NUMERO: 1173

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Zago E.

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Barbero

FORMULE

LAVORO ED ENERGIA

Lavoro $\boxed{W_{A\to B} = \vec{F} \cdot \vec{S}}$ con $F = cost$, $s =$ rettilineo

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\, d\vec{r}}$$

TEO EN

$\boxed{W_{A\to B} = \Delta E_K = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2}$ → lavoro eseguito da TUTTE le forze sulla particella $= \Delta E_K$

$\boxed{W_{A\to B} = -\mu_K m g \cdot S_{A\to B}}$ lavoro forza di attrito ↳ dipende dal percorso

$\boxed{W_{A\to B\, Fp} = m g y_A - m g y_B = -\Delta E_p}$ → non " " " lavoro della forza peso

$\boxed{W^{\gamma}_{A\to B} = \{\vec{F} \cdot \vec{r}(B)\} - \{\vec{F} \cdot \vec{r}(A)\}}$ lavoro di forze COSTANTI

$\boxed{W_{A\to B} = \frac{KQq}{r_A} - \frac{KQq}{r_B}}$ lavoro di una particella carica opposta

$\boxed{W_{A\to B} = \frac{1}{2} K r^2 A - \frac{1}{2} K r^2 B}$ lavoro della forza elastica

Lavoro sviluppato da FORZE CONSERVATIVE $= E_p(A) - E_p(B)$

$$\boxed{W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B)}$$

Se su un corpo si esercitano solo forze conservative ↳ TEO CONS DELL'ENERGIA

$$\boxed{\begin{gathered} E(B) = E(A) \\ E_K(B) + E_p(B) = E_K(A) + E_p(A) \end{gathered}}$$

Lavoro fatto da forze non conservative $\boxed{E(B) - E(A) = W_{A\to B}}$

Momento di una forza rispetto al polo Ω $\boxed{\vec{M} = \vec{F} \times \vec{R}_\Omega}$

Momento angolare $\boxed{\vec{L} = \vec{R}_\Omega \times \vec{P}}$

Teorema del momento angolare $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega}$

per poli fissi $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_\Omega}$

CENTRO DI MASSA DI UNA BARRA UNIFORME

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x \lambda \, dx \qquad \lambda = \frac{dm}{dx}$$

CENTRO DI MASSA DI SUP CONTINUA

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_{corpo} x \sigma \, dx \qquad \sigma = \frac{dm}{ds}$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_{corpo} y \sigma \, dy$$

VOLUMI CONTINUI

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{1}{M}\int_{volume} x \rho \, dv \qquad \rho = \frac{dm}{dv}$$

SIST. OMOGENEI

- $x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int_0^L x \, dx$
- $x_{cm} = \frac{\sigma}{M}\int_{corpo} x \, ds$

TEO MOM. ANGOLARE IN UN SIST. DI PARTICELLE

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega^{(EXT)}$$

SECONDA EQ CARDINALE DELLA DINAMICA DEL SISTEMA

L_0 con Ω FISSO $\quad \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = M_\Omega^{(EXT)}$

L_0 se $\Omega \equiv cm$ $\quad \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = M_{cm}^{(EXT)}$

PRIMA EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEL SISTEMA

$$M \frac{dV_{cm}}{dt} = \vec{R}^{(EXT)}$$

TEOREMA DI KÖNIG

$$L_O = L_{O,cm} + L'_{cm}$$

Il momento angolare del sistema = Σ del momento dovuto al moto del CM e di quello del sistema rispetto al centro di massa

Ek dovuta al moto del cm

$$E_K = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + E_K'$$

Ek dovuta al mov. del sistema rispetto al centro di massa

PENDOLO FISICO

EQ. FOND DEL PENDOLO FISICO $\quad I_o \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\,\text{sen}\theta$

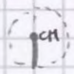
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgh}{I_o} = 0}$$

PENDOLO MATEMATICO DI LUNGHEZZA EQUIVALENTE (RIDOTTA) $\quad \boxed{\frac{1}{l} = \frac{M h_{cm}}{I_o}}$

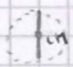
PERIODO $\quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}}}$

PULSAZIONE $\quad \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}}$

I_z BARRA $\quad I_z = \frac{1}{3} M l^2$



I_z BARRA $\quad I_z = \frac{1}{12} M l^2$



I_z DISCO $\quad I_z = \frac{Ml^2}{2}$

I_z CILINDRO $\quad I_z = \frac{Ml^2}{2}$ $\qquad$ GUSCIO CILINDRICO $\quad I_z = Ml^2$

I_z ANELLO $\quad I_z = Ml^2$

I GUSCIO SFERICO $\quad I_z = \frac{2}{3} Ml^2$ $\qquad$ SFERA PIENA $\quad I_z = \frac{2}{5} mR^2$

URTI TRA PARTICELLE

↳ urti tra punti → si conserva P

$m_i v_i = m_f v_f$

URTI COMPLETAMENTE ANELASTICI

↳ si conserva la quantità di moto

↳ c'è dissipazione di E_k $\qquad \boxed{\Delta E_k = E_{kf} - E_{ki}}$

↳ si ha tra particelle libere

TEOREMA DI BERNOULLI

In un fluido ideale in reg. stazionario la somma di pressione, E_K per unità di volume, E_P x unità di volume è costante lungo un condotto.

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{costante}}$$

con condotto orizzontale $(z=0)$

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}}$$

Energia potenziale associata ad un corpo immerso $\boxed{E_P = \rho g h}$

E_K associata a un fluido $\boxed{E_K = \frac{1}{2}\rho v^2}$

CONVENZIONE SUI SEGNI DI CALORE E LAVORO

Calore che entra in 1 sist dall'est segno ⊕
Lavoro compiuto da 1 sist. sull'esterno segno ⊕
Calore che esce da 1 sist. verso l'est segno ⊖
Lavoro compiuto dall'esterno sul sistema segno ⊖

DILATAZIONE TERMICA

$$\boxed{\Delta l = l_i \lambda (T - T_0)}$$

λ ↓ coeff di dilatazione termica

dilat. termica lineare

$$\boxed{\Delta S = S_0\, 2\lambda (T - T_0)}$$

" " sup.

λ lineare $\rightarrow \lambda_{sup} = 2\lambda_{lin} \rightarrow \lambda_{vol} = 3\lambda_{lin}$

Convezione $\boxed{\text{con } \alpha = \frac{1}{V_0}\frac{dV}{dT}}$ $\boxed{\frac{d\rho}{dT} = -\alpha\rho}$

Nei fluidi
↳ W = area sottesa al grafico

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_A^B p\,dV}$$

↳ nei cicli è la differenza tra 2 integrali

Per un gas perfetto vale $U = U(T)$

Relazione di Mayer $-c_v + c_p = R$

Per 1° princ T.D → trasformazioni isoterme $\boxed{Q = W}$

→ trasformazioni isocore $\boxed{W = 0}$ $\boxed{\delta Q = dU}$

trasformazioni isobare $\boxed{Q = \underbrace{H(B) - H(A)}_{d(pV+U)}}$

Calore specifico a pressione costante in isobare → $\boxed{\delta Q_p = n\,c_p\,dT}$

" " in isocore → $\boxed{\delta Q_v = n\,c_v\,dT}$

↓

$\boxed{\delta Q_v = dU = n\,c_v\,dT}$

↳ $\delta Q_p = p\,dV + n c_v\,dT$

trasformazioni adiabatiche $\boxed{W = -\Delta U = n c_v (T_A - T_B)}$

$Q_{rev} = \int_A^B T\,dS$

ENTROPIA

leggi generali (Meyer)

$S_B - S_A = n c_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

$S_B - S_A = n c_v \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right) + n c_p \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

$S_B - S_A = n c_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - R \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$

per le isoterme reversibili $\boxed{\Delta S = \frac{Q}{T}}$

adiabatiche reversibili $\boxed{\Delta S = 0}$

trasformazioni cicliche $\boxed{\Delta S = 0}$

nei sistemi isolati $dS \geq 0$

ciclo reversibile $\Delta S_U = \Delta S_{amb} = 0$

ciclo irreversibile $\Delta S_U = \Delta S_{amb} > 0$

ogni processo naturale si svolge necessariam. nel verso che det un aumento di entropia compl. di sistema e ambiente

variaz. entropia dell U. $\boxed{\Delta S_U = \Delta S_{amb} = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right)}$

$\boxed{\Delta S_{sist} = S_2 - S_1 = mc \ln\frac{T_2}{T_1}}$

Nei cambiamenti di fase $\boxed{\Delta S = \frac{m\lambda}{T}}$

Energia inutilizzabile $\boxed{E_{IN} = T_0 \Delta S_U}$

Entropia di un gas perfetto $dS = n\left\{c_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)\right\}$ finale / iniziale

$\boxed{\Delta S_U = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb}}$

nei cicli $\Delta S_{sist} = 0$ quindi $\boxed{\Delta S_U = \Delta S_{amb}}$

$\boxed{\Delta S_{amb} = -\frac{W}{T_{amb}}}$

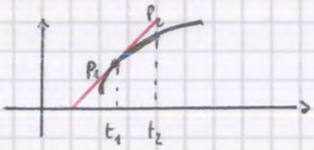
in generale $\boxed{\Delta S_{ambiente} = \frac{Q_{amb}}{T_{amb}}}$

trasf. isoterme $\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -nR \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$

isocore $\Delta S = n c_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = n c_v \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$

isobare $\Delta S = n c_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = n c_p \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

Considerando P_1 e P_2 molto vicini



Se P_2 si avvicina a P_1 la secante passante per P_1 e P_2 tende a diventare tangente

pertanto

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$$

velocità istantanea
=
rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato

$\operatorname{tg}\phi = \frac{dx}{dt}$ = velocità istantanea in un istante t.

Ne deriva ⇝ * se ho una legge oraria es: $x(t) = \beta r^3$
per calcolare la v istantanea derivo la legge oraria

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta r^3) = 3\beta r^2$$

* se conosco la v istantanea e devo calcolare la legge oraria supporre x(t) noto v(t)

$v = v(t)$ (velocità espressa in relazione al tempo)

dunque $\frac{dx}{dt} = v(t) \longrightarrow dx = v(t)\,dt$

$$x = \int v(t)\,dt$$

lo spostamento complessivo è dato dalla somma di tutti i successivi valori dx
⟶ INTEGRO

ma devo operare una integrazione definita, sapendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} v(t=0) = v_0 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

quindi $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'}$$

moto rett. uniforme

legge oraria con v costante

posizione iniziale del punto (all'istante t_0)

relazione che permette il calcolo di spazio percorso nel moto rettilineo (qualunque tipo di moto)

Δx = spostamento complessivo
non spazio percorso

Esempio

$v = at^2 + v_0$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (at_1'^2 + v_0)\,dt'$$

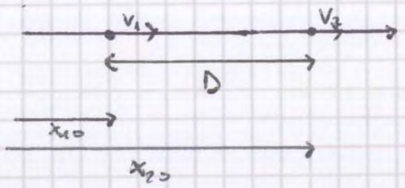
$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{3}a(t^3 - t_0^3)$$

Problema: 2 punti si trovano a $t_0 = 0$

x_{10}

$x_{20} = x_{10} + D$ $\qquad D = x_{20} - x_{10}$

$v_1 > v_2$ $\qquad$ det. dopo quanto t e quanto spazio corpo 1 supera corpo 2



$t_0 = 0$

$t - t_0$

$x_1(t) = x_{10} + v_1 t$

$x_2(t) = x_{20} + v_2 t$

t^* tempo di sorpasso

$$\left.\begin{aligned} x_1(t^*) &= x_{10} + v_1 t^* \\ x_2(t^*) &= x_{20} + v_2 t^* \end{aligned}\right\}$$ sono uguali xr in quel punto t^* avviene il sorpasso

$$x_{10} + v_1 t^* = \underbrace{x_{20} - x_{10}}_{= D}$$

$$\rightsquigarrow t^* = \frac{D}{v_1 - v_2}$$

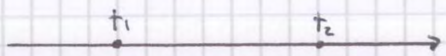
per det lo spazio $\qquad x = x_1(t^*) = x_{10} + \frac{v_1}{v_1 - v_2} \cdot D$

$x = x_0 + v t^*$

L'ACCELERAZIONE

↑ tutto ciò vale a V costante, se V non è costante devo considerare 1 altra grandezza, l'accelerazione

$$\boxed{\text{def. acceleraz. media} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$



$x_1 = x(t_1)$ $\qquad x_2 = x(t_2)$

$v_1 = v(t_1)$ $\qquad v_2 = v(t_2)$

$$[\text{acc. media}] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$$

unità di misura dell'accelerazione

per trovare la accelerazione istantanea devo considerare t_1 e t_2 molto vicini (procedimento analogo alla velocità)

$$a_{cc} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

derivata 2ª di x

$$\boxed{a_{cc}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}}$$ = rapidità di variaz. temporale della velocità

acceleraz. istantanea

LEGGE ORARIA DALL' ACCELERAZIONE

Nota l'accelerazione $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt$ $\qquad$ supponendo che $a \begin{cases} t = t_0 \\ v(t_0) = V_0 \end{cases}$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \Rightarrow v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$x_1 = V_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 = V_0 \cdot \frac{V_0}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \frac{V_0^2}{a^2}$$

$\hookrightarrow t_1 = \frac{V_0}{a}$ quando il corpo si ferma

$$x_1 = \frac{V_0^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{a}$$

spazio percorso

t_2 = tempo dopo il quale il punto ripassa dall'origine $x(t_2) = 0$

oscissa = 0

$$x(t_2) = V_0 t_2 - \frac{1}{2} a t_2^2$$

$$V_0 t_2 - \frac{1}{2} a t^2 = 0$$

$\hookrightarrow t_2 = 0$

non ci interessa

$t_2 = \frac{2V_0}{a}$ il corpo ripassa dall'origine in $\frac{2V_0}{a}$

v in t_2

$$v(t_2) = V_0 - a t_2$$

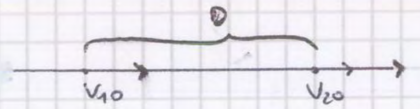
$v(t_2) = V_0 - a \cdot \frac{2V_0}{a}$ $\quad V(t_2) = -V_0$ velocità con cui il corpo ripassa nell'origine

---

PB ② 2 punti si muovono sullo stx asse nello stx verso con v costanti V_{10} e V_{20}

all'istante $V_0 = 0$ quando la distanza tra i due punti è D il primo punto inizia a frenare uniformemente

Det. la distanza affinché non ci sia urto



Problema

t^* = tempo x raggiungere il suolo

$x(t^*) = 0$

$H - V_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = 0$

$$\begin{cases} v = -v_0 - gt \\ x = H - V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow t^{*2} + \frac{2V_0 t^*}{g} - \frac{2H}{g} = 0$ equazione di 2° grado

$t^* = -\frac{V_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_0}{t}\right)^2 + \frac{2H}{g}}$

l'unica sol che devo considerare è quella con segno positivo

$t^* = -\frac{V_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}$

v^* = v all'impatto col terreno

$v(t^*) = -V_0 - gt^* = -V_0 - g\left(-\frac{V_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}\right) = \cancel{-V_0} \cancel{+V_0} - \sqrt{V_0^2 + 2gH}$

$= -\sqrt{V_0^2 + 2gH}$

MOTO ARMONICO

$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)}$ legge oraria del moto armonico

$\hookrightarrow$ è un moto vario in cui tutte le grandezze e le derivano variano nel tempo

A = ampiezza = massimo spostamento dall'origine

ω = pulsazione

ϕ = fase iniziale

(A, ϕ) dipendono dalle condizioni iniziali $(x_0$ e $V_0)$

ω dipende da fattori esterni (es lunghezza del filo)

① Il MA è illimitato poiché il sen varia tra +1 e -1 pertanto

$-A < x(t) < A$

② Il MA è periodico di periodo T : il corpo descrive oscillazioni di amp. A rispetto al centro O tutte uguali tra loro e caratterizzate da una durata, detta periodo

$\hookrightarrow \boxed{\exists t \Rightarrow x(t) = x(t+T)}$

$\downarrow$

a interv. di tempo = il punto ripassa nella stx posizione con stessa velocità

$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$

$x(t+T) = A\,\mathrm{sen}[\omega(t+T) + \phi]$

$\cancel{A}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) = \cancel{A}\,\mathrm{sen}[\omega(t+T) + \phi]$

$\mathrm{sen}(\omega t + \phi) = \mathrm{sen}(\omega t + \phi + \omega T) \Rightarrow \omega T = 2\pi$ siccome il periodo della fz. seno è 2π

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \longrightarrow$ periodo : il moto si ripete velocemente (piccolo T) quando la pulsazione è grande e al contrario.

$\hookrightarrow$ pulsazione

è detta frequenza il n. di oscillazioni al secondo $\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

equazione differenziale del moto armonico semplice (MAS)

↳ condizione ns affinché un moto sia armonico

MOTO IN PRESENZA DI RESISTENZA VISCOSA

$$\boxed{a = -kv}$$

$$\underbrace{a = \frac{dv}{dt} = -kv}_{\text{eq. differenziale}}$$

$$dv = -kv\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{t_0}^{t} -k\,dt \qquad t_0 = 0$$

$$[\log v]_{v_0}^{v} = -k \int_0^t dt \qquad \log v - \log v_0 = -k(t)$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -k(t)$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-kt}$$

$$\boxed{v = v_0 e^{-kt}}$$

dove k dice quanto in fretta la v diminuisce

MOTO IN PRESENZA DI RESISTENZA IDRAULICA

$$\boxed{a = -Hv^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = -Hv^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = -H\,dt$$

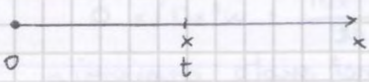
$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -H \int_{t_0}^{t} dt \qquad t = 0$$

$$-\left[\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = -Ht$$

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -Ht$$

$$\boxed{v = \frac{v_0}{1 + Hv_0 t}}$$

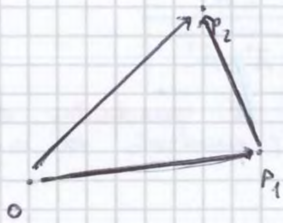
ACCELERAZIONE IN FUNZIONE DELLA DISTANZA



come si opera quando $a \neq a(t)$, $a = a(x)$?

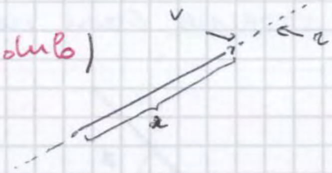
MOTO BIDIMENSIONALE

spiegano grandezze che è utile specificare hanno bisogno di un numero, una direzione ed un verso.

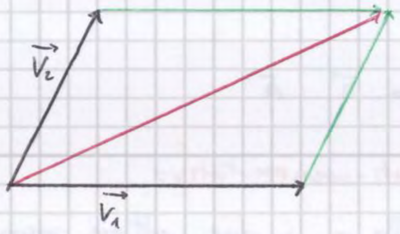


VETTORI: quantità che si comportano come gli spostamenti

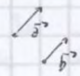
Sono caratterizzati da
- lunghezza (ampiezza, modulo)
- retta (direzione)
- verso



I vettori si sommano come gli spostamenti secondo la regola del parallelogramma (SOMMA)



$\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

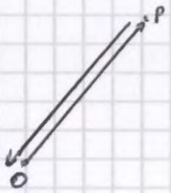


↳ $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono vettori uguali ma hanno punto di applicazione diverso.

In fisica un ≠ p. di applicazione fa variare ≠ caratt. (ad es. in un moto) quindi si parla di vettore applicato ad un punto

Definito un vettore, il vettore opposto è posto sulla stx direzione, stx intensità con verso opposto

↳ definito dal prodotto di uno scalare × un vettore ponendo m=

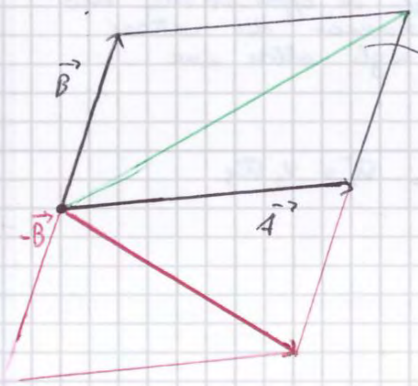


$\vec{v} = V\,\vec{u_v}$ → unità → è un vettore di modulo 1 ↓ versore

↑ modulo

$-\vec{v} = V(-\vec{u_v})$

$b = m \cdot a$
↳ stx direz, verso modulo m volte + grande



$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$

Pongo def. il vettore differenza

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

esprimo come $\vec{A}$ + il suo inverso

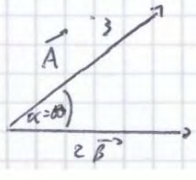
NON ESISTE IL RAPPORTO TRA DUE VETTORI $\frac{\vec{A}}{\vec{B}}$

Esistono 2 tipi di prodotto:

* PRODOTTO SCALARE (indicato con un punto)
DOT PRODUCT

$\vec{A}$
$\vec{B}$

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ si ottiene da $\boxed{A \cdot B \cdot \cos(\hat{\vec{A}\vec{B}})}$ → è una grandezza scalare



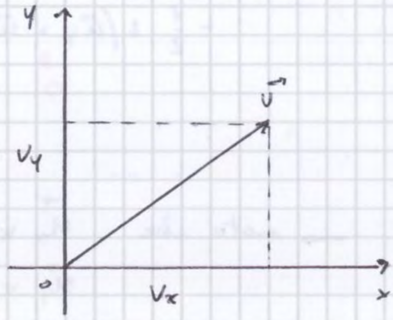
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \times 2 \times \cos(60°) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$

ottengo il TEOREMA DI CARNOT

la lungh. del vettore risultante tra due vettori è

$$\boxed{V^2 = V_r^2 + V_s^2 + 2 V_r V_s \cos\phi}$$

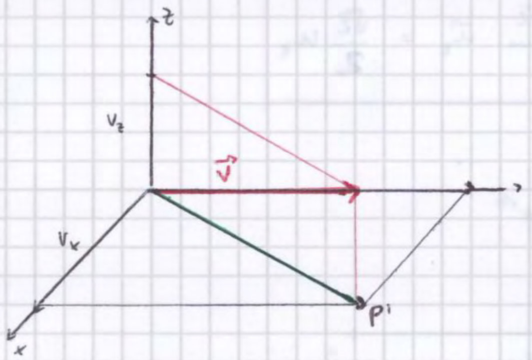
Se $\phi = \frac{\pi}{2}$



$\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ } VERSORI ASSI COORDINATI

$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$

Si può applicare anche allo spazio



$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$

PROBLEMA

$\vec{V}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_x - \frac{1}{2} \vec{u}_y$

$\vec{V}_2 = -\sqrt{2}\, \vec{u}_x + 2 \vec{u}_y$

Determinare: ① $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$

② $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$

③ $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$

④ ϕ tra $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$

① $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} u_x - \sqrt{2}\, \vec{u}_x - \frac{1}{2} \vec{u}_y + 2 \vec{u}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_x + \frac{3}{2} \vec{u}_y$

② $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_x - \frac{1}{2} \vec{u}_y\right)\left(-\sqrt{2}\, \vec{u}_x + 2\vec{u}_y\right) = -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \underbrace{(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x)}_{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \underbrace{(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y)}_{0}$

$+ \frac{1}{2}\sqrt{2} \underbrace{(\bar{u}_x \cdot \bar{u}_y)}_{0} - \frac{1}{2} \cdot 2 \underbrace{(\bar{u}_y \cdot \bar{u}_y)}_{1}$

$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 1 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{u}_x + v_y(t)\,\vec{u}_y$

$\vec{y} = \vec{y}(t)$

è definita derivata del vettore la quant:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

DERIVARE UN VETTORE

Consideriamo $v(t)$ e $v(t+\Delta t)$ che sono 2 valori della funzione

possiamo definire $v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v$

da cui il rapporto $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[v_x(t+\Delta t)\,\vec{u}_x + v_y(t+\Delta t)\,\vec{u}_y] - [v_x(t)\,\vec{u}_x + v_y(t)\,\vec{u}_y]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[v_x(t+\Delta t) - v_x(t)]\,\vec{u}_x + [v_y(t+\Delta t) - v_y(t)]\,\vec{u}_y}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}\,\vec{u}_x + \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}\,\vec{u}_y \right\}$$

$$= \vec{u}_x \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}}_{\frac{dv_x}{dt}} + \vec{u}_y \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}}_{\frac{dv_y}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}_x \frac{dv_x}{dt} + \vec{u}_y \frac{dv_y}{dt}}$$

→ il vettore derivato di y ha come componenti le derivate dei vettori

la derivata di un vettore è un vettore (non parallelo a quello di partenza)

INTEGRARE UN VETTORE

$$\int_{t_1}^{t_2} q(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} [v_x(t)\,\vec{u}_x + v_y(t)\,\vec{u}_y]\,dt = \int_{t_1}^{t_2} [\vec{u}_x v_x(t)\,dt + \vec{u}_y v_y(t)\,dt]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{u}_x v_x(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{u}_y v_y(t)\,dt = \underbrace{\vec{u}_x}_{\text{grandezza costante}} \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\,dt + \underbrace{\vec{u}_y}_{\text{grandezza costante}} \int_{t_1}^{t_2} v_y(t)\,dt$$

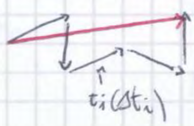
$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{u}_x + v_y(t)\,\vec{u}_y$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}_x \frac{dv_x}{dt} + \vec{u}_y \frac{dv_y}{dt}$

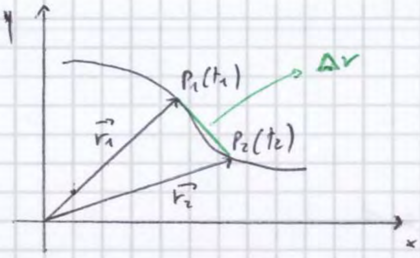
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \vec{u}_x \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\,dt + \vec{u}_y \int_{t_1}^{t_2} v_y(t)\,dt}$$

→ l'integrale di 1 vettore è = all'integrale delle sue componenti

L'integrale definito di un vettore y(t) è il vettore a cui tende una somma di vettori quando tutti i Δt_i tendono a zero.



velocità scalare: velocità con cui un corpo varia le sue ascisse curvilinee ~~percorrendo la traiettoria~~



la variazione di vettore posizione nell'intervallo di tempo è la **velocità media**

$$\boxed{\vec{V}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}}$$

↳ il vettore rapporto tra spostamento Δr e l'int. di tempo necessario a percorrerlo

$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ oppure $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\Delta r}$

le dimensioni sono lunghezza / tempo come nel moto unidimens.

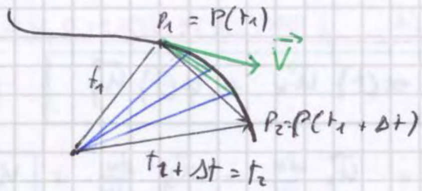
ancora $\vec{V}_m(t_1; t_2) = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta r}{\Delta t}$

↓ è un vettore parallelo alla secante

$\Delta t = t_2 - t_1$ int. di tempo in cui il corpo passa da P_1 a P_2

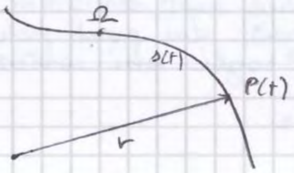
* la **velocità vettoriale istantanea** è data da

$$\boxed{\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{dr}}{dt}}$$



↓ è un vettore tangente alla traiettoria nel punto in cui viene valutata la velocità ed è la derivata del vettore risp. al tempo

↳ man mano che Δt dim la secante tende alla tangente



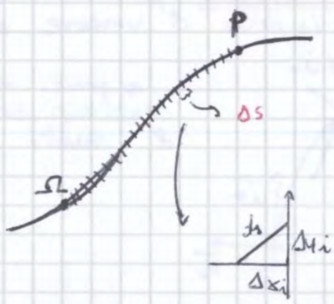
$\vec{r} = \vec{r}(t)$ ↗ può dip. dal tempo o dalla posizione

$\vec{r} = \vec{r}(s)$

. Se $\vec{r} = \vec{r}[s(t)]$ allora $\vec{V} = \dfrac{\vec{dr}}{dt} = \underbrace{\boxed{\dfrac{\vec{dr}}{ds}}}_{u_T} \cdot \underbrace{\boxed{\dfrac{ds}{dt}}}_{v} = v \cdot \vec{u_T}$

↓ posso riscriverlo come prod. di velocità scalare per $\vec{u_T}$ → dove $\boxed{dr = ds \cdot \vec{u_T}}$

dove $\vec{u_t} = \dfrac{dr}{ds}$ vettore necess. tangente alla traiettoria (versore tangente alla curva)

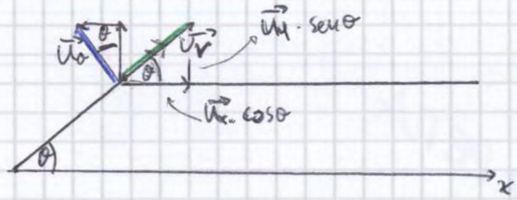


$$s(\Omega \to P) = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

• Il moto è pensato come una successione di spostamenti rettilinei infinitesimi

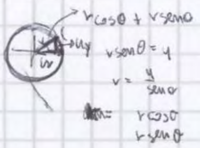
Quando un corpo si muove cambiano r e θ, come calcolo le derivate di $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\theta$



$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_x + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_y$$



$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \underbrace{\left(-\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y\right)}_{=\vec{u}_\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}}$$

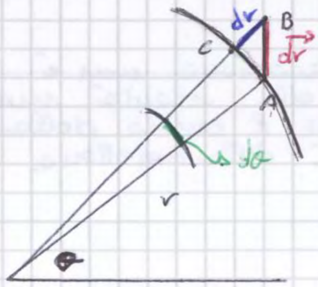
$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\cos\theta\frac{d\theta}{dt} - \operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\vec{u}_y$$

$$= \underbrace{-\left(\cos\theta\,\vec{u}_x + \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_y\right)}_{=\vec{u}_r}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt}}$$

VELOCITÀ IN COORDINATE POLARI

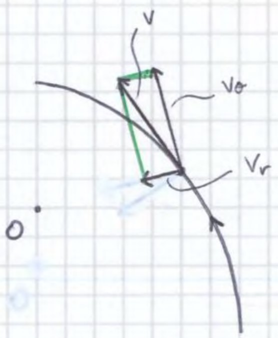
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\cdot\vec{u}_r\right) = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{u}_r + \frac{d\vec{u}_r}{dt}\cdot r = \boxed{\frac{dr}{dt}\cdot\vec{u}_r} + \boxed{r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta}$$



- velocità radiale: diretta lungo r di modulo $\frac{dr}{dt}$ → dipende dalle variazioni di modulo del raggio vettore
- velocità trasversa: perpendicolare e r e di modulo $\frac{r\,d\theta}{dt}$, dip. dalle variaz. di direzione

$$\vec{dr} = \vec{AC} + \vec{CB} = r\,d\theta\cdot\vec{u}_\theta + dr\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{dr}}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\vec{u}_r$$

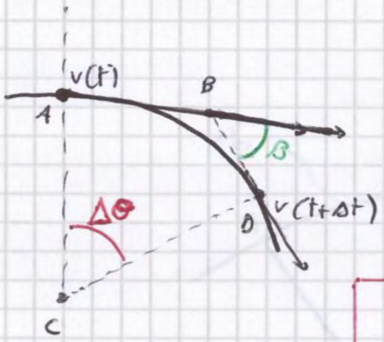


$\left.\begin{matrix}\vec{u}_x \\ \vec{u}_y\end{matrix}\right\}$ sono indipendenti da t

$\left.\begin{matrix}\vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta\end{matrix}\right\}$ dipendono da t

$\frac{d\vec{u}_x}{d\vec{u}_\theta} = 0 \qquad \frac{d\vec{u}_y}{dt} = 0$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r \end{cases}$$



derivando il vettore velocità:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_T) :$$

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\boxed{\frac{dv}{dt}\vec{u}_T}} + \underbrace{\boxed{v\frac{d\vec{u}_T}{dt}}}}$$

!

CHIARISCI

ACCELERAZIONE ha 2 componenti:

- accelerazione tangenziale, rivolta sulla tangente, parallela alla velocità esprime la variazione del modulo di velocità.

↳ se $\vec{a}$ è tale che è costante, cioè quando il suo modulo è costante allora $\frac{d\vec{v}}{dt}$ è perpendicolare ad $\vec{a}$

questa componente dipende dalla variazione di direzione della velocità e le è ortogonale

↳ è la accelerazione normale o centripeta

quindi $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = k\,\vec{u}_N$

↓

variazione con t

Esprimiamo + significativamente la componente normale

$\Delta\theta$ = tende a 0 al tendere a 0 di Δt

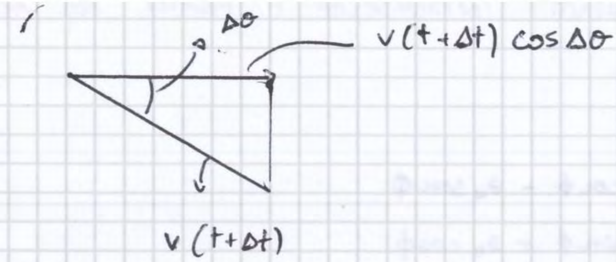
$$\left.\begin{matrix} \hat{C} = \Delta\theta \\ \hat{A} = \frac{\pi}{2} \\ \hat{B} = \pi - \beta \\ \hat{D} = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}$$

Considero il quadrilatero ABDC → somma angoli interni = 360°

$$\hat{C} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 2\pi$$

$$\Delta\theta + \cancel{\frac{\pi}{2}} + (\cancel{\pi} - \beta) + \cancel{\frac{\pi}{2}} = \cancel{2\pi}$$

$$\Delta\theta - \beta = 0 \qquad \boxed{\Delta\theta = \beta}$$



$$\Delta v_{\parallel} = v(t+\Delta t)\cos\Delta\theta - v(t)$$

$$\Delta v_{\perp} = v(t+\Delta t)\,\text{sen}\,\Delta\theta$$

$$a_{\parallel} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_{\parallel}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)\cos\Delta\theta - v(t)}{\Delta t}$$

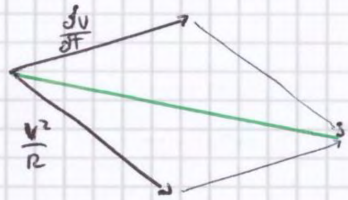
attendere di $t \to 0$ $\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

$$a_{\perp} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_{\perp}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)\,\text{sen}\,\Delta\theta}{\Delta t} \to 0$$

quando $\Delta\theta \to 0$
$\text{sen}\,\Delta\theta \to \Delta\theta$
(approssimaz. ricorda Londou)

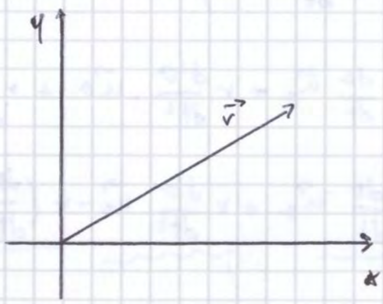
$$= \lim_{\Delta t\to 0} v(t)\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v(t)\frac{d\theta}{dt} = \frac{v^2}{R}$$

In modulo
modulo del vettore (sua lunghezza)



$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

Accelerazione in forma cartesiana



$$\vec{r} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}\vec{u_y}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{u_x} + \frac{dv_y}{dt}\vec{u_y}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u_y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{a} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\cdot\vec{u}_\theta}$$

FORMULA DI BINET

$$\boxed{a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

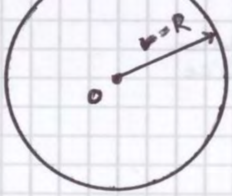
ACCELERAZ. RADIALE diretta lungo il vettore posizione

$$\boxed{a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)}$$

ACCELERAZ. TRASVERSA $\perp$ alla direzione del vettore posizione

MOTO CIRCOLARE

È il moto di un corpo la cui traiettoria è circolare cioè la distanza tra il corpo in moto e un punto è costante



con r costante $\therefore$ r(coord radiale) è $= R$

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 0$$

* il vettore posizione è costante nel MCU pertanto la sua derivata temporale vale 0

$\hookrightarrow$ il vettore posizione $\equiv$ raggio $r \equiv R$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{V} = R\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot\vec{u}_\theta}$$

$\longrightarrow$ la velocità è solo radiale
non c'è comp. trasversa

DERIVO $\downarrow$

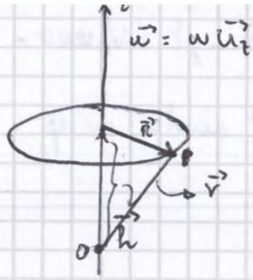
$$\vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta$$

introduco di nuove grandezze

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$ VELOCITÀ ANGOLARE

$$\boxed{\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}}$$ ACCELERAZ. ANGOLARE

$$\begin{cases} \vec{V} = R\omega\vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r + R\alpha\vec{u}_\theta \end{cases}$$



Quanto vale $\vec{w} \times \vec{r} = ?$

$\vec{r} = \vec{h} + \vec{R}$ (vettorialmente)

$$\vec{w} \times \vec{r} = \vec{w} \times (h + R) = \underbrace{\vec{w} \times \vec{h}}_{0} + \vec{w} \times \vec{R}$$

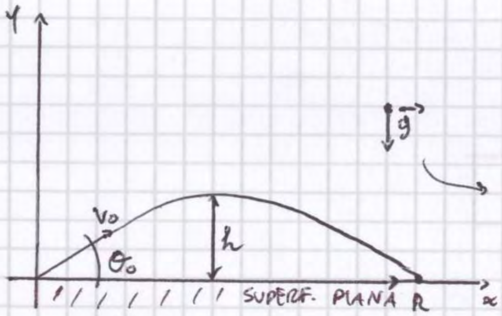
il prod. esterno di vettori // è sempre nullo

$\boxed{\vec{V} = \vec{w} \times \vec{r}}$ non importa dove si prende l'origine sull'asse di rotazione

---

MOTO PARABOLICO DEI CORPI

- La traiett. non deve essere troppo lunga (resistenze idrauliche o viscose)
  ↳ qualche Km
- " " deve essere piccola risp. al raggio della terra
  ↳ effetti di rotaz. della terra (intervengono altre forze)



- Max distanza del proiettile → gittata
- Tempo di volo → tempo in cui il proiettile sta in aria
- Altezza massima

la gravità agisce sempre verso il basso

$\vec{a} = \vec{g}$

condizioni iniziali
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} V_x(0) = V_0 \cos\theta_0 \\ V_y(0) = V_0 \operatorname{sen}\theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{dV_x}{dt}\vec{u}_x + \dfrac{dV_y}{dt}\vec{v_y} \\ \\ \vec{g} = -g \cdot \vec{u}_y \end{cases}$$

SOST. IN $\boxed{\vec{a} = \vec{g} = \dfrac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \dfrac{dv_y}{dt}\vec{v_y} = -g \cdot \vec{u}_y}$ è una equazione vettoriale ci sono tante eq. scalari quante sono le variabili del problema

quindi
$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = 0 \longrightarrow V_x \text{ è costante rispetto a } t \longrightarrow V_x = V_x(0) = V_0 \cdot \cos\theta_0 \\ \dfrac{dV_y}{dt} = g \;\; * \downarrow \end{cases}$$

↳ la componente // al suolo è costante

$\bar{t}$ = 2 volte il tempo che il proiettile impiega x raggiungere h max

Equazioni parametriche di traiettoria dove t è il parametro

Equazione cartesiana

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta_0}$$

$$y = V_0 \operatorname{sen}\theta_0 \frac{x}{V_0\cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta_0}$$

$$\boxed{y = \operatorname{tg}\theta_0\, x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta_0} \cdot x^2}$$

moto del proiettile è una parabola ad asse verticale con concavità verso il basso

$y=0$ definisce la GITTATA (R)

$$\operatorname{tg}\theta_0 \cdot R - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta_0} \cdot R^2 = 0 \qquad R\left(\operatorname{tg}\theta_0 - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta_0}R\right) = 0$$

soluzioni $R=0 \Rightarrow$ non è importante

$$R = \operatorname{tg}\theta_0 - \frac{gR}{2V_0^2\cos^2\theta_0} = 0$$

$$R = 2\frac{V_0^2}{g} \cdot \operatorname{tg}\theta_0 \cos^2\theta_0 = 2\frac{V_0^2}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cancel{\cos\theta_0}} \cdot \cos^2\theta_0 = \frac{V_0^2}{g} 2 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0$$

quindi $\boxed{R = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta)}$ eq. della gittata

↳ la gittata max si ha per $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

$$R_M = \frac{V_0^2}{g}$$

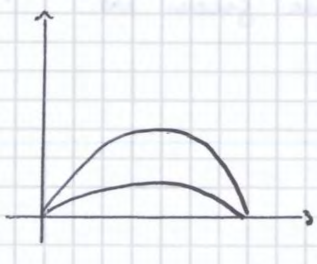
se $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + \varepsilon$

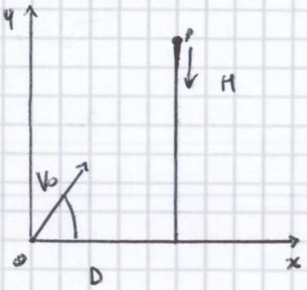
$\theta_2 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$

$$R_1 = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta_1) = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}\left[2\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right] = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2\varepsilon\right) = \frac{V_0^2}{g}\cos\varepsilon$$

$$R_2 = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta_2) = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\right] = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) = \frac{V_0^2}{g}\cos\varepsilon$$

* COMMENTO *





$x_p = V_0 \cos\theta_0$

$y_P = V_0 \operatorname{sen}\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$x_p = D$

$y_D = H - \frac{1}{2} g t^2$

SE C'È IMPATTO

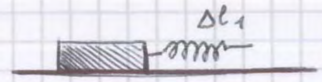
t^* $\begin{cases} x_p(t^*) = x_s(t^*) \\ y_p(t^*) = y_s(t^*) \end{cases}$ $\begin{cases} V_0 \cos\theta_0 \; t^* = D \\ V_0 \operatorname{sen}\theta_0 \; t^* - \cancel{\frac{1}{2} g t^{*2}} = H - \cancel{\frac{1}{2} g t^{*2}} \end{cases}$ $\begin{cases} V_0 \cos\theta_0 \, t^* = D \\ V_0 \operatorname{sen}\theta_0 \, t^* = H \end{cases}$

$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{H}{D}$ $\qquad H = D \operatorname{tg}\theta_0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 324

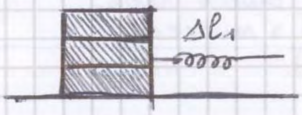
prendendo un oggetto avrò una accelerazione a_1

↳ considerando blocchi (caratterizzati da 1 massa comune) presi insieme vediamo che



a_1

l'a_2 sarà $\boxed{a_2 = \frac{a_1}{2}}$



$\boxed{a_3 = \frac{a_1}{3}}$

attraverso una osservazione sperimentale si nota che

$$\boxed{\begin{array}{l} a \propto \Delta l \\ a \propto F \\ a \propto \frac{1}{N} \\ a \propto \frac{1}{M} \end{array}}$$

dunque $a \propto \frac{\Delta l}{N}$

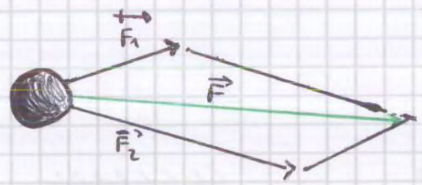
e $a \propto \frac{F}{M} \longrightarrow \boxed{a = \frac{F}{M}}$ $\quad \boxed{F = m\vec{a}}$

LEGGE DI NEWTON: l'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa tramite la forza F, determina la accelerazione del punto, ovvero la variaz. della sua v nel tempo.

Unità di misura: $[F] = [M][a] = M \frac{L}{T^2}$

$[F] = Kg \frac{m}{s^2} = N$ (Newton)

- m è la MASSA INERZIALE (resistenza alla variaz. di v)
  ↳ Fissata F quanto + m è piccola -> maggiore è l'eff. dinamico



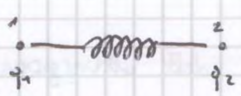
- un corpo sottoposto a due forze si sposta secondo la regola del parallelogramma
  ↳ in quanto le forze sono grandezze vettoriali

pertanto $\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{M} \quad e \quad \vec{F} = M \cdot \vec{a}}$

La forza è legata a una proprietà che i corpi hanno

considerando corpi carichi elettricamente

↳ se avvicino le due particelle
- o si attraggono
- o si respingono



↳ se io pongo un dinamometro tra le due particelle posso misurare la forza repulsiva o attrattiva tra le 2 part.

↳ accade la stessa cosa tra due poli di un magnete

Ogni corpo possiede delle prop. e queste prop. sono causa delle interazioni tra corpi

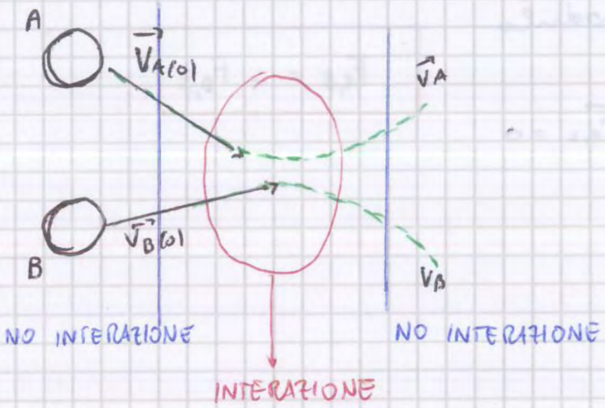
$$\boxed{\underbrace{\vec{P}(t) - \vec{P}(0)}_{(\Delta p)} = \int_0^t \vec{F}\,dt = \vec{J}}$$

→ J è l'impulso di $\vec{F}$ ceduto ad M

- l'impulso di una F applicata a un punto materiale provoca la variazione di qdm
- se m è costante $\boxed{J = m(V - V_0) = m\Delta V}$

DE CART → Dio ha posto nel mondo una certa quantità di moto e questa è invariata se Dio non interviene
↳ motivazioni religiose

esperimento



- Due corpi vengono lanciati in modo che tra essi avvenga un urto

se sono due magneti si avvicinano, si respingono e si allontanano
↳ osservazioni sperimentali

TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO

la forza che agisce su A è $\vec{F}_{B,A}$
↓

$\vec{F}_{B,A}$ $\qquad \vec{P}_A(t) - \vec{P}_A(0) = \int_0^t \vec{F}_{B,A}\,dt$

$\vec{F}_{A,B}$ $\qquad \vec{P}_B(t) - \vec{P}_B(0) = \int_0^t \vec{F}_{A,B}\,dt$

sommo membro e membro

$$\left[\vec{P}_{A(t)} + \vec{P}_{B(t)}\right] - \left[\vec{P}_{A(0)} + \vec{P}_{B(0)}\right] = \int_0^t \left(\vec{F}_{B,A} + \vec{F}_{A,B}\right) dt$$

Sperimentalmente con una luce intermittente ogni decimo di sec. segua la traiettoria dei corpi nel tempo e ne determina la velocità
↓

$\vec{P}_{A(t)} + \vec{P}_{B(t)} = \vec{P}_{A(0)} + \vec{P}_{B(0)}$ $\quad$ si osserva che la quantità di moto prima e dopo l'impatto non varia

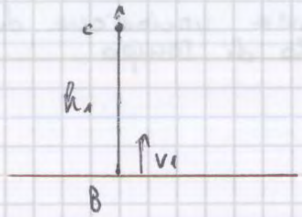
⇓

$$\int_0^t \left(\vec{F}_{B,A} + \vec{F}_{A,B}\right) dt = 0$$

$$\int_0^t \left(\vec{F}_{B,A} + \vec{F}_{A,B}\right) dt = 0 \quad \text{per ogni } t \implies \boxed{\vec{F}_{B,A} + \vec{F}_{A,B} = 0}$$

dimostrato il principio di A-R

PRINC. DI CONSERVAZ. DELLA QDM: in assenza di forze applicate la qdm di un punto materiale rimane costante



$$\begin{cases} v_{\text{(risolita)}} = v_1 - g t_s \\ y = v_1 t - \frac{1}{2} g t \end{cases}$$

IN $C \rightarrow v = 0 \qquad 0 = v_1 - g t_s \qquad t_s = \frac{v_1}{g}$

$$h_1 = v_1 t_1 - \frac{1}{2} g t_s^2 = \frac{v_1^2}{g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g}$$

$$v_1 = \sqrt{2 g h_1}$$

$$\vec{V}(\tau) = \sqrt{2 g h_1} \cdot \vec{u}_y$$

" dopo l'urto

pertanto la forza media (sost.)

$$\vec{P}(0) = M \cdot \vec{v} = M \cdot \sqrt{2 g h_0}\ \vec{u}_y$$

$$\vec{P}(\tau) = M \cdot \vec{v} = M \cdot \sqrt{2 g h_1}\ \vec{u}_y$$

forza media $\boxed{\langle \vec{F} \rangle = \dfrac{M\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_0}\right)}{\tau}\ \vec{u}_y}$

RISULTANTE, EQUILIBRIO, REAZIONI VINCOLARI

principio di sovrapposizione

Se abbiamo N forze applicate a 1 corpo la forza risultante è = alla somma vettoriale tra le N forze (risultante)

l'accelerazione del punto è pari alla somma vettoriale delle accelerazioni

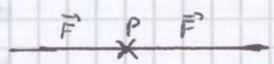
$$R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_i + \vec{F}_N$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad \vec{R} = M \cdot \vec{a}$$

↓
risultante

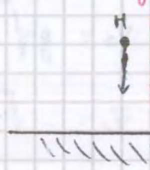
$$\boxed{\vec{a}} = \frac{\vec{R}}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum^{N} \frac{\vec{F}_i}{M} = \boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{a}_i}$$

se la forza agente su P è nulla non necessariamente non agiscono forze sul punto, ma potrebbe aversi che la Σ delle forze agenti sia $= 0$ ⟵ un corpo è in equilibrio statico quando la risultante è $= 0$



Nasce dal fatto che i corpi lasciati liberi subiscono una accelerazione di gravità $\simeq 9{,}8\ m/s^2$
↓
conseguenza della attrazione terrestre

quando un corpo che cade in prossimità della terra esso è sottoposto a una forza detta forza peso



$$\boxed{\vec{P} = M \cdot \vec{g}}$$

↳ bilancia x misurare la f. peso

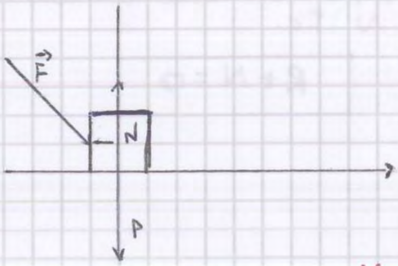
- MASSA è indipendente dalla forza agente
- FORZA PESO risulta dalla interazione di un corpo con la terra

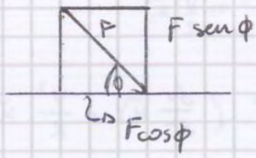
] 2 ≠ caratteristiche del corpo

$$\vec{F}\vec{u}_x + \vec{N}\vec{u}_y - P\vec{u}_y = M \cdot a\vec{u}_x$$

$$F\vec{u}_x + (N-P)\vec{u}_y = M \cdot a\vec{u}_x$$

$$\boxed{\begin{cases} F = Ma & (x) \qquad a = \frac{F}{M} \\ N - P = 0 & (y) \qquad N = P \end{cases}}$$





FORZA APPLICATA NON // AL PIANO

Se la forza non è parallela al piano.

$$\vec{F} = F(\cos\phi\,\vec{u}_x - \sin\phi\,\vec{u}_y)$$
$$\vec{N} = N\vec{u}_y$$
$$\vec{P} = -P\vec{u}_y$$
$$\vec{a} = a u_x$$

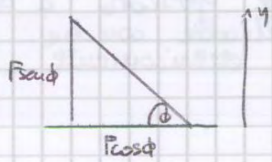
$$F\cos\phi\,\vec{u}_x - F\sin\phi\,\vec{u}_y + N\vec{u}_y - P\vec{u}_y = Ma\vec{u}_x$$

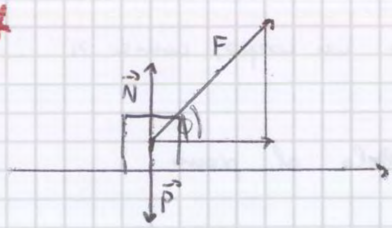
$$F\cos\phi\,\vec{u}_x + (-F\sin\phi + N - P)\,\vec{u}_y = M\vec{a}u_x$$

(x) $F\cos\phi = Ma$

(y) $N - (P + F\sin\phi) = 0$

$$\boxed{\begin{cases} a = \frac{F}{M}\cos\phi \\ N = P + F\sin\phi \end{cases}}$$





in qst caso $\vec{F} = F(\sin\phi\,\vec{u}_y + \cos\phi\,u_x)$

$$\vec{N} = N\vec{u}_y$$
$$\vec{P} = -P\vec{u}_y$$
$$\vec{a} = a u_x$$

$$F\cos\phi\,\vec{u}_x + (F\sin\phi + N - P)\,\vec{u}_y = Ma\vec{u}_x$$

(x) $F\cos\phi = Ma$

(y) $N + F\sin\phi - P = 0$

$$\boxed{\begin{cases} a = \frac{F}{M}\cos\phi \\ N = P - F\sin\phi \end{cases}}$$

Tutto ciò vale se $N > 0$

$P - F\sin\phi > 0$

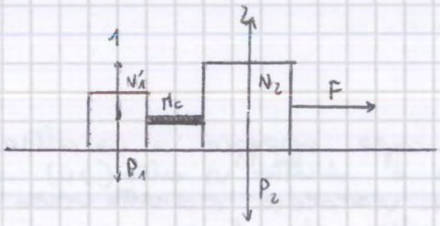
$P > F\sin\phi$

↳ $N < 0$ = il tavolo x mantenere il corpo fermo dovrebbe esercitare una forza attrattiva sul corpo.

↳ situaz che si verifica quando la R delle forze è diretta verso l'alto

non ha senso in qst caso parlare di reazione vincolare

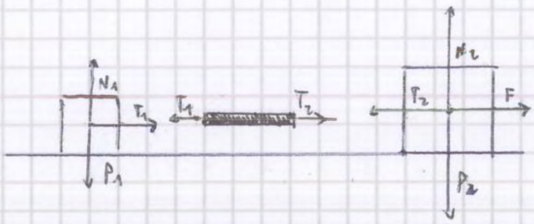
CORPI UNITI DA UNA CORDA



supponendo $M_C = 0$ (massa corda)

$M_{TOT} = M_1 + M_2$

$a = \dfrac{F}{M_1 + M_2}$ la fune regge o meno?



$T_2 - T_1 = M_c \cdot a$ con $m_c = 0$

$T_2 = T_1 = T$

mov. sull'asse x $\begin{cases} T = M_1 \cdot a \\ F - T = M_2 \cdot a \end{cases}$ +

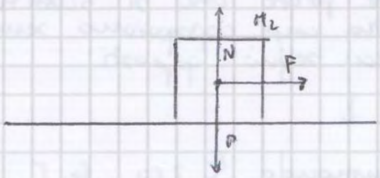
$F = a(M_1 + M_2)$

$a = \dfrac{F}{M_1 + M_2}$ $\quad T = \dfrac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot F \leq T_0$

la motrice può applicare la F massima x la corda non si spezzi pari a

$$\boxed{F \leq \frac{M_1 + M_2}{M_1} \cdot T_0}$$

- Se $F \geq \dfrac{M_1 + M_2}{M_1} \cdot T_0$ la fune si spezza



si ha il semplice caso in cui $a = \dfrac{F}{M_2}$

Se $tg\phi > \mu_s$ si ha movimento • la componente della forza peso lungo il piano inclinato deve superare la minima forza di attrito statico

f = ATTRITO DINAMICO = f_N

$f_N = \mu_N \cdot N = \mu_N P\cos\phi = \mu_N Mg\cos\phi$

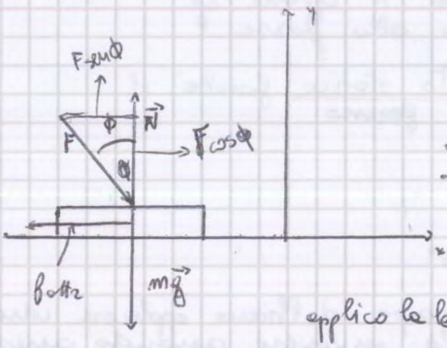
$P sen\phi - f_N = Ma$

$\cancel{M}g\, sen\phi - \mu_N \cancel{M}g\cos\phi = \cancel{M}a$

$$\boxed{a = g(sen\phi - \mu_N \cos\phi)}$$

↳ $sen\phi - \mu_N\cos\phi > 0$

si ha che $\mu_d < tg\phi$



Quando è presente l'attrito

- statico: tra 2 corpi fermi 1 risp. all'altro
- dinam: " che si muovono 1 risp all'altro

applico la legge di Newton $\boxed{\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{f} = m \cdot a}$

se M è fermo succede che $\vec{a} = 0$

$f_{attr} = f_s \leq \mu_s N$

$$F + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{f_s} = 0$$

ne scrivo le componenti cartesiane $\downarrow (F sen\phi\, \vec{u_x} - F\cos\phi\, \vec{u_y}) + N\vec{u_y} - mg\vec{u_y} \ominus f_s\vec{u_x}$

agisce in verso opposto all'asse x

$$(F\, sen\phi - f_s)\vec{u_x} + (N - F\cos\phi - mg)\vec{u_y} = 0$$

Componente scalare sull'asse x • $F sen\phi - f_s = 0$

Comp. scalare sull'asse y • $N - F\cos\phi - mg = 0$

Fino a quando c'è equilibrio la

$$\begin{cases} f_s = F sen\phi \\ N = F\cos\phi + mg \end{cases}$$

ma f_s deve sempre essere $\leq \mu_s N$ pertanto $F sen\phi \leq \mu_s(F\cos\phi + mg)$

$F(sen\phi - \mu_s\cos\phi) \leq mg \cdot \mu_s$

se $sen\phi - \mu_s\cos\phi < 0$

$sen\phi < \mu_s\cos\phi$

$tg\phi \leq \mu_s$

posto $tg\,\Phi = \mu_s$ allora $\phi < \Phi$

considero M

$$\begin{cases} x: & F - N = M \cdot a \\ y: & Q = Mg + f_s = Mg + mg = (m+M)g \end{cases}$$

forza esercitata dal pavimento sulle masse

Sommando membro a membro le 2 relazioni (quelle di m e M)

$$\cancel{N} + F - \cancel{N} = (m+M)a$$

$$F = (m+M)a \longrightarrow a = \frac{F}{m+M}$$

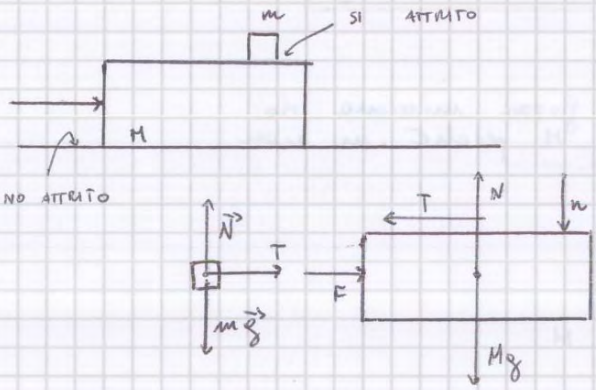
$$N = ma = \frac{m}{m+M} F$$

Il movimento descritto esiste fino a che

$$f_s \leq \mu_s \cdot N$$

$$mg \leq \mu_s \cdot N \rightsquigarrow \cancel{m}g \leq \mu_s \frac{\cancel{m}}{m+M} \cdot F \longrightarrow \boxed{F \geq \frac{(m+M)g}{\mu_s}}$$

Qual'è la massima a che può avere un camion affinchè la cassa non si muova



Se non ci fosse l'attrito tra m e M il corpo cadrebbe sempre

per m

$$\begin{cases} x: & T = ma \\ y: & n = mg \end{cases}$$

per M

$$\begin{cases} F - T = Ma \\ N = n + Mg \end{cases}$$

T nasce dal fatto che c'è attrito

↳ fino a quando non c'è moto relativo → T è attrito statico pertanto $T \leq \mu_s \cdot$

$$T \leq \mu_s \cdot mg$$

Sommo membro a membro

$$\cancel{T} + F - \cancel{T} = (m+M)a$$

$$F = (m+M)a \qquad a = \frac{F}{m+M}$$

la forza di attrito deve essere (condiz)

$$T = ma = \frac{m}{m+M} \cdot F$$

Condizione

$$T \leq \mu_s mg \Rightarrow \frac{\cancel{m}}{m+M} \cdot F \leq \cancel{\mu_s} mg$$

$$\boxed{F \leq \mu_s (m+M) g}$$

$f_s = m_2 g \qquad f_s \leq \mu_s m_1 g$

$m_2 \cancel{g} \leq \mu_s m_1 \cancel{g}$

$$\boxed{m_2 \leq \mu_s m_1}$$

- Se il sistema è DINAMICO

$f = f_k = \mu_k N = \mu_k m_1 g$

$$\begin{cases} T - \mu_k m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

$$m_2 g + \mu_k m_1 g = (m_1 + m_2) a$$

$$\boxed{a = \frac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2} g}$$

$T = \mu_k m_1 g + m_1 a$

$$T = (\mu_k g + a) m_1 = \left\{ \mu_k g + \frac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2} g \right\} m_1$$

$$= \left\{ \frac{\mu_k g (m_1 + m_2) + (m_2 - \mu_k m_1) g}{m_1 + m_2} \right\} m_1$$

$$= \frac{\cancel{\mu_k m_1} + \mu_k m_2 + m_2 \cancel{- \mu_k m_1}}{m_1 + m_2} m_1 g = (1 + \mu_k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Se c'è attrito ed è dinamico

$$\begin{cases} F - T = M \cdot a \\ T - f_N = m \cdot a \end{cases}$$

Se $M \to 0$ $\quad F - T = 0 \quad F = T = k\Delta x$

$N = mg \qquad f_N = \mu_N N = \mu_N mg$

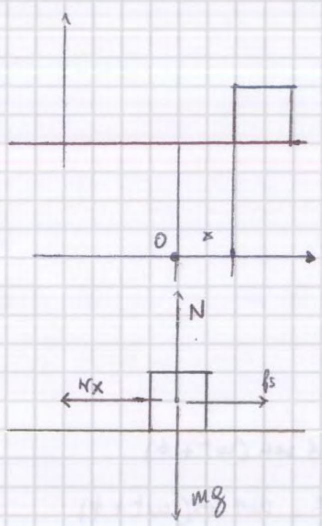
$T - \mu_N mg = ma$

$T = m(a + \mu_N g)$

$k\Delta x = m(a + \mu_N g)$

$$\boxed{\Delta x = \frac{m(a + \mu_N g)}{k}}$$

deformaz. in presenza di attrito



Quale è il max valore di x, X per cui NON si ha movimento?

(x) $f_s - kx = 0 \qquad f_s = kx$

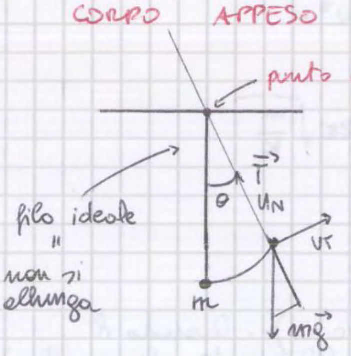
(y) $N - mg = 0 \qquad N = mg$

$f_s \leq \mu_s \cdot N$

$kx \leq \mu_s \cdot m \cdot g$

$$\boxed{x \leq \mu_s \frac{mg}{k}}$$

CORPO APPESO A UN FILO IDEALE (PENDOLO)



$m\vec{a} = \vec{F}$

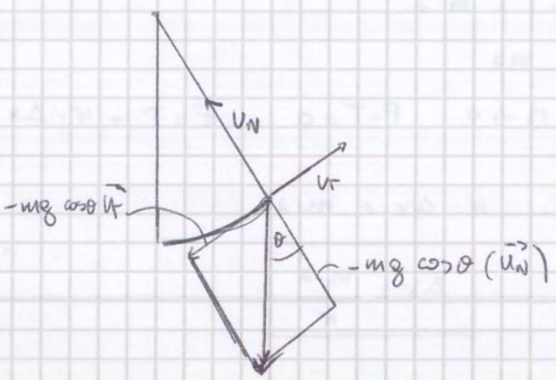
$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$

$\vec{T} + m\vec{g} = m\left\{\frac{dv}{dt}\vec{u_T} + \frac{v^2}{L}\vec{u_N}\right\}$

$\vec{T} = T\vec{u_N}$

$m\vec{g} = -mg(\operatorname{sen}\theta\, \vec{u_T} + \cos\theta\, \vec{u_N})$

$$T\vec{u_N} - mg\operatorname{sen}\theta\,\vec{u_T} - mg\cos\theta\,\vec{u_N} = m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u_T} + \frac{v^2}{L}\vec{u_N}\right)$$



(u_N) $T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{L}$

(u_T) $-\cancel{m}g\operatorname{sen}\theta = \cancel{m}\frac{dv}{dt}$

Scomponendo la forza nelle sue componenti nello spazio

$(\vec{U}_N)$ $N = \omega^2 R \cdot m$

$(\vec{U}_T)$ $0 = 0$

$(\vec{U}_z)$ $-mg + f_s = 0$ perché il corpo non cade quando il pavimento si abbassa

$f_s = mg$ → la forza di attrito deve contrastare la forza peso

↓

$f_s \leq \mu N$

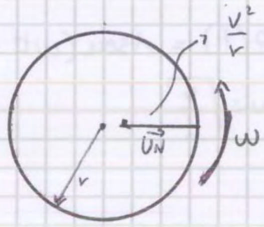
$\cancel{m}g \leq \mu_s \cancel{m} \omega^2 R$ non dipende dalla massa

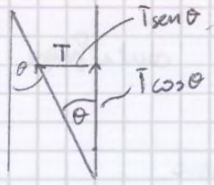
$\boxed{\omega \geq \sqrt{\dfrac{g}{\mu_s R}}}$ → velocità angolare minima x' un corpo non cade

---

STUDIO DEL PENDOLO CONICO

Quanto è la ω minima affinché si crei un angolo θ





Quando $\omega = cost$ la risultante delle forze verticali è $= 0$

$\vec{a} = \dfrac{v^2}{R} \vec{u}_N$

legge di Newton $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$

Componenti nello spazio

(U_z) $T\cos\theta - mg = 0$

(U_T) $0 = 0$

(U_N) $T\sin\theta = \dfrac{mv^2}{R}$

$\begin{cases} T\cos\theta = mg \\ T\sin\theta = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$ → $\tan\theta = \dfrac{v^2}{gR}$

$v = \sqrt{gR\tan\theta} = \sqrt{g L \sin\theta \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \sqrt{\dfrac{gL}{\cos\theta}} \cdot \sin\theta$

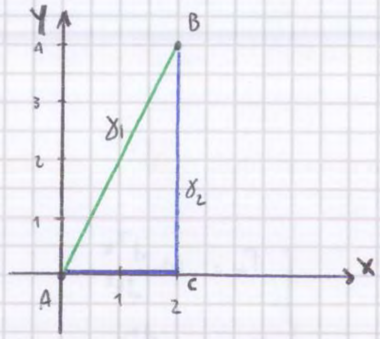
relazione tra angolo di apertura del cono e velocità angolare

$\omega = \dfrac{v}{R} = \sqrt{\dfrac{gL}{\cos\theta}} \cancel{\sin\theta} \cdot \dfrac{1}{L\cancel{\sin\theta}} = \sqrt{\dfrac{g}{L\cos\theta}}$

Quando la forza dipende da una posizione $\longrightarrow$ abbiamo un campo vettoriale

Pb. (esempio)

$$\vec{F} = (y^2 - x^2)\,\vec{u}_x + 3xy\,\vec{u}_y$$



A(0,0)
B(2,4)

Quanto vale la forza da A a B

- Il lavoro dipende da F ma anche dal percorso della particella

$\gamma_{1\ A \to B}$ $\quad y = 2x$

$\gamma_{2\ A \to C}$ $\quad y \equiv 0$

$C \to B$ $\quad x = 2$

perché i vettori sono $\perp$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y) \cdot (\vec{u}_x dx + \vec{u}_y dy) = F_x dx + F_y dy$$

Il lavoro dipende generalmente dal percorso

$$W^{\gamma_1}_{A \to B} \neq W^{\gamma_2}_{A \to B}$$

$\hookrightarrow$ in altre situazioni il lavoro non dipende dal percorso

$$W^{(\gamma)}_{A \to B} = \int_{A,\gamma}^{B} (F_x dx + F_y dy)$$

LAVORO SU γ_1

$$W^{(\gamma)}_{A \to B} = \int_{A,\gamma_1}^{B} (F_x dx + F_y dy) = \int_{A,\gamma_1}^{B} (y^2 - x^2)\,dx + 3xy\,dy \Big|_{y=2x}$$

$$W^{(\gamma)}_{A \to B} = \int_0^2 \left\{ [4x^2 - x^2]\,dx + 3x(2x)\,d(2x) \right\} =$$

$$W^{(\gamma)}_{A \to B} = \int_0^2 \left\{ 3x^2\,dx + 12x^2\,d(x) \right\} = \int_0^2 15x^2\,dx = \cancel{15}^{5}\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^2 = 40\,J$$

$$W^{(\gamma_1)}_{A \to B} = 40\,J$$

LAVORO SU γ_2

$$W^{(\gamma_2)}_{A \to B} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy) = \int_0^2 \left\{ (y^2 - x^2)\,dx + 3xy\,dy \right\}_{y=0} +$$

$$\int_0^4 \left\{ (y^2 - \underbrace{x^2)\,dx}_{0} + 3xy\,dy \right\}_{\substack{x=2\\ dx=0}}$$

$$= \int_0^2 -x^2\,dx + \int_0^4 6y\,dy = \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + 3\left[y^2\right]_0^4 = \frac{8}{3} + 48 = \frac{152}{3} =$$

Cambiando percorso $\rightarrow$ cambia il lavoro pertanto esprimo il lavoro

$$W^{\gamma}_{A\to B} = \int_{A\,\gamma}^{B} F\,d\vec{r} = \int_{A\,\gamma}^{B} (ds\,\vec{u}_r)\cdot m\vec{a} =$$

$$= \int_{A\,\gamma}^{B} m\left(\frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_N\right)\cdot(ds\,\vec{u}_T)$$

$= 0$ xr i vettori sono $\perp$ tra loro

prodotto scalare $= 1$ perché i vettori sono $\parallel$

$$= \int_{A\,\gamma}^{B} m\left(\frac{dv}{dt}\right)ds$$

ricordo la def di velocità scalare

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} \longrightarrow ds = v\,dt}$$

sostituisco $= \displaystyle\int_{A\,\gamma}^{B} m\left(\frac{dv}{\cancel{dt}}\right)v\,\cancel{dt} = \int_{A\,\gamma}^{B} m\,v\,dv$

quindi $W^{\gamma}_{A\to B} = \frac{1}{2}m\left\{v^2(B) - v^2(A)\right\}$ oppure $\boxed{W^{\gamma}_{A\to B} = \frac{1}{2}mv^2(B) - \frac{1}{2}mv^2(A)}$

quando la part. passa da A a B il lavoro fatto dalla risultante è = alla variazione di questa quantità che è la forza viva o l'energia cinetica

ora invece la definiamo energia cinetica

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv^2}$$

$$\boxed{W^{\gamma}_{A\to B} = E_K(B) - E_K(A)}$$

in realtà la traiettoria si può omettere xr tanto è obbligata

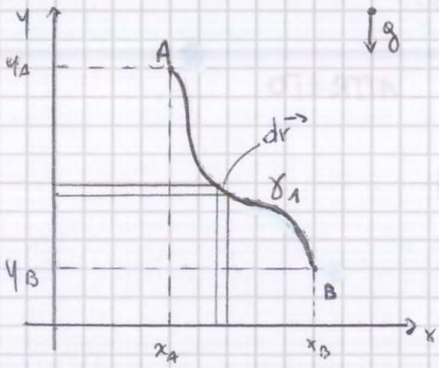
Il lavoro fatto da tutte le forze esercitate su una particella è uguale alla variazione dell'energia cinetica

formule alternative poiché $\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{v} = \dfrac{\vec{p}}{m}$ e $E_K = \dfrac{1}{2}\cancel{m}\dfrac{p^2}{m^2} = \dfrac{p^2}{2m}$

Il lavoro non dipende solo da pos. iniziale e finale ma anche del percorso su cui esso viene calcolato
↳ Lavoro fatto dalla forza di attrito

LAVORO SVILUPPATO DALLA FORZA PESO



$\downarrow g$

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

calcoliamo il lavoro fatto per andare A→B

$$W^{\gamma_1}_{A\to B} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{P}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{P} = m\vec{g} = m(-g\vec{u}_y) = -mg\vec{u}_y$$

Usando coord. cartesiane lo spost. infinitesimo $d\vec{r}$ è

$$d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y$$

sostituisco $W^{\gamma_1}_{A\to B} = \int_{A,\gamma_1}^{B} (dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y)(-mg\,\vec{u}_y)$

$$= \int_{A,\gamma_1}^{B} -mg\,dy = -mg\int_{A,\gamma_1}^{B} dy$$

→ scompare la x, perciò in quest'o caso il lavoro NON dipende dal percorso fatto

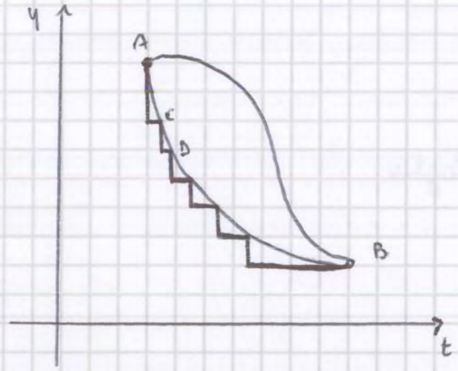
$$= -mg\left\{y(B) - y(A)\right\}$$

$$= +mg\,y(A) - mg\,y(B)$$

$$\boxed{W_{A\to B} = mg\,y(A) - mg\,y(B)}$$

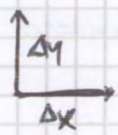
il lavoro è uguale alla differenza di energia potenziale

PIÙ SEMPLICEMENTE (senza integrali) METODO 2

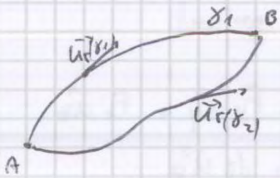


$P\bar{C}D = mg\,\Delta y$

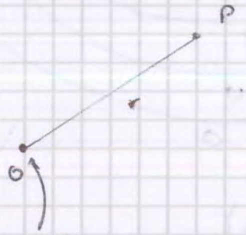
tutti gli spost. orizzontali non danno contributo, quelli verticali sì



quindi cambiando percorso lo spostamento verticale è = e quindi = il lavoro la forza di attrito è data da $\vec{f}_k = -\mu_k m g \vec{u}_t$ è costante in modulo ma direzione e verso dipendono dalla traiettoria su cui il punto si muove



FORZA CENTRALE sono quelle che mantengono cost. il modulo in ogni punto della γ



centro di forza

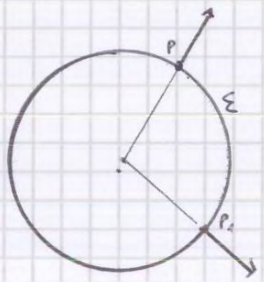
$$\boxed{\vec{F} = f(r) \cdot \vec{u}_r}$$ è una forza centrale

- Se $f(r)$ è > 0 è una forza repulsiva
- Se $f(r)$ è < 0 è una forza attrattiva

Corollario delle forze centrale

↳ Per ogni punto $P \in \gamma$ il modulo della forza è uguale

$\forall P \in \Sigma$



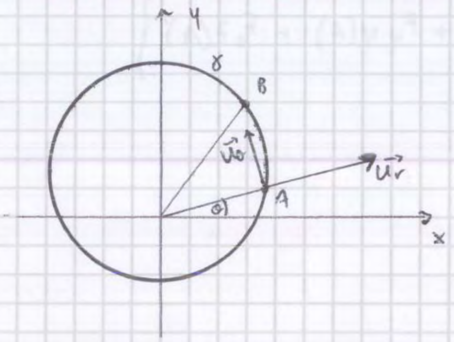
- le forze elettrostatiche sono di questo tipo

$$\vec{F} = k \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

↳ cariche con = segno → repulsive
cariche con ≠ " → attrattive

Supponendo Q fermo in un punto quanto vale il lavoro fatto dalla forza elettrica quando q si sposta da A a B?

LAVORO DI UNA PARTICELLA CARICA SPOSTATA DA A a B

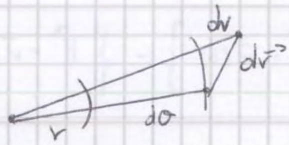


Usiamo coordinate polari

$$W_{A \to B}^{\gamma} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

nelle coord. polari $d\vec{r} = dr \cdot u_r + r\, d\theta\, \vec{u}_\theta$

- ha una parte radiale
- " " trasversa



FORZA ELASTICA

FE dipende da una deformazione ed è una forza centrale

$$\boxed{\vec{F} = -kr\vec{u}_r}$$

Quanto vale il lavoro fatto da questa forza attrattiva

↳ iter calcoli = prima

$$\int_A^B {}_\gamma f(r)\,dr = \int_A^B {}_\gamma -kr\,dr = -k\int_A^B {}_\gamma r\,dr = -\frac{1}{2}k\left[r^2\right]_A^B$$

$$\boxed{W^\gamma_{A\to B} = \frac{1}{2}k r^2_A - \frac{1}{2}k r^2_B}$$

lavoro sviluppato dalla forza elastica

RICAPITOLANDO

FORZA ATTRITO $\quad W^{(\gamma_1)}_{A\to B} \neq W^{(\gamma_2)}_{A\to B} \quad W^\gamma_{A\to B} = -\mu_k mg\, S^\gamma_{(A\to B)}$

FORZA PESO $\quad W_{A\to B} = mgy(A) - mgy(B)$

FORZA COSTANTI $\quad W_{A\to B} = \vec{F}\cdot\vec{r}_B - \vec{F}\cdot\vec{r}_A$

FORZA COULOMB $\quad W_{A\to B} = k\frac{Qq}{r_A} - k\frac{Qq}{r_B}$

FORZA ELASTICA $\quad W_{A\to B} = \frac{1}{2}kr^2_A - \frac{1}{2}kr^2_B$

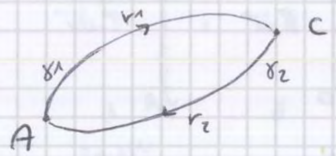
Forze divise in
- quelle che non dipendono dal percorso sono FORZE CONSERVATIVE
  ↳ a livello microscopico le forze sono tutte conservative, a livello macroscopico quasi nessuna

  $W_{A\to B}$ non dipende da γ

  $$\boxed{W_{A\to B} = f(A,B)}$$

  ⇝ dipende solo dal punto di arrivo e dal punto di partenza
- Le altre sono FORZE DISSIPATIVE

Cosa capita se $A \equiv C$? • Il lavoro è $=0$ perché lo spostamento è nullo



Se la forza è conservativa abbiamo che

$$W^{\gamma_1}_{A\to C} = E_p(A) - E_p(C)$$
$$W^{\gamma_2}_{C\to A} = E_p(C) - E_p(A)$$
$+$

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{A\,\gamma_1}^{C} \vec{F}\,dr + \int_{C}^{A} \vec{F}\,d\vec{r} = W^{\gamma_1}_{A\to C} + W^{\gamma_2}_{C\to A}$$

circuitazione
=
lavoro fatto su un percorso chiuso

$$= \cancel{E_p(A)} - \cancel{E_p(C)} + \cancel{E_p(C)} - \cancel{E_p(A)} = 0$$

Il lavoro compiuto su un percorso chiuso è nullo
↳ la circuitazione $=0$

TEOREMA DI CONSERVAZ. DELL' ENERGIA

EN Se su un corpo agiscono solo forze conservative l'evoluzione del corpo avviene in modo da F_c $\boxed{E_K + E_p = \text{costante}}$
↳ vale se e solo se le forze in gioco sono conservative (H_p)

$E_K + E_p =$ energia meccanica totale

x teo Energia cinetica $\quad W_{A\to B} = E_K(B) - E_K(A)$ $\quad$ dove $E_K = \frac{1}{2} m v^2$

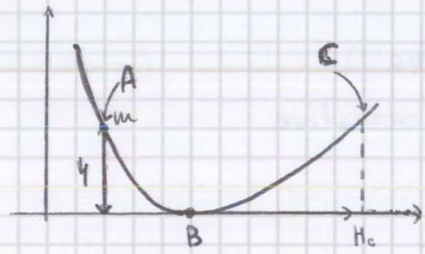
x forze conservative $\quad W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B)$

eguaglio $\quad E_K(B) - E_K(A) = E_p(A) - E_p(B)$ $\quad$ divido elem. di B e elem. di A

$$E_K(B) + E_p(B) = E_K(A) + E_p(A)$$

$E = E_K + E_p$ $\quad$ $E =$ energia meccanica totale

$E(B) = E(A)$



$E_p = mgy$

$E = E_K + E_p =$ costante

$E(A) = \frac{1}{2}mv^2(A) + mgy_A = mgh$

$v^2(A) = 0$ → se il corpo è fermo

$E(B) = \frac{1}{2}mv^2(B) + mgy_B$

$mgy_B = 0$ perchè $y_B = 0$

$E(B) = \frac{1}{2}mv^2(B)$

energia non cambia $E(A) = E(B)$ quindi $\cancel{m}gH = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2(B)$

arrivo con velocità $V_{(B)} = \sqrt{2gH}$

in C (punto di massima altezza)

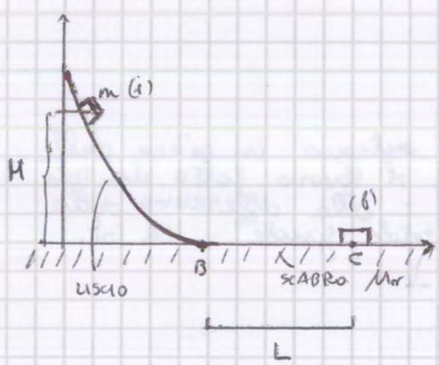
$V(C) = 0$

$E(C) = \frac{1}{2}mV_c^2 + mgH(C) = mgH(c)$, con $V_c^2 = 0$

$E(A) = E(C) \Rightarrow \cancel{m}gH = \cancel{m}gh(C)$

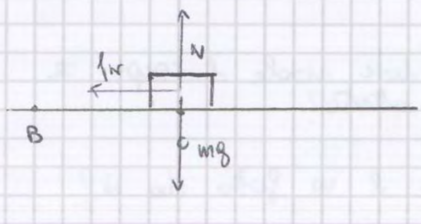
Quota partenza = quota arrivo

E.2 (2)



Dove arriva il corpo?

$\vec{F}$ { gravità / attrito



$N = mg$

$f_K = \mu_K N = \mu_K mg$

$E(f) - E(i) = W^{(nc)}_{i \to f}$

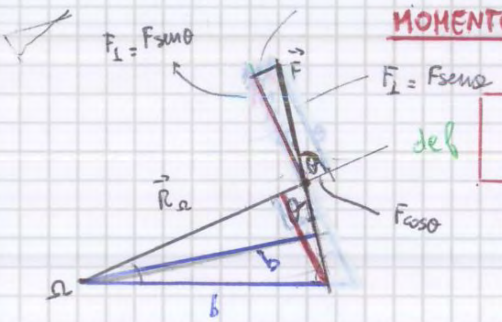
$E(C) - E(A) = W^{(nc)}_{A \to C}$

Nel punto C $E(c) = \frac{1}{2}mv^2(c) + mgh(c) = 0$

$v^2(c) = 0$ per $v = 0$; $mgh(c) = 0$ per $h = 0$

Nel punto A $E(A) = \frac{1}{2}mv^2(A) + mgH$

$v^2(A) = 0$



MOMENTO DELLA FORZA rispetto al polo Ω il prodotto esterno di $R_\Omega \times \vec{F}$

def $\boxed{\vec{M}_\Omega = \vec{R}_\Omega \times \vec{F}}$

$[M] = L \cdot M \frac{L}{T^2} = M \frac{L^2}{T^2}$

$[M] = m \cdot N$

↳ mentre il lavoro è una quantità scalare (J)
↳ questo è una grandezza vettoriale (N · m)

modulo $|\vec{M}_\Omega| = |\vec{R}_\Omega||\vec{F}| \sin\theta$

Il braccio è $R_\Omega \sin\theta$ ovvero la distanza

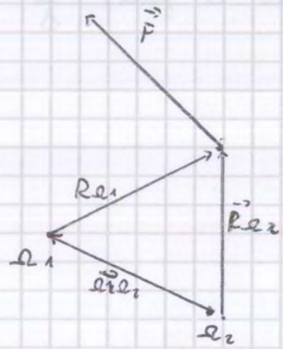
$F_\perp = F\sin\theta$

$M_\Omega = \underbrace{(R_\Omega \sin\theta)}^{b} F$

$R_\Omega \underbrace{(F\sin\theta)}_{F_\perp}$

Quanto vale il mom. di una forza? Bisogna sempre specificare il POLO

↳ il momento dipende dal polo rispetto al quale esso viene calcolato



Qual'è il legame tra i momenti?

$\vec{M}_{\Omega_1} = \vec{R}_{\Omega_1} \times \vec{F}$
$\vec{M}_{\Omega_2} = \vec{R}_{\Omega_2} \times \vec{F}$

ma se facciamo $\vec{R}_{\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} = \vec{R}_{\Omega_2}$

↓ sostituisco sopra nella seconda

$M_{\Omega_2} = (\vec{R}_{\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}) \times (\vec{F})$

$M_{\Omega_2} = \overrightarrow{R_{\Omega_1}} \times \vec{F} + \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} \times \vec{F} = \vec{M}_{\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} \times \vec{F}$

la variazione è uguale a $M_{\Omega_2} - M_{\Omega_1} = \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} \times \vec{F}$

Cambiando il polo cambia il momento

e la diff tra i momenti è = al vettoriale tra la dist. tra i poli e la forza la form. dice che se il mom. viene calc. rispetto a un polo mobile il suo momento dipende anche da questo, e in particolare dalla sua velocità

- se il polo Ω è fermo $\rightarrow$ R_Ω è costante
  $\vec{V}_\Omega = 0$

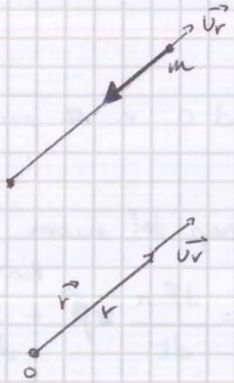
pertanto $\boxed{\dfrac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{M}_\Omega}$ Per un polo FISSO

Quindi la derivata temporale del mom. angolare è uguale al momento delle forze se entrambi sono riferiti ad 1 stx polo fisso in 1 sist. di ref. inerziale

Se su una part. si esercita solo 1 FORZA CENTRALE essa si muove su un piano

REGOLA DELLE FORZE CENTRALI

$\Omega \equiv O$ Ω coincide con il centro di forza
(es mom. della Terra calcolato risp. al Sole)



$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{u}_r$

Se calcolo il mom. rispetto a O ottengo

$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{M}_O = (r\vec{u}_r) \times \{f(r)\,\vec{u}_r\}$ sono vettori paralleli quindi il prodotto esterno è nullo

$\equiv 0$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \qquad \vec{L}_O = \text{costante}$$

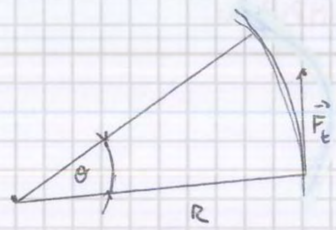
Se 1 part. si muove sotto l'eff. di forze centrale il momento angolare è costante

$\hookrightarrow$ numero quantico "m" secondario è legato alla costanza del mom. angolare

CONSEGUENZE: nei casi di POLO FISSO

RICORDA! Teo q-di moto $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$$\int_{t_1}^{f} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_1} \vec{F}dt \qquad P_{tf} - P_{t_1} = J(t_1, t_f) = \int_{t_1}^{t_f} \vec{F}\,dt$$



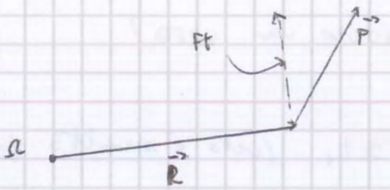
$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (F_r \vec{u}_r + F_t \vec{u}_\theta)\cdot(\quad)$$

$$d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

Quando consideriamo un archio $dr = 0$, $r = R$

$$d\vec{r} = R\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

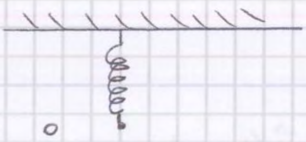
$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (F_r \vec{u}_r + F_t u_\theta)\cdot(R\,d\theta\,\vec{u}_\theta)$$



$$= F_t R\,d\theta = M\,d\theta$$

Esercizi

Velocità in fz. di x, il tempo in cui si annulla?



$t = 0$ $\quad m$

$x(0) = 0$
$v(0) = 0$

$$F = mg - kx$$

USO TEO ENERGIA CINETICA

$$E_K(x) - E_K(0) = W_{0\to x}$$

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = \int_0^x \vec{F}\,dx$$

$$W_{0\to x} = \int_0^x \vec{F}\,dx = \int_0^x mg - kx = mgx - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2(x) = \cancel{m}gx - \frac{1}{2}kx^2$$

$$v^2 = 2gx - \frac{k}{m}x^2 \qquad v^2(x) = x\left\{2g - \frac{k}{m}x\right\}$$

$v^2 = 0$ quando $x_1 = 0$ partenza

$$x_2 = \frac{2mg}{k}$$

$$F(x_1) = mg - kx_1 = m$$

$$F(x_2) = mg - kx_2 = -mg$$

RICORDA $E(B) - E(A) = W^{(nc)}_{A \to B}$

POTENZA DI UNA FORZA

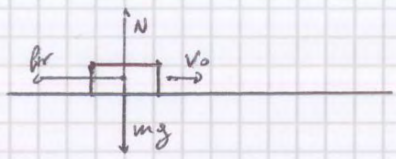
$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$P = \frac{dW}{dt}$ è la quantità di lavoro fatto nel tempo è la POTENZA

$= \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ $\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$ potenza

PROBLEMA

Calcolare la rapidità con cui si dissipa l'energia di un corpo a causa di una forza di attrito?



$f_r = \mu_r \cdot mg$

$m \frac{dv}{dt} = -f_r$

$E_{TOT\ corpo} = E_k + E_p$

$E_{TOT\ corpo} = \frac{1}{2} m v^2 + 0$ → tr su sup. piana

Rapidità = derivata rispetto al tempo

$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} m\, 2v \frac{dv}{dt} = -f_r \cdot v$

$-f_r$

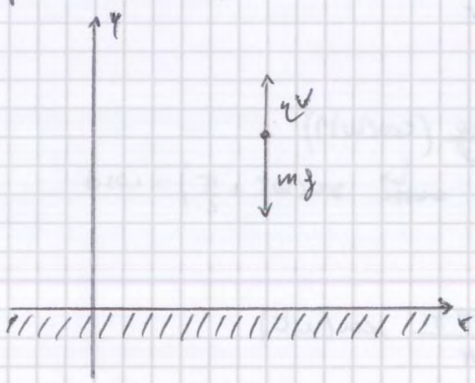
la velocità con cui un corpo dissipa la sua energia è uguale alla sua potenza

---

$\vec{f}_v = -\eta \cdot \vec{v}$

forza di res viscosa

Con che rapidità si dissipa l'en. di un corpo che cade



$m \frac{dv}{dt} = -mg + \eta v$

$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + mgy$

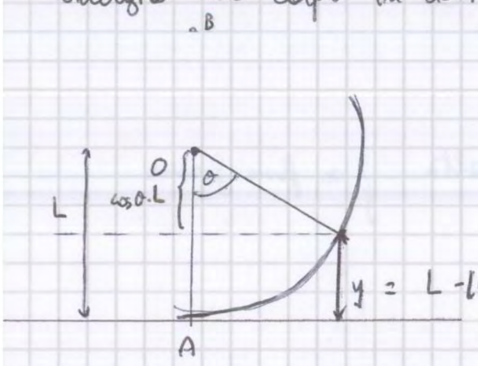
$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2 + mgy\right) = \frac{1}{2} m 2 v \frac{dv}{dt} + mg \frac{dy}{dt} =$

$mv \frac{dv}{dt} + mgv = \left(m \frac{dv}{dt} + mg\right) v = f_v\, v = \eta v^2$

Quando c'è dissipaz. il decremento dell'E è = alla potenza della forza dissipativa

In questo caso la T non gioca

Energia del corpo in det. posizione



$y = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$

$E(\theta) = E_k(\theta) + E_p(\theta) = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgL(1-\cos\theta)$ se non ci sono dissipat. l'energia è costante

$E_A = E(\theta = 0) = \frac{1}{2}mv_0^2$

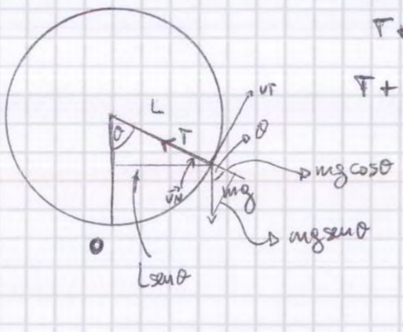
$E_B = E(\theta = \pi) = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2mgL$

$E_A = E_B$ Condizione xr arrivi sopra è che $v_B = 0$

$v_B = 0$

$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgL \rightarrow \boxed{v = 2\sqrt{gL}}$ è la velocità minima x cui la massa arriva in B

In questo caso quanto vale la forza F che deve sopportare la massa?



$T + mg = m \cdot a$

$T + mg = m \cdot \left\{ \frac{dv}{dt} u_T + \frac{v^2}{L} \vec{u_N} \right\}$

$T(\theta)\vec{u_N} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{u_T} - mg\cos\theta\,\vec{u_N} = m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u_T} + \frac{v^2}{L}\vec{u_N}\right)$

$$\begin{cases} -mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\frac{dv}{dt}u \\ T(\theta) - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{L} \end{cases}$$

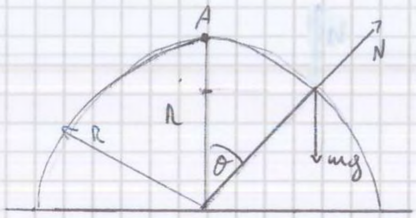
$T(\theta) = m\frac{v^2}{L} + mg\cos\theta$

$E(\theta) = E(0)$

$\frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgL(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_0^2$

$v^2(\theta) = v_0^2 - 2gL(1-\cos\theta)$

la tensione di θ in ogni punto è $T(\theta) = \frac{m}{L}\left[v_0^2 - 2gL(1-\cos\theta)\right]^2 + mg\cos\theta$



In quale punto il punto P abbandona l'igloo e se è presente attrito questo accade prima o dopo

$$E(A) = E_K(A) + E_P(A) = 0 + mgR$$

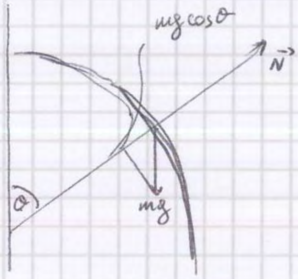
$$E(\theta) = E_K(\theta) + E_P(\theta) = \frac{1}{2} m v^2(\theta) + mgR\cos\theta$$

pos. generica

$E(A) = E(\theta)$ xk non ci sono forze dissipative

$$\frac{1}{2} m v^2(\theta) + mgR\cos\theta = mgR$$

$$v^2(\theta) = 2gR(1-\cos\theta)$$



$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2(\theta)}{R}$$

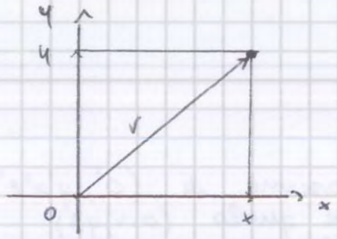
$$\boxed{N(\theta) = mg\cos\theta - m\frac{v^2(\theta)}{R}}$$

$$N(\theta) = mg\cos\theta - \frac{m}{R} 2gR(1-\cos\theta)$$

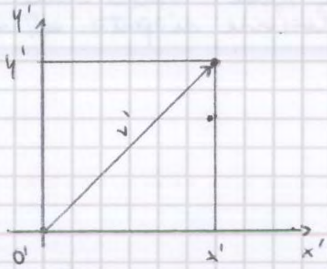
$$N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$$

punto di abbandono $N(\theta^*) = 0$ $\boxed{\cos\theta^* = \frac{2}{3}}$

Quando c'è l'attrito cade dopo



$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$



$\vec{r}_1 = x'\vec{u}_{x'} + y_1\vec{u}_{y'}$

pertanto x la relazione tra le due coordinate avremo

$$\boxed{\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'}$$

SOST. SOST. SOST.

$$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = x_{o'}\vec{u}_x + x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'}$$

$$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = x_{o'}\vec{u}_x + x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y$$

$$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = (x_{o'} + x')\vec{u}_x + y'\vec{u}_y$$

la relaz. tra le coord. avendo coincisione $x \equiv x_1'$ (assi)

$$\begin{cases} x = x_{o'} + x' \\ y = y' \end{cases}$$

coordinate del punto

coordinate del centro traslato

quindi $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx_{o'}}{dt} + \dfrac{dx'}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{dt} \end{cases}$

TEOREMA DI COMPOSIZIONE DELLA VELOCITÀ

la v sarà $v = \dfrac{dx}{dt}\vec{u}_x + \dfrac{dy}{dt}\vec{u}_y = \dfrac{dx_{o'}}{dt}\vec{u}_x + \dfrac{dx'}{dt}\vec{u}_x + \dfrac{dy'}{dt}\vec{u}_y$

$\vec{u}_x = \vec{u}_{x_1}$, $\vec{u}_y = u_{y'}$

↳ i versori non cambiano gli uni rispetto agli altri

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dx_{o'}}{dt}\vec{u}_x}_{V_{o'}} + \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}u_x + \frac{dy'}{dt}u_{y'}\right)}_{V'}$$

$V_{o'}$: velocità con cui si sposta il centro

V': velocità del punto

$\boxed{\vec{v} = \vec{V_0'} + \vec{v}_1}$ vale per le traslazioni : velocità con cui si sposta il secondo punto di riferimento

per l'accelerazione $a = \dfrac{d^2r}{dt} = \dfrac{d^2x_{o'}}{dt^2} + \dfrac{d^2x'}{dt^2}$

$\dfrac{d^2y}{dt} = \dfrac{d^2y'}{dt^2}$

$\boxed{\vec{r} = \vec{OO'} + r'}$ → vettore posizione

$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = x'_0 \vec{u}_x + y'_0 \vec{u}_y + z_{0'} \vec{u}_z + x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}$

derivo x ot. la velocità

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z = \underbrace{\frac{dx_0'}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy_0'}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz_0'}{dt}\vec{u}_z}_{\vec{V}_0} + \underbrace{\frac{dx_1'}{dt}\vec{u}_{x_1} + \frac{dy_1'}{dt}\vec{u}_{y_1} + \frac{dz_1}{dt}\vec{u}_{z_1}}_{\vec{v}'}$$

pertanto vediamo che x il teo di composizione abbiamo la stx relazione di prima

$$\boxed{\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{v}'}$$

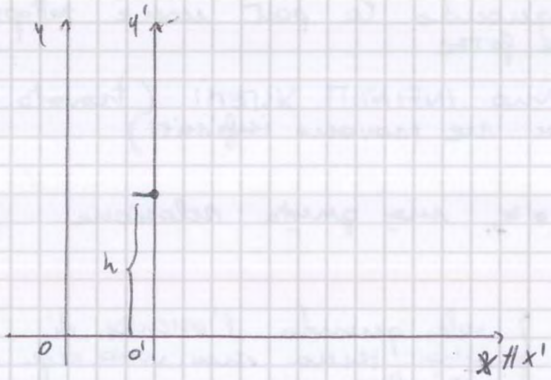
↳ la relazione è analoga x la accelerazione

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'}$$

Problema

Treno arriva davanti a staz. con deceleraz. costante

Se 1 oggetto scoppia a 1 fermo sul treno come vedono la traiettoria quello sul treno e quello sulla stazione



al $t = 0$, $O \equiv O'$

V_0

comincia a decelerare con A costante

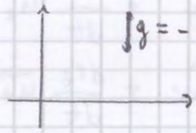
sappiamo che $\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}'$ → a. dell'arancia

$\vec{a}$: stz. fermo

$\vec{a}_{0'}$: accelerazione del sist di riferimento mobile (treno)

$g = \underbrace{-A\vec{u}_x}_{} + \vec{a}'$ → decelerazione del treno

$\vec{g} = -g\vec{u}_y$



quindi $-g\vec{u}_y = -A\vec{u}_x + \vec{a}'$

$$\boxed{\vec{a}' = A\vec{u}_x - g\vec{u}_y}$$

↓ arancia

PER L'OSSERVATORE O

$\vec{a} = \vec{g}$

$\frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{u}_y = -g\vec{u}_y$

$\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = 0 & \text{quindi } V_x = \text{costante} = V_0 \\ \frac{dV_y}{dt} = -g & \to \int dV_y = \int -g\,dt \end{cases}$

$\begin{cases} V_{x'} = At \\ V_{y'} = -gt \end{cases}$ → v. part. ha 2 componenti
↳ MUA sia sulla comp. x sia sulla comp. y

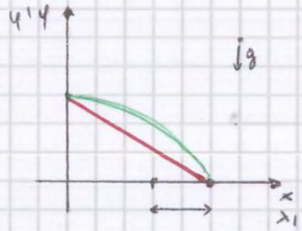
$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = At \\ \dfrac{dy'}{dt} = -gt \end{cases}$ $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}At^2 \\ y' = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ eq. parametriche dell'arancia risp. all'individ. che l'ha lasciata cadere

$t^2 = 2\dfrac{x'}{A}$

$y' = h - \frac{1}{2}g \cdot 2\dfrac{x'}{A}$ $\boxed{y' = h - \dfrac{g}{A}x'}$ non è + moto parab. ma retto

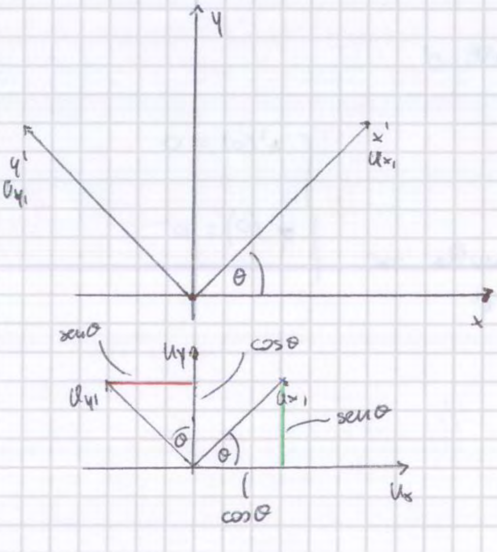
DOVE CADE IL CORPO RISPETTO AD O' ?

$0 = h - \dfrac{g}{A}x'_c$ $\boxed{x' = \dfrac{A}{g}h}$ cade nello stx punto ma la traiett. di caduta x i due è diverse



MOTO RELATIVO DI ROTAZIONE

Importante perché noi ci muoviamo di moto rotatorio assieme alla terra



Se il sist. ruota i versori NON sono costanti
↳ qual'è la relaz. che li lega al sist. fisso?

decompongo i versori

$\vec{u}_{x'} = \cos\theta\, \vec{u}_x + \sin\theta\, \vec{u}_y$

$\vec{u}_{y'} = -\sin\theta\, \vec{u}_x + \cos\theta\, \vec{u}_y$

$\theta = \theta(t)$

raccolgo $x'(\vec{u}\times\vec{u}_{x_1}) + y'(\vec{u}\times\vec{u}_{y_1}) = \vec{\omega}\times(x'\vec{u}_{x'}) + \vec{\omega}\times(y'\vec{u}_{y'}) =$

$= \vec{\omega}\times(x'u_{x'} + y'\vec{u}_{y'}) = \vec{\omega}\times\vec{r}'$ formula che mi dà la velocità

RIPRENDI * $\boxed{\underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x_1} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y}}_{v'} + \underbrace{x'(\vec{\omega}\times\vec{u}_{x_1}) + y'(\vec{\omega}\times u_{y'})}_{\vec{\omega}'\times\vec{r}'}}$

$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{v}_1}$

teorema di composizione delle v applicato alla veloc. angolare (MCU)

velocità del "ragazzo sulla giostra"

velocità rispetto a me.

* Calcolo l'accelerazione:

Supponiamo che ω sia costante (non è limitativo es. la Terra si muove più o meno di ω costante)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}u_{y'} + \omega\times(x'\vec{u}_{x'}) + \omega\times(y'\vec{u}_{y'})\right\}$$

$$= \frac{d^2x'\vec{u}_{x'}}{dt^2} + \frac{dx'}{dt}\underbrace{\frac{du_{x'}}{dt}}_{\omega\times u_{x_1}} + \frac{d^2y'}{dt^2}u_{y'} + \frac{dy'}{dt}\underbrace{\frac{du_{y}}{dt}}_{\omega\times u_{y_1}} + \vec{\omega}\times\left\{\frac{dx'}{dt}u_{x'} + x'\underbrace{\frac{du_{x_1}}{dt}}_{\omega\times\vec{u}_{x_1}}\right\} + \vec{\omega}\times\left\{\frac{du'}{dt}u_{y'} + y'\underbrace{\frac{du_y}{dt}}_{\omega\times\vec{u}_{y'}}\right\}$$

$$= \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}u_{y'} + \overset{\vec{a}_1 =}{\frac{dx'}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{u}_{x_1}) + \frac{dy'}{dt}(\vec{\omega}\times u_{y'})} + \vec{\omega}\times\left(\frac{dx}{dt}\vec{u}_x\right) + \vec{\omega}\times\left(\frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right)$$

$$+ \vec{\omega}\times(x'(\vec{\omega}\times\vec{u}_{x_1}) + \vec{\omega}\times(y'u_{y'})$$

$=$

$$\frac{dx'}{dt}(\omega\times u_{x'}) + \frac{dy'}{dt}(\omega\times u_{y'}) = \vec{\omega}\times\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{u}_{x'}\right) + \omega\times\left(\frac{dy'}{dt}u_{y'}\right)$$

$$= \vec{\omega}\times\underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x_1} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y_1}\right)}_{\vec{v}'} = \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\vec{\omega}\times(x'u_x\times u_{x_1}) + \vec{u}\times(y'\omega\times u_{y'}) = \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times(x'u_{x'})] + \omega\times[\vec{\omega}\times(y'u_{y'})]$$

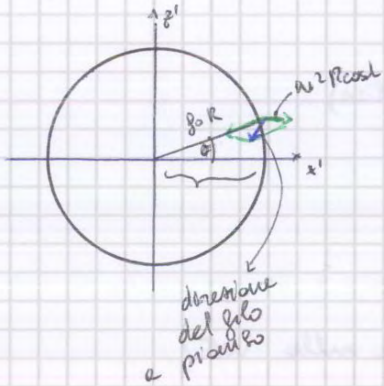
$$= \vec{\omega}\times\{\vec{\omega}\times(x'u_{x'}) + \vec{\omega}\times(y'u_{y'})\} = \vec{\omega}\times\{\omega\times(x'u_{x'} + y'u_{y'})\} = \vec{\omega}\times(\omega\times r')$$

È una velocità molto alta!

↳ la forza di Coriolis agisce a velocità molto alte

Corpo con v bassa → come cambia la direz. del filo a piombo spostandosi dal filo a piombo all'equatore?

1° CASO $v' \ll 230\ m/s$



$$\vec{a}' = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times r')$$

$$r' = x' u_x + z' u_{z'} = R\cos\lambda\, u_{x'} + R\,\text{sen}\lambda\, \vec{u}_{z'} = R(\cos\lambda\, u_{x'} + \text{sen}\lambda\, u_z$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r}' = \omega\vec{u}_{z'} \times \{R(\cos\lambda\, \vec{u}_x + \text{sen}\lambda\, \vec{u}_{z'})$$

$$= \omega R\cos\lambda\,(u_{z'}\times u_{x'}) + \omega R\,\text{sen}\lambda\,(u_{z'}\times u_{z'})$$

$$= \omega R\cos\lambda\, \vec{u}_{y'}$$

$$= \omega\times(\omega\times r') = (\omega u_{z'})\times(\omega R\cos\lambda\times u_{y'}) =$$

$$= \omega^2 R\cos\lambda\,(u_{z'}\times u_{y'}) = -\omega^2 R\cos\lambda\, u_{x'}$$

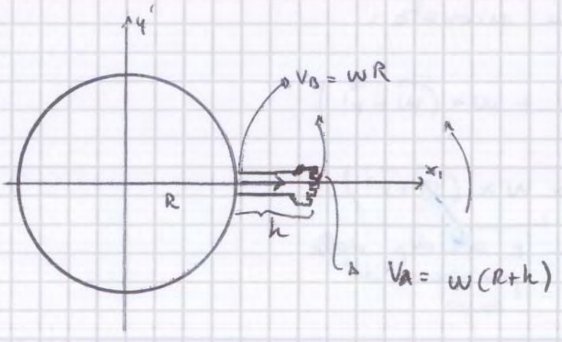
$$\boxed{a' = \vec{g} + \omega^2 R\cos\lambda \times \vec{u}_{x'}}$$

se $\lambda = 0$ cioè all'equatore

$$\vec{a}' = -\vec{g}_0 u_x + \omega^2 R\, u_{x'} = -(g_0 - \omega^2 R)\,\vec{u}_{x'}$$

↳ in entrambi i casi è diretta verso il centro della terra

Es



$v_r = \omega h$

$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} v_r t_c = \frac{1}{2}\omega h\sqrt{2\frac{h}{g}}$$

↳ guadagno del corpo che cade

(x', y') PIANO EQUATORIALE

$$\vec{a}' = \{\vec{g}_0 - \omega\times(\omega\times r')\} - 2u\times v'$$

$$g = (g_0 - \omega^2 R)\,\vec{u}_{x'}$$

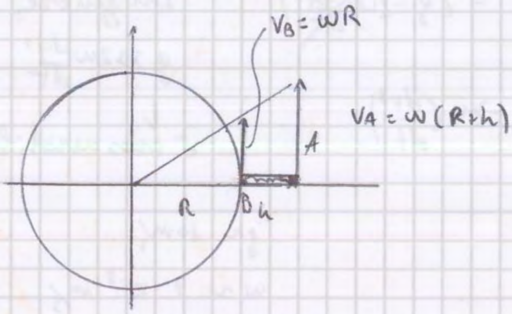
$$\vec{a} = -g\, u_{x'} - 2(\omega\times v')$$

$$\frac{dy'}{dt} = \omega g t^2$$

$$y'(t) = \underbrace{y'(0)}_{0} + \frac{1}{3}\omega g t^3$$

$y'(t_c) = \frac{1}{3} g t_c^3$ → è l'avanzamento della pietra rispetto alla base della torre

$$\boxed{y'(t_c) = \frac{\omega g}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}}$$ che è la DEVIAZIONE VS ORIENTE



$$v = V_A - V_B = \omega(R+h) - \omega R = \omega h$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$s = \frac{v}{2} t_c = \frac{\omega h}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\omega g}{4}\frac{2h}{g}\sqrt{\frac{2h}{g}} =$$

$$= \boxed{\frac{\omega g}{4}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}}$$ stessa formula ottenuta con considerazioni elementari

Galileo non misurò bene poiché per $h = 100\,m$

$y'(t_c) \sim 1\,cm$

↓

ma intuì che + in alto la pietra ha una velocità > rispetto alla base

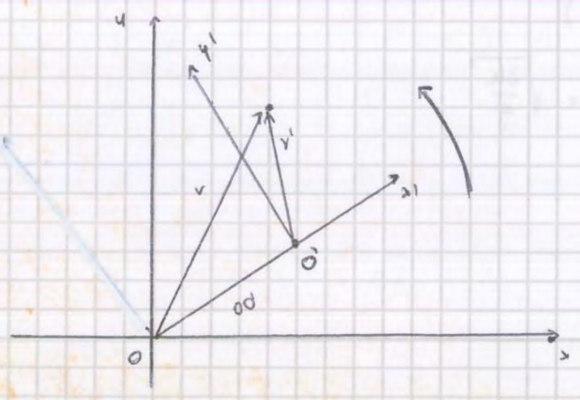
TRASLAZ. PURA
$$\vec{v} = \vec{v}_0' + \vec{v}'$$
$$\vec{a} = \vec{a}_0' + \vec{a}'$$

ROT. PURA
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}'$$
$$\vec{a} = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}'$$

Per un sistema che RUOTA E TRASLA

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{V}_0' + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}' \\ \vec{a} &= \vec{a}_{0'} + 2\vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}'\end{aligned}}$$

No dimostrazione

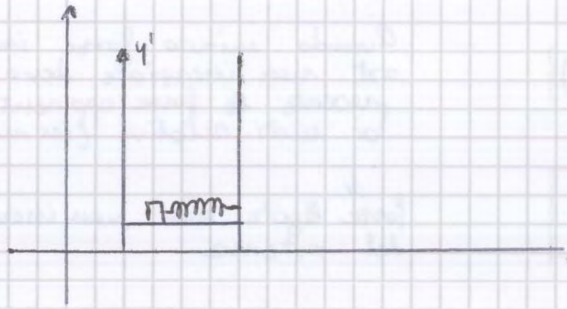


se m è ferma IN O' $\Rightarrow a' = 0$

$$\boxed{\vec{T} + m\vec{g} - m a_o' = 0}$$

↳ l'oss. in un sist. di rif. non inerziale vede una a in più, quella apparente

---



$m\vec{a} = \vec{F}$

$m\vec{a} = kx \qquad a = \frac{k}{m}x$

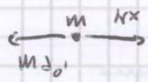
$\vec{a} = \vec{a}_o' + \vec{a}'$

$\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_{o'}$

$m\vec{a}' = kx\vec{u}_x - m\vec{a}_{o'}$

Quando m è in equilibrio $a = 0$

$kx\vec{u}_x - m\vec{a}_{o'} = 0$



Esercizio

massa che ruota

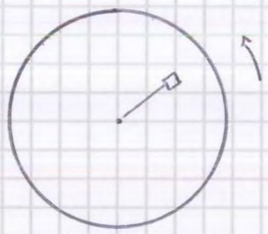
osservato da fuori

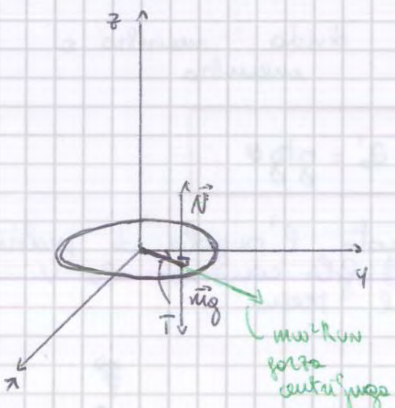
(3) $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{T}$

$N = mg$

$m\omega^2 R = T$

$\vec{a} = \omega^2 R \vec{u}_N$





la part. è in eq. perché la T è eguagliata dalla f centrifuga

Per osservatore sulla giostra

$\vec{F}_{opp} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -m\omega^2 R \cdot \vec{u}_N$

$$\boxed{m\vec{a}' = N + mg + T - m\omega^2 R u_N}$$

quando m è in equilibrio $a' = 0$

$N + mg + T - m\omega^2 R u_N = 0$

$\cancel{m}\frac{d^2x'}{dt^2} = \cancel{m}\omega^2 x'$ la forza T → x non c'è altra è ⊥ o chi la esercita

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \omega^2 x'$$

$$\begin{cases} x'(0) = r_0 \\ \left(\frac{dx'}{dt}\right)_0 = 0 \end{cases}$$

$x' = Ce^{\beta t}$

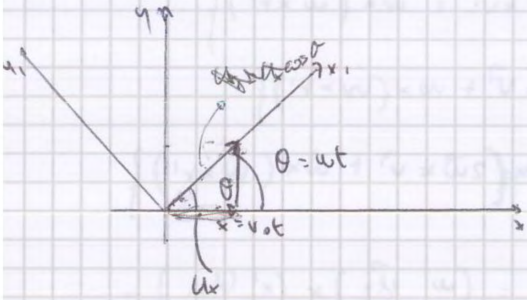
$x'(t) = r_0 \cosh(\omega t)$

$\frac{dx'}{dt} = \beta C e^{\beta t}$

$\frac{d^2x'}{dt^2} = \beta^2 C e^{\beta t}$

$\beta^2 = \omega^2 \qquad \beta = \pm\omega$

Come vede un punto che si muove di moto circolare di uno che si muove di MRU



$\vec{r} = x\vec{u}_x = v_0 t\,\vec{u}_x$

$\vec{r} = x' u_{x'} + y' u_{y'}$

$u_{x'} = \cos\theta\, u_x + \operatorname{sen}\theta\, u_y$

$u_{y'} = -\operatorname{sen}\theta\, \vec{u}_x + \cos\theta\, \vec{u}_y$

$\vec{r} = x'(\cos\theta\, u_x + \operatorname{sen}\theta\, u_y) + y'(-\operatorname{sen}\theta\, u_x + \cos\theta\, u_y) =$
$= (x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)\vec{u}_x + (x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) u_y$

$$\begin{cases} v_0 t = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ 0 = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = v_0 t \cos(\omega t) \\ y' = -v_0 t \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases}$$

Con le sommatorie

$$\sum_{k=1}^{N} b_k = \sum_{i=1}^{N} b_i$$

↳ indipendenti degli indici, queste 2 sommatorie dicono la stessa cosa

↳ in particolare posso scambiare $j \leftrightarrow i$

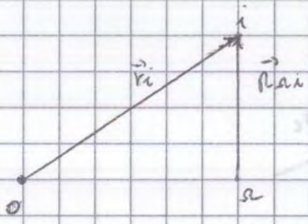
$$\sum_{i,j} \vec{F}_{j,i} = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{i,j} F_{ji} + \sum_{ji} F_{ij} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \big(\underbrace{F_{ji} + F_{ij}}_{\text{uguali e opposte} \times \text{Newton}} \big) = 0$$

Quanto vale la risultante di tutte le forze che si esercitano sulle particelle? (INT + EST)

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(EST)} + \vec{F}_i^{(INT)}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \left\{ F_i^{(EST)} + F_i^{(INT)} \right\} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(EST)} + \sum_{i=1}^{N} F_i^{(INT)} = \vec{R}^{(EST)} + \underbrace{\vec{R}^{(INT)}}_{=0} = \vec{R}^{(EST)}$$



$$\vec{P}_i = m\vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{L}_{\Omega i} = \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{P}_i$$

$$E_{K_i} = \frac{1}{2} m v_i^2$$

Vogliamo considerare queste quantità non per singole part. ma per un intero sistema e vediamo che:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i \qquad \vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{\Omega i} \qquad E_K = \sum_{i=1}^{N} E_{K_i}$$

Vogliamo calcolare queste quantità e le loro derivate temporali

$$\frac{dp_i}{dt} = \vec{F}_i$$

$$\frac{dL_\Omega}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P}_i + \vec{M}_{\Omega i}$$

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{\vec{P}}{M} \qquad \vec{P} = M \cdot \vec{V}_{CM}}$$

Def il centro di m la q.d.m complessiva è = a quella di una particella con una massa = m. tot. del sistema e che si muove con la velocità del centro di massa

ACCELERAZIONE DEL CENTRO DI MASSA

Quando varia la q. di moto totale del sistema?
Calcoliamo la $\frac{d}{dt}$ della v del centro di massa

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{M}\vec{P}\right\} = \frac{1}{M}\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{P}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

↳ il cm ha una qdm che cambia quando cambia la sua velocità

$$a_{CM} = \frac{\vec{R}^{(EXT)}}{M}$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{(INT)} + \vec{F}_i^{(EST)}\right) = \frac{1}{M}\left\{\vec{R}_i^{(EST)} + \underbrace{\vec{R}_i^{(INT)}}_{=0}\right\} = \boxed{\frac{1}{M}\vec{R}^{(EXT)}}$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Se la ~~ris~~ delle forze esterne è = 0 il cm si muove di moto uniforme, e la quantità di moto totale del sistema
↳ se no di moto vario rimane costante nel tempo con V_{cm} costante o nulla

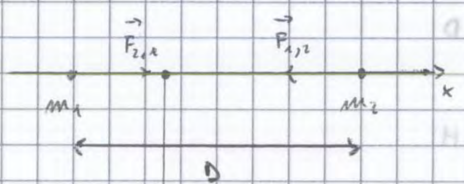
$$\vec{R}^{(EST)} = M\vec{a}_{CM} = M\frac{dV_{CM}}{dt} = \frac{d(MV_{CM})}{dt} = \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt}}$$

risultante delle forze esterne è = alla variazione della quantità di moto del sistema

$$\boxed{\vec{R}^{(EST)} = \frac{dP}{dt}}$$

Pb due corpi sono sottoposti solo alla loro mutua attrazione. Se essi vengono lasciati liberi in quali punti si incontrano?

Corpi non interag. con altre part. del sist.



$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{cases}$$ part. ferme nel mom. d'inizio

$$x_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot D$$

$\vec{R}^{(EST)} = 0 \qquad \vec{R}^{(EST)} = \frac{dP}{dt} = 0$ quindi P è costante
↳ il valore che ha a t_0 ce l'ha sempre

$\vec{P}(0) = m_1\vec{V}_1(0) + m_2\vec{V}_2(0) = 0$ se $P = 0$ la m. tot. × $v_{CM} = 0$

$M\vec{V}_{CM} = 0 \longrightarrow V_{CM} = 0$

Quindi le part. si muovono e si incontrano esattamente nel centro di massa

CENTRI DI MASSA DI SISTEMI CONTINUI

Come calcolare il CM di un sistema CONTINUO:

sbarra con una sezione trascurabile
Dove è situato il CM di questa barra?

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

suddivido la barra in parti di lunghezza infinitesima e massa infinitesima

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot x_i$$

tanto più preciso quanto aumentano le parti

lim significa integrale

$$= \frac{1}{M}\int_{MASSA} x\,dm$$

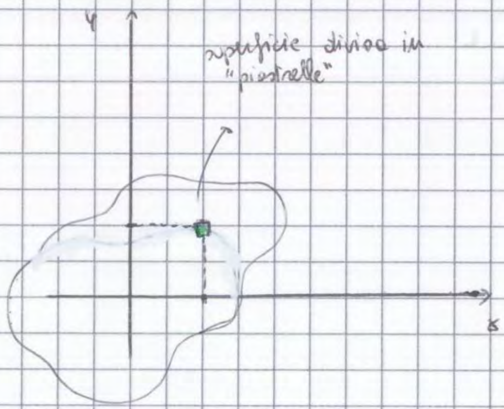
Introduco una nuova quantità

dove $\boxed{\lambda = \frac{dm}{dx}}$ detta densità lineare di massa (quanti grammi sono contenuti in un metro)

$dm = \lambda dx$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx}$$ centro di massa di una barra uniforme

CENTRO DI MASSA DI UNA SUP. CONTINUA



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} x_i m_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} y_i m_i$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i x_i = \frac{1}{M}\int_{CORPO} x\,dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} y_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int_{CORPO} y\,dm$$

si introduce una quantità

introduco la densità superficiale di massa

$$\boxed{\sigma = \frac{dm}{ds}} \quad dm = \sigma ds$$

otteniamo $x_{CM} = \frac{1}{M}\int_S \sigma x\,ds$ e $y_{CM} = \frac{1}{M}\int_S \sigma y\,ds$

★ Centro di massa di barra omogenea di massa m e lungh. L

$$x_{cm} = \frac{1}{L}\int_0^L \underbrace{x\,dx}_{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{2}L^2 = \frac{L}{2}$$

Determinare il cm di una barra non omogenea la cui densità lineare è data da $\lambda = kx$
Det. il valore di k

$$\lambda = \frac{dm}{dx} \qquad dm = \lambda\,dx \qquad \int_{corpo} dm = \int_{corpo}\lambda\,dx$$

$$M = \int_0^L kx\,dx = \underbrace{k}_{cost}\int x\,dx = \frac{1}{2}kL^2$$

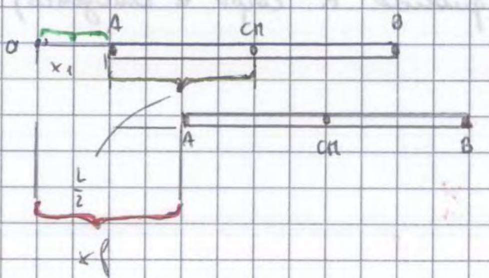
pertanto $\boxed{k = \frac{2M}{L^2}}$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L \lambda x\,dx = \frac{1}{M}\int_0^L kx\,x\,dx = \frac{k}{M}\int_0^L x^2\,dx = \frac{k}{M}\cdot\frac{1}{3}L^3$$

sost. espr. di k $\quad \frac{2M}{L^2}\cdot\frac{1}{M}\cdot\frac{1}{3}L^3 = \frac{2}{3}L$

↳ barra non omogenea
↳ cm NON è + al centro

BARCA = BARRA OMOGENEA



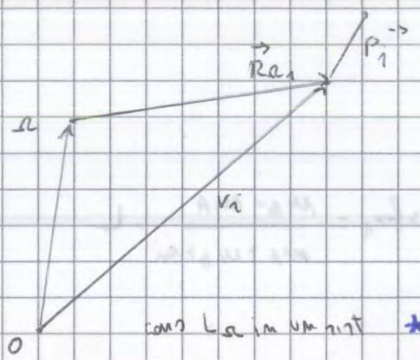
$$x_{cm}^{i} = \frac{m_A x_i + m\left(x_i + \frac{L}{2}\right) + m_B(x_i + L)}{m_A + m_B + m}$$

$$= \frac{(m_A + m + m_B)x_i + m_B L + m\frac{L}{2}}{m_A + m_B + m} =$$

$$= x_i + \frac{m_B + \frac{1}{2}m}{m_A + m_B + m}\cdot L$$

$$x_{cm}^{(f)} = \frac{m_B x_f + m\left(x_f + \frac{L}{2}\right) + m_A(x_f + L)}{m_A + m_B + m} = \frac{x_f(m_B + m + m_A) + m_A L + M\frac{L}{2}}{m_A + m_B + m} = x_f + \frac{m_A + \frac{1}{2}m}{m_A + m_B + m}\,L$$

TEOREMA DEL MOM. ANGOLARE APPL. A UN SIST. DI PARTICELLE



$$\frac{d L_{\Omega i}}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{p}_i + \vec{M}_{\Omega i}$$

$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} L_{\Omega i}$ in un sist. di part. $L_{\Omega\,tot} = \sum_{i=1}^{N} L_{\Omega i}$

cons. L_Ω in un sist. ✱ $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{dL_{\Omega i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{\Omega i}\right) = \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}$

cons. $V_\Omega \times P$ in un sist. ✱ $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \vec{V}_\Omega \times \vec{P}_i = \vec{V}_\Omega \times \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \vec{V}_\Omega \times \vec{P}$

$\vec{P}$ → quantità di moto totale del sistema

✱ $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{\Omega i}$ in generale $\vec{M}_\Omega = \vec{R}_\Omega \times \vec{F}$

$$\vec{M}_{\Omega i} = \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i = \vec{R}_{\Omega i} \times \left\{ \vec{F}_i^{(INT)} + \vec{F}_i^{(EST)} \right\} =$$

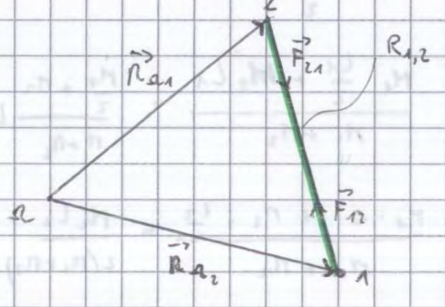
$$= \vec{R}_{\Omega i} \times F_i^{(INT)} + \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(EST)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{\Omega i} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(INT)}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_{\Omega i} \times F_i^{(EST)}\right) =$$

$$= \vec{M}_\Omega^{(INT)} + \vec{M}_\Omega^{(EST)}$$

pertanto $$\boxed{\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega^{(INT)} + \vec{M}_\Omega^{(EST)}}$$

Il mom. risultante rispetto alle forze interne è sempre nullo → perché



$\vec{M}^{(INT)} = \vec{R}_{\Omega 1} \times \vec{F}_{21} + \vec{R}_{\Omega 2} \times \vec{F}_{12}$

poiché $F_{21} + F_{12} = 0$

allora $F_{21} = -F_{12}$

dunque $\vec{M} = -\vec{R}_{\Omega 1} \times F_{12} + \vec{R}_{\Omega 2} \times F_{12}$

$= F_{12} \times (R_{\Omega 2} - R_{\Omega 1})$

definiamo il vettore $\vec{R}_{1,2} = \vec{R}_{\Omega 2} - \vec{R}_{\Omega 1}$

$= \vec{R}_{12} \times \vec{F}_{12} = 0$

$\vec{R}_{\Omega 2} = R_{\Omega 1} + R_{12}$

perché il prodotto esterno tra vettori // è nullo

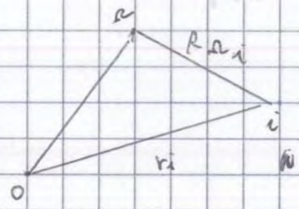
R_{12} vettore che va tra part. 1 e 2

PRIMA EQUAZ. CARDINALE DELLA DINAMICA DEL SISTEMA

$$\boxed{M \frac{dV_{CM}}{dt} = \vec{R}^{(EXT)}}$$

Se la ris. delle forze est è nulla il cm si muove di moto ~~rett~~ uniforme

$$\vec{L}_{\Omega i} = R_{\Omega i} \times (m_i \vec{v}_i)$$



Se def così il mom. angolare e def il mom angolare totale come

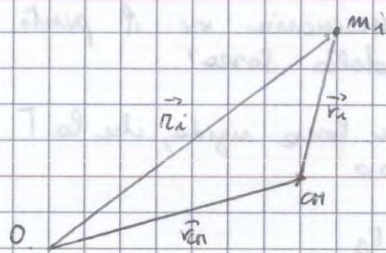
$$L_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{\Omega i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega i} \times (m v_i)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{v}_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega^{(EXT)}}$$

• SECONDA EQ. CARDINALE DELLA DINAMICA

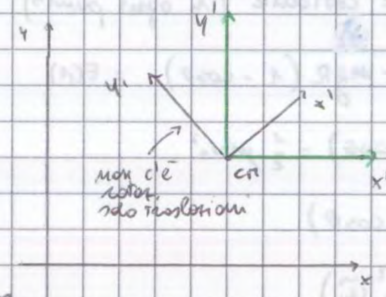
Se $\Omega = 0$ $\quad V_\Omega \times P = 0$

Se $\Omega \equiv CM$ $\quad \vec{V}_\Omega \times \vec{P} = \vec{V}_{CM} \times (M \vec{V}_{CM}) = 0$



$\vec{r}_i'$ → posizione relativa della particella rispetto al centro di massa

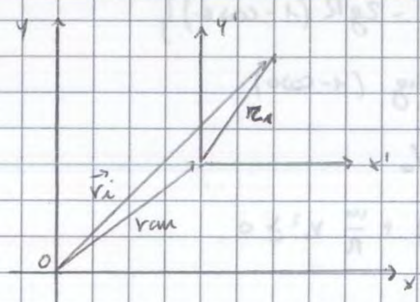
SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA



Questo sist è def traslo risp. al sist di rif. fisso i suoi assi traslano

- l'origine è nel centro di massa
- assi con = direzioni del sist. di riferimento inerziale, possono essere assunti paralleli a questi
- è un sist. non inerziale: il scm si muove di moto traslatorio non nec. retto

PROPRIETÀ DEL SIST DEL C. DI MASSA



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$$

$$r_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i (r_{CM} + r_i') =$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} (m_i r_{CM} + m_i r_i') = \frac{1}{M} \left\{ \sum_{i=1}^{N} m_i r_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i r_i' \right.$$

cambio gli indici x la indipendenza

$$= \frac{1}{M} \left\{ \vec{r}_{CM} \sum_{i=1}^{N} m_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \right\} = \frac{1}{M} \left\{ M \vec{r}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i r_i' \right.$$

$$\cancel{\vec{r}_{CM}} = \cancel{\vec{r}_{CM}} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'$$

la form. dice che nel sist del cm il sistema = centro di M

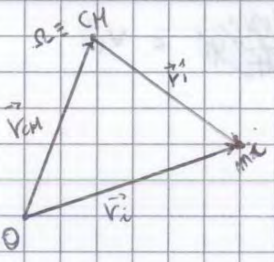
$$\frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i' = 0}$$

TEOREMA DI KÖNIG
KOENIG

$\to L$, $\to E_K$ {due teoremi relativi a cose ≠}

Quanto vale il mom. angolare complessivo di particelle rispetto al punto O

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i') \times \{ m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \}$$



MOM. ANG. RISP. AL CM

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{CM} \times (m_i \vec{v}_{CM}) + \vec{r}_{CM} \times (m_i \vec{v}_i') + \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_{CM}) + \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_i')$$

$$= \vec{r}_{CM} \times \left\{ \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \vec{v}_{CM} \right\} + r_{CM} \times \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' \right\}}_{=0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i' \right)}_{=0} \times \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} r_i' \times (m_i v_i')$$

per proprietà del mt del CM

$$\vec{L}_O = \underbrace{\vec{r}_{CM} (M \vec{v}_{CM})}_{r_{CM} \times \vec{p}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_i')}_{L'_{CM}}$$

$$\boxed{L_O = L_{O,CM} + L'_{CM}}$$

Il momento angolare del sistema si può scrivere, nel sist. di rif. inerziale come somma del L dovuto al moto del CM e di quello del sistema rispetto al CM

come l'elettrone che orbita attorno al nucleo ① e intorno a sé stesso ②

Momento angolare orbitale ①

Momento angolare di spin ②

✱ Teorema in vs simile esiste anche x l' E_K

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} E_{Ki}$$

quando penso risp. a il sist. di rif. rispetto al quale misuro le velocità

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

↳ velocità relativa al sist. di rif. inerziale che ho scelto

→ quadrato di un vettore

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \cdot (\vec{V}_{CM} + \vec{V}_i')^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot (V_{CM} + V_i')(V_{CM} + V_i')$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (V_{CM}^2 + V_{CM} \vec{V}_i' + V_i'^2 + V_{CM} \vec{V}_i') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i V_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i V_{CM} V_i' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i V_i'^2$$

$$= \frac{1}{2} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{=M} \Big) V_{CM}^2 + \vec{V}_{CM} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i'}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

esce xr non dip dal pedice i

$$E_K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

E_K dovuto al moto del CM

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + E_K'}$$

→ dovuto al mov. del sistema rispetto al CM

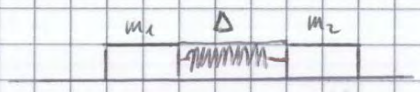
Quindi $W^{(EXT)}_{A\to B} = E_p^{(EXT)}(A) - E_p^{(EXT)}(B)$

$W^{(INT)}_{A\to B} = E_p^{INT}(A) - E_p^{INT}(B)$

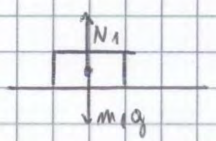
$$E_K(B) - E_K(A) = E_p^{EXT}(A) + E_p^{INT}(A) - \left[E_p^{EXT}(B) + E_p^{INT}(B)\right]$$

$$\boxed{E_K(B) + E_p^{EXT}(B) + E_p^{INT}(B) = E_K(A) + E_p^{EXT}(A) + E_p^{INT}(A)}$$

Problema



molla compressa di comp. Δ
se togliamo il cordino la molla si dist.
molla non collegata alle part.
Quanto vale v di part. nel mom. in cui se ne vanno?



se non c'è forza di attr → non c'è lavoro
il lavoro è prodotto solo dalla molla
↓
è una forza interna

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = R^{(EXT)} = 0$$

↳ non ci sono forze ext agenti sul sist

Hp SISTEMA INIZIALMENTE FERMO

$\vec{P} = cost = 0$

$m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0$ Q. di moto complessiva $= 0$

$$E_{TOT\,iniziale} = \underbrace{E_{K_{P_1}}(i)}_{0} + \underbrace{E_{K_{P_2}}(i)}_{0} + \underbrace{E_p^{EXT}}_{0} + E_p^{int}(i) = E_p^{int}(i)$$

part. ferme; forze non fanno lavoro

$E_p^{int}(i) = \frac{1}{2} K\Delta^2$

$$E_f = E_{K_1}(f) + E_{K_2}(f) + \underbrace{E_p^{EXT}(f)}_{0} + \underbrace{E_p^{int}(f)}_{0}$$

$E_{K_1}(f) \to \frac{1}{2} m_1 v_1^2$, $E_{K_2}(f) \to \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$E_i = E_f$ $\boxed{\frac{1}{2} K\Delta^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}$

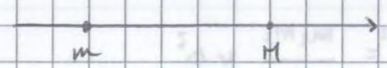
$$E_g = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 - G \frac{mM}{x}$$
punto generico

$$\begin{cases} m\vec{v} + M\vec{V} = 0 \\ \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 = G \frac{mM}{x} \end{cases}$$

Forze dirette lungo la congiungente

$$\frac{(mv)^2}{2m} + \frac{(MV)^2}{2M} = G \frac{mM}{x}$$

$$\frac{(mv)^2}{2m} + \frac{(-mv)^2}{2M} = \frac{GmM}{x}$$

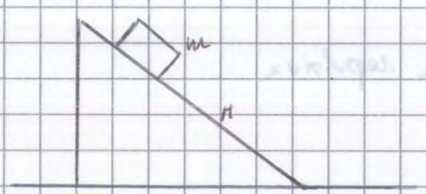


$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)(mv)^2 = G \frac{mM}{x} \qquad mv = \sqrt{\frac{2G(mM)^2}{(m+M)x}}$$

$$v = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}}\,(mM) = M\sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}}$$

$$V = -\frac{1}{M}\sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}}\, mM = -\sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}} \cdot m$$

$$V_{relat} = v - V = M\sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}} + m\sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}} = (M+m)\sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}} = \sqrt{\frac{(m+M)2G}{x}}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 125 di 324

Supponendo $\neq$ forze che agiscono su un sistema

↳ cosa fanno quelle forze?
Fanno muovere e girare il corpo

$$\vec{R}^{(EXT)} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(EXT)}$$

riguardo mom. $$\vec{M}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} R_{\Omega_i} \times F_i^{(EXT)}$$

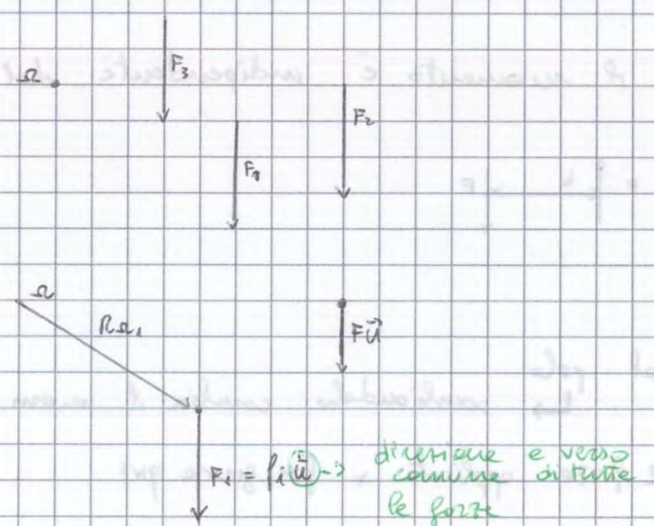
2 effetti delle forze su un punto

- Data una distribuzione di F esse è = a una risultante applicata ad 1 polo e 1 momento applicato a 1 polo
  ↳ + una coppia che produce una rotazione attorno al polo

* Tutte le forze esterne sono PARALLELE
  ↳ in qst caso c'è un'altern. si può calcolare la risultante e applicarla in un punto detto centro di forza

ANALISI DELLA FORZA EQUIVALENTE A UNA DISTR. DI FORZE PARALLELE

Equivalenza = effetto delle forze ~~sost~~ attribuibile con 1 unica forza (possibile → esso è applicabile in 1 punto solo quando sono tutte ∥ tra loro) detto centro di forza
↳ dimostriamolo



$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{N} f_i \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{N} f_i\right) u = F\vec{u}$$

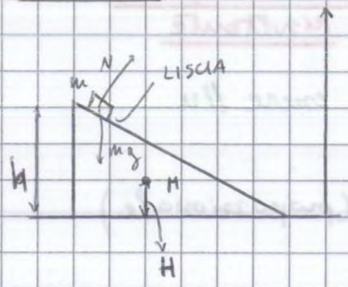
$$F = \sum_{i=1}^{N} f_i$$ la risultante deve avere modulo = Σ moduli

Dove devo applicare $F\vec{u}$ in modo tale che sia = alla risultante di tutte le forze?

↳ impongo la cond. sui momenti
deve dare × momento lo stesso momento

$$\vec{M}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} R_{\Omega_i} \times \vec{F_i} = \vec{r_c} \times \vec{R}$$

Problema



$$\frac{dP}{dt} = \vec{R}^{(EST)}$$

$$\frac{dP_y}{dt} = \vec{R_y} \neq 0$$

$$\frac{dP_x}{dt} = R_x^{(EXT)} = 0$$

$M V_x + m v_x = 0$ perché il sist. è fermo e anche alla fine

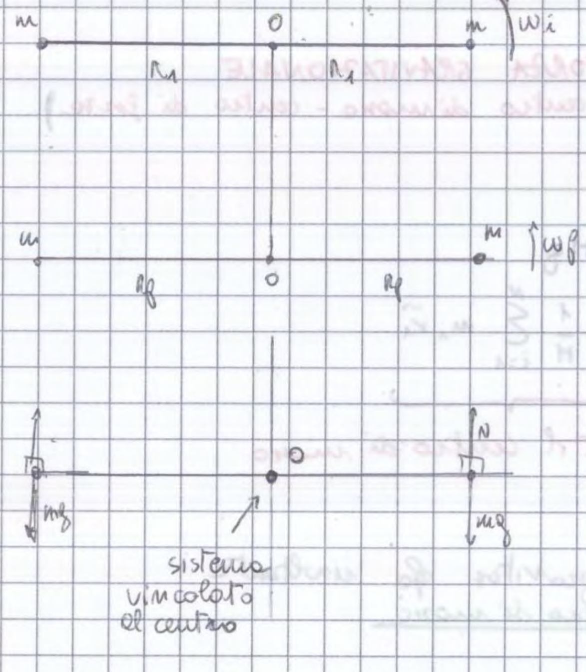
$$E_i = E_i(m) + E_i(M) = mgh + MgH$$

$$E_f = E_f(m) + E_f(M) = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} M V_x^2 + MgH$$

NO ATTRITI

$$\begin{cases} M V_x + m v_x = 0 \\ \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} M V_x^2 = mgh \end{cases}$$

Qual'è la config. finale del sistema?
Asta rigida vincolata al centro



$$\frac{dL_0}{dt} = M_0^{(EXT)} = 0$$

allora L costante

↳ non varia durante il moto

Questa quant. rimane costante sempre

$$\omega_i R_i^2 = \omega r^2 = \omega_f R_f^2$$

$$\boxed{\omega_f = \omega_i \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2}$$

$$E_{Ki} = E_{K1i} + E_{K2i} = \frac{1}{2} m v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m (\omega_i R_i)^2 + \frac{1}{2} m (\omega_i R_i)^2 = m \omega_i^2 R_i^2 =$$

$$E_{Kf} = m \omega_f^2 R_f^2$$

$$\Delta E_K = E_{Kf} - E_{Ki} = m \omega_f^2 R_f^2 - m \omega_i^2 R_i^2 = m \underbrace{\omega_i^2 \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^4}_{\omega_f^2} R_f^2 - m \omega_i^2 R_i^2 =$$

$$= m \omega_i \frac{R_i^4}{R_f^2} - m \omega_i^2 R_i^2$$

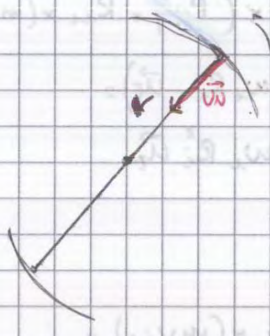
raccolgo

$$\Delta E_K = m \omega_i R_i^2 \left(\frac{R_i^2}{R_f^2} - 1\right)$$

$$\boxed{\Delta E_K = E_{Ki}\left[\left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2 - 1\right]}$$

Se $R_i < R_f$ la $\omega_f < \omega_i$ e la variaz. di E_K è negativo

Perché CAMBIA L'E_K?



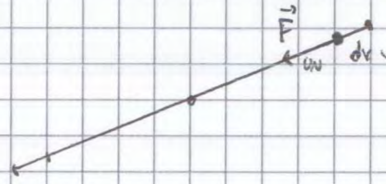
ω supponiamo ω costante

allora $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$, con $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

Cosa capita quando la particella si sposta?



un dr dato dall'allungam/compressione di una molla ad esempio

Lo agisce una forza e c'è 1 spostamento

=

ho un lavoro

$$dW = -2F\,dr$$

$$dW = -2m\frac{v^2}{R}\,dr = -2m\omega^2 r\,dr$$

Dato che $\omega r^2 = \omega_i R_i^2 \Rightarrow \omega = \omega_i \frac{R_i^2}{r^2}$

Quindi $dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$ *

Sostituisco * e * in $\boxed{}$

$$F_x \vec{dx} + F_y dy + \vec{F_z} dz + \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = 0$$

$$\left(F_x dx + \frac{\partial E_p}{\partial x}\right) dx + \left(F_y + \frac{\partial E_p}{\partial y}\right) dy + \left(F_z + \frac{\partial E_p}{\partial z}\right) dz = 0$$

Deve presistere questa relazione per $\forall$ dz, dx, dy per essere una forza conservativa

Per motivi geometrici essendo $dx, dy, dz \neq 0$ $\rightarrow$ devono essere linearmente indipendenti

quindi $F_x + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$

$$F_y + \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$$

$$F_z + \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

Se una forza è conservativa le componenti cartesiane della forza sono uguali e contrarie alle componenti della derivata spaziale dell' E_p.

- pertanto $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

Supponiamo di riscrivere la forza in questo modo

$$\vec{F} = -u_x \frac{\partial E_p}{\partial x} - \vec{u_y} \frac{\partial E_p}{\partial y} - u_z \frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(u_x \frac{\partial E_p}{\partial x} - \vec{u_y} \frac{\partial E_p}{\partial y} - u_z \frac{\partial E_p}{\partial z}\right)$$

$\rightarrow$ questa espressione è detta gradiente, che è un operatore, che applicato a uno scalare ci da un vettore

$\vec{\nabla}$ $\rightarrow$ anglosassone

grad $\rightarrow$ europeo

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

$$\vec{\nabla} = u_x \frac{\partial E_p}{\partial x} - u_y \frac{\partial E_p}{\partial y} - u_z \frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$\vec{F} = -\text{grad}\, E_p$ la forza è il gradiente per l' E_p in una forza conservativa

PROBLEMA 4.12

applichiamo queste proprietà

$\vec{F} = 3y^2 \vec{u_x} + 2x^2 y \vec{u_y}$

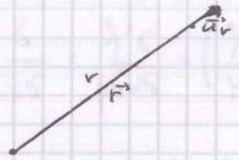
$F_x = 3y^2 \qquad F_y = 2x^2 y \qquad F_z = 0$

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial (3y^2)}{\partial y} = 6y$ quindi la forza NON è conservativa

$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 y) = 4xy$

$\vec{F} = F_x(x) u_x + F_y(y) u_y + F_z(z) u_z$ → tutte le forze in queste forma sono conservative

Le forze centrali sono conservative



$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{u_r}$

$\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$

$\vec{F} = \frac{f(r)}{r} \vec{r} = G(r)\,(x u_x + y u_y + z u_z)$

dove $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$F_x = G(r)\,x$
$F_y = G(r)\,y$
$F_z = G(r)\,z$

} funzioni solo di r
↳ calcoliamone la derivata

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(G(r)\,x) = x \frac{\partial G}{\partial y} = x \frac{dG}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$ } xN è una composta (G dipende da y tramite r, non direttamente)

ove $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} 2y = \frac{y}{r}$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$

$\frac{\partial F_y}{\partial x}$ .... stesso proced. $= \frac{yx}{2} \frac{dG}{dr}$

ROTORE DI UN VETTORE

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

dato 1 vettore che dip. dal punto è definito rotore di quel vettore un vettore fatto delle derivate del primo

↳ se un vettore è conservativo il suo rotore è $= \bar{0}$
tutti i vettori conservativi sono IRROTAZIONALI

pertanto $F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$

$F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$

$\vec{F} = F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta$

$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$

$\vec{F} = -\left\{ \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{u}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} E_p$

$$\boxed{\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}}$$

Quando si fa 1 deriv. parziale derivo solo risp. alla variabile che mi interessa, tutto il resto considero come costante

$f = H(x) + G(y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dH}{dx}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x;y)$

$f = \int M(x;y)\,dx + N(y)$

Problema: data la forza $\vec{F}: \alpha x \vec{u}_x + \beta y^2 \vec{u}_y + \gamma \vec{u}_z$, verificare che questa forza sia conservativa e calcolare E_p

$\vec{F}_x = \alpha x$
$\vec{F}_y = \beta y^2$
$\vec{F}_z = \gamma$

la forza è conservativa x le condizioni (verifica tu)

↳ ci deve essere una E_p le cui derivate parziali mi danno queste forze

$F_x = \alpha x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$

$F_y = \beta y^2 = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$

$F_z = \gamma = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial x} = -\alpha x \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} = -\beta y^2 \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} = -\gamma \end{cases}$$

supp. x_0 punto di min di E_p

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_m} = 0$$

$$\left(\frac{d^2E_p}{dx}\right)_{x_m} > 0$$

$$F(x_m) = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_m} = 0$$

$$F(x_D) = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_D} < 0$$

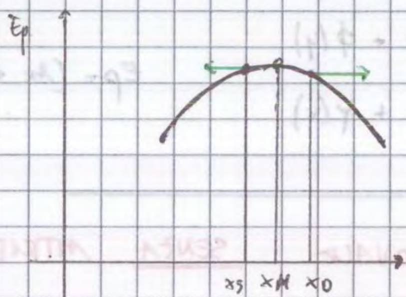
$$F(x_S) = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_S} > 0$$

IMPORTANTE
- se metto una particella in un punto di eq. stabile (min) lei sta fermo
- se la sposto a destra nasce una forza che la spinge a sinistra e viceversa
  ↳ in entrambi i casi tende a tornare nella posizione iniziale

Cosa capita in un punto di massimo?

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_M} = 0$$

$$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_M} < 0$$



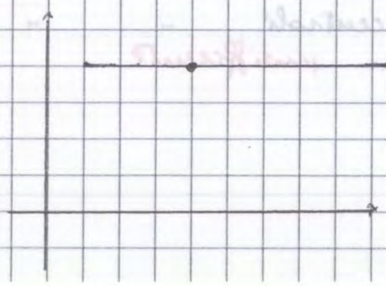
$$\vec{F}(x_D) = -\left(\frac{dE_p}{dt}\right)_{x_D} > 0$$

$$\vec{F}(x_S) = -\frac{dE_p}{dt} < 0$$

punti di eq. instabile → sta ferma ma se viene spostata cambia posizione

Se $E_p =$ COSTANTE

$$\frac{dE_p}{dt} = 0$$



Se è costante ovunque io la sposti rimane lì.
↳ equilibrio indifferente

LA DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Def il grado di libertà è il numero di coordinate da dare per individuare il corpo rigido

Es 1 particella nello spazio → ho grado di libertà = 3 $(x; y, z)$

se ho N particelle libere il grado di libertà è 3N

corpo rigido: è un corpo che mantiene le distanze tra i suoi punti costante (particelle che lo formano mantengono la mutua distanza costante)

↳ dato 1 c. rigido qualunque il suo grado di libertà è = 6

COORDINATE PER UN CORPO RIGIDO

3 coordinate per 1° punto
2 coordinate per 2° punto
1 coordinata

fissato 1 punto

- devo dare 3 coord. x primo punto scelto,
- 2 per definire il secondo, su una sfera che ha raggio d
- 1 ordinata che dà l'orientazione

↳ con 6 numeri

Posizione del corpo $P_1 = x_1, y_1, z_1$

$P_2 = x_2, y_2, z_2$

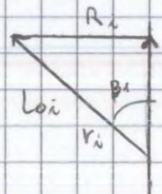
$P_3 = x_3, y_3, z_3$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2} = D_{12}$$

$$\sqrt{(x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2 + (z_1-z_3)^2} = D_{13}$$

$$\sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2 + (z_2-z_3)^2} = D_{23}$$

consideriamo
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(EXT)} \\ \dfrac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega^{(EXT)} \end{cases}$$



$L_{oiz} = L_{oi}\cos\beta_i = L_{oi}\,\text{sen}\,\theta_i$

Studio la componente lungo z del momento angolare.

$$L_{oiz} = r_i m_i (\omega r_i\,\text{sen}\,\theta_i)\,\text{sen}\,\theta_i = m_i (r_i\,\text{sen}\,\theta)^2 \omega = m_i R_i^2 \omega$$

$$L_{oz} = \sum_{i=1}^{N} L_{oiz} = \sum_{i=1}^{N} (m_i R_i^2 \omega)$$

→ è uguale x tutte le parti, posto fuori

$$\boxed{L_{oz} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2\right)\omega}$$

La componente lungo z del L dipende da z? No, solo dalla dist. dei vari punti dall'asse di rotaz.

ai fini del mom. angolare è la distr. della massa attorno all'asse di rotazione

→ quantità **INDIPENDENTE** dalla pos. di O sull'asse di rotazione

$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2}$ è detto momento di inerzia $= I_z$

→ la I è una matrice simmetrica di 2° ordine; asse di rotazione è z

$$\boxed{L_z = I_z \omega}$$

RICAPITOLAZ

* L di un corpo rigido che ↻ attorno all'asse non è // all'asse
* dipende dalla posizione del polo
* è proporzionale alla velocità angolare e alla distribuzione della massa
* La componente lungo l'asse non dipende dal polo

COME CALCOLARE IL MOMENTO ANGOLARE

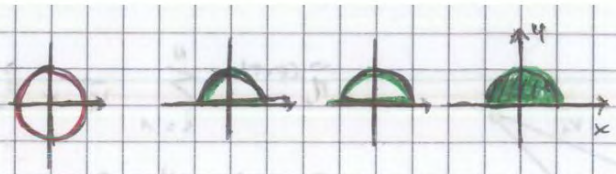
$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{EXT}$$

O è fisso all'asse di rotazione

$$\vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{u}_z \cdot \vec{M}_o^{(EXT)}$$

$$\frac{dL_{oz}}{dt} = M_{o,z}^{(EXT)} \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_{o,z}^{(EXT)}$$

Prova a calcolare CM di



TEO EK APPLICATO AL CORPO RIGIDO

$A \to B$

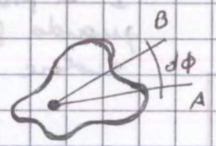
$W_{A\to B} = E_K(B) - E_K(A)$

supponendo A molto vicino a B

↳ $dW = dE_K = d\left\{\frac{1}{2} I_z \omega^2\right\} = \frac{1}{2} I_z \omega\, d\omega$

quindi $\frac{dW}{dt} = \underbrace{\omega I_z \frac{d\omega}{dt}}_{M_z^{(EXT)}} = M_z^{(EXT)} \cdot \omega$

sezione del corpo



$\omega = \frac{d\phi}{dt}$

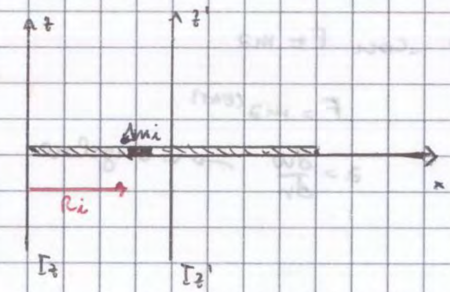
$\frac{dW}{dt} = M^{(EXT)} \frac{d\phi}{dt}$

quando su un corpo si esercitano delle forze

quindi $\boxed{dW = M^{(EXT)} d\phi}$

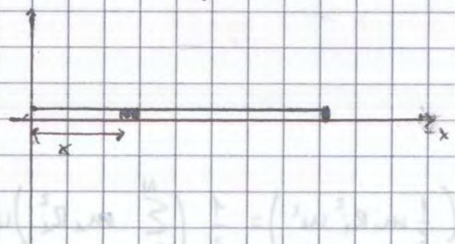
$dW = F dx$
↳ def di lavoro in dinamica in generale

Pb determinare il mom di inerzia di una barra rettilinea e omogenea che ruota attorno a 1 asse ⊥ alla barra stessa passante per un estremo e per il CM



divido la barra in "pezzettini"

$I_z = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 = \int_{corpo} R^2 dm$
↳ integrale su tutto il corpo

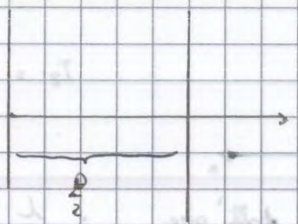


$I_z = \int_0^D x^2 \lambda dx = \lambda \int_0^D x^2 dx = \frac{\lambda}{3} D^3$

$\lambda = \frac{M}{D}$ perché il corpo è omogeneo

quindi $= \frac{1}{3}\frac{M}{D} D^3 = \frac{MD^2}{3}$

Verifichiamo se Ph della asta concorda con Steiner



$I_o = \frac{1}{3} MD^2$

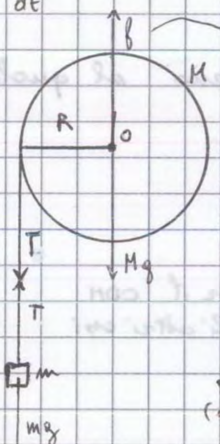
$I_{cm} = \frac{1}{12} MD^2$

$$I_o = I_{cm} + M\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} MD^2 + \frac{1}{4} MD^2 =$$

$$= \frac{1+3}{12} MD^2 = \frac{1}{3} MD^2 \quad \text{VERIFICATO}$$

Problema: come si muove il sistema quando libero la massa m?

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = M_z^{(EXT)}$$



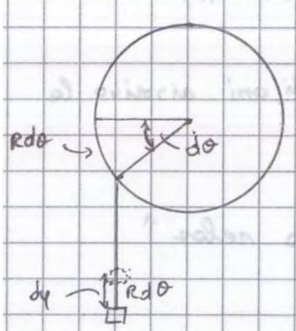
forza eserc. dal perno xx il sistema tengo → non dà momento xx non c'è raggio $r=0$

(m) $mg - T = ma$

(M) la forza T esercita momento

$$TR = \frac{d}{dt}(I\omega) \qquad TR = \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$TR\,sen\,90°$ (sarebbe $T \times R$)



$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{R\,d\theta}{dt}$$

$$v = \omega R$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{R\,d\omega}{dt^2}$$

$$\begin{cases} mg - T = mR\dfrac{d\omega}{dt} \\ T\cancel{R} = \dfrac{1}{2} MR^{\cancel{2}} \dfrac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

$$mg - \cancel{T} = mR\frac{d\omega}{dt}$$

$$\cancel{T} = \frac{1}{2} MR \frac{d\omega}{dt} \qquad +$$

$$mg = MR\left(\frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d\omega}{dt}\right)$$

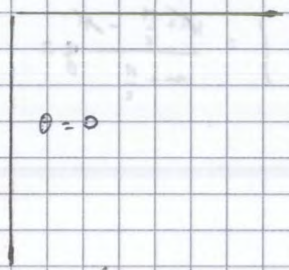
$$mg = \left(m + \frac{M}{2}\right) R \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{m + \frac{M}{2}} \frac{g}{R}$$

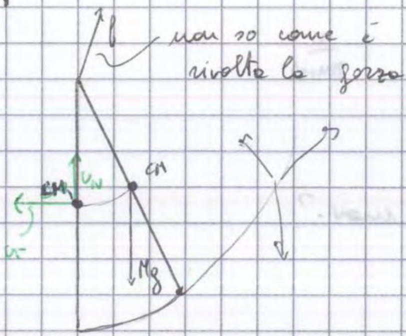
$$a = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{m + \frac{M}{2}} g$$

$$a = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{2m}{2m + M} g$$

Con che velocità passa la barra per la verticale?



$$\begin{cases} \omega(\theta=0) = \sqrt{3\frac{g}{\ell}} \\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\theta=0} = 0 \end{cases}$$



$$\vec{a}_{CM} = \frac{dV_{CM}}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2_{CM}}{\frac{\ell}{2}}\vec{u}_N$$ (perché si muove di moto circolare)

$$V_{CM} = \omega\frac{\ell}{2}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\ell}{2}\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_T + \omega^2\frac{\ell}{2}\vec{u}_N$$

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{f} + M\vec{g} \qquad f = Ma_{CM} - Mg = M(a_{CM} - g)$$

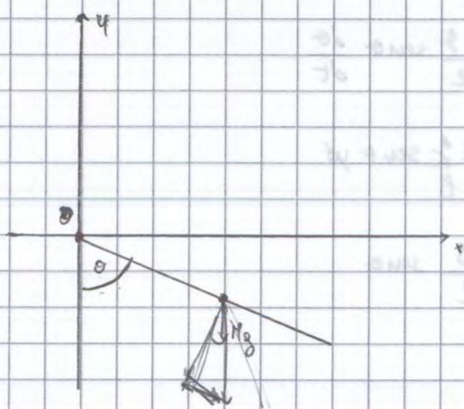
$$\vec{a}_{CM}(0) - g = \frac{\ell}{2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\vec{u}_T + \omega^2(0)\frac{\ell}{2}\vec{u}_N - \vec{g}$$

$$= \omega^2(0)\frac{\ell}{2}\vec{u}_y + \vec{g}\,u_y = \left(3\frac{g}{\ell}\cdot\frac{\ell}{2} + g\right)\vec{u}_y = \frac{5}{2}g\,\vec{u}_y$$

Quando si studia il mov.
uso
- Energia
- Eq. di $\frac{d\omega}{dt}$

Se interessa calc. la forza sul perno
↳ passare x l'eq. del CM che è l'unica che fa intervenire le forze esterne

altrimenti x calcolare l'a



$$\frac{d(I\omega)}{dt} = M_0^{(EXT)} \qquad I\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\ell}{2}Mg\cdot\operatorname{sen}\theta$$

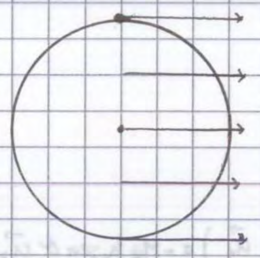
regola MDX

$$\frac{1}{3}m\ell^2\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\ell}{2}mg\operatorname{sen}\theta$$

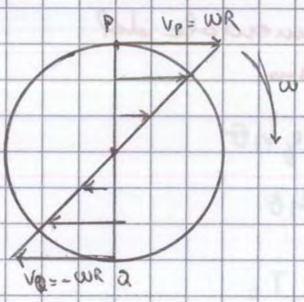
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$$

NB per calcolare le reazioni → uso le eq. di moto del centro di massa!

MOTO DI ROTAZIONE DEI CORPI RIGIDI

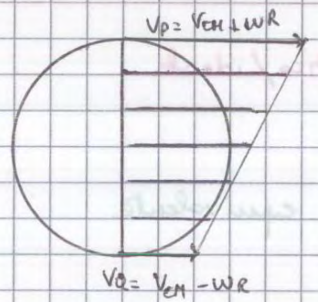


TRASLAZIONE PURA



ROTAZIONE PURA : la velocità dei pti dipende dalla distanza dal CDM
le frecce rappresentano il profilo di velocità

Supponiamo e ruota che trasla + ruota
V_{CM} + rotazione con ω attorno al CM
↳ movimento di ROTOTRASLAZIONE



Se $V_Q = 0$ si parla di ROTOLAMENTO PURO (ROLLING WITHOUT SLIPPING)

$V_{CM} = \omega R$

Nei problemi di rotolamento puro ci sono condizioni che vanno verificate altrimenti sist. slitta (l'attrito è sempre statico)

Quali sono le eq. da risolvere x questo sistema
Uso le • equazione del CDM
↳ $\frac{dP}{dt} = R^{(EXT)}$ dove $\vec{P} = \vec{V}_{CM} M$

$$\boxed{M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{R}^{(EXT)}}$$

ma anche $\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}^{(EXT)}_{CM}$ che diventa $\boxed{\frac{d}{dt}(I_{CM}\,\omega) = M^{(EXT)}_{CM}}$
(poiché le particelle si muovono di moto circolare)

$F_0 \leq 3 \mu_s Mg$ se rimango in qst situaz → il mov. è di rotolamento puro

2° caso se $F_0 > 3\mu_s Mg$ c'è moto di ROTOTRASL ma con SLITTAMENTO
↳ Q NON È ISTANTANEAMENTE FERMO
↳ x lui attrito dinamico

$f = f_{tr} = \mu_r Mg$

$V_{cm} \neq \omega R$ in qst caso l'avanzam. attorno a cm e la rotaz. di cm sono 2 moti INDIPENDENTI

$$\begin{cases} M \dfrac{dv_{cm}}{dt} = F_0 - f \\ I_{cm} \dfrac{d\omega}{dt} = fR \end{cases} \qquad \begin{cases} M \dfrac{dV_{cm}}{dt} = F_0 - \mu_r Mg \\ I_{cm} \dfrac{d\omega}{dt} = \mu_r MgR \end{cases}$$

$$\frac{dV_{cm}}{dt} = \frac{F_0 - \mu_r Mg}{M}$$

il cm si muove di MUA poiché a è costante

$$V_{cm} = \frac{F_0 - \mu_r Mg}{M} \cdot t \quad \text{se } t = 0 \;\; V_{cm} = 0$$

↳ integro secondo le condizioni

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu_r MgR}{I_{cm}}$$

$$\omega = \frac{\mu_r MgR}{I_{cm}} t \qquad \text{se } t = 0 \quad \omega = 0$$

$$\begin{cases} V_{cm} = \dfrac{F_0 - \mu_r Mg}{M} t \\ \omega = 2\mu_r \dfrac{g}{R} t \end{cases}$$

$$V_Q = V_{cm} - \omega R = \frac{F_0 - \mu_r Mg}{M} (-2\mu_r g t) = \left(\frac{F_0}{M} - 3\mu_r Mg\right)$$

COSA SUCCEDE SE SI APPLICA UNA COPPIA ALLA RUOTA? (AUTOMOBILI)

$$\begin{cases} M \dfrac{dv}{dt} = f \\ I_{cm} \dfrac{d\omega}{dt} = M_0 - fR \end{cases} \qquad I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$$

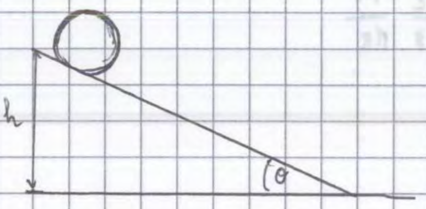
M_0: mom. applicato dal motore

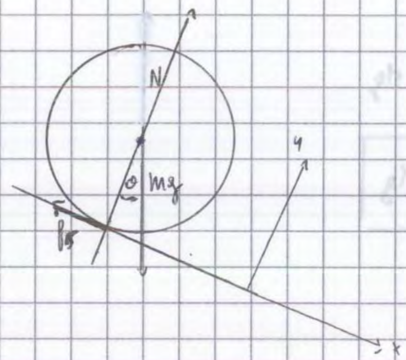
1° caso rotolamento

$$\begin{cases} V_{cm} = \omega R \\ f = f_s \leq \mu_s N \end{cases}$$

IMPORTANTE

Problema: supp. che il disco parta da altezza h e supp. che il moto sia di puro rotolamento dat con che v il disco arriva alla fine del piano. Quanto deve valere θ affinché il disco si muova di puro rotolam.?





$$\begin{cases} M\dfrac{dV_{CM}}{dt} = Mg\,\text{sen}\,\theta - f \\ N = Mg\cos\theta \\ I_{CM}\dfrac{dw}{dt} = f\cdot R \end{cases}$$

ROTOLAMENTO PURO

$V_{CM} = wR$

$f = f_s \leq \mu_s N = \mu_s Mg\cos\theta$

$$\begin{cases} M\dfrac{dV_{CM}}{dt} = Mg\,\text{sen}\,\theta - f_s \\ \dfrac{1}{2}M\cancel{R^2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{R}}\dfrac{dV_{CM}}{dt} = f_s\cancel{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} M\dfrac{dV_{CM}}{dt} = Mg\,\text{sen}\,\theta - f_s \\ \dfrac{1}{2}M\dfrac{dV_{CM}}{dt} = f_s \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\cancel{M}\frac{dV_{CM}}{dt} = \cancel{M}g\,\text{sen}\,\theta \qquad \frac{dV_{CM}}{dt} = \frac{2}{3}g\,\text{sen}\,\theta$$

$$f_s = \frac{1}{2}M\frac{dV_{CM}}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}}M\frac{\cancel{2}}{3}g\,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{3}Mg\,\text{sen}\,\theta \qquad f_s \leq \mu_s N$$

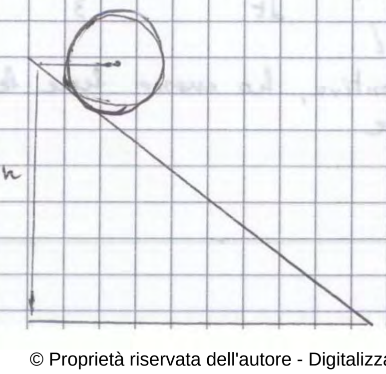
$$\frac{1}{3}Mg\,\text{sen}\,\theta \leq \mu_s Mg\cos\theta \qquad \text{tg}\,\theta \leq 3\mu_s$$

Se siamo sicuri che il corpo rotola → l'attrito è statico

↳ punto di contatto momentaneam. fermo

↳ attrito non fa lavoro → l'energia si conserva quindi uso la VIA ENERGETICA

- Se il corpo slitta → non posso usare l'energia ~~xx~~ non so calcolare il W



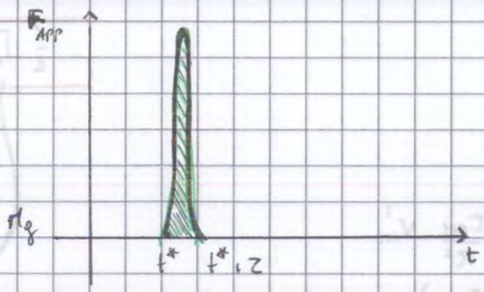
$E_K = E_{K\,CM} + E_K'$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}w^2}$$ energia che il corpo ha SEMPRE

FORZE IMPULSIVE

Ricordando il teorema del momento angolare $\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{V}_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega^{(EXT)}$

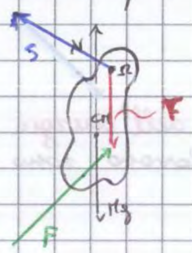
Se Ω è fermo $\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{M}_\Omega^{(EXT)}$



$$J_{Mg} = \int_{t^*}^{t^*+\tau} Mg\, dt = Mg\,\tau$$

$$J_{APP} = \int_{t^*}^{t^*+\tau} F_{APP}\, dt$$

OSS: quando si hanno fen. impulsivi delle forze costanti ↳ non contano



se sist. è in equilibrio $Mg = N$ che tiene l'equilibrio

↳ Quando do la martellata si devono sviluppare delle forze impulsive che si manif. durante l'urto

Quando studio fen. di urto le uniche F che considero sono forze con grandi intensità in brevi intervalli di tempo

↳ importanti xk ci dicono se il sistema resiste a determinati tipi di sollecitazione

La martellata → è una forza esterna

se Ω è un chiodo che tiene il tutto → esercita forze esterne

quindi

$$d\vec{L}_\Omega = \vec{M}_\Omega^{(EXT)} dt$$

$$\Delta\vec{L}_\Omega = \int_{t^*}^{t^*+\tau} \vec{M}_\Omega^{(EXT)} dt$$

In genere nella variaz. del mom angolare le forze legate al vincolo non danno contributo (non danno momento)

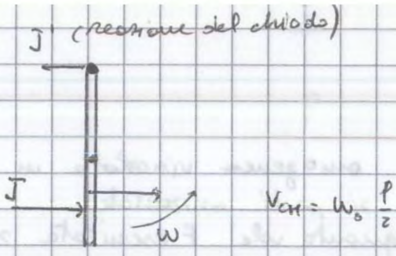
$$\Delta\vec{L}_\Omega = \int_{t^*}^{t^*+\tau} \vec{r} \times \vec{F}_{(APP)}\, dt$$

$$= \vec{r} \times \int_{t^*}^{t^*+\tau} F_{APP}\, dt = \vec{r} \times \vec{J}$$

Quando il corpo è vincolato e c'è 1 forza impulsiva la variaz. del mom. angolare è data da

$$\boxed{\Delta\vec{L}_\Omega = \vec{r} \times \vec{J}}$$

dopo la martellata cosa accade a G?



$\Delta P = \vec{P}_{dopo} - \vec{P}_{prima} = \vec{P}_{dopo}$ perché $V_i = 0$ $= M\vec{V}_{cm} = M w_0 \frac{l}{2}$

$\Delta P = M w_0 \frac{l}{2}$

$M w_0 \frac{l}{2} = J - J'$ ↳ impulso eserc. sul chiodo

quindi $J' = -M w_0 \frac{l}{2} + J$

dove $\boxed{Jr = I_0 w_0}$

$w_0 = \frac{Jr}{I_0}$

quindi $J' = J - M w_0 \frac{l}{2} = J - M \frac{l}{2} \frac{Jr}{I_0}$

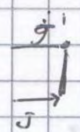
$$\boxed{J' = \left(1 - \frac{Mlr}{2I_0}\right) J}$$

$I_0 = \frac{1}{3} Ml^2$

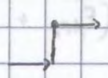
$J' = \left(1 - \frac{\cancel{M}lr}{2 \cdot \frac{1}{3} \cancel{M} \cdot l}\right)$

$$\boxed{J' = \left(1 - \frac{3r}{2l}\right) J}$$

- Se $1 - \frac{3r}{2l} = 0$ il chiodo tiene perché non si esercita forza sul chiodo
- Se $1 - \frac{3r}{2l} > 0 \Rightarrow r < \frac{2}{3} l$



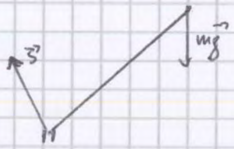
- Se $1 - \frac{3r}{2l} < 0 \Rightarrow r > \frac{2}{3} l$



Calcoliamo le forze che si esercitano sul perno
" " coppie " " " "

dalla relazione $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(EXT)}$

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ ↳ chiamiamola F tra c'è un altro R



$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{S}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\omega R\vec{u}_\phi) = m\omega R^2 \frac{d\vec{u}_\phi}{dt} = -m\omega^2 R\vec{u}_R = \vec{F}$$

$$\vec{S} + m\vec{g} = -\omega^2 m R\vec{u}_R$$

$$S = m(\vec{g} - \omega^2 R\vec{u}_R)$$

$$S = +mg\,u_z - \omega^2 R\vec{u}_R$$

diretta ↓

$\begin{cases} S_z = mg \\ S_R = -\omega^2 R \end{cases}$ il perno deve tenere queste due forze lungo gli assi

Se voglio calcolare la coppia che si esercita sul corpo uso la deriv. del mom. angolare

$\frac{dL_0}{dt} = \vec{M}_0^{(EXT)}$

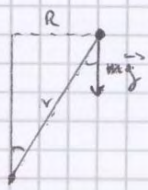
la danno forza peso e la coppia

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{-mRh\omega\,\vec{u}_R + mR^2\omega\vec{u}_z\right\}$$

$$= -mRh\omega\frac{d\vec{u}_R}{dt} = -mRh\omega(\omega\,\vec{u}_\phi) =$$

$$\boxed{\frac{dL_0}{dt} = -mRh\omega(\omega u_\phi)}$$

$$-mRh\omega^2\vec{u}_\phi = \vec{M}_0^{(EXT)}$$

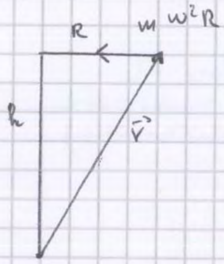


$M_0(\text{PESO}) = \vec{r} \times m\vec{g} = r\,\text{sen}\theta\, mg\, u_\theta = Rmg\vec{u}_\theta$

$-mRh\omega^2\vec{u}_\phi = mgR\vec{u}_\phi + \vec{c}$ ↳ coppia che devono essere fornite dal vincolo

$\vec{c} = -mgR\vec{u}_\phi - mRh\omega^2\vec{u}_\theta$

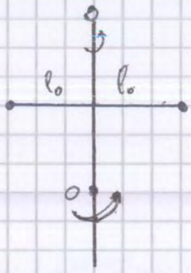
↳ le coppie hanno 2 componenti da esercitare



$-mRh\omega^2\vec{u}_\phi$ è il momento centrifugo

↳ (da eliminare in fase di progetto)

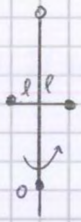
Problema della ballerina



$I_o \to$ rispetto a asse centrale di inerzia

$\vec{L}_o(o) = I_o \, \omega_o \, \vec{u}_z$

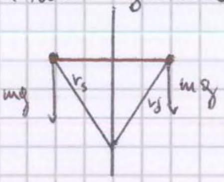
Quando la ballerina contrae le braccia



$I < I_o$

$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{(EXT)} = 0$ perché i due mom sono = e opposti

In 1 mom generico



$\vec{L}_o = cost$

$I_o \omega_o = I \omega \qquad \omega = \frac{I_o \omega_o}{\omega} > \omega_o$

STATICA = corpi fermi

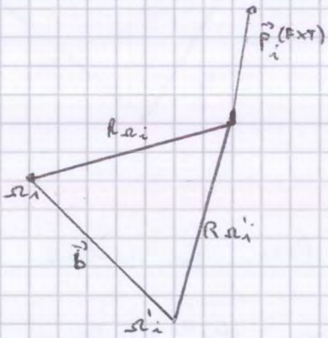
è il caso in cui

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(EXT)} \\ \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{(EXT)} \end{cases} \quad \text{con e} \quad \begin{cases} R^{(EXT)} = 0 \\ M_o^{(EXT)} = 0 \end{cases}$$

Avevamo definito il momento complessivo come

$$\vec{M}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(EXT)}$$

$$\vec{M}_{\Omega'} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega'} \cdot \vec{F}_i^{(EXT)}$$



$\vec{R}_{\Omega' i} = \vec{b} + \vec{R}_{\Omega i}$ sost. nella prima

$$\vec{M}_{\Omega i} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{b} + \vec{R}_{\Omega i}) \times \vec{F}_i^{(EXT)}$$

$$b \times \sum_{i=1}^{N} F_i^{(EXT)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega i} \times F_i^{(EXT)}$$

$$= \vec{b} \times \vec{R}^{(EXT)} + \vec{M}_\Omega$$

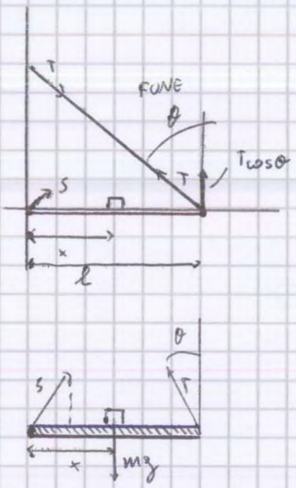
$$\vec{M}_{\Omega'} = \underbrace{\vec{b} \times \vec{R}^{(EXT)}}_{= 0 \text{ in statica}} + \vec{M}_\Omega$$

Quindi ogni polo è indifferente
vanno tutti bene

ESAME

Problema

Det. in cond. di eq. le forze esercitate sul sistema al variare di m sul appoggio di massa trascurabile



$S + T + mg = 0$

(x) $S_x - T\,sen\,\theta = 0$

(y) $S_y - mg + T\cos\theta = 0$

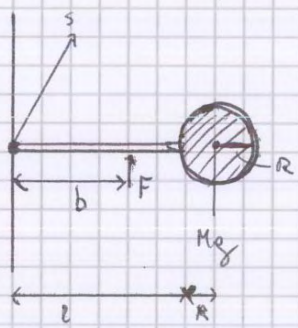
$mgx - T\cos\theta \cdot l = 0$

$T = mg\,\frac{x}{l} \cdot \frac{1}{\cos\theta}$

(x) $S_x = T\,sen\,\theta = mg\,\frac{x}{l}\,tg\,\theta$

(y) $S_y = mg - mg\,\frac{x}{l} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos\theta}}\,\cancel{\cos\theta} = mg\left(1 - \frac{x}{l}\right)$

Problema del libro



$S + F - Mg = 0$

$-Fb + Mg(l+R) = 0$

$F = Mg\,\frac{l+R}{b}$

$S_y = Mg - F = Mg\left(1 - \frac{l+R}{b}\right)$

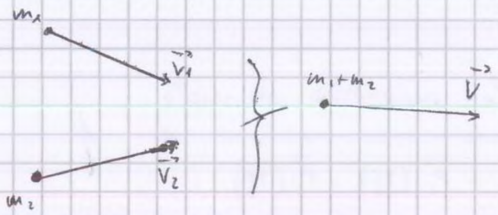
$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(-v_1^2 - v_2^2 + 2v_1 v_2\right) = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2$$

$$\Delta E_K = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2 = -\frac{1}{2}\mu(v_1-v_2)^2$$

↳ la diff. di E_K è sempre una quantità negativa

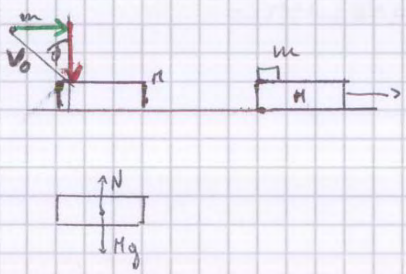
Consideriamo un moto bidimensionale (vedi calcoli con parte verde)

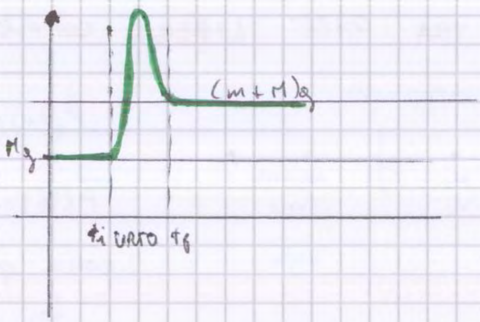
↳ otteniamo $-\frac{1}{2}\mu(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2$



Problema: sacco lanciato su una slitta che scivola, piano liscio

↳ caso di un urto anelastico





è un fenomeno di urto

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(EXT)}$$

$$\frac{dP_x}{dt} = 0 \quad \text{(non c'è comp lungo x)}$$

P_x costante $\qquad P_{x i} = P_{x f}$

$$\Downarrow$$

$$m V_0 \operatorname{sen}\phi = (m+M)V$$

$$V = \frac{m}{m+M}\operatorname{sen}\phi\, V_0$$

$$\frac{dP_y}{dt} = R_y^{(EXT)} = N$$

$$dP_y = N\,dt \qquad P_y(f) - P_y(i) = \int_0^t N\,dt = J$$

siamo in grado di calcolarlo? si!

$$\begin{cases} V_{2f} - V_{1f} = V_{1i} - V_{2i} \\ m_1 (V_{1i} - V_{1f}) = m_2 (V_{2f} - V_{2i}) \end{cases}$$

risolvendo sist ottengo...

$$\boxed{V_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) V_{1i} + 2m_2 V_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad V_{2f} = \frac{2m_1 V_{1i} + (m_2 - m_1) V_{2i}}{m_1 + m_2}}$$

eq. dello velocità negli urti con moto unidimensionale

ANALIZZIAMO I CASI

Particella 2 ferma

$V_{2i} = 0$

$$\begin{cases} V_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1i} \\ V_{2f} = 2 \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} V_{1i} \end{cases}$$

* Se $m_2 \gg m_1$

$$\begin{cases} V_{1f} = - V_{1i} \\ V_{2f} = 0 \end{cases}$$

es pallina da ping pong contro un muro

* Se $m_2 \ll m_1$

$$\begin{cases} V_{1f} = V_{1i} \\ V_{2f} = 2 V_{1i} \end{cases}$$

* Se $m_1 = m_2$

$$\begin{cases} V_{1f} = 0 \\ V_{2f} = V_{1i} \end{cases}$$

Se non siamo nel caso di urto unidimensionale

$$\begin{cases} m_1 \vec{V}_{1i} + m_2 \vec{V}_{2i} = m_1 \vec{V}_{1f} + m_2 \vec{V}_{2f} & \text{cons. qdm} \\ \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_{2f}^2 & \text{cons. en.} \end{cases}$$

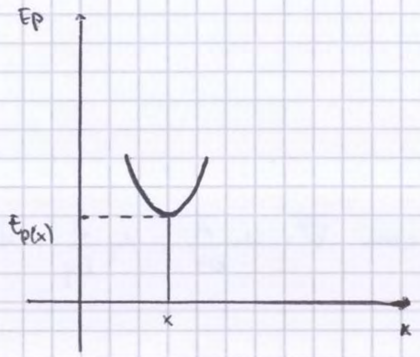
Se l'urto non è UNIDIMENSIONALE abbiamo bisogno di info in +.

OSCILLATORI ARMONICI

Un corpo si muove di moto armonico quando vale la relazione

$$F = -kx$$

$x = 0$ è la posizione di equilibrio stabile



$$E_p(x) = E_p(x) + \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_x (x-x) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_x (x-x)^2 \dots$$

Se x è un punto di minimo di Ep

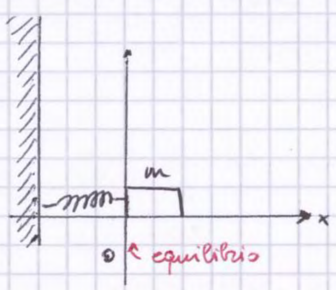
$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_x = 0$$

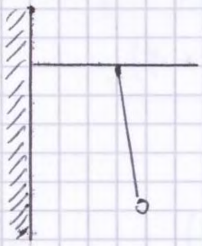
$$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_x > 0$$

$$k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_x > 0$$

$$E_p(x) = E_p(x) + \frac{1}{2}k(x-x)^2$$

MAS





In assenza di attriti sappiamo che

$$Ma = F$$

$$\boxed{M\frac{d^2x}{dt} = -kx}$$

equazione fondamentale

riscrivo come $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

Introduco la frequenza naturale del sistema

$$\boxed{w_0^2 = \frac{k}{m}}$$

- Quando si sturba un sist. questo tende a vibrare con questa frequenza.
- dove m è la massa del corpo che vibra se ho 1 circuito k è la induttanza

- Se il sistema si muove di moto periodico il valor medio generalmente è calcolato sul periodo

$$f(t+T) = f(t)$$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

↳ Quanto vale la velocità media di una particella che si muove di moto armonico?

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi)\,dt = \frac{A}{T}\int_0^T \mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi)\,dt$$

$u = \omega_0 t + \phi$

$du = \omega_0 dt$

$dt = \frac{1}{\omega_0}du$

$$\langle x \rangle = \frac{A}{\omega_0 T}\int_\phi^{2\pi+\phi} \mathrm{sen}\,u\,du = \frac{A}{2\pi}\int_\phi^{\phi+2\pi} \mathrm{sen}\,u\,du = -\frac{A}{2\pi}\Big[\cos u\Big]_\phi^{\phi+2\pi} = 0$$

poiché $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\boxed{T\omega_0 = 2\pi}$

$\langle x \rangle = 0$

- La velocità invece

$v(t) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \phi)$ ho $\langle v \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \phi)$

quindi (stessi calcoli) $\langle v \rangle = \frac{A}{T}\Big[\mathrm{sen}\,u\Big]_\phi^{\phi+2\pi} = 0$

$\langle v \rangle = 0$

Se calcolo invece il valor medio di

$$\langle \mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \phi)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \phi)\,dt =$$

con $u = \omega_0 t + \phi$

$dt = \frac{1}{\omega_0}du$

$$\langle \mathrm{sen}^2 u\rangle = \frac{1}{\omega_0 T}\int_\phi^{\phi+2\pi} \mathrm{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\phi+2\pi}\mathrm{sen}^2 u = \frac{1}{2}$$

$x = \mathrm{sen}^2$

$dx = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$

e $\langle \cos^2 u\rangle = \frac{1}{2}$

- Se voglio quindi calcolare l'E_K media

con $\langle x \rangle = 0$

$\langle v \rangle = 0$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T A^2\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \phi)\,dt = A^2\langle \mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \phi)\rangle = \frac{1}{2}A^2$$

riscrivo la relazione

$$A\cos\phi \,\text{sen}(\omega t) + A\,\text{sen}\,\phi \cos(\omega t) =$$

$$(A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2)\,\text{sen}(\omega t) + (A_1\,\text{sen}\,\phi_1 + A_2\,\text{sen}\,\phi_2)\cos\omega t$$

per dipendenza lineare ↓

$$\begin{cases} A\cos\phi = A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 \\ A\,\text{sen}\,\phi = A_1\,\text{sen}\,\phi_1 + A_2\,\text{sen}\,\phi_2 \end{cases}$$

$$\text{tg}\,\phi = \frac{A_1\,\text{sen}\,\phi_1 + A_2\,\text{sen}\,\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$

(dividendo membro a membro)

$$A^2\cos^2\phi = A_1^2\cos^2\phi_1 + A_2^2\cos^2\phi_2 + 2A_1A_2\cos\phi_1\cos\phi_2$$

$$A^2\,\text{sen}^2\phi = A_1^2\,\text{sen}^2\phi_1 + A_2^2\,\text{sen}^2\phi_2 + 2A_1A_2\,\text{sen}\,\phi_1\,\text{sen}\,\phi_2$$

sommo membro a membro

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\underbrace{\cos\phi_1\cos\phi_2 + \text{sen}\,\phi_1\,\text{sen}\,\phi_2}_{\text{ovvero } \cos(\phi_1-\phi_2)})$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1-\phi_2)}$$

se $\phi_1 - \phi_2 = 2n\pi$

$$A_M = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

è il caso della INTERFERENZA COSTRUTTIVA

↳ Quando la diff. di fase è multiplo pari di π allora la ampiezza di oscillazione è data dalla somma delle A

Se $\phi_1 - \phi_2 = (2n+1)\pi$

$$A_M = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$$

che è INTERFERENZA DISTRUTTIVA

↳ in entrambi i casi A oscilla tra valori max e min

↳ in int. distr. $A_m = 0$

$A_M = 2A$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E = \frac{1}{2}k(2a)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ka\right)^2 = 4E_1$$

Nel caso di int. distruttive $E = 0$

CASO PARTICOLARE

STESSA AMPIEZZA E FASE

$x_1 = A \operatorname{sen}(\omega_1 t)$

$x_2 = A \operatorname{sen}(\omega_2 t)$

$$x = x_1 + x_2 = A\left[\operatorname{sen}(\omega_1 t) + \operatorname{sen}(\omega_2 t)\right]$$

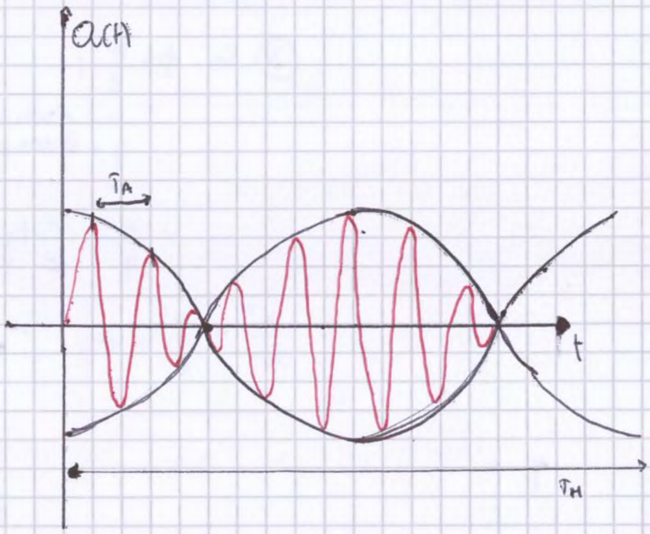
prostaferesi $\quad \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

$\left.\begin{array}{l}\omega_1 = \omega + \varepsilon\\ \omega_2 = \omega - \varepsilon\end{array}\right\}$ differiscono di una quantità molto piccola $\quad \varepsilon \ll \omega$

$$\boxed{x(t) = 2A\cos(\varepsilon t)\operatorname{sen}(\omega t)}$$

Con andamento



$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

$a(t) = 2A\cos(\varepsilon t)$ detta ampiezza modulare

$x(t) = a(t)\operatorname{sen}(\omega t)$

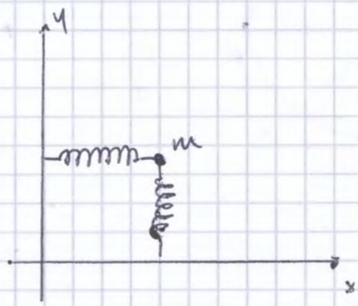
$T_M = \frac{2\pi}{\varepsilon} \qquad T_A = \frac{2\pi}{\omega}$

Il moto complessivo con $\neq$ pulsaz. con differenza piccola è circa un moto armonico con una ampiezza $A = a$ detta ampiezza modulare

SOVRAPPOSIZIONE DI MOTI ARMONICI CON DIREZIONI PERPENDICOLARI

$$\begin{cases} x = A\operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1)\\ y = B\operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2)\end{cases}$$

possiamo immaginare il sistema così: come si muove la particella?



Troviamo l'equazione cartesiana generica

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega t) \\ y = B\,\text{sen}(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$\text{sen}(\omega t) = \frac{x}{A}$$

$$\cos(\omega t) = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2(\omega t)} = \pm\sqrt{1 - \frac{x}{A}}$$

$$\frac{y}{B} = \text{sen}(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\,\text{sen}\,\phi$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\phi \pm \sqrt{1 - \frac{x}{A}}\,(\text{sen}\,\phi)$$

riarrangio

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\phi\right)^2 = \left(\pm\sqrt{1 - \frac{x}{A}}\,\text{sen}\,\phi\right)^2$$

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2}\cos^2\phi - 2\frac{xy}{BA}\cos\phi = \left(1 - \frac{x}{A}\right)\text{sen}^2\phi$$

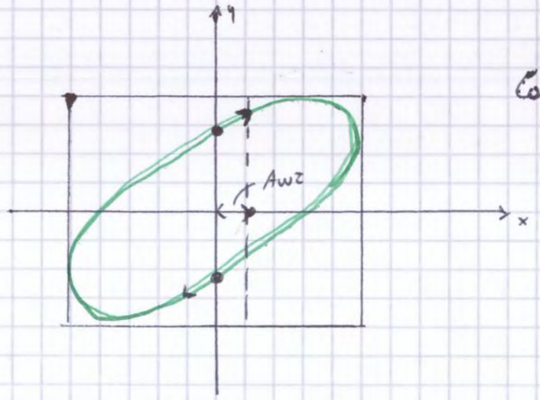
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\phi = \text{sen}^2\phi$$

con calcoli + con raccoglimento

- Se $\phi = 0$ $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{xy}{AB} = 0$

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \longrightarrow y = \frac{B}{A}x$$

- Se $\phi = \frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$



Con ϕ generico la traiettoria è questa.

↓

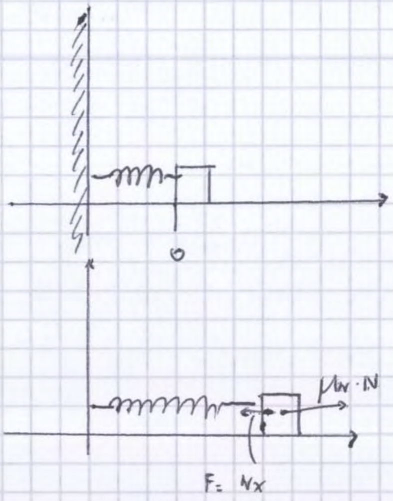
COME È PERCORSA? (In quale direz.?)

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega t) \\ y = B\,\text{sen}(\omega t + \phi) \end{cases} \quad \text{per } t = 0 \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y = B\,\text{sen}(\phi) \end{cases}$$

prendiamo un tempo piccolo t.c. $\tau = t$

$$\omega\tau \ll 1$$

OSCILLATORE ARMONICO IN PRESENZA DI ATTRITO DINAMICO

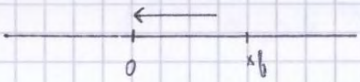


Da Newton

$$ma = -Kx + \mu_N mg$$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt} = -Kx + \mu_N mg}$$

eq.ne generico di 1 osc. armonico in presenza di attrito radente



$$Kx_f \leq \mu_s mg \qquad \boxed{x_f = \mu_s \frac{mg}{K}}$$

Quando il T è grande il sistema si ferma

IN PRESENZA DI ATTRITO VISCOSO

$$f = -\lambda v$$

$$ma = -Kx - \lambda v$$

$$m\frac{dx}{dt} = -Kx - \lambda\frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt} + \lambda\frac{dx}{dt} + Kx = 0}$$

eq.ne che vale sempre

$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad \gamma = \frac{\lambda}{2m} \qquad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

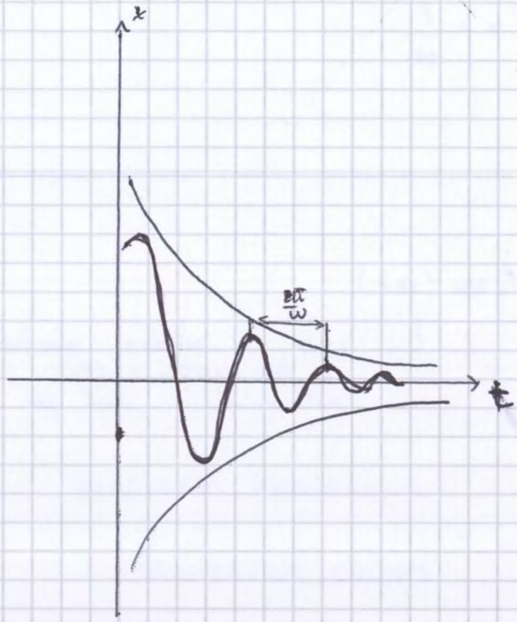
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

eq.ne diff. omogeneo 2° ordine

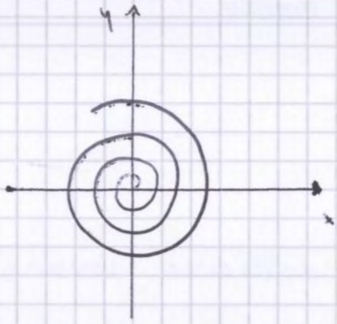
$$\left.\begin{aligned} x &= ce^{\alpha t} \\ \frac{dx}{dt} &= \alpha c e^{\alpha t} \\ \frac{d^2x}{dt} &= \alpha^2 c e^{\alpha t} \end{aligned}\right\} \text{ ottengo } c \cdot \left\{\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2\right\} e^{\alpha t} = 0$$

per $\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$ ho soluzioni oltre a quella banale

$$\boxed{\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$



$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



ENERGIA DEL SISTEMA

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt}$$

$$E = E_k + E_p$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}}m\,2v\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\cancel{2}}k\,2x\frac{dx}{dt} = \left(m\frac{dv}{dt} + kx\right)v = -\lambda v^2$$

In un sist. elastico in cui c'è forza viscosa la rapidità con cui si dissipa l'E è $= -\lambda v^2$

OSCILLATORE FORZATO

↳ quando applico una forza esterna (es. se voglio che una altalena continui a oscillare devo imporre una spinta esterna)

L'equazione diventa
$$m\frac{d^2x}{dt} = \underset{\text{F ELASTICA}}{-kx} - \underset{\text{F VISCOSA}}{\lambda\frac{dx}{dt}} + \underset{\text{FORZA ESTERNA}}{F}$$

Noi studiamo un moto persistente → la forza imposta dall'esterno deve quindi essere periodica sost. nell'eq. precedente

$$\frac{dx_p}{dt} = \Omega B \cos(\Omega t - \Delta)$$

$$\frac{d^2x_p}{dt} = -\Omega^2 B \operatorname{sen}(\Omega t - \Delta)$$

$$-\Omega^2 B \operatorname{sen}(\Omega t - \Delta) + 2\gamma \Omega B \cos(\Omega t - \Delta) + \omega_0^2 B \operatorname{sen}(\Omega t - \Delta) = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen}(\Omega t)$$

↓ raccolgo e uso formule di addizione

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B [\operatorname{sen}(\Omega t)\cos\Delta - \cos(\Omega t)\operatorname{sen}\Delta] + 2\gamma\Omega B [\cos(\Omega t)\cos\Delta + \operatorname{sen}(\Omega t)\operatorname{sen}\Delta]$$

$$= \frac{F_0}{m} \operatorname{sen}(\Omega t)$$

↳ isolo $\operatorname{sen}\Omega t$ e $\cos\Omega t$

$$\{(\omega_0^2 - \Omega^2) B\cos\Delta + 2\gamma\Omega B \operatorname{sen}\Delta\} \operatorname{sen}(\Omega t) + \{-(\omega_0^2 - \Omega^2) B \operatorname{sen}\Delta + 2\gamma\Omega B\cos\Delta\} \cdot \cos(\Omega t)$$

$$= \frac{F_0}{m} \operatorname{sen}(\Omega t)$$

Siccome sen e cos sono linearmente dipendenti affinchè deve persistere questa relazione

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \Omega^2) B\cos\Delta + 2\gamma\Omega B \operatorname{sen}\Delta = \frac{F_0}{m} \\ -(\omega_0 - \Omega^2) B \operatorname{sen}\Delta + 2\gamma\Omega B\cos\Delta = 0 \end{cases}$$

↳ $(\omega_0 - \Omega^2)\operatorname{sen}\Delta = 2\gamma\Omega\cos\Delta$

divido per $\cos\Delta$ $\quad (\omega_0 - \Omega^2)\operatorname{tg}\Delta = 2\gamma\Omega$

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0 - \Omega^2}$$

Se si considerano i casi $\Omega \to 0$ cioè ① $\Omega \ll \omega_0$

$\Omega \to \infty$ " ② $\Omega \gg \omega_0$

per frequenze piccole ① $\operatorname{tg}\Delta \simeq 2\frac{\gamma}{\omega_0^2}\Omega \to \Delta \simeq 2\frac{\gamma}{\omega_0^2}\Omega$

se ② $\Omega \to \omega_0$ $\quad \Delta = \frac{\pi}{2}$ (perchè $\operatorname{tg} \to \infty$)

③ $\Omega \gg \omega_0$ $\quad \operatorname{tg}\Delta \simeq -\frac{2\gamma}{\Omega}$ cioè $\Delta \to \pi$

Se $\Omega \to \infty$ $(\Omega \gg \omega_0)$ Se la frequenza della sollecitaz. esterna è molto alta

$$B = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\Omega^4}} = \frac{F_0}{m\Omega^2} \to 0$$

$$B = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{D(\Omega)}}$$

con $D(\Omega) = \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\Omega\right)^2$

studiamo l'andamento di B per det massimi e minimi e x comprendere quali sono i valori

$$\frac{dD}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega}\left\{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + \left(2\gamma\Omega\right)^2\right\}$$

$$\frac{dD}{d\Omega} = -4\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma^2\right)$$

$$\frac{d^2D}{d\Omega^2} = -4\left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right) + 12\Omega^2$$

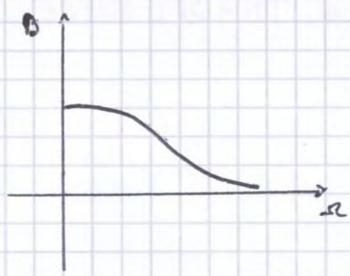
poniamo la $d = 0$ per studiare l'andamento

$$\frac{dD}{d\Omega} = 0 \Rightarrow -4\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma^2\right) = 0$$

$$\begin{cases} \Omega = 0 \\ \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \end{cases}$$

Se $\omega_0^2 < 2\gamma^2$ ESISTE SOLO LA SOLUZIONE $\Omega = 0$

$$\left(\frac{d^2D}{d\Omega^2}\right) = -4\left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right) > 0$$ è un MINIMO per D $\Rightarrow$ MAX per B



ampiezza che diminuisce in funzione di Ω

↳ caso tecnicam. non interessante xk dopo 1 po' sist. si annulla e smette di oscillare

Se $\omega_0^2 > 2\gamma^2$

$$\begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{d^2D}{d\Omega^2}\right)_{\Omega_1} = -4\left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right) < 0$$

Ω_1 È UN MAX per D $\Rightarrow$ MIN per B

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 187 di 324

$$x_p = B \,\text{sen}(\Omega t - \Delta)$$

$$P = \underbrace{F_0 \,\text{sen}(\Omega t)}_{\text{F. APPL.}} \; \underbrace{\Omega B \cos(\Omega t - \Delta)}_{\text{VEL. PART}}$$

$$P = \Omega B F_0 \,\text{sen}(\Omega t) \left\{ \cos(\Omega t) \cos\Delta + \text{sen}(\Omega t)\,\text{sen}\Delta \right\}$$

$$P = \underbrace{\frac{1}{2} \Omega B F_0 \cos\Delta \,\text{sen}(2\Omega t)}_{\text{SCAMBIATA}} + \Omega B F_0 \,\text{sen}\Delta \,\text{sen}^2(\Omega t)$$

P ne calcolo il valor medio → di una fz. periodica è sempre $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$

$$\langle P \rangle = \frac{\Omega B F_0}{2} \cos\Delta \underbrace{\langle \text{sen}(2\Omega t) \rangle}_{=0} + \Omega B F_0 \,\text{sen}\Delta \underbrace{\langle \text{sen}^2(\Omega t) \rangle}_{=\frac{1}{2}}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Omega B F_0 \,\text{sen}\Delta$$

$$\langle P \rangle = \langle P \rangle (\Omega)$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Omega F_0 \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(w_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \cdot \frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(w_0^2 - \Omega^2) + (2\gamma\Omega)^2}}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\gamma} \frac{F_0^2}{m} \frac{4\gamma^2\Omega^2}{(w_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} = \frac{F_0^2}{4\gamma m} \frac{(2\gamma\Omega)^2}{(w_0^2 - \Omega^2) + (2\gamma\Omega)^2}$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{4\gamma m} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{w_0^2 - \Omega^2}{2\gamma\Omega}\right)^2}}$$

la P trasmessa dal motore dipende dalla frequenza

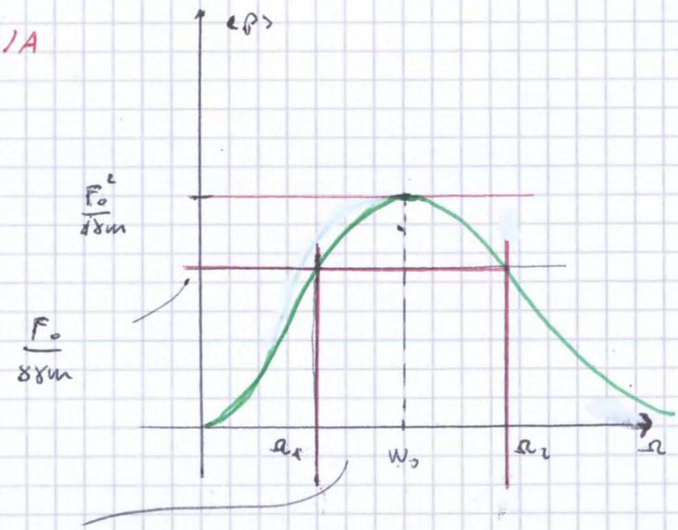
↳ LORENTZIANA

se $\Omega \to 0$ $\quad \langle P \rangle \to 0 \quad \langle P \rangle \sim \Omega^2$

se $\Omega \to \infty$ $\quad \langle P \rangle \to 1 \quad \langle P \rangle \sim \frac{1}{\Omega^2}$

↳ la RISONANZA IN ENERGIA

$$\langle P \rangle_M = \langle P \rangle (w_0) = \frac{F_0^2}{4\gamma m}$$



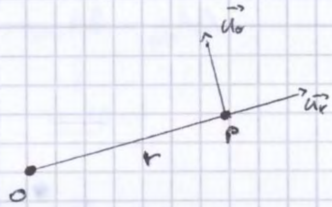
LARGHEZZA DI BANDA

LA GRAVITAZIONE

↳ interazione tra pianeti

Cons. forze centrali

$\vec{F} = f(r)\,\vec{u_r}$



proprietà

* part. sottoposte a f. centrali → si muovono di moto piano
* $f(r) > 0$ REP.
* $f(r) < 0$ ATTRATT.

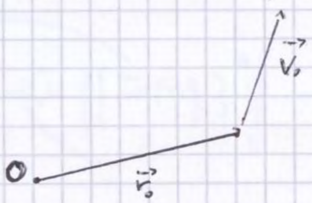
↳ si ottiene da $\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{M_o}$

$\vec{M_o} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{M_o} = \underbrace{\vec{r} \times (f(r) \cdot u_r)}_{\text{parallele}} = 0$

$\frac{dL_o}{dt} = 0$ $\quad L_o$ = costante, non cambia col tempo

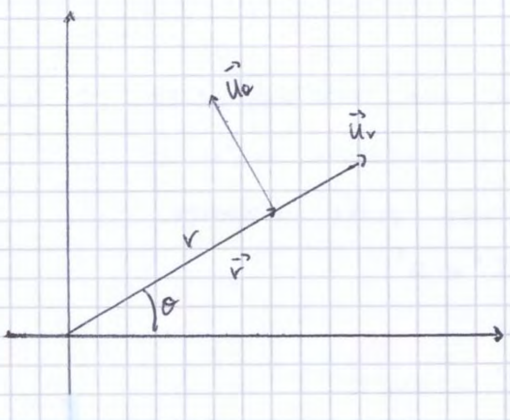
Consideriamo il vettore pos. e il v. velocità



$\vec{L_o}$ costante

$\vec{L_o} = \vec{r_o} \times (m\vec{v_o})$

Se la part. è sott. a f. centrale → moto è piano e il momento angolare è costante sia in mod, dir. e verso ed è ⊥ al piano del moto



In coord. polari

$v = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$

$\vec{L_o} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{L_o} = (r)\vec{u_r} \times \left\{ m \cdot \left(\frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta \right) \right\}$

$\vec{L} = mr^2\frac{d\theta}{dt}(\vec{u_r} \times \vec{u_\theta})$

$\boxed{\vec{L} = mr^2\frac{d\theta}{dt}\vec{u_z}}$ $\qquad L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$ è COST. NEL T

Quindi con ω cost $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$F_{centripeta} = \overbrace{m \frac{4\pi^2}{T^2} R}^{m\omega^2 R}$$

dalla (3)

$R \rightarrow$ distanza dal Sole

$T^2 = KR^3 \downarrow$ sost

$$F = 4\pi^2 \frac{m}{KR^3} R = \frac{4\pi^2 m}{K} \cdot \frac{1}{R^2}$$

legge proposta da Newton $\rightarrow$ se le leggi di Kep. sono vere la forza esercitata dal sole sui pianeti è una forza centrale e deve rispettare queste proporzionalità

$$\vec{F} = B \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$

$B \downarrow$ una certa proprietà

$$\boxed{\vec{F} = \gamma \frac{m_{G1} m_{G2}}{r^2} \vec{u}_r}$$

è la formula prop. da Newton con m_{G1} e m_{G2} masse gravitazionali che sono prop. alle masse inerziali

capacità dei corpi di attrarsi

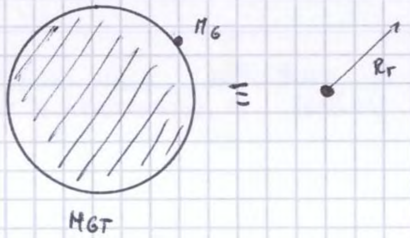
Abbiamo visto che in prox della Terra tutti i corpi cadono con = accelerat. g

$\hookrightarrow$ corpi sott. alla forza peso $P = m_I g$

$\downarrow$

massa inerziale: ciò che si oppone alla variazione dello stato di moto

In generale una massa estesa è assimilabile ad 1 punto in cui essa è concentrata



$$F = \gamma \frac{M_{GT}\, m_G}{R^2}$$

$$P = F$$

$$m_I g = \gamma \frac{m_{GT}\, m_G}{R^2}$$

$$\frac{m_I}{m_G} = \gamma \frac{m_{GT}}{g R^2}$$

$\hookrightarrow$ Non sappiamo cosa sia la m. gravitaz. ma il suo rapporto con la massa inerziale è uguale per tutti i corpi

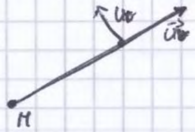
$\downarrow$

la misuriamo con stx unità

quindi la generale INTERAZIONE GRAVITAZIONALE

$$\boxed{\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} u_r}$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta} =$$



$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \vec{u_r} + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{u_\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \longrightarrow$$ VEDI RELAZ. CON MOMENTO ANGOLARE

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \cancel{r^2}\frac{L^2}{m^2 r^{\cancel{4}2}} \qquad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2} - \frac{K}{r}$$

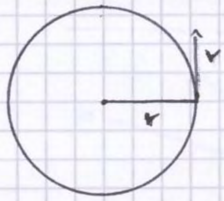
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + Ep(x)$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + Ep(x)$$

$\frac{L^2}{m^2r^2}$ è l' E.P. CENTRIFUGA

↓

perché



$$F_c = -\frac{dE_c}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) = -\frac{L^2}{2m}\left(-\frac{2}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{L^2}{mr^3} = \frac{(mvr)^2}{mr^3} = \frac{\cancel{m}^{}v^2\cancel{r^2}}{\cancel{m}r^{\cancel{3}}} = \frac{mv^2}{r}$$

ENERGIA POTENZIALE EFFETTIVA

$$\boxed{Ep_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}}$$

se $r \to \infty$ $\quad Ep_{eff} \sim \ominus\frac{K}{r}$ poiché r^2 cresce + in fretta di r

indica che è una forza attrattiva

$\frac{1}{r^2}$ $\qquad \frac{1}{r}$

se $r \to 0$ $\quad Ep_{eff} \sim \frac{L^2}{2mr^2} \longrightarrow$ è una forza repulsiva

Studiamo se la funzione ha massimi o minimi

$$\frac{dEp_{eff}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{L^2}{2mr^2}\right\} = \frac{L^2}{2m}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{r^2}\right\} = \frac{L^2}{2m}\left(-2\frac{1}{r^3}\right) + \frac{K}{r^2} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{K}{r^2} = 0$$

$-\frac{K}{r}$

$$= 2\frac{m}{L^2}\left(-m\frac{N^2}{2L^2}\right)\cdot\frac{E}{u_0} = -\left(\frac{mN}{L^2}\right)^2\frac{E}{u_0} = -\eta_0^2\,\frac{E}{u_0}$$

da $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{N}{r}$

L'energia totale e il L hanno un val. costante in ogni punto della traiettoria

↓

$$\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2 + \eta^2 - 2\eta_0\eta = -\eta_0^2\,\frac{E}{u_0}$$

↓ derivo

$$2\frac{d\eta}{d\theta}\cdot\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + 2\eta\frac{d\eta}{d\theta} - 2\eta_0\frac{d\eta}{d\theta} = 0$$

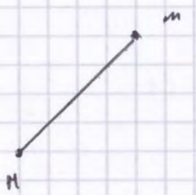
$$\left(\frac{d^2\eta}{d\theta} + \eta - \eta_0\right)\frac{d\eta}{d\theta} = 0$$

↳ è un eq. diff. del 2° ordine ottenuta derivando una del 1° ordine

ho 2 SOL

↳ Bisogna sostituire nell'altra per vedere se le sol vanno bene

$$\begin{cases}\frac{d\eta}{d\theta} = 0 \\ \frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \eta = \eta_0\end{cases}$$



sostituisco $0 + \eta_c^2 - 2\eta_0\eta_c + \eta_0^2\frac{E}{u_0} = 0$

$$\eta_c = \eta_0 \pm\sqrt{\eta_0^2 - \eta_0^2\frac{E}{u_0}}$$

$$\boxed{\eta_c = \eta_0\left\{1 \pm\sqrt{1-\frac{E}{u_0}}\right\}}$$

Se $\boxed{E = u_0}$ → in questo caso la particella ha una traiettoria circolare

Altrimenti sost. l'altra soluzione $\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \eta = \eta_0$

↳ quando l'eq. non è om. la sol è dello stesso tipo della causa che la rende non omogenea

$$\boxed{\eta = \eta_0 - A\cos\theta}$$

da oscillatore armonico $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

prendo queste sol e impongo che il sist. funzioni

Ricapitolando

F centrale → conserv → cons. m. ang., E_M

Problema: Mostrare che nel caso di orbite ellittiche l'asse > dipende soltanto dall' E tot

SISTEMI LEGATI → quelli in cui la part. non si può allont. in maniera indefinita dal centro

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{K}{r}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{K}{r} + E$$

Se $E < 0$, $E = -|E|$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{K}{r} - |E| > 0 \qquad \frac{K}{r} > |E|$$

$$\boxed{r \leq \frac{|E|}{K}}$$

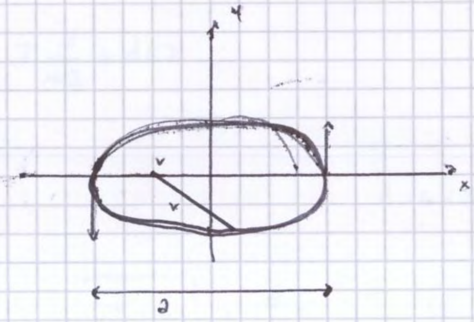
$\theta = 0$

$$r(0) = \frac{r_0}{1 - \varepsilon_0} = r_M$$

$$r(\pi) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon} = r_m$$

$$a = \frac{1}{2}(r_m + r_M) = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{1+\varepsilon} + \frac{r_0}{1-\varepsilon}\right)$$

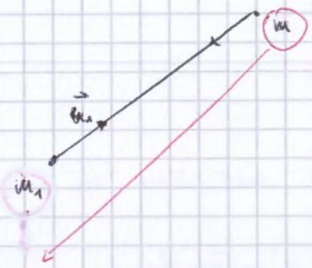
$$\boxed{r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \varepsilon \cos\theta} \qquad 0 < \varepsilon < 0}$$



$$a = \frac{r_0 - \cancel{\varepsilon r_0} + r_0 + \cancel{\varepsilon r_0}}{2(1 - \varepsilon^2)}$$

RIPRENDI

CAMPO GRAVITAZIONALE E POTENZIALE GRAVITAZIONALE



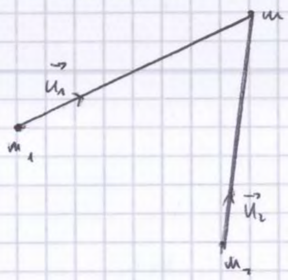
$$\vec{F} = -\gamma \frac{M m_1}{r_1^2} \vec{u}_r$$

$$E_p = -\gamma \frac{m m_1}{r_1}$$

detta massa di prova

Quanto vale invece F_1 su m se le masse sono 2?

↳ empiricamente si nota che vale il principio di sovrapposizione



$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m}{r_1^2} \vec{u}_1 - \gamma \frac{m_2 m}{r_2^2} \vec{u}_2$$

In generale da N particelle

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m_i m}{r_i^2} \vec{u}_i = \left\{ -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i \right\} m$$

↓

data una distr. di masse m_i la forza eserc. sulla m di prova è = Σ delle singole forze delle masse iesime su m

$$E_p = \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m m_i}{r_i} = \left\{ -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i} \right\} m$$

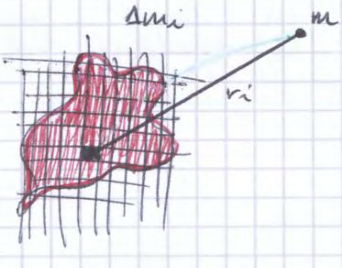
È def CAMPO GRAVITAZIONALE la forza per unità di massa

$$G = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i \qquad \vec{F} = m\vec{G}$$

$$\phi = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i} \qquad E_p = m\phi \quad \text{POTENZIALE GRAVITAZIONALE}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \qquad \vec{G} = -\vec{\nabla}\phi$$

Cosa capita nel caso di un CORPO CONTINUO?

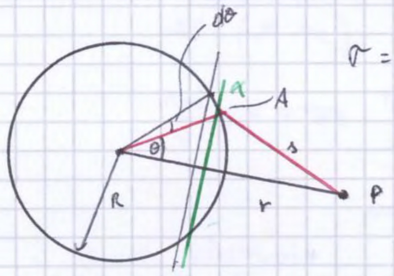


$$\vec{F} \simeq \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m \Delta m_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$\vec{F} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m \Delta m_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

INTERAZIONE TRA 1 GUSCIO SFERICO E 1 PARTICELLA

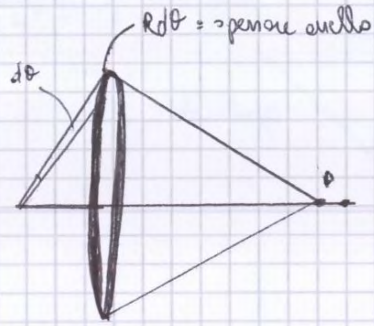
↳ massa sulla sup



$\sigma = \frac{M}{S}$, $S = 4\pi R^2$

Se $r > R$ punto esterno
$r < R$ " " interno

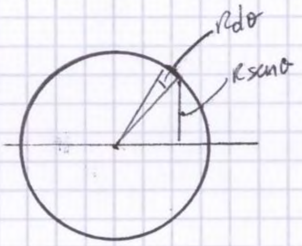
Tagliamo la sfera con il piano $\perp$ alla distanza OP



Se il guscio è omogeneo quanto vale la massa nera?

$dM = \sigma\, dA$

$dA = 2\pi R \operatorname{sen}\theta\, R\, d\theta = 2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

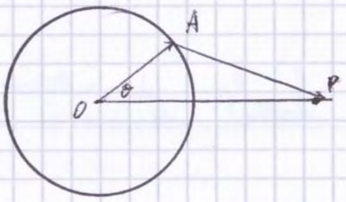


$dM = \frac{M}{\cancel{4\pi R^2}_{\,2}}\, \cancel{2\pi R^2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$dM = \frac{1}{2} M \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$dE_p = -\gamma \frac{m\, dM}{s}$

$dE_p = -\frac{1}{2} \gamma m M \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{s}$



$OA = R$
$AP = s$
$OP = r$
$\vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OP}$

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$

$\vec{AP} \cdot \vec{AP} = (\vec{OP} - \vec{OA})(\vec{OP} - \vec{OA}) = \vec{OP}^2 - \vec{OP} \cdot \vec{OA} - \vec{OA} \cdot \vec{OP} + \vec{OA}^2$

teo Carnot

$\vec{AP}^2 = \vec{OP}^2 - 2\vec{OP}\,\vec{OA} + \vec{OA}^2$

$s^2 = r^2 - 2rR\cos\theta + R^2$

se deriviamo $2ds \cdot s = 0 + 2rR \operatorname{sen}\theta\, d\theta + 0$

$s\, ds = rR \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

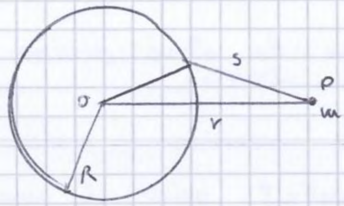
$\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{s}{rR} ds$

$dE_p = -\frac{1}{2} \gamma m M \frac{\cancel{s}}{rR} ds \cdot \frac{1}{\cancel{s}}$

E_p dipende dalla variaz. di massa

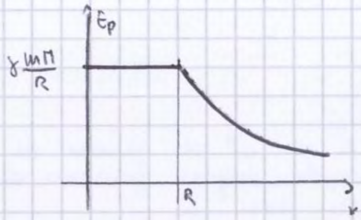
$$\boxed{dE_p = -\frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{rR} ds}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 203 di 324



$r > R$ Fuori $\rightarrow E_p = -\gamma \frac{mM}{r}$

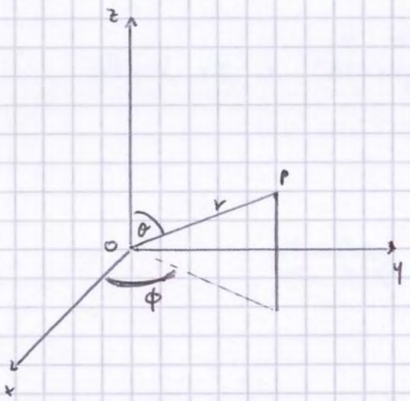
$r < R$ Dentro $\rightarrow E_p = -\gamma \frac{mM}{R}$



derivando la FORZA in coord. polari

$$\vec{F} = -\vec{u}_r \frac{\partial E_p}{\partial r} - \vec{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta} - \vec{u}_\phi \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial E_p}{\partial \phi}$$

Per i corpi a simmetria sferica quale è il legame tra FORZA ed ENERGIA



$\vec{F} = -\vec{u}_r \frac{dE_p}{dr}$ poiché $E_p = E_p(r)$ soltanto

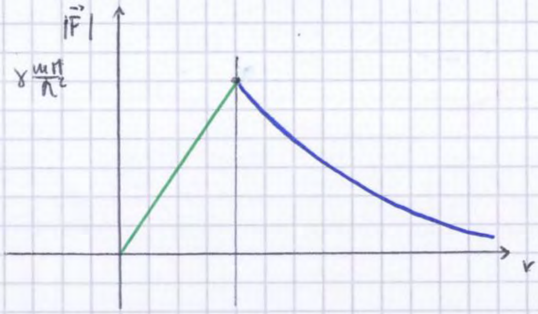
$$\vec{F}(r>R) = -\vec{u}_r \frac{d}{dr}\left\{-\gamma \frac{mM}{r}\right\} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{F}(r<R) = -\vec{u}_r \frac{d}{dr}\left\{-\gamma \frac{mM}{R}\right\} = 0$$

- Se ho 1 guscio sferico, x quanto rig. gli effetti esterni
  ↳ si comporta come una particella
- x effetti interni → tutti i punti interni sono di equilibrio indifferente

Il ragionamento vale anche x sfere piene omogenee? (la Terra è un corpo all'incirca sferico ma è pieno)

- $\vec{F}\,(r > R) = -\gamma \frac{mM}{r^2}\,\vec{u}_r$
- $\vec{F}\,(r < R) = -\gamma \frac{mM}{R^3}\,r\,\vec{u}_r$



È possibile calcolare l'Ep in questo caso?
Ricorda che la Forza è legata a Ep da una derivata, il $\vec{\nabla}$
↳ per questo motivo la Forza deve essere una funzione continua (max, min ....)

ENERGIA POTENZIALE DI UNA SFERA OMOGENEA PIENA

$$E_p\,(r > R) = -\gamma \frac{mM}{r} = E_{p,\,EXT}(r)$$

$$\vec{F}\,(r < R) = -\vec{u}_r \frac{d}{dr} E_p(r<R)$$

$$-\gamma \frac{mM}{R^3}\,r\,\vec{u}_r = -\vec{u}_r \frac{d}{dr} E_p(r<R)$$

$$\frac{dE_p\,(r<R)}{dr} = \gamma \frac{mM}{R^3}\,r$$

$$E_p\,(r<R) = \int \gamma \frac{mM}{R^3}\,r\,dr + N$$

$$E_p\,(r<R) = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R^3}\,r^2 + N = E_{p,\,INT}(r)$$

è la energia potenziale interna e poiché la F_z deve essere continua determino N tale che lim dx = lim sx

quindi $E_{p,\,INT}(R) = E_{p,\,EXT}(R) \Rightarrow \frac{1}{2}\gamma \frac{mMR^2}{R^3} + N = -\gamma \frac{mM}{R}$

$$\boxed{N = -\frac{3}{2}\gamma \frac{mM}{R}}$$

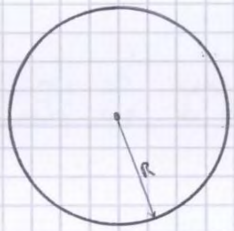
$$E_p\,(r<R) = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R^3}\,r^2 - \frac{3}{2}\gamma \frac{mM}{R}$$

$$E_p\,(r<R) = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R}\left\{\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\right\}$$

x dall' inf. porto la part. a 1 certo punto
↳ faccio lavoro x vincere la repulsione tra q_1 e q_2 (immaginando q_2 fisso)
↳ se le lego con un vincolo le part. stanno lì e l'energia di quel sistema = E_p = lavoro che abbiamo fatto per portare lì la particella

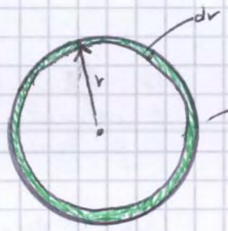
ENERGIA PROPRIA DI UNA SFERA UNIFORMEMENTE CARICA

↳ che tipo di E abbiamo speso x costruire questo sistema?



Sfera carica Q con raggio R

$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$



→ sfera carica $Q_c\ (r<R) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^2}{R^3}$

Ricopro la carica con uno "strato" dr

$dQ = \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{volume guscio}}$

carica aggiunta con lo strato dr

$\rho = 4\pi r^2 dr \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} =$

$= \frac{3Q}{R^3} r^2 dr$

$dE_p = k \frac{Q_c \cdot dQ}{r} = k Q \frac{r^2}{R^3} \cdot 3 \frac{Q}{R^3} r^2 dr \cdot \frac{1}{r}$

energia che io devo fornire x aggiungere il guscio sferico dr alla sfera già esistente
|||
energia propria del guscio

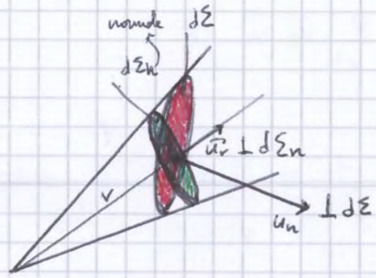
$$\boxed{dE_p = 3k \frac{Q^2}{R^6} r^4 dr}$$

↳ per calcolare l'Energia propria complessiva integro sul raggio della sfera

$E_p = \int_0^R 3k \frac{Q^2}{R^6} r^4 dr = 3k \frac{Q^2}{R^6} \cdot \frac{1}{5} R^5$

$$\boxed{E_p = \frac{3}{5} k \frac{Q^2}{R}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 209 di 324



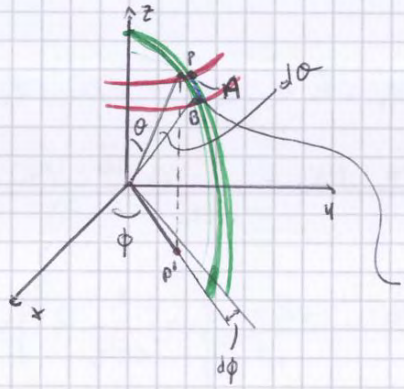
Cons. 1 cono la sup Σ ha una sua normale

↳ se la proietto perpendicolarmente al raggio ottengo la sup verde

è definito angolo solido

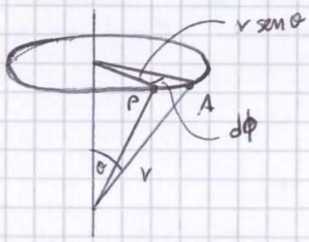
$$d\Omega = \frac{d\Sigma_n}{r^2} = d\Sigma \frac{\vec{u_r}\cdot\vec{u_n}}{r^2}$$

definiamo l'angolo solido in coordinate polari piane.



- l'arco verde è un meridiano se pone x l'asse polare e individua un angolo
- l'arco rosso è un parallelo

→ c'è un area che rappresenta un pezzo di sup. sferica



$AP = r\,\text{sen}\,\theta\, d\phi$

$\overline{PB} = r d\theta$

$d\Sigma_n = \overline{AP} \times \overline{PR} = r^2 \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi$

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_n}{r^2} = \frac{\cancel{r^2}\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi}{\cancel{r^2}} = \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi$$

↳ vediamo che l'angolo solido non dipende dal raggio

$$\Omega_T = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \cdot 2\pi = -(-1-1)\cdot 2\pi = 4\pi$$

QUANTO VALE IL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA Q - TEOREMA DI GAUSS

$\vec{F} = m\vec{G}$ $\qquad$ $\vec{F} = q\vec{E}$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec{u_r} = q\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}\right\} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}$$

calcoliamo il flusso del vettore campo elettrostatico $\vec{E}$

↳

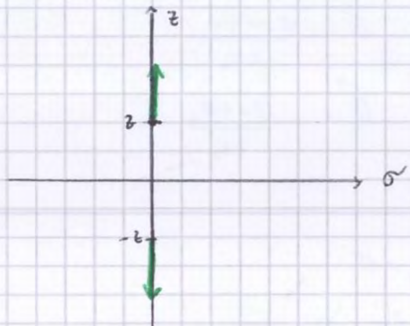
$$\Phi(\Sigma) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(\Sigma)$$

CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN PIANO CON DENSITÀ DI CARICA Σ (UNIFORMEMENTE CARICO)

Il campo non ha componente orizzontale, può essere solo verticale $\rightarrow \vec{E} = E(z) \cdot \vec{u}_z$

↳ dipende solo dalla componente verticale

Supponiamo una carica repulsiva



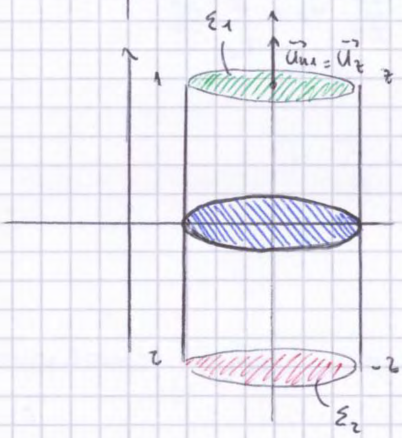
la funzione deve essere dispari

↳ repulsiva sopra e sotto

applichiamo il teo di Gauss

↓

disegnando una superficie chiusa gaussiana



applichiamo Gauss

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(\Sigma) = \frac{1}{\varepsilon_0} \Sigma_B \sigma$$

Σ_B: base del cilindro; σ: densità

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{u}_{n_1} \, d\Sigma_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \vec{u}_{n_2} \, d\Sigma_2$$

$$+ \underbrace{\iint_{\Sigma_L} \vec{E} \vec{u}_{n_L} d\Sigma_L}_{0}$$

Σ_L ↳ sup laterale

↘ che ha un contributo nullo poiché $\vec{E}$ è $\perp$ al vettore u_z

$$\vec{E} = E(z) \vec{u}_z \quad = \quad \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{u}_{nL}}_{\perp} = 0$$

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{u}_{n_1} d\Sigma = \iint_{\Sigma_1} E(z) \vec{u}_z \vec{u}_z \, d\Sigma = E(z) \cdot \Sigma_B$$

↳ area intercettata dal cilindro sul piano

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \vec{u}_{n_2} d\Sigma = \iint_{\Sigma_2} E(-z) \vec{u}_z \cdot \underbrace{(-\vec{u}_z)}_{\text{direz. di } \vec{u}_{n_2}} d\Sigma = -E(-z) \Sigma_B$$

⇓

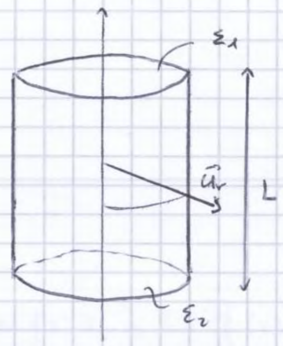
$$2E(z) \cancel{\Sigma_B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cancel{\Sigma_B} \sigma$$

$$\boxed{E(z) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma}$$

$$\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$$

$E(z) = -E(-z) \rightarrow$ la fz. è dispari

- Campo el creato da 1 distribuz. piana di carica è INDIPENDENTE dalla posizione.



$Q_c = \lambda L$

$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$

$$\phi = \oiint \vec{E}\,\vec{u_n}\, d\Sigma = \underbrace{\iint_{\Sigma_1} \vec{E}\,\vec{u_{n1}}\, d\Sigma}_{=0} + \underbrace{\iint_{\Sigma_2} \vec{E}\,\vec{u_{n2}}\, d\Sigma}_{=0} + \iint_{\Sigma_L} \vec{E}\,\vec{u_{nL}}\, d\Sigma$$

$\vec{u_{n1}} = \vec{u_z}$, $\vec{u_{n2}} = -\vec{u_z}$, $\vec{u_{nL}} = \vec{u_r}$

perché $\perp$

$= E(r)\, 2\pi r L$

$2\pi r \cancel{L} E = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0}$ $\quad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$

RICAPITOLO

$\vec{F} = \vec{G}\, m$ $\qquad\qquad \vec{F} = \vec{E}\, q$

$\boxed{\vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^2}\vec{u_r}}$ $\qquad\qquad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}}$

formule riquadrate valide solo quando la carica è unica

$E_p = \phi\, m$ $\qquad\qquad E_p = Vq$

$\boxed{\phi = -\gamma \frac{M}{r}}$ $\qquad\qquad \boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}}$

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

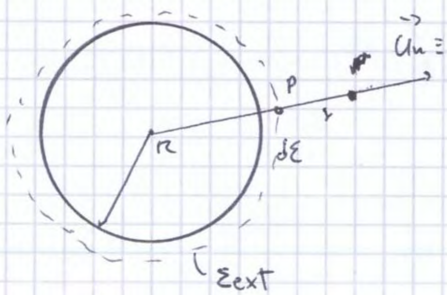
$\vec{G} = -\vec{\nabla} \phi$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

PB

Determinare $\vec{E}$ e V creati da un guscio sferico omogeneo usando il teo di Gauss

↳ serve solo quando ci sono delle simmetrie



$\vec{u_n} \equiv \vec{u_r}$ $\qquad \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

Se il guscio è omogeneo allora il campo $\vec{E}$ deve essere radiale e il modulo dipende solo dalla distanza

$\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}}$

↳ perpendicolare alla sup. della sfera

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 215 di 324

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \qquad -\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \qquad \boxed{V = V(r)}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{dV_{ext}}{dr} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r > R \\ -\dfrac{dV_{int}}{dr} = 0 & r < R \end{cases}$$

$V_{int}(r) = \beta$ costante

$$\frac{dV_{ext}}{dr} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$dV_{ext} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{dr}{r^2}$$

$$V_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \gamma$$

Quando un corpo ha una estensione finita

↳ generalmente la costante $\gamma = 0$ in modo tale che

quando r tende all' ∞ $\quad V(\infty) = 0$

Bisogna ancora trovare β

$$\begin{cases} V_{int}(r) = \beta \\ V_{ext}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} \end{cases}$$

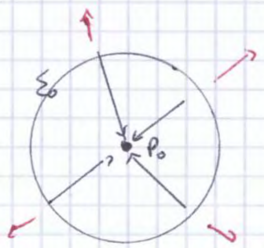
Gauss → permette di calcolare il campo solo se ci sono delle simmetrie nei corpi che si studiano

All'interno di un campo elettrostatico non ci sono punti di equilibrio stabile o instabile

↳ è una conseguenza diretta del teo di Gauss

In un sistema di particelle che generano un campo, un punto generico potrebbe essere un punto di equilibrio stabile

↳ se io sposto di poco la particella questa dovrebbe tornare al suo posto, sottoposta a forze dirette verso il centro



Calcoliamo il flusso

$$\oint_{\Sigma_0} \vec{F}\,\vec{u}_n\, d\Sigma = q \oint_{\Sigma_0} \vec{E}\,\vec{u}_n\, d\Sigma = q\,\phi_{\Sigma_0}(E) = 0$$

$\Delta\tau = \Delta y \, \Delta x \, \Delta z$

" volume parall.

Facendo il calcolo analogo per z e x

$$\Delta\phi_z = \frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta\tau$$

$$\Delta\phi_x = \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta\tau$$

Quindi il flusso elem. attraverso un parallelep. rettangolo

$$\Delta\phi = \underbrace{\Delta\phi_x + \Delta\phi_y + \Delta\phi_z}_{\text{che sono numeri}}$$

$$\boxed{\Delta\phi = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\Delta\tau}$$

È definita divergenza di un vettore la quantità $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

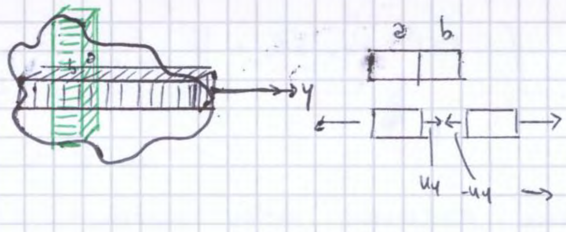
↳ che è una quantità scalare ottenuta dalle derivate sugli assi quando si usano componenti cartesiane

$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} =$
$\mathrm{div}\,\vec{F} =$ } = divergenza

molto spesso xò il flusso attraverso un parallelepipedo NON è utile

↓

vediamo quando lo è



u_y $-u_y$ → quando li sommo, essendo = e opposti si eliminano

↳ faccia = ragionam. x parallelep. ...

Il flusso totale di un vettore F attraverso una sup. chiusa 3D è = Σ dei flussi che escono dai cubi x mezzo dei quali approssimiamo il corpo

$$\phi = \oiint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{u}_n \, d\Sigma = \sum_{i=1}^{N}\phi_i \quad \text{con } \phi_i \text{ flusso di } \vec{F} \text{ attraverso il parallelep. } i$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})_i\,\Delta\tau_i$$

approssimazione che è valida con un numero molto grande (∞) di elementi (parallelep.)

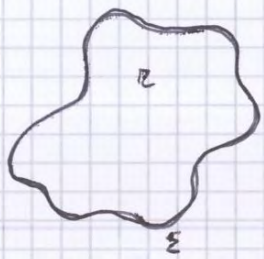
$\phi_{\Sigma_1}(\vec{F}) = \phi_{\Sigma_2}(\vec{F})$ se Σ_1 e Σ_2 hanno = bordo γ

EQUAZIONE DI POISSON

x Gauss $\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(\Sigma)$

↳ equaz. integrale

↳ meglio ottenere una equazione locale collegata alla posizione del punto



Quanto vale la carica nel volume delim. da Σ

$$Q(\Sigma) = \iiint_{\tau(\Sigma)\ \text{volume}} \rho\, d\tau$$

↓ integrale della densità di carica fatta sul volume

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\,\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau(\Sigma)} \rho\, d\tau$$

relaz. che vale x tutte le sup. Σ che limitano il volume τ

x teo della divergenza riscrivo il primo membro

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla}\vec{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau(\Sigma)} \rho\, d\tau$$

tutto a primo membro

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} \left(\vec{\nabla}\vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right) d\tau = 0 \quad \forall \Sigma$$

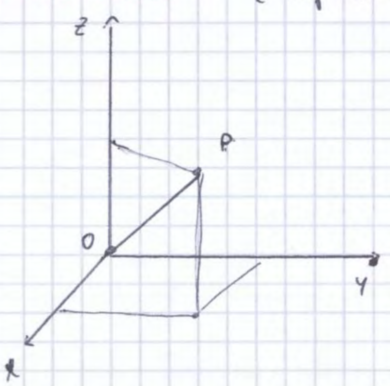
Qualunque sia la sup l'integrale deve fare 0

↳ se l'int. è valido x ogni Σ

via l'integrale ↳ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$ è una proprietà locale

↳ formula di Poisson

DIM. CAMPO EL. CREATO DA UNA CARICA PUNTIFORME È UN VETTORE SOLENOIDALE (importante)

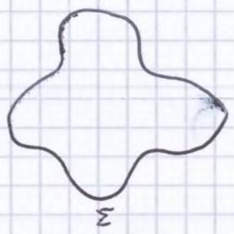


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

Formula che non dice niente del valore nel centro

↳ $\forall P \neq$ ORIGINE

DIM. TEO GAUSS SENZA USARE ANGOLO SOLIDO (IMPORTANTE)

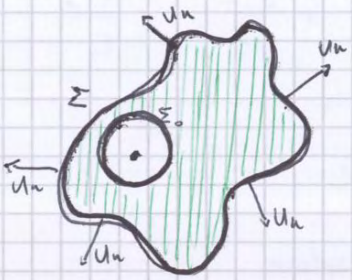


$\cdot Q$

$\forall P \in \tau(\Sigma)$

$\vec{\nabla}\vec{E} = 0$

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n \, d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \, d\tau = 0$$



Costruiamo una sup Σ_0 centrata in O

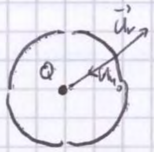
↳ sulla sup limitata da

↳ l'integrale è nullo xr la divergenza è nulla

$$\oint_{\Sigma+\Sigma_0} = \oiint_{\Sigma+\Sigma_0} \vec{E}\cdot\vec{u}_n \, d\Sigma = 0$$

$$= \oiint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0)\,\vec{u}_{n_0} \, d\Sigma_0 + \oiint_\Sigma \vec{E}(P)\,\vec{u}_n \, d\Sigma = 0$$

$$\oiint_\Sigma \vec{E}(P)\,\vec{u}_n \, d\Sigma = -\oiint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0)\,\vec{u}_{n_0} \, d\Sigma_0$$



$$\vec{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\oiint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0)\cdot\vec{u}_{n_0} \, d\Sigma_0 = \oiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\underbrace{(\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{n_0})}_{=-1} d\Sigma_0$$

(angolo fra essi è 180)

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\oiint_{\Sigma_0} d\Sigma_0 = -\frac{Q}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\frac{1}{\cancel{r^2}}\cancel{4\pi r^2} = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$$ → risultato ottenuto con deduzioni geometriche

---

Se la carica è distribuita con continuità → $\vec{\nabla}\vec{E} \neq 0$

↳ da POISSON

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$ non in contraddiz con $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$

↳ xr carica concentrata $\rho = 0$ nei punti dove non c'è carica

Tutti i campi centrali ⇒ conservativi

$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ campo conservativo con carica distr. con continuità

$= \dfrac{a\cos\theta}{r^2}$

$$V(r,\theta) = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cos\theta}{r^2}$$

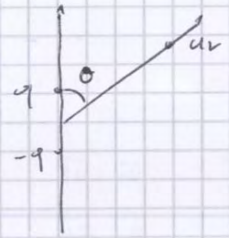
la quantità $qa = p$

$\boxed{\vec{p} = q\vec{a}}$ è il momento di un dipolo elettrico

Nel caso del dipolo il potenziale decresce con $\frac{1}{r^2}$ mentre nella carica puntiforme come $\frac{1}{r}$

Potenziale di un dipolo elettrico → non ha simmetria sferica

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$



$$\boxed{V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\,\vec{u}_r}{r^2}}$$

CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN DIPOLO "UNIFORME"

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r\, r}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{r} = r\vec{u}_r$$

Usiamo coordinate cartesiane

$$\vec{p} = p_x\vec{u}_x + p_y\vec{u}_y + p_z\vec{u}_z$$

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

→ nel prod. scalare

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x p_x + y\cdot p_y + z u_z}{r^3}\right\}$$

Come sono collegati campo e potenziale

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{xP_x + yP_y + zP_z}{r^3}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{P_x}{r^3} + (xP_x + yp_y + zp_z)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3}\right.$$

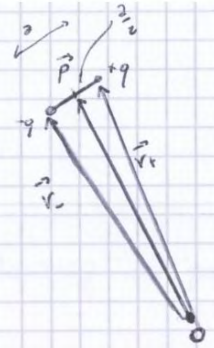
$$\frac{\partial}{\partial x}(r^{-3}) = -3r^{-4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3}{r^4}\frac{x}{r} = -3\frac{x}{r^5}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{P_x}{r^3} - 3\frac{x}{r^5}\left(\overbrace{xp_x + yp_y + zp_z}^{\vec{p}\cdot\vec{r}}\right)\right\}\cdot\vec{u}_x$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{P_y}{r^3} - 3\frac{y}{r^5}\left(\overbrace{xP_x + yP_y + zP_z}^{\vec{p}\cdot\vec{r}}\right)\right\}\cdot\vec{u}_y$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{P_z}{r^3} - 3\frac{z}{r^5}\left(\overbrace{xP_x + yP_y + zP_z}^{\vec{p}\cdot\vec{r}}\right)\right\}\cdot\vec{u}_z$$

moltiplicando ottengo il campo e poi sommo $\downarrow +$



$\vec{r}_+ = \vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}$

$\vec{r}_- = \vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}$

Ep del dipolo nasce da Ep della carica ⊕ e Ep della carica ⊖ assegnate in un campo

$$E_p = E_p^{(+)} + E_p^{(-)} = qV(\vec{r}_+) - qV(\vec{r}_-) = q\left(V(\vec{r}_+) - V(\vec{r}_-)\right)$$

$\vec{r}_+ = \vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}$

↓ in componenti cartesiane

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ } $\vec{r}_+ = x + \frac{a_x}{2},\ y + \frac{a_y}{2},\ z + \frac{a_z}{2}$

$\vec{r}_- = x - \frac{a_x}{2},\ y - \frac{a_y}{2},\ z - \frac{a_z}{2}$

$$V(\vec{r}_+) = V\left(x + \frac{a_x}{2} + y + \frac{a_y}{2} + z + \frac{a_z}{2}\right)$$

⟶ le comp a sono piccole rispetto alla x, y, z, faccio lo sviluppo di Taylor della formula

$$= V(x,y,z) + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{a_x}{2} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{a_y}{2} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{a_z}{2}$$

$$V(\vec{r}_-) = V\left(x - \frac{a_x}{2} + y - \frac{a_y}{2} + z - \frac{a_z}{2}\right)$$

$$= V(x,y,z) - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{a_x}{2} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{a_y}{2} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{a_z}{2}$$

faccio la differenza dei due

$$= q\left\{a_x\frac{\partial V}{\partial x} + a_y\frac{\partial V}{\partial y} + a_z\frac{\partial V}{\partial z}\right\} = q(\vec{a}\,\vec{\nabla}V) = q\vec{a}\cdot\vec{\nabla}V = \vec{p}\,\vec{\nabla} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

↓ grad. $\vec{e} = -E$

$$\boxed{E_{p\,dipolo} = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

↓ campo dove mettiamo il dipolo

QUAL'È LA FORZA CHE AGISCE SUL DIPOLO

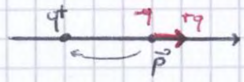
$E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})$

Un dipolo messo in campo esterno uniforme non è sottoposto ad alcuna forza

↳ non trasla, però essendo il dipolo un corpo rigido, può girare

Carica attrattiva → risultato corretto



Qual è invece la forza esercitata dal dipolo sulla carica?

$$\vec{F}_Q = -\frac{Qp}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^3}u_x$$

$\vec{E}_{\text{esercitato dal dipolo}}$

$\vec{F}_p =$ forza su Q dovuta a $\vec{p}$

Campo di un dipolo $\quad \vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(-u_x)\cdot\{p\vec{u}_r(-\vec{u}_x)-p\vec{u}_x\}}{x^3}$

$\vec{p} = p\vec{u}_x$

$\vec{u}_r = -\vec{u}_x$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3pu_x - pu_x}{x^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\vec{u}_x}{x^3}$$

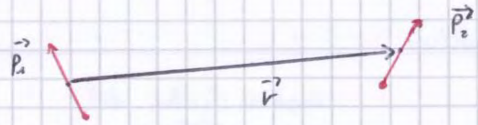
campo creato dal dipolo nel punto occupato dalla carica

$$\vec{F}_p = Q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}\vec{u}_x = \frac{Qp}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^3}u_x$$

↳ forza = e opposta all'altra
↳ ottenuta in virtù della 3^ legge di Newton

ENERGIA DI INTERAZ. TRA 2 DIPOLI - ENERGIA DI INTERAZIONE DIPOLARE

↳ Ep di un dipolo nel campo creato da 1 altro dipolo



quanto vale il cE creato dal dipolo 1 nel punto occ. dal dipolo 2?

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\vec{u}_r(\vec{p}_1\vec{u}_r)-\vec{p}_1}{r^3}$$

$$E_{p_2} = -\vec{p}_2\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}_2\cdot\vec{u}_1)(\vec{p}_1\cdot\vec{u}_1) - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{r^3}$$

$$E_{p_1} = -\vec{p}_1\cdot\vec{E}' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(p_1\vec{u}_1)(\vec{p}_2\vec{u}_1) - \vec{p}_2\vec{p}_1}{r^3}$$

espressioni uguali
↓
energia di interaz. dei dipoli è data da queste formule

- linee di forza

↳ se 1 part. è abbandonata non può mai muoversi sulle linee di forza

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}u_T + \frac{v^2}{R}u_N$$

Materiali ⇝ CONDUTTORI / ISOLANTI } formati da entità atomi, con e^- che hanno + o − libertà di movimento

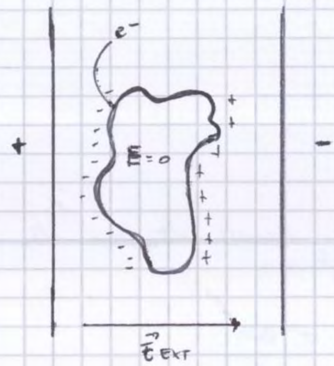
↳ conduttori → materiali che hanno more di elettroni, che sono abbastanza liberi di muoversi

Se mettiamo i cond. in un campo elettrico

↳ in situazioni di equilibrio statico

"

conduttore che in ogni punto ha campo 0



$\vec{E} = \vec{E}_{EXT} + \vec{E}_{INT} = 0$

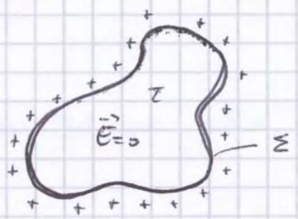
● Un conduttore in elettrostatica è tale che in equilibrio ha campo elettrico complessivo nullo $\forall p \in \tau$ con τ = volume del conduttore

↳ si evincono da ciò alcune proprietà importanti

1 ● In un conduttore elettrostatico la carica può stare solo in superficie

per Poisson $\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \forall P \in \tau$

↳ l'eventuale carica può andare soltanto in superficie $\Sigma(\tau)$



2 Un conduttore in equilibrio elettrostatico si trova tutto allo stesso potenziale

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\, d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla} V\, d\vec{r} = V(P_1) - V(P_2)$$

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\, d\vec{r} = 0 \quad \forall P_1, P_2 \in \tau$$

$$V(P_1) = V(P_2)$$

3 La sup $\Sigma \in \tau$ quindi la superficie del conduttore è equipotenziale e il campo è in ogni suo punto ⊥ alla superficie che limita il conduttore

$V_1 = V_2$ alle eq.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2} \qquad Q_1 = \frac{R_1}{R_2} Q_2$$

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

$$Q_2\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = Q \qquad Q_2 = Q\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

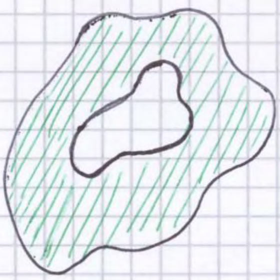
$$Q_1 = Q\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{\alpha R_1}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi(R_1+R_2)}$$

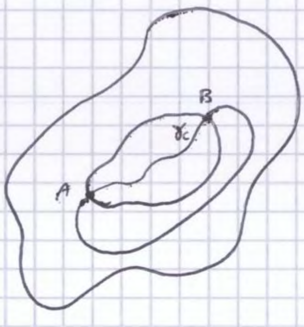
$$\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi(R_1+R_2)}\frac{1}{R_2}$$

Conduttore con una concavità all'interno



$$\phi_\Sigma(\vec E) = \iint_\Sigma \vec E\,\vec u_n\, d\Sigma = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0} = 0$$

$$Q(\Sigma) = 0$$

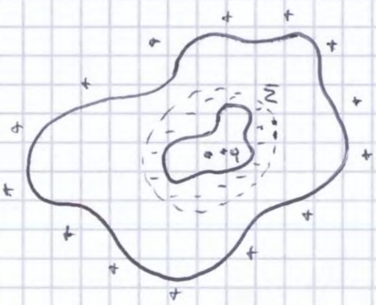


$$\oint_{\gamma_c+\gamma_{int}} \vec E\,\vec{dr} = \int_{A\gamma_c}^{B} \vec E\,\vec{dr} + \underbrace{\int_{B\gamma_{int}}^{A} \vec E\,\vec{dr}}_{0} = \int_{A\gamma_c}^{R} \vec E\,\vec{dr} > 0$$

• ASSURDO $\times N$ $\oint \vec E\,\vec{dr} = 0$

Se ho un conduttore cavo e metto una carica nella cavità si crea

RECUPERA



$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

è definita capacità $\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V}}$ rapporto tra la carica e la differenza di potenziale

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$E_p = qV$ Carica $q \to C = A \cdot s$

$V = \frac{J}{C} = \text{Volt}$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$[\vec{E}] = \frac{V}{m}$

$C = A \cdot s$
carica ↓ ampere ↓

$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \text{Farad}$
↓ capacità

$[\varepsilon_0] = \frac{F}{m}$ F → Farad

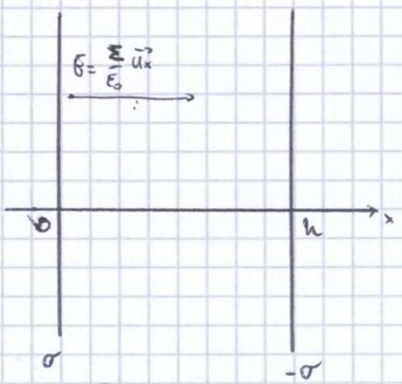
R_1 $R_2 = R_1 + h$ $h \ll R_1$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1(R_1 + h)}{h} \approx 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1^2}{h}$$

$\Sigma = 4\pi R_1^2$

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h}}$$ CAPACITÀ COND. SFERICO

CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE PIANO



$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ NO COMPONENTI

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}\vec{u_y}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}}_{0}$$

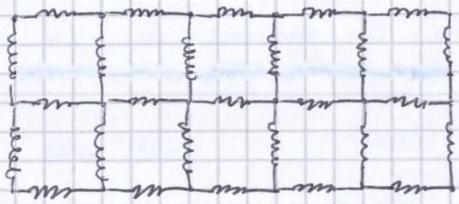
$V = V(x)$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{dV}{dx} \qquad dV = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx$$

$$V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + A$$

TRAZIONE, COMPRESSIONE, SCORRIMENTO

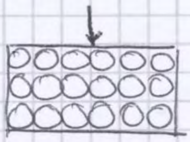
Un solido sottoposto a compressioni esterne si comporta come un sistema di molle



Solidi in eq può sopportare sforzi di

- TRAZIONE
- COMPRESSIONE
- SCORRIMENTO

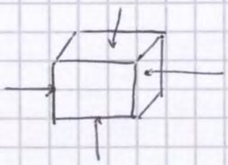
I liquidi → se all'eq implica che la forza esterna sia ⊥ al piano liquido



↳ non sopportano trazione e scorrimento

LIQUIDI

Sui liquidi si esercitano sempre 2 forze :
- di volume
- di superficie

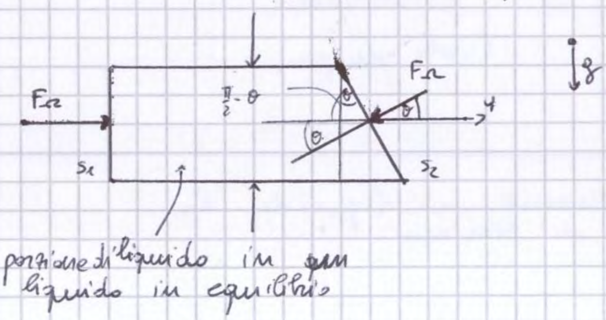


$d\vec{F}_V$

$d\vec{F}_S$

PROPRIETÀ FONDAMENTALE la pressione è indipendente dall'orientazione della superficie

Considerando forze di superficie → parliamo di pressione considerando una forza superficiale agente su una data superficie



$$\boxed{p = \frac{dF_N}{dS}}$$

Se il sistema è in eq. la risultante delle forze quant'è ?

eq : $F_{S_1} - F_{S_2}\cos\theta = 0$

chiamo p_1 e p_2 le due forze sulle superficie

$F_{S_1} = P_1 S_1$ $\qquad$ $F_{S_2} = P_2 \cdot S_2$

quindi $P_1 S_1 = P_2 S_2 \cos\theta$

$S_2 \cos\theta = S_1$ $\qquad$ $P_1 S_1 = P_2 S_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_1 = P_2}$

In 1 liq. in eq. la pressione che si esercita in 1 punto è indep. dalla orientazione della superficie