NUMERO: 1166 DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Dotta

MATERIA: Elettrotecnica

Prof. Canavero

FONDAMENTI

ELETTROTECNICA = applicazione dei fenomeni elettrici
lo scopo è di misurare e quantificare fenomeni in modo semplice usando grandezze diverse da quelle tradizionali della fisica per facilitare le applicazioni pratiche.

LA CARICA ELETTRICA E LE INTERAZIONI TRA CARICHE EL.

CARICA ELETTRICA

$$q \begin{cases} + & \text{cariche positive} \\ - & \text{cariche negative} \end{cases}$$

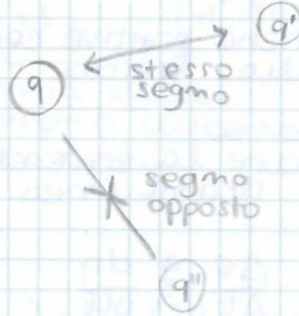
la carica associata ad un elettrone è una carica di tipo negativo ed ha un valore molto piccolo

L'unità di misura della carica elettrica è il coulòmb $[q] = C$

INTERAZIONE TRA CARICHE

Se ho una carica elettrica e gliene avvicino un'altra => interagiscono secondo la regola per cui:

- se sono dello stesso tipo si respingono
- se sono di tipo opposto si attraggono



Questa interazione avviene secondo la stessa legge che regola le interazioni nel campo gravitazionale e la formula della forza ha le stesse caratteristiche della formula della forza gravitazionale

$$F = K \frac{q q'}{d^2}$$

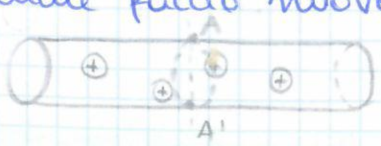
$q q'$ → due cariche che interagiscono
d^2 → quadrato della distanza tra le due cariche

le cariche elettriche non sono facilmente misurabili, allora cerco di misurare qualcos'altro che è collegato con le cariche e che è più facile da misurare.
Lo stesso vale per le interazioni tra cariche, che non sono facili da misurare, allora trovo altre grandezze collegate alle interazioni, ma più facili da misurare.

LA CORRENTE E LE INTERAZIONI TRA CORRENTI

CORRENTE

Prendo in considerazione un cilindretto di metallo all'interno del quale faccio muovere delle cariche positive.



oppure scelgo la carica e vedo in quanto tempo passa nella sezione

Consideriamo la sezione di tubo AA' e, stabilito un Δt arbitrario controlliamo quante cariche passano nella sezione in quel $\Delta t'$ andando in una certa direzione da me scelta
Il verso di scorrimento lo scelgo io arbitrariamente e lo segno

Imposto un Δt arbitrario e fisso per ogni tubo una sezione

- in AA' misuro $i_A = \dfrac{\Delta q_A}{\Delta t}$
- in BB' misuro $i_B = \dfrac{\Delta q_B}{\Delta t}$
- in CC' misuro $i_C = \dfrac{\Delta q_C}{\Delta t}$

Applico poi il principio di conservazione della carica per cui la quantita' di carica che entra dalla sezione AA' si deve conservare e uscire uguale divisa tra BB' e CC', dunque:

$\Delta q_A = \Delta q_B + \Delta q_C$

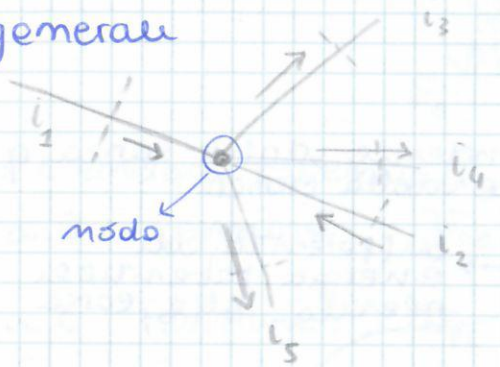
dividendo per Δt

$$\frac{\Delta q_A}{\Delta t} = \frac{\Delta q_B}{\Delta t} + \frac{\Delta q_C}{\Delta t} \Rightarrow i_A = i_B + i_C$$

LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI

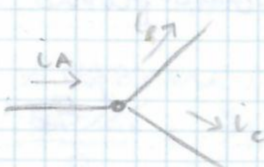
LKC (KCL)

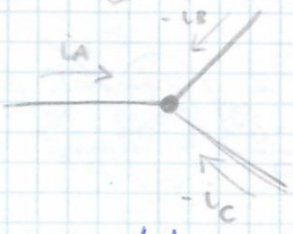
in generale



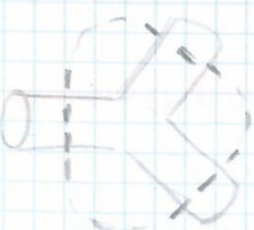
$$\underbrace{i_1 + i_2}_{\text{somma delle correnti entranti nel nodo}} = \underbrace{i_3 + i_4 + i_5}_{\text{somma delle correnti uscenti dal nodo}} \quad (1^{\wedge} \text{ formulaz KCL})$$

$i_A = i_B + i_C$, $i_A - i_B - i_C = 0$, $i_A + (-i_B) + (-i_C) = 0$ (2^ formulaz KCL)





*



se unisco le tracce delle sezioni dei tubi allora genero una superficie chiusa attorno al nodo

la superficie chiusa e' attraversata dalle corrente solo nelle parti dove ci sono i conduttori, allora se KCL per le tre correnti valeva sulle tre sezioni, vale anche per la superficie complessiva, perche' tanto la parte di superficie "aggiunta" non e' attraversata da cariche.

$\Downarrow$

KCl vale anche x surf chiusa.

- KCL I $\rightarrow \sum_n i_n = \sum_m i_m$ ← corr. uscenti
  ↑ corr. entranti
- KCL II $\rightarrow \sum_p i_p = 0$ → correnti solo entranti o solo

>0 se $\mathcal{E}_A > \mathcal{E}_B$

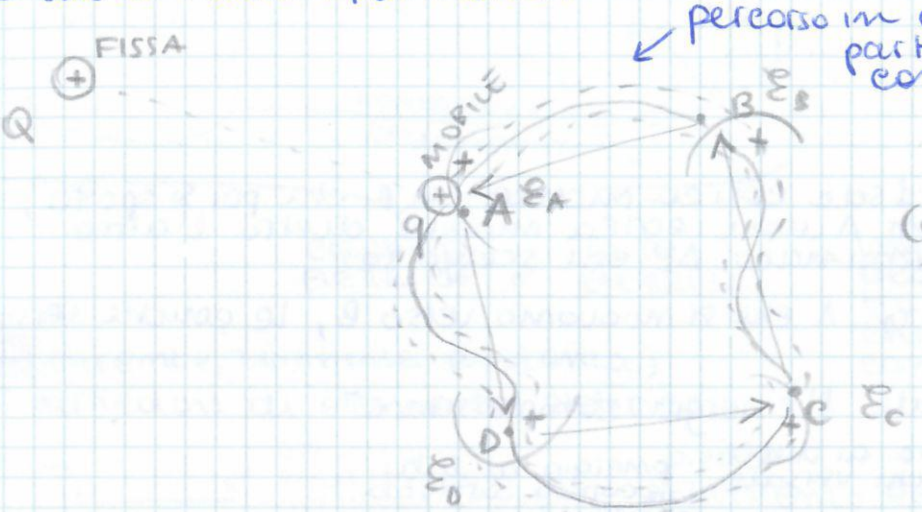
<0 se $\mathcal{E}_A < \mathcal{E}_B$

$=0$ se $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$)

$\ast$
LKT KVL I $\rightarrow$ $\Sigma_q v_q = 0$
LKT KVL II $\rightarrow$ $\Sigma_n v_n = \Sigma_m v_m$

base ad un altro esperimento:

percorso in cui punto di partenza coincide con punto di arrivo.



(o con le frecce o con il +)

misuro l'energia potenziale in $\neq$ punti; definisco la tensione:

da A a B tensione: $v_{AB} = \frac{\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B}{q}$

da B a C tensione: $v_{BC} = \frac{\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_C}{q}$

da C a D tensione: $v_{CD} = \frac{\mathcal{E}_C - \mathcal{E}_D}{q}$

da D a A tensione: $v_{DA} = \frac{\mathcal{E}_D - \mathcal{E}_A}{q}$

sommo le tensioni x ottenere quella totale

$$v_{AB} + v_{BC} + v_{CD} + v_{DA} = \frac{\mathcal{E}_A - \cancel{\mathcal{E}_B}}{q} + \frac{\cancel{\mathcal{E}_B} - \cancel{\mathcal{E}_C}}{q} + \frac{\mathcal{E}_C - \mathcal{E}_D}{q} + \frac{\mathcal{E}_D - \mathcal{E}_A}{q} = 0$$

$\Downarrow$

LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI: LKT (KVL)

Se muovo le cariche su un percorso chiuso (punto iniziale ≡ punto finale) e calcolo le tensioni per diversi punti del percorso, la somma delle tensioni parziali deve essere $= 0$.

$\Sigma_q v_q = 0$ → tensioni parziali prese in accordo con il senso di rotazione sul percorso chiuso

Se cambiassi punto di arrivo e di partenza:

$v_{BC} = \frac{\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_C}{q}$

$v_{CB} = \frac{\mathcal{E}_C - \mathcal{E}_B}{q} = -v_{BC}$

(se le tensioni non andassero tutte nello stesso verso

$v_{BC} = -v_{CB}$

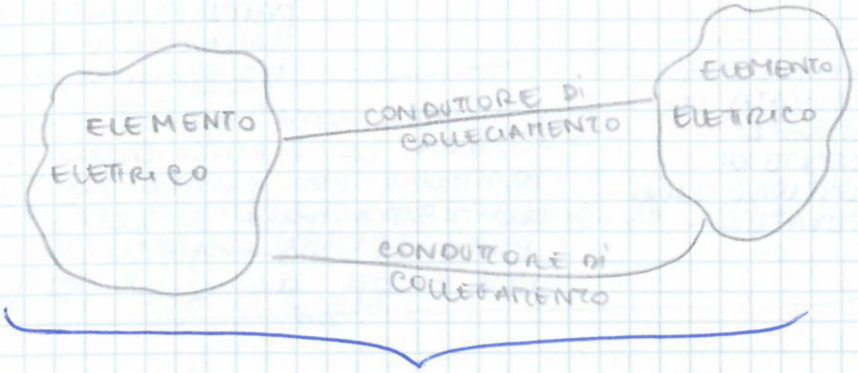
tensioni senso orario / tensioni senso antiorario

$\Rightarrow v_{AB} + (-v_{CB}) + v_{CD} + v_{DA} = 0 \Rightarrow 2°$ formula: $\Sigma_n v_n = \Sigma_m v_m$ $\ast$

ELEMENTI ELETTRICI E CONDUTTORI DI COLLEGAMENTO

Il volume da A a B è il volume in cui avviene la trasformazione di energia.
I volumi in cui avvengono le trasf di energia si chiamano ELEMENTI ELETTRICI

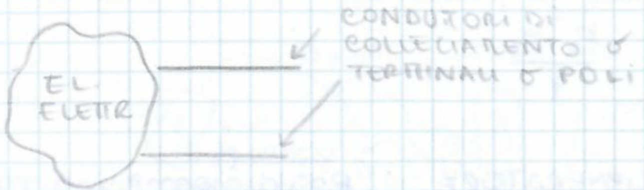
I CONDUTTORI DI COLLEGAMENTO (= cavi) li consideriamo come ideali (⇒ non conta la loro lunghezza)



CIRCUITO ELETTRICO o RETE ELETTRICA = insieme di elementi elettrici collegati tra loro (da conduttori che x semplicità consideriamo ideali)

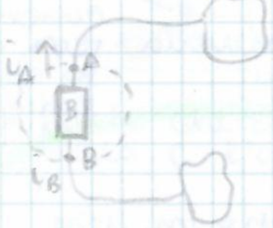
BIPÒLO (corrente, tensione e potenza)

Un caso particolare di elemento elettrico:



bipòlo = Elemento elettrico con due soli terminali o poli

Modo di indicare e rappresentare un bipòlo:



Quando terminale A è collegato ad altro elemento ⇒ ho corrente i_A sul terminale A e lo stesso vale per B in cui ho i_B

Ora applico la legge delle correnti (KCL)
considero sup. chiusa che racchiuda il bipolo B:

KCL : $\underset{\text{uscente}}{i_A} = \underset{\text{entrante}}{i_B}$

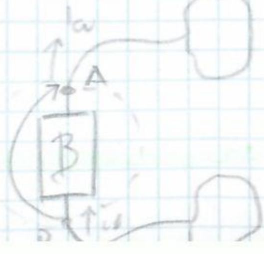
⇒ se ho un bipòlo la corrente che entra in un terminale è = alla corrente che esce!!!
Ogni bipòlo è attraversato da <u>una sola</u> corrente!

TRIPOLO

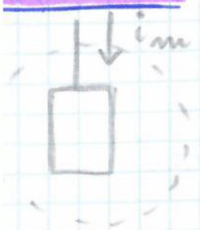
Se invece prendo questo:

Ho tre correnti, si devono sommare a zero, ma non posso dire nulla!

Posso definire la tensione B sul mio bipolo.
Il bipolo B è rappresentato da <u>una sola</u> tensione!



MONOPÒLO



Immaginiamo un elemento elettrico con un solo terminale

KCL: $\sum_m i_m = 0$ ma di corrente ce n'è una sola $\Rightarrow i_m = 0$!!!

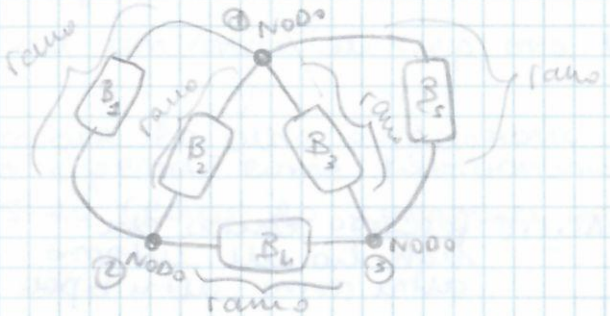
Qualsiasi elemento che si comporti come un monopòlo ha corrente $= 0 \Rightarrow$ ha anche potenza $= 0$

$i_m = 0 \Rightarrow p = v \cdot i_m = 0$

Ma a volte è nei circuiti e bisogna saperlo trattare (lo si scarta xk non conta nulla)

CIRCUITO ELETTRICO (o RETE ELETTRICA)

Insieme di elementi elettrici collegati fra loro

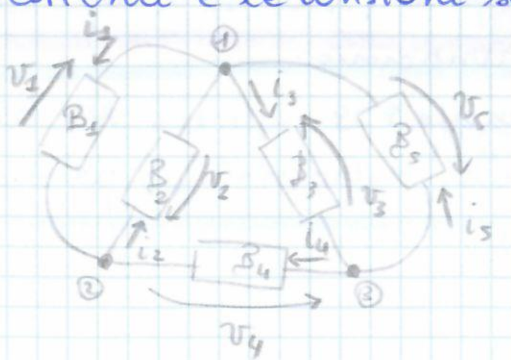


Il 90% dei circuiti è fatto da bipoli

NODI = punti di collegamento (indicati con lettere o numeri cerchiati) → di almeno 2 terminali

RAMI = parti che costituiscono un collegamento tra un nodo e l'altro
↓
lati

Metto le correnti e le tensioni sui bipoli con la convenzione coordinata degli utilizzatori.



i e v
↑
→ 5 lati ⇒ $2 \cdot 5 = 10$ incognite

Per un circuito o una rete elettrica con l rami ho $2l$ grandezze elettriche (tensioni e correnti) (1 coppia per ogni ramo) che rappresentano le mie incognite del problema

Applico la legge delle correnti (nei 3 nodi)

KCL: nodo ①: $\underbrace{i_1 + i_3}_{\text{corr. usc.}} = \underbrace{i_2 + i_5}_{\text{corr. entr.}}$

nodo ②: $\underbrace{i_1 + i_4}_{\text{entranti}} = \underbrace{i_2}_{\text{uscente}}$

nodo ③ $i_3 = i_4 + i_5$

} prime 3 equazioni

e invece prendo il percorso chiuso esterno (che non è 1 maglia)

$$v_1 + v_5 = v_4$$

a combino con quelle della maglia ©

$$\begin{cases} v_1 + v_5 = v_4 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_5 = 0 \end{cases} \qquad v_2 + v_4 + v_3 = 0 \qquad \text{NO indip.}$$

un circuito con N nodi e l rami (e M maglie)
ha N - 1 eq. KCL indipendenti (nodi)
ha M eq KVL indipendenti (maglie)

N = n° nodi

M = n° maglie indip

Arrivo ad un max di 5 eq, ma le incognite sono 10.

Per trovare le altre 5 equazioni uso delle equazioni che ricavo sapendo come funzionano i bipoli
=> 5+5=10 (come le incognite => potrò risolvere il sistema)

Applicando la KCL su un circuito osservo che:
in un circuito di N nodi, le eq KCL indipendenti sono N-1

Applico la KVL su un circuito e osservo che:
in un circuito con M maglie, (sulle maglie) ho M eq KVL indipendenti

Ma i circuiti non si risolvono scrivendo tutte queste equazioni!

aso particolare di generatore di tensione con $e=0$

$v=e=0$ (potenza $p=vi=0$) $\Rightarrow$ elemento che non ha potenza.

i chiama CORTO CIRCUITO.

simbolo: →

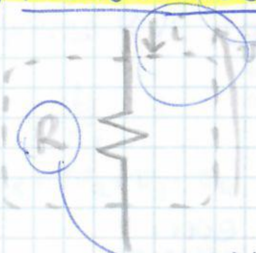
Caso particolare del generatore di corrente con $a=0$

$i=a=0$ $(p=vi=0)$ $\Rightarrow$ corrente $=0$

Si chiama CIRCUITO APERTO.

simbolo: →

3) Resistore ideale → perchè supponiamo che il coefficiente R sia costante e non cambi in base a nessuna variabile



eq caratteristica o di funzionam. del nostro bipolo:

$v = R \cdot i$ → R è coeff. di proporzionalità (LEGGE DI OHM)

$R = \frac{v}{i}$ → non è un n° puro, ma ha unità di misura $[R] = \frac{V}{A} = \text{ohm}, \Omega$

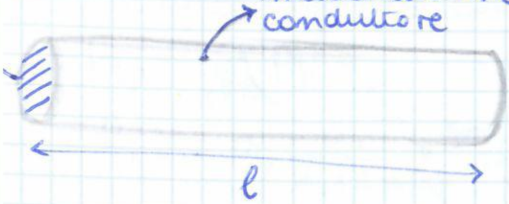
= resistenza (si misura in ohm: Ω)

(resistore = ogg fisico
resistenza = sua proprietà)

Potenza sul resistore: $p = v \cdot i$ (si dice anche potenza usata dal resistore o assorbita dal resistore)

$p = v \cdot i$
$v = Ri$ $\Rightarrow$ $p = R \cdot i^2$ è >0
è >0

R è un numero positivo necessariamente. (perchè la potenza presa con quelle convenzioni di segno è una potenza assorbita)



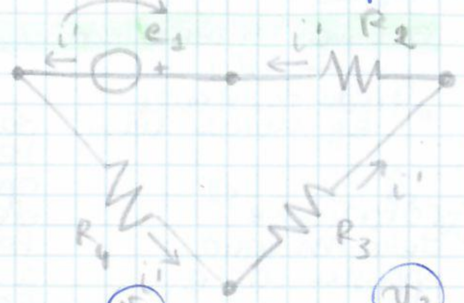
$R = \rho \frac{l}{A}$ (IN UN CILINDRETTO CONDUTTORE) IN UN PEZZO DI FILO

ρ → resistività (dipende dal materiale conduttore)

ρ PICCOLA
• oro
• rame

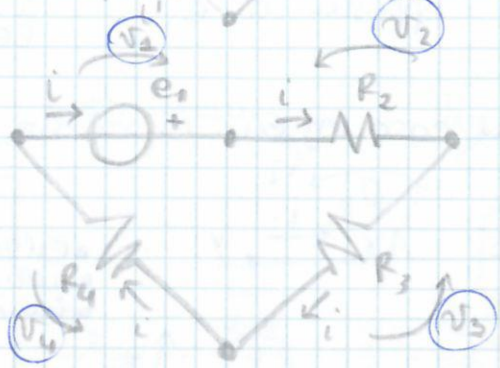
ρ grande
• manganese
• ferro o alluminio

e sceglessi di iniziare a mettere v e i non partendo x es. da R_1, ma dal generatore



(va sempre bene, ho cambiato il verso della corrente ⇒ cambia segno valore corr).
⇓
alla fine
$i' = -i$

inizio a risolvere con le formule



$$\begin{cases} v_2 = R_2 i \\ v_3 = R_3 i \\ v_4 = R_4 i \\ v_1 = e_1 \end{cases}$$

Applico KVL (guardo orientam. tensioni sulla maglia
- se tutte orarie o tutte antiorarie ⇒ somma = 0
- se alcl orarie ed altre anti → tens orario = tens antiorario)

$v_1 = v_2 + v_3 + v_4$ $\qquad e_1 = R_2 i + R_3 i + R_4 i$ → unica incognita = i

è noto x k
è un dato del costruttore

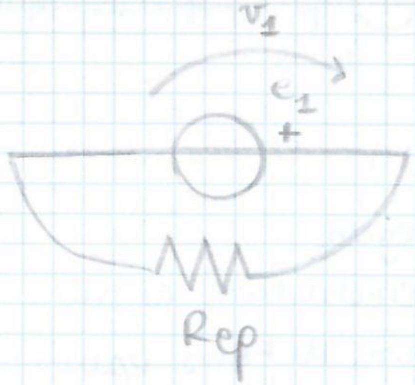
$$\boxed{i = \frac{e_1}{R_2 + R_3 + R_4}}$$ RISULTATO

verifica:
VALIDITÀ
un risultato x essere valido deve essere espresso solo in funzione di quantità date dal costruttore. Devono dipendere ESCLUSIVAMENTE dai dati del costruttore ** È BISOGNA fare CONTROLLO DIMENSIONALE

COROLLARIO (del circuito sopra) → Condiz. di applicabilità: circuito in serie per i circuiti del tipo di quello sopra in cui la corrente che gira è sempre costante

$v_1 = \underbrace{(R_2 + R_3 + R_4)}_{\text{coeff di prop.} - R_{ep}} \cdot i$ $\qquad$ la tensione v_1 sul generatore è proporzionale alla corrente che passa nel mio circuito.

↓
la interpreto come equazione di un resistore ⟹ $v_1 = R_{ep} \cdot i$



posso ridisegnare con il circuito di prima

Dato un circuito IN SERIE, lo posso sostituire tutti i resistori in serie con un equivalente con coeff.

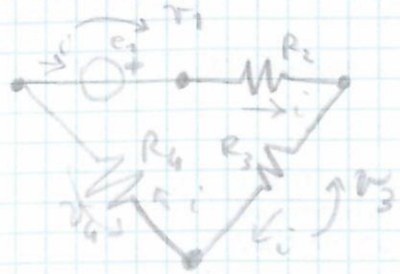
$$R_{ep} = \sum_k R_k$$

$v_2 = R_2 i = -R_2 \frac{e_1}{R_2 + R_3 + R_4}$ ** ✓

$v_3 = R_3 i = -R_3 \frac{e_1}{R_2 + R_3 + R_4}$ ✓ $\quad$ validi

$v_4 = R_4 i = -R_4 \frac{e_1}{R_2 + R_3 + R_4}$ ✓

Ritornando al circuito "iniziale" e usando regola del partitore

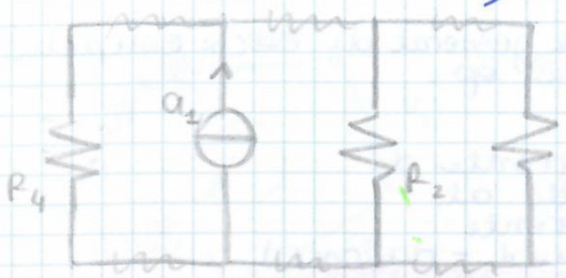


$$i = \frac{e_1}{R_2+R_3+R_4}$$

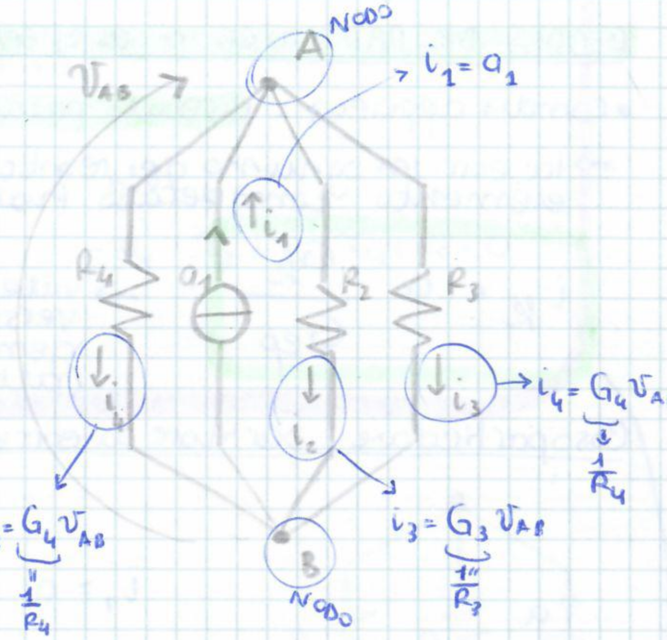
$$v_3 = R_3 i = R_3 \frac{e_1}{R_2+R_3+R_4}$$

CIRCUITO

corti circuiti



$\equiv$



$i_4 = \underbrace{G_4}_{\frac{1}{R_4}} v_{AB}$ $\quad i_3 = \underbrace{G_3}_{\frac{1}{R_3}} v_{AB}$ $\quad i_4 = \underbrace{G_4}_{\frac{1}{R_4}} v_{AB}$

COLLEGAMENTO IN PARALLELO

Un circuito con tutti i bipoli collegati tra gli stessi due punti, cioè con la stessa tensione su tutti i bipoli si dice COLLEGATO in PARALLELO

Applico KCL al nodo A (dopo potrei applicarla al nodo B, ma ce ne sono tante indipendenti quanti sono i nodi $-1 \Rightarrow 2-1=1$, basta quello in A)

$\underbrace{i_4 + i_2 + i_3}_{\text{uscenti}} = i_1 \rightarrow$ entrante

$$a_1 = G_4 v_{AB} + G_2 v_{AB} + G_3 v_{AB}$$

$$a_1 = \underbrace{(G_4 + G_2 + G_3)}_{\text{coeff}} v_{AB}$$

G_{ep} (conduttanza equivalente) $\rightarrow a_1 = G_{ep} \cdot v_{AB} \leftarrow$ tensione

a_1: corrente; G_{ep}: conduttanza equivalente

REGOLA

condiz applicabilità: circuito parallelo

In 1 circuito parallelo posso trovare una conduttanza equivalente che è = alla somma di tutte le conduttanze

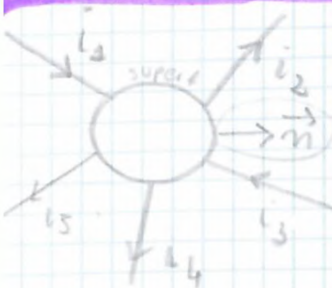
$$\boxed{G_{ep} = \sum_k G_k = \sum_k \frac{1}{R_k}}$$

$$\frac{1}{R_{ep}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \rightarrow R_{ep} = \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad \dots$$

Caso particolare: solo due resistori in parallelo

$$\frac{1}{R_{ep}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow \frac{1}{R_{ep}} = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2} \qquad \boxed{R_{ep} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}$$

ESERCITAZIONE 1 (Leggi di Kirchhoff)

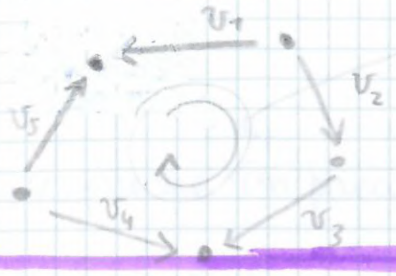


(scelta una normale arbitraria) ↗ se stesso verso normale => + ↘ se verso opposto normale => -

KCL

$$-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

→ se la superficie collassa in un punto KCL vale lo stesso

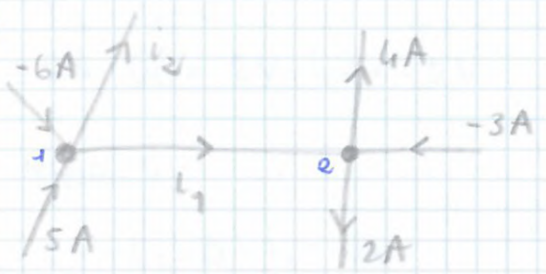


→ verso scelto

KVL

$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0$$

1.1



- i_1?
- i_2?

nodo 1

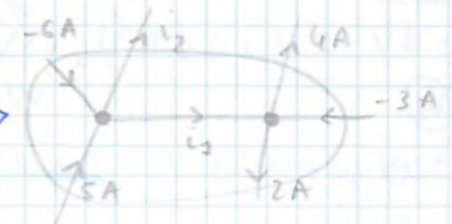
$$i_2 + i_1 + 6A - 5A = 0 \qquad i_2 = -1A - \underbrace{i_1}_{9A} = -10A$$

nodo 2

$$-i_1 + 4A + 3A + 2A = 0 \qquad i_1 = 9A$$

CALCOLARE i_2 SENZA CONOSCERE i_1

Abbiamo detto che Kirchhoff vale anche x superficie ⟹

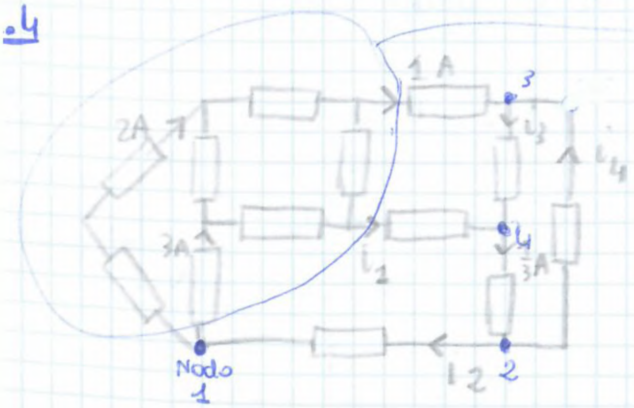


⇓

si considera solo ciò che attraversa surf e i_1 è trascurata!!!

KCL : $i_2 + 6A - 5A + 4A + 3A + 2A = 0 \qquad i_2 = -10A$

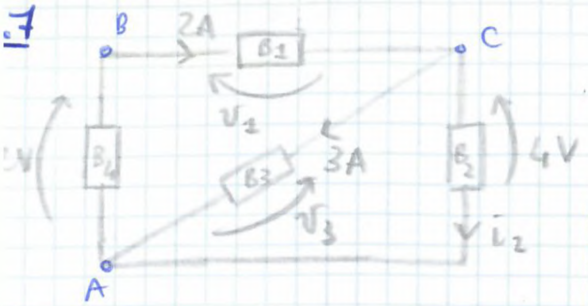
.4



→ surf x calcolare direttamente i_1

- i_1? i_2? i_3? i_4?

.1



• potenza fornita ad ogni elemento?

NB: potenza fornita **a** = pot. assorbita ⇐ UTILIZZATORE

potenza fornita **da** = pot. erogata ⇒ GENERATORE

(U) $p^a = v\,i$

(G) $p^e = v \cdot i$

$p^a = -p^e$

[pr]ima bisogna [c]alcolare i e v [d]i ogni bipolo

$V_3 = 4V$ perchè B_3 in parallelo con B_2 ⇒ stessa tensione

percorso A - B - C

$2V - V_1 - V_3 = 0$

$V_1 = 2V - V_3 = 2V - 4V = -2V$

i_2 NODO C

$2A - 3A - i_2 = 0 \quad i_2 = -1A$

[o]ra vedo i bipoli

[B]1 = convenz utilizzatori ⇒ $p_1 = V_1 \cdot i_1 = -2V \cdot (2A) = -4W$

[B]2 = " ⇒ $p_2 = V_2\, i_2 = -1A \cdot 4V = -4W$

[B]3 = " ⇒ $p_3 = V_3\, i_3 = 4V \cdot 3A = 12W$

[B]4 = convenz generatori ⇒ $p_4 = \underbrace{2V \cdot 2A}_{\text{generat}}\ (-1) = -4W$

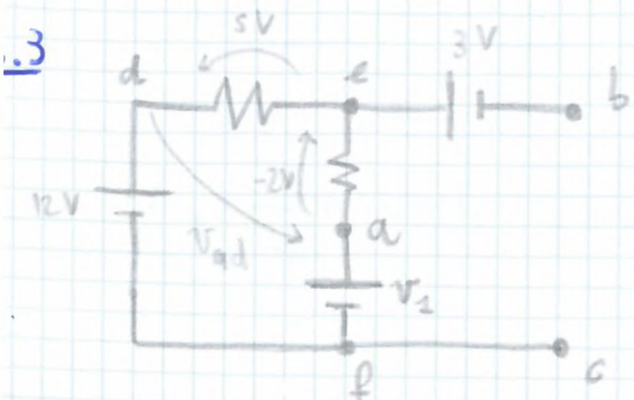
moltiplico x -1 xk io voglio *

**

$\sum_k p_k = 0$

[p]erchè circ elettrico ideale è considerato isolato

.3

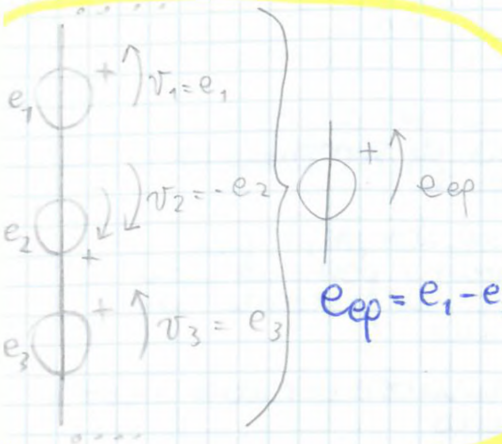


• V_1?

• V_{ad}?

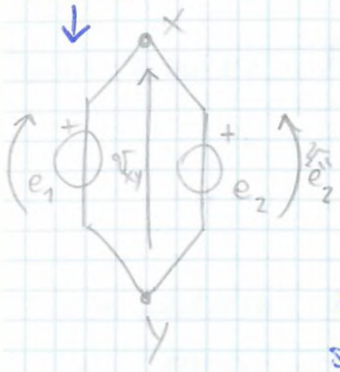
• V_{bc}?

GENERAT. DI TENSIONE EQUIVALENTI



$e_{ep} = e_1 - e_2 + e_3$

(serie)



$v_1 = e_1 = v_{xy}$

$v_2 = e_2 = v_{xy}$

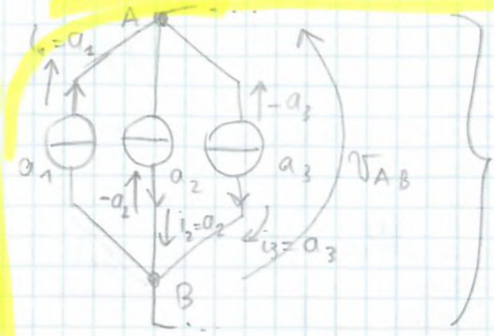
$\Downarrow$

a meno che $e_1 = e_2$ è impossibile

solo se $e_1 = e_2$

(parallelo)

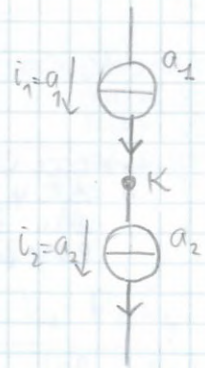
GENERAT. DI CORRENTE EQUIVALENTI



$a_{ep} = a_1 - a_2 - a_3$

(parallelo)

$\downarrow$



(serie)

applicando in K il KCL

in K $\underbrace{i_1}_{\text{entra}} = \underbrace{i_2}_{\text{esce}}$

dato che $i_1 = a_1$ e $i_2 = a_2$

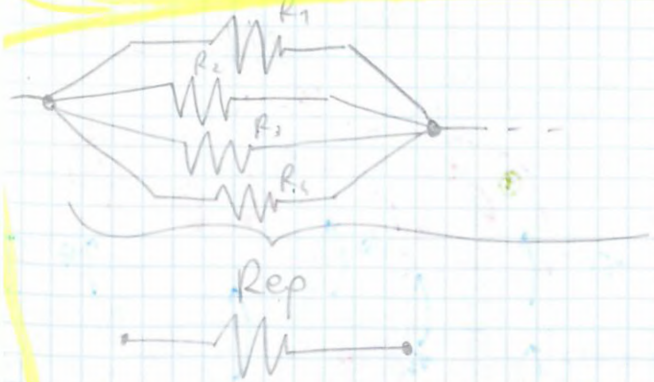
$\Downarrow$

solo se $a_1 = a_2$

RESISTORI EQUIVALENTI

(in serie)

$R_{ep} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$



(in parallelo)

$G_{ep} = \frac{1}{R_{ep}} = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$

① KVL

Ora osservo il mio percorso chiuso: $A \to R_1 \to e_1 \to B \to A$

La tensione è una differenza di E_{pot} tra 2 punti, ma non è necessario che ci sia un bipolo tra i 2 punti.

ho v_{AB} sul percorso, che va in senso antiorario
v_1 e v_1' in senso orario

$v_{AB} = v_1 + v_1' = R_1 i_1 + e_1$

$v_{AB} = R_1 i_1 + e_1$ → non mi dà risultato valido xk conosco solo e_1 e R_1 (dati probl)

⇓ faccio questo x tutti i percorsi

$i_1 = \frac{v_{AB} - e_1}{R_1}$

② Percorso chiuso $R_2 \to v_{AB} = v_2 = R_2 i_2 \to i_2 = \frac{v_{AB}}{R_2}$

Terzo percorso: $A \to R_3 \to a_3 \to B$ ⟹ abbiamo generat corrente, ma non so la sua tensione! Non so la legge x legare la tensione al generat di corrente

⇓

NON POSSO UTILIZZARE IL PERCORSO SUL BRACCIO 3 ⟹ lo salto

$i_4 = \frac{v_{AB}}{R_4}$

Quarto percorso: $A \to R_4 \to B$ $v_{AB} = v_4 = R_4 i_4$

Quinto braccio → stesso problema del terzo

Sesto braccio $A \to R_6 \to e_6 \to B$

Faccio la KVL ⟹ $v_{AB} + v_6' = v_6$ ⟹ $v_{AB} = v_6 - v_6' = R_6 i_6 - e_6$

$v_{AB} = R_6 i_6 - e_6 \to i_6 = \frac{v_{AB} + e_6}{R_6}$

Settimo braccio: $A \to R_7 \to B$

$v_{AB} = v_7 = R_7 i_7$ $v_{AB} = R_7 i_7 \to i_7 = \frac{v_{AB}}{R_7}$

KCL

Non abbiamo ancora applicato le KCL ⟹ le applico in A

$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 + i_7 = 0$
$= -a_3$
$= -i_3'$

$\underbrace{i_3'}_{\text{entrante}} = \underbrace{i_1 + i_2 + i_4 + i_5 + i_6 + i_7}_{\text{uscente}}$

sono due termini noti, sono le corr dei due generat di corrente

↓

$a_3 = i_1 + i_2 + i_4 + a_5 + i_6 + i_7$

Qui come incognite abbiamo
i_1, i_2, i_4, i_6 e i_7 (quelle che avevamo prima) ⟹ metto in qst eq le eq di prima

$$a_3 = \frac{v_{AB} - e_1}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} + \frac{v_{AB}}{R_4} + a_5 + \frac{v_{AB} + e_6}{R_6} + \frac{v_{AB}}{R_7}$$

$$\boxed{a_3 - a_5 = \frac{v_{AB} - e_1}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} + \frac{v_{AB}}{R_4} + \frac{v_{AB} + e_6}{R_6} + \frac{v_{AB}}{R_7}}$$

→ tutti i dati tranne v_{AB} sono noti perché tutti dati dal costruttore

UNICA EQ X UNICA INCOGNITA

$$a_3 - a_5 = \frac{v_{AB}}{R_1} - \frac{e_1}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} + \frac{v_{AB}}{R_4} + \frac{v_{AB}}{R_6} + \frac{e_6}{R_6} + \frac{v_{AB}}{R_7}$$

$$a_3 - a_5 + \frac{e_1}{R_1} - \frac{e_6}{R_6} = v_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}\right) \Rightarrow v_{AB} = \frac{\frac{e_1}{R_1} + a_3 - a_5 - \frac{e_6}{R_6}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}}$$

Se lo scopo non fosse trovare V_{xy} agli estremi del circuito, ma la tensione di uno dei resistori x es v_3.

vedi ancora circuito sopra

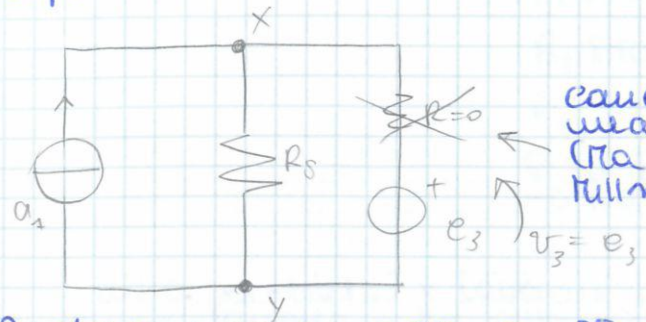
- uso cmq Millman x trovare v_{xy}

KVL in percorso chiuso

$v_{xy} = v_3 + e_3 \quad \Rightarrow v_3 = v_{xy} - e_3$

Millman non serve solo x trovare tensione parallelo, ma anche x variabile accessoria.

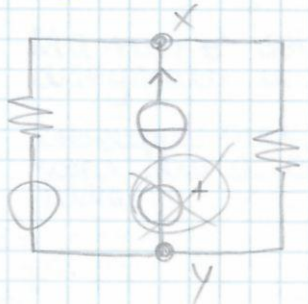
esempio:



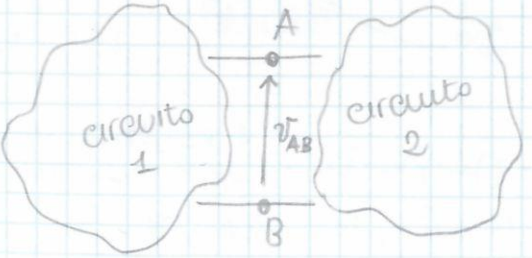
come lo risolvo? Ipotizzo che abbia una resistenza R = 0 sul 3° ramo? (Ma poi dovrei dividere x ∞ con Millman!!!) => No

Basta ragionare → $v_3 = e_3 = v_{xy}$

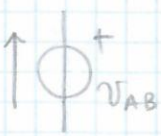
Tutte le volte che ho 1 generatore di corrente con qualcosa in serie è + forte di tutto e sparire tutto quello che c'è in serie.
x cui se anche avem generat corrente + generat tensione, in millman gen tensione sparisce.



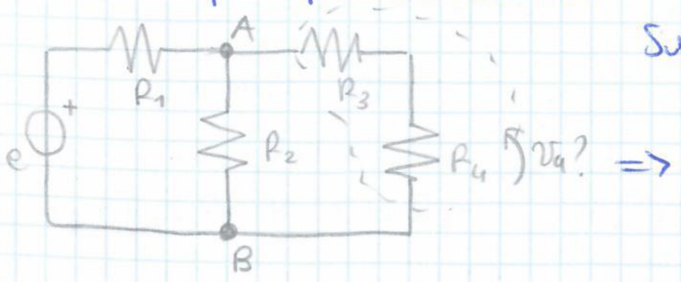
PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE



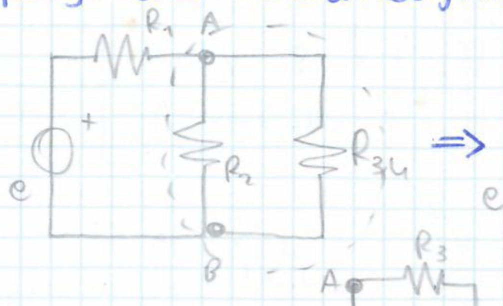
v_{AB} nota => nel momento in cui in un circuito ho una tensione nota, posso sempre sostituirla con un generatore di tensione alla cui tensione si dà il valore noto (v_{AB})
si può fare sempre, in ∀ circuito

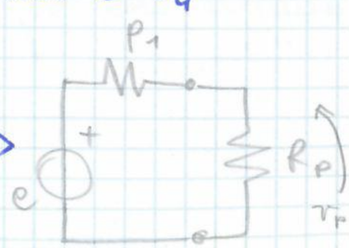


altro modo x principio sostituzione:



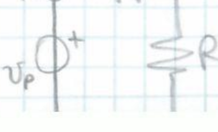
Suppongo che mia incognita è v_4





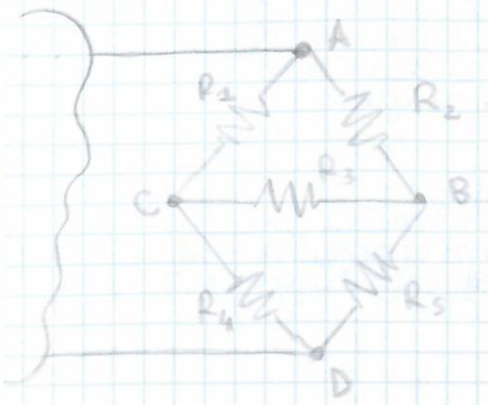
x regola partitore di tensione

$v_p = e \dfrac{R_p}{R_1 + R_p}$ → ora dico tra eB ho trovato v_p => sostituisco



$v_4 = v_p \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}$

TRASFORMAZ. STELLA - TRIANGOLO



serie?

A e B sono 2 nodi a 3 connessioni => non sono nodi serie

lo stesso vale per C e per D

=> non c'è niente in serie → NO SERIE

parallelo?

R_1 sta tra A e C
R_2 sta tra A e B } => non sono in // xk non sono collegati tra gli stessi due pt

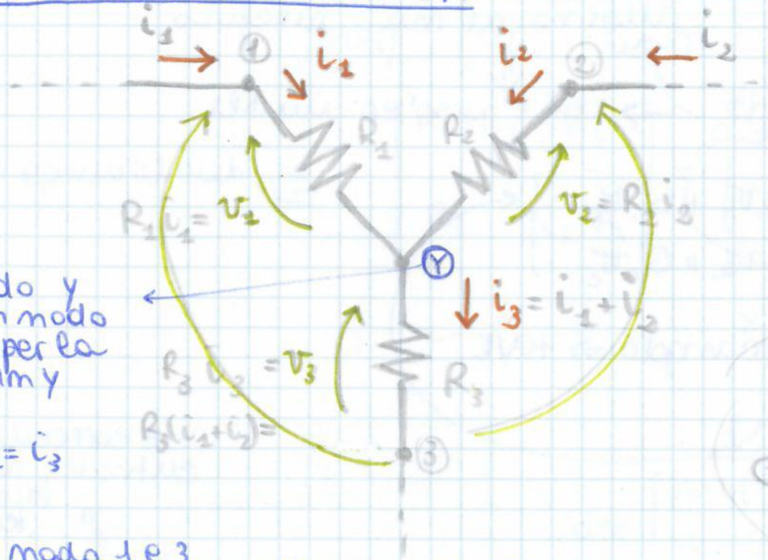
R_3 sta tra C e B
R_1 // A e B } => NO

Si va avanti così e si vede che nulla è in //
→ NO PARALLELO

Esiste altra possibilità x lavorare su circuiti in cui non c'è né colleg serie né colleg //. Questo si fa attraverso una trasformazione

COLLEGAMENTO A STELLA (Y)

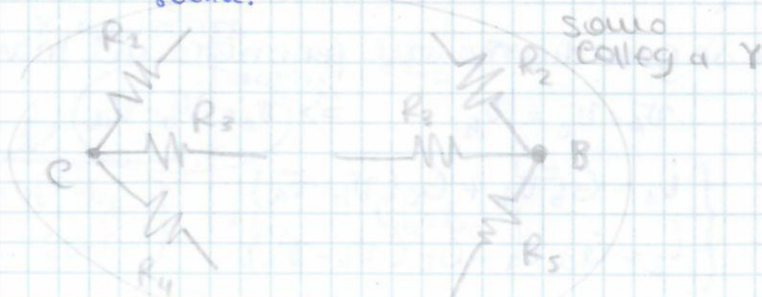
Prima metto le correnti e poi le tensioni in funz alle correnti



nodo y è un nodo 3, per la Kcl in y
⇓
$i_1 + i_2 = i_3$

Ma non è sempre disegnato a Y!!!

xesempio nel disegno sopra ho 2 colleg a stella.



Lego nodo 1 e 3
Faccio un KVL : ① → Ⓨ → ③ → ①

$v_1 + v_3 - v_{13} = 0 \qquad v_{13} = v_1 + v_3 = R_1 i_1 + R_3(i_1 + i_2)$

Lego nodo 2 e 3
Faccio KVL : ② → Ⓨ → ③ → ②

$-v_{23} + v_2 + v_3 = 0 \qquad v_{23} = v_2 + v_3 = R_2 i_2 + R_3(i_1 + i_2)$

Le due equazioni sono

$$\begin{cases} v_{13} = i_1(R_1+R_3) + i_2 R_3 \\ v_{23} = i_2(R_2+R_3) + i_1 R_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

tensioni in funz delle correnti che entrano

vettore delle incognite — matrice coefficienti — vettore variabili indipendenti

Allora ho:

da Y $$\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

da Δ $$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix}$$

Per passare dall'una all'altra basta fare l'inversa!!!

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

> le due eq sono
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$
→ Quando sono equivalenti?

Sono equivalenti se
$$\begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix}^{-1}$$

x invertire

$$\frac{1}{\det \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} G_a+G_c & +G_c \\ +G_c & G_b+G_c \end{bmatrix} =$$

Due matrici x essere uguali devono essere = termine x termine

$$= \frac{1}{(G_b+G_c)(G_a+G_c)-G_c^2} \begin{bmatrix} G_a+G_c & G_c \\ G_c & G_b+G_c \end{bmatrix}$$

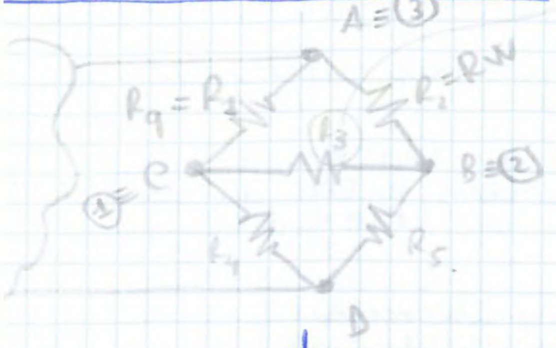
termini 1,1 $$R_1+R_3 = \frac{G_a+G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_cG_a+\cancel{G_c^2}-\cancel{G_c^2}}$$

termini 2,2 $$\boxed{R_3 = \frac{G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_cG_a}} = \text{termini 2,1}$$

→ è risultato buono, dà R_3 in funz di tutte le conduttanze. Uso R_3 x semplificare le altre 2 eq.

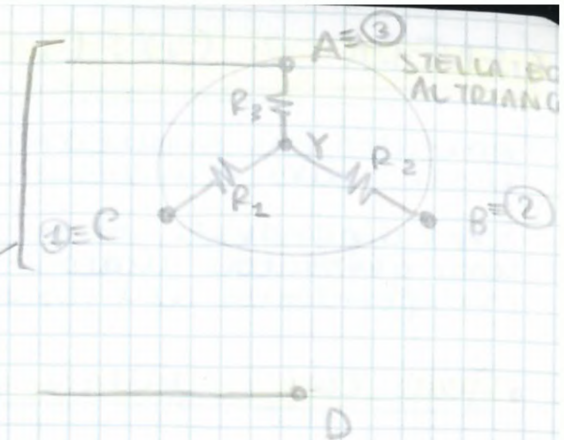
termini 2,3 $$R_2+R_3 = \frac{G_b+G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_cG_a}$$

rniamo al circuito iniziale → R_z → ribattezzo R_1, R_2 e R_3 così come chiamo nella stella



- no serie
- no parallelo
- contiene Δ e Y

Trasformo da Δ a Y



bisogna trovare le corrispondenze dei nodi con quelli della trasformat.

$$R_1(\text{x la stella}) = \frac{\frac{1}{R_w}}{\frac{1}{R_w}\frac{1}{R_q} + \frac{1}{R_w}\cdot\frac{1}{R_z} + \frac{1}{R_z}\frac{1}{R_q}}$$

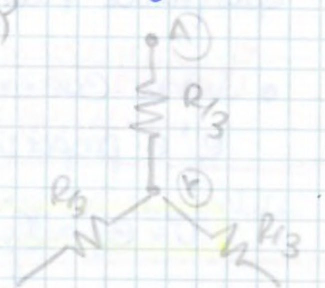
$R_2 = \ldots$

$R_3 = \ldots$

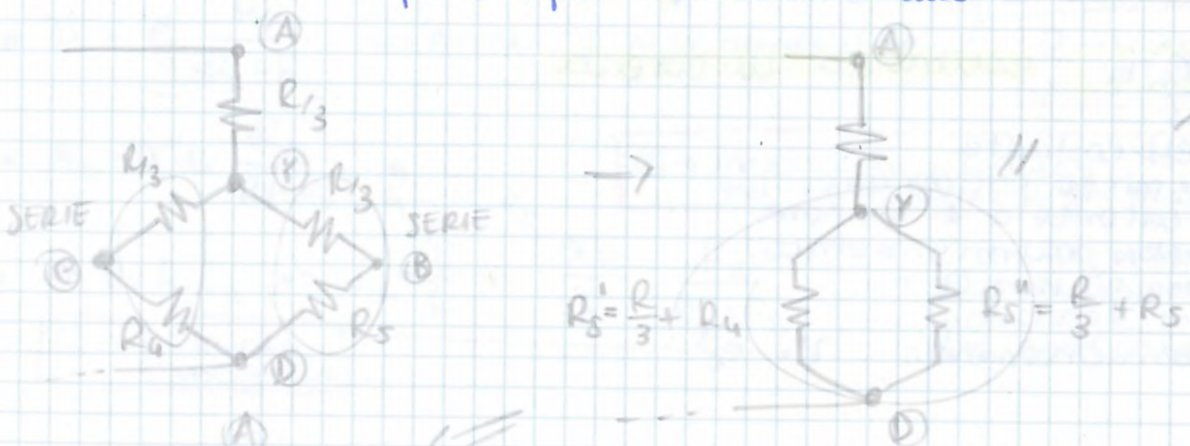
se $R_1 = R_2 = R_3 = R \Rightarrow$ (ipotizzando)

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3}$$

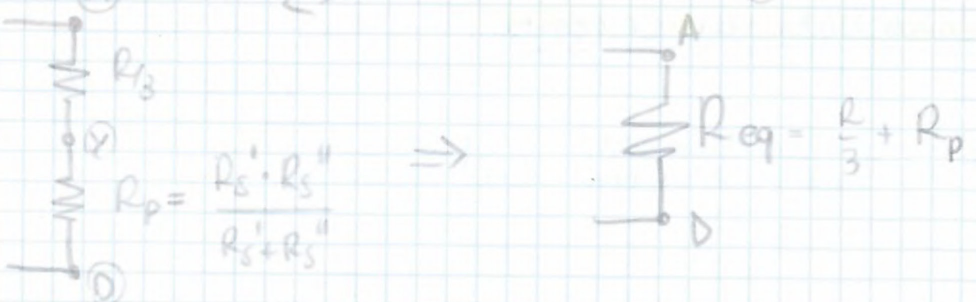
$$R_\Delta = 3R_Y$$



Così abbiamo risolto la parte superiore ⇒ continuiamo



$R_s' = \frac{R}{3} + R_4$ $\quad R_s'' = \frac{R}{3} + R_5$



$R_p = \frac{R_s' \cdot R_s''}{R_s' + R_s''}$

$R_{eq} = \frac{R}{3} + R_p$

• da una tensione tra due punti x e y del circuito

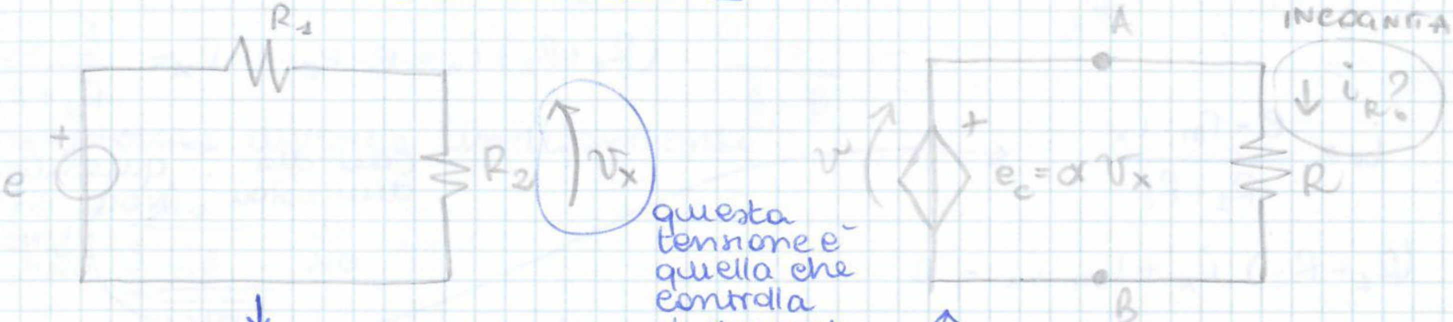
$a_c'' = g_m v_{yx}$ controllati in tensione

coeff di proporz NON adimensionato si misura in S (siemens)

equaz funzionamento: $i = a_c''$

Esempi CIRCUITI con generatori pilotati

1)



questa tensione è quella che controlla il generat di tens. controllato

usando la regola del partitore di tensione calcolo v_x

INCOGNITA

METODO DI SOLUZIONE DI CIRC CON GEN. PILOTATI 3 PASSAGGI

① → trovo la quantità pilotante

- $v_x = e \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$ => metto v_x nel generatore

② → inserisco la quantità nel generatore => gen pilotato noto (diventa indipend)

- $e_c = \alpha e \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$

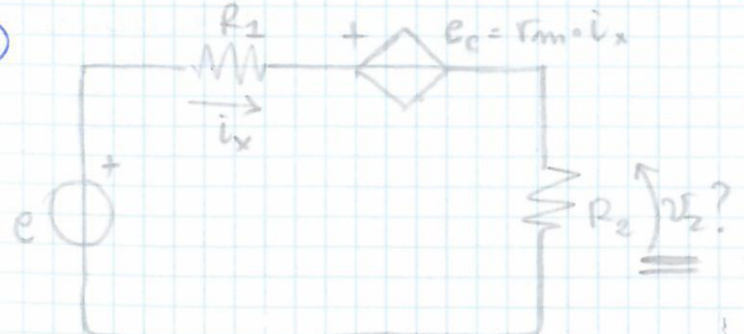
- $\Rightarrow v = R \cdot i_R \rightarrow i_R = \dfrac{v}{R} = \dfrac{\alpha e}{R} \cdot \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$ ($v = e_c$)

③ → ho trovato l'incognita

è un RISULTATO BUONO perché dipende solo da grandezze note date dal costruttore

Cerco di usare SEMPRE questi 3 passaggi x risolvere!!! È sicuro arrivare al risultato

2)



In questo caso il generatore è mescolato NELLO stesso circuito

Applicando la regola:

- TROVARE LA QUANTITÀ PILOTANTE

→ generat dipend COME SE fosse indipend

→ soluzione (sostituisco eq del dip)

la mia q. pilotante è i_x

Per trovarla faccio finta che anche generat dipendente sia indipendente

$$v_{AB} = \frac{A_0 + a_c}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = R \cdot i_1$$

$$i_1 = \frac{A_0 + a_c}{\cancel{R}\ \frac{3}{2\cancel{R}}} = \frac{2}{3}(A_0 + a_c) \rightarrow$$

- controllo dimensionale $\Rightarrow$ ok
- quantità note $\rightarrow$ NO a_c dipende da i_1

$\Downarrow$

$$i_1 = \frac{2}{3}(A_0 + \beta i_1)$$

$$i_1 = \frac{2}{3}A_0 + \frac{2}{3}\beta i_1 \qquad i_1 = \frac{\frac{2}{3}A_0}{\left(1 - \frac{3}{2}\beta\right)} = \frac{2A_0}{3\left(1 - \frac{2}{3}\beta\right)}$$

$\Rightarrow$
- controllo dim $\Rightarrow$ ok
- quant note $\Rightarrow$ ok

$$\text{''} \frac{A_0}{\frac{3}{2} - \beta}$$

- Gen pilotato diventa indipendente

$$a_c = \beta \frac{A_0}{\frac{3}{2} - \beta}$$

- Trovo l'incognita $\Rightarrow$ APPLICO KCL in A per trovare i_2

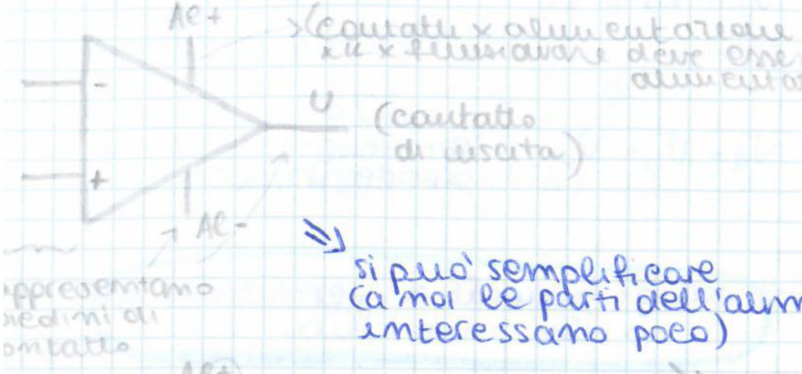
$$A_0 + \beta \frac{A_0}{\frac{3}{2} - \beta} = \frac{A_0}{\frac{3}{2} - \beta} + i_2 \qquad i_2 = \frac{A_0}{\frac{3}{2} - \beta}(\beta - 1) + A_0$$

$$i_2 = A_0 \left(\frac{\beta - 1}{\frac{3}{2} - \beta} + 1 \right)$$

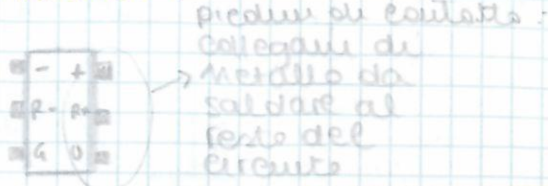
AMPLIFICATORE OPERAZIONALE (sistema elettronico integrato)

Elemento complicato di cui cerchiamo di dare rappresentaz semplificata
È un ogg complicato, non vogliamo sapere come è fatto dentro, ma solo come si comporta questo SISTEMA ELETTRONICO INTEGRATO

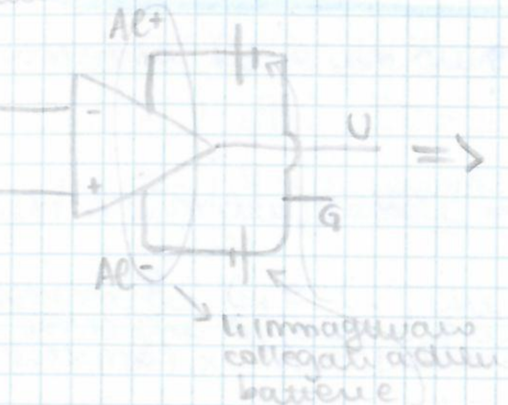
rappresentazione:

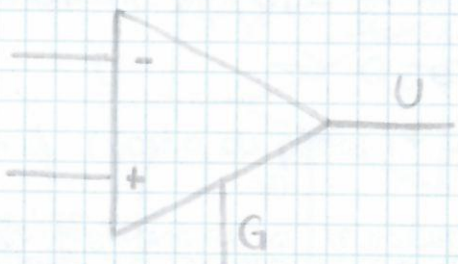


in realtà:



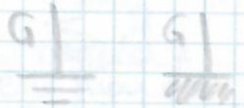
⇒ si può semplificare (a noi le parti dell'alimant. interessano poco)





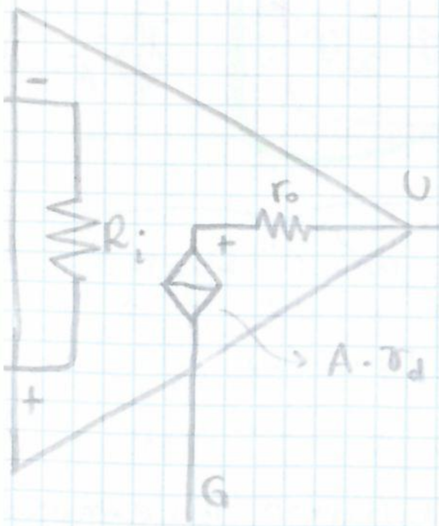
G - riferimento delle tensioni → non vuol dire massa o messa a terra

Altre notaz. x indicare terminale G



Non è più un bipòlo, ma è un elemento a 4 terminali ⇒ QUADRIPÒLO

Facendo 1 analisi + dettagliata di come è fatto un circuito all'inter



Dentro tra terminale - e + è come se ci fosse collegato 1 resistenza R_i, il cui valore è <u>molto</u> grande

$R_i > 10^5 \Omega$ (1 mega Ω)

Tutto il funzionam dei transistor dentro lo spieghiamo con il gen. di tensione pilotato in tensione. La tens che lo pilota è quella tra la resistenza (tra + e -) ed è v_d

$i = A v_d$

A è molto grande, tipicam $A > 10^5$ (adimensionato)

la resistenza r_o è di ordine degli Ω e spesso trascurabile ⇒ trascuro

$v_d(G_1+G_i+G_2) = eG_1 + eG_2 - Av_dG_2$

$v_d(G_1+G_i+G_2+AG_2) = e(G_1+G_2) \Rightarrow v_d = \dfrac{e(G_1+G_2)}{G_1+G_i+G_2(1+A)}$ (risolto 1° punto)

2) Generatore ritorna pilotato

$\Rightarrow \quad v_0 = A \cdot \dfrac{e(G_1+G_2)}{G_1+G_i+G_2(1+A)}$

3) Trovo l'incognita $v_U = A \cdot v_d = A \dfrac{e(G_1+G_2)}{G_1+G_i+G_2(1+A)}$

N.B:

la resistenza R_i è un numero enorme $\Rightarrow G_i = \dfrac{1}{R_i} \to 0$

$\Rightarrow$ G_i è trascurabile!!!

il coeff A è molto grande $\Rightarrow A+1 \simeq A$ (varia di poco!)

al denom ho G_1 e G_2, che poi sono abbastanza trascurabili rispetto A, nel senso che G_1 non è piccolissimo, ma se moltiplico G_2 (che non è piccolissimo) x A $\Rightarrow$ trascurabile G_1 (non mi cambia di tanto il risult)

$\Downarrow$

$$v_u = A \frac{e(G_1+G_2)}{\underset{\to 0}{G_1} + \underset{\to 0}{G_i} + G_2\underbrace{(1+A)}_{A}} = \cancel{A} \cdot \frac{e(G_1+G_2)}{G_2 \cdot \cancel{A}} = \frac{e(G_1+G_2)}{G_2}$$

$$\boxed{v_u = e\left(\frac{G_1}{G_2}+1\right) = e\left(\frac{R_2}{R_1}+1\right)}$$

sempre >0 xk R_2 e R_1 >0

resistenze

sempre >1

L'approssimaz è talmente piccola da essere trascurabile (incide sulla 5^ cifra decimale ≃)

$\Rightarrow$ il circuito funziona in modo da presentare in uscita una tensione proporzionale al generatore e, e con un coefficiente controllabile (≥1 o molto grande) a seconda dell'opportuna scelta di R_1 ed R_2. Con amplificaz regolabile

Il coeff $\dfrac{R_2}{R_1}+1$ si chiama amplificaz. $\to$ amplificaz regolabile

Ecco xk si chiama amplificatore: xk se lo uso in un circuito posso ottenere un'amplificazione di tensione.

ragionam + semplificato x arrivare al risult?

Sì

$\downarrow$

applichiamo KVL (G) → (−) → (U) → (G)

Il risult dipende da quello che metto fuori, non dall'ampl

$e + v_2 = v_0$

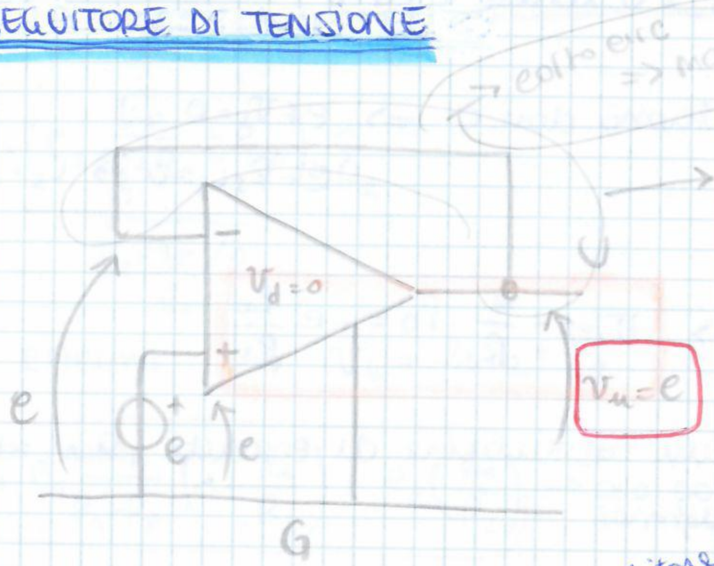
$$\boxed{v_U = e + e\frac{R_2}{R_1} = e\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)} \quad !!!$$

nel risultato non ci si accorge dell' ∃ dell'amplificatore! Non ci sono A oppure altre cose dell'amplif

c.v.v.

QUANDO COLLEGO IL CIRCUITO IN QUESTO MODO OTTENGO AMPL DI TENSIONE XK $\left(\frac{R_2}{R_1}+1\right)$ è SEMPRE >1 (molto > di 1). Si chiama AMPLIFICATORE NON INVERTENTE (perchè non cambia il segno di v

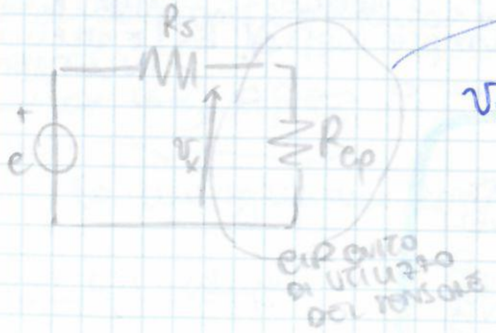
INSEGUITORE DI TENSIONE



Questo è tutto un corto circuito ⇒ è come se portassi U in ⊖ ⇒ la tens è la stessa e vale ancora e.

$\boxed{v_u = e}$ → Questo ridà la stessa tensione

es sensore:



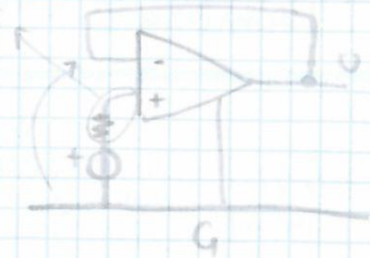
$$v_x = e\,\frac{R_{ep}}{R_s + R_{ep}}$$

→ è partitore ⇒ mi riduce la tens presente al circ di utilizzo che sicuramente <1

→ lo riduco ancora la tens prima di utilizzarla ⇒ non ha senso.

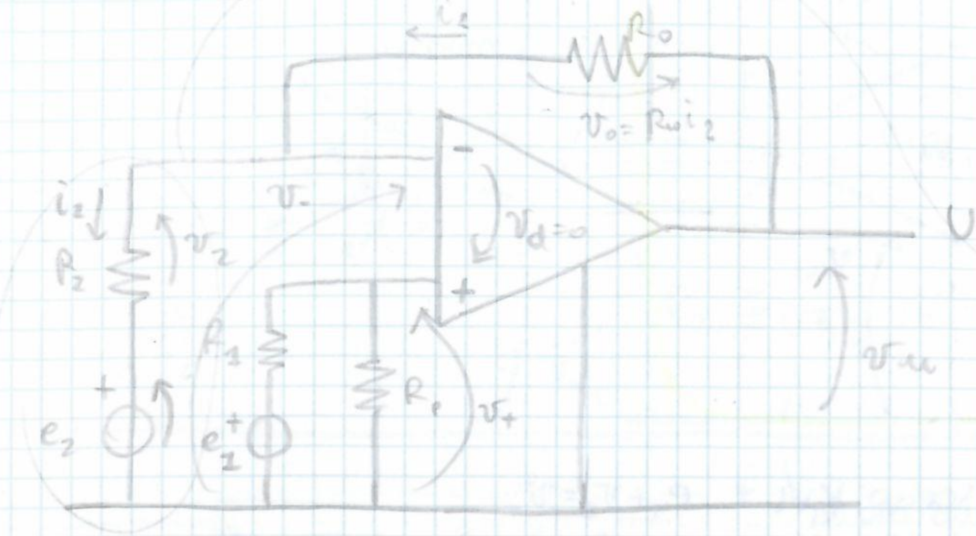
→ se invece utilizzo inseguitore tens

la corr. che passa è ≈0 ⇒ tensione rimane e ← R_s



→ non mi riduce la tens. x evitare di farla diminuire posso collegare l'inseg di tens x avere tens intera e non + ripartita come col partitore

AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE



- $v_+ = e_1 \frac{R_p}{R_1 + R_p}$
- $v_- = v_+$
- $e_2 + v_2 = v_-$, con $v_2 = R_2 i_2$

$e_2 + R_2 i_2 = v_-$

$$i_2 = \underbrace{\left(e_1 \frac{R_p}{R_p + R_1} - e_2\right)}_{v_2 = v_- / R_2,\ v_- = v_+} \frac{1}{R_2}$$

- KVL Esterno $\rightarrow$ $v_u = R_0 i_2 + v_+$

$$v_u = \frac{R_0}{R_2}\left(e_1 \frac{R_p}{R_1 + R_p} - e_2\right) + e_1 \frac{R_p}{R_1 + R_p}$$

$$v_u = e_1 \frac{R_p}{R_1 + R_p}\left(1 + \frac{R_0}{R_2}\right) - e_2\left(\frac{R_0}{R_2}\right)$$ $\rightarrow$ ora possiamo fare una semplificazione

In uscita v_u ottengo tens proporzionale a generatore 1 e a generatore 2, dove la proporzionalità con 1 è positiva, e quella con 2 è negativa

$$\underbrace{v_u = \overset{>0}{\alpha} e_1 + \overset{<0}{\beta} e_2}_{\text{lo immaginiamo così}}$$

$\rightarrow$ α è >0 x v $\ominus$ terminale non invert

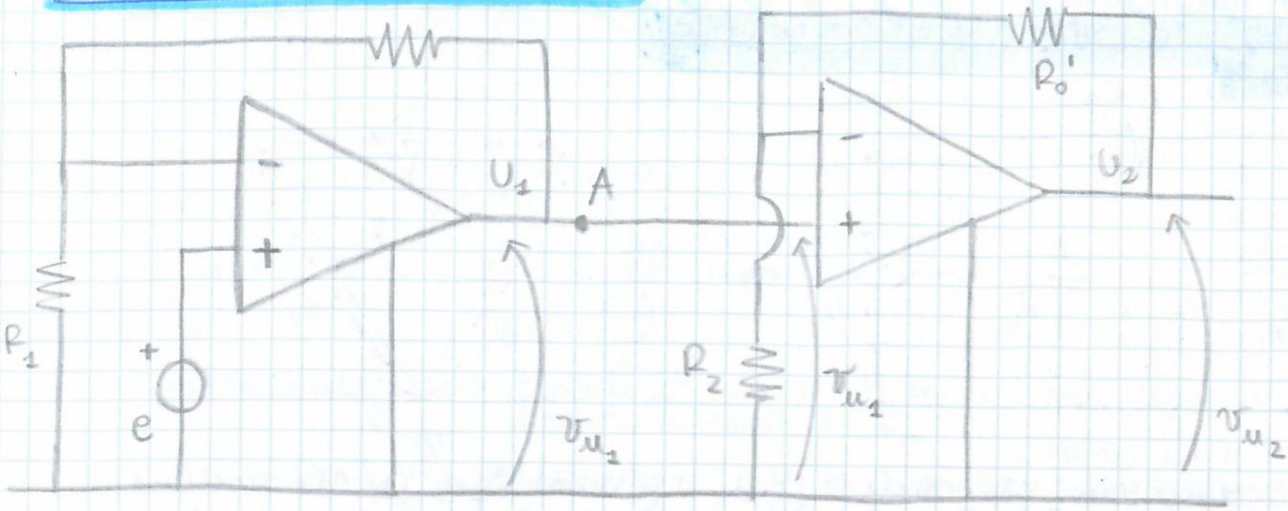
β è negativo x k terminale invertente $\oplus$

<u>Caso particolare</u> : $\frac{R_p}{R_1} = k = \frac{R_0}{R_2}$ $\Rightarrow$ semplifico

$$\boxed{v_u = e_1 \frac{R_p}{R_1\left(1 + \frac{R_p}{R_1}\right)}(1 + k) - e_2 k = k(e_1 - e_2)}$$

$\rightarrow$ l'uscita è proporzionale attraverso k alla differenza dei generatori

5) COLLEGAMENTO IN CASCATA (tra 2 amplificatori)



vista da sola è un AMPLIFICATORE NON INVERTENTE

dove la $v_{u_1} = e\left(\frac{R_0}{R_1}+1\right)$

↓

questo valeva se a dx di u_1 non c'è nulla. In questo caso ho x es un nodo A, ma la situaz è la stessa perché a dx di ha ho una corrente $i_+'=0$ ($\Rightarrow$ corto circuito)

↓

non ho cambiato le condiz → posso riutilizzare * i risultati

* ↓ Allora questa tens è nota e vale v_{u_1} $(=v_+')$

Questo è un altro AMPLIFICATORE non INV.

⇓

$$v_{u_2} = v_{u_1}\left(\frac{R_0'}{R_2}+1\right)$$

$$\boxed{v_{u_2} = e\left(\frac{R_0}{R_1}+1\right)\left(\frac{R_0'}{R_2}+1\right)}$$

la cascata è il 1° generat moltiplicato x ognuno di questi rapporti a seconda di quanti amplificatori ci sono

- AMPLIFICATORE NON INVERTENTE $v_u = e\left(\frac{R_2}{R_1}+1\right)$
- AMPLIFICATORE INVERTENTE $v_u = -e\,\frac{R_0}{R_s}$
- INSEGUITORE DI TENSIONE $v_u = e$
- AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE $v_u = k(e_1 - e_2)$
- CIRCUITO SOMMATORE $v_u = -R_0\left(\frac{e_1}{R_1}+\frac{e_2}{R_2}+\frac{e_3}{R_3}\right)$
- COLLEGAMENTO IN CASCATA $v_{u_2} = e\left(\frac{R_0}{R_1}+1\right)\left(\frac{R_0'}{R_2}+1\right)$

Osservando:

sono le 2 resist. collegate a quel nodo ①

$$\text{①} \begin{cases} \hat{v}_1 \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right) + v_2 \left(-\frac{1}{R_B}\right) = a_1 \\ \hat{v}_1 \left(-\frac{1}{R_B}\right) + \hat{v}_2 \left(\frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_B}\right) = -a_2 \end{cases} \text{②}$$

R_B è la resist collegata tra ① e ② presa con il -

sono le 2 resist collegate al nodo ②

ci sono i termini noti = generat di corr.
POSSO OTTENERE ⇒ UNA REGOLA:

- segno + se butta nel nodo
- segno - se preleva dal nodo

Regola

condiz applicabilità → circuito con N nodi a cui associo N-1 tensioni nodali $\hat{v}_n$

Il circuito avrà N-1 equazioni:

Nel nodo ⓝ ⇒ $\boxed{\hat{v}_n \left(\sum_k \frac{1}{R_k}\right) + v_j \left(-\sum_q \frac{1}{R_q}\right) + \dots\dots = \sum_n \pm a_n}$

+ tanti altri termini di questo tipo x tutti i nodi ≠ ⓝ

tensione del nodo ennennmo

dove R sono i resistori collegati al nodo n

tensione degli altri nodi

dove q sono i resistori collegati tra nodo ⓝ e nodo ⓙ

n sono i generat di corrente collegati al nodo ⓝ

+ se la corr. entra nel nodo

- se la corr. esce dal nodo

Noi possiamo poi scrivere il sistema come una matrice di coeff × vettore delle incognite = vett. termi noti

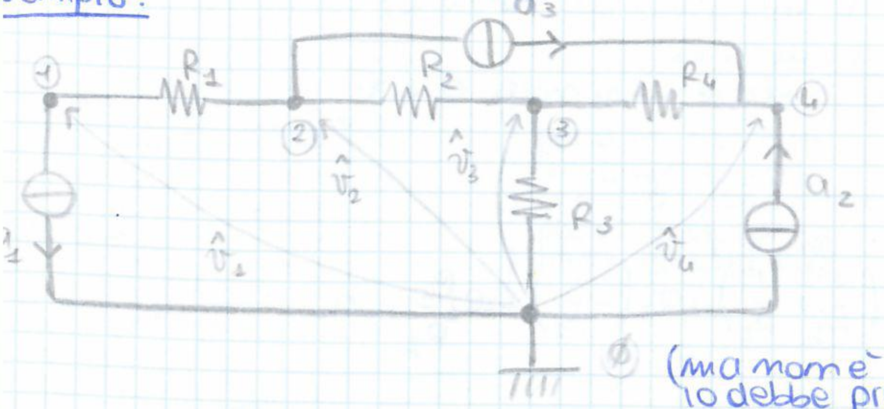
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} & -\frac{1}{R_B} \\ -\frac{1}{R_B} & \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

matrice dei coefficenti — vettore delle incogn. — vettore dei termini noti

Il metodo automatico nodale consente, guardando direttam. il circuito, di riempire matr dei coeff e quella dei termini noti ⇒ facile da programmare

Metodo automatico utilizzabile x matrice 2×2 a mano, se è + grande ⇒ faccio fatica.

Esempio:



N=5 ⇒ sistema di 4 eq

(ma nome è detto che lo debbo prendere sempre quello in basso)

v_1, v_2, v_3, v_4 sono le 4 incognite

Matrice :

tra 2 e 3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_1}{R_1} + a_0 \\ -\frac{e_2}{R_4} \end{bmatrix}$$

x a_0 ok

Termini della diagonale principale sono quelli legati alle resistenze attaccate ai nodi

tra 3 e 2

$(N-1-K) \times (N-1-K)$

la regola automatica x LA MATRICE non cambia !!!
(È solo + piccola la matrice x k ho tolto delle $\hat{v}$)

il nodo 2 va verso un nodo declassato passando attraverso R_1 va verso la tens e_1

nei termini noti trovo anche i generat di tensione

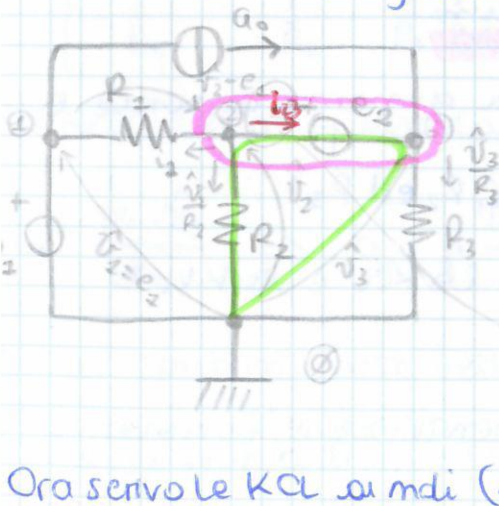
passa attraverso R_4 per arrivare al nodo declassato 4 va verso la tens e_2

i segni sono quelli delle tensioni

Modifichiamo solo i termini noti, non la matrice!

METODO NODALE con generat di tens indip NON collegati x forza al nodo di rif

Non è detto che generat di tens siano collegati al nodo di riferimento, potrebbero essere collegati ad altri



scarto l'incognita $\hat{v}_1$ perché $\hat{v}_1 = e_1$

(ho 2 generat. di tensione → e_1 tra ① e rif; → e_2 tra ② e ③)

questa corrente? NON LA POSSO TROVARE!

se chiamo K i generat di tens attaccati al riferimento ⇓ ho ancora $N-1-K$ ep

Ora scrivo le KCL ai nodi (non 1)

nodo ①: scartato

nodo ②

$$\frac{\hat{v}_2 - e_1}{R_1} + \frac{\hat{v}_2}{R_2} + i_{23} = 0$$

incognite

nodo ③

$$a_0 + i_{23} = \frac{\hat{v}_3}{R_3}$$

per diminuire le incognite, se guardo, vedo che posso fare una KVL tra ③, ② e ⓪

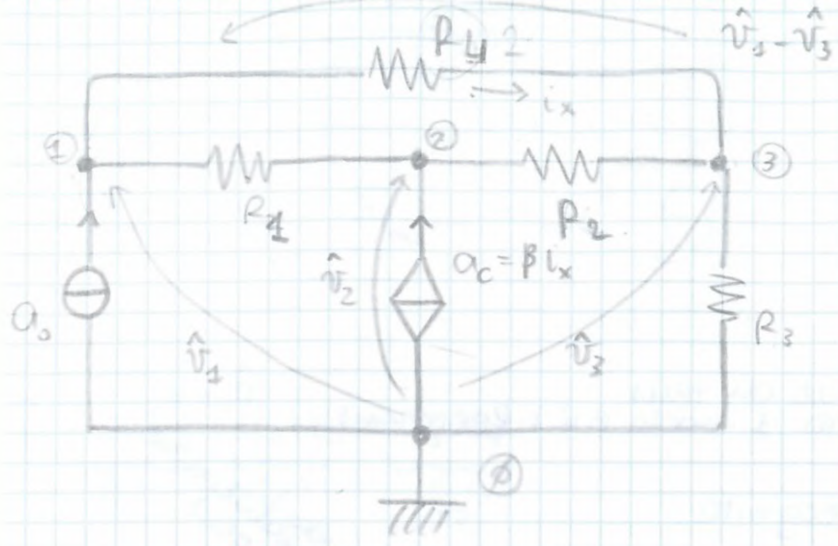
KVL ③ → ② → ⓪ → ③

$$\hat{v}_2 = e_2 + \hat{v}_3$$

ho 3 ep e 3 incognite

combinando le 2 ep della KCL ne ottengo una sola a 2 incognite (scompare i_{23}) →

REGOLA NODALE PER GENERAT. PILOTATI (dipendenti) di corrente



1) faccio finto che a_0 sia indipendente

⇓

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poi però cerco quantità pilotante ⇒ corrente i_x e lo metto dentro

$$i_x = \frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_3}{R_4} \Rightarrow a_c = \beta \frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_3}{R_4}$$

Ma ho contaminato vettore dei termini noti con incognite ⇒ riscrivo sistema

$$\begin{cases} \hat{v}_1\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_1}\right) + \hat{v}_2\left(-\frac{1}{R_1}\right) + \hat{v}_3\left(-\frac{1}{R_4}\right) = a_0 \\ \hat{v}_1\left(-\frac{1}{R_2}\right) + \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right) + v_3\left(-\frac{1}{R_2}\right) = \beta\frac{\hat{v}_1-\hat{v}_3}{R_4} \\ \hat{v}_1\left(-\frac{1}{R_4}\right) + \hat{v}_2\left(-\frac{1}{R_2}\right) + \hat{v}_3\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \hat{v}_1\left(-\frac{1}{R_1}-\frac{\beta}{R_4}\right) + \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \hat{v}_3\left(-\frac{1}{R_2}+\frac{\beta}{R_4}\right) = 0$$

⇓

RISCRIVO LA MATRICE

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1}-\frac{\beta}{R_4} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2}+\frac{\beta}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{non + simmetria!}$$

REGOLA DI LINEARITÀ DEI CIRCUITI

Ogni variabile elettrica ($\hat{v}$ o i) è una somma di contributi dei generatori indipendenti con coefficienti che dipendono solo dai parametri del circuito ($R, \alpha, \beta, r_m, g_m$) → vale per qualunque circuito

$$y = e_0 K_0 + e_1 K_1 + \dots + a_0 H_0 + a_1 H_1 + \dots \rightarrow = \text{COMBINAZIONE LINEARE DEI GENERATORI}$$

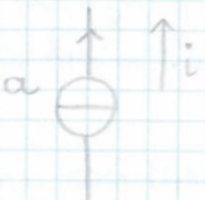
$$y = \sum_k e_k \cdot K_k + \sum_n a_n \cdot H_n$$

$(\underbrace{R, \alpha, \beta, r_m, g_m}_{\text{parametri pilotati}})$

$$\hat{v}_3 = \underbrace{e_0 K_0}_{\hat{v}_3'} + \underbrace{a_0 H_0}_{\hat{v}_3''} + \underbrace{a_1 H_1}_{\hat{v}_3'''}$$

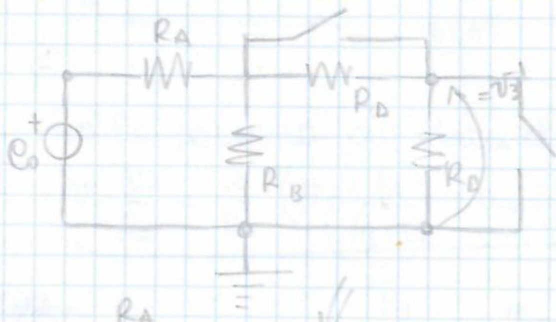
Studiamo ognuno di questi tre contributi, uno alla volta:

- $\hat{v}_3'$ → devo isolarlo e per farlo devo mettere a zero i generatori a_0 e a_1

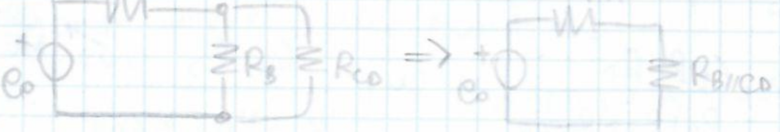


per un generatore di corrente:
→ eq. funzionamento $i = a$
Per $a = 0$ ⇒ il generatore diventa un circuito aperto

⇒ riscrivo il circuito con i circuiti aperti al posto dei gen. di corr:

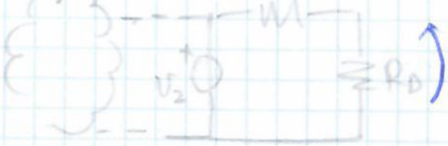


= rete a scala



$$v_2 = e_0 \frac{R_{B//CD}}{R_A + R_{B//CD}}$$

SOSTITUZIONE



$$v_3' = v_2 \frac{R_D}{R_C + R_D}$$

$$v_3' = e_0 \frac{R_{B//CD}}{R_A + R_{B//CD}} \cdot \frac{R_D}{R_C + R_D} = K_0 \quad (\Rightarrow \text{forma } v_3' = e_0 K_0)$$

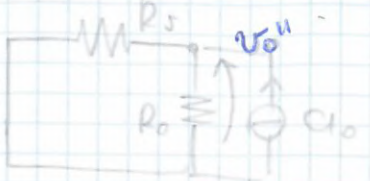
- $\hat{v}_3''$ → devo isolarlo mettendo $e_0 = 0$ e $a_1 = 0$

per un generat. di tensione
→ eq. funzionamento : $v = e$

$v_o' \rightarrow a_o = 0$

$$v_o' = v_S \frac{R_o}{R_S + R_o} = K_1$$

$v_o'' \rightarrow v_S = 0$



$$v_o'' = a_o \cdot \frac{R_o R_S}{R_o + R_S} = H_o$$

$$\Rightarrow v_o = v_o' + v_o''$$

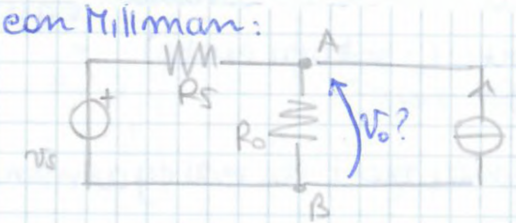
$$v_o = v_S \frac{R_o}{R_S + R_o} + a_o \frac{R_o R_S}{R_o + R_S}$$

Calcoliamo la potenza assorbita da R_o:

1° circuito $\rightarrow$ $p_o' = v_o' i' = \frac{(v_o')^2}{R_o} = v_S^2 \cdot \frac{R_o^2}{(R_S+R_o)^2 R_o} = v_S^2 \cdot \frac{K_1}{R_S + R_o}$

2° circuito $\rightarrow$ $p_o'' = v_o'' i_x = a_o^2 \frac{R_o R_S^2}{(R_S+R_o)^2} = a_o^2 \cdot \frac{R_S}{R_o + R} = a_o^2 \frac{R_S}{R_S + R_o} \cdot H_o$

2) soluzione con Millman:



$$v_o = \frac{\frac{v_S}{R_S} + a_o}{\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_o}} = \frac{\frac{v_S + R_S a_o}{R_S}}{\frac{R_o + R_S}{R_S R_o}}$$

$$= v_S \frac{R_o}{R_S + R_o} + \frac{R_S R_o}{R_S + R_o}$$

calcoliamo la potenza assorbita da R_o

$$p_o = v_o i_o = v_o \frac{v_o}{R_o} = \frac{1}{R_o}\left(v_S \underset{\overset{\shortparallel}{K_1}}{\frac{R_o}{R_S+R_o}} + a_o \underset{\overset{\shortparallel}{H_o}}{\frac{R_S R_o}{R_S+R_o}}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{R_o}\left(v_S^2 K_1^2 + a_o^2 H_o^2 + 2 v_S a_o K_1 H_o\right)}_{\text{sempre} \neq \text{ da } p_o' + p_o'' \text{ !!!}}$$

combinaz. lineare di generatori

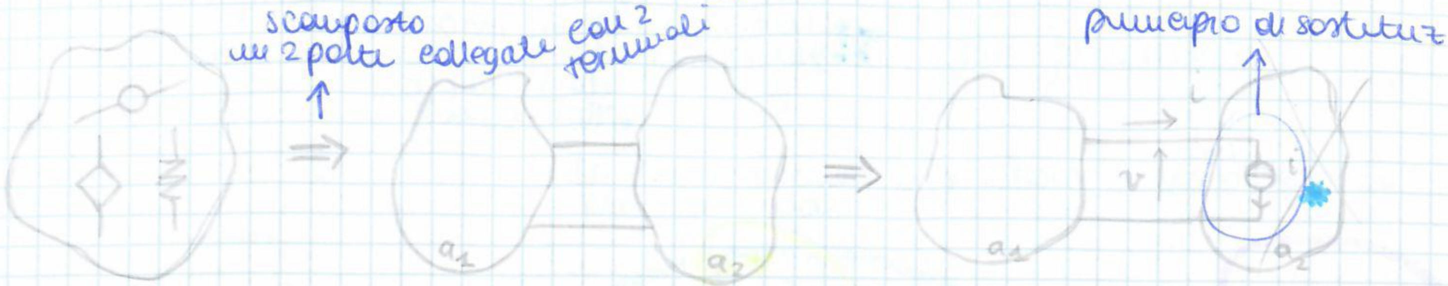
$p = v \cdot i$, ma p' NON È una combinazione lineare

combinaz. lineare di generatori

$\Rightarrow$ la potenza giusta è quella di Millman

TEOREMA THEVENIN

Circuito scomponibile in due parti collegate solo da 2 conduttori



Usando il teorema della sostituzione si elimina tutto l'elem. di dx e si sostituisce con la variabile calcolata

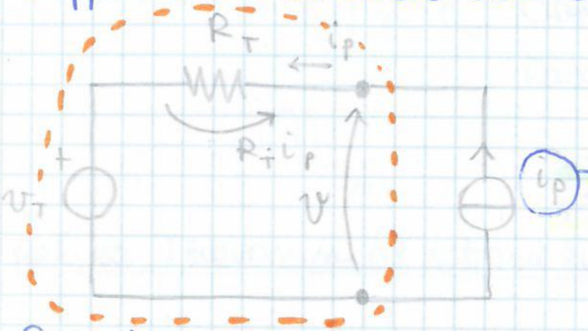
- Si dimostra che si può scrivere tens tra i 2 cond del collegamento:

$v = v_{a_1} + Q i$

x dimensionalità deve essere 1 resistenza → è la resistenza con i generatori interni spenti

se all'interno del circuito ci sono generatori pilotati NON VANNO CANCELLATI

Supponiamo di avere un circuito del tipo:



Guardiamo percorso chiuso ⇒ KVL: $v = v_T + R_T i_p$
Confrontiamo il risultato con tevenin $v = v_{a_1} + Q i$ } hanno la stessa forma

Riscriviamo Thevenin come:

$v = v_{a_1} + \underbrace{(-Q)}_{=R_T}\underbrace{(-i)}_{=i_p} \implies v = v_{a_1} + R_T i_p$

perche i_p rispetto alla i del circuito sopra è opposta ⇒ $i_p = -i$

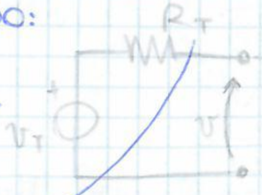
se cambia di segno i_p, cambia di segno R_T, ma il loro prodotto ha comunque lo stesso segno

⇓

THEVENIN

Ipotesi: Circuito scomponibile in due parti connesse solo da due conduttori (= sottocircuiti)

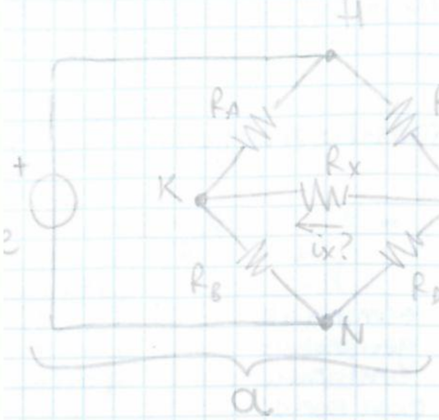
Ogni sottocircuito è equivalente a una struttura del tipo:



- v_T è la tensione a vuoto del sottocircuito con tutti i generatori accesi (xk contiene i contrib. di tutti i generatori del sottocircuito)

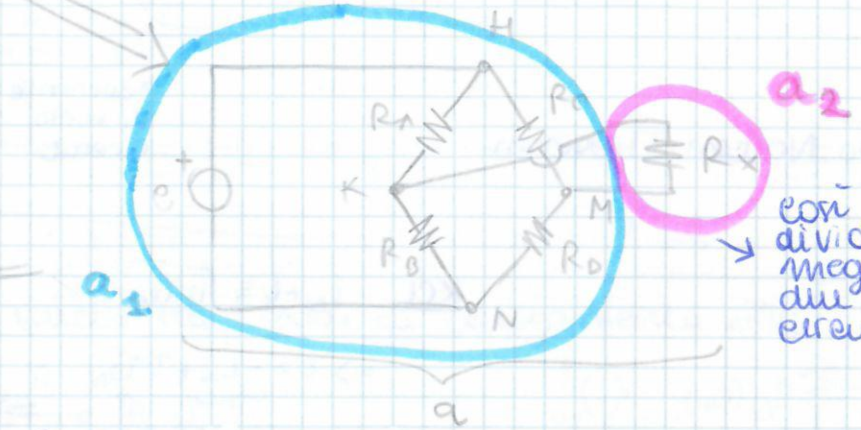
R_T è la resistenza del sottocircuito a generatori spenti

Esempio



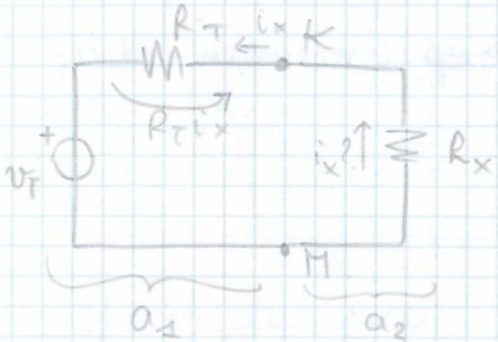
- no partitore
- no Millman
- nodi difficili
- no sovrapp effetti (1 solo generatore)

lo ridisegno in una forma visibilmente più comoda



così posso dividere meglio in due il circuito.

lo ridisegno con l'equivalente per Thevenin di a_1:



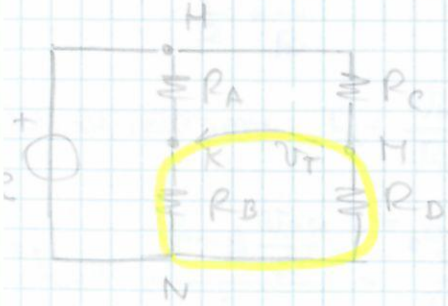
Ora posso trovare i_x

Faccio un KVL: $v_T + R_T i_x + R_x i_x = 0$

$$i_x = -\frac{v_T^{*}}{R_T + R_x}$$ → ma v_T e R_T sono ancora da determinare

R_x ↓ unica quantità nota

Applico Thevenin al sottocircuito a_1



è a vuoto x cui tra K e M non c'è niente di collegato

- Trovo v_T: $v_{KN} = e\,\frac{R_B}{R_A+R_B}$ per partitore tensione

$v_{MN} = e\,\frac{R_D}{R_C+R_D}$ per partitore tensione

ora c'è percorso chiuso

N → K → M → N

$\Rightarrow v_T + v_{MN} = v_{KN} \Rightarrow v_T = v_{KN} - v_{MN}$

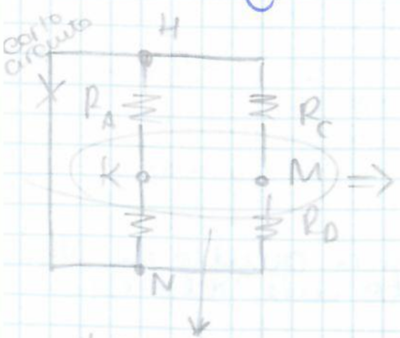
$$^{*}\; v_T = e\,\frac{R_B}{R_A+R_B} - e\,\frac{R_D}{R_C+R_D} =$$

$$= e\left(\frac{R_B}{R_A+R_B} - \frac{R_B}{R_C+R_D}\right)$$

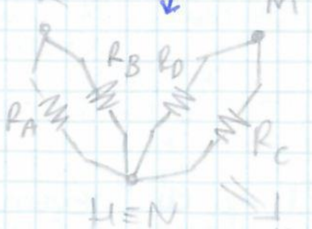
Trovo R_T:

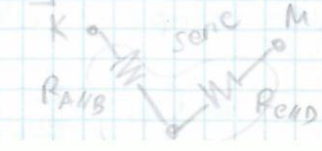
Ritorno al sottocircuito a_1 e per calcolare R_T devo spegnere generatori

⇓



circuito eq.





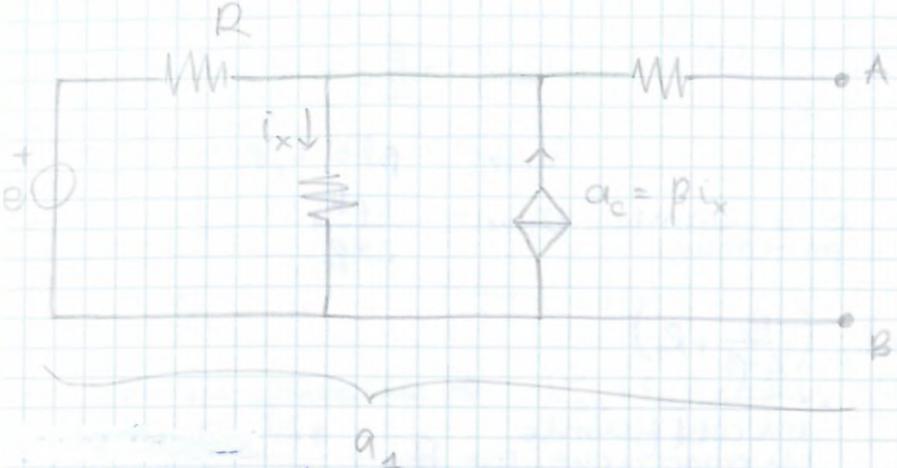
$\Rightarrow R_T = R_{A/\!/B} + R_{C/\!/D}$ *

⇒ trovo i_x valida

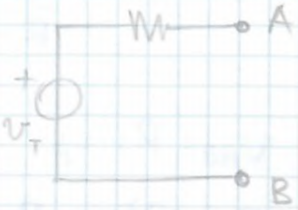
Il gen di corr di prova dovrebbe dare:

$$R_T = \frac{v_T}{i_N} = \frac{\text{tensione a vuoto di Thevenin}}{\text{corrente di corto circuito di Norton}}$$ → si può fare anche così, ma non è molto conveniente

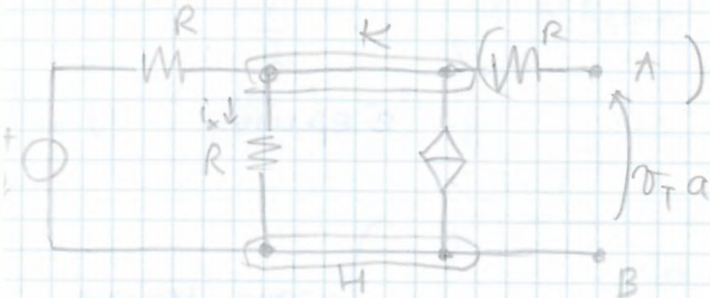
esempio



equivalente di Thevenin →



calcolo v_T → tensione a vuoto tra i nodi di collegamento



non passa corrente in R ⇒ no tensione su R

K e H sono due nodi ⇒ posso applicare Millman

$$v_{KH} = \frac{\frac{e}{R} + a_c}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}}$$ → ora devo mettere a posto a_c (che non è noto xk non è indip)

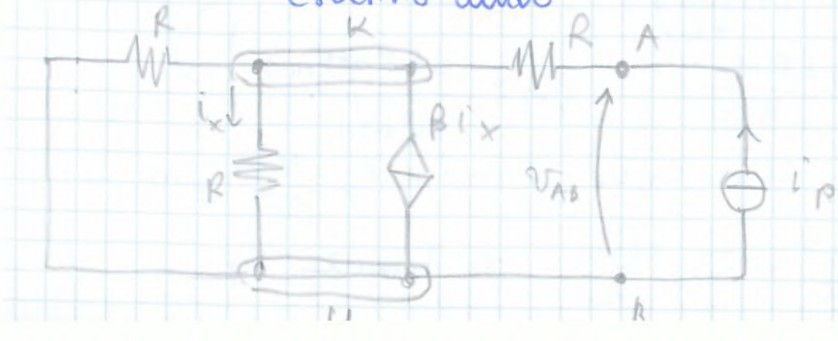
uso la relazione: $i_x = \frac{v_{KH}}{R}$

$$v_{KH} = \frac{\frac{e}{R} + \beta \frac{v_{KH}}{R}}{\frac{2}{R}} = \frac{e + \beta v_{KH}}{2} = \frac{e}{2} + \frac{\beta}{2} v_{KH}$$

$$v_{KH}\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{e}{2} \qquad v_{KH}\left(\frac{2-\beta}{\cancel{2}}\right) = \frac{e}{\cancel{2}} \qquad v_{KH} = \frac{e}{2-\beta}$$

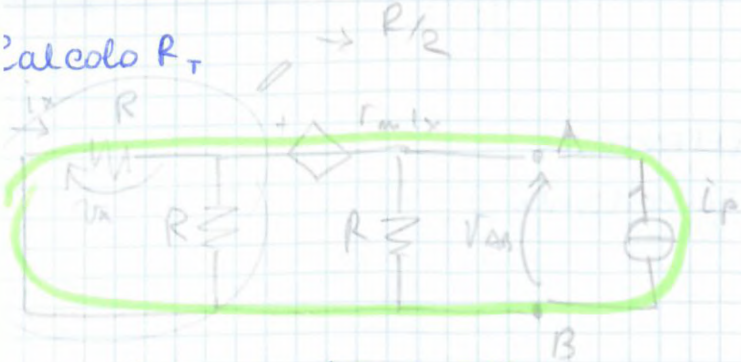
In questo caso $v_T = v_{KH} = \frac{e}{2-\beta}$

Calcolo R_T → contributo di a_1 con generat. spenti, ma con generatore esterno attivo



i generatori pilotati non si possono mai spegnere (xk c'è la loro quantità pilotante attiva)

Calcolo R_T



$$v_{AB} = R_T i_p$$

uso Millman tra A e B

$$v_{AB} = \frac{-\frac{e_c}{R/2} + i_p}{\frac{1}{R/2} + \frac{1}{R}}$$

per KVL su percorso $\Rightarrow$ $v_{AB} + r_m i_x + R i_x = 0$ $\Rightarrow i_x = \frac{-v_{AB}}{R + r_m}$

$$v_{AB} = \frac{+\frac{r_m v_{AB}}{\frac{R}{2}(R+r_m)} + i_p}{\frac{3}{R}} = \frac{R}{3}\frac{2 \cdot r_m}{R(R+r_m)} v_{AB} + \frac{R}{3} i_p$$

$$v_{AB}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r_m}{R+r_m}\right) = \frac{R}{3} i_p \qquad v_{AB} = \underbrace{\frac{R}{3\left(1-\frac{2}{3}\frac{r_m}{R+r_m}\right)}}_{= R_T} i_p$$

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Se io voglio riscrivere tens in funz delle corrente

$$\Downarrow$$

$$i\,dt = C\,dv \quad , \quad dv = \frac{i}{C}dt \quad , \quad \int dv = \frac{1}{C}\int i\,dt' \, .$$

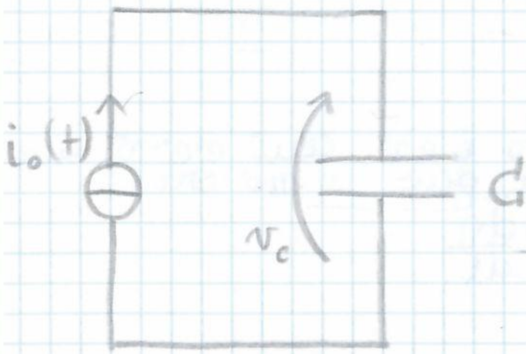
$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' \quad , \quad v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'} \longrightarrow$$ equazione di funzionam del condensatore che esprime la tensione

$$\boxed{i = C\frac{dv}{dt}} \longrightarrow$$ equazione di funzionamento del condensatore che esprime la corrente

esempio (semplice x capire eq funzionamento



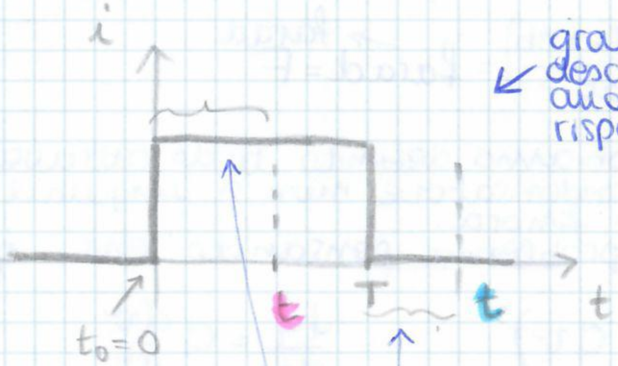


grafico che descrive andam di i rispetto a t

$$v(t) = \cancel{v(t_0)} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_0(t')dt'$$

$v(t_0)$: per semplicità la poniamo $= 0$

- per $t < T$ $\rightarrow$ $v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_0\,dt' = \frac{I_0}{C}\int_0^t dt' = \frac{I_0}{C}\,t'\Big|_0^t = \frac{I_0}{C}t$

  I_0: è una costante

- per $t > T$ $\rightarrow$ $v(t) = \frac{1}{C}\left[\int_0^T i_0(t')dt' + \underbrace{\int_T^t i_0(t')dt'}_{=0}\right] = \frac{1}{C}\int_0^T I_0\,dt' = \frac{I_0}{C}\,t'\Big|_0^T = \frac{I_0 T}{C}$

ora immaginiamo un Δt piccolissimo $\Delta t \to 0$, ma se $\Delta t \to 0$ l'area tende a 0 per cui anche

$$\int_t^{t+\Delta t} i(t')\,dt' = 0$$

$$v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C}\int_t^{t+\Delta t} i(t')\,dt' \quad \to \text{faccio tendere } \Delta t \to 0$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(v(t+\Delta t) - v(t) = \underbrace{\frac{1}{C}\int_t^{t+\Delta t} i(t')\,dt'}_{=0}\right) \Rightarrow$$

dimostro che la tensione v in qualsiasi istante di tempo t è funzione CONTINUA (= non fa salti)

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} v(t+\Delta t) = v(t)}$$

$v(t)$ è CONTINUA sul condensatore

la corrente può non essere continua xk è definita dalla derivata e potrebbe cambiare da 1 pt all'altro.

Potenza assorbita sul condensatore

$$p = v \cdot i = v\, C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \text{non so il segno!}$$

sostituisco l'eq di funz.

C > 0 ×

→ potrebbe essere >0 ⇒ pot generata → energia da dove viene?

→ potrebbe essere <0 ⇒ assorb → $vC\frac{dv}{dt}$

$$p = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \qquad \int_{t_0}^{t} p\,dt = \int_{\mathcal{E}_0}^{\mathcal{E}} d\mathcal{E}$$

$$\int_{t_0}^{t} v_C \frac{dv}{dt}\cancel{dt} = \int_{\mathcal{E}_0}^{\mathcal{E}} d\mathcal{E}$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = C\int_{t_0} v\,dv \qquad \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = C\left[\frac{v^2}{2}\right]_{t_0}^{t}$$

v non so, se

- tens aumenta ⇒ derivata >0 (a prescindere se inizialm è >0 o <0)
- se diminuisce ⇒ derivata <0

x cercare di capire un nuovo el energia

$$p = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \qquad \int_{\mathcal{E}(t_0)}^{\mathcal{E}(t)} d\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t} p\,dt \to \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t_0) = \int_{t_0}^{t} v\, C \frac{dv}{dt'}\,dt'$$

$$\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t_0) = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\,dv = C\left.\frac{v^2}{2}\right|_{v(t_0)}^{v(t)}$$

$\underbrace{v(t_0)}_{\text{lo sappiamo fare}}$

a t_0: ⟶ t_0 come momento in cui nasce il condensatore x cui non ha nessuna tensione, né energia sopra.

perché t_0 è nascita

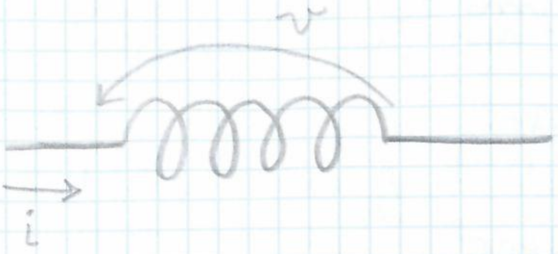
$$\mathcal{E}(t) = \frac{C\,v^2(t) - 0}{2} \qquad \mathcal{E}(t) = \frac{C\,v^2(t)}{2}$$

C è >0 — $v^2(t)$ è >0

// ENERGIA PRESENTE ...

⇓ energia sul conden. è sempre quantità

INDUTTORE (no giustificaz fisica)



→ avvolgimento di filo ad elica

ma cambiano i e v

↑

tutte le cose dimostrate × condensa valgono anche × indut

⇑

equaz. di funzionamento → $v = L \frac{di}{dt}$ (come condensat, ma scambiando tens. con corrente)

L: è >0 → L = induttanza

con la convenz utilizzata → è >0

L = induttanza

$$[L] = \frac{V}{A/s} = H \quad (= \text{henry})$$

$$di = \frac{1}{L} v\, dt \qquad \int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{L} v\, dt' \qquad \int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v\, dt'$$

⇐

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(t')\, dt'$$

$$\boxed{v = L \frac{di}{dt}}$$ → eq di funzionamento per la tensione

$$\boxed{i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(t')\, dt'}$$ → eq di funzionamento per la corrente

Anche qui si può dimostrare che la corrente è una funzione continua, in modo analogo (anche × la def) al condensat, ma × la corrente.

(domanda esame dimostraz ↑)

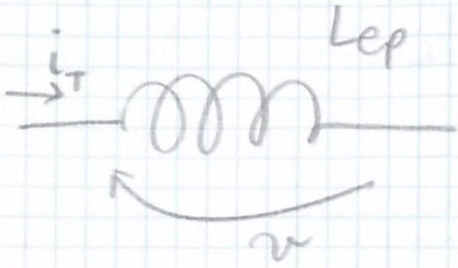
Potenza assorbita

$$p = v\, i = L \frac{di}{dt} i$$

$v = L \frac{di}{dt}$; L: è >0

→ può essere >0 oppure <0 → non sappiamo il segno della potenza a priori.

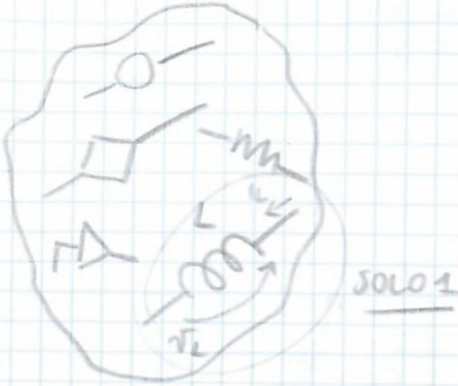
facendo gli stessi passaggi di prima (domanda esame) ↓

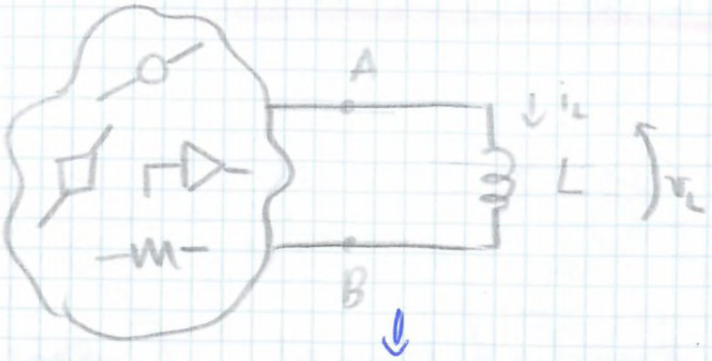


legge: $\boxed{\frac{1}{L_{ep}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$

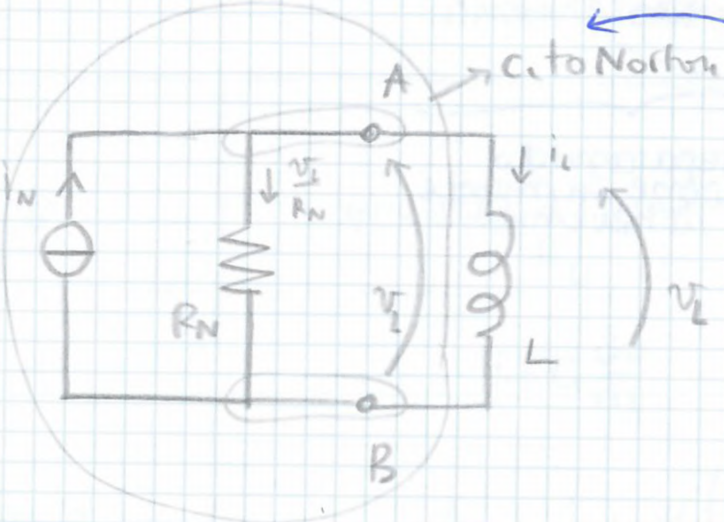
	CONDENSATORE	INDUTTORE
v	$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$	$v = L\frac{di}{dt}$
i	$i = C\frac{dv}{dt}$	$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t')dt'$
serie	$\frac{1}{C_{ep}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$	$L_{ep} = L_1 + L_2$
parallelo	$C_{ep} = C_1 + C_2$	$\frac{1}{L_{ep}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$
q. continua	$v(t)$	$i(t)$

b) circuiti con un induttore





applico teorema Norton



KCL in A → $i_n = \frac{v_L}{R_N} + i_L$

posso scrivere $v_L = L \frac{di_L}{dt}$ $\Rightarrow i_n = \frac{L}{R_N}\frac{di_L}{dt} + i_L$

dividi per $\frac{L}{R_N}$

$$\underbrace{\frac{d i_L}{dt} + \frac{1}{L/R_N} i_L = \frac{1}{L/R_N} i_n}$$

unica incognita → ma è f continua

equazione DIFFEREN-ZIALE DEL 1° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI NON OMOGENEA

le due eq sono uguali nella forma

$\Rightarrow$ se s è costante $x_p = K_p =$ costante (se ho sorg. costante $\Rightarrow$ anche soluz è cost)

$\Rightarrow$ sostituisco ipotesi di soluz nella eq diff. (quella particolare)

$$\cancel{\frac{dx_p}{dt}} + \frac{x_p}{\tau} = \frac{S}{\tau} \Rightarrow \frac{K_p}{\tau} = \frac{S}{\tau} \Rightarrow K_p = S \quad (2)$$

(soluzione particolare è uguale a S)

la derivata va a 0 xk $x_p =$ costante

Ma solo se i generatori sono costanti!

$\Downarrow$

soluzione x è

$$x = K e^{-\frac{t}{\tau}} + S$$

τ e S le calcolo (da tabella, da Thevenin)

K è l'unica cosa che mi manca!

Allora x trovare K impongo la CONDIZ INIZIALE che deve essere nota indipendentemente, deve essere data altrimenti non posso risolvere eq diff.

$$x(0) = K e^{\frac{0}{\tau}} + S \qquad (e^{0} = 1)$$

$$x(0) = K + S$$

$$K = x(0) - S \quad (3)$$

$\Downarrow$

SOSTITUISCO

$$\boxed{x(t) = [x(0) - S]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + S}$$

è la soluzione del sistema SE i generatori sono costanti

Per $t \to \infty \Rightarrow x(\infty) = S$ (l'esponenziale $[x(0)-S]e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$) (abuso di notaz.)

Il termine S è uguale al valore della funz all'∞!

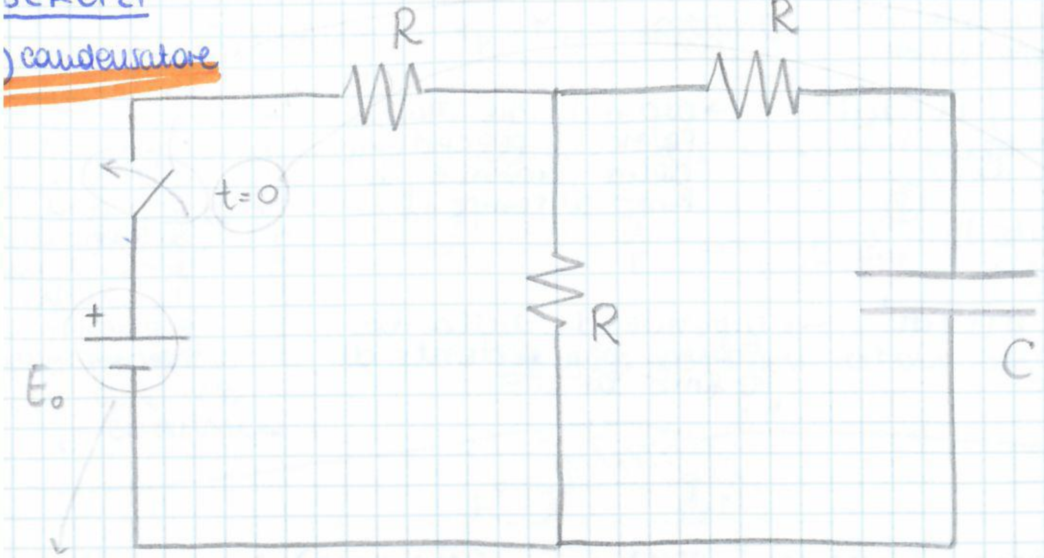
$\Downarrow$

SOLUZIONE

$$\boxed{x(t) = [x(0) - x(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty)} \quad \text{per } t > 0$$

SERCIZI

) condensatore



↳ operaz svolta dall'interruttore che si chiude

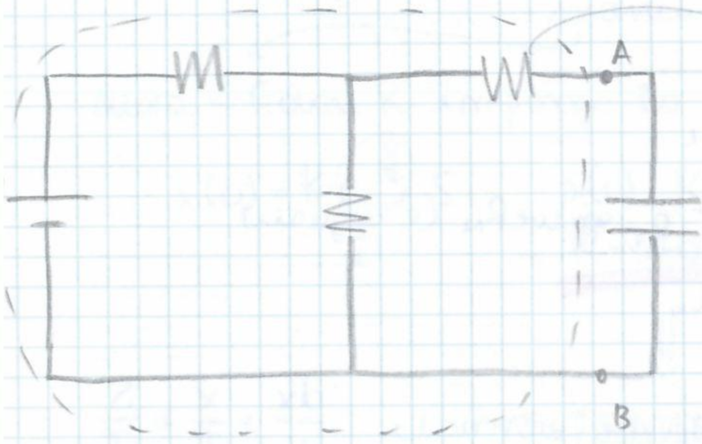
↳ istante di tempo in cui si chiude

- 1 solo elem diff o con memoria (condensatore)
- 1 gen. indip costante

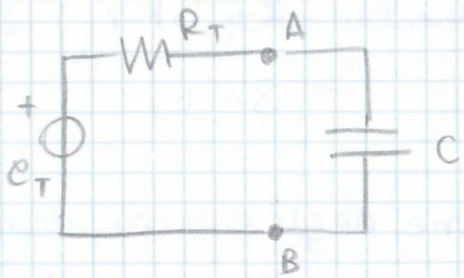
atteria = generat indip cost di tensione

$t<0$ → il circuito e' inerte (spento)
rima di $t=0$ il circ di sx e' aperto e a sx non circola corrente

$t \geq 0$ → il circuito cambia, l'interruttore e' chiuso



di tutta questa parte si può fare l'equivalente di Thevenin



Poi uso la formula:

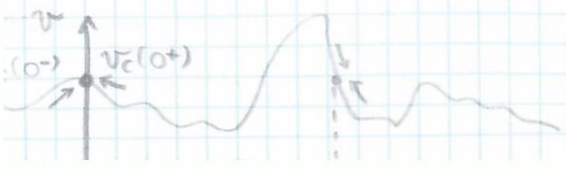
$$v_C(t) = \left[v_C(0) - v_C(\infty)\right] e^{-t/\tau} + v_C(\infty)$$

Ora devo trovare quello che mi serve per risolverla:

- $v_C(0)$
- $v_C(\infty)$
- τ

) Trovo la condizione iniziale $v_C(0)$ → che deve essere un dato del problema, qualcosa che venga da fuori, ma non viene data come dato del probl, ma le devo capire e trovare ragionando io

Sfrutto le proprieta' di v_C che e' variabile continua (di stato)
Allora, in ∀ punto la prendo, ha sempre lo stesso valore con i lim dx e sx.
Questo vale anche per $t=0$. Anche in 0 e' continua, e il suo valore non cambia se arrivo da dx o da sx



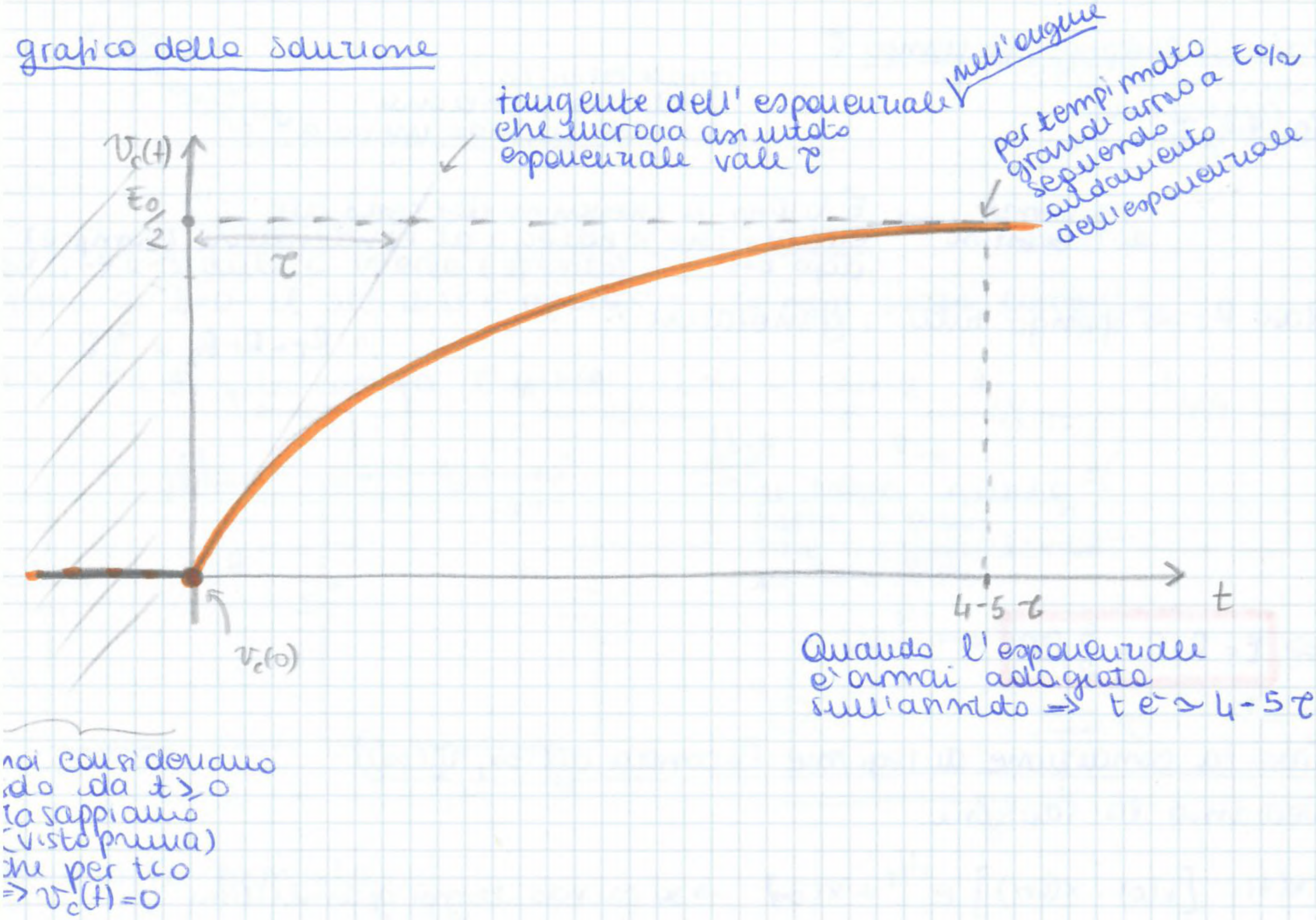
Torno alla soluzione

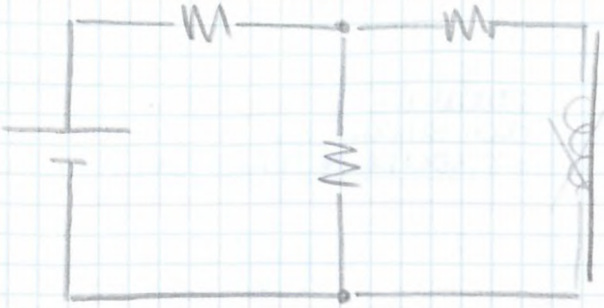
$$v_c(t) = \left[v_c(0) - v_c(\infty) \right] e^{-t/\tau} + v_c(\infty)$$

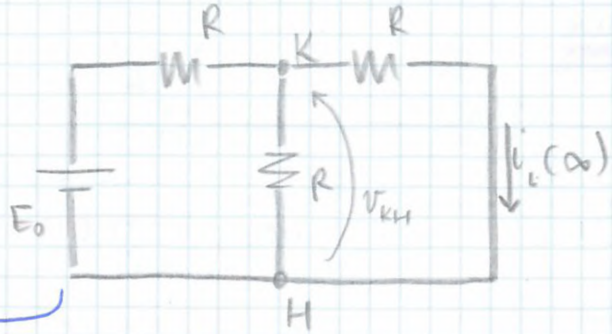
$$\Downarrow$$

$$v_c(t) = \left(0 - \frac{E_0}{2}\right) e^{-2t/3CR} + \frac{E_0}{2} = \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-2t/3CR}\right)$$

grafico della soluzione







$$v_{KH} = \frac{\frac{E_0}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}} = \frac{E_0}{3} \quad \text{per Millman}$$

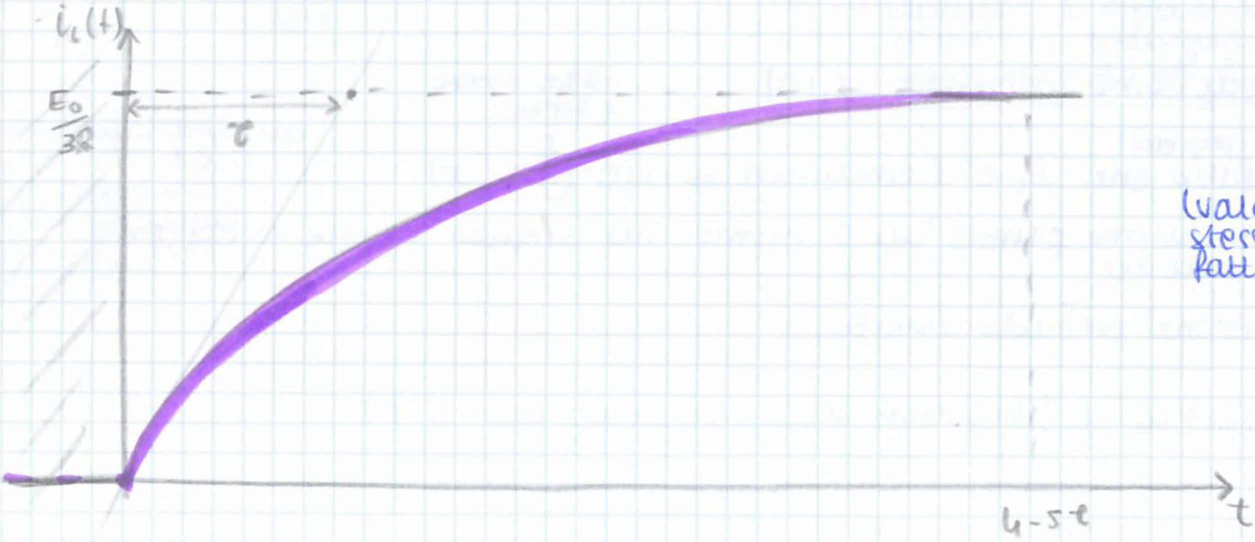
$$i_L = \frac{v_{KH}}{R} = \frac{E_0}{3R} \qquad \boxed{i_L(\infty) = \frac{E_0}{3R}}$$

Sostituisco nell'eq:

$$i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)]\, e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$$

$$\boxed{i_L(t) = \left[0 - \frac{E_0}{3R}\right] e^{-\frac{3Rt}{2L}} + \frac{E_0}{3R} \quad \Big| \quad i_L(t) = \frac{E_0}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3Rt}{2L}}\right)}$$

grafico della funzione



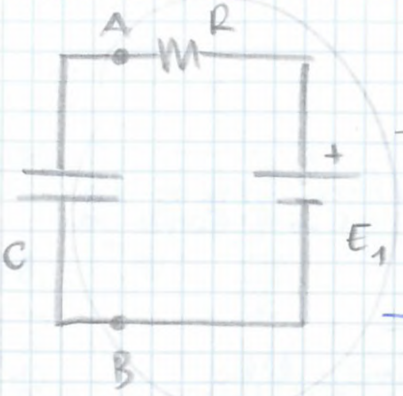
(valgono le stesse consideraz fatte prima)

KVL → $v_c(0^-) + E_0 = 0$ ⇒ $\boxed{v_c(0^-) = -E_0}$

) Trovo il tempo τ

Per trovarlo devo trovare R_T $(\tau = CR_T)$

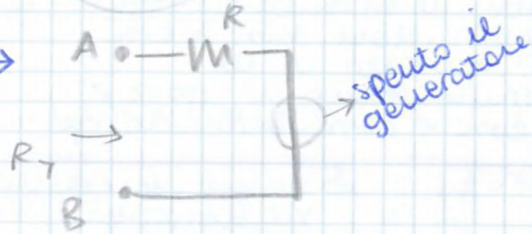
Devo considerare il circuito guardando il circuito per $t \geq 0$



→ faccio tevenin di questo

→ è già nella forma di thevenin

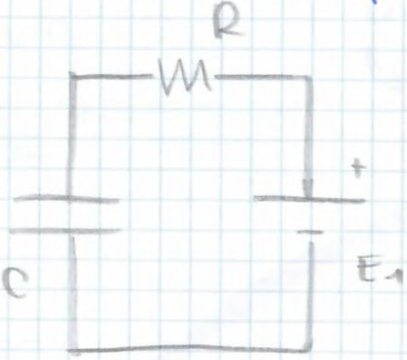
R_T →



⇒ $R_T = R$ $\boxed{\tau = CR}$

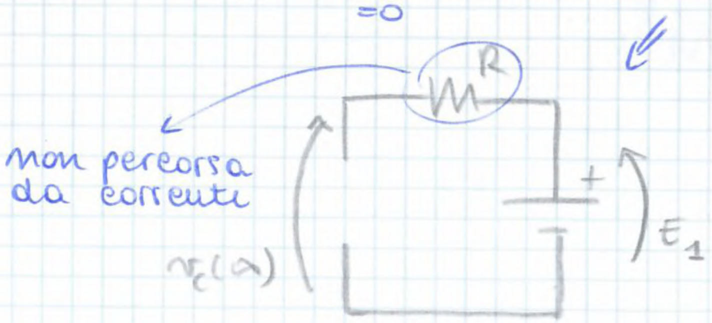
) Trovo la condiz a regime $v_c(\infty)$

Il circuito è sempre quello per $t \geq 0$



Sappiamo che a regime tutto è costante

$i = C \underbrace{\frac{d\overset{cost}{v}}{dt}}_{=0}$ ⇒ $i = 0$ ⇒ circuito aperto



KVL: $v_c(\infty) - E_1 = 0$

$\boxed{v_c(\infty) = E_1}$

luzione $v_c(t) = [v_c(0) - v_c(\infty)]\, e^{-t/\tau} + v_c(\infty)$

$\boxed{v_c(t) = [-E_0 - E_1]\, e^{-t/CR} + E_1}$

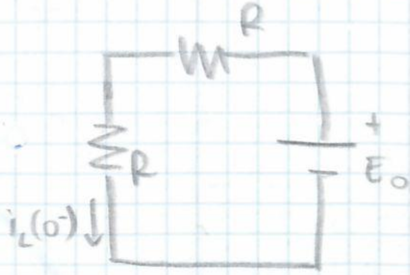
grafico

...usione $\rightarrow$ $i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)]\, e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$

<u>Trovo $i_L(0)$</u>

Sfrutto continuità di i_L $\Rightarrow$ $i_L(0^-) = i_L(0^+)$

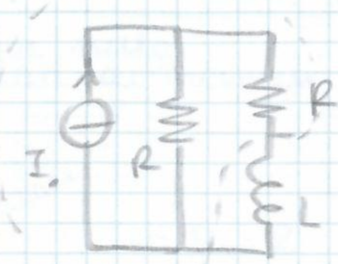
abbiamo visto prima che prima di 0 il circuito era $\rightarrow$



per il partitore $\Rightarrow$ $i_L(0^-) = \boxed{\frac{E_0}{2R} = i_L(0^+)}$

<u>Trovo τ</u>

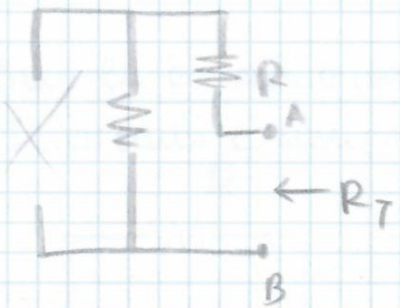
Il circuito per $t \geq 0$ è



devo trovare R_T

$\Downarrow$

devo fare Thevenin a tutto meno che all'induttore e spengo generatori



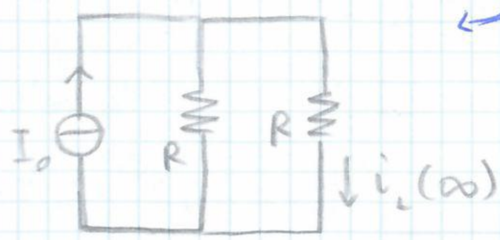
$R_T = 2R$ (perché le R sono in serie)

$\Rightarrow$ $\boxed{\tau = \frac{L}{2R}}$

<u>Trovo la condizione a regime $= i_L(\infty)$</u>

Prendo ancora il circuito per $t \geq 0$. Siamo in condizioni stazionarie
$\Rightarrow$ tutto costante

Eq funz induttore è $v = L \underbrace{\frac{di}{dt}}_{=0} = 0$ $\Rightarrow$ $v_L = 0$ $\Rightarrow$ induttore è corto circuito



Ancora partitore corrente $\Rightarrow$ $\boxed{i_L(\infty) = \frac{I_0}{2}}$

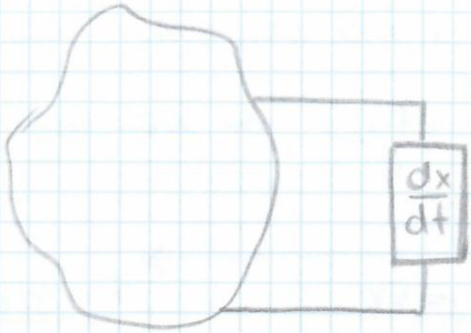
...usione $i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)]\, e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$

...stituisco $\boxed{i_L(t) = \left[\frac{E_0}{2R} - \frac{I_0}{2}\right] e^{-\frac{t\,2R}{L}} + \frac{I_0}{2}}$

grafico

TRANSITORI (ripasso)

Ipotesi → un solo elemento differenziale
↘ generatori indipendenti costanti *



$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{S}{\tau}$$

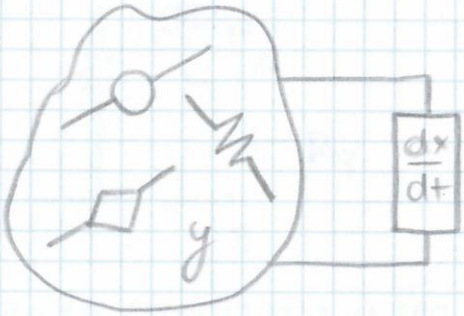
$$x(t) = [x(0) - x(\infty)]\, e^{-t/\tau} + x(\infty)$$

per $t \geq 0$

ALTRA VARIABILE $y \neq$ costante

Se io voglio trovare un'altra variabile y generica (tensione o corrente)

Di queste altre variabili non posso dimostrare la continuità; in generale non sono f. continue



Supponiamo di aver già risolto circuito a dx e aver trovato la x, allora al posto del dipolo a dx x sostituzione metto 1 generat che mi dice quanto vale x (tens o corr ⇒ cerchietto vuoto)

Ora scriviamo y con la sovrapposizione degli effetti

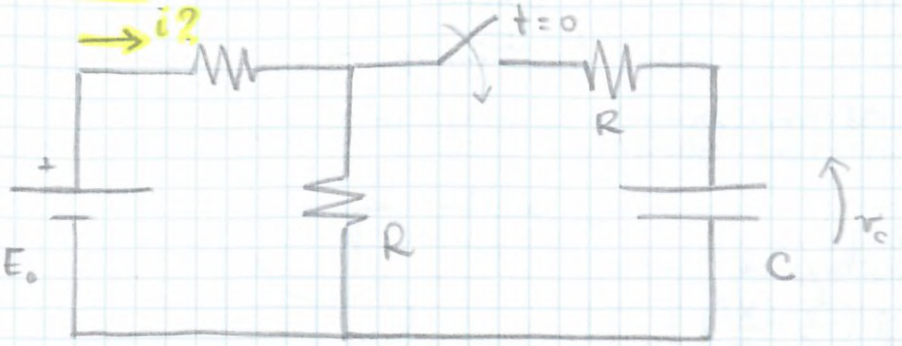
$$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \dots$$ |→ effetti generatori interni

dato che generat interni sono COSTANTI x ipotesi * uso le maiuscol

$$y = \quad + \alpha_2 E_2 + \dots + \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2$$ e poi devo aggiungere effetto generat esterno

↓

esempio (per vedere il calcolo di $y(0) = y(0^+)$)



$i(t) = [i(0) - i(\infty)] e^{-t/\tau} + i(\infty)$ per $t \geq 0$ → voglio trovare quella corrente

1) Trovo la condizione iniziale

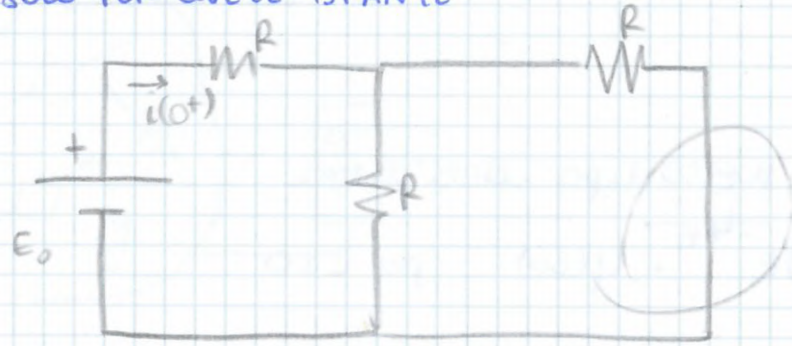
È il primo valore che assume corrente dopo che generatore si è chiuso (in questo caso)

Troviamo quello che sappiamo ⇒ v_c

a) trovo v_c

Per $t=0^-$ circuito a dx inverte ⇒ $v_c(0^-) = 0 = v_c(0^+)$
per la continuità

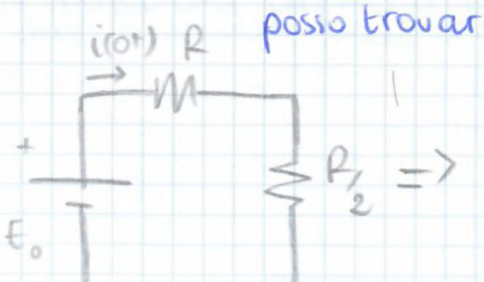
b) Costruisco il circuito al tempo 0^+, che vale ESATTAMENTE SOLO PER QUELL'ISTANTE



il condensatore all'istante 0^+ ha tensione = 0 ⇒ corto circuito

⇓

posso trovare $i(0^+)$



partitore di tensione

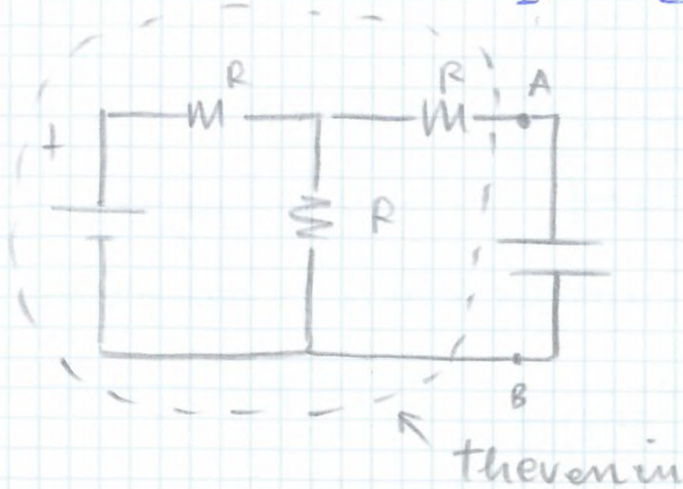
⇒ $(0^+) = E_0 \dfrac{R}{\underbrace{R + R/2}_{3/2 R}} = E_0 \cancel{R} \cdot \dfrac{2}{3\cancel{R}} = \dfrac{2}{3} E_0$?

$$\boxed{\Rightarrow i(0^+) = \frac{v(0^+)}{R} = \frac{2E_0}{3R}}$$

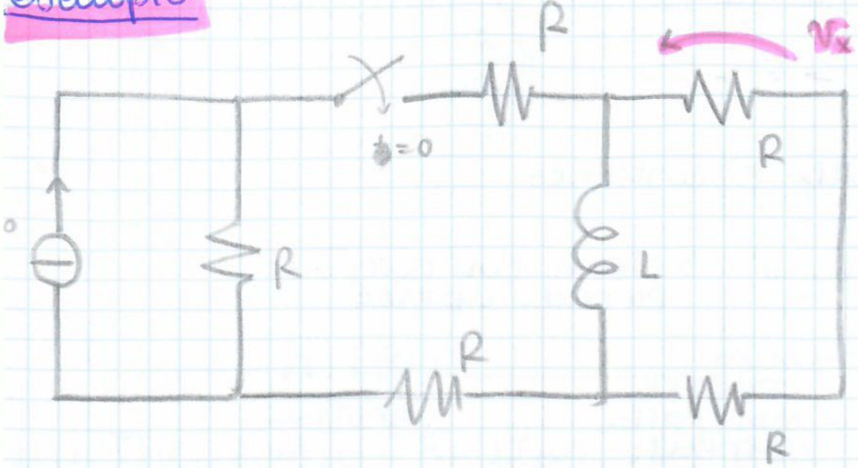
2) Trovo τ

Circuito per $t > 0$

$\tau = C R_T$



esempio



voglio trovare una variabile ≠ da quelle di stato

$v_x(t) = [v_x(0^+) - v_x(\infty)]\, e^{-t/\tau} + v_x(\infty)$

1) Trovo $v_x(0^+)$ → come prima

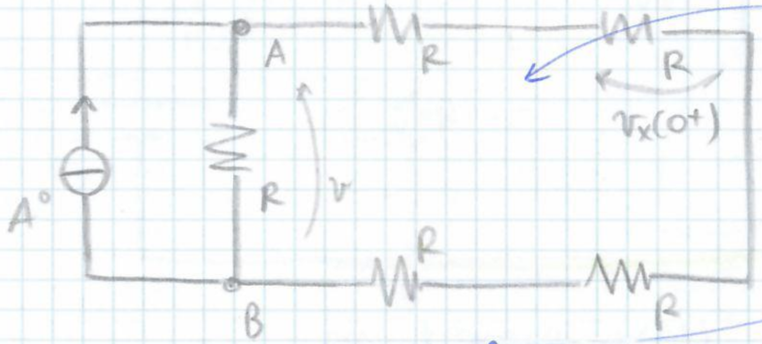
a) Trovo $i_L(0^-) = i_L(0^+)$

Per 0^- tutta la parte a dx è scollegata ⇒ circ. inerte
⇒ è tutto $=0$ ⇒ anche $i_L(0^-) = 0 \underset{\uparrow}{=} i_L(0^+)$
per continuità

→ corr $i(0^+)=0$

b) Costruisco circuito a $t=0^+$

⇒ circuito aperto



Ora posso trovare $v_x(0^+)$

Millman $\quad v = \dfrac{A_0}{\frac{1}{R} + \frac{1}{4R}} = \dfrac{A_0}{\frac{5}{4R}} = \dfrac{4RA_0}{5}$

$\frac{1}{4R} \to \neq \frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}$

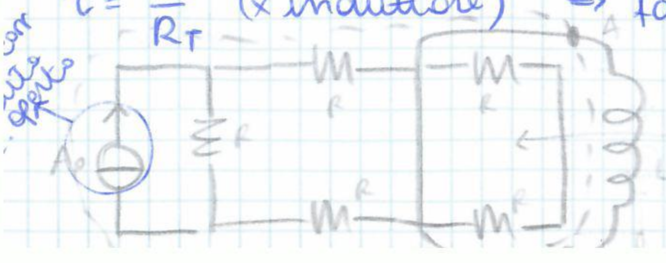
↘ metto l'equivalente delle resist del ramo

$v = \dfrac{4RA_0}{5}$ è una tensione che si divide in 4 resist uguali

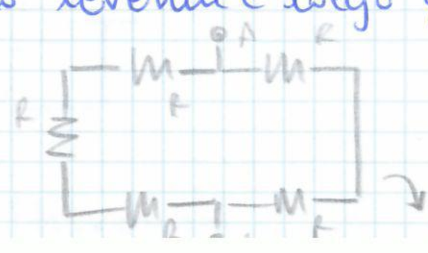
⇒ $\boxed{v_x(0^+) = \dfrac{v}{4} = \dfrac{RA_0}{5}}$ (si può anche usare partitore, ma è ovvio)

2) Trovo τ

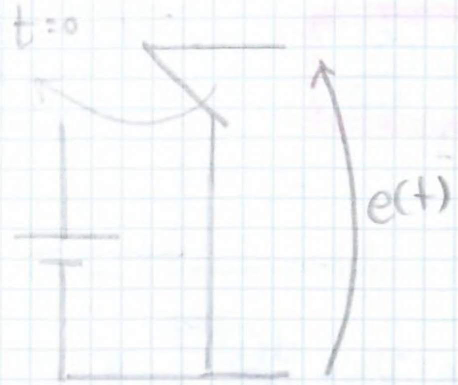
$\tau = \dfrac{L}{R_T}$ (x induttore) ⇒ faccio circuito tevenin e tolgo generatori

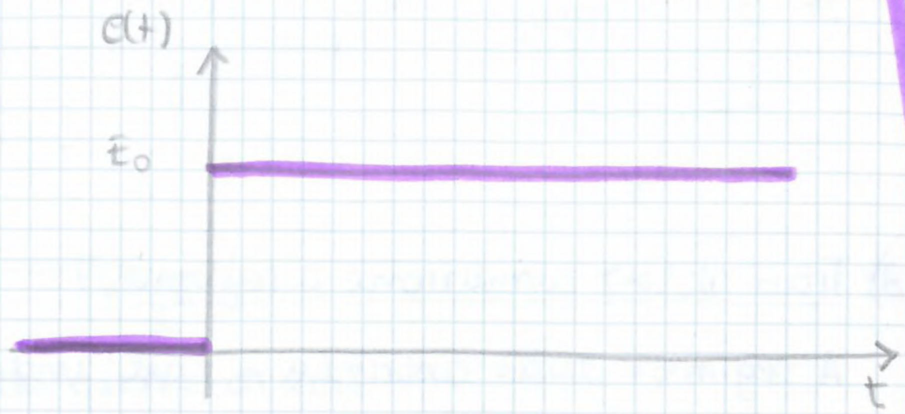


R_T ⇒

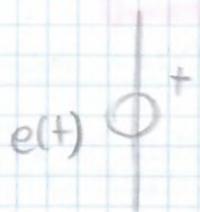


TRASFORMAZIONE INTERRUTTORE - SIMBOLO - GRAFICO





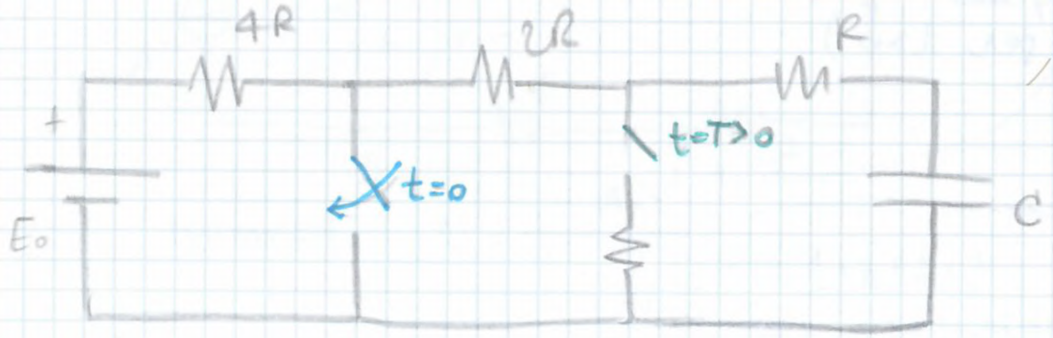
si può scrivere come



+ il grafico a gradino → noi possiamo sostituire con interruttore

Se ci fossero + interrutt. o interrutt. commutano + volte?

PIÙ DI 1 INTERRUTTORE

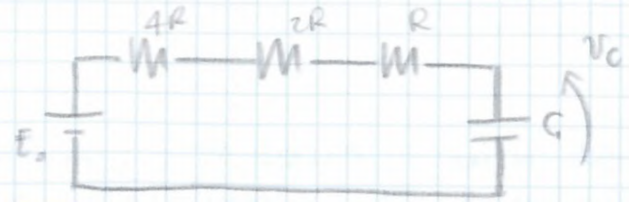


Se abbiamo interruttori che commutano tutti allo stesso istante
⇓
non cambia nulla

$\boxed{\text{Parte A}}$ Studio la soluzione a cavallo della prima commutazione cioè in t=0

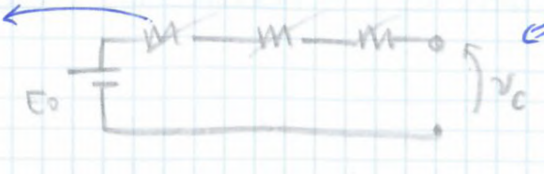
$$v_C(t) = [v_C(0) - v_C(\infty)]\, e^{-t/\tau} + v_C(\infty) \quad , \text{ per } t \geq 0$$

1) $v_C^{(A)}(0^-)$



circuito in condiz stazionarie
⇒ tutto cost ⇒ i cost
→ v=cost ⇒ $\frac{dv}{dt}=0$ ⇒ i=0
⇒ circ. aperto

nelle resist non passa corrente ⇒ tens =0 ⇒ solo batteria



$v_C^{(A)} = E_0$