



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1169

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Esposito D.

MATERIA: Fisica II

Prof. Gozzellino

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FISICA II

ELETTROSTATICA

Interazione elettromagnetica \rightarrow generata dalla carica \rightarrow può essere attrattiva (\oplus e \ominus) oppure repulsiva (\oplus e \oplus / \ominus e \ominus)

Carica elettrica \rightarrow si misura in Coulomb (C) \rightarrow unità di misura molto grande, generalmente le cariche sono nell'ordine di 10^{-12} C (picoCoulomb \rightarrow pC) o di 10^{-9} C (nanoCoulomb \rightarrow nC), 10^{-6} C (microCoulomb \rightarrow μ C), 10^{-3} C (milliCoulomb \rightarrow mC). È una grandezza quantizzata \rightarrow assume valori sempre multipli interi della carica elementare $e \rightarrow |e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C \rightarrow carica di protone ed elettrone

Atomi \rightarrow sono neutri \rightarrow n° protoni = n° elettroni \rightarrow $Z =$ n° atomico = numero di protoni dell'atomo \rightarrow esprime le proprietà elettromagnetiche dell'atomo
 $A =$ n° di massa = n° di protoni e ~~elet~~ neutroni

Principio della conservazione della carica elettrica \rightarrow in un sistema elettricamente isolato, la somma algebrica delle cariche elettriche contenute in esso si conserva (è costante) \rightarrow sistema isolato = NON scambia cariche con l'esterno
 $\sum_i q_i = \text{COST} \rightarrow$ può però cambiare la distribuzione delle cariche

Legge di Coulomb \rightarrow come interagiscono 2 o più cariche puntiformi e in quiete (dimensioni trascurabili rispetto alle distanze considerate, ferme o che si muovono con velocità \ll di $c \rightarrow$ velocità non relativistiche) \rightarrow la forza con cui interagiscono ha di loro \vec{r} data da:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{u}_n \rightarrow \hat{u}_n \text{ indica direzione e verso della forza}$$

k dipende dal mezzo in cui si studia il fenomeno \rightarrow nel SI di misura e nel vuoto:

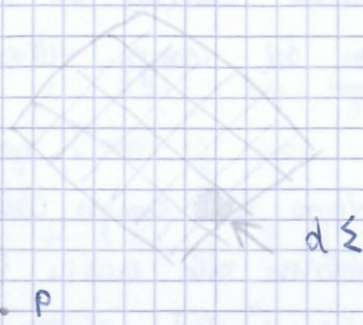
$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \rightarrow \epsilon_0 = \text{costante DIELETTRICA nel vuoto} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}}$$

$\hat{u}_n \rightarrow$ direzione e verso della congiungente le 2 cariche \rightarrow se F è repulsiva allora è parallela e concorde a \hat{u}_n , altrimenti se è attrattiva essa ha verso opposto.

$\lambda =$ densità di carica per unità di lunghezza $\rightarrow \lambda = \frac{dq}{dl} \rightarrow \frac{C}{m}$

Se la carica è distribuita in modo uniforme (omogeneo) $\rightarrow \lambda = \text{costante}$

2)



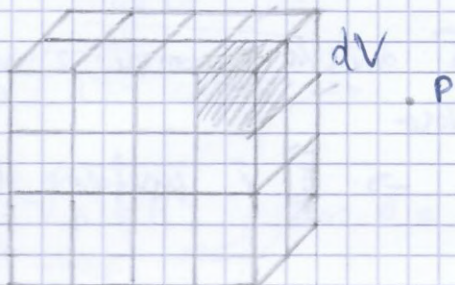
Si suddivide la superficie in superfici infinite
come $d\Sigma \rightarrow$ cariche infinitesime dq

$\sigma = \frac{dq}{d\Sigma} =$ densità superficiale di carica

\rightarrow costante se distribuzione è omogenea

$$\vec{E} = \int_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r = \int_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma d\Sigma}{r^2} \hat{u}_r$$

3)

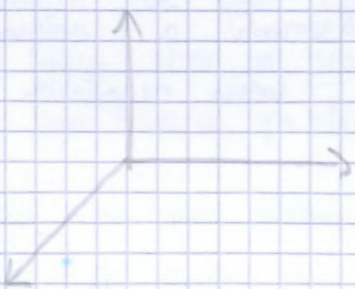


Distribuzione volumica $\rightarrow \rho = \frac{dq}{dV} \rightarrow$

densità volumica di carica (cost se uniforme)

$$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^2} \hat{u}_r$$

Volendo esprimere questa espressione attraverso un sistema di riferimento cartesiano:



$(x, y, z) \rightarrow$ coordinate di P

$(x', y', z') \rightarrow$ punto della distribuzione

Bisogna separare \vec{E} lungo le componenti

x, y, z

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(x', y', z') \cdot dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot (x-x')$$

Analogamente si ottengono E_y e $E_z \rightarrow$ varia solo l'espressione del vettore

Essendo \vec{E} un campo vettoriale \rightarrow possiede linee di forza (o linee di flusso / di campo)

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \rightarrow \text{bisogna dividere per } |\vec{r}|$$

Simmetria dell'anello \rightarrow cilindrica \rightarrow prendo il tratto diametralmente opposto a $dq \rightarrow dq_1 \rightarrow$ considero coppie di tratti infinitesimi uguali

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl'}{r^2} \hat{u}_r$$

$d\vec{E}$ e $d\vec{E}_1$ sono uguali e concordi lungo l'asse x , mentre sono uguali e discordi lungo l'asse $y \rightarrow$ si annullano, rimane soltanto la componente lungo x

$$d\vec{E} + d\vec{E}_1 = 2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r^2} \cos\theta \hat{u}_x \right) dl \rightarrow \text{Valida per ogni coppia simmetrica}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r^2} \cos\theta \cdot \hat{u}_x \cdot \int dl \rightarrow \text{Integro su mezza circonferenza}$$

perché considero coppie di tratti infinitesimi

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r^2} \cos\theta \cdot \pi R \cdot \hat{u}_x \rightarrow \text{Caso di espressione in grandezze note}$$

$$\text{Essendo } \lambda = \frac{q}{L} \rightarrow \lambda = \frac{q_{\text{TOT}}}{L_{\text{TOT}}} = \frac{q}{2\pi R} \rightarrow q = 2\pi R \lambda$$

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + R^2)^3}} \cdot \hat{u}_x \rightarrow \text{ob in funzione di grandezze note} \rightarrow$$

varia al variare della posizione del punto $P \rightarrow$ se $x=0$, \vec{E} si annulla.

Se $x \rightarrow \infty$ (quindi $x \gg R$), \vec{E} assume la forma del campo elettrico generato da una carica puntiforme \rightarrow a grande distanza dalla distribuzione di carica non si riesce a risolvere alla carica distribuita \rightarrow diventa assimilabile ad una carica puntiforme centrata nel centro dell'anello

Essendo una carica diversa da quella puntiforme, la sua dipendenza dalla distanza è diversa da quella della carica puntiforme.

Il potenziale è una funzione UNIVOCA (assume un solo valore) e CONTINUA (non ammette discontinuità, al contrario di \vec{E}) e DERIVABILE (la sua derivata è \vec{E}) \rightarrow campo scalare

$$[V] = J/C = V \rightarrow \text{Volt}$$

$$[E] = V/m$$

Energia potenziale elettrostatica

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q_0}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{s} = U_A - U_B = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

\rightarrow carica q_0 che si sposta dal punto A al punto B sotto l'azione di \vec{E} generata da q (stesso calcolo di V)

In un punto P \rightarrow valgono le stesse considerazioni di V

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q_0}{r} + \text{COST} \quad (\text{può essere posta uguale a zero se la distribuzione}$$

di carica è finita \rightarrow agisce in una zona limitata dello spazio)

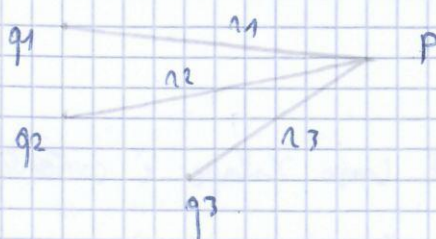
Se $\text{COST} = 0 \rightarrow$ lavoro necessario per spostare q_0 da P a distanza infinita

Se $q \cdot q_0 > 0 \rightarrow U$ decresce al crescere di $r \rightarrow$ sistema tende a evolvere nella situazione in cui U diminuisce \rightarrow infatti cariche dello stesso segno si respingono (r quindi aumenta) \rightarrow lavoro che il sistema applica verso l'esterno in modo spontaneo $\rightarrow W > 0$

Se $q \cdot q_0 < 0 \rightarrow U$ aumenta al crescere di $r \rightarrow$ il sistema delle 2 cariche non evolve mai in modo da allontanare le cariche poiché U aumenta $\rightarrow U$ decresce se r diminuisce \rightarrow cariche andranno ad attrarsi (cariche opposte) \rightarrow bisogna compiere lavoro sul sistema per spostare le cariche all'infinito $\rightarrow W < 0$

Se le forze applicate al sistema sono CONSERVATIVE \rightarrow l'energia del sistema (meccanica + elettrica) si conserva

Per il potenziale elettrostatico vale il principio di sovrapposizione (anche l'energia)



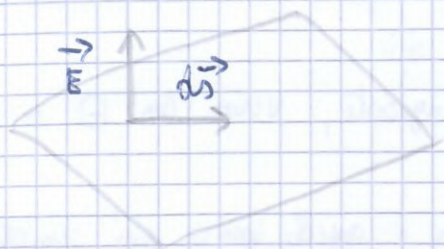
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Se la carica è continua \rightarrow si procede con l'integrazione

Queste superfici si addensano dove ΔV è più elevata.

In prossimità di una superficie equipotenziale, osserviamo il comportamento di \vec{E}

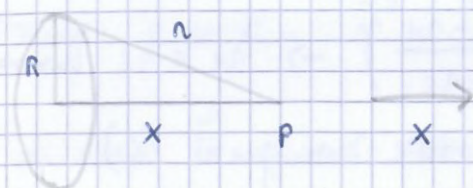


Calcolo del lavoro:

$$\text{esempio } V = \text{cost} \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = -dV = 0 \\ \rightarrow \vec{E} \perp d\vec{s} \rightarrow \vec{E} \perp \text{ alla sup. equipotenziale}$$

ESERCIZIO

Carica q distribuita uniformemente su un anello \rightarrow calcolare V, \vec{E}



$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{cost}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r}$$

$$\rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int dl = \frac{2\pi R \lambda}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$$

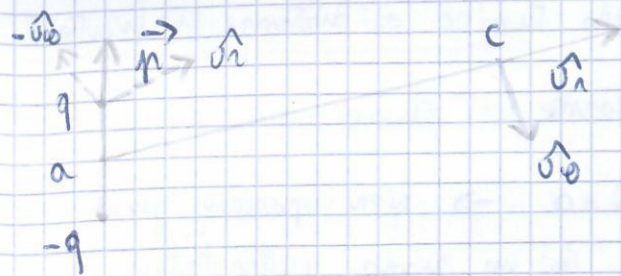
Con $x \gg R \rightarrow V$ assume la stessa forma del potenziale per la carica puntiforme (uguale alla carica totale distribuita)

Con $x=0$ il potenziale ha il suo massimo valore:

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$$

$$\vec{E} = -\nabla V \rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \rightarrow \text{stesso risultato dell'es. precedente}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [2p \cos\theta \hat{u}_n + p \sin\theta \hat{u}_\theta]$$

$$\vec{p} = p \cos\theta \hat{u}_n - p \sin\theta \hat{u}_\theta$$

$$\rightarrow p \sin\theta \hat{u}_\theta = p \sin\theta \hat{u}_n - \vec{p}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [2p \cos\theta \hat{u}_n + p \cos\theta \hat{u}_n - p] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [3p \cos\theta \hat{u}_n - p] \rightarrow \vec{E} \text{ espresso in coordinate sferiche}$$

$$\text{Esendo } p \cos\theta = \vec{p} \cdot \hat{u}_n \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{u}_n) \cdot \hat{u}_n - p]$$

• Calcoliamo \vec{E} generato dal dipolo in un punto sul proprio asse $\rightarrow \cos\theta = 1$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3\vec{p} - \vec{p}] = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \rightarrow \vec{E} \text{ parallelo e concorde a } \vec{p}$$

Calcolo di \vec{E} generato dal dipolo nel piano mediano (piano perpendicolare per il punto medio e \perp all'asse) $\rightarrow \cos\theta = 0$

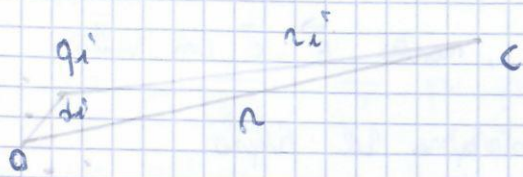
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [0 - \vec{p}] = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \rightarrow \text{anti-parallelo a } \vec{p}$$

Linee di forza di un dipolo elettrostatico e modello di dipolo elettrostatico

Attraverso le linee di forza si può confermare la considerazione fatta ma su \vec{E} agente nell'asse ma su \vec{E} agente nel piano mediano

Linee di forza \rightarrow uguali in tutto lo spazio

Considerando un sistema neutro e ponendolo a grande distanza da cui \rightarrow il suo comportamento è uguale a quello del dipolo elettrostatico (sistema neutro puramente)



$$d \ll r$$

$$V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Sviluppando in serie fino al primo grado si può ottenere V_C come:

$$V_C \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{\sum_i q_i d_i \cdot \hat{u}_n}{r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}_0 \cdot \hat{u}_n}{r^2}$$

con $\vec{p}_0 = \sum_i q_i \cdot \vec{d}_i =$ momento del dipolo calcolato rispetto ad O

Energia potenziale del dipolo

Si considera una sorgente di V tale che \vec{E} sia conservativo (altrimenti U non può essere definita)

$$U = qV(x+ax, y+ay, z+az) - qV(x, y, z) \rightarrow \text{sviluppo in serie} \rightarrow$$

$$U = qV(x, y, z) + q \left(\frac{dV}{dx} ax + \frac{dV}{dy} ay + \frac{dV}{dz} az \right) - qV(x, y, z) =$$

$$= \vec{p} \cdot \vec{\nabla} V \rightarrow \text{essendo } V \text{ un campo scalare posso calcolare } \vec{\nabla} V$$

$$\rightarrow U = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} V = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

U è minima quando $\vec{p} \parallel \vec{E} \rightarrow U = -pE$ (valore MIN raggiungibile)

U è massima quando \vec{p} antipa. $\vec{E} \rightarrow U = pE$ (valore MAX raggiungibile)

Equilibrio STABILE $\rightarrow \vec{p} \parallel \vec{E} \rightarrow U = -pE$

Equilibrio INSTABILE $\rightarrow \vec{p}$ antiparallelo $\vec{E} \rightarrow U = pE$

Se il momento è di RICAMBIO (oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio)

$$\rightarrow M = -pE \sin \theta$$

Interazione fra due dipoli



Calcolo U per trovare F con cui interagiscono

$$U_2 = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_2$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [3(\vec{p}_1 \cdot \hat{u}_1) \cdot \hat{u}_1 - \vec{p}_1]$$

$$\rightarrow U_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [3(\vec{p}_1 \cdot \hat{u}_1) \cdot (\vec{p}_2 \cdot \hat{u}_1) - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2]$$

Considerando il piano mediano $\rightarrow \hat{u}_1 \perp \vec{p}_1$ e $\hat{u}_1 \perp \vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$

$$\rightarrow U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} p_1 \cdot p_2 \rightarrow \text{al crescere di } r, U \text{ diminuisce}$$

\rightarrow un sistema non tende mai all'aumento di $U \rightarrow$ forza mai repulsiva

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_2 = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{p_1 \cdot p_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3}{r^4} \cdot \hat{u}_1 \rightarrow \vec{F} \text{ coincide a } \hat{u}_1$$

ESEMPIO

Considerando la molecola di $H_2O \rightarrow p = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$, $r = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

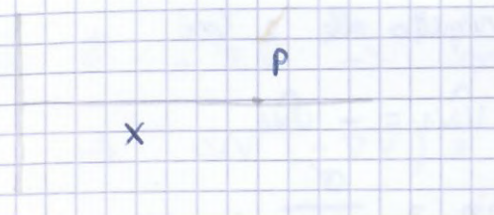
Calcolo di U :

$\rightarrow \int_V (\text{div } \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) dV = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow$ forma LOCALE
 (o differenziale) della legge di Gauss \rightarrow relazione che lega punto per punto
 \vec{E} alla carica

Un campo vettoriale si definisce SOLENOIDALE se $\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}$ quindi
 NON è solenoitale \rightarrow un campo solenoitale quindi ha anche flusso lungo una
 superficie chiusa uguale a zero $\rightarrow \text{div } \vec{E} = 0, \oint (\vec{E}) = 0$

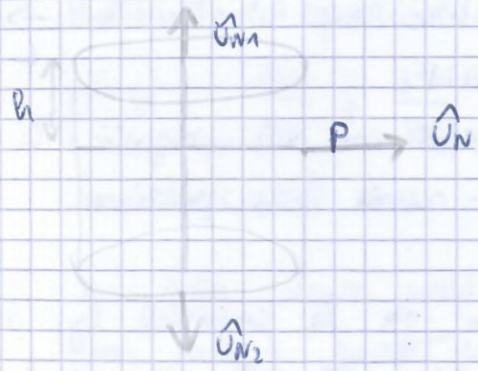
ESERCIZIO

$\lambda = \frac{dq}{dl} > 0 \quad \vec{E} = ?$



Utilizzo la legge di Gauss \rightarrow quanto
 c'è simmetria

Sfruttiamo la simmetria cilindrica del sistema



$\int_{\Sigma_{ch}} \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$

$\int_{\Sigma_{int}} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma + \int_{\Sigma_{ext}} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$

\vec{E} può radiale \rightarrow non può essere altrimenti
 perché è uniforme (NON si ha nessun accumulo
 di cariche)

$\int_{\Sigma_{int}} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = 0 \rightarrow \vec{E} \perp \hat{n}_1, \vec{E} \perp \hat{n}_2$

$\rightarrow \int_{\Sigma_{se}} E d\Sigma = E \int_{\Sigma_{se}} d\Sigma = E \cdot 2\pi R h \rightarrow E = \text{COST}$ perché uniforme

$\rightarrow E \cdot 2\pi R h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \rightarrow E_p = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \rightarrow \vec{E}_p = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \hat{u}_R$

$\vec{E} = -\nabla V \rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{u}_R \rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{u}_R$

$V = -\int \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r + \text{COST} \rightarrow$ la costante NON

può essere eliminata in alcun modo a meno che non si abbiano condizioni al contorno
 \rightarrow questo perché la distribuzione è infinita

Equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico

$$\textcircled{1} \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$$

Il campo elettrostatico è conservativo ed irrotazionale

$$\textcircled{2} \int_{\Sigma_{\text{in}}} \vec{E} \cdot \vec{n} d\Sigma = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{legge di Gauss}$$

→ vale per \forall campo elettrico → sia in forma integrale sia differenziale

Sia $\textcircled{1}$ sia $\textcircled{2}$ sono leggi lineari → si può utilizzare il principio di sovrapposizione per il campo elettrostatico

$$\textcircled{3} \vec{E} = -\nabla V \rightarrow \text{sostituiamo l'espressione in } \textcircled{2}$$

$$\rightarrow \text{div } (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 \rightarrow \nabla^2 = \text{LAPLACIANO}$$

Questa è l'equazione di POISSON → lineare nel potenziale

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Se } \rho(x,y,z) = 0 \rightarrow \nabla^2 V = 0 \rightarrow \text{equazione di LAPLACE}$$

Soddisfatta alcune condizioni al contorno (tra cui a $t \rightarrow \infty$ V e le sue derivate sono nulle) queste equazioni hanno sempre soluzioni univoche

ELETTROSTATICA NEI MATERIALI

Conduttori

Elementi in cui gli elettroni sono liberi di muoversi → le forze devono essere nulle se il conduttore è in equilibrio.

$$\text{In equilibrio} \rightarrow \vec{F} = 0 \rightarrow q\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$$

Il campo elettrico DEVE essere nullo → a livello macroscopico

Non c'è quindi moto ordinato delle cariche in nessuna direzione → cariche sono in quiete → non sono ferme perché c'è l'agitazione termica, ma mediamente la velocità è nulla in quanto il moto delle cariche è casuale → macroscopicamente il sistema è in quiete

$$\vec{E} = -\nabla V = 0 \rightarrow V = \text{cost}$$

ESERCIZIO



$$C = ?$$

$$C = \frac{q}{V}$$

Ipotesi: una carica q generica.

Attraverso la legge di Gauss (simmetria sferica) ottengo il valore di \vec{E}

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{u}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\sigma\pi R^2}{r^2}$$

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} + \text{cost} \rightarrow \text{pongo la costante nulla}$$

$$\text{Sulla superficie del conduttore} \rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R} \rightarrow \text{potenziale del conduttore}$$

$$C = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 \cdot R \rightarrow \text{dipende da forma, dimensione e cost. dielettrica}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{\text{capacità}}{\text{lunghezza}} = \frac{F}{m}$$

Induzione elettrostatica



Conduttore inizialmente neutro a cui viene avvicinato un corpo carico \rightarrow compare una carica INDOTTA \rightarrow carica di segno opposto verso il corpo carico, dello stesso segno dalla parte opposta

La carica q genera \vec{E} in tutto il suo intorno \rightarrow il conduttore deve avere \vec{E} nullo se è in equilibrio \rightarrow dovrà generare \vec{E}' tale che $\vec{E} + \vec{E}' = 0$ in tutti i punti all'interno del conduttore.

La redistribuzione di carica all'interno del conduttore è UNIVUCA

La somma delle cariche indotte \oplus e \ominus è nulla \rightarrow la carica elettrica in un sistema isolato deve essere COSTANTE

Avvicinando q , compare la carica indotta \rightarrow se anche q è un conduttore, si ha una redistribuzione di carica su entrambi i conduttori \rightarrow \vec{E} deve essere nullo per entrambi. Se 2 conduttori entrano in contatto, diventano un unico conduttore.

Condensatore

Sistema di due conduttori in condizione di induzione elettrostatica completa \rightarrow può avere diverse forme:

① Sferico \rightarrow i due conduttori (ARMATURE) sono un conduttore sferico e una corona concentrica



② Cilindrica \rightarrow due cilindri coassiali

③ Piano \rightarrow due superfici piane

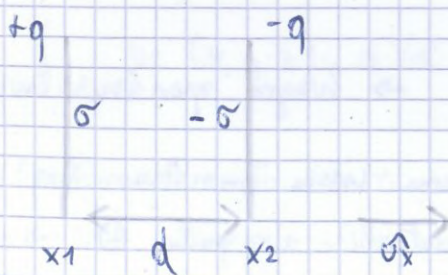
Capacità di un condensatore \rightarrow carica sulle armature diviso la differenza di potenziale tra le armature (potenziale della carica \oplus - potenziale della carica \ominus)

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} \rightarrow \text{non dipende né da } q \text{ né da } V_1 - V_2 \rightarrow \text{dipende da forma}$$

dimensione e distanza dei due conduttori e della cost. dielettrica del mezzo frapposto fra i 2 conduttori

$$\rightarrow q = C (V_1 - V_2)$$

• Condensatore piano



Considerando una delle 2 armature, l'altra si carica per induzione elettrostatica

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_x$$

All'interno del condensatore somma i contributi dei 2 conduttori, all'esterno invece li sottraggono perché di verso opposto $\rightarrow \vec{E}_{\text{est}} = 0$

$$V_1 - V_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d$$

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma \Sigma}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d} = \epsilon_0 \cdot \frac{\Sigma}{d}$$

quantità di energia elettrica $U_e = \frac{1}{2} qV$, che rimane al suo interno fino a che il condensatore non si scarica

\vec{E} in un condensatore carico

Consideriamo un condensatore piano con armature parallele $\rightarrow q = \sigma \Sigma$

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \rightarrow U_e = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 \Sigma^2}{\epsilon_0 \cdot \frac{\Sigma}{d}} = \frac{1}{2} \sigma^2 d \Sigma \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \sigma d \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 \cdot \Sigma \cdot d \rightarrow \Sigma \cdot d = \text{Vol}, \quad \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E$$

$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot \text{Vol}$$

Introducendo con U_e la densità di energia elettrica per unità di volume

$$u_e = \frac{dU_e}{d\text{Vol}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2 \rightarrow [u_e] = \text{J}/\text{m}^3$$

La densità di energia u_e vale per qualunque sistema in cui sia presente un campo elettrico (che varia secondo la posizione)

$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x, y, z) \rightarrow u_e(x, y, z)$ è un risultato GENERALE, anche dove il campo non è conservativo

Questa è una relazione puntuale \rightarrow per conoscere la relazione in una regione spaziale bisogna utilizzare l'integrazione sul volume di interesse

$$U_e = \int_{\text{Vol}} u_e(x, y, z) d\text{Vol} = \int_{\text{Vol}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2(x, y, z) d\text{Vol}$$

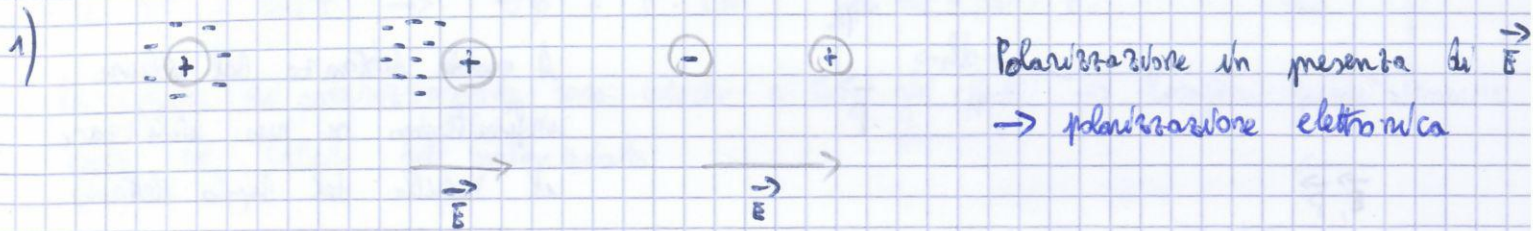
Per un sistema discreto di n cariche \rightarrow o si calcola \vec{E} risultante per ottenere U_e o si utilizza il principio di sovrapposizione per U_e di ciascuna carica moltiplicata per $\frac{1}{2}$ (ciascuna coppia va considerata solo una volta)

Materiali anisotropi \rightarrow caratteristiche elettriche variano a seconda della direzione della cella cristallina considerata \rightarrow materiali cristallini

Materiali isotropi \rightarrow proprietà elettriche NO IV variano secondo la direzione \rightarrow materiali amorfi

In caso di materiale isotropo \rightarrow tutte le formule in cui compare ϵ_0 vengono modificate sostituendo ϵ_0 con $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \kappa \rightarrow$ costante dielettrica ASSOLUTA

Polarizzazione di un dielettrico



La presenza di \vec{E} genera una redistribuzione spaziale delle cariche \rightarrow e⁻ si muovono in senso opposto rispetto ad $\vec{E} \rightarrow$ si genera un dipolo (con delle cariche non esattamente puntuali)

$$\vec{p} = z \cdot e \cdot \vec{a}, \quad \text{dove } ze = \text{carica totale}$$

2) Polarizzazione per orientamento

$\sum \vec{p}_0 = 0 \rightarrow$ dipoli orientati casualmente \rightarrow somma dei momenti è nulla (si ha in un caso di molecole con molti elettroni)

Applicando un campo elettrico, molecole tendono ad allinearsi ma a causa dell'agitazione termica una parte di esse rimangono non allineate

$$N = N_1 (\text{allineate}) + N_2 (\text{non allineate}) \rightarrow \vec{p} = \vec{p}_0 N_1$$

N_1 è tanto più elevato quanto più la temperatura è bassa

Se ipotizziamo le molecole tutte allineate, un momento di dipolo medio inferiore a $p_0 \rightarrow p < p_0$

$$\langle p \rangle \cdot N = p_0 \cdot N_1$$

Se consideriamo una regione infinitesima $\rightarrow dp = \langle p \rangle \cdot dN$

$$\frac{dp}{dVol} = \langle p \rangle \cdot \frac{dN}{dVol} \rightarrow \vec{P} = \frac{dp}{dVol} = \text{polarizzazione (p per unità di volume)}$$

Abbiamo sviluppato un serie fino al primo ordine

$$dq_p - dq_p' = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx dy dz \rightarrow \text{vale per ogni direzione}$$

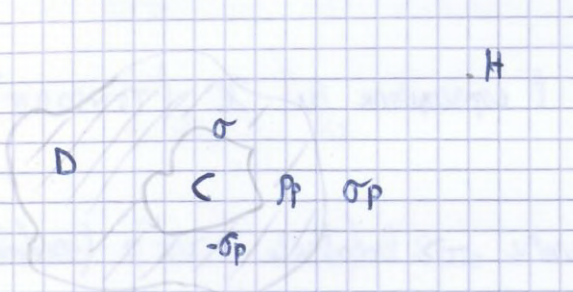
$$dq_p = \left(-\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) dx dy dz = -\text{div } \vec{P} \cdot dVol$$

$$\rightarrow \frac{dq_p}{dVol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_p \rightarrow \text{densità delle cariche di polarizzazione}$$

$$\text{Se } \vec{P} = \text{cost} \rightarrow \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{u}_n, \rho_p = 0$$

$$\text{Se } \vec{P} \neq \text{cost} \rightarrow \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{u}_n, \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Le cariche di polarizzazione sono cariche a tutti gli effetti \rightarrow bisogna quindi tenerne conto nel calcolo del potenziale



$$V(H) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma_c} \frac{\sigma d\Sigma}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma_D} \frac{\sigma_p d\Sigma}{r_p} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{Vol} \frac{\rho_p dV}{r_p}$$

Equazioni di Maxwell per un dielettrico

$$\textcircled{1} \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0 \rightarrow \text{non varia}$$

$$\textcircled{2} \int \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q + q_p}{\epsilon_0} \rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$$

Bisogna tenere conto delle cariche di polarizzazione \rightarrow non si riesce però a calcolare come esse si distribuiscono e quindi ρ_p

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\text{div } \vec{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \epsilon_0 \text{div } \vec{E} + \text{div } \vec{P} = \rho$$

$$\rightarrow \text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho, \text{ con } \rho \text{ densità di carica LIBERA}$$

$$\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D} \rightarrow \text{vettore di INDUZIONE dielettrica}$$

$$\rightarrow \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = q \rightarrow \text{legge di Gauss all'interno di un dielettrico}$$

Contatto tra dielettrici



$$E_{1t} = E_{2t} \quad (\text{componente } \parallel)$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma_{P1} + \sigma_{P2}}{\epsilon_0} \quad (\text{componente } \perp)$$

$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1, \quad \sigma_{P2} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2 \quad \rightarrow \quad \text{con } \hat{n}_1 = -\hat{n}_2$$

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\vec{P}_1 \cdot \hat{n}_2 + \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2}{\epsilon_0} = \frac{P_{1n} - P_{2n}}{\epsilon_0}$$

Considerando invece il vettore \vec{D} \rightarrow utilizziamo la legge di Gauss



$$h \ll R$$

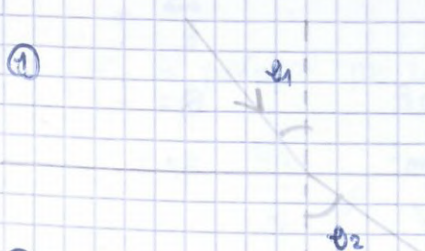
$$d\phi(\vec{D}) = \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 d\xi_{top} + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 d\xi_{base} + \cancel{\vec{D} \cdot \hat{n}_1 d\xi_{se}}$$

$$d\phi(\vec{D}) = (D_{1n} - D_{2n}) d\xi_{base} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{non ci sono cariche libere, solo cariche di polarizzazione}$$

$\rightarrow D_{1n} = D_{2n} \rightarrow$ si conserva la normale del vettore induzione dielettrica \rightarrow vale in ogni situazione

Considerando un dielettrico isotropo $\rightarrow \epsilon_0 n_1 \cdot E_{1n} = \epsilon_0 n_2 \cdot E_{2n}$

$$\rightarrow n_1 \cdot E_{1n} = n_2 \cdot E_{2n}$$



$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

$$n_1 E_1 \cos \theta_1 = n_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$\rightarrow \frac{\tan \theta_1}{n_1} = \frac{\tan \theta_2}{n_2}$$

$$\rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \rightarrow \quad \text{permette di valutare come varia la direzione del } \vec{E}$$

passando da un mezzo ad un altro \rightarrow legge della RIFRAZIONE delle linee di forza del campo elettrico \rightarrow come devia \vec{E} all'interfaccia tra 2 dielettrici

Se $\theta_1 = 0 \rightarrow \theta_2 = 0 \rightarrow \vec{E}$ non viene deviato, rimane perpendicolare

- $Q = CV = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$

- Le cariche di polarizzazione sono solo sulla superficie (dielettrico ϵ omogeneo e isotropo \rightarrow all'interno non ci sono)

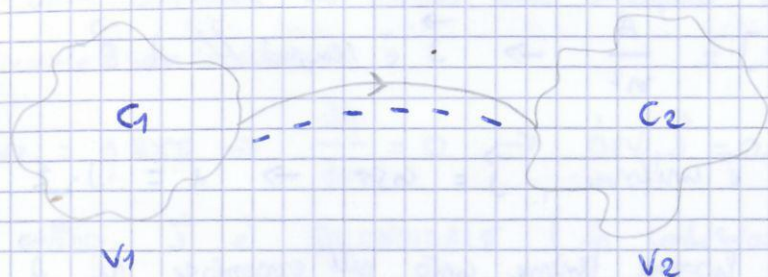
$$\sigma_{P1} = \vec{P} \cdot \hat{u}_{N1} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \cdot \hat{u}_{N1} = \epsilon_0 \chi E = 4,09 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_{P2} = \vec{P} \cdot \hat{u}_{N2} = -4,09 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_{P3} = \sigma_{P4} = 0 \rightarrow \text{UN} \text{ e } \vec{E} \text{ sono } \perp$$

$$\rightarrow q_p = \sigma_p \cdot \Sigma$$

CORRENTE ELETTRICA



C_1, C_2 conduttori

$$V_1 < V_2$$

$$DV = \text{cost} \rightarrow \text{f.e.m.}$$

Flusso di elettroni da C_1 (potenziale minore) a C_2 fino al raggiungimento dello stesso valore del potenziale \rightarrow lo spostamento \vec{e} dovuto al \vec{E} generato dalla d.d.p. fra C_1 e C_2 . \rightarrow questo e il fenomeno di conduzione elettrostatica \rightarrow corrente elettrica

Portatori di carica \rightarrow particelle cariche come ioni, elettroni...

$$n = \text{n}^\circ \text{ di portatori per unita' di volume} = \frac{N_{\text{avg}}}{V}, \text{ dove } V = \frac{A}{\rho} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{densita'}} \right)$$

$$\rightarrow n = \frac{NA}{A} \cdot \rho$$

Considerando cariche in moto in presenza di $\vec{E} \rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \rightarrow \vec{a} \parallel \vec{E}$ e quindi esiste una velocita' parallela al campo elettrico $\rightarrow v_d = \text{velocita' di deriva}$

$$v_d^+ = \text{velocita' dei portatori di carica } \oplus \rightarrow v_d^+ \parallel \vec{E}$$

$$v_d^- = \text{velocita' dei portatori di carica } \ominus \rightarrow v_d^- \text{ antiparallela } \vec{E}$$

Considerando n portatori di carica $+e$ sotto l'azione di $\vec{E} \rightarrow \vec{F} = e\vec{E}$,

$$v_d^+ \parallel \vec{E}, \quad v_d^+ \parallel \vec{F}$$

$$\phi_{\Sigma}(\vec{j}) = \int_{vol} \operatorname{div} \vec{j} \, dVol = - \frac{dq_{INT}}{dt}$$

$$\int_{vol} \operatorname{div} \vec{j} \, dVol = - \frac{\partial \int \rho \, dVol}{\partial t} = - \int_{vol} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dVol \rightarrow \text{il volume considerato è lo stesso}$$

$$\rightarrow \int_{vol} \left(\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dVol = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

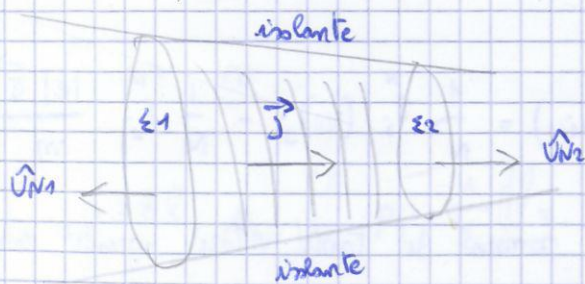
Questa legge è valida in ogni punto dello spazio \rightarrow equazione di continuità della corrente elettrica

Regime stazionario

La carica contenuta all'interno della superficie NON varia \rightarrow non si ha mai accumulo di cariche

$$q_{INT} = q_{EXT} \rightarrow \frac{dq}{dt} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 \rightarrow \oint \vec{j} \cdot \hat{n} \, d\Sigma = 0$$

Il vettore \vec{j} è SOLENOIDALE (in condizioni stazionarie)



$$\phi_{\Sigma}(\vec{j}) = 0$$

$$\phi_{\Sigma_1}(\vec{j}) + \phi_{\Sigma_2}(\vec{j}) = \phi_{SE}(\vec{j})$$

$$\hat{v}_{N1} = - \hat{v}_{N2}$$

$$\rightarrow \oint_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot \hat{n}_1 \, d\Sigma_1 + \oint_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot \hat{n}_2 \, d\Sigma_2 = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{n} \, d\Sigma$$

$$\rightarrow i_1 - i_2 = 0 \quad (\text{NON può cambiare nella SE}) \rightarrow i_1 = i_2$$

In condizioni stazionarie si ha la stessa corrente attraverso qualunque sezione del conduttore

$$i_1 = j_1 \varepsilon_1, \quad i_2 = j_2 \varepsilon_2 \rightarrow j_1 = \frac{i}{\varepsilon_1}, \quad j_2 = \frac{i}{\varepsilon_2}$$

La densità di corrente è massima dove la sezione del conduttore risulta minima \rightarrow lo stesso vale per la velocità di deriva ($j = n e v_d$)

$\vec{E} = \rho \vec{J} \rightarrow$ legge di OHM in forma locale

$$[\rho] = \Omega \cdot m, \quad [\sigma] = \Omega^{-1} \cdot m^{-1} = \frac{S}{m} \quad (S = \text{Siemens})$$

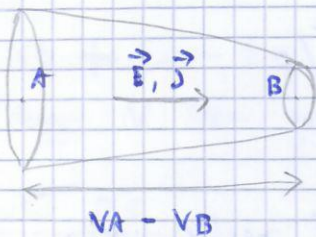
La resistività varia con la temperatura $\rightarrow \rho(T) = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T) \rightarrow$
 ρ_0 è la resistività a $20^\circ C$, α è il coefficiente termico positivo per il
modello di Drude-Lorenz, negativo nel caso di semiconduttori

Per $T \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \rho_0$

Superconduttori \rightarrow al di sotto di una certa temperatura (temperatura critica) la
resistività si annulla \rightarrow si possono avere correnti in moto anche se \vec{E} è nulla
 \rightarrow quindi la densità di corrente è diversa da zero anche con $\vec{E} = 0$

legge di OHM

$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$ (forma locale)



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \rho \vec{J} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{J} \parallel d\vec{l}, \quad \vec{J} = \omega_{ST} \quad (\text{reg. staz.})$$

$$\int_A^B \rho J dl = \int_A^B \rho \cdot \frac{i}{\Sigma} dl = i \int_A^B \frac{\rho dl}{\Sigma} \rightarrow \int_A^B \frac{\rho dl}{\Sigma} = R = \text{resistenza}$$

$$\rightarrow V_A - V_B = i \cdot R = i \cdot \int_A^B \frac{\rho dl}{\Sigma}$$

Se il conduttore ha sezione Σ costante $\rightarrow \rho = \omega_{ST} \rightarrow R = \frac{\rho l}{\Sigma}$

R dipende sia dalle caratteristiche geometriche sia dal tipo di conduttore

$$[R] = \frac{V}{A} = \Omega \rightarrow \text{ohm}$$

I conduttori che seguono la legge di Ohm sono i conduttori ohmici \rightarrow un esempio
è il resistore \rightarrow si possono attuare collegamenti in serie o in parallelo

Resistori in serie \rightarrow stessa intensità di corrente (1 nodo in comune)

$$R_{eq} = \sum_i^N R_i$$

Resistori in parallelo \rightarrow stessa d.d.p. ai loro capi $\rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \sum_i^N \frac{1}{R_i}$

$$r = \text{resistenza interna del generatore} = \frac{1}{i} \cdot \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\mathcal{E} = V_A - V_D + ri \rightarrow V_A - V_D = \text{d.d.p. ai capi del generatore}$$

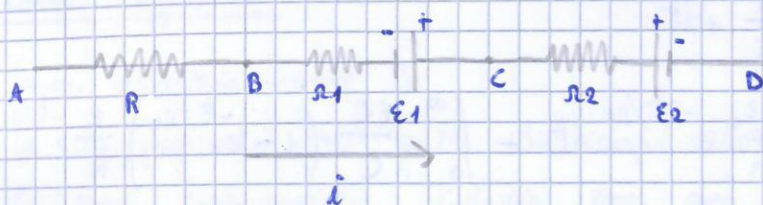
Se il generatore non eroga corrente ($i=0$) $\rightarrow \mathcal{E} = V_A - V_D \rightarrow \mathcal{E}$ è la d.d.p. ai capi del generatore quando esso non eroga corrente

Moltiplica tutti i termini per $i dt$:

$$\mathcal{E} i dt = Ri^2 dt + ri^2 dt \rightarrow \text{Lavoro del generatore} = \text{energia dissipata sulla resistenza esterna} + \text{energia dissipata sulla resistenza interna (per effetto Joule)}$$

$$\text{Potenza} \rightarrow \frac{dW}{dt} \rightarrow \mathcal{E}i = Ri^2 + ri^2$$

Consideriamo un circuito con formato:

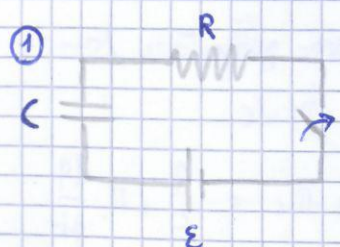


\mathcal{E}_2 si comporta da utilizzatore

$$V_A - V_D + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = Ri + r_1 i + r_2 i \rightarrow V_A - V_D + \sum_n \mathcal{E}_n = \sum_n r_n i + Ri$$

\rightarrow legge di Ohm generalizzata

Circuito RC



All'analisi $\rightarrow q=0, i=0$

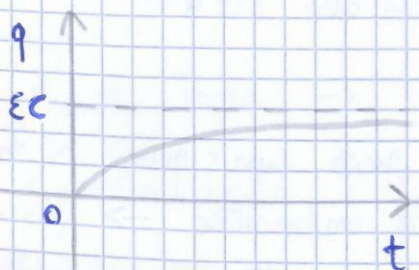
$t=0 \rightarrow$ si chiude l'interruttore

$$\mathcal{E} = Ri + \frac{q}{C} = R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{dt}{R} = \frac{dq}{\mathcal{E} - \frac{q}{C}} \rightarrow \int_0^t \frac{dt}{R} = \int_0^q \frac{dq}{\mathcal{E} - \frac{q}{C}}$$

$$\rightarrow \frac{t}{R} = -C \left[\ln \left(\mathcal{E} - \frac{q}{C} \right) \right]_0^q \rightarrow -\frac{t}{R} = C \ln \left(\frac{\mathcal{E} - \frac{q}{C}}{\mathcal{E}} \right)$$

$$\rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\mathcal{E} - \frac{q}{C}}{\mathcal{E}} \rightarrow q = EC \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$



Lo stesso grafico vale per V

$$V = \frac{q}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

V tende asintoticamente a \mathcal{E}

Bilancio energetico $\rightarrow 0 = \frac{q}{c} + Ri \rightarrow \frac{q}{c} \leftrightarrow - Ri$

MAGNETISMO

Forza magnetica

L'interazione tra i poli è analoga alla forza elettrostatica $\rightarrow F \propto \frac{q_1^* q_2^*}{r^2}$
 dove q_1^* e q_2^* sono le masse magnetiche

Forza può essere attrattiva o repulsiva \rightarrow come la forza elettrica

La principale distinzione tra le 2 interazioni è il fatto che il polo magnetico non può essere isolato \rightarrow non ha senso il concetto di massa magnetica, non si può separare il polo positivo e quello negativo \rightarrow struttura dipolare

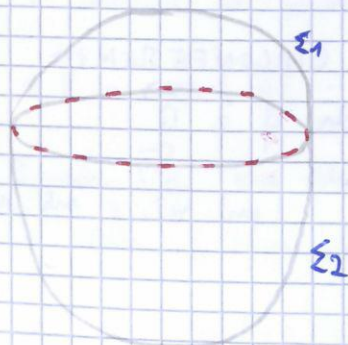
Campo magnetico

Campo vettoriale $\rightarrow \vec{B}$

Le sue proprietà sono quelle dei campi vettoriali \rightarrow le sue linee di forza seguono le regole fondamentali, tuttavia esse sono SEMPRE linee chiuse \rightarrow escono dal polo \oplus (NORD) ed entrano nel polo \ominus (SUD) \rightarrow deriva dal fatto di non poter separare il dipolo

Applicando il teorema di Gauss $\rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = 0$ (Σ CHIUSA)

$\rightarrow \text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B}$ è solenoidale



$$\phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma \neq 0 \quad (\Sigma_1 \text{ NON } \bar{\epsilon} \text{ chiusa})$$

$$\phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma \neq 0 \quad (\Sigma_2 \text{ NON } \bar{\epsilon} \text{ chiusa})$$

$$\phi(\vec{B}) = \oint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = 0$$

Si parla quindi di flusso concatenato ad una linea chiusa \rightarrow qualunque superficie si consideri tale che abbia come contorno quello della superficie data, il valore del flusso è SEMPRE lo stesso

$[B] = T = \text{Tesla} \rightarrow$ unità di misura molto grande

Spesso \vec{B} si misura anche in Gauss $\rightarrow 1 G = 10^{-4} T$

Campo magnetico terrestre \rightarrow misura circa 1 G

il moto proiettato è circolare uniforme \rightarrow bisogna comunque analizzare la componente \parallel a \vec{B}

Nella direzione di $\vec{B} \rightarrow \vec{F}$ è nulla \rightarrow moto rettilineo uniforme

Il moto totale quindi è la somma di un moto circolare uniforme e di un moto rettilineo uniforme \rightarrow moto ELICOIDALE uniforme \rightarrow curva si avvolge attorno alla direzione di \vec{B} , il verso di rotazione dipende da q e B

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{v}_\perp}{r} = \frac{v \sin \vartheta}{r} \rightarrow q \vec{v}_\perp \times \vec{B} = m \vec{\omega} \times \vec{v} \rightarrow \vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \rightarrow$$
 periodo riferito al moto lungo il piano \perp a $\vec{B} \rightarrow$

tempo necessario per compiere una rivoluzione completa (percorrere lo spazio frapposto tra 2 punti successivi dell'elica corrispondenti)

Passo dell'elica \rightarrow spazio proiettato su \vec{B} tra 2 punti corrispondenti successivi

$$p = v \parallel \cdot T = v \cos \vartheta \cdot \frac{2\pi m}{qB}$$

\vec{B} all'interno di un conduttore

$$\vec{F}_L = (-e) (\vec{v}_{th} + \vec{v}_d) \times \vec{B} \rightarrow$$
 per la velocità si tiene conto della velocità di agitazione termica e della velocità di deriva

Per calcolare la forza totale lungo una sezione ε di spessore dl :

$$d\vec{F} = n \varepsilon dl \cdot (-e) (\vec{v}_{th} + \vec{v}_d) \times \vec{B} = dN \cdot (-e) (\vec{v}_{th} + \vec{v}_d) \times \vec{B}$$

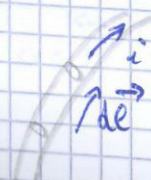
Essendo \vec{v}_{th} una velocità con direzione casuale, la somma dei contributi di tutti ad una ε è nulla (somma di un n° molto elevato di contributi casuali)

$$d\vec{F} = [n (-e) \vec{v}_d \times \vec{B}] \varepsilon dl = (\vec{j} \times \vec{B}) \varepsilon dl \quad (\varepsilon dl = \text{volume})$$

$$\text{Nell'unità di volume} \rightarrow \vec{F}_V = \frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{j} \times \vec{B}$$

Questa forza agisce non solo sui portatori ma proprio sul conduttore stesso (e^- interagisce con gli ioni del reticolo e trasferiscono informazioni \rightarrow modello Drude - Lorentz)

• Conduttore filiforme \rightarrow lunghezza \gg dimensione caratteristica della sezione



$\vec{j} \perp$ alla sezione del conduttore in ogni punto,
 \vec{j} è costante (distribuita uniformemente) $\rightarrow j = i/\varepsilon$

Equilibrio stabile $\rightarrow \theta = 0 \rightarrow m$ e B sono paralleli

Equilibrio instabile $\rightarrow \theta = \pi \rightarrow m$ e B sono antiparalleli

Equivalenza spira - dipolo \rightarrow comportamento di una spira immersa in \vec{B} è analogo a quello di un dipolo elettrico in $\vec{E} \rightarrow$ principio di equivalenza di AMPERE

$$d\vec{m} = i d\xi \hat{u} \rightarrow |d\vec{m}| = i d\xi \text{ quando } d\vec{m} \parallel \hat{u}$$

$$[d\vec{m}] = Am^2$$

Si può misurare \vec{B} ponendo la spira al suo interno \rightarrow si comporta da oscillatore armonico

Flusso magnetico

Energia potenziale in $\vec{B} \rightarrow U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta$ (analogia al dipolo elettrico)

$$\rightarrow M = -\frac{dU_p}{d\theta} = -mB \sin \theta$$

Considerando una circuito piano qualsiasi di superficie ξ attraversato da i :

$$dU_p = -d\vec{m} \cdot \vec{B} = -i \vec{B} \cdot \hat{u} d\xi = -i \cdot d\phi(\vec{B})$$

$$\rightarrow U_p = -i \int_{\xi} \vec{B} \cdot \hat{u} d\xi = -i \cdot \phi_{\xi}(\vec{B})$$

Se avvengono spostamenti rigidi o deformazioni del circuito \rightarrow si compie lavoro

$$W = -\Delta U_p = -i (\phi_1(\vec{B}) - \phi_2(\vec{B})) = i (\phi_2(\vec{B}) - \phi_1(\vec{B}))$$

$$dW = F(x, y, z) \cdot dx dy dz \rightarrow i d\phi = F \cdot ds \rightarrow F = \nabla \phi \cdot i$$

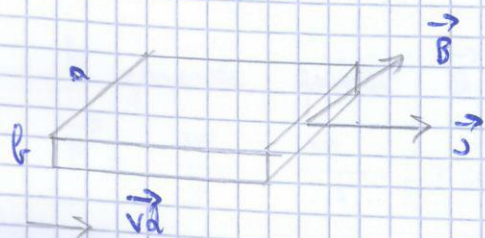
$$\rightarrow F = i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{u}_z \right)$$

Quando il circuito compie una rotazione rigida infinitesima:

$$dW = -dU_p = M \theta d\theta = i \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta$$

Immaginando un circuito piano in \vec{B} non uniforme $\rightarrow \vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$

Effetto Hall



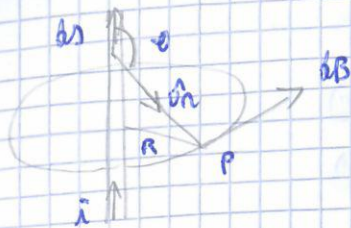
Conduttore di sezione $\xi = ab$ immerso in \vec{B} percorso

da corrente $\rightarrow \vec{B} \perp \vec{J}$

$$\vec{J} = n e \vec{v}_d = \frac{i}{\xi} \hat{u}$$

$$F = e \vec{v}_d \times \vec{B} \rightarrow \frac{V_H}{e} = E_H$$

Legge di Biot - Savart



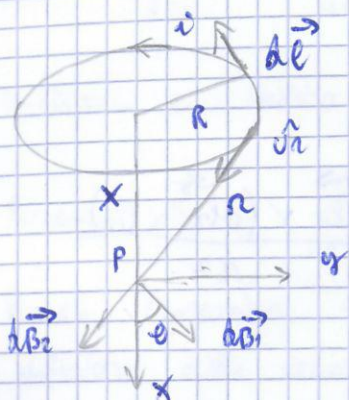
Filo conduttore rettilineo indefinito, percorso da i

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{dl} \times \hat{r}_n \rightarrow \text{dipende solo dalla}$$

distanza dal filo \rightarrow deve essere $R \ll l$

Linee di forza di $\vec{B} \rightarrow$ circonferenze concentriche al filo

Spira circolare



Calcolo di \vec{B} nell'asse di una spira circolare

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \vec{dl} \times \frac{\hat{r}_n}{r^2} \quad (\vec{dl} \perp \hat{r}_n)$$

$$dB_1 + dB_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{dl}{r^2} (\hat{u}_1 + \hat{u}_2)$$

$$\vartheta = \arctg \frac{x}{R}, \quad u_1 = u_2 = \hat{u}_x \cos \vartheta, \quad R = r \cos \vartheta$$

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$\hat{u}_1 + \hat{u}_2 = 2 \cos \vartheta \hat{u}_x = 2 \frac{R}{r} \hat{u}_x = 2 \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \hat{u}_x$$

$$\rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{2 dl \cdot R}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}} \hat{u}_x = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{dl \cdot R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \oint d\vec{B} \quad (\text{metà circonferenza}) \rightarrow \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x = \frac{\mu_0 i R^2}{2 (R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x$$

$$\vec{B} \text{ è massimo nel centro della spira } \rightarrow x=0 \rightarrow \vec{B}_{\text{max}} = \frac{\mu_0 i}{2R} \hat{u}_x$$

\vec{B} tende a 0 $x \rightarrow \infty$

$$\text{Se } x \gg R \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2}{x^3} \hat{u}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2m}{x^3} \quad (m = i \oint dl = i \pi R^2 \hat{u}_x)$$

L'andamento è lo stesso del campo elettrico generato da un dipolo, con $x \gg R$

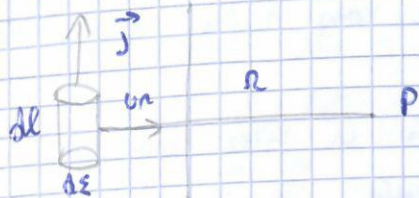
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\vec{p}}{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\vec{m}}{x^3}$$

In generale quando \vec{B} nella spira si comporta come \vec{B} di un dipolo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m}{r^3} (2 \cos \vartheta \hat{r}_n + \sin \vartheta \hat{u}_\vartheta) \rightarrow \text{componente radiale e tangenziale}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \cdot (3(\vec{m} \cdot \hat{r}_n) \hat{r}_n - \vec{m}) \rightarrow \text{componente radiale e intrinseca}$$

\vec{B} generato da un portatore di carica



$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{j \times \hat{u}_r}{r^2} dVol =$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} nq \frac{v \times \hat{u}_r}{r^2} dVol$$

$dN = dVol \cdot n \rightarrow$ n° di portatori che vi troviamo nell'elemento infinitesimo di

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v \times \hat{u}_r}{r^2} \rightarrow \text{B generato dal singolo portatore}$$

Moltiplico e divido per $\epsilon_0 \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi \epsilon_0} q \frac{v \times \hat{u}_r}{r^2}$

Esempio $\vec{B} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{u}_r \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \cdot v \times \vec{E}$

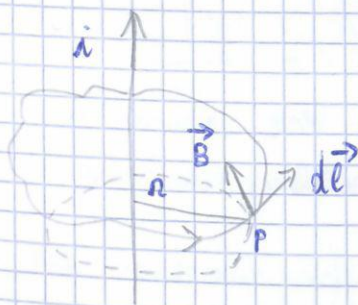
Questa espressione è valida solo se la carica in moto ha velocità molto inferiore alla velocità della luce \rightarrow ovunque ci sia una carica in moto viene generato tale campo magnetico

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} v \times \vec{E} \rightarrow \text{sostituendo } \mu_0 \epsilon_0 \text{ con } \frac{1}{c^2}$$

Collegamento tra \vec{B} ed $\vec{E} \rightarrow$ in presenza di cariche in moto i 2 campi sono strettamente collegati \rightarrow carica in quiete genera solo \vec{E}

Legge di Ampere

Relazione tra \vec{B} e la sua sorgente, ovvero la carica in moto (corrente che si sposta in un conduttore \rightarrow valida solo in regime stazionario)



Calcoliamo la circolazione di \vec{B}

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dr \rightarrow dr \text{ è la proiezione di } d\vec{l} \text{ su } \vec{B} \rightarrow d\vec{l} \text{ con } \vec{B}$$

dr è la tg. alla circonferenza in $P \rightarrow dr$ è arcuabile all'angolo $d\phi \rightarrow dr = r d\phi$

$$\oint B dr = \oint B r d\phi = \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r} \cdot r d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\phi = \mu_0 \cdot i$$

$\rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i \rightarrow$ la circolazione di \vec{B} è indipendente dalla linea chiusa \rightarrow non viene influenzata

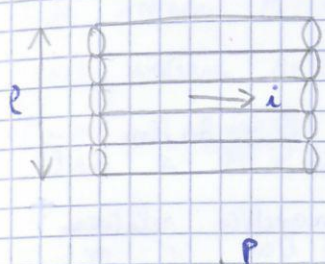
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{e_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{e_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{e_3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{e_4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

L'integrale lungo il lato 3 è nullo (e_3 è esterno, \vec{B} all'esterno è nullo),
 l'integrale lungo il lato 2 e lungo il lato 4 si compensano ($\vec{B} \perp$ al lato)

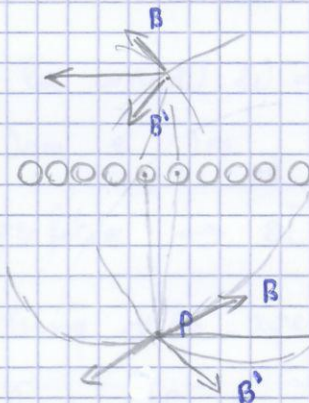
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{e_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = BL = \mu_0 Ni \quad (N = \text{n}^\circ \text{ di spire})$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{L} = \mu_0 i n \rightarrow n = \text{n}^\circ \text{ di spire per unità di lunghezza}$$

\vec{B} generato da N fili indefiniti



$i \odot$



N fili indefiniti

Sia nel semispazio superiore sia in quello inferiore $\rightarrow \vec{B}$ è parallelo all'asse
 dei fili \rightarrow il verso però è opposto

Per il modulo \rightarrow applico la legge di Ampere \rightarrow considero un rettangolo come linea
 di circuitazione che abbia come asse di simmetria l'asse dei fili

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{e_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{e_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{e_3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{e_4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad (\text{in } e_2 \text{ e } e_4 \vec{B} \perp \text{ ai lati} \rightarrow \text{integrale nullo})$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{e_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{e_3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2BL = \mu_0 i N'$$

$$B = \frac{\mu_0 i N'}{2L} = \frac{\mu_0 i n}{2} = \frac{\mu_0 j_0}{2} \rightarrow j_0 = \frac{i N'}{L} = \frac{i_{TOT}}{L}$$

$$\text{Nel semispazio superiore} \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 j_0 \cdot \frac{1}{2} \hat{u}_x$$

$$\text{Nel semispazio inferiore} \rightarrow \vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 j_0 \hat{u}_x$$

C'è una discontinuità tra il semispazio superiore e inferiore \rightarrow discontinuità della
 componente tg. di B nell'attraversare un piano percorso da corrente

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 j_0 \hat{u}_z \rightarrow \Delta B_z = \mu_0 j_0$$

La componente normale invece è conservata

Principio di equivalenza spira-dipolo \rightarrow considero una spira equivalente

$$d\vec{m} = \text{dim } d\vec{\xi} \times \hat{u}_z \rightarrow \text{dim } d\vec{\xi} = M d\xi d\vec{z}$$

$\text{dim} = M d\vec{z} \rightarrow$ la corrente di magnetizzazione scorre solo sulla superficie

$$i_m = \int_{\partial V} M d\vec{z} = M h$$

Definiamo la densità di corrente di magnetizzazione per unità di lunghezza

$$\rightarrow \vec{j}_{sm} = \frac{\text{dim}}{h} = M \rightarrow \vec{j}_{sm} = \vec{M} \times \hat{u}_n$$

Se invece \vec{M} non è uniforme \rightarrow le correnti di magnetizzazione scorrono anche all'interno della superficie $\rightarrow \vec{j}_{sm}$ e \vec{j}_m

$$\vec{j}_{sm} = \vec{M} \times \hat{u}_n \rightarrow \text{sulla superficie} \rightarrow [\vec{j}_{sm}] = \frac{A}{m}$$

$$\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M} \rightarrow \text{all'interno della superficie} \rightarrow [\vec{j}_m] = \frac{A}{m^2}$$

Le equazioni di Maxwell assumono forma diversa

$$\textcircled{1} \quad \oint (\vec{B}) = 0 \rightarrow \int_S \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\xi = 0 \rightarrow \text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{invariata})$$

$$\textcircled{2} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i + i_m) \rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m)$$

Non è semplice determinare $\vec{j}_m \rightarrow$ si cerca di aggirare il problema

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \text{rot } \vec{M} \rightarrow \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{j} + \text{rot } \vec{M}$$

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j} \rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} =$ campo magnetizzante / intensità di campo magnetico \rightarrow il suo rotore dipende esclusivamente dalla densità di corrente di conduzione

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i \rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

La 2a legge di Maxwell viene risolta evitando di trattare la corrente i_m

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \rightarrow \text{per ricavare } \vec{B} \text{ bisogna ottenere } \vec{M}$$

EQUAZIONE di STATO NEI MEZZI MAGNETIZZATI \rightarrow relazione tra \vec{M} e \vec{H}

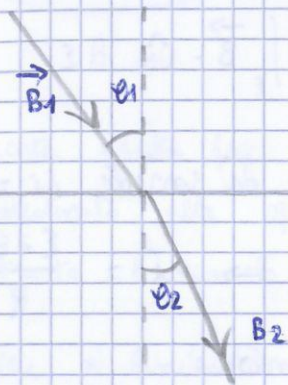
$$\rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (\chi = \text{suscettività magnetica})$$

Ferromagneti \rightarrow dolci (ciclo di isteresi molto stretto, dipendenza di B dalla storia del materiale è ridotta, M bassa) e duri (ciclo di isteresi molto ampio, M elevato)

Superconduttori \rightarrow diamagneti perfetti $\rightarrow \chi_m = -1, \kappa_m = 0$

Se sottoposti a \vec{B} , generano al loro interno correnti di schermo \rightarrow si crea all'interno un campo magnetico uguale ed opposto $\rightarrow \vec{B}_{TOT} = 0$ all'interno
 All'esterno invece rimane \vec{B} uguale a quello già presente \rightarrow effetto MEISSNER
 Sono utilizzati come schermi magnetici

Discontinuità nell'attraversamento di superfici



①

\vec{B} subisce una discontinuità nella componente tg (componente \perp si conserva)

$J_{o,m} \neq 0$

$$B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 J_{o,m}$$

Per sistemi $\rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$ ($\vec{B} \parallel \vec{H}$)

②

Consideriamo un percorso di integrazione rettangolare $\rightarrow dl_2, dl_4 \ll dl_1, dl_3$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_1 \cdot dl_1 + \vec{H}_2 \cdot dl_2 + \vec{H}_3 \cdot dl_3 + \vec{H}_4 \cdot dl_4 = H_1 dl - H_3 dl$$

$$= H_{1t} - H_{3t} \rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{NON CI SONO CORRENTI DI CORRENTE})$$

$\rightarrow H_{1t} = H_{3t} \rightarrow$ componente tg di H si conserva

Tornando alla relazione precedente $\rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_0 \mu_{m1}} = \frac{B_{2t}}{\mu_0 \mu_{m2}} \rightarrow \frac{B_{1t}}{\mu_{m1}} = \frac{B_{2t}}{\mu_{m2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{B_{1t}}{\mu_{m1}} = \frac{B_{2t}}{\mu_{m2}} \\ B_1 \sin \theta_1 = B_2 \sin \theta_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{B_1 \sin \theta_1}{\mu_{m1}} = \frac{B_2 \sin \theta_2}{\mu_{m2}} \\ B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

$\rightarrow \frac{\mu_{m1} \sin \theta_1}{\mu_{m2} \sin \theta_2} = 1 \rightarrow$ legge della rifrazione delle linee di campo di \vec{B}

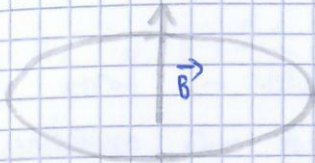
$\rightarrow \frac{\mu_{m1} \sin \theta_1}{\mu_{m2} \sin \theta_2} = 1 \rightarrow$ se $\mu_{m1} > \mu_{m2}$ allora $\theta_1 > \theta_2$

In forma locale $\rightarrow \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{u}_N d\Sigma = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_N d\Sigma$

$$\int_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{u}_N d\Sigma = - \int_{\Sigma} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{u}_N d\Sigma \rightarrow \int_{\Sigma} \left(\text{rot } \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} \right) \cdot \vec{u}_N d\Sigma = 0$$

$\rightarrow \text{rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \rightarrow$ legge di Faraday in forma locale

Il segno meno indica che campo elettrico indotto, fem indotta e corrente indotta si vanno ad opporre al fenomeno che li ha generati \rightarrow legge di LENZ



Considerando una spira immersa in \vec{B} , se si aumenta \vec{B} varia $\phi(\vec{B})$

$$\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} > 0$$

La corrente indotta deve essere tale da creare un campo \vec{B}' opposto a \vec{B} anch'esso conservato alla spira \rightarrow viene attenuata la variazione di flusso di \vec{B} , si contrasta l'aumento \rightarrow anche E_i e I_i hanno questa caratteristica

Se invece si diminuisce \vec{B} , si ha una variazione negativa di $\phi(\vec{B}) \rightarrow$ corrente indotta in modo tale da generare un campo \vec{B}' concorde a $\vec{B} \rightarrow$ si contrasta la diminuzione di $\phi(\vec{B})$

Corrente indotta \rightarrow si genera solo se il circuito è chiuso

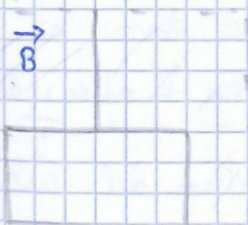
Legge di Faraday

Per calcolare la carica totale che scorre in un circuito chiuso da corrente indotta:

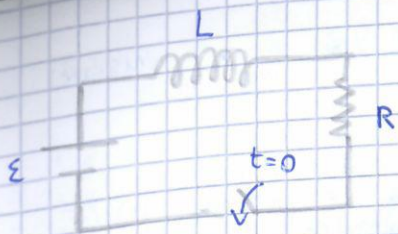
$$q = \int_0^t i_i dt = \int_{\phi_f(\vec{B})}^{\phi_i(\vec{B})} - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = \frac{1}{R} [\phi_i(\vec{B}) - \phi_f(\vec{B})]$$

Carica totale dovuta all'induzione elettromagnetica \rightarrow NON dipende da come è variato il flusso ma solo dalla situazione finale e iniziale

Correnti di Foucault (correnti parassite)



Lamina metallica immersa in \vec{B} uniforme \rightarrow la lamina inizia ad oscillare \rightarrow quando oscilla nella zona esterna all'area in cui è presente \vec{B} si ha una variazione di $\phi(\vec{B})$



$t < 0 \rightarrow i = 0$ (interruttore aperto)
 $t = 0 \rightarrow$ si chiude l'interruttore \rightarrow
 circola corrente e si genera un autoflusso
 \rightarrow corrente indotta

$$\varepsilon + \varepsilon_i = Ri \rightarrow \varepsilon_i = - \frac{d\phi(B)}{dt} \quad \text{fem autoindotta} \rightarrow \varepsilon_i = - \frac{d(Li)}{dt}$$

$$\rightarrow \varepsilon_i = -L \frac{di}{dt} \rightarrow \varepsilon + \left(-L \frac{di}{dt}\right) = Ri$$

$$\varepsilon - Ri = L \frac{di}{dt} \rightarrow \int_0^t \frac{dt}{L} = \int_0^i \frac{di}{\varepsilon - Ri} \rightarrow \frac{t}{L} = \left[-\frac{1}{R} \ln(\varepsilon - Ri) \right]_0^i$$

$$\frac{t}{L} = -\frac{1}{R} \ln \frac{(\varepsilon - Ri)}{\varepsilon} \rightarrow \text{passo agli esponenziali}$$

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \rightarrow \text{la corrente è nulla per } t=0, \text{ mentre}$$

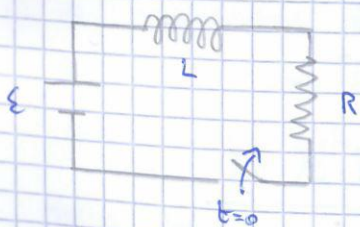
per $t \rightarrow +\infty$ tende al valore asintotico $\frac{\varepsilon}{R}$

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = i_{\infty} + i_L \rightarrow \text{somma di un termine dovuto al}$$

generatore e di un termine detto di EXTRA corrente di chiusura dovuto al fenomeno dell'autoinduzione (negativo perché si oppone alla variazione di flusso)

Si definisce $\tau = \frac{L}{R} \rightarrow$ tempo caratteristico del circuito \rightarrow per $t = \tau$ la
 corrente vale $\frac{2}{3}$ del valore massimo \rightarrow per $t \geq 3\tau$ il transitorio si
 considera esaurito

Considerando la situazione opposta \rightarrow si apre l'interruttore a $t=0$



$$i(t=0) = \frac{\varepsilon}{R} \rightarrow \varepsilon_L = iR'$$

$$-L \frac{di}{dt} = R'i \rightarrow \text{poiché } \varepsilon = 0$$

R' indica che la corrente per fluire nel circuito
 deve "lavorare" al induttore $\rightarrow R' > R$

Infatti la corrente deve superare un circuito aperto

$$\int_{i_{\infty}}^i \frac{di}{i} = -\frac{R'}{L} \int_0^t dt \rightarrow \ln\left(\frac{i}{i_{\infty}}\right) = -\frac{R'}{L}t$$

$$\rightarrow i = i_{\infty} e^{-\frac{R'}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{R'}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \tau = \frac{L}{R'}$$

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \leq \rho = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot \text{Vol} \rightarrow U_m = \frac{dU_m}{d\text{Vol}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

U_m = densità di energia magnetica per unità di volume

Se B non è uniforme $\rightarrow U_m = \int \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\text{Vol} = \int U_m(x, y, z) d\text{Vol}$

Nel vuoto $\rightarrow B = \mu_0 H \rightarrow U_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} BH$

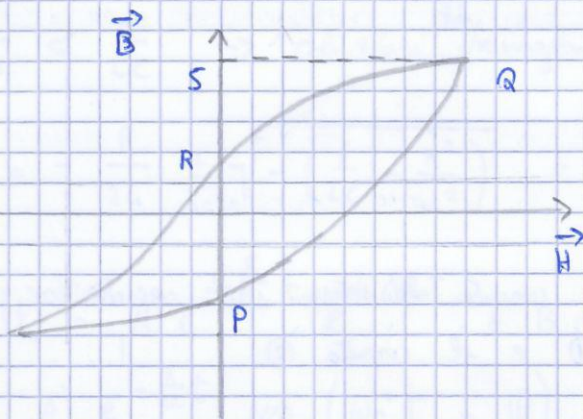
Nei materiali invece può essere funzione di $H \rightarrow \mu(H)$

$$U_m = \frac{1}{2} \mu(H) H^2 \rightarrow dU_m = \mu(H) H dH = H dB$$

Nei materiali diamagnetici - paramagnetici $\rightarrow \mu = \text{cost} \rightarrow B = \mu H$

$$dU_m = \frac{B dB}{\mu} = \mu H dH \rightarrow U_m = \int_0^B \frac{B dB}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

\rightarrow si utilizza quindi la permeabilità magnetica relativa



Nei materiali ferromagnetici invece:

$$U_m = \int_P^Q H dB = \text{area PQS} > 0$$

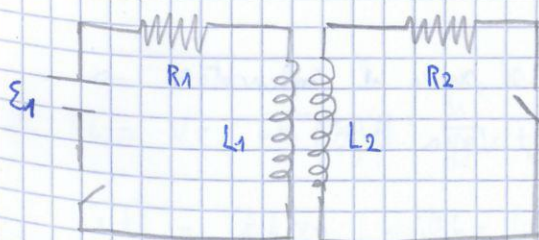
Bisogna spendere questa energia per magnetizzare il materiale. Per smagnetizzarlo invece

$$U_m = \int_Q^R H dB = \text{area RQS} < 0$$

Energia spesa per magnetizzare > energia spesa per smagnetizzare \rightarrow la sostanza ha trattenuto al suo interno energia (necessaria per spostare le pareti di Bloch \rightarrow bisogna vincere l'attrito) \rightarrow non viene restituita tutta l'energia spesa per magnetizzare il materiale, una parte viene trattenuta.

Area del ciclo di isteresi \rightarrow lavoro spesa per unità di volume per far descrivere alla sostanza un ciclo completo.

Mutua Induzione



Induttori accoppiati \rightarrow calcolo il flusso di \vec{B} concatenato a ciascun circuito

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = ?$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

$$i = i_0 e^{kt} \rightarrow i_0 L k^2 e^{kt} + R k i_0 e^{kt} + \frac{i_0}{C} e^{kt} = 0$$

$$L k^2 + R k + \frac{1}{C} = 0 \rightarrow k = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Si verificano 3 casi:

① $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \rightarrow i(t) = A e^{k_1 t} + B e^{k_2 t}$ (k_1 e k_2 sono le 2 soluzioni)

Determino A e B attraverso le condizioni iniziali

$i(t)$ è somma di esponenziali negativi \rightarrow smorzamento forte

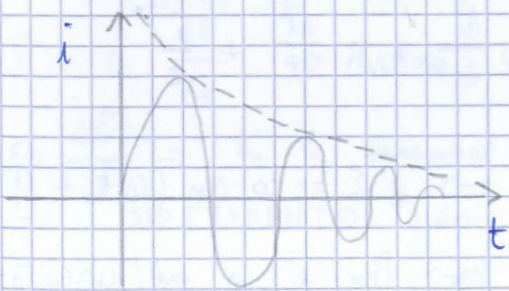
② $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \rightarrow i(t) = A e^{kt} + B t e^{kt}$ ($k_1 = k_2 = -\frac{R}{2L} = k$)

$\rightarrow i(t)$ è sempre somma di esponenziali negativi \rightarrow smorzamento critico (più lento del precedente)

③ $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \rightarrow$ soluzioni immaginarie

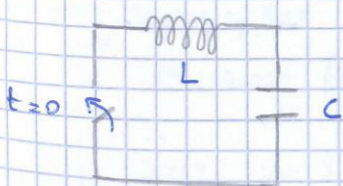
$$k = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{-\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{R}{2L} + i \omega_0' \\ -\frac{R}{2L} - i \omega_0' \end{array} \right. \left(\omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \right)$$

$$i(t) = A e^{-\frac{R}{2L} t} e^{i \omega_0' t} + B e^{-\frac{R}{2L} t} e^{-i \omega_0' t} = A' e^{-\frac{R}{2L} t} \sin(\omega_0' t + \varphi)$$



Smorzamento debole \rightarrow il grafico è l'inviluppo di una sinusoidale sul grafico dell'esponenziale \rightarrow OSCILLAZIONE ARMONICA

Circuito LC \rightarrow circuito oscillante



$$i(t=0) = 0$$

$$V_C(t=0) = V_0 \rightarrow q_0 = V_0 \cdot C$$

$$\mathcal{E}_L = V_C \rightarrow L \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$i(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow \text{oscillazione armonica}$$

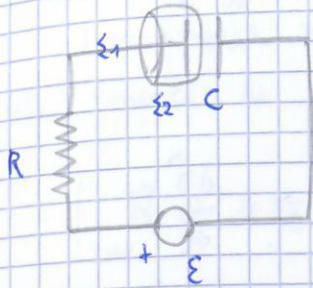
Attraverso le condizioni iniziali $\rightarrow \varphi' = 0, A = -q_0 \omega_0$ (esempio $q_0 = |i| dt$)

REGIME NON STAZIONARIO

Legge di Ampere $\rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \rightarrow$ applichiamo l'operatore divergenza:

$$\text{div} \cdot \text{rot } \vec{B} = 0 \rightarrow \text{div } \mu_0 \vec{j} = 0 \rightarrow \mu_0 \text{div } \vec{j} = 0 \quad \left(\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

La legge di Ampere Non vale \rightarrow vale solo in regime STAZIONARIO



Consideriamo un circuito RC

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon \rightarrow \text{chiusa}$$

$$\text{In regime stazionario} \rightarrow \text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

\rightarrow eq. continuità della corrente elettrica

$$\int_{\varepsilon_1} \vec{j} \cdot \vec{v}_N d\varepsilon + \int_{\varepsilon_2} \vec{j} \cdot \vec{v}_N d\varepsilon = i + 0 = i \neq 0$$

$\int_{\varepsilon} \vec{j} \cdot \vec{v}_N d\varepsilon \rightarrow$ su una superficie chiusa deve essere = 0 se in regime stazionario \rightarrow c'è un conflitto tra i 2 risultati

$$\text{Legge di Gauss (break)} \rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \rightarrow \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div } \vec{j} \right) \rightarrow \text{sostituisco}$$

$$\text{div } \vec{j} = -\text{div} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \rightarrow \text{div} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \text{vettore SEMPRE solenoidale} \rightarrow \vec{j}_{\text{TOT}}$$

$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ha le dimensioni di una densità di corrente \rightarrow densità di corrente di SPOSTAMENTO (non ha niente a che fare tuttavia con le correnti di conduzione)

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \rightarrow \text{legge di AMPERE - MAXWELL}$$

In regime NON stazionario le sorgenti di \vec{B} sono sia le correnti di conduzione sia le variazioni temporali di \vec{E}

$$\int_{\varepsilon} \vec{j}_{\text{TOT}} \cdot \vec{v}_N d\varepsilon = \int_{\varepsilon_1} \vec{j}_{\text{TOT}} \cdot \vec{v}_N d\varepsilon + \int_{\varepsilon_2} \vec{j}_{\text{TOT}} \cdot \vec{v}_N d\varepsilon =$$

$$= \int_{\varepsilon_1} \vec{j}_{\text{TOT}} \cdot \vec{v}_N d\varepsilon + \int_{\varepsilon_2} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{v}_N d\varepsilon = i + \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t} = i + i_D$$

In presenza di corrente di conduzione \rightarrow se \vec{E} varia lentamente $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ è trascurabile

Non è più possibile separare \vec{B} e $\vec{E} \rightarrow$ una variabile temporale di uno genera l'altro, sono strettamente collegati \rightarrow campo ELETTROMAGNETICO

Se \vec{B} è generato da $\frac{d\vec{I}}{dt} \rightarrow$ le sue linee di forza giacciono su piani \perp alla direzione di \vec{I} (e alle sue linee di forza) e concatenano le linee di forza di \vec{E}

All'interno della materia \rightarrow bisogna tener conto delle cariche di polarizzazione e delle correnti di magnetizzazione (senza farle comparire esplicitamente)

$$1) \int_{\Sigma_{ch}} \vec{D} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = q \rightarrow \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$2) \int_{\Sigma_{ch}} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0 \rightarrow \text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \text{resta invariata}$$

$$3) \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt} \rightarrow \text{rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \rightarrow \text{resta invariata}$$

$$4) \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i + \frac{d\phi(\vec{D})}{dt} \rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

Tuttavia \vec{D} e \vec{H} non sono grandezze fisiche misurabili \rightarrow bisogna esprimere le relazioni tra \vec{D} ed \vec{E} e tra \vec{B} e $\vec{H} \rightarrow$ consideriamo materiali isotropi

$$5) \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$6) \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \rightarrow \text{nei materiali ferromagnetici } \mu = \mu(H)$$

Sia nel vuoto sia nella materia \rightarrow le equazioni sono lineari nell'incognita \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , $\vec{H} \rightarrow$ vale SEMPRE il principio di sovrapposizione

Inoltre le equazioni sono relativisticamente INVARIANTI \rightarrow mantengono inalterata la loro forma nel passaggio fra sistemi di riferimento inerziali (utilizzando le leggi di trasformazione galileiana / di Lorentz)

La forza subita da una carica elettrica viene ridotta ad un'unica forza

$$\vec{F}_L = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow \text{forza di LORENTZ} \rightarrow \text{connessione tra l'elettromagnetismo e la meccanica}$$

Perciò possiamo definire la densità di energia elettromagnetica U

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \rightarrow \text{per unità di volume}$$

$$4) \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu \epsilon \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu \epsilon \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu \epsilon \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases}$$

\vec{B} ed \vec{E} sono costanti rispetto a y e $z \rightarrow$ possono annullare (3) e (4)

$$1) \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \rightarrow B_x = \text{cost} = 0$$

$$2) \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \rightarrow B_x = \text{cost} = 0$$

$$3) \begin{cases} \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \rightarrow \text{se } \vec{E} = E_z \hat{z} \rightarrow \begin{cases} E_y = 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \rightarrow B_z = \text{cost} = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu \epsilon \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu \epsilon \frac{\partial v_x}{\partial t} \end{cases} \rightarrow \text{considera la prima di (3) e l'ultima di (4)}$$

- \vec{E} e \vec{B} sono costanti e oscillano sempre \perp alla direzione di propagazione
 \rightarrow onde elettromagnetiche sono **TRANSVERSALI**
- In un'onda elettromagnetica \vec{B} ed \vec{E} sono sempre \perp tra loro
 $\vec{B} \cdot \vec{E} = 0$

$$\textcircled{A} \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\textcircled{B} \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \rightarrow \mu \epsilon = \mu_0 \epsilon_0 \mu_m \cdot \mu = \frac{\mu_m \cdot \mu}{c^2} \rightarrow c^2 = \frac{\mu_m \cdot \mu}{\mu \epsilon}$$

$$\text{Da cui } \mu \epsilon = \frac{1}{v^2} \rightarrow v \text{ è la velocità dell'onda nel mezzo}$$

$$v^2 = \frac{c^2}{\mu_m \cdot \mu} \rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\mu_m \cdot \mu}} \rightarrow \sqrt{\mu_m \cdot \mu} = \text{indice di rifrazione}$$

$$\text{Solitamente } \mu_m \approx 1 \rightarrow \sqrt{\mu_m \cdot \mu} \approx \sqrt{\mu} = n$$

$\xi = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ \rightarrow \vec{r} è la posizione del punto dove calcoliamo l'onda

$\xi = \xi_0 \sin(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z - \omega t)$ \rightarrow espressione più generale

Fronte d'onda \rightarrow superficie su cui l'onda elettromagnetica ha fase costante \rightarrow
per un'onda piana \forall superficie \perp alla direzione di propagazione è un fronte d'onda

Raggio = retta \perp al fronte d'onda in un certo punto che indica qual è la direzione di propagazione dell'onda in tale punto \rightarrow nelle onde piane il raggio è \parallel alla direzione di propagazione

Non tutte le onde armoniche sono piane

Consideriamo una sorgente puntiforme immersa in un mezzo omogeneo ed isotropo
 \rightarrow onda si propaga in tutte le direzioni in modo uguale \rightarrow il fronte d'onda sarà quindi SFERICO, il raggio è il raggio della sfera

$\xi = \xi_0 \sin(kr - \omega t)$ \rightarrow ξ_0 può NON essere più costante

$\xi = \frac{A}{r} \sin(kr - \omega t)$ \rightarrow ampiezza dell'onda decresce alquanto dalla sorgente

Se r è molto grande \rightarrow si approssima il fronte d'onda con il piano tg alla superficie sferica (perché siamo a grande distanza) \rightarrow si approssima l'onda sferica con l'onda piana

Onda armonica \rightarrow non esiste nella realtà \rightarrow dovrebbe avere lunghezza e durata infinite \rightarrow \forall onda elettromagnetica può essere descritta ad una somma o ad un integrale di onde armoniche \rightarrow teorema di FOURIER

$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \sin m\omega t + b_m \cos m\omega t)$ \rightarrow periodica

$g(t) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \sin \omega t + b(\omega) \cos \omega t) d\omega$ \rightarrow NON periodica



Pacchetto d'onde \rightarrow onda reale può sempre essere vista come combinazione di onde armoniche \rightarrow durata e lunghezza finite

$$\Delta x \cdot \Delta k > 2\pi, \quad \Delta t \cdot \Delta f \geq 1$$

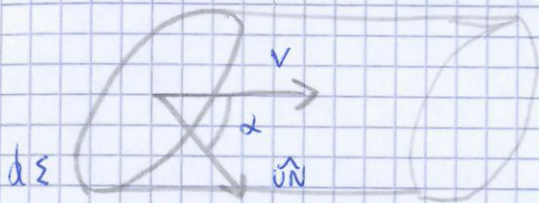
Piano di polarizzazione \rightarrow piano identificato dalla direzione di oscillazione di \vec{E} e dalla direzione di propagazione dell'onda

Direzione di polarizzazione \rightarrow direzione di oscillazione di \vec{E}

Polarizzazione ELLITTICA \rightarrow direzione di \vec{E} non è costante, ma ruota attorno alla direzione di propagazione (che è quindi l'asse di rotazione) \rightarrow polarizzazione è CIRCOLARE se il mezzo è isotropo, altrimenti è ellittica

Energia delle onde elettromagnetiche

$$U = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad | \quad \vec{E} = B \vec{v} \rightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{E^2}{v^2 \mu} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \epsilon E^2$$
$$\rightarrow U = \epsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}$$



Come si propaga questa energia?

$$dU = U \cdot dS \cdot \text{vel} \cdot \cos \alpha = \epsilon E^2 v dS dt \cos \alpha$$

$$dP = \frac{dU}{dt} = \epsilon E^2 v dS \cos \alpha \rightarrow \text{introduciamo un nuovo vettore}$$

$$\vec{S} = \text{vettore di Poynting} = \epsilon E^2 \vec{v} \rightarrow dP = S dS \cdot \cos \alpha = \vec{S} \cdot \hat{n} dS$$

$$P = \oint (\vec{S}) = \int_S \vec{S} \cdot \hat{n} dS$$

$|\vec{S}| = P$ trasportata da un'onda elettromagnetica porta \perp alla direzione di propagazione per unità di superficie (energia per unità di tempo)

$$\text{Inoltre} \rightarrow \vec{S} = \epsilon E^2 \vec{v} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \rightarrow [S] = \frac{W}{m^2} = \frac{J}{m^2 \cdot s}$$

$$\text{Se l'onda è armonica} \rightarrow \vec{S} = \epsilon E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \cdot \vec{v}$$

Spesso si considera la potenza media per un'onda armonica \rightarrow varia rapidamente

$$\text{Intensità dell'onda elettromagnetica} \rightarrow \mathcal{J} = \frac{1}{t} \int_0^t S dt = \frac{1}{t} \int_0^t \epsilon E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) v dt$$

\rightarrow potenza media (valore medio della potenza) per un'onda armonica

$$\text{In particolare} \rightarrow \mathcal{J} = \frac{1}{t} \epsilon v - \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 v \cdot t = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 v \rightarrow \text{solo per le onde armoniche}$$

$$\mathcal{J} \text{ decresce nell'avanzamento dell'onda} \rightarrow \mathcal{J} = \mathcal{J}_0 e^{-\beta x} \quad (\beta = \text{fattore di assorbimento})$$

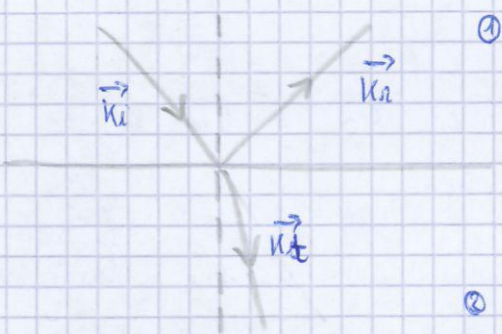
Teorema di Kirchhoff

La perturbazione generata da un sistema di sorgenti in un punto P si può conoscere anche se non è nota la distribuzione delle sorgenti, se data una superficie chiusa che separa lo spazio in cui si trovano le sorgenti del punto P, sia nota in ogni punto della superficie il valore dell'onda e della sua derivata normale

Ogni fronte d'onda (ogni suo punto) è sorgente di un'onda sferica secondaria \rightarrow la sua ampiezza è proporzionale all'ampiezza dell'onda primaria, alla superficie che ha generato l'onda secondaria e all'angolo tra la direzione di propag. dell'onda secondaria e la normale al fronte d'onda tramite il fattore $f(\theta)$ ($\rightarrow f(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2}$)

A partire da questo principio si possono spiegare i fenomeni di rifrazione, riflessione, interferenza

Rifrazione - Riflessione



Quando un'onda incontra una superficie di separazione tra 2 mezzi \rightarrow una parte viene trasmessa (rifratta), una parte viene riflessa

$$\xi_i = \xi_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \rightarrow \text{onda incidente}$$

$$\xi_r = \xi_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t) \rightarrow \text{onda riflessa}$$

$$\xi_t = \xi_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t) \rightarrow \text{onda rifratta}$$

Nel punto di incidenza \rightarrow la fase delle 3 onde DEVE essere uguale

$$\rightarrow \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} \rightarrow \forall \text{ sistema di riferimento}$$



$$\vec{k}_i = k_{iy} \hat{y} + k_{iz} \hat{z}, \quad \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

$$k_{iy} \cdot y = k_{rx} \cdot x + k_{ry} \cdot y = k_{rx} \cdot x + k_{ry} \cdot y$$

$$\rightarrow k_{rx} = k_{tx} = 0 \quad (k_i \text{ non ha componente } x)$$

• $\text{MAX} \Leftrightarrow \delta = 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$

$\rightarrow I = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \rightarrow$ interferenza COSTRUTTIVA

• $I_1 = I_2 \rightarrow I = 4I_1$

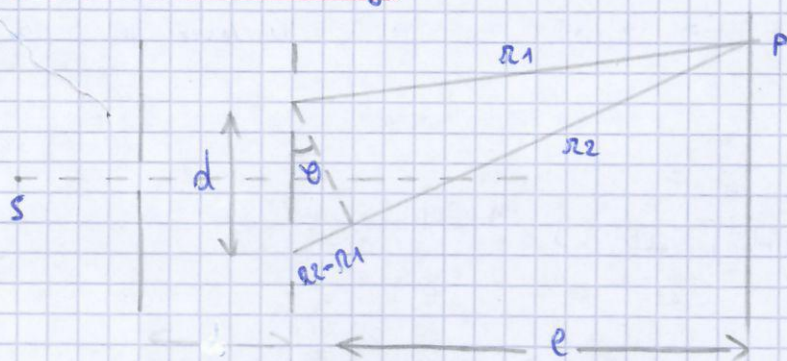
• $\text{MIN} \Leftrightarrow \delta = (2m+1)\pi \rightarrow I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

$\rightarrow I = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \rightarrow$ interferenza DISTRUTTIVA

• $I_1 = I_2 \rightarrow I = 0$

Il fenomeno dell'interferenza è UNICO \rightarrow distruttiva o costruttiva al variare delle
valore dell'angolo δ

Sperimento di Young



$d \leq l$
In corrispondenza delle 2 fenditure si
sorgono onde coerenti \rightarrow fronti
d'onda della sorgente emettono onde
secondarie coerenti

Fenditure sono simmetriche rispetto all'asse \rightarrow onde secondarie hanno la stessa
velocità \rightarrow sorgenti COERENTI e SINCRONE $\rightarrow \delta$ è data soltanto dalla
differenza dei cammini

$\delta = r_2 - r_1 = k_2 \cdot r_2 - k_1 \cdot r_1 = k(r_2 - r_1) \rightarrow$ onde si propagano nello
stesso mezzo $\rightarrow k_2 = k_1 = k$

r_2 è arco // a $r_1 \rightarrow r_2 - r_1 = d \sin \theta \rightarrow \delta = kd \sin \theta$

$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \rightarrow I_1 = I_2$ per la simmetria del sistema

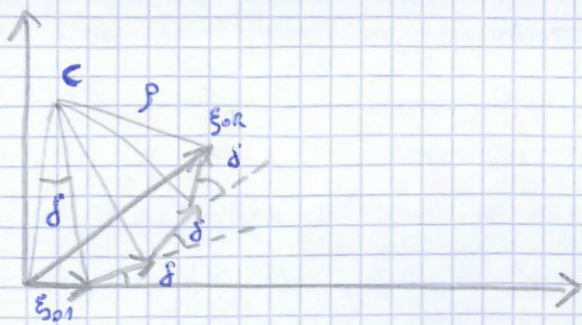
Interferenza costruttiva $\rightarrow I = 4I_1 \rightarrow \delta = 2m\pi$

$\rightarrow \delta = kd \sin \theta = 2m\pi \rightarrow \sin \theta = \frac{2m\pi}{kd} = \frac{m\lambda}{d} \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$

$\rightarrow d \sin \theta = m\lambda \rightarrow r_2 - r_1 = m\lambda \rightarrow$ si ha interferenza costruttiva
quando la differenza dei cammini delle 2 onde è un multiplo intero di λ

Interferenza distruttiva $\rightarrow \sin \theta = (2m+1) \frac{\lambda}{2d}$

$\rightarrow d \sin \theta = \frac{2m+1}{2} \lambda \rightarrow r_2 - r_1 = \frac{2m+1}{2} \lambda \rightarrow$ n° dispari di $\frac{\lambda}{2}$



Oscuna onda è spostata rispetto alla precedente di un angolo pari a δ
 Queste onde formano una poligonale \rightarrow circoscritta da una circonferenza di centro C e raggio p

I triangoli sono tutti isosceli e uguali tra loro \rightarrow l'angolo al vertice è uguale a δ (somma degli angoli esterni \rightarrow angoli alla base tutti uguali)

$$\xi_{01} = 2p \sin\left(\frac{1}{2}\delta\right) \rightarrow \frac{\xi_{02}}{\xi_{01}} = \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \rightarrow \xi_{02}^2 = \xi_{01}^2 \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}\right)^2$$

$$\xi_{02} = \xi_{01} \sin \frac{N\delta}{2}$$

$$\rightarrow I = I_1 \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}\right)^2 = I_1 \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{\lambda} \frac{\lambda}{2} d \sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{2} d \sin\theta\right)}\right)^2 =$$

$$= I_1 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\pi}{\lambda} d \sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta\right)}\right)^2 \rightarrow \text{si verifica interferenza}$$

• Massimi $\rightarrow \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta = m\pi \rightarrow \sin\theta = \frac{m\lambda}{d}, m = 0, \pm 1, \pm 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Nx}{\sin x} = N \rightarrow I = I_1 \cdot N^2$$

• Minimi $\rightarrow \frac{N\pi}{\lambda} d \sin\theta = m'\pi \rightarrow m' = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), \dots$

Devo contare i valori di m' per cui si annulla anche il denominatore \rightarrow
 $m' \neq 0, m' \neq \pm N$

$$\sin\theta = \frac{m'\lambda}{Nd}$$

Altri massimi $\rightarrow \frac{\pi Nd \sin\theta}{\lambda} = (2m''+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\theta = (2m''+1)\frac{\lambda}{2dN}$

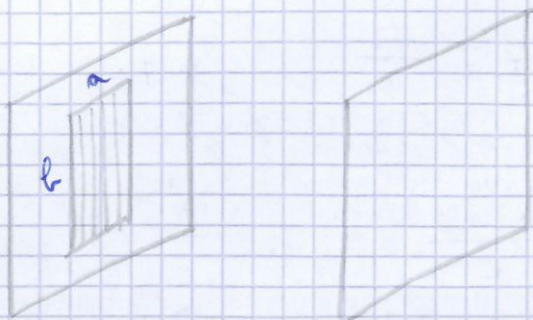
$m'' = 0, 1, 2, \dots, (N-2), (N-1), \dots \rightarrow$ massimi secondari (hanno valore minore rispetto ai massimi calcolati prima \rightarrow sono quelli PRINCIPALI)

Tra 2 massimi principali vi sono $(N-1)$ minimi e $(N-2)$ massimi secondari \rightarrow
 se N è molto elevato i minimi secondari sono molto ridotti, mentre i principali sono molto intesi $\rightarrow I = I_1/N^2$ per i massimi secondari

Sia il fronte d'onda primario sia quello secondario σ piano

Diffrazione di FRESNEL \rightarrow distanza tra sorgente e fenditura \neq qualsiasi
 \rightarrow fronte d'onda primario e secondario non sono necessariamente piano

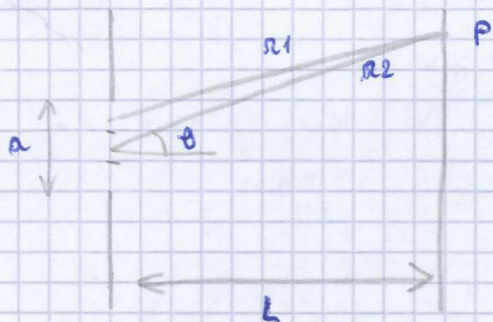
Studiamo la diffrazione di Fraunhofer con una fenditura rettilinea



$$dE = \frac{A d\varepsilon f(\theta)}{r}$$

Amplitude dell'onda sferica decresce con la distanza, $f(\theta)$ diventa significativo con $\theta > 30^\circ$

Tutte le onde secondarie hanno stessa fase \rightarrow fronte d'onda che colpisce la fenditura \hat{e} coplanare alla stessa



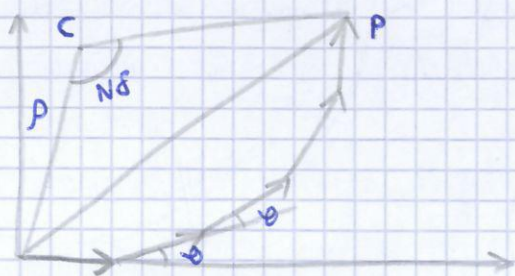
Suddividiamo la fenditura in parti infinitesime

$$r_1 \approx \text{parallelo a } r_2 \rightarrow a \ll L$$

$$r_2 - r_1 = dy \sin \theta$$

dy = distanza tra le fenditure

$$K(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} dy \sin \theta = \delta \rightarrow \text{differenza di fase}$$



Metodo dei fasori \rightarrow usum phasore e spostato di δ rispetto al precedente

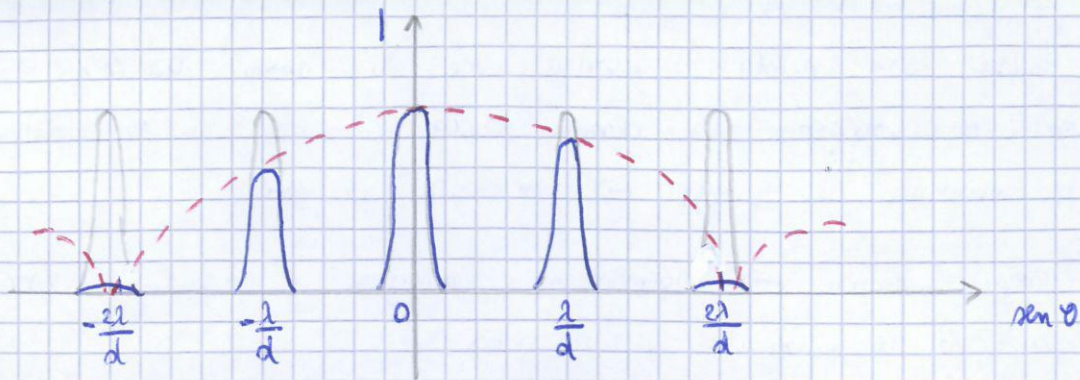
$$E_R = 2p \sin \frac{N\delta}{2}$$

Amplitude massima \rightarrow consideriamo la poligonale circoscritta alla circonferenza che la circoscrive (vettori sono tutti in FASE)

$$E_{\max} = p \cdot N\delta \rightarrow \frac{E_R}{E_{\max}} = \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\frac{N\delta}{2}} \rightarrow I_R = I_{\max} \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\frac{N\delta}{2}} \right)^2$$

Se θ \hat{e} elevato devo considerare $f(\theta) = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}$

$$I = I_{\max} \left(\frac{\sin \left(\frac{N}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} dy \sin \theta \right)}{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{dy \sin \theta}{2}} \right)^2 = I_{\max} \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right)}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$



Massimi dovuti all'interferenza sono modulati dalla diffrazione

Quando il massimo di interferenza coincide con il minimo di diffrazione \rightarrow viene abolito

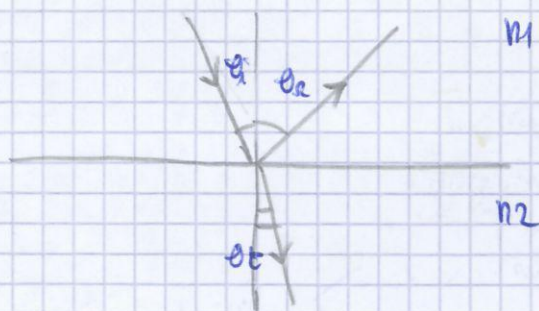
Potere risolutivo \rightarrow picchi di intensità sono appena risolti se considerando \rightarrow onde generate da N sorgenti, il massimo dell'onda di lunghezza λ_1 coincide con il minimo dell'onda con λ_2

$$R = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} = \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} \right)^{-1} = mN \rightarrow m \text{ è il numero di ordine del}$$

massimo, N il numero di fenditure, $R =$ potere risolutivo

Optica geometrica

Propagazione rettilinea della luce \rightarrow Valgono le leggi della riflessione e della rifrazione



$$\theta_i = \theta_r$$

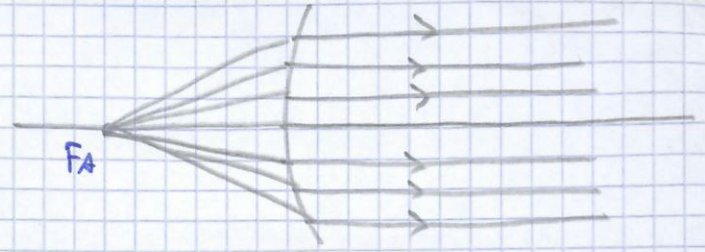
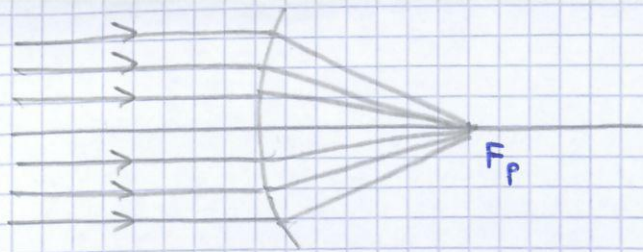
$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

$$n_1 = \frac{c}{v_1}, \quad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

Strumento ottico \rightarrow permette di ottenere un'immagine a partire da un oggetto
 Oggetto e immagine \rightarrow sono costituiti da punti CONIUGATI rispetto ad un sistema ottico \rightarrow dato l'uno si ottiene l'altro

Strumento STIGMATICO \rightarrow un punto dell'oggetto corrisponde a un punto dell'immagine

Strumento ASTIGMATICO \rightarrow da un oggetto puntiforme ottengo un'immagine NON puntiforme \rightarrow da un punto dell'oggetto ottengo più punti dell'immagine \rightarrow si converge tramite assi PARASSIALI, ovvero solo raggi per cui l'angolo che formano con l'asse ottico (angoli di BASSA VERGENZA) è molto piccola \rightarrow è una approssimazione che permette di trascurare l'astigmatismo



EQUAZIONE del DIOTTRO $\rightarrow \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$

Posizione dei fuochi $\rightarrow p = \infty \rightarrow f_p = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$ ($q = \infty$ per f_A)

Oggetto a SX di fuoco e vertice \rightarrow immagine REALE }
 Oggetto tra fuoco e vertice \rightarrow immagine VIRTUALE } 0 nel 1° mezzo
 E l'oggetto è nel 2° mezzo \rightarrow oggetto VIRTUALE, immagine REALE

Nel caso del diottra concavo \rightarrow l'equazione e la costruzione delle immagini è ottenuta nello stesso modo \rightarrow immagine però è SEMPRE virtuale, qualunque sia la posizione dell'oggetto

EQUAZIONE degli SPECCHI $\rightarrow n_2 = -n_1 \rightarrow$ specchio sferico

$$\frac{n_1}{n} - \frac{n_1}{q} = \frac{-n_1 - n_1}{R} \rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

Fuoco $\rightarrow p = \infty \rightarrow f_2 = \frac{R}{2}$ (analogamente per $q = \infty$) \rightarrow fuochi coincidono e sono posti a metà del raggio di curvatura

Oggetto reale, immagine reale \rightarrow oggetto a distanza $>$ del fuoco (e del centro) \rightarrow immagine capovolta

Oggetto reale, immagine virtuale \rightarrow oggetto a distanza $<$ del fuoco \rightarrow immagine dritta

Invece per lo specchio convesso \rightarrow oggetto reale e immagine virtuale (dritta)

Specchio piano $\rightarrow C = \infty \rightarrow$ fuochi $\infty \rightarrow$ raggi paralleli all'asse ottico \rightarrow immagine virtuale e oggetto reale \rightarrow immagine a grandezza naturale \rightarrow strumento stigmatizzato

Lente \rightarrow insieme di 2 diottri