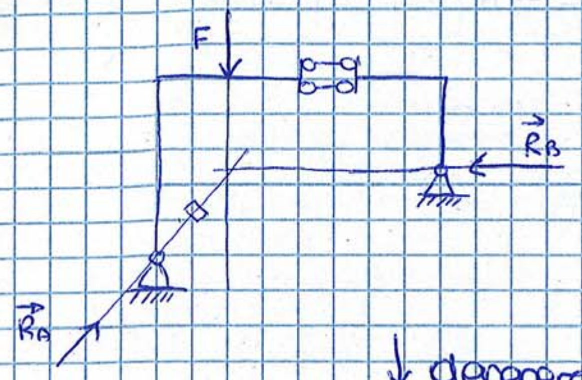
PRESENZA di VINCOLI

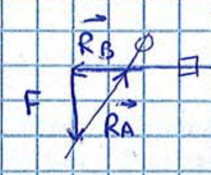


Non ho forza di TAGLIO
È incognita la lunghezza e il punto di applicazione

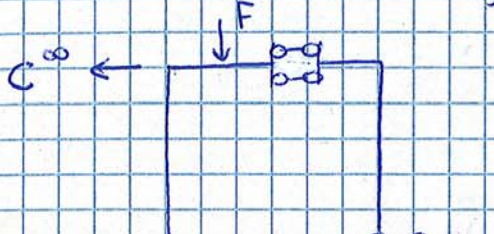
Se ho 2 forze per l'equilibrio anche la 3ª deve passare per il punto da cui passano le 2 forze. Assumendo il polo O anche la 3ª forza deve passare per O per dare momento = 0
$\vec{R}_A$ passa con la retta d'azione per O

Posizionando R_A e R_B con retta d'azione per O il poligono delle reazioni si chiude ⇒ SISTEMA È IN EQUILIBRIO





↓ degenerando l'esempio



$R_A \to \infty$

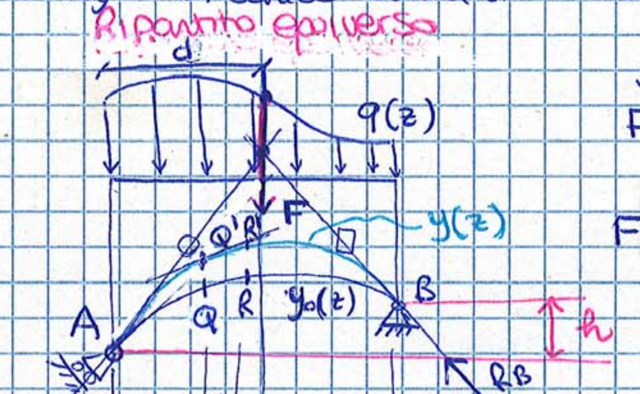
$R_B \to \infty$

Se le reazioni tendono all' ∞ → VINCOLI MAL DISPOSTI

CURVA DELLE PRESSIONI 4.4

Immagino un carico su una struttura con asse curvilineo 10/03/2014

Ripartito equiverso



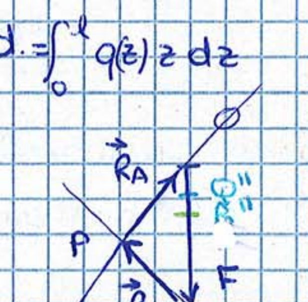
risultante

$$F = \int_0^l q(z)dz$$

l = luce da coprire

d = retta d'azione della risultante

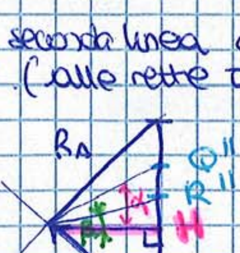
$$F\,d = \int_0^l q(z)\,z\,dz$$



P = polo del poligono funicolare
↓
può essere scelto in ∞^2 modi diversi ma in questo caso fisso P in modo che R_A e R_B diano come risultante F

Prendendo un generico punto Q e R vicini

Creo una seconda linea di condotta tangente alla curva delle pressioni (alle rette □ e ○) —



$$\overline{Q''R''} = q\,dz = Q''S - R''S = H\left[\tan(\alpha) - \tan(\beta)\right]$$

H → passa la componente orizzontale

la componente orizzontale di R_A = alla componente orizzontale di R_B

$\overline{Q''R''} = q\,dz = Q''S - R''S = H\left[\tan\alpha - \tan\beta\right] = -H\underbrace{\left[y'(R) - y'(Q)\right]}$

$q\,dz = -H\,dy'$

è l'incremento della pendenza $\rightarrow dy'$

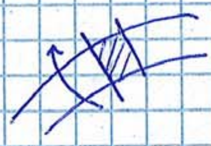
$$\boxed{\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{q(z)}{H}}$$

derivata seconda della curva delle pressioni $= -\dfrac{q(z)}{H}$

EQ DELLA CURVA delle PRESSIONI per CARICO RIPARTITO EQUIVERSO

VINCOLI INTERNI

- INCASTRO



Il momento flettente $\boxed{M = H(y - y_0)}$

La distanza tra Q' e Q è componente verticale ma essa non ha braccio! Quindi, per esprimere M utilizzo solo la componente orizzontale

$y - y_0$ = distanza fra la CURVA delle PRESSIONI e la LINEA d'ARCO

$$\frac{d^2M}{dz^2} = -q(z) - H\frac{d^2y_0}{dz^2}$$

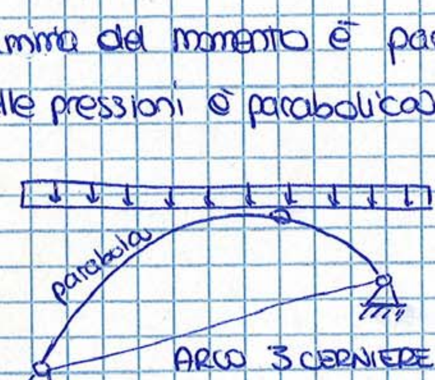
EQ che dice come varia il MOMENTO FLETTENTE al VARIARE di z

CASI:

① TRAVE RETTILINEA

$y_0 = \dfrac{h}{l}z$ $\qquad \boxed{\dfrac{d^2M}{dz^2} = -q(z)}$

Se q = cost $\Rightarrow$ Il diagramma del momento è parabolico
$\Rightarrow$ curva delle pressioni è parabolica (y)



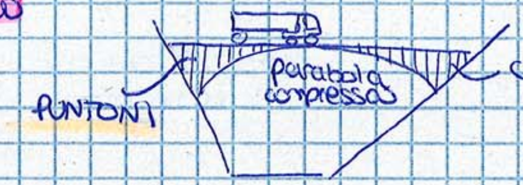
carico uniforme q = cost

$\rightarrow$ Alla cerniera $M = 0$ $\longrightarrow$ mando la y a coincidere con $y_0 \Rightarrow M = H\underbrace{(y - y_0)}_{=0}$

$M = 0$ perché tolgo un momento di sollecitamento

Nei ponti introduco degli elementi che trasmettono il carico alla parabola

- ARCO

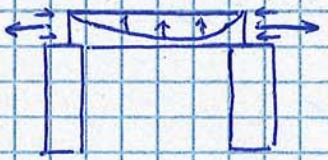


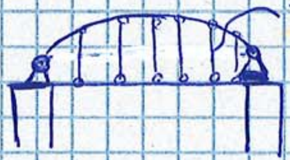
CENTINATURA = struttura provvisoria per gettare l'arco ma è molto costosa → sostituita all'arco con TRAVI PRECOMPRESSE e PILE

PARABOLA => curva delle pressioni per un carico uniforme

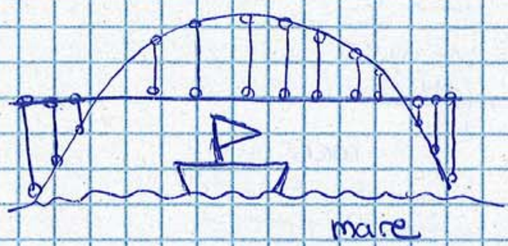
- PILE E TRAVI PRECOMPRESSE

Ha elementi parabolici ma all'interno della struttura





TIRANTI che riportano il carico all'arco in alto

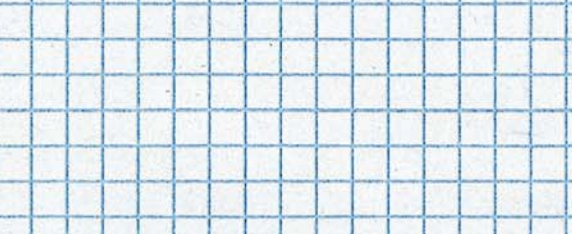


→ Forma ottimale per consentire traffico dei mezzi

CARICO RIPARTITO

Se l'arco è classico H è di COMPRESSIONE => ELEMENTO COMPRESSO che è soggetto al CARICO di PUNTA

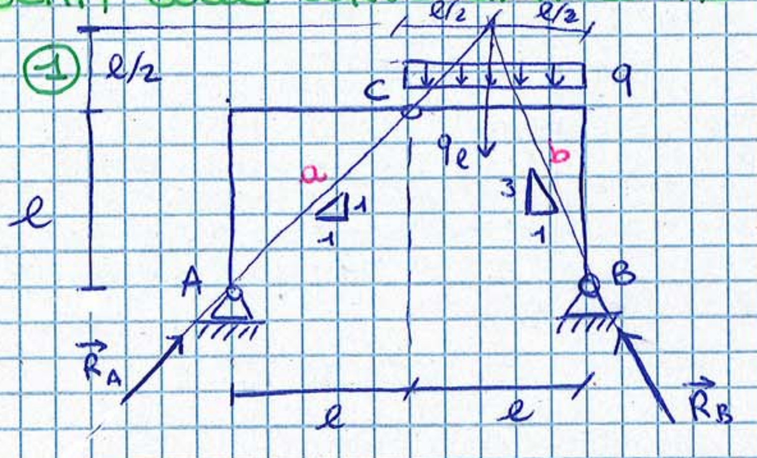
una lama di coltello si piega se la schiaccio



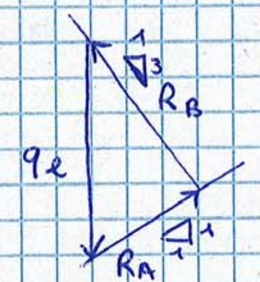
Il problema del carico di punta viene dato alle pile

Golden Gate
"San Francisco"

ESEMPI SULLE CURVE di PRESSIONE



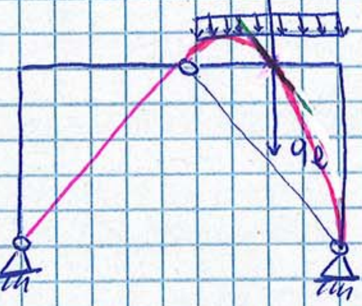
ql = peso per braccio = Momento



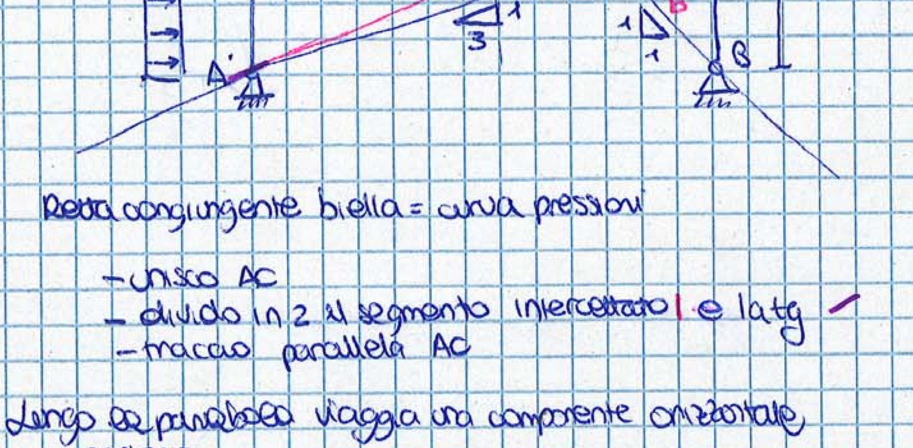
TRATTO	CDP
$\overline{AC}$	retta a
$\overline{BD}$	retta b
$\overline{CD}$	PARABOLA COMPRESSA

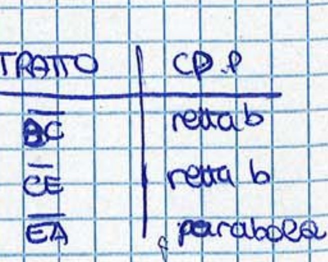
sul tratto CD la curva delle pressioni è una parabola

perché ho risultante di compressione



Unisco CD, continuo q_l, traccio la parallela a CB





TRATTO	CDP
$\overline{BC}$	retta b
$\overline{CE}$	retta b
$\overline{EA}$	parabola

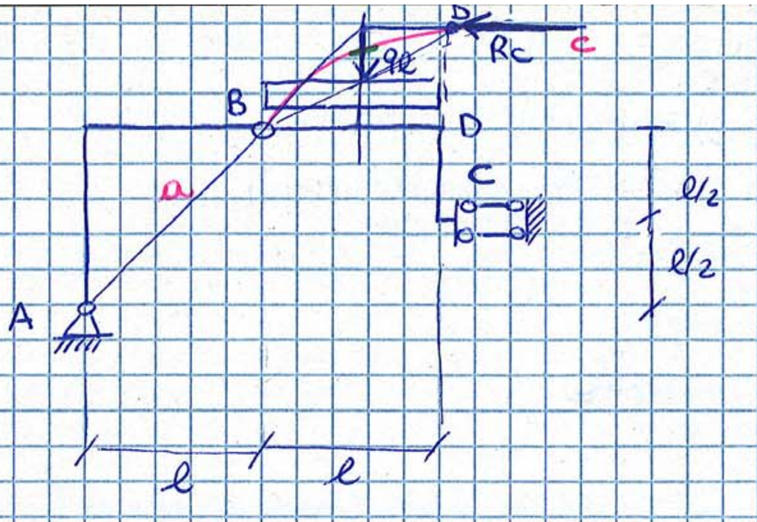
Retta congiungente biella = curva pressioni

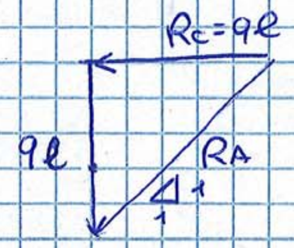
- unisco AC
- divido in 2 il segmento intercettato e la tg
- traccio parallela AC

Lungo la parabola viaggia una componente orizzontale costante

Se $h < l \Rightarrow$ M non cade sulla verticale di C

③





TRATTO	CDP
$\overline{AB}$	retta a
$\overline{DC}$	retta c

Punto di mezzo 1

2ª ESERCITAZIONE

- METODO delle EQ AUSILIARIE
- METODO SEMI-GRAFICO

Ⓐ Metodi per la Determinazione delle REAZIONI VINCOLARI

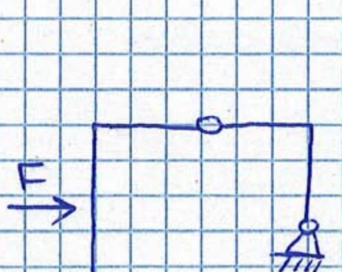
METODI ALGEBRICI → ① METODO GENERALE

$$\left\| \begin{array}{l} 3 \cdot n \text{ equazioni} \\ 3 \cdot n \text{ incognite} \end{array} \right\|$$

Ogni corpo rigido mi da 3 reazioni

(n = 1)

$3 \cdot 1 = 3$ eq
3 incognite



(n = 2)

$3 \cdot 2 = 6$ eq.
6 incognite

↳ ② METODO delle EQ AUSILIARIE

- l'equazione globale della struttura
- numero di sconnessione (vincoli interni) della struttura

PIÙ INDICATO per semplicità e lunghezza

$(3+S)$ eq.

$(3+S)$ incognite

B) METODO SEMIGRAFICO → Valido ma lungo (per 6 eq. dovrei studiare 6 sistemi diversi)

- PLV + CATENE CINEMATICHE

Rendo labile il sistema per poi trovare la reazione vincolare

---

~ Metodo delle EQ. AUSILIARIE ~

Consideriamo:

- 3 equazioni di equilibrio globale della struttura
- S equazioni di equilibrio parziale

⇒ $\boxed{(3+S)}$ eq. di equilibrio

$(3+S)$ incognite

N.B. "S" eq. ausiliarie devono essere scelte in modo da non inserire altre incognite nel sistema

⇒ Non devono comparire reazioni interne

S = GRADO DI SCONNESSIONE

f = tipo di vincolo

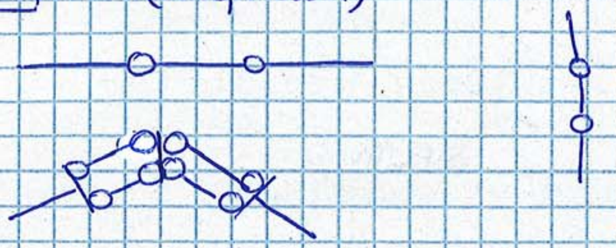
① $\boxed{S=1}$ ⇒ sconnessione semplice (1 eq. ausiliare)

$\boxed{M_A=0}$

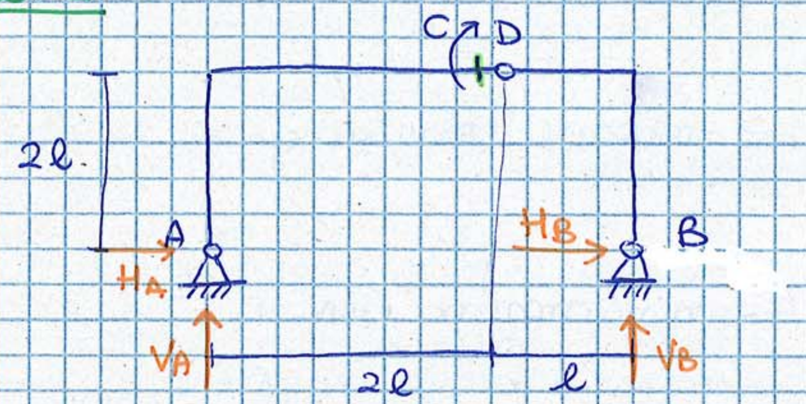
$\boxed{V_A=0}$

$\boxed{H_A=0}$

② $\boxed{S'=2}$ (2 ep. aux)



ES. 1



C = coppia
che agisce
a sx della
cerniera !

1GV = 1 reazione vincolare
2GdV = 2 reazioni vincolari

① $3 \cdot n = 3 \cdot 2 = 6$ GdL
↳ aste

$2 + 2 + 2 = 6$ GdV
↓ A ↓ B ↓ C

⟩ ⟹ 6 GdV = 6 GL ISOSTATICA

② S = GRADO DI SCONNESSIONE

Ho una cerniera interna ⟹ $\boxed{S=1}$

$\boxed{3+S} = 3+1 = 4$ ep.
4 incognite

③ EQ. DI EQUILIBRIO GLOBALE

(Scelgo i versi positivi e li mantengo)

2GdV = 2 reazioni vincolari

ep. della trasl orizzontale

$\rightarrow)$ $H_A + H_B = 0$
↖ FORZE ESTERNE ORIZZONTALI = 0

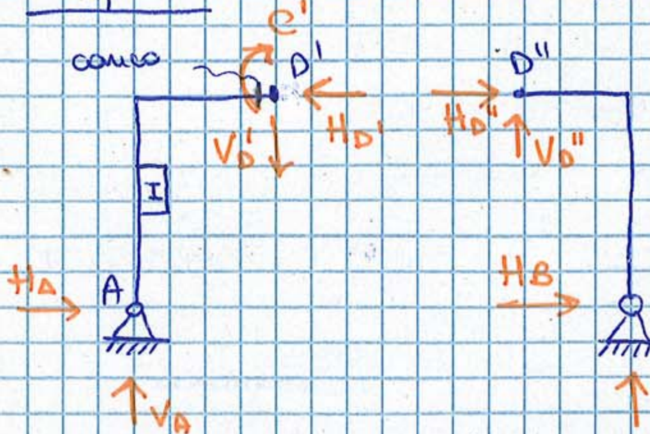
$\uparrow)$ $V_A + V_B = 0$
↖ FORZE ESTERNE VERTICALI

$A\circlearrowleft)$ $+V_B \cdot (2l + l) - C = 0$
↖(è il braccio di V_B)

↗ scelgo un punto → ~~non~~ conviene scegliere D!
conviene scegliere A! (o B) così H_A e V_A non mi danno momento!

H_B non ha braccio ⟹ $M=0$

1 eq. aux → fatta per una singola trave in modo che i vincoli interni non mi diano problemi



STRUTTURA ESPLOSA

Esplodendo la struttura devo considerare l'equilibrio con le reazioni interne della cerniera interna anche!

1 eq aux ⟹ DI MOMENTO → ROTAZIONE IN B
- non mi compaiono i vincoli interni perché non mi danno momento
- ma ho informazioni su H_A e V_A

eq. aux

D') $-V_A(2l) + H_A(2l) - C = 0$

(Guardando D'' non avrei avuto il carico)

⇩

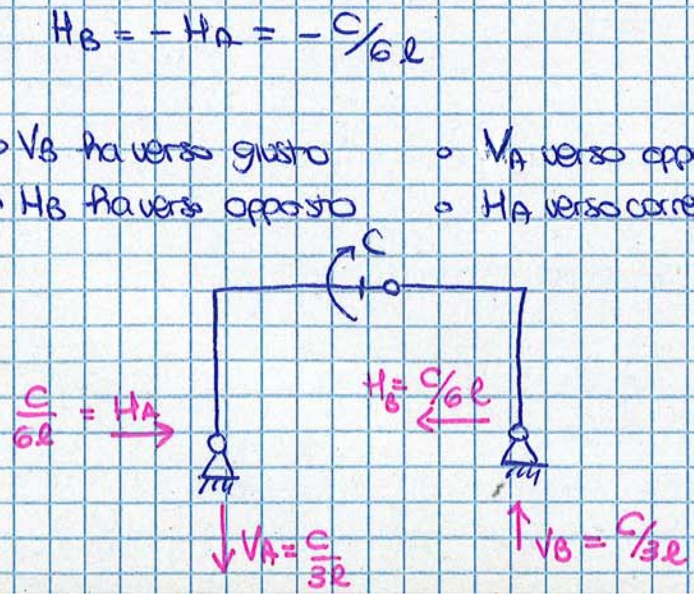
A) $V_B = C/3l$

↑) $V_A = -V_B = -C/3l$ (devo poi quindi cambiare verso a V_A)

aux) $H_A = C/6l$

→) $H_B = -H_A = -C/6l$

- V_B ha verso giusto
- H_B ha verso opposto
- V_A verso opposto
- H_A verso corretto



~ Metodo SEMIGRAFICO ~ *

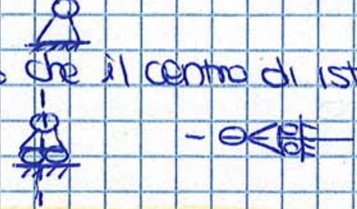
(PLV + CATENE CINEMATICHE)

PLV => ∃ uguaglianza tra lavoro delle forze esterne (F x spost) e lavoro forze interne (tens x def)

(Lavoro virtuale esterno = lavoro prodotto dalle tensioni per deformazioni)

~ Catene Cinematiche ~

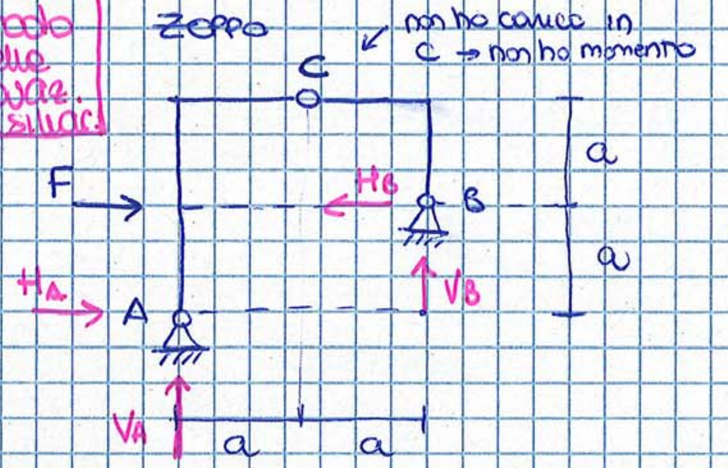
- I vincoli doppi definiscono un punto in cui è localizzato il centro di rotazione
- I vincoli singoli so che il centro di istantanea rotazione sta sulla retta verticale

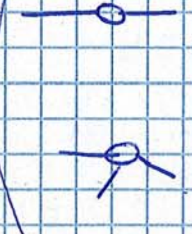


Metodo delle equaz. ausiliari

ZOPPO

non ho carico in C → non ho momento





GdV = 2
2(n-1)

GdV = 2(3-1) = 4

eq. di equilibrio globali

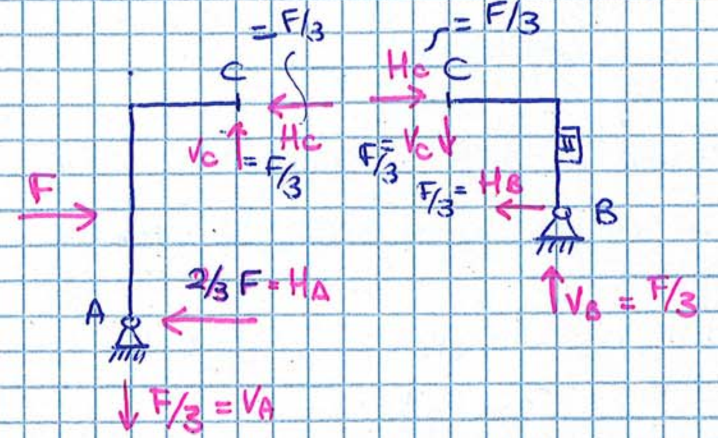
$\rightarrow)\quad H_A - H_B + F = 0$

$\uparrow)\quad V_A + V_B = 0$

$\overset{\frown}{A})\quad V_B \cdot a + H_B \cdot a - F \cdot a = 0$

[Scegliendolo in B il braccio è nullo → distanza verticale di F da B = 0! stesso asse]

ESPLODO LA STRUTTURA



A occhio vedo che

(H) $\frac{F}{3} + \frac{2}{3}F = F$ ok!

(V) $\frac{F}{3} - \frac{F}{3} = 0$

(H_C) $\frac{F}{3} = \frac{F}{3}$

(V_C) $\frac{F}{3} = F/3$

aux)

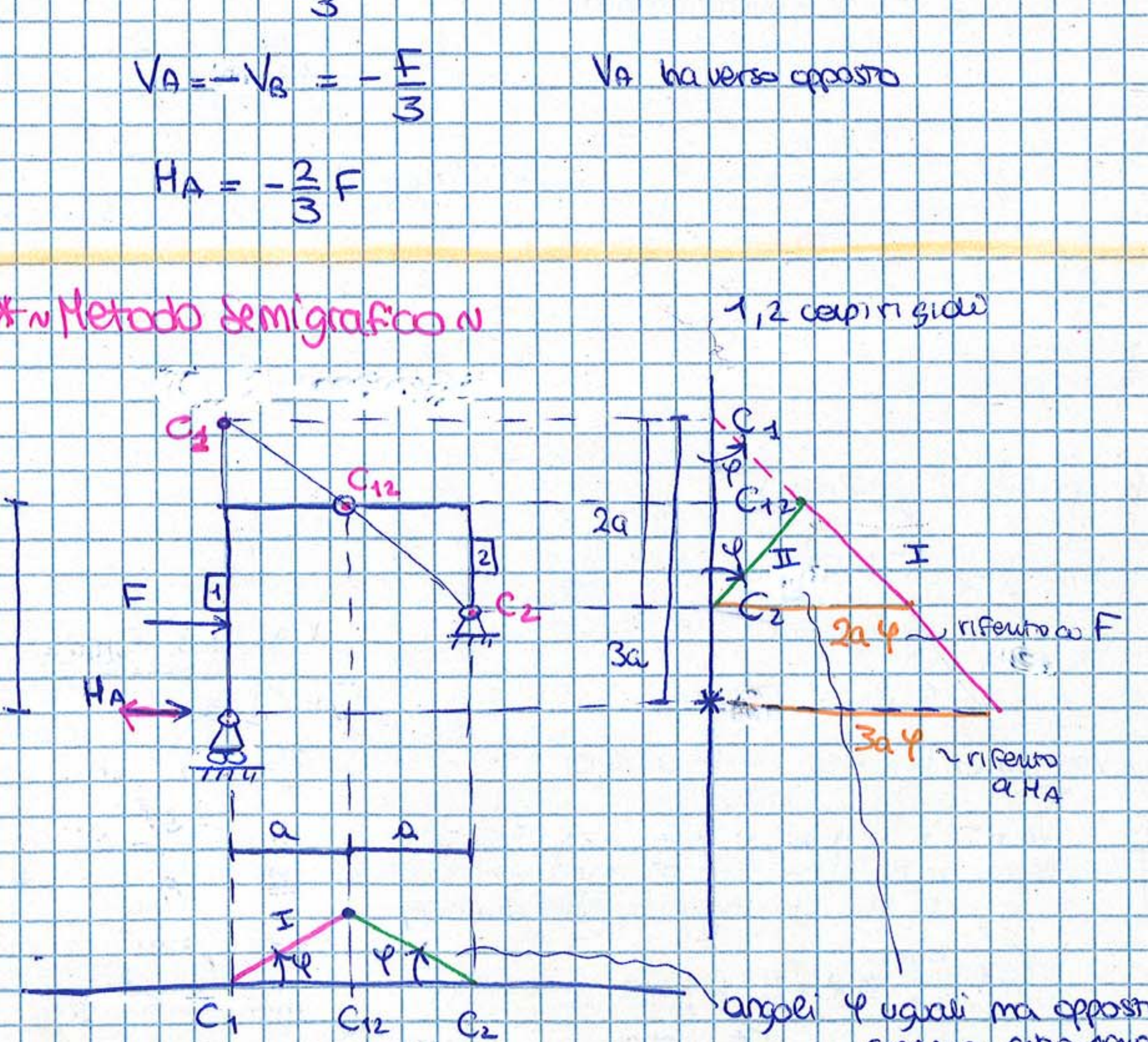
C_{II}) $-H_B(a) + V_B(a) = 0$

$\Rightarrow$ $V_B = H_B = \frac{F}{3}$ — V_B e H_B sono giusti

$V_A = -V_B = -\frac{F}{3}$ — V_A ha verso opposto

$H_A = -\frac{2}{3}F$

* ~ Metodo semigrafico ~



Impongo rotazione antioraria dell'asta

— spostamento

PLV

positivo poiché verso F e spostamento − è congruente

$+F(2a\cancel{\varphi}) + H_A(3a\cancel{\varphi}) = 0$ spostamento orizzontale

$$\boxed{H_A = -\frac{2}{3}F}$$ → verso opposto

12/03/2014

TRAVE GERBER

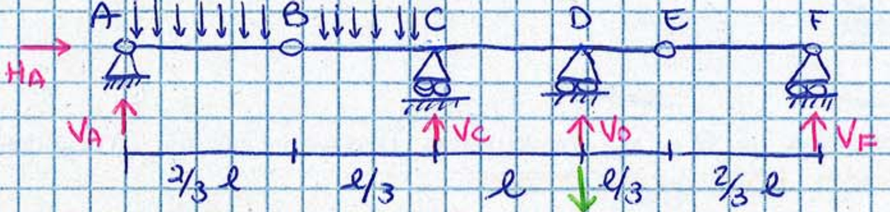
$3 \times 3 = 9$

$2+2+1+2+2 = 9$

ISOSTATICA

Caratteristiche:
- sono caricate sul piano della trave
- la reazione ad uno dei due estremi che impedisce il movimento deve dare reazioni orizzontali = 0 (nulle), deve dare solo momenti e forze verticali

ESERCIZIO ①



travi rettilinee: $\overline{AB}$ (due cerniere interne) $\overline{BE}$ $\overline{EF}$ danno 0 (pallini)

$(3 \times 3) = 9$ GdL

ISOSTATICA

$2+2+1+1+2+1 = 9$ GdV

① METODO EQ AUSILIARIE

$S' = 2(1) = 2$ gradi di sconnessioni

$(3+2) = 5$ equazioni / 5 incognite

- SCRIVO LE 3 EQ. DI EQUILIBRIO GLOBALE

$\rightarrow)\ H_A = 0$

$\uparrow)\ V_A + V_C + V_D + V_F \underbrace{- q\left(\frac{2}{3}l\right) - q\left(\frac{l}{3}\right)}_{-ql} = 0$ *

$\overset{\frown}{A})\ V_C \cdot l + V_D \cdot 2l + V_F(3l) - q\left(\frac{2}{3}l\right)\frac{2}{3}l\cdot\frac{1}{2} +$

$- q\cdot\frac{l}{3}\left(\frac{2}{3}l + \frac{l}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = 0$

↖ in mezzeria di $l/3$

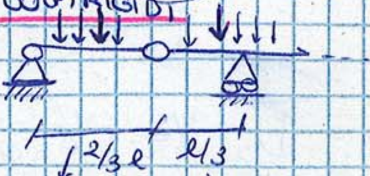
↑ applicata in mezzeria

$q\left(\frac{2}{3}l\right) + q\left(l/3\right) = ql$

il carico q è distribuito su 2 corpi rigidi differenti

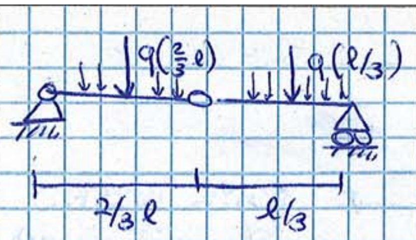
① CORPO RIGIDO

2 CORPI RIGIDI



← $q\left(\frac{2}{3}l\right)$ $q\left(l/3\right)$

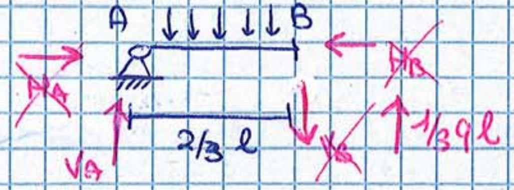
*



$$q\left(\tfrac{2}{3}l\right) + q\left(l/3\right) = ql$$

ESPLODO

• tratto $\overline{AB}$



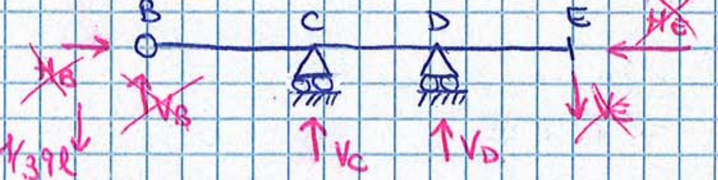
appaiono esplodendo le reazioni delle cerniere interne (B).

Faccio un equilibrio alla ROTAZIONE in B (in modo che non mi compaiano le reazioni in B.

$$\circlearrowleft B)\quad q\left(\frac{2}{3}l\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}l\right) - V_A\left(\frac{2}{3}l\right) = 0$$

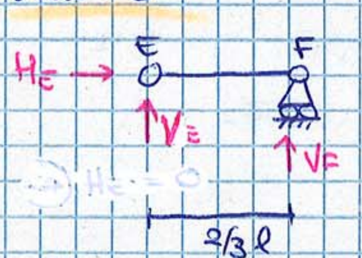
$$\rightarrow \boxed{V_A = \frac{1}{3}ql} \quad (1)$$

• tratto $\overline{BE}$



qualunque eq. alla rotazione in B o E incremento il numero delle incognite, quindi per ora non posso usare questo tratto

• tratto $\overline{EF}$



$$\rightarrow \boxed{H_E = 0} \quad (2)$$

$$\circlearrowleft E)\quad V_F\cdot\frac{2}{3}l = 0 \qquad \boxed{V_F = 0} \quad (3)$$

Inserisco i 3 risultati nelle eq. di prima

$$\Rightarrow \begin{cases} V_D = -\dfrac{1}{6}ql \\ V_C = \dfrac{5}{6}ql \\ H_A = 0 \end{cases}$$

V_D: → cambia verso

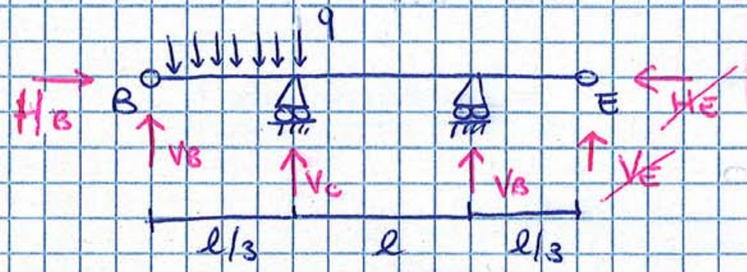
$$\uparrow)\quad -V_E + \cancel{V_F} = 0 \qquad V_E = 0$$

CALCOLO LE REAZIONI INTERNE → devo guardare le strutture esplose
Guardando il tratto EF
$V_F = 0$

$\uparrow)\ -V_E + V_F = 0 \quad \rightarrow \boxed{V_E = 0}$

Tratto EF scarico = non ho nessuna sollecitazione interna
Non è soggetta né a momento, taglio né a trazione interna

① Tratto $\overline{BE}$



N.B
Anche se i versi sono opposti continuo a calcolare con i versi opposti all'inizio o rischio di incasinare tutto!

Considero H_B e H_E in modo che abbiano verso opposto e si semplifichino.

$$\begin{cases} H_E = 0 \\ V_E = 0 \end{cases}$$ per calcoli di prima

$\rightarrow)\ H_B - \cancel{H_E} = 0 \qquad H_B = 0$

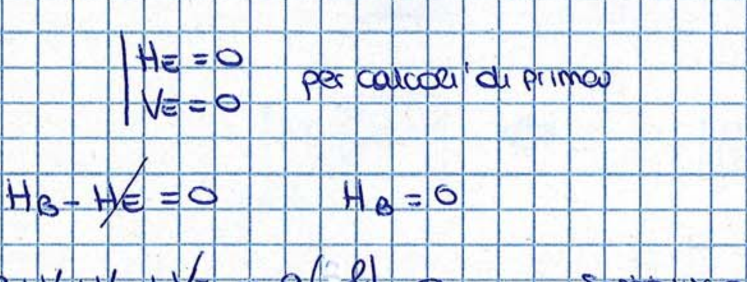
$\uparrow)\ V_B + V_C + V_D + \underbrace{\cancel{V_E}}_{=0} - q\left(\frac{\ell}{3}\right) = 0$ sostituisco i valori di V_C e V_D

$V_B + \frac{5}{6}q\ell - \frac{1}{6}q\ell - \frac{1}{3}q\ell = 0$

$V_B = -\frac{1}{3}q\ell$

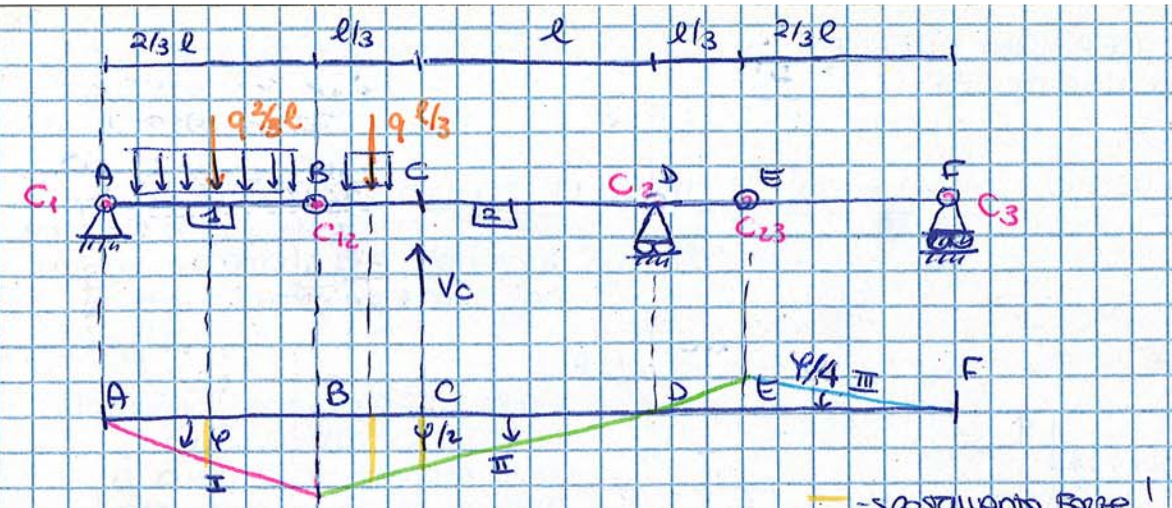
[Adesso riguardo i tratti di prima e modifico le forze come trovate]

② METODO SEMIGRAFICO (PLV + CATENE CINEMATICHE



Per calcolare V_C devo degradare il vincolo → far sì che questa forza abbia uno spostamento orizzontale → tolgo il vincolo che non mi sdoppiava la trave → ho la forza applicata in C

Disegno il grafico per gli spostamenti →



= spostamento forze !

$\overline{AB}$ si muove di φ in senso orario

(PLV)

Lavoro = F x spostamento

$$\left(q\frac{2}{3}l\right)\left(\varphi\frac{2}{3}l\cdot\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\left(q\frac{l}{3}\right)\left[\varphi/2\left(l+\frac{l}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)\right]+$$

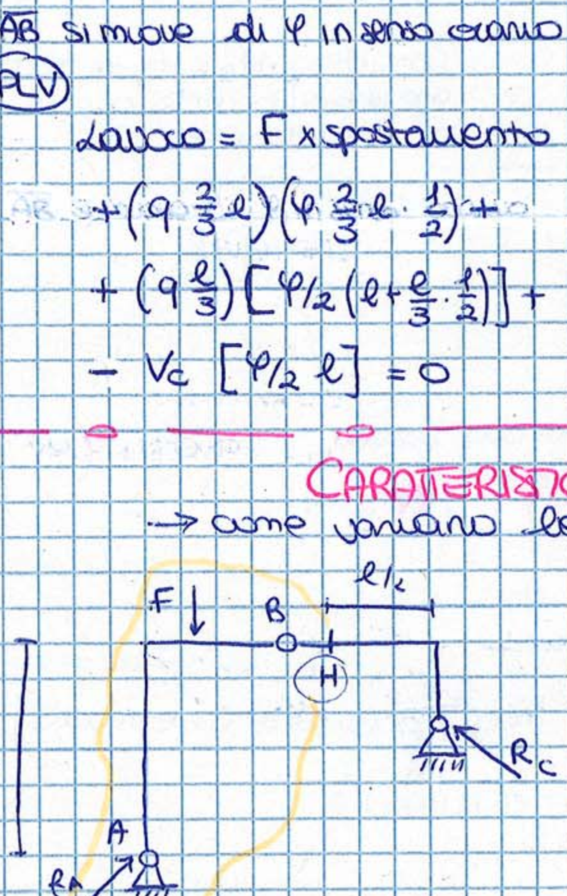
$$-V_C\left[\varphi/2\ l\right]=0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{V_C=\frac{5}{6}ql}$

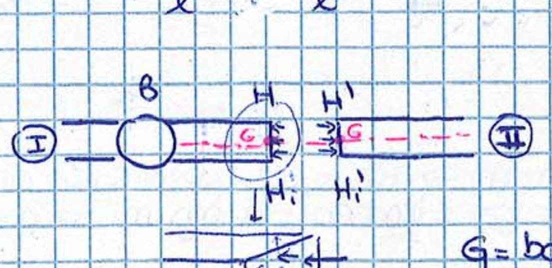
come prima

CARATTERISTICHE di SOLLECITAZIONE

→ come variano le sollecitazioni sulla nostra struttura



considerando H e facendo l'equilibrio della parte a sx quella parte deve essere in equilibrio



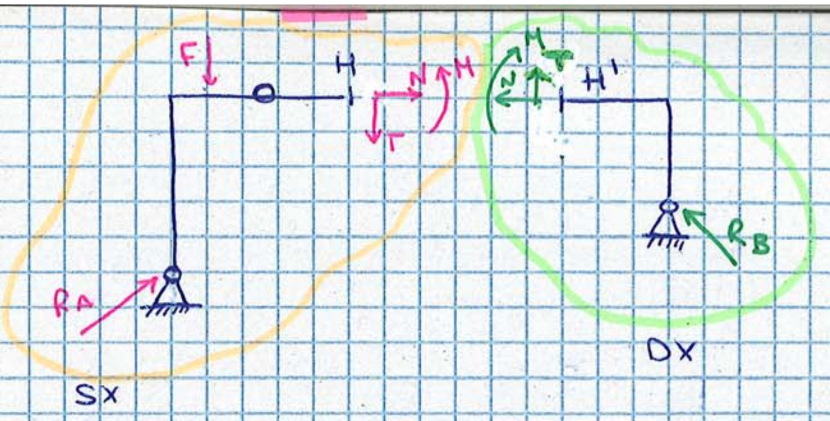
Forze sia verso sx che dx che comprimono la materia dopo averla sezionata → pressioni che evitano la "fuoriuscita" del materiale solido

G = baricentro

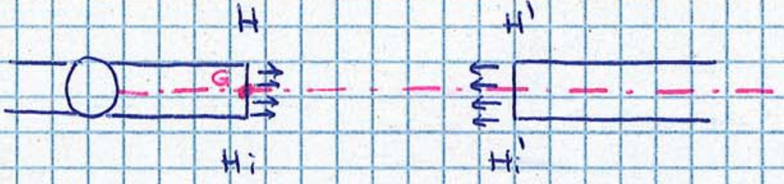
SISTEMA di RIFERIMENTO CENTRALE (BARICENTRICO) D'INERZIA ($I_{xy}=0$)

→ origine nel baricentro della sezione G

→ e ruotato in modo da non generare momento centrifugo



Si generano tensioni interne N, T, M opposte a seconda della parte che considero a sx e dx della sezione. Ma entrambe le parti sono in EQUILIBRIO



N = componente lungo z

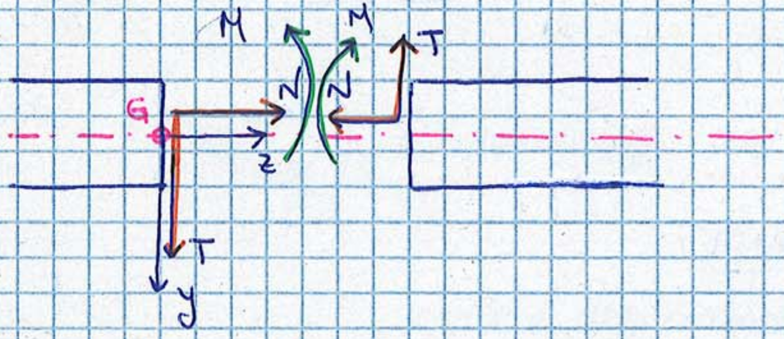
T = taglio lungo y

R = risultante forze

M = risultante momenti

$\boxed{R = N + T}$

$\begin{cases} N = N(z) \\ T = T(y) \end{cases}$



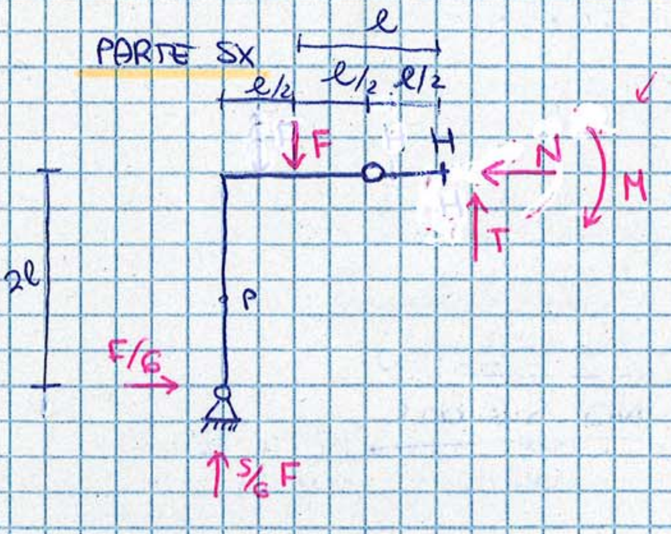
N = sforzo normale

T = taglio

M = momento flettente

Momento flettente < sopra = fibre compresse / sotto = fibre tese

PARTE SX



$\rightarrow$ $\frac{F}{6} + N = 0 \qquad N = -\frac{F}{6}$

$\uparrow$ $\frac{5}{6}F - F - T = 0 \qquad T = -\frac{F}{6}$

$H\circlearrowright$ $M + Fl + \frac{F}{6}(2l) - \frac{5}{6} + \frac{3}{2}l = 0$

$$M = -\frac{Fl}{12}$$

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

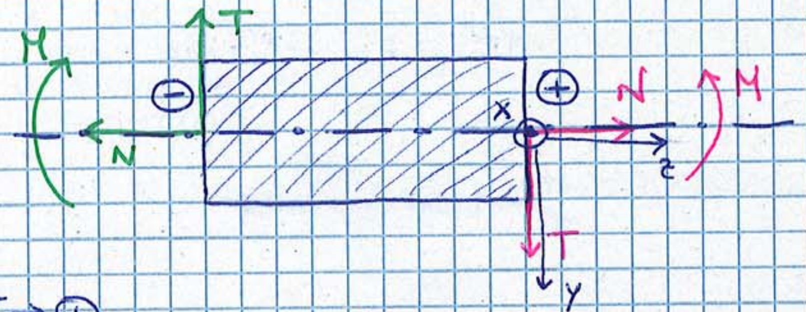
- In un punto P qualunque, la trave deve resistere a M, N, T.
- In quale punto le sollecitazioni saranno maggiori? MASSIMI ASSOLUTI ↓ in modulo

→ Devo diagrammare le mie sollecitazioni per trovare il MASSIMO SFORZO a cui deve resistere la trave

~ Convenzioni di SEGNO ~

1ª convenzione

① RESISTENZE



$T \rightarrow \oplus$
$N \rightarrow \oplus$ verso dx
$M \rightarrow$ positivo se tende dalla parte delle fibre tese (le fibre tese sono sotto

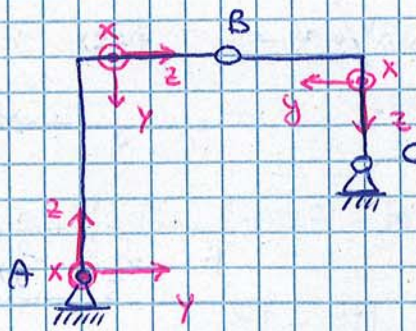
N>0 TRAZIONE
T>0 ↻
M>0 dalle fibre tese a quelle compresse

2ª convenzione

② SISTEMA di RIFERIMENTO

- S.R. segue l'andamento della struttura
- ⊙ z = asse lungo la trave
- ⊙ y = asse ⊥ contenuto nel piano della struttura
- ⊙ x = asse uscente dal foglio

ES.



(Se fossi partita da C il sistema sarebbe stato sinistrorso! Più difficile!)

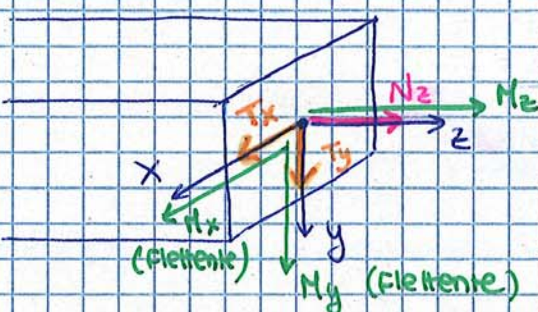
NO S.R. da C!

✱ Tornando alla trave FACCIA POSITIVA (DX)
NEGATIVA (SX)

N>0 se di TRAZIONE
T>0 se è diretto su "y" sulla parte ⊕
se è opposto a y sulla parte ⊖
M>0 se tende le fibre per $y \geq 0$

~ Convenzione per i Diagrammi ~

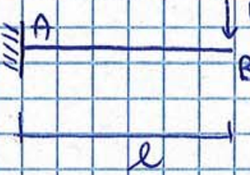
- N indifferente (1ª convenz.)
- T
  - indifferente (1ª)
  - T>0 da parte delle y NEGATIVE ⊖ (2ª)
- M>0
  - fibre tese (1ª)
  - M>0 dalla parte y POSITIVE ⊕ (2ª) $y \geq 0$

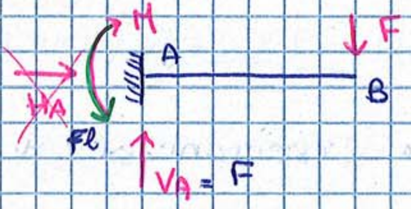


M_x, M_y = momento flettente

M_z = momento torcente

ESERCIZI



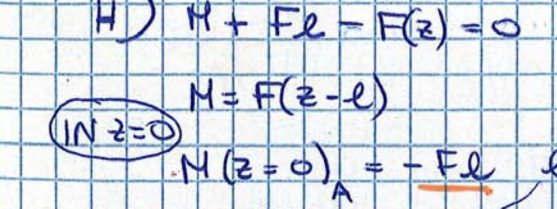


$H_A = 0$

$V_A = F$

$\text{A)} \; -M_A - Fl = 0$

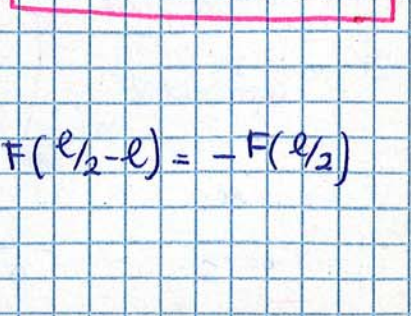
$M_A = -Fl$ cambio i segni



$\rightarrow \; N + \cancel{H_A} = 0$ $\quad N = 0$

$\uparrow \; F - T = 0$

$T = F$ ⊕



$M) \; M + Fl - F(z) = 0$

$M = F(z - l)$

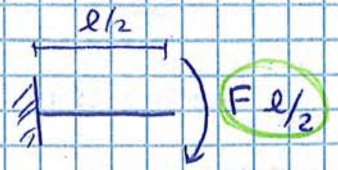
IN z=0

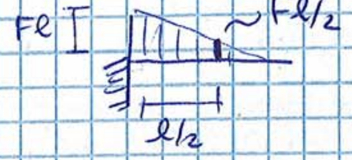
$M(z=0)_A = -Fl$ lo disegno lungo le fibre tese

IN z = l

$M(z = l/2) = F(l/2 - l) = -F(l/2)$

$\boxed{\text{In } z = l/2}$

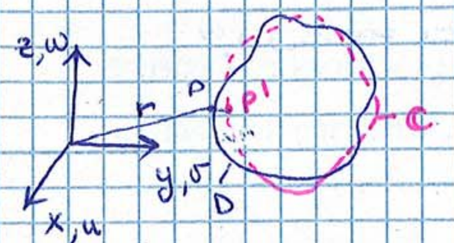




① DOMANDA TEORIA

Capitolo 7

Corpo elastico, riferimento cartesiano ortogonale, generico punto P.



$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita in dominio Tridimens. con codominio chiuso a 3D

$f: P \to P'$

$f: D \to C$

$f: \{r\} \to \{\eta\}$

Il corpo si deforma, il punto P passa in P' ⟹ DEFORMAZIONE è un'applicazione f che ad ogni punto P associa un punto P'
e che associa al dominio D il codominio C

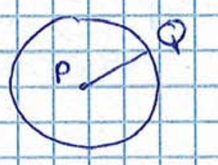
$\overline{P-O} = \{r\}$ spostamento da O

$\{\eta\} = u(x,y,z)\vec{i} + v(x,y,z)\vec{j} + w(x,y,z)\vec{k}$

Posso immaginare di avere un punto Q nell'intorno di P

$\overline{Q-P} = \{dr\}$

r = vettore che identifica la posizione



$\overline{Q-P} = \{dr\} = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k}$

generica funzione a 3 variabili, posso costruire il primo termine dell'incremento

* • 1° TERMINE dello SVILUPPO DI TAYLOR per FUNZIONE A 3 VARIABILI

$$\to u_Q = u_P + \left(\frac{du}{dx}\right)_P dx + \left(\frac{du}{dy}\right)_P dy + \left(\frac{du}{dz}\right)_P dz$$

↳ derivata parziale, u non dipende solo da x

P = punto di appoggio

• 2ª COMPONENTE di SPOSTAMENTO

$$v_Q = v_P + \left(\frac{dv}{dx}\right)_P dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)_P dy + \left(\frac{dv}{dz}\right)_P dz$$

• 3ª componente

$$w_Q = w_P + \left(\frac{dw}{dx}\right)_P dx + \left(\frac{dw}{dy}\right)_P dy + \left(\frac{dw}{dz}\right)_P dz$$

Scrivo in maniera più compatta dovuta a Jacobi

$$\{\eta_Q\} = \{\eta_P\} + [J_P]\{dr\}$$

↳ Jacobiana, prende il nome da Jacobi nato nel 1804 morto nel 1851

→ **IMPORTANTE: LA DECOMPOSIZIONE dello JACOBIANO**

identità; semidifferenza; → SIMMETRICA $[\varepsilon]$ = DEFORMAZIONE

$$[J_P] \equiv \underbrace{\frac{1}{2}\left([J_P]-[J_P]^T\right)}_{\text{MATRICE ANTISIMMETRICA}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left([J_P]+[J_P]^T\right)}_{\text{semisomma}}$$

Vale sempre → è un'identità

⇓ RAPPRESENTA UN MOTO RIGIDO $[\varphi]$

COS'È LA DEFORMAZIONE?

→ È la componente simmetrica dello Jacobiano

Il solido che si deforma comporta sia MOTO RIGIDO che MOTO ELASTICO (DEFORMAZIONE)

→ la deformazione è massima alla base ed è minimo il moto rigido, alla punta il moto massimo è quello rigido e minimo quello elastico (deformazione)

TRASLAZIONE

$$\{\eta_Q\} = \{\eta_P\} + [\varphi_P]\{dr\} + [\varepsilon_P]\{dr\}$$ $\boxed{\text{ROTOTRASLAZIONE + DEFORMAZIONE}}$

↳ MOTO RIGIDO ↳ MOTO DI DEFORMAZIONE / ELASTICO

relazione tra η_P e J_P

ε_P e J_P

$$[\varepsilon_P] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} =$$

↓ SEMISOMMA dello JACOBIANO

* → Bisogna capire il legame con i termini di sviluppo di Taylor

NOTAZIONE INGEGNERISTICA

$$[\varepsilon_P] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

→ SIMMETRICA perché è la componente simmetrica dello Jacobiano

ε nella diagonale

$\frac{1}{2}\gamma$ negli altri termini

γ = somme delle derivate parziali incrociate

$\boxed{\gamma_{ij} = \gamma_{ji}}$

Riscritta in <u>NOTAZIONE MATEMATICA</u>

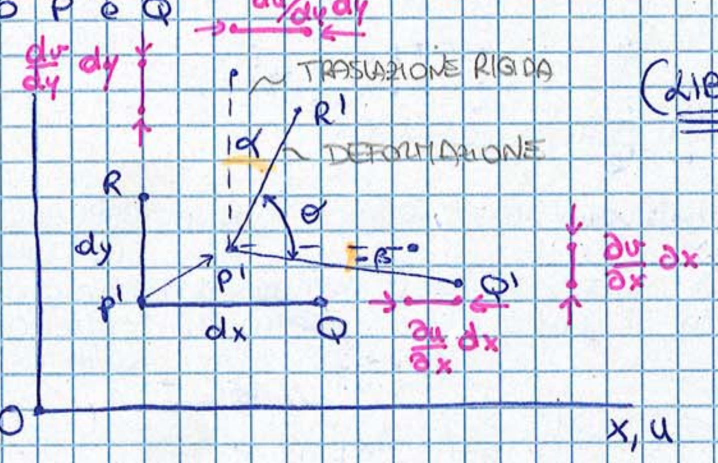
$$[\varepsilon_P] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

primo indice = riga
2° indice = colonna

<u>Pag. 207</u>

MOTO RIGIDO + DEFORMAZIONE

Prendo l'espressione e la studio nel caso in cui nel piano xy si hanno il punto P e Q



(LIBRO)

1. TRASLO
2. DEFORMO

Il nuovo sistema di assi

① $\{\eta_Q\} = \{\eta_P\} + [J_P]\begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ② $\{\eta_R\} = \{\eta_P\} + [J_P]\begin{Bmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P dx \\ v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dx \\ w_Q = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_P dx \end{cases} \qquad \begin{cases} u_R = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P dy \\ v_R = v_P \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P \partial y \\ w_R = w_P \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_P dy \end{cases}$$

$$\frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) - \partial x}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$$ **DILATAZIONE SPECIFICA**

SCORRIMENTO ANGOLARE

$$\underbrace{\frac{\pi}{2} - \theta}_{\text{lo confondo con le tangenti}} = \underbrace{\frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy}}_{\alpha \text{ piccolo e lo confondo con la tg}} + \underbrace{\frac{\overset{\ominus}{\frac{\partial v}{\partial x}}dx}{dx}}_{-\beta} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ma β (negativo)

Deve essere

$\boxed{\gamma \ll 1}$ $\boxed{\frac{\pi}{2} - \theta = \alpha + (-\beta) = \alpha - \beta}$ $\boxed{\varepsilon \ll 1}$

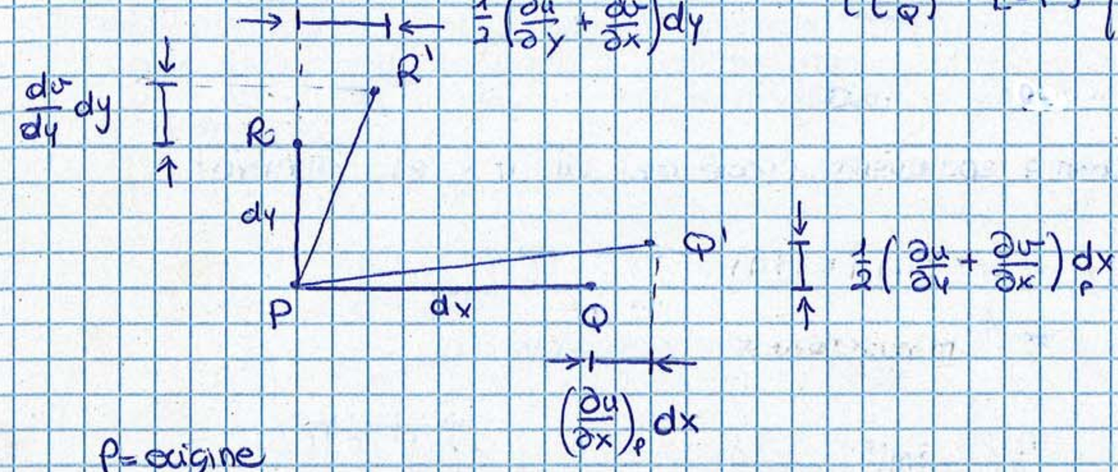
CAUCHY → Teorema che sta alla base di tutte le costruzioni d'acciaio
1789 - 1857

→ Si parla di deformazioni nel caso di piccole γ e piccole ε

~ Sola DEFORMAZIONE ~ pag 208

Fisso l'attenzione solo sulla deformazione trascurando il moto rigido

$$\{\eta_Q\} = [\varepsilon_P] \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



P = origine

$$\begin{cases} u_Q = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P dx \\ v_Q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_P dx \\ w_Q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_P dx \end{cases} \qquad \begin{cases} u_R = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dy \\ v_R = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P dy \\ w_R = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)_P dy \end{cases}$$

DILATAZIONE SPECIFICA identica a quella di DEF + MOTO RIGIDO

ε_x resta uguale

$$\frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$$

SCORRIMENTO ANGOLARE UGUALE γ_{xy}

$$\frac{\pi}{2} - \theta = 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \gamma_{xy}$$

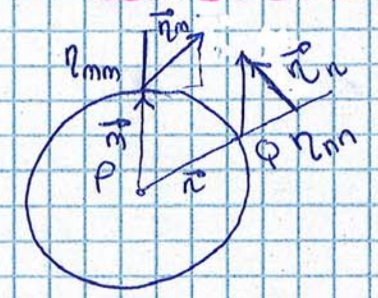
D'ora in avanti faccio riferimento solo alla DEFORMAZIONE e NON MOTO RIGIDO

Capitolo 7.3 pag. 209

17/03/2014

LEGGE TRASFORMAZIONE del TENSORE delle DEFORMAZIONI PER ROTAZIONI del SISTEMA DI RIFERIMENTO

[LIBRO]



$\overrightarrow{Q-P} = \vec{n}$ $|n| = 1$

$\{\eta_n\} = [\varepsilon]\{n\}$

Trascurando il moto rigido = la rototraslazione considerando il significato fisico della sola deformazione.

η_{nn} = componente spostamento (proiezione) di $\{\eta_n\}$ nella direzione n

$$\eta_{nn} = \{n\}^T[\varepsilon]\{n\}$$

con $\vec{m} \not\perp \vec{n}$ m può non essere ortogonale a n

$$\eta_{nm} = \{m\}^T[\varepsilon]\{n\} \qquad \eta_{mn} = \{n\}^T[\varepsilon]\{m\}$$

In 2D

$$\eta_{nm} = [m_x \ m_y] \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} =$$

$$[m_x \ m_y] \begin{bmatrix} \varepsilon_x n_x + n_y \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} n + \varepsilon_y n_y \end{bmatrix} = m_x \varepsilon_x n_x + m_x n_y \frac{\gamma_{yx}}{2} + n_x m_y \frac{\gamma_{xy}}{2} + m_y \varepsilon_y n_y$$

$$= \eta_{mn} = \{n\}^T[\varepsilon]\{m\}$$

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ componente simmetrica Jacobiana

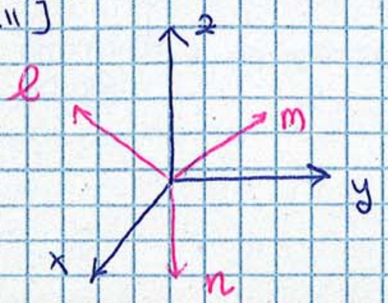
- CASO PARTICOLARE $\boxed{\vec{m} \perp \vec{n}}$

$$\gamma_{nm} = \eta_{nm} + \eta_{mn} = \gamma_{mn} = 2\eta_{nm} = 2\eta_{mn}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{nm} = \frac{1}{2}\gamma_{mn} = \{m\}^T[\varepsilon]\{n\} = \{n\}^T[\varepsilon]\{m\}$$

Considero un RIFERIMENTO RUOTATO mnl rispetto a xyz

[PAG 211]



$$[\varepsilon^*] = \begin{bmatrix} \{n\}^T[\varepsilon]\{n\} & \{n\}^T[\varepsilon]\{m\} & \{n\}^T[\varepsilon]\{l\} \\ \{m\}^T[\varepsilon]\{n\} & \{m\}^T[\varepsilon]\{m\} & \{m\}^T[\varepsilon]\{l\} \\ \{l\}^T[\varepsilon]\{n\} & \{l\}^T[\varepsilon]\{m\} & \{l\}^T[\varepsilon]\{l\} \end{bmatrix}$$

DEFORMAZIONE

Ho costruito il vettore in un altro riferimento

$$[\varepsilon^*] = \begin{bmatrix} \{n\}^T \\ \{m\}^T \\ \{l\}^T \end{bmatrix} [\varepsilon] \{n\}\{m\}\{l\}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \{n\}^T \\ \{m\}^T \\ \{l\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$[\varepsilon^*] = [N][\varepsilon][N]^T$$ È UN TENSORE (grandezza che si esprime così è un tensore).

↓

Ho introdotto una grandezza

introduco il CAMPO TENSORIALE per descrivere la deformazione conta sia DIREZIONE, che INTENSITÀ

7.4

~ DIREZIONI PRINCIPALI della DEFORMAZIONE ~

∞^3 possibilità di scegliere il nuovo sistema

$$\{\eta_n\} = \varepsilon_n \{n\}$$

$$\{\eta_n\} = \varepsilon_n \{n\}$$

voglio che lo spostamento sia collineare

$\eta_n // n$

→ n diventa incognita

$$([\varepsilon] - [I]\,\varepsilon_n)\{n\} = \{0\}$$ SISTEMA OMOGENEO

↳ matrice identità

se $\det \neq 0$ ⇒ soluzione banale non va bene! n ha modulo unitario

⇒ ma devo avere $\det = 0$ (determinante dei coeff.)

Sistema omogeneo

$$* \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_n) & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & (\varepsilon_y - \varepsilon_n) & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & (\varepsilon_z - \varepsilon_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Devo trovare la soluzione NON BANALE

$$\varepsilon_n^3 - J_I \varepsilon_n^2 + J_{II} \varepsilon_n - J_{III} = 0$$

Poiché nella matrice * ottengo termini quadratici simili

$$\begin{cases} (1)\quad J_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \rightarrow \text{TRACCIA!} \\ (2)\quad J_{II} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \\ (3)\quad J_{III} = \det[\varepsilon] \end{cases}$$

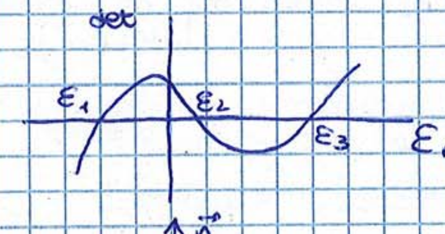
ESAME

⇓

J_I, J_{II}, J_{III} = INVARIANTI SCALARI della DEFORMAZIONE

→ perché sono costanti al variare della terna di riferimento

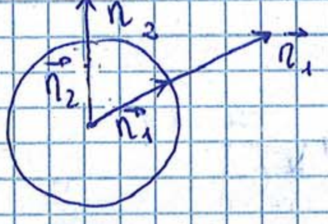
↓



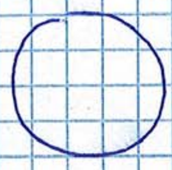
Ho trovato una direzione dove lo spostamento è collineare con n (direzione // n)

→ non dipende dalla scelta del sistema xyz.

ε_1 collineare n



→ [$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ non dipendono dalla terna ma dalla DEFORMAZIONE]



- n_I, n_{II}, n_{III} AUTOVETTORI
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ AUTOVALORI

PROPRIETÀ dello SCAMBIO

$$\{n_2\}^T [\varepsilon] \{n_1\} = \{n_1\}^T [\varepsilon] \{n_2\}$$

$$\{n_2\}^T \varepsilon_1 \{n_1\} = \{n_1\}^T \varepsilon_2 \{n_2\}$$

$$\varepsilon_1 \cos\theta_{12} = \varepsilon_2 \cos\theta_{12}$$

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos\theta_{12} = 0 \rightarrow \boxed{\theta_{12} = \pi/2} \text{ oppure } \boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2}$$

CASI

① $\boxed{\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3}$

$\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}$

② $\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3}$ → $\{n_3\}$ È DIREZIONE PRINCIPALE

→ ∞^1 DIREZIONI ORTOGONALI ad $\{n_3\}$

③ $\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3}$ → TUTTE le ∞^2 DIREZIONI sono PRINCIPALI

J_I richiama TRACCIA

J_{II} che è il determinante si semplifica

$J_{III} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3$ → si semplifica

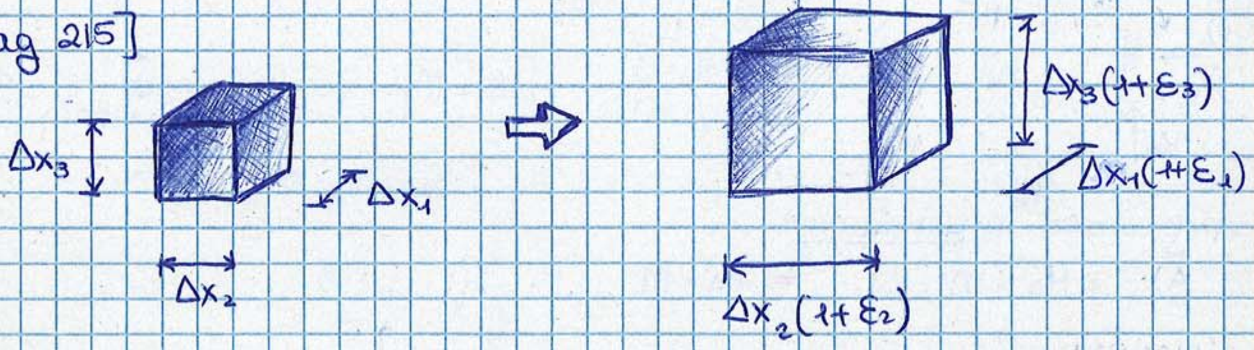
$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$J_I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$J_{II} = -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3) = \det$$

$$J_{III} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \ (= \det[\varepsilon]\ J_{III} = 0)$$

[pag 215]



$V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

$V' = V(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \simeq V(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = J_I$$

$|\varepsilon_1| \ll 1$