Centro Stampa Politecnico di Torino

WWW.CENTROSTAMPAPOLITECNICO.COM

NUMERO: 1174 DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Vargiu

MATERIA: Elettrotecnica + Temi + Eserc.

Prof. Giaccone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

ELETTROTECNICA

MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI:

È la semplificazione di un generale sistema dinamico che viene analizzato in termini di 3 coordinate spaziali (x, y, z) e di una temporale (t).
Tramite operazioni di integrazione spaziale si determina un modello in cui le variabili spaziali sono assenti, chiamato MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI (o MODELLO CIRCUITALE).
Per un fenomeno meccanico un modello a parametri concentrati richiede di individuare le principali azioni dinamiche e concentrarle in parametri senza dimensione geometrica, in cui l'unica variabile indipendente sarà il tempo.
Il modello si comporterà come un blocco, ad un componente concentrato, di cui è nota l'equazione costitutiva.
Risulterà essere un modello LIMITATO in quanto il sistema è descritto dalle sole variabili esterne, mentre viene persa ogni nozione delle variabili interne al sistema.

→ Nel caso ELETTROMAGNETICO, le variabili che sono utilizzate per una trattazione a parametri concentrati sono le correnti elettriche nei conduttori e le tensioni elettriche, entrambe queste grandezze sono funzione della sola variabile t.
→ C'è analogia con l'IDRAULICA, in cui la corrente corrisponde alla portata di fluido in un condotto e la tensione corrisponde alla caduta di pressione tra due sezioni del condotto.
→ NB: le variabili ai morsetti, tensione e corrente, saranno legate tra di loro da un'equazione differenziale che esprime la natura del fenomeno elettromagnetico in questione, chiamata EQUAZIONE COSTITUTIVA (o EQUAZIONE AI MORSETTI).
→ Si parla di COMPONENTE ogniqualvolta un fenomeno elettromagnetico è descritto dalla sua eq. costitutiva. È necessario delimitare l'estensione spaziale del fenomeno. → Un "fenomeno elettromagnetico confinato" è un fenomeno elettromagnetico in cui i vettori dei campi elettrici e magnetici $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ sono racchiusi all'interno di una superficie limite. Il fenomeno elettromagnetico racchiuso entro la superficie limite può scambiare energia e potenza con l'esterno solo in un numero limitato di connessioni elettriche dette MORSETTI. Le interazioni del fenomeno con l'esterno attraverso i morsetti sono quantificabili e misurabili.
NB: le grandezze corrente e tensione sono GRANDEZZE SCALARI:

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i\,dt \; [C]$$

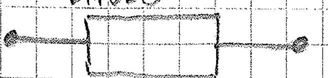
$$v_{AB} = V_A - V_B = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\varphi\, dl$$

→ La corrente "i" è quindi la variazione di carica nel tempo. Se è costante allora saremo in regime di CORRENTE CONTINUA. Se è variabile nel tempo può essere periodica e saremo allora in regime di CORRENTE ALTERNATA o REGIME SINUSOIDALE. ⇒ Si misura in AMPERE [A]

La tensione v è invece il lavoro compiuto per spostare una carica unitaria attraverso il campo elettrico "E" da un punto ad un altro, cioè è "l'energia" che serve per spostare gli elettroni da un punto all'altro → Si misura in VOLT [V].

Il componente più semplice in termini di numero di morsetti è il DIPOLO o BIPOLO, caratterizzato da due morsetti. Per un componente dipolare è possibile definire un valore di corrente che lo attraversa e un valore di tensione, essendo la tensione differenza di potenziale tra i due morsetti.

DIPOLO



Esistono quindi modelli in cui le interazioni con l'esterno sono definite attraverso un numero n di morsetti, sono i componenti n-polari.

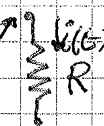
RESISTORE:

È un utilizzatore dissipativo. Il fenomeno Joule (conduttore percorso da corrente dissipa potenza sottoforma di energia termica) è la base di partenza per questo componente.
NB: la caratteristica principale è l'assenza di comportamenti dinamici, è un componente ADINAMICO, cioè la sua risposta dipende solo dai valori di tensione o di corrente in un istante ma non dalle loro velocità di variazione ⇒ ciò permette di definire il legame tra $i(t)$ e $v(t)$ tramite un'equazione algebrica detta 1ª LEGGE DI OHM:

$$\boxed{v(t) = R \cdot i(t)}$$

dove la quantità R, che lega i valori istantanei di tensione e di corrente è detta RESISTENZA.

→ Graficamente:

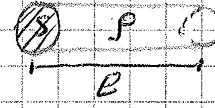


$v(t)$ $i(t)$ R

NB: la 1ª legge di Ohm rappresenta quindi l'equazione costitutiva del bipolo resistore.

→ NB: $\boxed{[R] = \Omega = \text{Ohm}}$
"R" è quindi un parametro che indica la capacità di un conduttore di opporsi al moto degli elettroni all'interno, cioè indica la bontà di un conduttore.

⇒ Nel caso di un conduttore rettilineo a sezione costante la resistenza può essere ottenuta dalla $\boxed{\text{2ª legge DI OHM}}$:



S ρ ℓ

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{\ell}{S}}$$

, dove ρ è la resistività elettrica del materiale, ℓ la lunghezza del conduttore ed S la sezione trasversale.

- RESISTORE LINEARE TEMPO INVARIANTE (LTI):

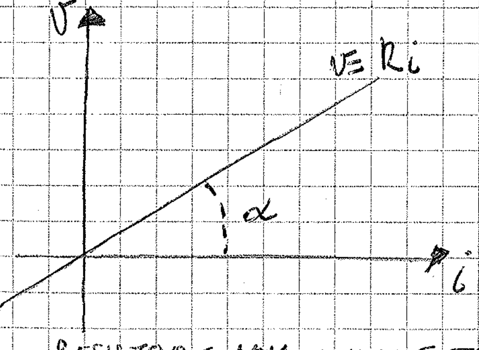
Si ha quando il parametro R è una costante indipendente sia dalla corrente i sia dal tempo t. Il tempo t diventa un parametro ininfluente nell'equazione costitutiva.
Poiché $v(t) = f(i,t)$ e $i(t) = g(v,t)$, per la 1ª legge di Ohm si ha: $v(t) = R(i,t) \cdot i(t)$, ma per questo caso, dove t è ininfluente nell'equazione e R è una costante, allora R legherà in modo lineare i parametri i e v secondo l'eq. costitutiva:

$$\boxed{v = R \cdot i}$$

rappresentabile su un piano in quanto:

$y = mx + q \rightarrow v = R \cdot i + 0$

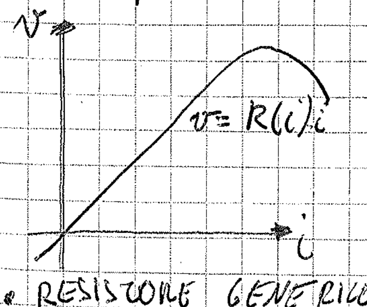
dove $\boxed{tg\,\alpha = R}$



→ NB: Noi utilizziamo solo questi resistori (LTI)

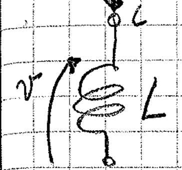
- RESISTORE NON LINEARE TEMPO INVARIANTE:

Si hanno quando il parametro R non è indipendente da tensione e corrente ma potrebbe essere una funzione della corrente i → $\boxed{v = R(i) \cdot i}$
La sua caratteristica rimane sempre adinamica, ma ora nel piano v-i non è più una retta ma una curva. Rimane però il vincolo sulla passività del componente, ovvero la caratteristica deve passare per l'origine.



- RESISTORE GENERICO:

Caso in cui la caratteristica che lega tensione e corrente può essere anche dipendente dal tempo t, cioè per ogni istante la caratteristica dell'eq. cambia, ciò può succedere per un intervento esterno. NB: Nel piano v-i non è più una curva ma una famiglia di curve in funzione del parametro t.



di INDUTTANZA dell'avvolgimento, misurato in Henry (H).

Il valore di L dipende dalla geometria e dalle caratteristiche dei materiali.

NB: La relazione $\phi = L \cdot i$ non è un'eq. costitutiva, in quanto non compare la tensione.

Ricorrendo allora alla legge dell'induzione elettromagnetica e derivando rispetto al tempo, nell'ipotesi di L costante si ha:

$$v(t) = \frac{d\phi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{v(t) = L\frac{di}{dt}}$$ → eq. costitutiva induttore

→ Anche qui l'equazione costitutiva è di tipo differenziale ed il componente ha quindi caratteristiche dinamiche.

Per la relazione inversa si ha:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{L} \cdot v(t')dt' = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{L} \cdot v(t')dt' + \int_{0}^{t} \frac{1}{L} \cdot v(t')dt' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = v(0) + \int_0^t \frac{1}{L} v(t')dt'} \quad (2)$$

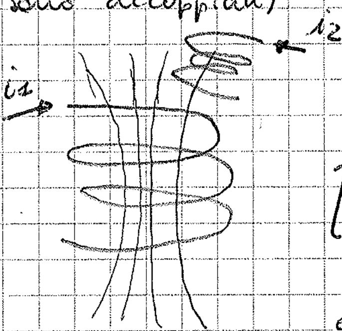
NB: la forma dell'equazioni (1) e (2), cioè dei componenti C ed L è uguale sostituendo opportunamente la tensione al posto della corrente e viceversa.

Questo legame tra i due componenti è definito DUALITÀ.

[È lo stesso per R e per G, poiché entrambe variano tra 0 e ∞ ed esprimono dei concetti inversi → $R = 0 \to G = \infty \Rightarrow R = \infty \to G = 0$]

• INDUTTORI ACCOPPIATI (MAGNETICAMENTE)

Si hanno quando il flusso magnetico creato da un avvolgimento interessa una regione di spazio dov'è presente un'altra bobina (NB: Reciprocamente ed elettricamente non sono accoppiati)



→ Il flusso concatenato con una bobina può essere diverso da 0 anche quando in questa bobina non circola corrente.

Per il sistema si ha:

$$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M_{21} i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M_{12} i_1 \end{cases}$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono i flussi concatenati con le due bobine, L_1 e L_2 sono i coefficienti di autoinduttanza delle due bobine e M_{12} e M_{21} (per reciprocità $M_{21} = M_{12} = M$) sono i coefficienti di mutua induttanza che dipendono dall'interazione magnetica tra i due avvolgimenti.

→ Derivando rispetto al tempo si ottiene l'eq. costitutiva del componente a 4 morsetti:

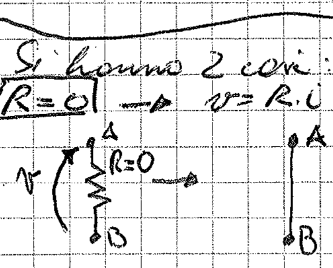
$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

---

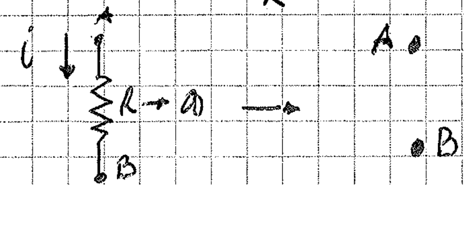
* Si hanno 2 casi:

- $\boxed{R = 0} \to v = R \cdot i = 0 \Rightarrow \boxed{v_A = v_B}$ → A≡B, in quanto $v = v_A - v_B = 0$

Un resistore con R=0 equivale a un COLLEGAMENTO EQUIPOTENZIALE (o DIRETTO) chiamato CORTO CIRCUITO



- $\boxed{R \to \infty} \Rightarrow i = \frac{v}{R} \Rightarrow \boxed{i \to 0}$ ⇒ Equivale a un circuito dove non fluisce corrente, cioè un CIRCUITO APERTO.



COMPONENTI REALI:

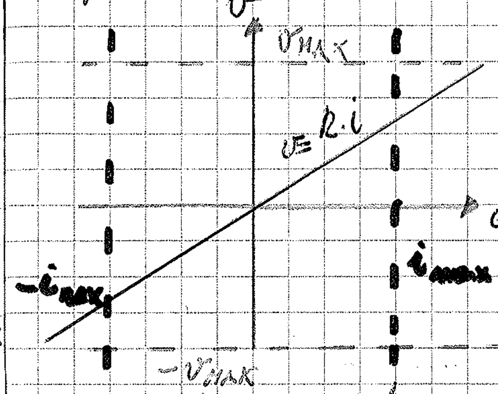
I componenti elettrici reali hanno caratteristiche che possono solo approssimare quelle dei componenti ideali, sia per limiti costruttivi sia per limiti fisici [per es.

- limite di corrente → se aumento la corrente devo dissipare più energia termicamente e il materiale si scalda ma non può scaldarsi eccessivamente;
- limite di tensione → un materiale dielettrico riesce a resistere (isolare) a un certo campo E, se si supera il valore si danneggia e non è più in grado di isolare → +V corrisponde a +E]

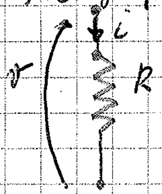
le cause si devono quindi a LIMITI ed EFFETTI PARASSITI (dovuti alla costruzione del componente con materiali reali e necessariamente imperfetti → darà origine a fenomeni)

Per quanto riguarda i limiti, nei componenti reali le tensioni e le correnti non possono raggiungere qualsiasi valore ma sono vincolate a rimanere entro limiti specificati sul prodotto (i valori di tensione sono limitati dalla capacità di isolamento del componente mentre i valori di corrente sono limitati dal riscaldamento causato dall'effetto Joule)

NB: il superamento di questi limiti può creare danni al componente o comprometterne il funzionamento.



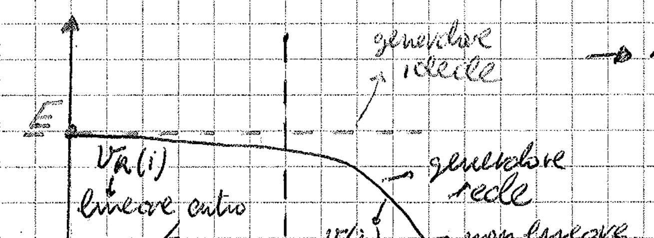
→ Nel grafico sono riportati i limiti di funzionamento per un RESISTORE LTI REALE



→ $-i_{MAX} \le i \le i_{MAX}$

$-V_{MAX} \le V \le V_{MAX}$

Un altro esempio si ha per i generatori. Un generatore di tensione reale presenterà una diminuzione della tensione ai morsetti all'aumentare della corrente erogata



→ NB: Poiché oltre L il generatore non è più lineare, noi siamo interessati a sfruttare il generatore solo nella zona tratteggiata.

Per simulare il comportamento del generatore reale, un modello più semplice prevede di approssimare il comportamento ai morsetti mediante uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine. Considerando solo il tratto con corrente positiva si ottiene:

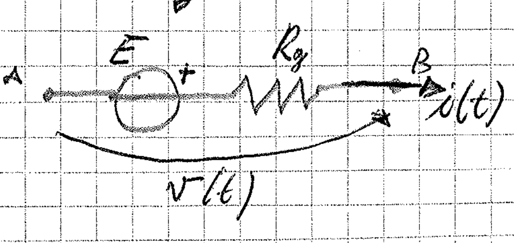
$$V_R(i) = V(i=0) + \left.\frac{dv}{di}\right|_{i=0} \cdot i$$

Ma sappiamo che:
$$\begin{cases} V(i=0) = E \\ \left.\frac{dv}{di}\right|_{i=0} = -R_g \end{cases}$$

Inquanto: $V = R \cdot i$ e utilizzo il segno negativo perché il resistore sarà attraversato dalla corrente in convenzione di generatore (→ sbagliato → devo usare il −)

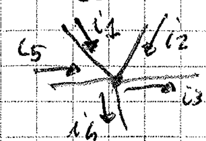
$$\Rightarrow \boxed{V_R(i) = E - R_g \cdot i}$$

NB: Quindi il generatore reale di tensione sarà schematizzato come un generatore ideale più una resistenza interna (in serie).



NB: Il parametro $dv = -R_g$ è negativo perché la tensione scende al crescente.

LKC: "In ogni istante la somma algebrica delle correnti afferenti ad un nodo è nulla", cioè la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti dal nodo



→ Scegliendo con segno + le correnti entranti:

(1) $i_1 + i_2 - i_3 - i_4 + i_5 = 0$ → generalizzando $\boxed{LKC: \sum_{i=1}^{n} i_i = 0}$

Deriva dal principio di conservazione della carica perché: $i = dq/dt \rightarrow q = \int i\,dt$

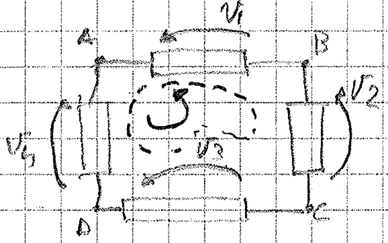
⇒ Integrando la (1) si ha: $\int (i_1 + i_2 - i_3 - i_4 + i_5)\,dt = 0$ → $q_1 + q_2 - q_3 - q_4 + q_5 = 0$

NB: la LKC esprime una conservazione istantanea del flusso di cariche che afferiscono al nodo, cioè in ogni istante il flusso delle cariche in arrivo al nodo deve essere bilanciato dal flusso delle correnti uscenti.

→ L'analogia con idraulica si ha con l'eq. di bilancio delle portate di un fluido incomprimibile, ad esempio acqua, in un nodo di condutture.

• LEGGE DI KIRCHOFF DELLE TENSIONI (LKT)

LKT: "In ogni istante la somma algebrica delle tensioni di lato in una maglia è nulla"



$v_1 - v_4 - v_3 + v_2 = 0 \quad (2)$ → NB: Il verso di percorrenza è arbitrario.

La LKT deriva dalla definizione di tensione:

$v_1 = U_A - U_B$

$v_2 = U_B - U_C$

$v_3 = U_D - U_C$

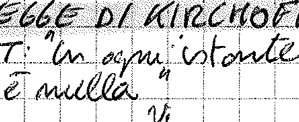
$v_4 = U_A - U_D$

→ Sostituendo nella 2 si ha:

$\underbrace{(\cancel{U_A} - \cancel{U_B})}_{v_1} + \underbrace{(\cancel{U_D} - \cancel{U_A})}_{-v_4} + \underbrace{(\cancel{U_C} - \cancel{U_D})}_{-v_3} + \underbrace{(\cancel{U_B} - \cancel{U_C})}_{v_2} = 0$

• IPOTESI DELLE LEGGI DI KIRCHOFF:

Le LK devono essere valide in qualsiasi istante di funzionamento del circuito. Questo può non essere sempre verificato se i nodi di un circuito sono sufficientemente distanti, tali cioè da introdurre un tempo di ritardo tra l'immissione di corrente in un lato e il suo arrivo all'altro estremo. Questo ritardo può essere più o meno trascurabile.



Considerando un dipolo con distanza pari a 1 m tra i morsetti e che il segnale si propaga alla velocità della luce $c \simeq 3 \cdot 10^8\,m/s$, allora una corrente iniettata in un morsetto arriverà al morsetto dopo: $\tau = l/c = 1/3 \cdot 10^8 \cong 0{,}3 \cdot 10^{-8}\,s = 3\,ns \Rightarrow \tau = 3\,ns$

→ Questo tempo di ritardo può essere più o meno trascurabile a seconda del fenomeno in esame.

NB: Se il tempo di ritardo τ e il periodo T sono confrontabili allora non si può considerare istantanea la propagazione.

Infatti, per esempio applicando LKC a un nodo questa sarà verificata istantaneamente per un'onda di $f = 50\,Hz$ (in quanto $T = 1/f = 20\,ms \rightarrow \tau \ll T$), mentre solo dopo un certo tempo nel caso di $f = 100\,MHz$ ($T = 10\,ns$). Si parla in questo caso di DIVERSA SCALA TEMPORALE dei fenomeni.

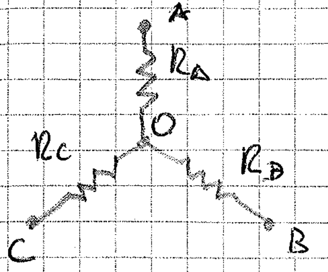
NB: L'ipotesi di propagazione istantanea è ben verificata se la dimensione geometrica del circuito è molto inferiore alla lunghezza d'onda associata al fenomeno e definita come: $\boxed{\lambda = c \cdot T}$

COLLEGAMENTO DI COMPONENTI:

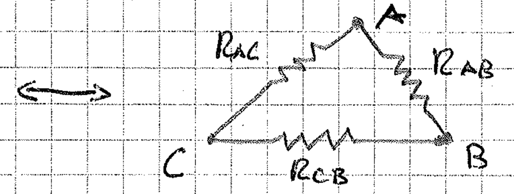
- SERIE
- PARALLELO
- STELLA
- TRIANGOLO

• Def: DIPOLO EQUIVALENTE: Due dipoli si dicono EQUIVALENTI se presentano le stesse equazioni costitutive, ovvero se sostituiti in un circuito ne lasciano invariato il funzionamento.

Nella connessione a STELLA un terminale di ogni resistenza è in comune e viene detto "centro stella" (O).



Tre resistenze sono invece connesse a TRIANGOLO quando sono connesse tra i terminali che costituiscono il triangolo.



Con opportuni passaggi algebrici si possono definire le formule di trasformazione dirette:

(1) STELLA → TRIANGOLO ($Y \rightarrow \Delta$)

$$R_{AB} = \frac{R_A \cdot R_B}{\left(\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}\right)} \; ; \quad R_{BC} = \frac{R_B \cdot R_C}{\left(\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}\right)} \; ; \quad R_{CA} = \frac{R_C \cdot R_A}{\left(\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}\right)}$$

(2) TRIANGOLO → STELLA ($\Delta \rightarrow Y$):

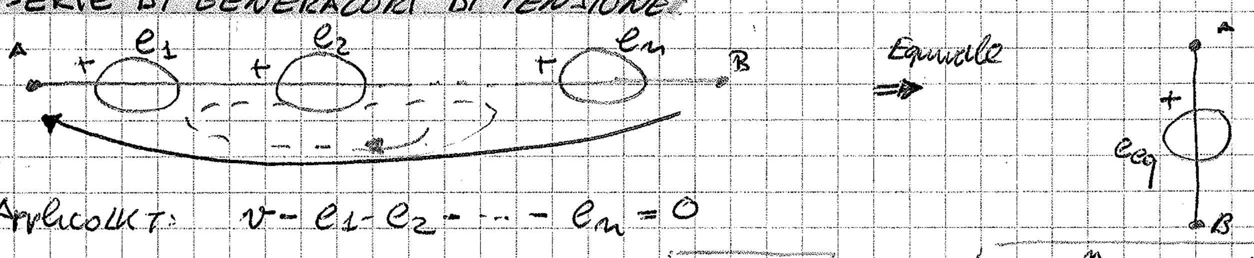
$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{(R_{AB}+R_{BC}+R_{CA})} \; ; \quad R_B = \frac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{(R_{AB}+R_{BC}+R_{CA})} \; ; \quad R_C = \frac{R_{CA} \cdot R_{CB}}{(R_{AB}+R_{BC}+R_{CA})}$$

NB: Queste relazioni si possono semplificare in caso di stella o triangolo equilibrati, formati cioè da resistori che hanno tutti lo stesso valore di resistenza:

(1) • $R_A = R_B = R_C = R_Y \Rightarrow R_{AB} = R_{BC} = R_{CA} = R_\Delta = 3 \cdot R_Y$

(2) • $R_{AB} = R_{BC} = R_{CA} = R_\Delta \Rightarrow R_A = R_B = R_C = R_Y = \frac{1}{3} \cdot R_\Delta$

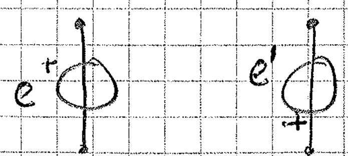
• SERIE DI GENERATORI DI TENSIONE:



Applico LKT: $v - e_1 - e_2 - \dots - e_n = 0$

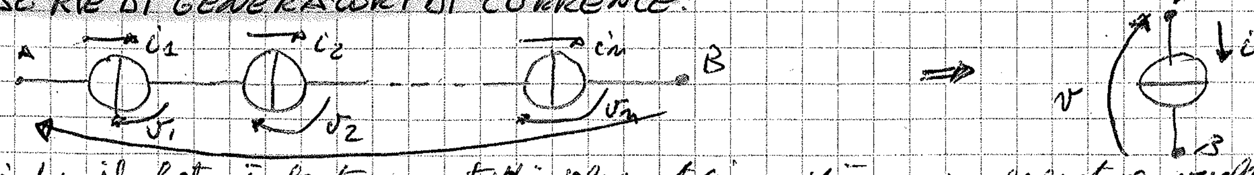
$\rightarrow v = e_1 + e_2 + \dots + e_n \Rightarrow \boxed{v = e_{eq}}$ dove $\boxed{e_{eq} = \sum_{i=1}^{n} e_i \quad \forall i(t)}$

NB:



→ e ed e' sono equivalenti se e solo se $e' = -e$

• SERIE DI GENERATORI DI CORRENTE:



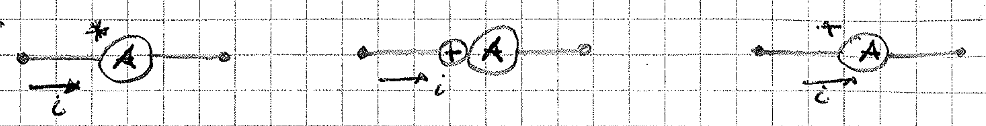
Poiché il lato è lo stesso per tutti i generatori, poiché ogni generatore vuole imporre la propria corrente si crea una situazione di conflitto:

- Caso: • $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$ → circuito privo di significato in quanto non è ammissibile

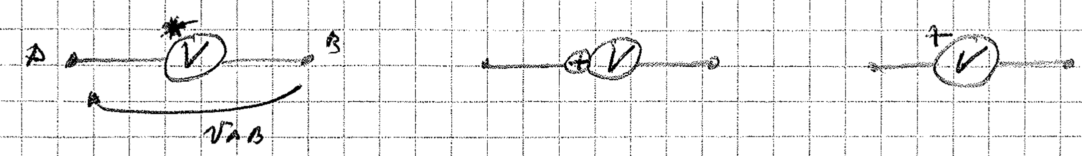
• $i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$ → unica situazione ammissibile ma banale → il modello equivale ad un unico generatore di corrente in cui tutte le correnti sono uguali alla corrente i.

STRUMENTI DI MISURA:

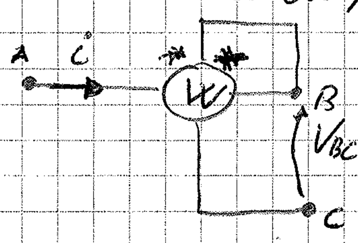
- **AMPEROMETRO:**
Misura la corrente tra 2 nodi, quindi si inserisce su di un lato.



- **VOLTMETRO:**
Misura la tensione tra 2 terminali



- **WATTMETRO:**
Misura la potenza. Ha bisogno di un inserzione di tipo amperometrico e una voltmetrica in quanto $P = V_{BC} \cdot i$



SOLUZIONI DI RETI RESISTIVE (in corrente continua):

Ogni lato del circuito è caratterizzato da un valore di corrente e da uno di tensione. Si intende per "soluzione del circuito" calcolare questi valori circuitali per ogni lato del circuito.
Quindi le incognite sono le tensioni e le correnti che vengono dette VARIABILI DI RETE. Per cui se ho L lati dovrò calcolare L valori di tensione ed L valori di corrente per cui ho 2L incognite da determinare, per cui dovrò scrivere un tot di equazioni dei componenti e un tot. di equazioni topologiche.

⇒ Il METODO ALGEBRICO sviluppato vale per qualsiasi circuito. Occorre definire la topologia del circuito che si suppone abbia N nodi ed L lati. NB: il numero di nodi e di lati in un circuito sono variabili indipendenti, cioè non sono definiti a priori ma dipendono dai collegamenti della rete.

Ai L lati si possono scrivere L equazioni tutte indipendenti in quanto ogni equazione contiene solo le variabili del lato in questione. Il bilancio incognite - equazioni lascia ancora $2L - L = L$ variabili libere.
Queste L equazioni rimanenti vanno ricercate nelle equazioni topologiche.
In un circuito con N nodi è possibile scrivere N equazioni LKC, cioè una per ogni nodo, ma solo N-1 eq. LKC saranno indipendenti tra loro (a seguito del fenomeno della conservazione della carica elettrica).
Rimangono allora $L-N+1$ incognite da vincolare.

⇒ 2L incognite -
<u>L eq. costitutive =</u>
L incognite non vincolate -
<u>N-1 LKC</u> =
$L-N+1$ incognite non vincolate

→ Queste $L-N+1$ variabili libere vanno vincolate con le equazioni LKT
Anche in questo caso è possibile scrivere più di $L-N+1$ eq. LKT ma che non sarebbero tutte indipendenti, ma è sempre possibile determinare un ~~numero~~ almeno un numero $L-N+1$ di maglie le cui equazioni sono linearmente indipendenti.

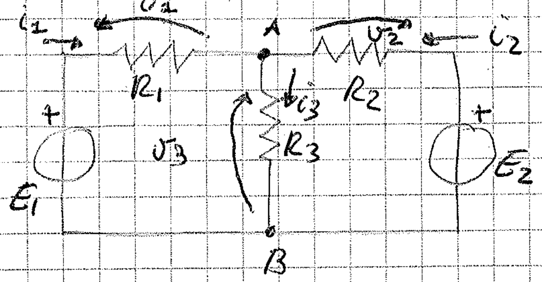
Esiste anche un metodo grafico ma è di difficile risoluzione ed è usato per lo più nella soluzione di circuiti non lineari e può essere applicato solo a reti semplici.

TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

Il teorema di sovrapposizione traduce in termini circuitali il principio di sovrapposizione degli effetti e consente di semplificare la soluzione dei circuiti lineari con più di un generatore.

Ipotesi: Circuito lineare

Enunciato: In un circuito con N generatori l'andamento di ogni variabile di rete con gli N generatori attivi è pari alla somma delle risposte ottenute facendo agire un solo generatore alla volta e passivando gli altri N-1.



→ Riprendendo il circuito di prima la soluzione era:

$$I_3 = \frac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = E_1 \underbrace{\frac{R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}}_{K_1} + E_2 \underbrace{\frac{R_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}}_{K_2}$$

$$\Rightarrow I_3 = \underbrace{K_1E_1}_{I_3'} + \underbrace{K_2E_2}_{I_3''}$$

L'enunciato del teorema prevede quindi che sia possibile trovare il valore della corrente i_3 come somma di 2 contributi (ho 2 generatori):

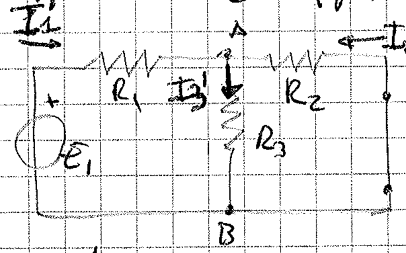
$$I_3 = I_3'(E_1) + I_3''(E_2)$$

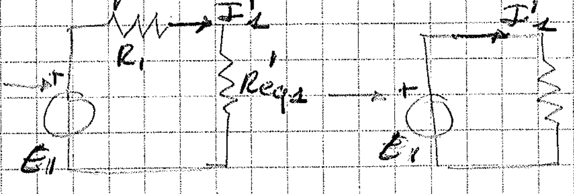
in cui $- I_3'(E_1) = I_3\big|_{E_2=0}$ → 1° contributo

$- I_3''(E_2) = I_3\big|_{E_1=0}$ → 2° contributo

cioè il contributo $I_3'(E_1)$ è calcolato lasciando attivo il generatore E_1 e passivando E_2, viceversa per I_3''.

• Calcolo I_3': $- E_1 \neq 0$ (attivo)
$- E_2 = 0$ (passivo)





→ In questo modo R_2 e R_3 risultano in parallelo dando R'_{eq1}. R'_{eq} è poi in serie con R_1 e danno R'_{eq}.

$$\Rightarrow R'_{eq1} = \frac{R_2R_3}{R_3+R_2} \quad \rightarrow R'_{eq} = R_1 + R'_{eq1} \Rightarrow$$

Applicando legge Ohm si ottiene:

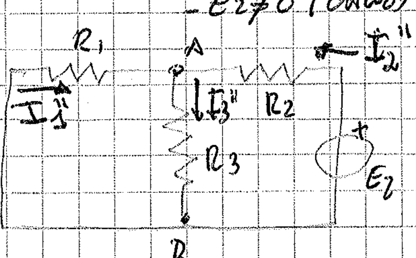
$$E_1 = R'_{eq} \cdot I_1' \Rightarrow I_1' = E_1/R'_{eq}$$

~~Trovato I_1' applico LKC①: $I_1' = I_3' + I_2'$~~

Trovato I_1' applico formula del partitore di corrente elettrica:

$$I_3' = I_1' \cdot \frac{R_2}{R_3+R_2} = \frac{E_1}{R'_{eq}} \cdot \frac{R_2}{R_3+R_2} = \boxed{\frac{E_1R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} = I_3'}$$

• Calcolo I_3'': $- E_1 = 0$ (passivato)
$- E_2 \neq 0$ (attivo)



→ Utilizzo lo stesso metodo di prima:

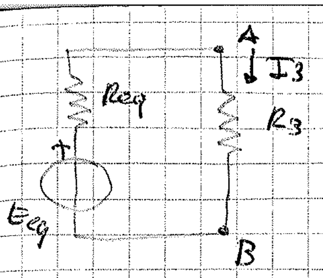
$$R''_{eq1} = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} \quad \rightarrow R''_{eq} = R''_{eq1} + R_2$$

$$E_2 = I_2'' \cdot R''_{eq} \Rightarrow I_2'' = E_2/R''_{eq}$$

⇒ Uso formula partitore corrente: $I_3'' = I_2'' \cdot \frac{R_1}{R_1+R_3} = \frac{E_2}{R''_{eq}} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_3}$

$$\Rightarrow \boxed{I_3'' = \frac{E_2R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}} \Rightarrow \boxed{I_3 = I_3' + I_3''}$$

→ Stesso risultato ottenuto col metodo algebrico

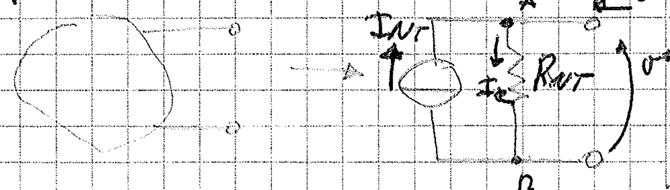


→ Dall'equazione di maglia si ottiene: $E_{eq} = R_{eq} I_3 + R_3 I_3$

$$\Rightarrow i_3 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

TEOREMA DI NORTON:

Lo stesso concetto espresso dal th. di Thevenin può essere applicato ad una topologia diversa di circuito equivalente detto CIRCUITO EQUIVALENTE DI NORTON.
Nelle ipotesi già espresse per il th. di Thevenin, ogni rete può essere trasformata in una semplificata ed equivalente con un generatore ideale di corrente in parallelo ad un resistore.



$$LKC(A): \begin{cases} i^* + I_{NT} = I_R \\ v^* = R_{NT} \cdot I_R \rightarrow I_R = \frac{v^*}{R_{NT}} \end{cases}$$

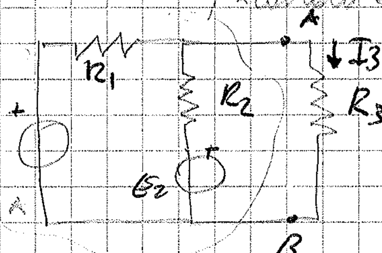
$$\Rightarrow i^* = I_R - I_{NT} = \frac{v^*}{R_{NT}} - I_{NT}$$

$$\Rightarrow \circ\ I_{NT} = -i^*\Big|_{v^*=0}$$

$$\circ\ R_{NT} = \frac{v^*}{i^*}\Big|_{I_{NT}=0}$$

NB: Qualunque sia la rete posso sempre costruire l'equivalente di Norton e di Thevenin.

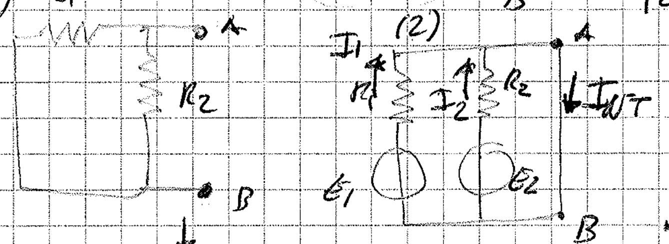
Esempio:



(1) Calcolo R_{NT}: passivo i generatori

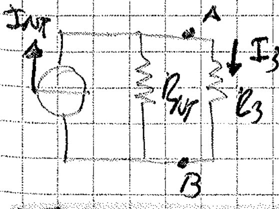
$$R_{NT} = R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

(2) Calcolo I_{NT}: Applico quindi il corto circuito (sparirà così la resistenza).



$$\rightarrow \begin{cases} I_2 = \frac{E_2}{R_2} \\ I_1 = \frac{E_1}{R_1} \\ I_1 + I_2 = I_{NT} \end{cases} \rightarrow I_{NT} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

Faccio l'equivalente Norton



→ Applicando formula del partitore di corrente resistivo:

$$I_3 = I_{NT} \cdot \frac{R_{NT}}{R_{NT} + R_3} \Rightarrow I_3 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

TEOREMA DI MILLMANN:

Permette di ottenere in forma chiusa la soluzione di circuiti di topologie finita. Per questo, questo teorema ha uno spazio di applicazione più limitato.

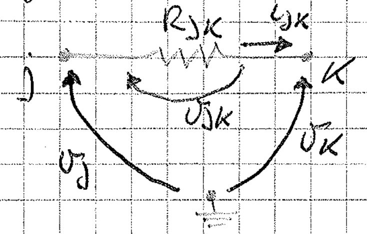
Ipotesi: Rete lineare costituita da lati in parallelo tra due nodi.

Enunciato: La tensione tra i due nodi è pari al rapporto di due termini: a numeratore compare la somma algebrica di tutti i generatori di tensione dei lati divisi per le resistenze serie e di tutti i generatori di corrente; a denominatore compare la somma delle resistenze serie di tutti i lati salvo quelli che contengono generatori di corrente.

LKT maglia 1: $-V_2 + V_x + V_3 = 0 \Rightarrow V_x = V_2 - V_3$

Si nota quindi che è possibile determinare le tensioni ai capi di ogni elemento della rete come differenza tra due tensioni di nodo (inoltre se uno dei capi di un elemento è connesso al nodo di riferimento, la tensione ai capi di questo elemento è direttamente la tensione di nodo → Esempio: $V_1 = V_5$; $V_{R_4} = V_2$ ...)

In generale si ha: → la corrente che dal nodo j fluisce al nodo k, attraverso una resistenza, è data dal rapporto tra la differenza tra le tensioni dei nodi j e k e il valore della resistenza



$$\begin{cases} v_{jk} = v_j - v_k \\ v_{jk} = R_{jk} \cdot i_{jk} \end{cases} \Rightarrow \boxed{i_{jk} = \frac{v_j - v_k}{R_{jk}}}$$

Nell'esempio:

- $v_1 = v_5$
- $i_3 = \frac{v_x}{R_3} = \frac{v_2 - v_3}{R_3}$
- $i_1 = \frac{v_3 - v_1}{R_1}$
- $i_4 = \frac{v_2}{R_4}$
- $i_2 = \frac{v_2 - v_1}{R_2}$
- $i_5 = \frac{v_3}{R_5}$

Caso: quando una resistenza collega un nodo j al nodo di riferimento, la corrente che fluisce è data dal rapporto tra v_j e la resistenza stessa.

LKC (2): $i_2 + i_4 + i_3 = 0 \to \frac{v_2 - v_1}{R_2} + \frac{v_2}{R_4} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = 0$

LKC (3): $i_1 + i_5 - i_3 = 0 \to \frac{v_3 - v_1}{R_1} + \frac{v_3}{R_5} - \left(\frac{v_2 - v_3}{R_3}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{v_3 - v_1}{R_1} + \frac{v_3}{R_5} + \frac{v_3 - v_2}{R_3} = 0$$

- $i_4 + i_5 = i^* = \frac{v_2}{R_4} + \frac{v_3}{R_5}$

Caso 1 con generatore ~~corrente~~ tensione

LKC (1): $i_1 + i^* + i_2 = 0 \Rightarrow \frac{v_3 - v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_4} + \frac{v_3}{R_5} + \frac{v_2 - v_1}{R_2} = 0$

$$\begin{cases} \cancel{\frac{v_2}{R_4}}\ v_1\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) + v_2\left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_2}\right) + v_3\left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5}\right) = 0 \\ v_1\left(-\frac{1}{R_2}\right) + v_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) + v_3\left(-\frac{1}{R_3}\right) = 0 \\ v_1\left(-\frac{1}{R_1}\right) + v_2\left(-\frac{1}{R_3}\right) + v_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3}\right) = 0 \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}}_{N \times N} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{N \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 = 0 \\ i_2 = 0 \\ i_3 = 0 \end{bmatrix}}_{N \times 1}$$

Regole generali: - Se nel circuito non sono applicati generatori di tensione la matrice risulta simmetrica.

- cella 1,1 → somma delle conduttanze che concorrono al nodo 1;
- " 2,2 → " " " " " 2;
- " N,N → " " " " " N;

NB: Se si può semplificare il circuito tramite l'equivalente Norton per togliere i generatori di tensione si semplificano le cose. → vedi esempio dopo

POTENZA NEI CIRCUITI

Ogni componente percorso da corrente e sottoposto a tensione è sede di una potenza elettrica, espressa come: $\boxed{p(t) = v(t) \cdot i(t)}$ [Watt]=[W]=[Volt · Ampere]

NB: La potenza non è una funzione lineare di tensione e corrente inquanto è il prodotto delle due → ciò implica che, anche in circuiti lineari, non vale per le potenze la sovrapposizione degli effetti.

La tensione, dall'elettromagnetismo, è un'energia potenziale specifica, cioè un'energia per unità di carica. Ogni carica Δq passando attraverso un componente cambia il suo stato energetico della quantità $\Delta W = \Delta q (v_2 - v_1)$. Il prodotto carica per tensione è quindi dimensionalmente un'energia.
Un flusso di cariche che attraversa il componente in un intervallo Δt, crea una corrente $i(t) = \Delta q / \Delta t$ e da luogo ad una variazione di energia per unità di tempo data da:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t}(v_2 - v_1) = i(t) \cdot v(t) = p(t)$$

⇒ L'energia per unità di tempo è la potenza richiesta per fare effettuare alle cariche il salto energetico.

⇒ Definita la potenza è anche possibile definire l'energia che questo componente scambia in un intervallo di tempo. Si ha:

$$\boxed{W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt}$$

CONVENZIONE UTILIZZATORI/GENERATORI:

Il segno della potenza istantanea $p(t)$ dipende dai segni delle tensioni e delle correnti.
NB: Il segno della potenza è legato al significato fisico che la potenza ha per il particolare componente, infatti il segno della $p(t)$ viene costruito convenzionalmente a seconda del tipo di componente.

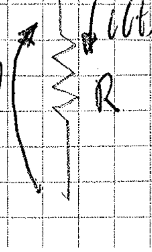
Convenzione UTILIZZATORE:
- $p > 0$ → assorbita
- $p < 0$ → ceduta

⇒ Per un componente generatore si assegna il segno positivo alla potenza ceduta all'esterno, per un componente utilizzatore si assegna il segno positivo alle potenze assorbite.

Convenzione GENERATORE:
- $p > 0$ → ceduta
- $p < 0$ → assorbita

COMPONENTE RESISTORE:

Sfruttando l'equazioni costitutive dei componenti si ottiene l'espressione della potenza.



$p(t) = v(t) \cdot i(t)$ ⇒

$v = R \cdot i$ ⇒ $\boxed{P = R i^2 = \frac{v^2}{R}}$

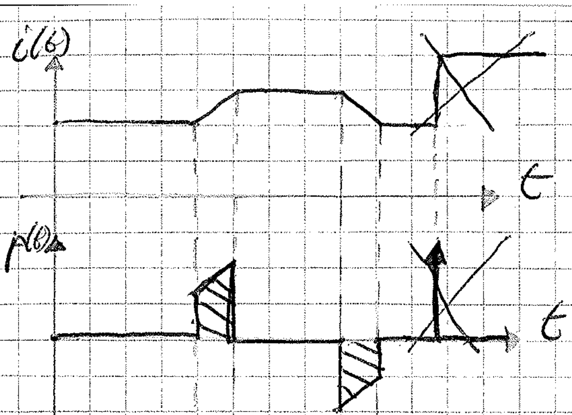
↓

$i = \frac{v}{R}$

NB: La potenza istantanea in un resistore può essere solo positiva, inoltre la natura non lineare della potenza è messa in evidenza dal termine quadratico.

NB: Essendo dedotto dalla convenzione utilizzatori, il resistore è solo in grado di assorbire potenza dall'esterno.

$p(t) > 0$ sempre



NB: Ipoteticamente in un fenomeno teorico potrebbe variare istantaneamente il valore della corrente (o della tensione per il condensatore) fornendo così all'induttore potenza infinita. Nella realtà però nessun componente è in grado di fornire potenza infinita e perciò il valore di corrente in un induttore non può variare istantaneamente ovvero avere un andamento a gradino.

⇒ NB: Per dualità le stesse considerazioni sono valide per la tensione e il condensatore.

TEOREMA DI TELLEGEN (CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA):

Il modello circuitale dei fenomeni elettromagnetici deve soddisfare le basilari leggi della fisica. Tra queste anche il principio di conservazione dell'energia nei sistemi isolati.

⇒ La conservazione dell'energia in un sistema fisico può essere espressa, istante per istante, dalla conservazione o bilancio delle potenze che impone che le potenze prodotte da qualche fenomeno nel sistema siano assorbite da qualche altro. In caso contrario si otterrebbe una violazione del principio di conservazione.
Nei circuiti questo bilancio istantaneo tra potenze prodotte e assorbite va sotto il nome di "Teorema di Tellegen".

⇒ Perciò questo teorema afferma che: "La somma delle potenze istantanee dei generatori è uguale alla somma delle potenze degli utilizzatori" cioè:

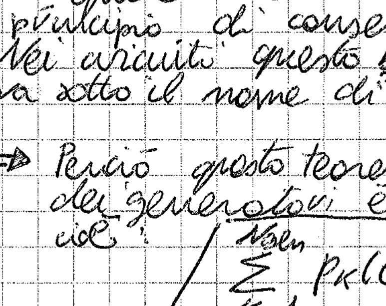
$$\boxed{\sum_{k=1}^{N_{gen}} p_k(t) = \sum_{j=1}^{N_{ute}} p_j(t) \quad \forall t}$$

ovvero in funzione delle variabili dirette si ha:

$$\sum_{k=1}^{N_{gen}} v_k(t)\, i_k(t) = \sum_{j=1}^{N_{ute}} v_j(t)\cdot i_j(t) \quad \forall t$$

MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA:

Vogliamo trasferire il massimo quantitativo di potenza dal generatore alla resistenza r:



Per il circuito si ha:

$$\begin{cases} E - V_R - V = 0 \\ V_R = R\cdot i \\ V = r\cdot i \end{cases} \Rightarrow i = \frac{E}{R+r}$$

$$P = r\cdot i^2 = r\cdot \frac{E^2}{(r+R)^2}$$

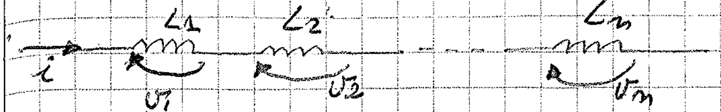
→ Per avere massima potenza dobbiamo variare r poiché E ed R sono fissi, sono dati disponibili e non variano.

Per cui r essendo una resistenza avrà campo:

$0 < r < \infty \quad \Rightarrow$ r varia tra $[0, \infty]$

SERIE DI INDUTTORI:

Equazione costitutiva induttore:
$$v_K = L_K \cdot \frac{di_K}{dt}$$

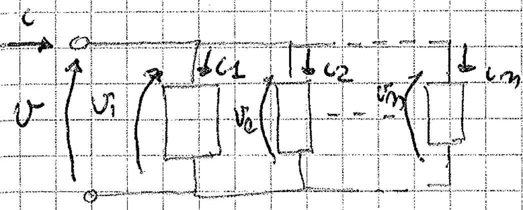


$$\Rightarrow v = L_1 \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow v = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \cdot \frac{di}{dt}$$

$$v = L_{eq} \frac{di}{dt} \quad \text{dove} \quad \boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n}$$

PARALLELO DI CONDENSATORI / INDUTTORI:

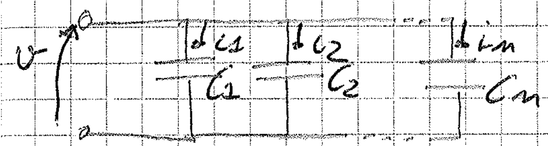
In generale dalla topologia si ha:



$$\boxed{\begin{aligned} &v_1 = v_2 = v_n = v \\ &i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n \end{aligned}}$$

CONDENSATORI:

$$i_K = C_K \frac{dv}{dt}$$

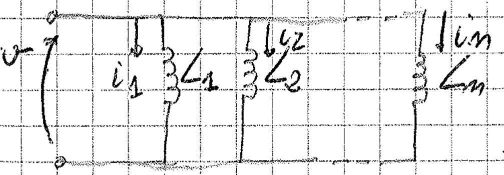


$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_n \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n}$$

INDUTTORI:

$$v = L_K \cdot \frac{di_K}{dt} \Rightarrow i_K = \frac{1}{L_K} \cdot \int_{-\infty}^{t} v(t')\,dt'$$



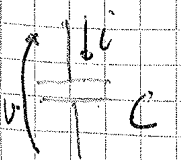
$$\Rightarrow i = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^{t} v(t')\,dt' + \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^{t} v(t')\,dt' + \dots + \frac{1}{L_n} \int_{-\infty}^{t} v(t')\,dt'$$

$$\Rightarrow i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}\right) \cdot \int_{-\infty}^{t} v(t')\,dt'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \Rightarrow \boxed{L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}}}$$

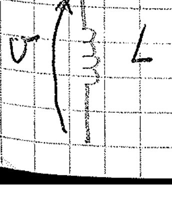
COMPORTAMENTO IN CORRENTE CONTINUA:

NB: In corrente continua significa che le variabili di rete (v e i) non variano rispetto al tempo, cioè sono costanti $\Rightarrow dv/dt = 0$, $di/dt = 0$



$$\longrightarrow \quad i = C \frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\rightarrow$ Equivale a circuito aperto



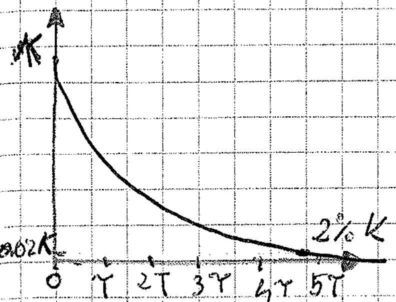
$$\longrightarrow \quad v = L \cdot \frac{di}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\rightarrow$ Equivale a corto circuito

NB: Nella soluzione dell'omogenea associata compare la funzione esponenziale

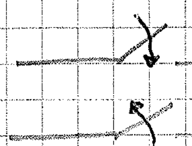
$v(t)=f(t)=Ke^{-t/\tau}$, $t>0$, dove K è l'ampiezza della funzione esponenziale e τ viene detto costante di tempo. $\boxed{\text{diventerà } v_t(t)}$

⇒ Da un punto di vista matematico la funzione esponenziale è definita su tutto il semiasse positivo, mentre da un punto di vista ingegneristico si può considerare che l'influenza della funzione esponenziale sia sostanzialmente esaurita quando questa scende sotto il 2% del suo valore iniziale, il che avviene dopo circa 4÷5 costanti di tempo τ.



TASTI: In alcuni casi una modifica topologica del circuito può dar luogo ad una variazione delle grandezze circuitali. I componenti dedicati a queste modifiche topologiche sono detti "tasti" e possono commutare ad un certo istante tra una caratteristica di circuito aperto ad una di corto-circuito e viceversa.

Può per esempio dar luogo ad una maglia che prima non esisteva.



da aperto a chiuso → se è chiuso è corto circuito, altrimenti è circuito aperto.

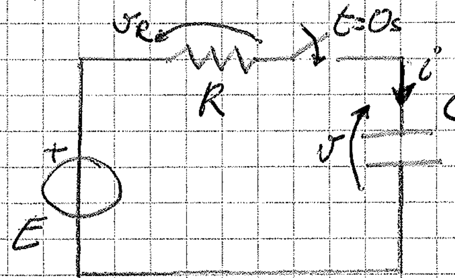
da chiuso a aperto

NB: Oppure, per esempio, un generatore di tensione ideale (costante) viene visto ai morsetti come un generatore che varia a gradino nell'istante di chiusura del tasto.

CIRCUITO RC:

È un circuito costituito da un resistore, da un condensatore e da un generatore di tensione collegato mediante un tasto. Si vuole determinare come evolve nel tempo la tensione ai capi del condensatore C.

CARICA DI UN CONDENSATORE: Studio per $\boxed{t>0}$, cioè quando il tasto è chiuso



$$\begin{cases} v+v_R-E=0 & \text{LKT} \\ v_R=R\cdot i & \text{eq. R} \\ i=C\dfrac{dv}{dt} & \text{eq. C} \end{cases} \Rightarrow v+R\cdot C\frac{dv}{dt}=E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=\frac{E}{RC}} \rightarrow v=v_p+v_t$$

$\boxed{v_p}$ → v_p = costante, perché se le forzanti (i generatori) sono costanti rispetto al tempo, allora anche la soluzione particolare deve essere costante rispetto a t.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dv_p}{dt}}_{=0 \text{ perché } v_p=\text{cost.}}+\frac{v_p}{\cancel{RC}}=\frac{E}{\cancel{RC}} \Rightarrow \boxed{v_p=E}$$

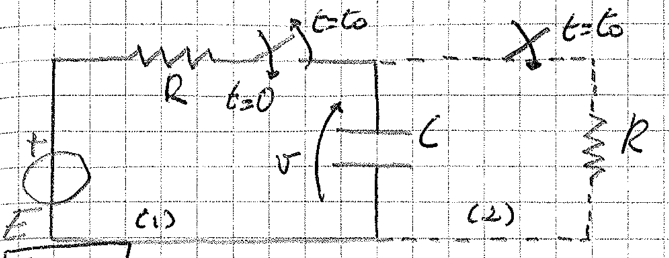
$\boxed{v_t}$ → $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v}{RC}=0$ $\quad \dfrac{dv}{dt}=P;\ v=1$ $\quad \Rightarrow P+\dfrac{1}{RC}=0 \Rightarrow P=-\dfrac{1}{RC}$

e la soluzione dell'omogenea associata è:

$v_t=Ke^{Pt} \Rightarrow v_t=Ke^{-t/RC}$ → dimensionalmente $[RC]=s$ → $[\tau]=s$ = costante di tempo ⇒ $\boxed{\tau=RC}$

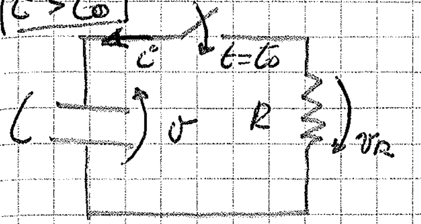
↓

SCARICA DEL CONDENSATORE:



In t_0 il condensatore è carico del valore E, ora lo disconnetto dal circuito 1 e lo collego al circuito 2

$\boxed{t > t_0}$



→ La condizione iniziale sarà quindi:

$$C.I.: \; v(t=t_0) = E$$

$$\boxed{\tau = R \cdot C}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v + v_R = 0 \\ v_R = R \cdot i \\ i = C \cdot \dfrac{dv}{dt} \end{cases} \Rightarrow v + R \cdot C \cdot \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_p + v_t$$

$\boxed{v_p}$ → $v_p = \text{costante}$ → $\dfrac{dv_p}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dv_p}{dt}}_{=0} + \frac{v_p}{\tau} = 0 \Rightarrow \boxed{v_p = 0}$$

Poiché non abbiamo generatori le forzanti sono nulle, cioè non c'è niente in grado di fornire energia

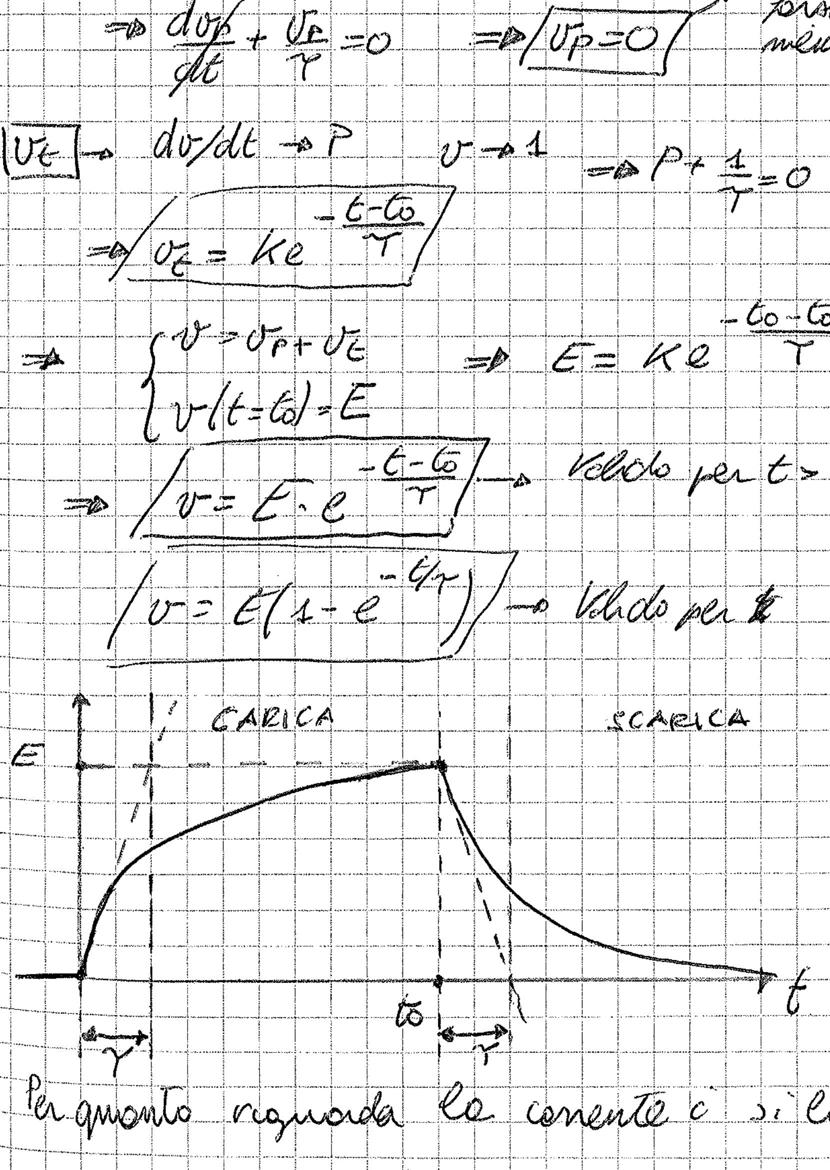
$\boxed{v_t}$ → $dv/dt \to P \qquad v \to 1 \qquad \Rightarrow P + \dfrac{1}{\tau} = 0 \Rightarrow P = -\dfrac{1}{\tau}$

$$\Rightarrow \boxed{v_t = K e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = v_p + v_t \\ v(t=t_0) = E \end{cases} \Rightarrow E = K e^{-\frac{t_0 - t_0}{\tau}} = K \cdot e^0 = K \Rightarrow \boxed{K = E}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = E \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$$ → Valido per $t > t_0$ (scarica)

$$\boxed{v = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$ → Valido per ~~t~~ $0 < t < t_0$ (carica)



Per quanto riguarda la corrente i si ha: $i(t) = C \cdot \dfrac{dv}{dt}$

$\boxed{i_p} \rightarrow i_p = \text{costante} \rightarrow \frac{di_p}{dt} = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{di_p}{dt}}_{=0} + \frac{i_p}{(L/R)} = \frac{E}{L} \Rightarrow \boxed{i_p = \frac{E}{R}}$

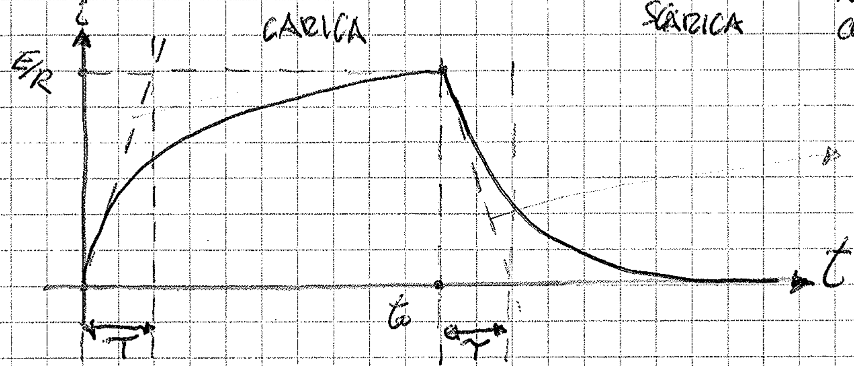
$\boxed{i_t} \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} \rightarrow P \; ; \; i \rightarrow 1 \Rightarrow P + \frac{1}{\tau} = 0 \Rightarrow P = -\frac{1}{\tau}$

$\Rightarrow \boxed{i_t = K e^{-t/\tau}}$

Tramite condizione iniziale determino K:

$$\begin{cases} i = i_p + i_t = \frac{E}{R} + K e^{-t/\tau} \\ i(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{E}{R} + K \cdot e^{-0/\tau} \Rightarrow \boxed{K = -\frac{E}{R}}$$

$\Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$ → Soluzione definitiva valida dopo la chiusura del tasto cioè per $t>0$.



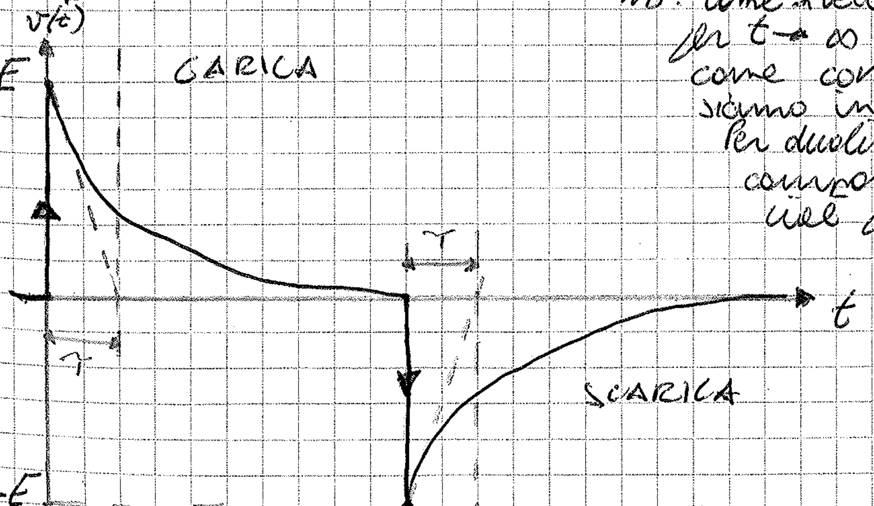
Il coefficiente angolare della retta è dato da $\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0}$

Il coefficiente angolare della retta è dato da $\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=t_0}$

Per trovare l'andamento di $v(t)$ si ha:

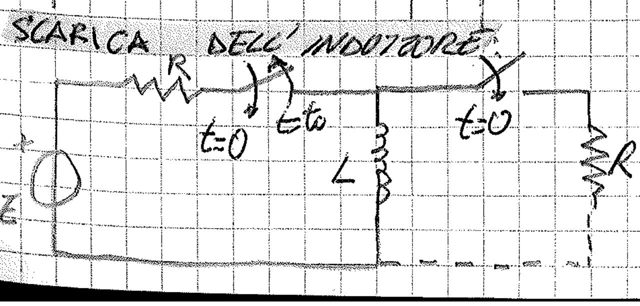
$$v(t) = L\frac{di}{dt} = L \cdot \left(-\frac{E}{R} e^{-t/\tau}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{L \cdot E}{R} \cdot \left(\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-t/\tau} = E e^{-t/\tau}$$

$\Rightarrow \boxed{v(t) = E \cdot e^{-t/\tau}}$



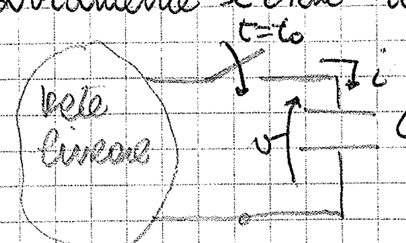
NB: Come si vede dal grafico, a regime, cioè per $t \rightarrow \infty$ l'induttore si comporta come cortocircuito, ovvero $v=0$, poiché siamo in corrente continua.
Per dualità invece la capacità si comporta come circuito aperto cioè per $t \rightarrow \infty$, $i=0$.

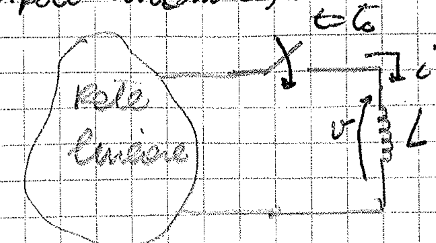
SCARICA DELL'INDUTTORE:



→ Per la scarica dell'induttore il circuito si chiude già a $t=t_0$ e sarà composto dall'induttore e dalla resistenza R.

In generale ogni caso è riconducibile a uno di questi con i condensatori (ovviamente se viene utilizzato un solo bipolo dinamico):

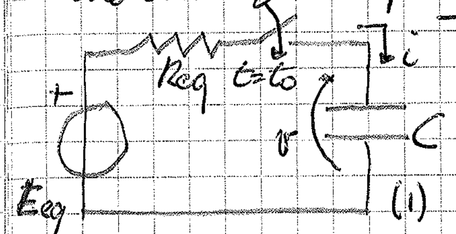




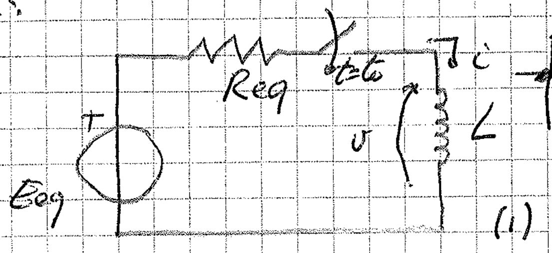
$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=b \qquad\qquad \frac{di}{dt}+\frac{i}{\tau}=b$$

In quanto una rete lineare può essere semplificata tramite un equivalente Thevenin per cui per la ~~CARICA~~ si ha:

$\rightarrow \boxed{\tau = R_{eq} C}$



$\rightarrow \boxed{\tau = \frac{L}{R_{eq}}}$



Per cui in un circuito qualunque la resistenza da utilizzare è la resistenza equivalente ai capi del bipolo dinamico.

Nel caso generale si ha:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{\tau}=b \qquad \text{La soluzione sarà:} \quad x = x_p + x_t$$

- $\boxed{x_p}$ In questo caso $x_p =$ costante $\Rightarrow \frac{x_p}{\tau}=b \rightarrow x_p = b\cdot\tau$

NB: $\boxed{x_p = x_\infty}$ → Cioè l'integrale particolare rappresenta la soluzione a regime, ovvero, in questo caso, a corrente continua.

- $\boxed{x_t}$ → Si ha sempre: $x_t = K e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$

⇒ La soluzione è quindi: $x = x_p + K e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = x_\infty + K e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = x$

La costante K viene determinata tramite le condizioni iniziali o condizioni al contorno:

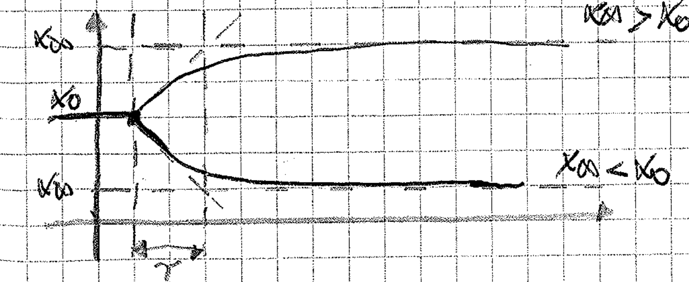
$$\begin{cases} x = x_\infty + K e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \\ x(t=t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = x_\infty + K \Rightarrow K = x_0 - x_\infty$$

Soluzione generale: $\boxed{x = x_\infty + (x_0 - x_\infty)\cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$

⇒ Per cui per la soluzione di un transitorio occorrono solo 3 parametri:
- valore di regime x_∞;
- valore iniziale x_0;
- costante di tempo τ.

NB: Tutto dipende dallo stato iniziale del bipolo. Infatti se, per esempio, nel circuito di "carica" (cioè con generatore), il condensatore è carico già di un valore più alto di E_{eq}, vorrà dire allora che lo stato si sta scaricando. Quindi il circuito (1), con il generatore, non costituisce per forza la carica.

Graficamente:



Le funzioni seno e coseno sono identiche ma differiscono soltanto per il valore della fase.
Grazie alla trigonometria le funzioni sinusoidali possono essere espresse in funzione del seno grazie a:

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

Considerando la funzione $a(t)=\hat{A}\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$, per il calcolo del valore efficace si ha:

$$A=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_t^{t+T}\left[\hat{A}^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\varphi)\right]dt}=\sqrt{\frac{\hat{A}^2}{T}\int_t^{t+T}\mathrm{sen}^2(\omega t+\varphi)\,dt}=$$

$$\mathrm{sen}^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2} \rightarrow =\sqrt{\frac{\hat{A}^2}{T}\cdot\int_t^{t+T}\frac{1-\cos[2(\omega t+\varphi)]}{2}dt}=$$

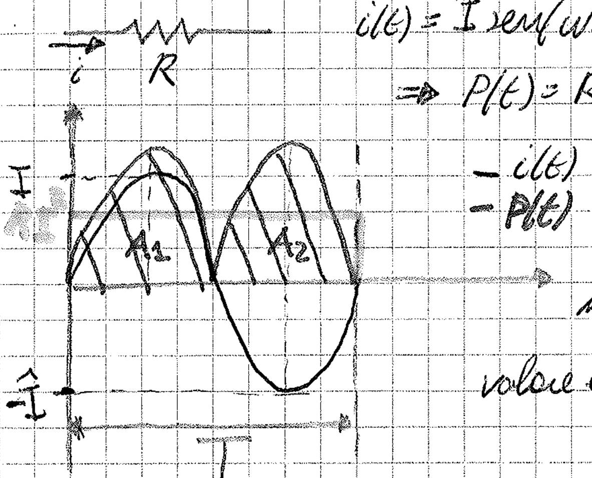
$$=\sqrt{\frac{\hat{A}^2}{2T}\cdot\left[\int_t^{t+T}dt-\cancel{\int_t^{t+T}\cos[2(\omega t+\varphi)]dt}\right]}=$$

$\Rightarrow = 0$ qualunque sia il periodo scelto per definizione di funzione alternata

$$=\sqrt{\frac{\hat{A}^2}{2\cancel{T}}\cdot\cancel{T}}=\sqrt{\frac{\hat{A}^2}{2}}=\frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{A=\hat{A}/\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ Valido per ogni sinusoide. Cioè il valore efficace di una sinusoide vale ampiezza $\hat{A}$ diviso $\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Nell'analisi circuitale il valore efficace può esprimere in maniera semplice i fenomeni energetici: per esempio in un resistore R percorso da corrente sinusoidale si ha:



$i(t)=\hat{I}\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$$\Rightarrow P(t)=Ri^2(t) \Rightarrow W=\int_0^T P(t)dt=\int_0^T Ri^2(t)dt=$$

moltiplico e divido per T

$$=R\cdot T\cdot\left(\frac{1}{T}\cdot\int_0^T i^2(t)dt\right)=$$

NB: Se $I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} \rightarrow I^2$

valore efficace

$$\Rightarrow =R\,T\,I^2=(RI^2)\cdot T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W=(R\cdot I)^2\cdot T=P_m\cdot T}$$

Ma abbiamo anche che $W=A_1+A_2=(RI^2)T$

NB:
$\Rightarrow$ Il valore efficace per una sinusoide assume quindi valore energetico, perché W può essere calcolato anche come area di un rettangolo di altezza RI^2 e base T.

▪ METODO SIMBOLICO:

Il metodo simbolico è la rappresentazione delle funzioni sinusoidali mediante numeri complessi.
L'ipotesi che sta alla base di questo metodo è che il circuito sia lineare, per cui, in queste condizioni, l'integrale particolare appartiene alla stessa classe della funzione forzante e nei circuiti di interesse tecnico risulta particolarmente importante la determinazione della risposta a regime piuttosto che di quella transitoria, in quanto il periodo transitorio può essere molto breve rispetto al tempo di funzionamento medio di un dispositivo.
$\rightarrow$ Il metodo simbolico tramite l'analogia con i numeri complessi fornisce lo strumento più efficiente per questo scopo.

$\Downarrow$

$\bar{z}(t) = \sqrt{2}\,\underline{A e^{j\varphi}}\, e^{j\omega t}$ $\Rightarrow$ $z(t) = \sqrt{2} A \,sen(\omega t + \varphi)$

$z(t) = Im[\sqrt{2} A e^{j(\omega t + \varphi)}]$

$\bar{z}(t) = Im[\sqrt{2} \bar{A} e^{j\omega t}]$

è definita grandezza FASORE

→ NB: tutti i fasori ruotano alla stessa ω.

$\boxed{\bar{A} = A e^{j\varphi}}$ → Il fasore $\bar{A}$ può essere rappresentato nel piano complesso come un vettore che ha come modulo il valore efficace della funzione sinusoidale e la stessa fase.

Quindi valore efficace e fase sono contenute nel numero complesso $\bar{A}$, detto FASORE della funzione $a(t)$.

ALGEBRA DEI FASORI:

- SOMMA (ALGEBRICA):

$a_1(t) = \sqrt{2} A_1 \,sen(\omega t + \varphi_1)$

$a_2(t) = \sqrt{2} A_2 \,sen(\omega t + \varphi_2)$

$a_3(t) = \sqrt{2} A_3 \,sen(\omega t + \varphi_3)$

$a(t) = Im[\sqrt{2} \bar{A} e^{j\omega t}]$ — $a(t) = \sqrt{2} A \,sen(\omega t + \varphi)$

$\bar{A} = A e^{j\varphi}$ → FASORE associato alla sinusoide

$\Rightarrow a_1(t) + a_2(t) - a_3(t) = b(t)$ $\Rightarrow$ NB: la somma e la sottrazione di sinusoidi dà ancora una sinusoide.

$a_1(t) = Im[\sqrt{2} A_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}]$

$a_2(t) = Im[\sqrt{2} A_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}]$

$a_3(t) = Im[\sqrt{2} A_3 e^{j\varphi_3} e^{j\omega t}]$

$$\Rightarrow a_1(t) + a_2(t) - a_3(t) = Im[\sqrt{2} A_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} + \sqrt{2} A_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t} - \sqrt{2} A_3 e^{j\varphi_3} e^{j\omega t}] =$$

$$= Im[\sqrt{2}(A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2} + A_3 e^{j\varphi_3}) \cdot e^{j\omega t}] =$$

$$= Im[\sqrt{2}(\underbrace{\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3}_{\bar{B}}) e^{j\omega t}] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underbrace{\bar{B} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3}_{} = B e^{j\varphi_B}$

$$\Rightarrow \boxed{b(t) = \sqrt{2} B \,sen(\omega t + \varphi_B) = Im[\sqrt{2} \bar{B} e^{j\omega t}]}$$

NB: Una somma di sinusoidi nel dominio del tempo rimane una somma di fasori nel dominio delle frequenze

- PRODOTTO PER COSTANTE:

$a(t) = \sqrt{2} A \,sen(\omega t + \varphi) = Im[\sqrt{2} A e^{j\varphi} e^{j\omega t}]$

$b(t) = K \cdot a(t)$

$\Rightarrow b(t) = Im[\sqrt{2} \underbrace{K A e^{j\varphi}}_{\bar{B}} e^{j\omega t}]$

$\Rightarrow \bar{B} = K \cdot A e^{j\varphi} = \boxed{K \cdot \bar{A} = \bar{B}}$

→ Il prodotto per costante nel dominio del tempo rimane ancora un prodotto per costante nel dominio delle frequenze, cioè per i fasori.

La soluzione sarà: $i(t) = i_p(t) + i_t(t)$

$\boxed{i_t} \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \Rightarrow i_t = Ke^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$ dove $\tau = L/R$

$\boxed{i_p} \rightarrow$ questa volta non è più costante ma va ricercata nelle funzioni sinusoidali di pulsazione ω:

$$i_p(t) = \sqrt{2}\, I \,\text{sen}(\omega t + \varphi_I)$$

Per semplicità e poiché nulla è stato dichiarato sulla fase di $e(t)$ posso porre $\varphi_V = 0$. $\varphi_I = \varphi_V + \varphi \Rightarrow \varphi_I = \varphi \rightarrow$ è quindi lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione

Per cui si ha: $\begin{cases} i_p(t) = \sqrt{2}\, I\, \text{sen}(\omega t + \varphi) \\ e(t) = \sqrt{2}\, E\, \text{sen}(\omega t) \end{cases}$

$\Rightarrow i_p(t)$ deve quindi soddisfare l'eq. differenziale (1) $\Rightarrow$

$$R i_p(t) + L\frac{di_p(t)}{dt} = e(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R\cancel{\sqrt{2}} I \text{sen}(\omega t + \varphi) + L \cancel{\sqrt{2}} I \cos(\omega t + \varphi)\cdot\omega = \cancel{\sqrt{2}} E \,\text{sen}\, \omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow RI[\text{sen}(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi] + L\omega I[\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi] = E\,\text{sen}\,\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\,\text{sen}(\omega t) + 0\cos(\omega t) = [RI\cos\varphi - \omega L I \sin\varphi]\,\text{sen}(\omega t) +$$
$$+ [RI\sin\varphi + \omega L I \cos\varphi]\cos(\omega t) \Rightarrow$$

$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow$ Parte [Re] = Parte [Re] e Parte [Im] = Parte [Im]

$$\Rightarrow \begin{cases} E = RI\cos\varphi - \omega L I\,\text{sen}\,\varphi & (2) \\ 0 = RI\sin\varphi + \omega L I \cos\varphi & (3) \end{cases} \rightarrow \text{2 equazioni in 2 incognite } (I \text{ e } \varphi)$$

$$(2)^2 + (3)^2 \Rightarrow E^2 = (RI)^2\cos^2\varphi + (\omega L I)^2 \sin^2\varphi - \cancel{2R\omega L I^2 \cos\varphi\sin\varphi} +$$
$$+ (RI)^2\sin^2\varphi + (\omega L I)^2\cos^2\varphi + \cancel{2R\omega L I^2\cos\varphi\sin\varphi} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Raccolgo $(RI)^2$ e $(\omega L I)^2$ e ottengo $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow E^2 = (RI)^2 + (\omega L I)^2 \Rightarrow I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$\rightarrow$ Dalla (3) si ottiene $\Rightarrow \tan\varphi = -\frac{\omega L \cancel{I}}{R\cancel{I}} \Rightarrow \varphi = \text{arctg}\left(-\frac{\omega L}{R}\right) \overset{*}{=} -\text{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

perché arctg è una funzione dispari

Devo ancora determinare K:

$$\begin{cases} i(t) = i_p(t) + i_t(t) = \sqrt{2}\, I\,\text{sen}(\omega t + \varphi) + Ke^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \\ i(t = t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow K = -\sqrt{2}\, I\,\text{sen}(\omega t_0 + \varphi)$$

NB: Non è una funzione sinusoidale del tempo ma è una costante perché ho t_0. Rappresenta infatti I_0, cioè il valore iniziale della corrente in forma transitoria.

In definitiva:

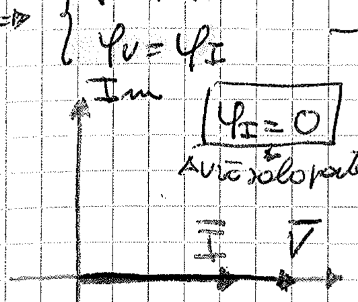
$$\boxed{i(t) = \sqrt{2}\, I\,\text{sen}(\omega t + \varphi) - \sqrt{2}\, I\,\text{sen}(\omega t_0 + \varphi)\, e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$$

→ le caratteristiche del fasore di tensione sono quindi: $\bar{V} = R\bar{I} \to Ve^{j\varphi_V} = Ie^{j\varphi_I}R$

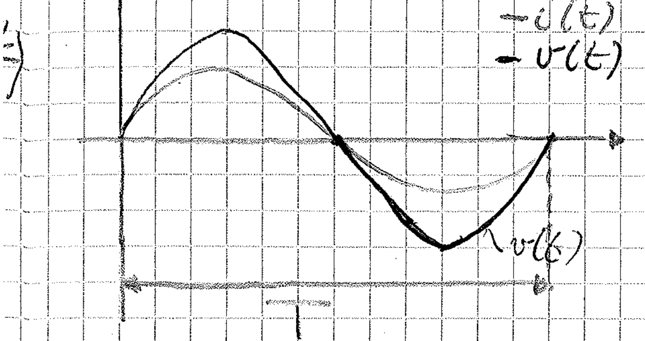
$$\Rightarrow \begin{cases} V = RI \\ \varphi_V = \varphi_I \end{cases}$$

→ I due fasori sono sicuramente paralleli dato che gli angoli di fase sono gli stessi. Non si può dire nulla riguardo alle ampiezze che vanno misurate su due scale diverse, in Volt per la tensione e in Ampere per la corrente, da cui le ampiezze relative sono quindi indicative → la costante R va quindi ad influenzare solo il modulo, non la fase.

$\boxed{\varphi_I = 0}$ Avrò solo parte Re

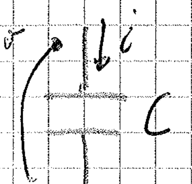


→ chiamato DIAGRAMMA FASORIALE



→ NB: Il fatto che i fasori siano allineati nel dominio delle frequenze fa sì che nel dominio del tempo le due sinusoidi abbiano la stessa fase ("sono in ~~FASE~~"), ciò si traduce in un passaggio sincrono per lo zero.

• CAPACITÀ:



$i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$ → è la derivata nel dominio delle frequenze

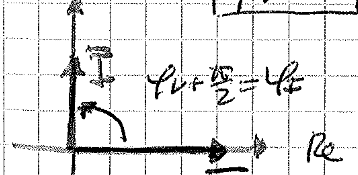
$\bar{I} = C(j\omega)\bar{V} \Rightarrow \boxed{\bar{I} = Cj\omega\bar{V}}$

$$\begin{cases} i(t) = \sqrt{2}I\,\text{sen}(\omega t + \varphi_I) \\ v(t) = \sqrt{2}V\,\text{sen}(\omega t + \varphi_V) \end{cases} \to \begin{cases} \bar{V} = Ve^{j\varphi_V} \\ \bar{I} = Ie^{j\varphi_I} \end{cases}$$

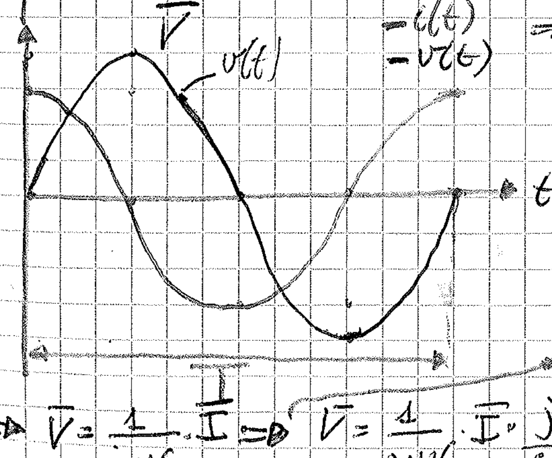
$\Rightarrow \bar{I} = j\omega C\bar{V} \Rightarrow Ie^{j\varphi_I} = Ve^{j(\varphi_V + \pi/2)} \cdot \omega C$ associo fasore

⇒ Il fasore della corrente vale quindi: $\begin{cases} I = \omega CV \\ \varphi_I = \varphi_V + \pi/2 \end{cases}$

$\boxed{\varphi_V = 0}$ → $\bar{V}$ avrò solo parte Re



→ Il fasore della tensione e quello della corrente non sono più // ma sfasati di 90° a causa dell'operatore derivato



→ le due forme d'onda sono quindi sfasate di $\pi/2$ ($1/4$ di periodo), e queste sono dette in QUADRATURA.
Dato che solitamente nei circuiti la tensione viene assunta come riferimento di fase, si dice allora, in questo caso, che la corrente è in anticipo rispetto alla tensione.

moltiplico e divido per j — $j^2 = -1$

$$\Rightarrow \bar{V} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I} \Rightarrow \bar{V} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}\cdot\frac{j}{j} = \frac{j\bar{I}}{j^2\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I} \Rightarrow \boxed{\bar{V} = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}}$$

NB: Ho solo parte $Im = -\dfrac{1}{\omega C}$ ⇒ Definisco $\boxed{X = -\dfrac{1}{\omega C}}$ $[\Omega]$ → termine definito REATTANZA CAPACITIVA (perché associato alla capacità)

< 0

$\Rightarrow \boxed{\bar{V} = jX\bar{I}}$

NB: $X \neq R$ perché R non dipende dalla frequenza mentre X sì.

• Caso RESISTENZA: $\frac{\overline{V}}{\overline{I}} = R \rightarrow \boxed{\overline{Z} = R \Rightarrow \begin{cases} Z = R \\ \theta = 0 \end{cases}}$

• Caso CAPACITÀ: $\frac{\overline{V}}{\overline{I}} = -j\frac{1}{\omega C} \rightarrow \boxed{\overline{Z} = -j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{1}{\omega C} \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}}$

• Caso INDUTTANZA: $\frac{\overline{V}}{\overline{I}} = j\omega L \Rightarrow \boxed{\overline{Z} = j\omega L \rightarrow \begin{cases} Z = \omega L \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}}$

È possibile però avere componenti bipoli con impedenza generica i quali: $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $\boxed{\overline{Z}_{eq} = R + jX}$ dove il parametro R è detto PARTE REALE dell'impedenza, e quindi RESISTENZA, mentre il parametro X è la PARTE IMMAGINARIA detta REATTANZA.

⇒ L'impedenza è legata ai fasori di tensione e corrente, il suo modulo e la sua fase sono quindi dati da:

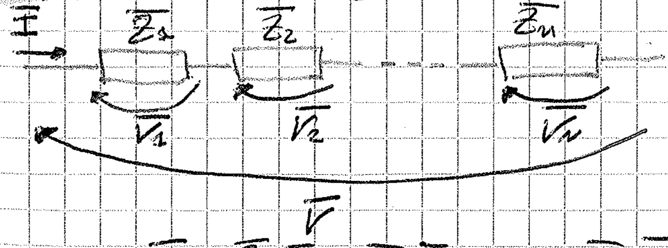
$$\boxed{\overline{Z} = Ze^{j\theta} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{Ve^{j\varphi_V}}{Ie^{j\varphi_I}} = \left(\frac{V}{I}\right)e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \overline{Z}} \Rightarrow \begin{cases} Z = V/I & [\Omega] \\ \theta = \varphi_V - \varphi_I & [rad] \end{cases}$$

NB: L'impedenza non è un fasore, è un numero complesso (ma non un numero complesso rotante) quindi non rappresenta una sinusoide.
⇒ Quindi il modulo dell'impedenza è il rapporto tra il valore efficace della tensione e quello della corrente e si misura in Ohm [Ω].
L'angolo θ di fase dell'impedenza esprime la differenza angolare che è presente tra il fasore della tensione e quello della corrente.
Le due fasi possono essere messe in relazione tramite: $\theta = \varphi_V - \varphi_I \rightarrow \varphi_I = \varphi_V - \theta$

COLLEGAMENTO DEI COMPONENTI

Grazie alla legge di Ohm generalizzata si riconduce l'analisi di un circuito in regime sinusoidale ad un circuito retto da equazioni algebriche a valori complessi. ⇒ Quindi si possono collegare in serie o in parallelo componenti anche diversi tra loro.

• SERIE DI IMPEDENZE:

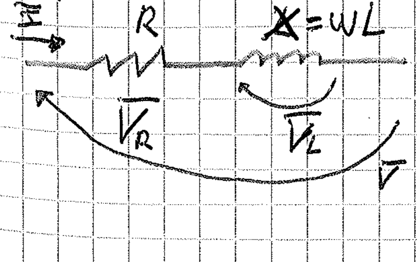


$$\begin{cases} \overline{V} - \overline{V}_1 - \overline{V}_2 - \dots - \overline{V}_n = 0 \\ \overline{V}_1 = \overline{Z}_1\overline{I} \\ \overline{V}_2 = \overline{Z}_2\overline{I} \\ \overline{V}_n = \overline{Z}_n\overline{I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{V} = \overline{Z}_1\overline{I} + \overline{Z}_2\overline{I} + \dots + \overline{Z}_n\overline{I} = \underbrace{(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \dots + \overline{Z}_n)}_{\overline{Z}_{eq}} \cdot \overline{I}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \dots + \overline{Z}_n} \rightarrow \text{SERIE}$$

Esempio:



$$\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_L = R\overline{I} + jX\overline{I} = (R + jX)\overline{I}$$

$$\Rightarrow \overline{V} = (R + jX)\overline{I}$$

NB: La serie tra resistenza e induttanza costituisce un'unica resistenza di natura OHMICO-INDUTTIVA.

$$\Rightarrow \bar{Z}_{eq} = \frac{G - j\omega L}{G^2+(\omega L)^2} = \underbrace{\frac{G}{G^2+(\omega L)^2}}_{R} - j \cdot \underbrace{\frac{\omega L}{G^2+(\omega L)^2}}_{X}$$

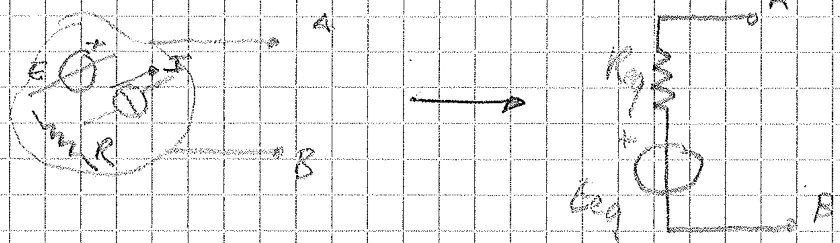
$$\Rightarrow \bar{Z}_{eq} = R + jX = Z_{eq} \cdot e^{j\theta_{eq}} \Rightarrow \begin{cases} Z_{eq} = \sqrt{R^2+X^2} \\ \theta_{eq} = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right) < 0 \end{cases}$$

NB: Un parallelo tra una resistenza e una capacità costituisce un'impedenza OHMICO-CAPACITIVA perché la parte reale di resistenza e parte immaginaria di reattanza capacitiva.

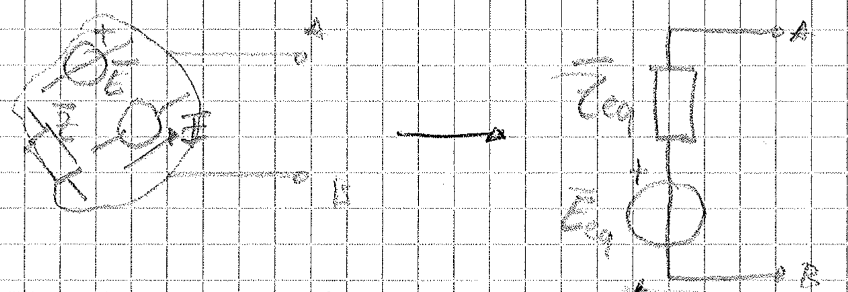
$\Rightarrow$ In questo caso $\theta_{eq} < 0$ anche $X_C < 0 \Rightarrow$ ~~θ_{eq}~~ $-\frac{\pi}{2} < \theta_{eq} < 0$

ESTENSIONE DEI TEOREMI DI RETE:

I teoremi di rete in corrente continua rimangono tali anche in corrente alternata tramite l'utilizzo della legge di Ohm generalizzata (a parte per i teoremi sulla potenza).

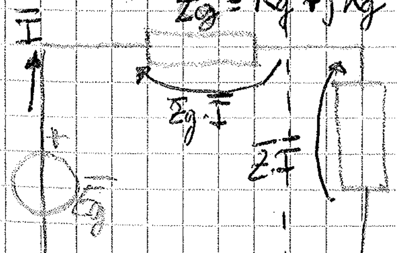


Corrente continua



Corrente alternata

MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA (in regime sinusoidale):



$\bar{Z} = R + jX$

parte resistiva consumo $P_R(t)$

parte reattiva

$P(t) = v(t) \cdot i(t)$

$i(t) = \sqrt{2}\, I \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

$\hookrightarrow \bar{I} = I e^{j\varphi}$

$P_R(t) = R \cdot i^2(t)$

$\Rightarrow$ Posso calcolare la potenza media P_m come:

$P_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P_R(t)\,dt = RI^2$ $\rightarrow$ poiché R è un termine che fa parte di $\bar{Z}$, quanto deve valere $\bar{Z}$ per massimizzare P_m, cioè di avere $\max\{P_m\}$? $\Rightarrow \boxed{\bar{Z} = ?}$

$\Rightarrow$ Applico LKT: $\bar{E}_g - \bar{Z}_g \bar{I} - \bar{Z}\bar{I} = 0$

$\hookrightarrow \bar{I} = \frac{\bar{E}_g}{\bar{Z}_g + \bar{Z}}$

Inoltre aggiungendo e sottraendo φ_I al secondo termine si ha:

$$\cos(2\omega t+\varphi_V+\varphi_I) = \cos(2\omega t+\underbrace{\varphi_V+\varphi_I}+\varphi_I-\varphi_I) = \cos(2\omega t+\varphi+2\varphi_I)$$

φ

Per cui si ha:

$$\Rightarrow \quad P(t) = VI\left[\cos(\varphi) - \cos(\underbrace{2\omega t+\varphi+2\varphi_I}) \right] \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\alpha = \varphi\ ;\ \beta = 2\omega t+2\varphi_I$$

$$\Rightarrow P(t) = VI\left[\cos\varphi - \left(\cos\varphi\cos(2\omega t+2\varphi_I) - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(2\omega t+2\varphi_I)\right)\right] =$$

$$= VI\left[\cos\varphi - \cos\varphi\cos(2\omega t+2\varphi_I) + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(2\omega t+2\varphi_I)\right] \Rightarrow$$

In definitiva:

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = \underbrace{VI\cos\varphi}_{\text{ampiezza}}\left[1-\cos(2\omega t+2\varphi_I)\right] + \underbrace{VI\operatorname{sen}\varphi}_{\text{ampiezza}}\operatorname{sen}(2\omega t+2\varphi_I)} \quad (1)$$

NB: Entrambi i termini variano con legge sinusoidale con frequenza doppia rispetto alle variabili di potenza in quanto:

$$\begin{cases} \omega' = 2\pi f' = 2\omega = 2\pi f \\ \omega = 2\pi f = \frac{\omega'}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{f' = 2f}$$

Questo vuol dire che in un periodo, le sinusoide si ripeterà due volte, o meglio che il periodo delle sinusoide è il semiperiodo delle sinusoide delle variabile di potenza.

Assumendo $\boxed{\varphi_I = 0}$:

Nella (1) compaiono due termini dipendenti dall'angolo di sfasamento φ.
Per cui può essere riscritta come somma di due termini:

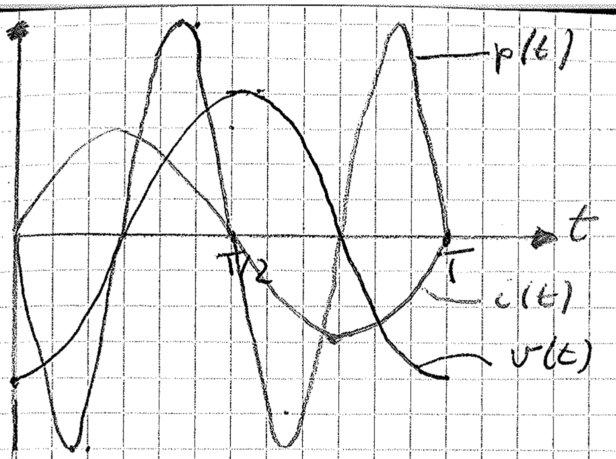
$$P(t) = P_a(t) + P_r(t)$$

dove

$$P(t) = \begin{cases} P_a(t) = VI\cos\varphi\left[1-\cos(2\omega t+2\varphi_I)\right] \\ P_r(t) = VI\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(2\omega t+2\varphi_I) \end{cases}$$

$P_a(t)$ è detta componente ATTIVA della potenza istantanea, perché è la quota di potenza associata all'effettivo scambio di potenza tra i bipoli e i circuiti. Infatti ha valor medio diverso da zero e quindi può dar luogo ad un trasferimento non nullo di energia dai generatori ai componenti.
È una potenza sempre positiva e poiché viene analizzata in convenzione utilizzatore, sarà una potenza dissipata, cioè assorbita dal bipolo e si trasforma in qualcosa di altro.

$P_r(t)$ è detta componente REATTIVA della potenza istantanea, è la componente che tiene conto degli scambi reversibili di energia tra i componenti L e C coi generatori.
Questo termine di potenza non da luogo a trasferimento di energia al componente in quanto ha valore medio nullo, poiché in istanti assorbe potenza e in istanti la trasferisce.
È associato ai bipoli di natura reattiva, cioè ai bipoli dinamici.



→ Anche qui si nota che la potenza ha frequenza doppia rispetto alle variabili i e v. Inoltre ha valore medio nullo, e poiché il termine $\sin\varphi$ è negativo, ciò implica che, assumendo la corrente come riferimento di fase, la potenza sia ceduta nel primo quarto di periodo.

• COMPONENTE INDUTTORE:

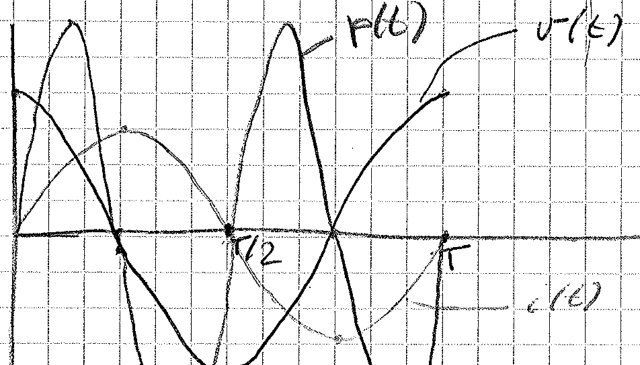
$$P(t) = VI\underbrace{\cos\varphi}_{=0}\,[1-\cos(2\omega t+2\varphi_I)] + VI\underbrace{\sin\varphi}_{=1}\sin(2\omega t+2\varphi_I)$$

Essendo componente duale del condensatore, anche in questo caso

$\boxed{\varphi = \varphi_V - \varphi_I = \frac{\pi}{2}}$ → $\varphi = \frac{\pi}{2} > 0$ ~~considerando~~

La potenza diventa: $P(t) = \begin{cases} P_a(t) = 0 \\ P_r(t) = VI\sin(2\omega t + 2\varphi_I) \end{cases}$

Prendendo come riferimento la corrente si ha:



⇒ Dal grafico si vede che:
- il valor medio della potenza è nullo, ciò è comprensibile poiché il componente è di natura reversibile e non consuma potenza
- ad ogni quarto di periodo il componente cambia segno della potenza che significa che il componente per un quarto di periodo si carica assorbendo potenza dall'esterno (poiché la i(t) sta crescendo), mentre nel quarto successivo si scarica cedendo potenza all'esterno;
- il termine $\sin\varphi$ è positivo per cui, assumendo la corrente come riferimento di fase la potenza sarà assorbita nel primo quarto di periodo.

VALUTAZIONE DELL'ENERGIA:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} P_a(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t} VI\cos\varphi\,[1-\cos(2\omega t+2\varphi_I)]\,dt = \int_{-\infty}^{t} VI\cos\varphi\,dt -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} VI\cos\varphi\cos(2\omega t+2\varphi_I)\,dt = VI\cos\varphi\cdot t - \frac{VI\cos\varphi}{2\omega}\cdot\sin(2\omega t+2\varphi_I)$$

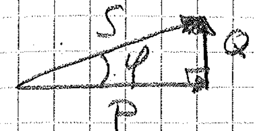
→ È la somma di due contributi, uno lineare e uno sinusoidale:

$W_1(t) = VI\cos\varphi\cdot t$ → termine lineare che rappresenta l'equazione di una retta con $q=0$

$W_2(t) = \frac{VI\cos\varphi}{2\omega}\sin(2\omega t+2\varphi_I)$ → detta POTENZA FLUTTUANTE poiché ha integrale nel periodo nullo.
→ $W_2(kt) = 0$

TRIANGOLO DELLE POTENZE:

Date P, Q ed S posso costruire il triangolo delle potenze



Dalla geometria si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= S\cos\varphi = VI\cos\varphi \\ Q &= S\sin\varphi = VI\sin\varphi \end{aligned}}$$

Per convenzione $Q>0$ si disegna con la freccia verso l'alto, $Q<0$ con la freccia verso il basso.

$$\Rightarrow S = \sqrt{P^2+Q^2} = \sqrt{(VI)^2\cos^2\varphi + (VI)^2\sin^2\varphi} = \sqrt{(VI)^2} = VI$$

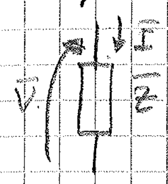
$$\rightarrow \boxed{S = VI}$$

Inoltre per l'ampiezza ($\hat{A}$) di una sinusoide si ha:

se $\hat{V} = \sqrt{2}V \rightarrow \begin{cases} P = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\cos\varphi \\ Q = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\operatorname{sen}\varphi \end{cases} \rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}}$ → dove $\hat{V}$ e $\hat{I}$ sono le ampiezze quindi delle due sinusoidi di potenza.

Posso scrivere S in funzione di I o in funzione di V:

- in funzione della corrente:



$$\begin{cases} \bar{S} = \bar{V}\cdot\bar{I}^* \\ \bar{V} = \bar{Z}\bar{I} \end{cases} \rightarrow \bar{S} = \bar{Z}\cdot\bar{I}\cdot\bar{I}^* = \bar{Z}\cdot I^2 = (R+jX)\cdot I^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{S} = RI^2 + jXI^2} \begin{matrix} \nearrow P = RI^2 \\ \searrow Q = XI^2 \end{matrix}$$

→ NB: Q può essere > o < di 0 a seconda del segno di X.

- in funzione della tensione:

$$\begin{cases} \bar{S} = \bar{V}\bar{I}^* \\ \bar{V} = \bar{Z}\bar{I} \rightarrow I = \frac{V}{Z} \end{cases} \rightarrow \bar{S} = \bar{Z}\cdot I^2 \rightarrow \bar{S} = \bar{Z}\cdot\left(\frac{V}{Z}\right)^2 = (R+jX)\cdot\frac{V^2}{Z^2} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{S} = R\frac{V^2}{Z^2} + jX\frac{V^2}{Z^2}}$$

$$\begin{cases} P = \frac{V^2}{Z^2}\cdot R = \frac{V^2}{Z}\cdot\frac{R}{Z} = \frac{V^2}{Z}\cos\varphi \\ Q = \frac{V^2}{Z^2}\cdot X = \frac{V^2}{Z}\cdot\frac{X}{Z} = \frac{V^2}{Z}\operatorname{sen}\varphi \end{cases} (1)$$

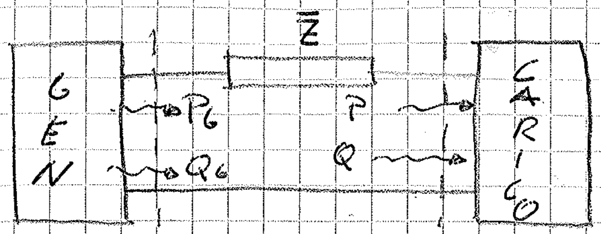
Ma sappiamo anche che: $S = \frac{V^2}{Z}$; $\begin{matrix} P = S\cos\varphi \\ Q = S\sin\varphi \end{matrix}$ (2)

→ mettendo insieme le relazioni (1) e (2) si ottiene:

se $\bar{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi} \rightarrow \begin{matrix} R = Z\cos\varphi \\ X = Z\operatorname{sen}\varphi \end{matrix} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi = \frac{R}{Z} \\ \sin\varphi = \frac{X}{Z} \end{matrix}}$

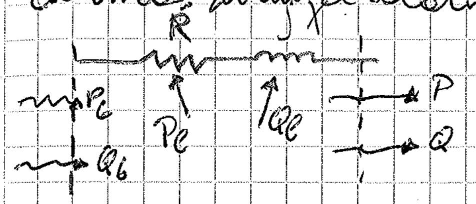
$$\Rightarrow \begin{cases} S = VI \\ \bar{V} = \bar{Z}\cdot\bar{I} \rightarrow \text{vale anche: } V = ZI \rightarrow I = \frac{V}{Z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \frac{V^2}{Z}}$$

RENDIMENTO DI TRASMISSIONE:



Nella pratica i generatori sono collegati ai carichi mediante linee di trasmissione. In teoria si vorrebbe che queste linee di collegamento fossero dei corto-circuiti, componenti quindi ininfluenti sul circuito.
Invece le linee presentano una certa impedenza al passaggio della corrente tra i generatori e i carichi. Questa impedenza dipende quindi sia dalla resistenza ohmica della linea sia da impedenze legate ai campi elettrici e magnetici che circondano la linea.
Quando la linea è percorsa da corrente la sua impedenza fa sì che la tensione sui carichi sia diversa da quella dei generatori, per cui si dovrà tener conto del rendimento.

Poiché la linea di trasmissione trasporta la potenza dal generatore al carico, sarà soggetta a un rendimento energetico dovuto al fatto che una parte della potenza in transito viene dissipata nella resistenza di linea, per cui ci saranno delle perdite di potenza lungo la linea (P_ℓ, Q_ℓ)



Se P_ℓ e Q_ℓ sono le perdite di potenza, per il teorema di Boucherot si ha:

$$\begin{cases} P_G = P_\ell + P \\ Q_G = Q_\ell + Q \end{cases}$$

→ Il RENDIMENTO DI TRASMISSIONE viene definito come la potenza in uscita dalla linea diviso quella in ingresso:

$$\boxed{\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P}{P_G} = \frac{P}{P_\ell + P}}$$

dove P_ℓ sono le perdite di potenza lungo la linea, cioè la potenza dissipata.

NB: I rendimenti di solito sono molto elevati, $\sim 0,9$ proprio per la facilità di trasporto della potenza nei sistemi elettrici e ciò permette di disaccoppiare il luogo di produzione dell'energia dal suo posto di utilizzo.

Ma Q è ininfluente nel rendimento?

No, la potenza reattiva è un indicatore dei flussi di potenza che vengono reversibilmente scambiati tra i generatori e i bipoli dinamici.
La reversibilità di questi scambi non vuol dire che non hanno influenza sul sistema, poiché a causa degli elementi dissipativi, questi flussi di potenza oltre ad essere inutili sono anche dannosi.
Infatti per mantenere il sistema in regime periodico si deve prelevare energia da una fonte esterna e ricaricare il sistema, perché la corrente per fluire tra il generatore e l'induttore deve passare attraverso il resistore dissipando ad ogni ciclo:

$$\Delta W = \int R i^2 dt$$

quindi se si vuole mantenere il sistema in evoluzione periodica, il generatore dovrà fornire ad ogni ciclo l'energia dissipata sul resistore.

Infatti se consideriamo come dati V, P, Q, la corrente I vale:

↓

DOPO IL RIFASAMENTO: Il carico con il condensatore ora assorbirà P' e Q':

$P' = P$

$Q' = Q + Q_c$

→ il condensatore dà contributo solo di potenza reattiva e di segno minore di 0 → $Q_c < 0$

Un rifasamento ideale dovrebbe essere $\cos\varphi' = 1$, ma ciò non andrebbe bene per altri motivi.
Per cui di solito si utilizza un rifasamento con $\cos\varphi' = 0{,}9$

Con $\cos\varphi = 0{,}9$, $\tan\varphi' = 0{,}484$

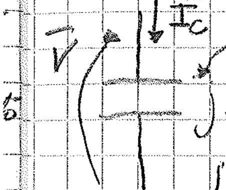
Per il sistema rifasato si ha: $\frac{Q'}{P'} = \tan\varphi' = \frac{Q'}{P} \rightarrow \boxed{Q + Q_c = P\tan\varphi'}$

Poiché noi vogliamo calcolare quanta potenza reattiva è richiesta al condensatore per $\cos\varphi' = 0{,}9$ si ha:

$$Q_c = P\tan\varphi' - Q = P\tan\varphi' - P\tan\varphi = P(\tan\varphi' - \tan\varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_c = P(\tan\varphi' - \tan\varphi)}$$

Nota la potenza reattiva richiesta al condensatore si può calcolare il valore di capacità richiesto:



$\rightarrow X = -\frac{1}{\omega C}$

$\begin{cases} \bar{V} = \bar{Z}\bar{I} \\ \bar{V}_c = jX \cdot \bar{I}_c \end{cases}$

La potenza complessa per il condensatore vale:

$$\bar{S}_c = \bar{V}\bar{I}_c^* = 0 + jQ_c$$

$$\Rightarrow |\bar{S}_c| = S_c = |Q_c| = V_c \cdot I_c \quad (1)$$

$$I_c = \frac{|\bar{V}_c|}{|jX|} = \frac{V_c}{\left|-\frac{1}{\omega C}\right|} = \omega C V_c \quad (2)$$

→ Da (1) e (2):

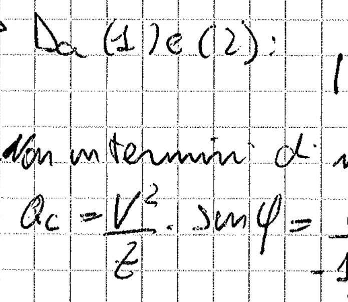
$$|Q_c| = V_c \cdot (V_c \cdot C \cdot \omega) = V_c^2 \omega C \Rightarrow \boxed{C = \frac{|Q_c|}{\omega V_c^2}}$$

Non in termini di modulo si ha:

$$Q_c = \frac{V^2}{Z} \cdot \sin\varphi = \frac{V^2}{-1/\omega C} = -\omega C V^2 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{Q_c}{\omega V_c^2}}$$

→ Capacità necessaria a ottenere rifasamento di $\cos\varphi' = 0{,}9$

• DIAGRAMMA FASORIALE delle correnti nel sistema rifasato:



$\bar{I}$ è in ritardo di un angolo φ rispetto a $\bar{V}$ e $\bar{I}'$ di un angolo φ'.

Come si vede, la parte reale di $\bar{I}$ è uguale a quella di $\bar{I}'$ in quanto la P è uguale a P'.

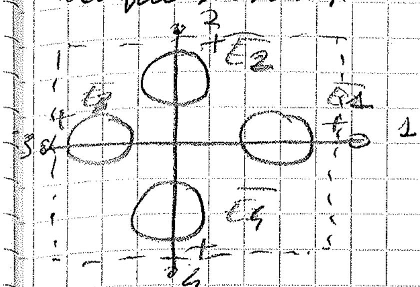
Quindi si ha: $I\cos\varphi = I'\cos\varphi'$ → moltiplicando per V:

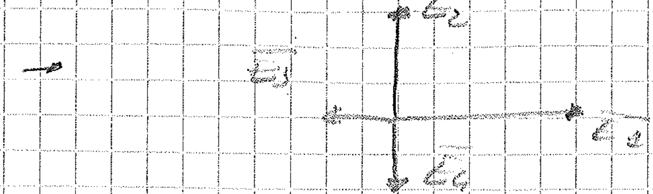
$$VI\cos\varphi = VI'\cos\varphi' \rightarrow P = P'$$

Inoltre $I' = I\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}$

→ se $\cos\varphi' > \cos\varphi$ allora $I' < I$, quindi diminuiscono le perdite sulla linea che ora $P_e = R \cdot I'^2$, quindi aumento di rendimento

Esempio per $N=4$:





Un sistema di generatori polifase è detto PURO se la somma dei fasori dei suoi generatori è nulla, cioè $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \overline{E}_k = 0}$

→ Nel caso $N=4$ i vettori devono costruire un rettangolo

Un sistema di generatori POLIFASE si dice SIMMETRICO se i moduli dei fasori dei suoi generatori sono tutti uguali tra loro, anche hanno stesso ampiezza!

→ Si dimostra facilmente che un sistema simmetrico è anche puro.

Se $N=3$ il sistema è detto TRIFASE

Per un sistema trifase l'angolo di sfasamento tra i generatori è:

$\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3} = 120°}$ ⇒ $e_1(t) = \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t)$

$e_2(t) = \sqrt{2} E_2 \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi)$

$e_3(t) = \sqrt{2} E_3 \sin(\omega t + \frac{4}{3}\pi)$

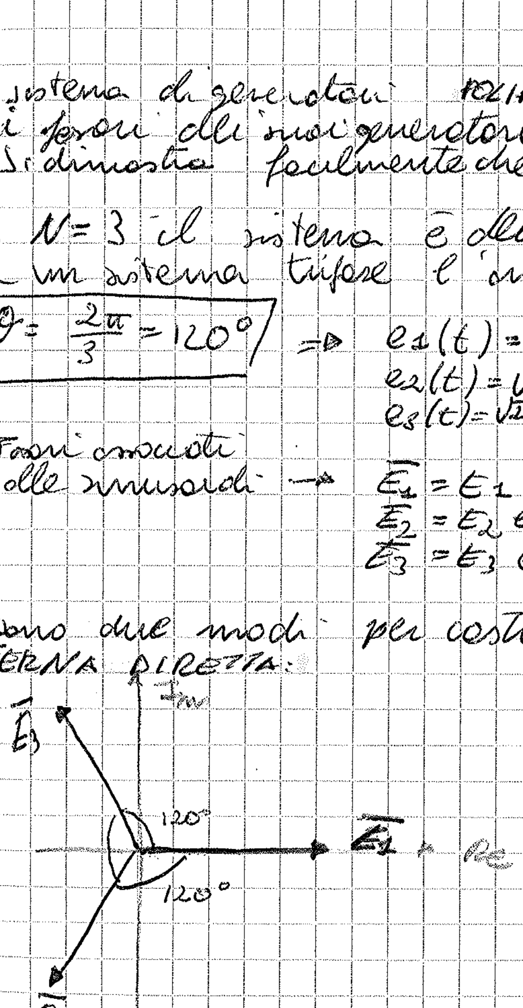
→ Fasori associati alle sinusoidi → $\overline{E_1} = E_1$

$\overline{E_2} = E_2 e^{j\frac{2}{3}\pi}$

$\overline{E_3} = E_3 e^{j\frac{4}{3}\pi} = E_3 e^{-j\frac{2}{3}\pi}$

Ci sono due modi per costruire un sistema trifase simmetrico:

- TERNA DIRETTA:



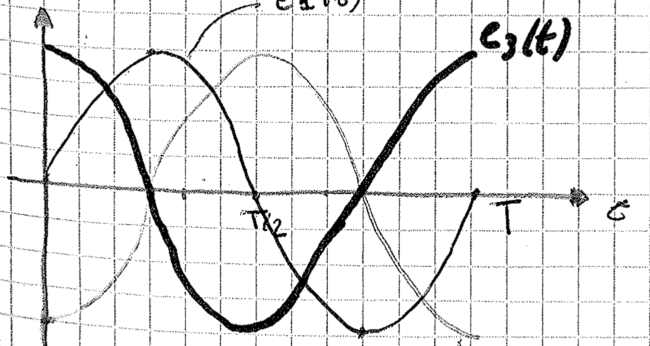
$|\overline{E_1}| = |\overline{E_2}| = |\overline{E_3}| = E$

$\overline{E_1} = E$

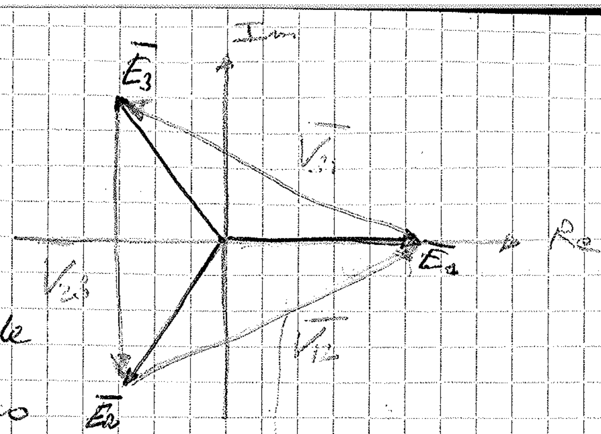
$\overline{E_2} = E e^{-j\frac{2}{3}\pi}$

$\overline{E_3} = E e^{j\frac{2}{3}\pi}$

→ $\overline{E_3}$ è in anticipo di 120° rispetto a $\overline{E_1}$ ed $\overline{E_2}$ è in ritardo di 120° rispetto a $\overline{E_1}$

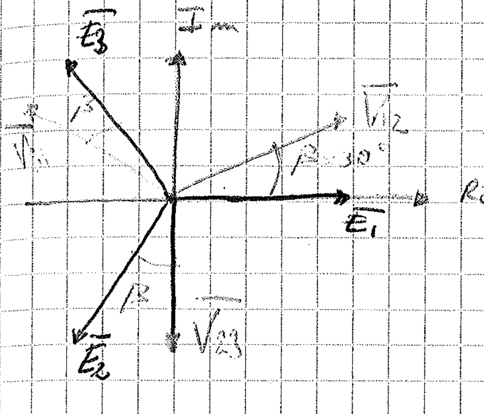


$$\begin{cases} \overline{V_{12}} = \overline{E_1} - \overline{E_2} \\ \overline{V_{23}} = \overline{E_2} - \overline{E_3} \\ \overline{V_{31}} = \overline{E_3} - \overline{E_1} \end{cases}$$

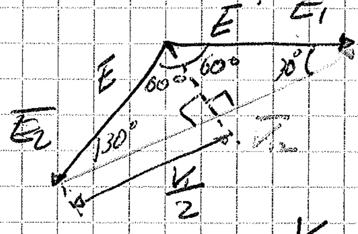


Per costruzione geometrica si vede che se le tensioni di fase formano un sistema simmetrico anche le tensioni concatenate sono simmetriche:

$$|\overline{V_{12}}| = |\overline{V_{23}}| = |\overline{V_{31}}| = V \rightarrow \overline{V_{12}} + \overline{V_{23}} + \overline{V_{31}} = 0$$



Esiste anche una relazione tra i moduli dei due sistemi di tensione. Considerando uno dei triangoli isosceli si ha:



$$\rightarrow \frac{V}{2} = E \operatorname{sen}(60°) = = \frac{E\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{2} = \frac{E\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{V = \sqrt{3}E}$$

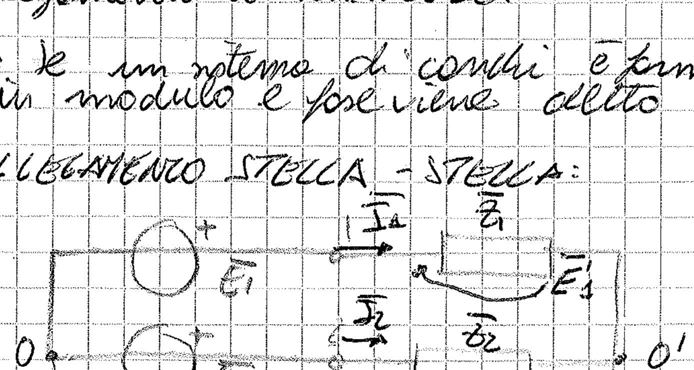
NB: È un legame tra valori efficaci, non tra fasori.
Le tensioni concatenate vengono privilegiate nel sistema trifase sia perché sono sempre direttamente misurabili, sia perché, essendo più elevate in valore assoluto, definiscono in maniera conservativa il livello di tensione del sistema.

CARICHI TRIFASE:

Il sistema di generatori trifase viene solitamente accoppiato ad un sistema di carichi ripartiti anch'essi in tre sezioni dette fasi. I carichi presenti su queste fasi sono impedenze opportunamente collegate.
Ci sono due tipi di collegamento: il collegamento a STELLA ed il collegamento a TRIANGOLO.

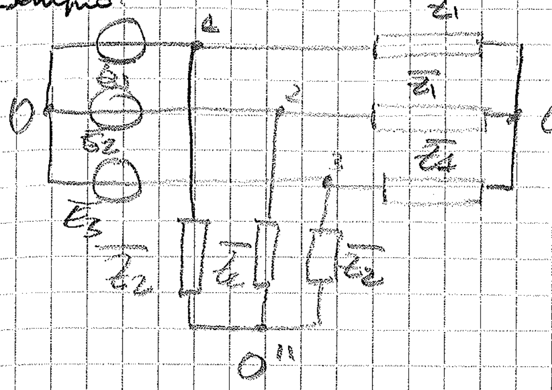
NB: Se un sistema di carichi è formato da tre impedenze uguali in modulo e fase viene detto ~~[illegible]~~ EQUILIBRATO.

• COLLEGAMENTO STELLA - STELLA:



→ Si vuole determinare le correnti che scorrono nelle impedenze di carico.
In questo caso il sistema risulta formato tra tre rami in parallelo collegati tra i centri stella dei generatori e dei carichi.
→ Per determinare $V_{0'0}$ si utilizza allora il teorema di Millman

Esempio:



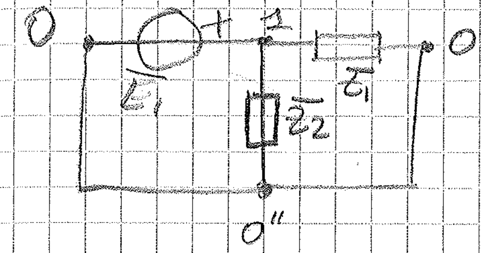
NB: I due carichi trifase sono in // tra loro.

Per le ipotesi viste prima: $\overline{V_{O'O}}=0$

$\overline{V_{O''O}}=0$

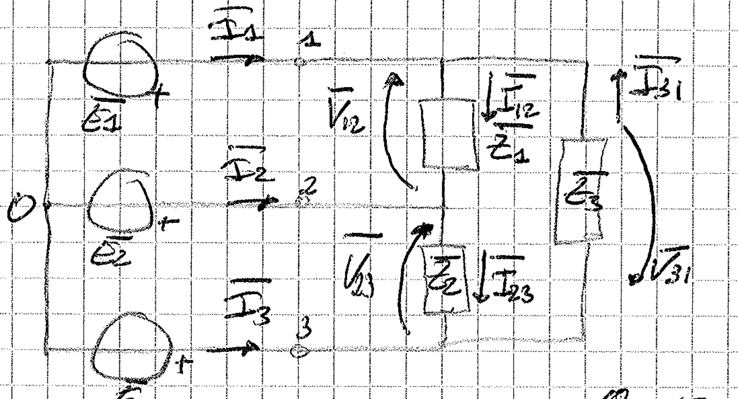
$\Rightarrow \overline{V_{O''O'}}=0$

Il circuito monofase equivalente sarà:



con $\overline{Z}_1 // \overline{Z}_2$

COLLEGAMENTO STELLA-TRIANGOLO:



→ le impedenze del carico sono sottoposte alle tensioni concatenate (che si conoscono perché sono misurabili) per cui si ha subito:

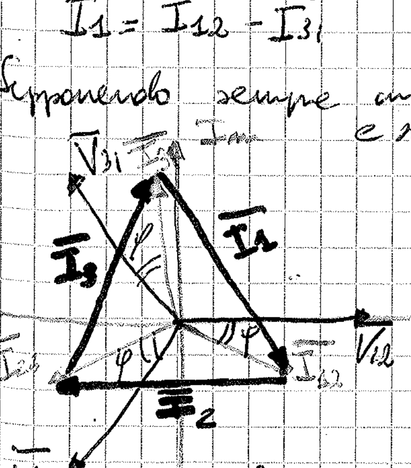
$$\boxed{\overline{I}_{12}=\frac{\overline{V}_{12}}{\overline{Z}_1}\ ,\quad \overline{I}_{23}=\frac{\overline{V}_{23}}{\overline{Z}_2}\ ;\quad \overline{I}_{31}=\frac{\overline{V}_{31}}{\overline{Z}_3}}$$

Queste correnti sono dette CORRENTI DI FASE.

Però queste non sono le correnti che circolano nelle linee di collegamento tra i generatori e i carichi.
Queste ultime, dette CORRENTI DI LINEA si ricavano tramite le LKC applicate ad ogni nodo del triangolo:

$$\overline{I}_1=\overline{I}_{12}-\overline{I}_{31}\qquad \overline{I}_2=\overline{I}_{23}-\overline{I}_{12}\qquad \overline{I}_3=\overline{I}_{31}-\overline{I}_{23}$$

Supponendo sempre una terna simmetrica diretta graficamente si ha:
e supponendo un CARICO EQUILIBRATO



sotto queste ipotesi $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$ e $\overline{I}_3$ formano un triangolo equilatero:

$$\overline{I}_1+\overline{I}_2+\overline{I}_3=0$$

Per costruzione si ha: $|\overline{I}_1|=|\overline{I}_2|=|\overline{I}_3|=I_L$ e
per definizione: $|\overline{I}_{12}|=|\overline{I}_{23}|=|\overline{I}_{31}|=I_F$

le CORRENTI DI LINEA arrivano dalla linea elettrica

le CORRENTI DI FASE circolano effettivamente nelle impedenze

Anche qua si ha che: $P = P_{fase1} + P_{fase2} + P_{fase3}$

$Q = Q_{fase1} + Q_{fase2} + Q_{fase3}$

Per la fase generica:

$P_{fase\,k} = V I_F \cdot \cos\varphi$

$Q_{fase\,k} = V I_F \sin\varphi$

Inoltre $I_F = I/\sqrt{3}$

$\Rightarrow P = 3 V I_F \cos\varphi = 3V \frac{I}{\sqrt{3}} \cos\varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{P = \sqrt{3} V I \cos\varphi}$ [W]

$Q = 3 V I_F \sin\varphi = 3V \frac{I}{\sqrt{3}} \sin\varphi \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{Q = \sqrt{3}\, V I \sin\varphi}$ [VAR]

NB: Rispetto ai morsetti esterni e alle grandezze misurabili (V e I) di un carico a stella o a triangolo la P e la Q sono le stesse nei due casi perché V e I sono due parametri esterni, direttamente misurabili.

$\Rightarrow \bar{S} = P + jQ \qquad |\bar{S}| = S = \sqrt{P^2+Q^2} = \sqrt{(\sqrt{3}VI)^2\cos^2\varphi + (\sqrt{3}VI)^2\sin^2\varphi} =$

$\Rightarrow \boxed{S = \sqrt{3} V I}$ [VA] $\rightarrow$ NB: sempre se si parla di carico equilibrato

VANTAGGI e SVANTAGGI SISTEMA TRIFASE:

Il sistema trifase ha diversi vantaggi che lo rendono più efficiente nell'alimentazione dei carichi industriali, ma comunque non è adatto all'alimentazione di tutti i tipi di carichi.

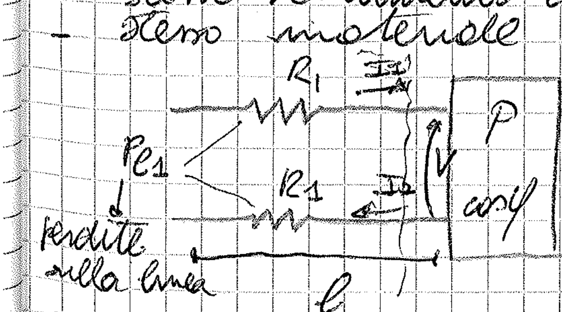
Tra i vantaggi ha: - maggiore efficienza nella trasmissione dell'energia;
- costanza della componente attiva della potenza istantanea.
- flessibilità nelle trasformazioni elettromeccaniche dell'energia.

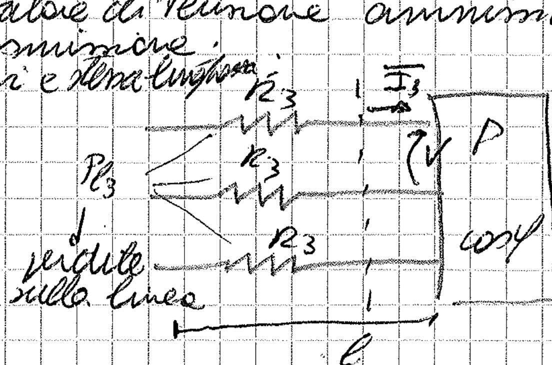
Tra gli svantaggi ha che l'alimentazione dei carichi monofase non è efficiente.

→ CONFRONTO PARITARIO SISTEMA TRIFASE - SISTEMA MONOFASE:

Confrontiamo due sistemi di trasmissione della potenza effettuati mediante linee monofase e trifase.

Per effettuare un confronto paritario bisogna che:
- le 2 linee devono alimentare lo stesso carico;
- si considera il massimo valore di tensione ammissibile;
- stesso rendimento di trasmissione.
- stesso materiale dei cavi e stessa lunghezza.





• Monofase: $P = V I_1 \cos\varphi \rightarrow I_1 = \frac{P}{V\cos\varphi}$

I cavi presenteranno una resistenza all'andata e una al ritorno: per i cavi ρ, S_1, l

$R_1 = \frac{\rho \cdot l}{S_1} \rightarrow P_{l1} = R_1 I_1^2 + R_1 I_1^2 = (2R_1) I_1^2 = \boxed{2\frac{\rho l}{S_1} \cdot \frac{P^2}{V^2\cos^2\varphi} = P_{l1}}$

→ NB: il secondo termine si annulla perché sono 3 sinusoidi che istante per istante danno somma nulla, perché sono 3 sinusoidi sfasate di 120° che si compensano.

→ $Pa(t) = 3EI\cos\varphi$ → è un termine costante

$Pr(t) = 0$

→ $\boxed{P(t) = Pa(t) + Pr(t) = 3EI\cos\varphi}$ →

→ Sulla linea di trasmissione il flusso di potenza complessivo che va da generatore a carico è costante, non fluttuante (come nel sistema monofase) perché ho $Pr(t)=0$ in quanto i 3 contributi si compensano.

NB: Questo si ha perché le 3 fasi si compensano, ma non vuol dire che lo scambio reattivo è nullo perché ang nella singola fase lo scambio reattivo c'è.

■ Per quanto riguarda invece lo svantaggio è che esso è troppo complesso dal punto di vista impiantistico per l'alimentazione di carichi di utenze non industriali come impianti civili. Stessa l'alimentazione da parte di un sistema trifase di carichi monofase può dar luogo a problemi se il carico risulta squilibrato sulle tre fasi e ciò è inaccettabile per la sicurezza degli impianti e deve essere evitato.

→ Una modifica che evita il problema citato, ma che riduce in parte gli effetti positivi del sistema trifase, è costituita dall'aggiunta di un quarto filo al sistema chiamato FILO DI NEUTRO. Lo scopo del filo di neutro è quello di annullare la tensione tra i centri stella, in questo modo ogni impedenza vede sempre applicata la tensione del generatore di fase indipendentemente dal valore degli altri carichi.

RISPOSTA IN FREQUENZA:

Il comportamento del circuito cambia in funzione della pulsazione dei generatori applicati.
I circuiti lineari presentano valori di impedenza che dipendono dal valore di pulsazione applicata. Infatti per l'impedenza del condensatore e dell'induttore si ha: $\overline{Z_C} = -\dfrac{j}{\omega C}$; $\overline{Z_L} = j\omega L$

per cui il modulo dell'impedenza del condensatore diminuisce all'aumentare di ω, mentre per l'induttore aumenta al crescere di ω.
Con risposta in frequenza si intende quindi lo studio dell'andamento della variabile di rete in un circuito in funzione della frequenza del segnale in ingresso. Si considera sempre la risposta di regime alle diverse pulsazioni tralasciando ogni fenomeno transitorio.

→ La risposta in frequenza è molto importante per l'analisi di segnali che contengono più pulsazioni, maggiori costituiti da una sommatoria di segnali sinusoidali:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{2}A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

NB: Dato che i circuiti in studio sono lineari, la sommatoria di ingressi, grazie al teorema di sovrapposizione, può essere ottenuta sovrapponendo le risposte di singoli ingressi sinusoidali.

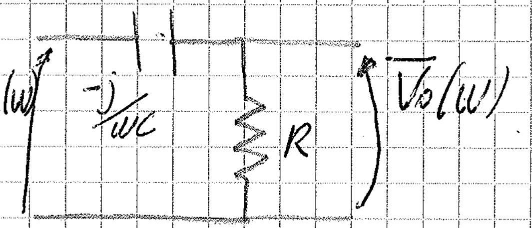
Normalmente la funzione di trasferimento viene rappresentata su due diagrammi: - il primo rappresenta il modulo di $\bar{H}(\omega)$ al variare della pulsazione angolare;
- il secondo rappresenta la fase di $\bar{H}(\omega)$ al variare della pulsazione angolare

NB: Insieme i due diagrammi contemporaneamente prendono il nome di DIAGRAMMA DI BODE.
→ In questo caso il modulo di $\bar{H}(\omega)$ diminuisce al aumentare di ω mentre la fase aumenta, tendendo a $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \to \infty$

NB: Nella forma d'onda della tensione di ingresso (V_i), le ampiezze delle due sinusoidi sono uguali, mentre nella forma d'onda in uscita, grazie alla maggior impedenza mostrata dal dipolo, la forma d'onda a pulsazione più elevata è fortemente attenuata.
→ Il comportamento del circuito quindi viene detto passa-basso, grazie alla sua proprietà di lasciare praticamente inalterati i segnali a frequenza più bassa attenuando invece fortemente le componenti a frequenza elevata (rumore). Questo comportamento può essere spiegato fisicamente con la diminuzione dell'impedenza del condensatore a frequenze alte

FILTRO RC - PASSA- ALTO:

In questo caso il segnale d'uscita viene prelevato ai capi del resistore → si ha un comportamento duale rispetto al passa basso.



Applicando di nuovo il partitore di tensione posso calcolare ~~il rapporto tra~~ ~~fasori~~ $V_o(\omega)$ in funzione di $V_i(\omega)$:

$$\bar{V}_o(\omega) = \frac{R}{R - j\frac{1}{\omega C}} \cdot \bar{V}_i(\omega)$$

Da cui si ha: $$\bar{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_o(\omega)}{\bar{V}_i(\omega)} = \frac{R}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\omega RC}{\omega RC - j} = \frac{\omega/\omega_0}{\omega/\omega_0 - j}$$

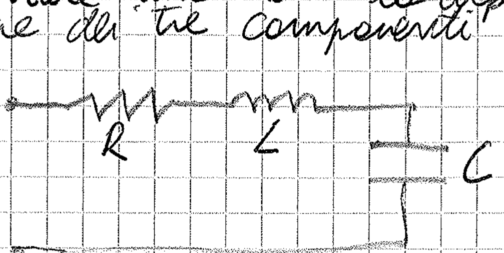
Per cui per il modulo e la fase si ha: $$|\bar{H}(\omega)| = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\angle \bar{H}(\omega) = \mathrm{arctg}(\omega_0/\omega)$$

NB: Questa volta ad essere ~~inalterata~~ attenuata è la forma d'onda a frequenza inferiore mentre risulta abbastanza inalterata quella a frequenza maggiore.

RISONANZA:

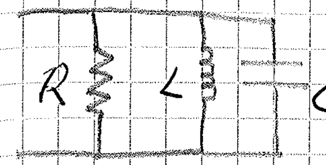
Il fenomeno della risonanza si verifica nei circuiti in cui sono contemporaneamente presenti termini capacitivi ed induttivi.
→ Si vuole analizzare la dipendenza dell'impedenza equivalente della serie dei tre componenti in funzione della frequenza.



→ L'impedenza equivalente è:

$$\boxed{\bar{Z}(\omega) = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

ANTI RISONANZA:



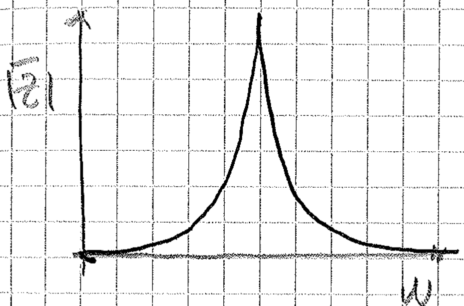
Si vuole analizzare la dipendenza dell'impedenza equivalente della serie dei tre componenti in funzione della frequenza:

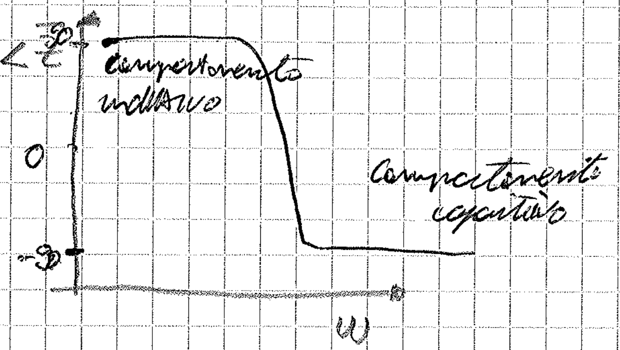
NB: Il circuito serie RLC ammetteva un minimo di impedenza in prossimità della pulsazione di risonanza

Il circuito RLC parallelo ammette in corrispondenza dello stesso valore un minimo di ammettenza e quindi un massimo di impedenza. L'impedenza equivalente è:

$$\Rightarrow \bar{Z}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} - \frac{\omega C}{j}} = \boxed{\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j}\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)} = \bar{Z}(\omega)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar{Z}(\omega)} = \boxed{\bar{Y}(\omega) = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$





Anche in questo caso le condizioni di risonanza sono:

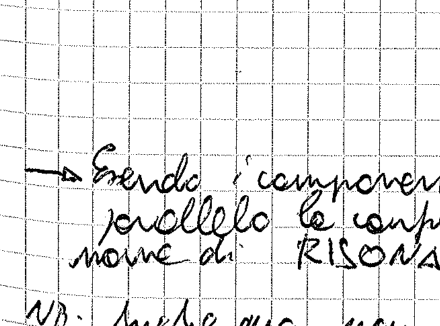
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \rightarrow$$ PULSAZIONE DI RISONANZA

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

→ In queste condizioni il circuito R-L-C parallelo si comporta come fosse solo la resistenza perché il modulo dell'impedenza risulta pari ad R e l'angolo caratteristico (fase) dell'impedenza è nullo.

→ Essendo i componenti connessi in parallelo la configurazione prende il nome di RISONANZA PARALLELO.

NB: Anche qui non significa che l'induttanza e la capacità siano ininfluenti.

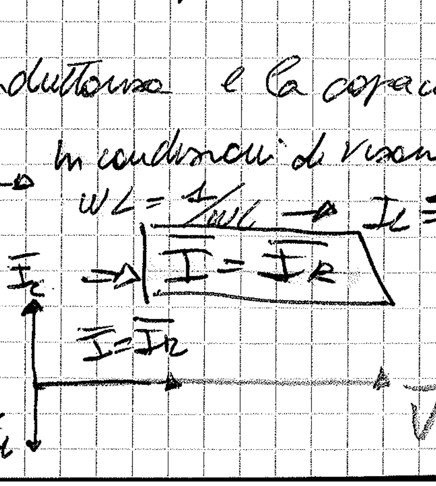


$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{(-j/\omega C)}$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{j\omega L}$$

→ In condizioni di risonanza $\omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \bar{I}_L = \bar{I}_C \Rightarrow \boxed{\bar{I} = \bar{I}_R}$



Capitolo 1

Calcolo di resistenze equivalenti

1.1 Resistenze 1

Con riferimento alla Fig. 1.1 determinare la resistenza equivalente rispetto alla coppia di terminali A-B (R_{AB}).

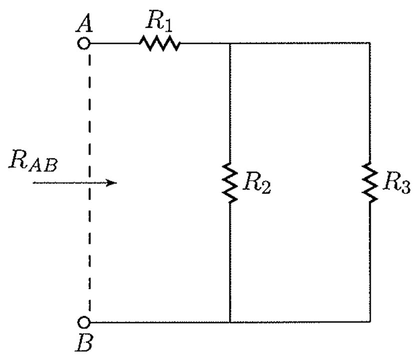


Figura 1.1: Figura dell'esercizio 1.1

DATI: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 9\ \Omega$.

RISULTATI: $R_{AB} = 10.9\ \Omega$.

1.2 Resistenze 2

Con riferimento alla Fig. 1.2 determinare la resistenza equivalente rispetto alla coppia di terminali A-B (R_{AB}).

1.4 Resistenze 4

Con riferimento alla Fig. 1.4 determinare la resistenza equivalente rispetto alla coppia di terminali A-B (R_{AB}).

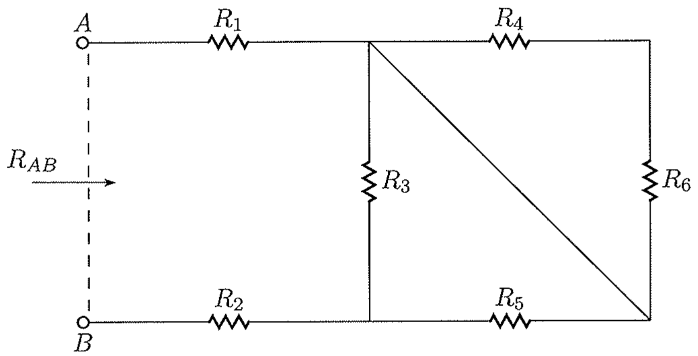


Figura 1.4: Figura dell'esercizio 1.4

DATI: $R_1 = R_2 = 10$ mΩ, $R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 20$ mΩ.

RISULTATI: $R_{AB} = 30$ mΩ.

1.5 Resistenze 5

Con riferimento alla Fig. 1.5 determinare la resistenza equivalente rispetto alla coppia di terminali A-B (R_{AB}).

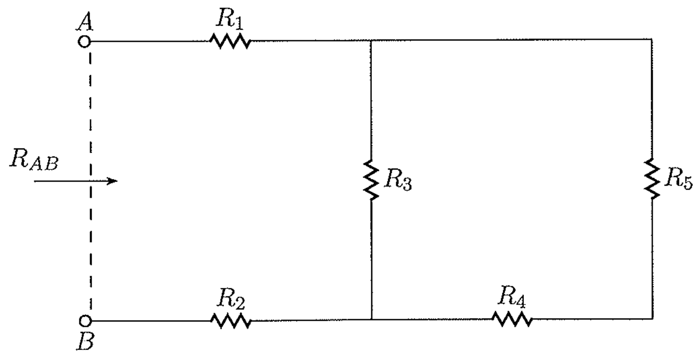


Figura 1.5: Figura dell'esercizio 1.5

DATI: $R_1 = R_2 = 5$ Ω, $R_3 = 20$ Ω, $R_4 = 6$ Ω, $R_5 = 4$ Ω.

RISULTATI: $R_{AB} = 16.67$ Ω.

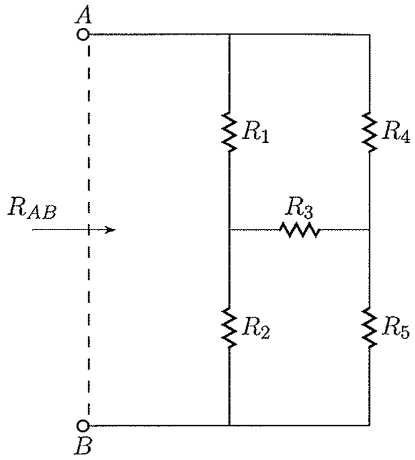


Figura 1.7: Figura dell'esercizio 1.7

DATI: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 30\ \Omega$.

RISULTATI: $R_{AB} = 30\ \Omega$.

1.8 Resistenze 8

Con riferimento alla Fig. 1.8 determinare la resistenza equivalente rispetto alla coppia di terminali A-B (R_{AB}), e C-D (R_{CD}).

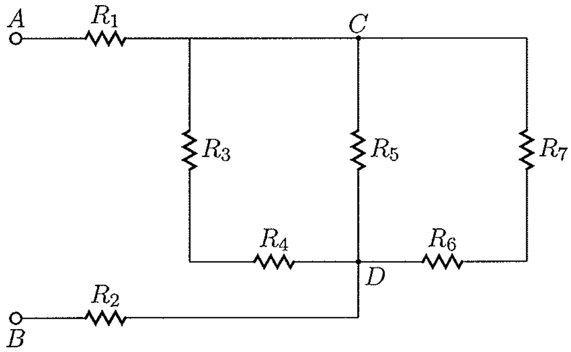


Figura 1.8: Figura dell'esercizio 1.8

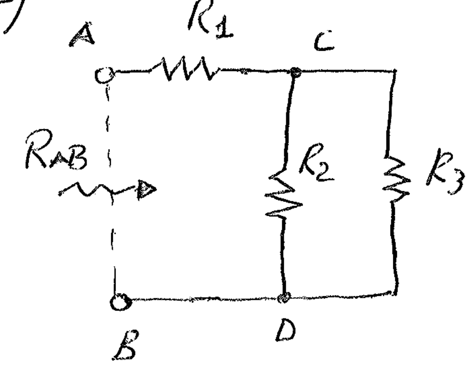
DATI: $R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \text{m}\Omega$, $R_4 = 20\ \text{m}\Omega$, $R_5 = 30\ \text{m}\Omega$, $R_6 = 10\ \text{m}\Omega$, $R_7 = 20\ \text{m}\Omega$.

RISULTATI: $R_{AB} = 30\ \text{m}\Omega$, $R_{CD} = 10\ \text{m}\Omega$.

ESERCITAZIONI ELETTROTECNICA

ESERCITAZIONE 1
(CALCOLO DI RESISTENZE EQUIVALENTI)

1.1)



DATI:

$R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 1\,\Omega$

$R_3 = 9\,\Omega$

Determinare la resistenza equivalente rispetto ai terminali A–B (R_{AB}?)?

Il terminale D coincide con il terminale B poiché tra essi c'è un cortocircuito.

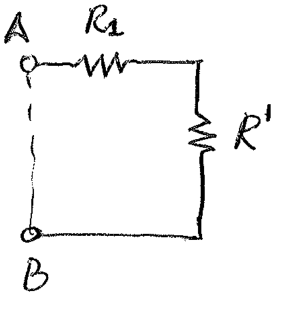
R_2 e R_3 risultano in parallelo:

$$R' = R_2 \,//\, R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{9}{10} = 0{,}9\,\Omega$$

NB: Quando si fa il parallelo tra due resistenze, la resistenza equivalente risulta sempre minore o uguale alla ~~...~~ più piccola delle due resistenze:

$$R' \leq \min\{R_2, R_3\}$$

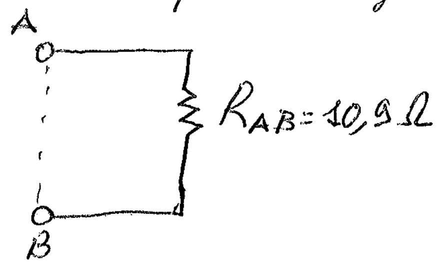
Con $R_2 \,//\, R_3$ il circuito equivalente risulta:



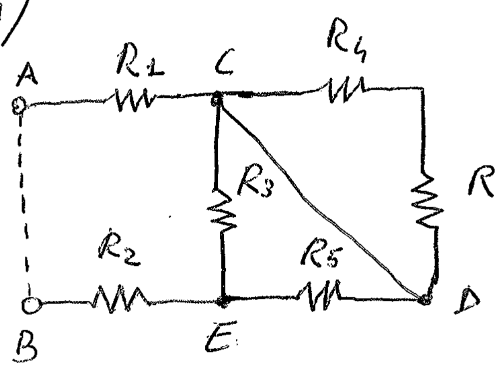
→ In questo modo R_1 e R' sono in SERIE, per cui si ha:

$$\boxed{R_{AB} = R_1 + R' = 10{,}9\,\Omega}$$

Il circuito equivalente finale risulta:



1.4)



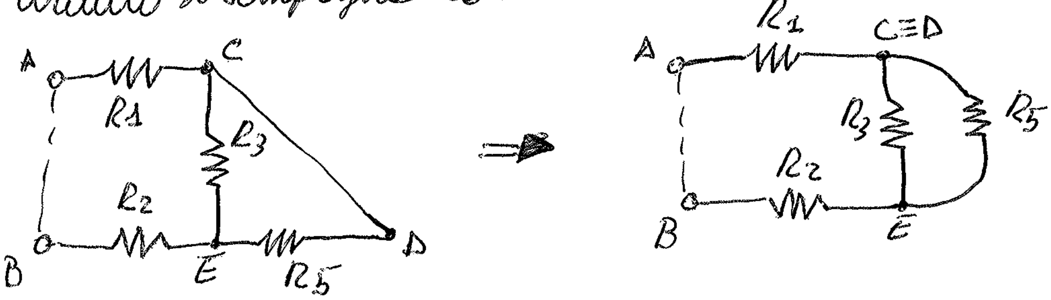
DATI:

$R_1 = R_2 = 10\ m\Omega$

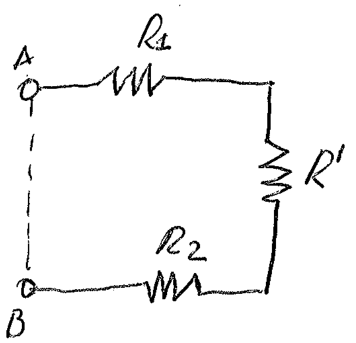
$R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 20\ m\Omega$

Determinare la resistenza equivalente R_{AB}?

Tra C e D c'è un cortocircuito, quindi $C \equiv D$. Il cortocircuito vuol dire anche $R = 0$.
In questo modo R_4 ed R_6 (che sono in serie) sono in parallelo con il cortocircuito, per cui risulta $R = 0$. Tutto quello che è a destra del cortocircuito lo elimino.
Il circuito si semplifica come:



$$R_3 // R_5 = R' = \frac{R_5 \cdot R_3}{R_5 + R_3} = 10\ m\Omega$$

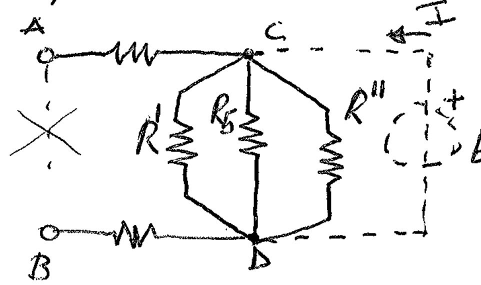


R_1, R_2 e R' sono in serie, quindi R_{AB}:

$$\boxed{R_{AB} = R_1 + R_2 + R' = 30\ m\Omega}$$

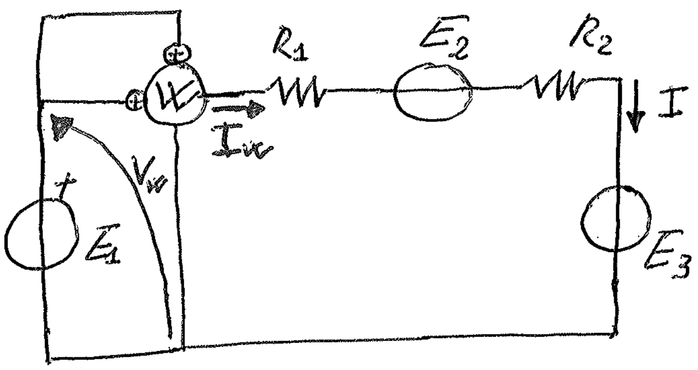
$\boxed{R_{CD}}$: (Sto connettendo i terminali C e D)

In questo caso tra A e C e tra B e D non scorre corrente perché lì il circuito è aperto ($R \to \infty$), quindi non considero quei due lati.



$$\boxed{R_{CD} = R'' \,//\, R' \,//\, R_5 = \frac{30}{3} = 10\, m\Omega}$$

1.5) (Esercizio non presente sui fogli)

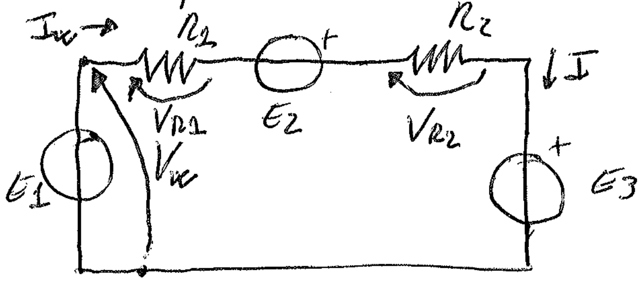


Dati:

$E_1 = 30\,V$
$E_2 = 10\,V$
$E_3 = 8\,V$
$R_1 = 3\,\Omega$
$R_2 = 5\,\Omega$
$P_W = 120\,W$

Calcolare I e la potenza utilizzata da ogni strumento?

Nel circuito è presente un WATTMETRO ideale. Essendo ideale non altera il circuito, cioè non assorbe energia, quindi il circuito sarà equivalente a:



Per il wattmetro valeva:

$$P_W = I_W \cdot V_W$$

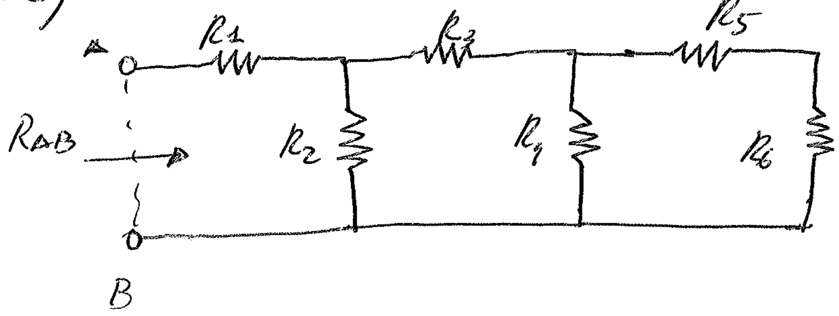
In questo caso V_W coincide ~~per~~ con E_1 e I_W con I.

Si ha quindi: $I = \frac{P_W}{V_W} = \frac{P_W}{E_1} = 4\,A$

↓

ESERCIZI SVOLTI DA ME

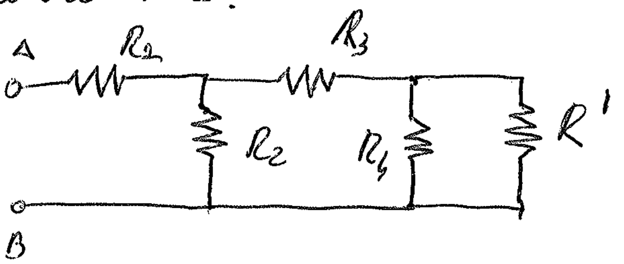
1.3)



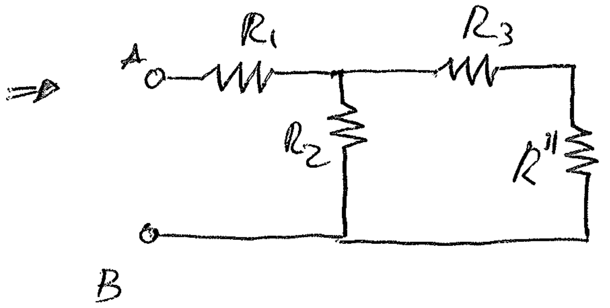
DATI:

$R_1 = 20\,\Omega$
$R_2 = 40\,\Omega$
$R_3 = 20\,\Omega$
$R_4 = 40\,\Omega$
$R_5 = 20\,\Omega$
$R_6 = 40\,\Omega$

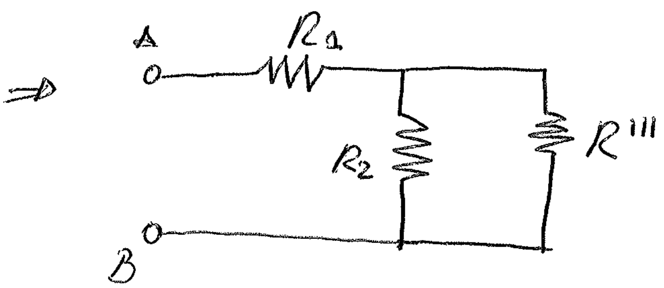
Calcolare R_{AB}?



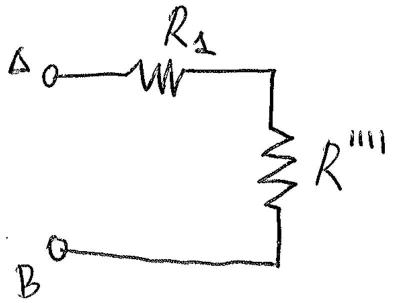
$R' = \cancel{R_5 // R} \; R_5 + R_6 = 60\,\Omega$



$$R'' = R_4 // R' = \frac{R_4 \cdot R'}{R_4 + R'} = 24\,\Omega$$



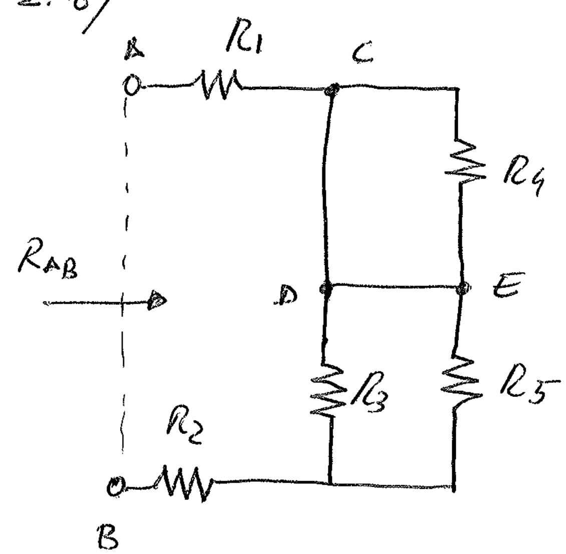
$R''' = R_3 + R'' = 44\,\Omega$



$$R'''' = \frac{R''' \cdot R_2}{R''' + R_2} \cong 20\,\Omega$$

$$\boxed{R_{AB} = R_1 + R'''' \cong 40\,\Omega}$$

1.6)



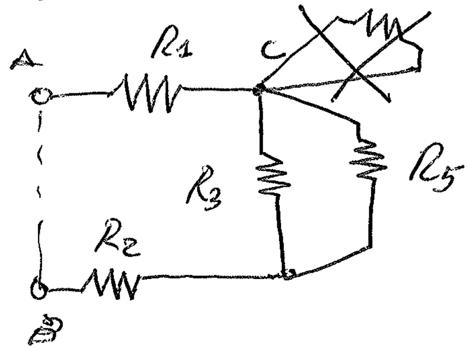
DATI:

$R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 5\,\Omega$

$R_4 = 10\,\Omega$

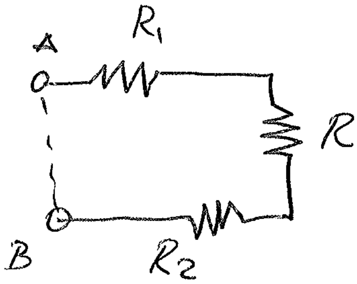
Calcolare R_{AB}?

In questo caso il terminale C coincide con D e E, quindi R_4 risulta cortocircuitata e R_3 e R_5 sono in parallelo:



$R' = R_3 // R_5 = 2{,}5\,\Omega$

$\Rightarrow$



$$\boxed{R_{AB} = R_1 + R' + R_2 = 12{,}5\,\Omega}$$

Capitolo 2

Teoremi di rete

2.1 Continua 1

Con riferimento alla Fig. 2.1 determinare il valore della corrente i_5.

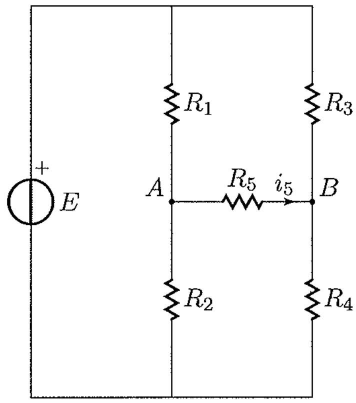


Figura 2.1: Figura dell'esercizio 2.1

DATI: $E = 200$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$, $R_5 = 12\ \Omega$.

RISULTATI: $i_5 = 5$ A.

2.2 Continua 2

Con riferimento alla Fig. 2.2 determinare il valore della tensione V_{AB}.

2.4 Continua 4

Con riferimento alla Fig. 2.4 determinare l'equivalente di Thévenin rispetto alla coppia di terminali A-B.

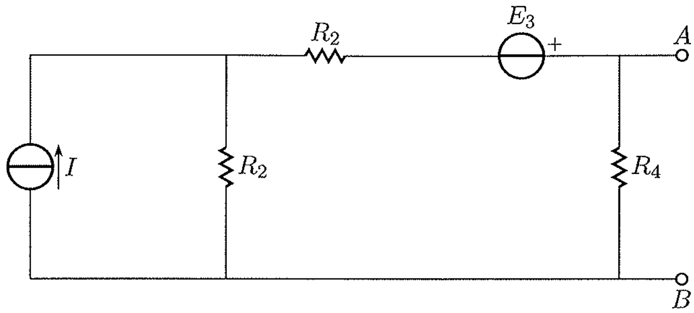


Figura 2.4: Figura dell'esercizio 2.4

DATI: $E = 40$ V. $I = 10$ A. $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 5\ \Omega$.

RISULTATI: $E_{th} = 35$ V, $R_{th} = 3.75\ \Omega$.

2.5 Continua 5

Con riferimento alla Fig. 2.5:

- dimostrare quale condizione deve soddisfare r al fine di massimizzare la potenza P,
- calcolare il massimo valore di potenza trasferibile,
- calcolare il rendimento di trasmissione.

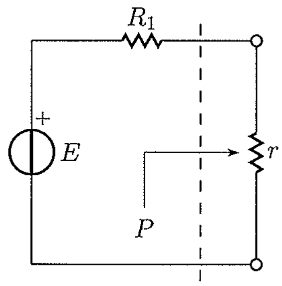


Figura 2.5: Figura dell'esercizio 2.5

DATI: $E = 10$ V. $R = 1\ \Omega$.

RISULTATI: $r = 1\ \Omega$, $P_{max} = 25$ W, $\eta = 0.5$.

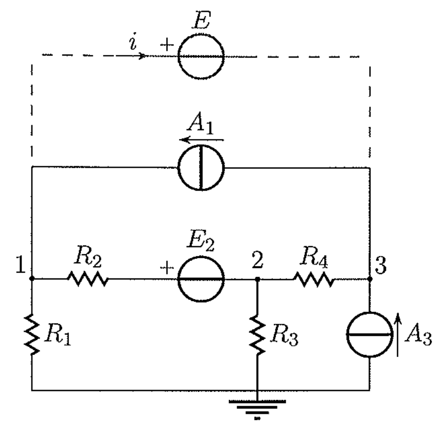


Figura 2.7: Figura dell'esercizio 2.7

DATI: risolvere in modo letterale.

RISULTATI:

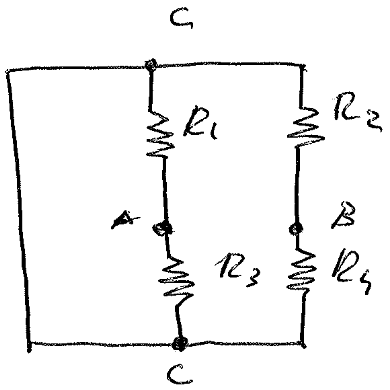
- metodo dei nodi (rete in nero):

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G2 & G_2+G_3+G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + \dfrac{E_2}{R_2} \\ -\dfrac{E_2}{R_2} \\ A_3 - A_1 \end{bmatrix}$$

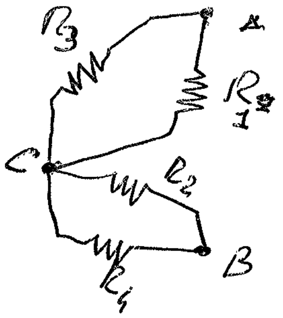
- metodo dei nodi modificato (incluso generatore di tensione in blu):

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 & 1 \\ -G2 & G_2+G_3+G_4 & -G_4 & 0 \\ 0 & -G_4 & G_4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + \dfrac{E_2}{R_2} \\ -\dfrac{E_2}{R_2} \\ A_3 - A_1 \\ E \end{bmatrix}$$

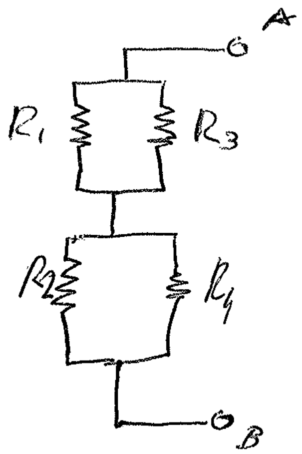
→ Il circuito è equivalente:



⇒



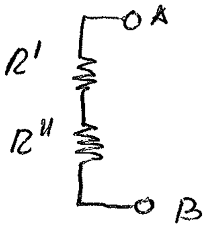
Il nodo C è detto equipotenziale → sia R_1, R_2, R_3 e R_4 sono connesse con il nodo C.
In questo modo R_1 è in parallelo ad R_3 e anche R_2 e R_4 tra loro:



$$R' = R_1 // R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 8\,\Omega$$

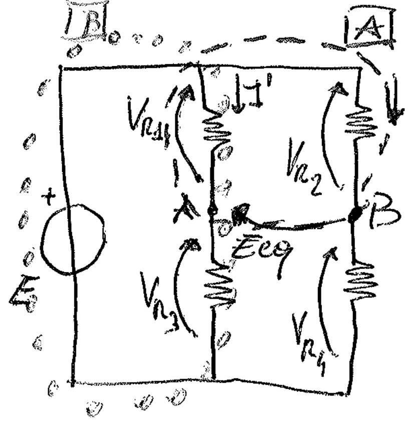
$$\Rightarrow R'' = R_2 // R_4 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 4\,\Omega$$

→



$$\Rightarrow \boxed{R_{eq} = R_{TH} = R' + R'' = 12\,\Omega}$$

■ Calcolo del GENERATORE EQUIVALENTE:



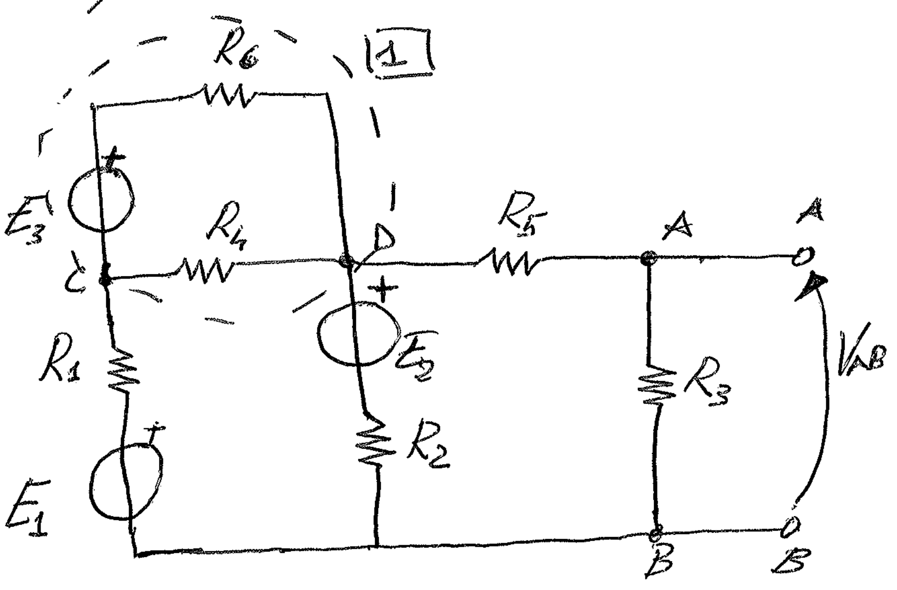
Suppongo di conoscere V_{R1} e V_{R2}, infatti se li conoscessi potrei calcolare E_{TH} tramite la legge di Kirchoff delle tensioni (LKT) lungo la maglia generalizzata (tratteggiata):

$$\Rightarrow \text{LKT}\boxed{A}: E_{TH} + V_{R1} - V_{R2} = 0 \rightarrow E_{TH} = V_{R2} - V_{R1} \quad (*)$$

Ma V_{R1} e V_{R2} non li ho, li devo trovare:
Posso scrivere lungo la maglia $\boxed{B}$:

$$\text{LKT}\boxed{B}: \begin{cases} ① \; E - V_{R1} - V_{R3} = 0 \rightarrow E = V_{R1} + V_{R3} \\ ② \; V_{R1} = R_1 I' \\ ③ \; V_{R3} = R_3 I' \end{cases}$$

2.2)

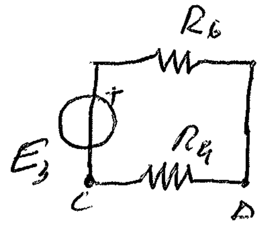


DATI:

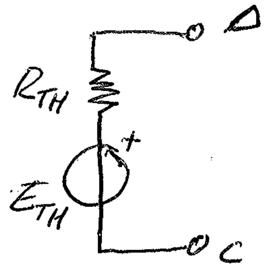
$E_1 = 40\,V$
$E_2 = 25\,V$
$E_3 = 100\,V$
$R_1 = 4\,\Omega$
$R_2 = 15\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$R_4 = 15\,\Omega$
$R_5 = 4\,\Omega$
$R_6 = 10\,\Omega$

Determinare il valore della tensione V_{AB}?

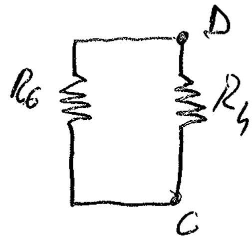
Posso semplificare la rete $\boxed{1}$ mediante un equivalente Thevenin.
⇒ Calcolo allora l'equivalente Thevenin rispetto ai nodi A e C:



→ Devo ottenere:

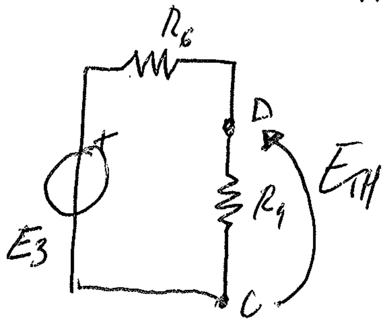


■ Calcolo di R_{TH}:
Devo passivare la rete:



→ R_4 ed R_6 sono in // ⇒ $R_{TH} = \dfrac{R_4 \cdot R_6}{R_4 + R_6} = 6\,\Omega$

■ Calcolo di E_{TH}:



Utilizzo la formula del PARTITORE DI TENSIONE RESISTIVO:

$$E_{TH} = E_3 \cdot \frac{R_4}{R_6 + R_4} = 60\,V$$