



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1159

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Beghini

MATERIA: Fisica II + Eserc.

Prof. Kaniadakis

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

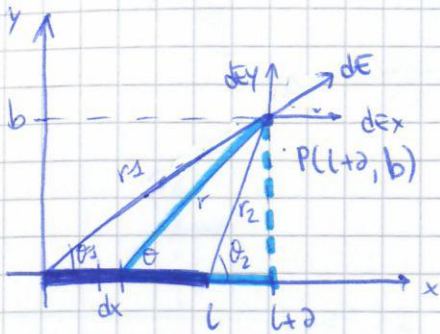
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

① LEGGE COULOMB, SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI, DISTRIBUZIONE CARICA LINEARE: BARRETTA FINITA, BARRETTA INFINITA

① SBARRETTA FINITA \rightarrow corpo continuo
 \rightarrow distribuzione lineare \rightarrow densità lineare $\lambda = \frac{q}{l}$

$E(\vec{r}, t)?$



con corpo continuo devo applicare forma integrale della legge di Gauss.
 Posso vedere la sbarretta come insieme di cariche puntiformi di ampiezza dx:
 $dE = \frac{Kdq}{r^2} = \frac{K\lambda dx}{r^2}$
 $r = \frac{b}{\sin\theta}$
 $dE = \frac{K\lambda dx}{\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2} = \frac{K\lambda dx \cdot \sin^2\theta}{b^2}$
 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{b}{\sin^2\theta}$

$\sin\theta = \frac{b}{r} \rightarrow r = \frac{b}{\sin\theta}$

$\cos\theta = \frac{l+a-x}{r}$

$\tan\theta = \frac{b}{l+a-x} \rightarrow l+a-x = \frac{b}{\tan\theta} \rightarrow x = l+a - \frac{b}{\tan\theta} \rightarrow x = l+a - b \cot\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d(l+a - b \cot\theta)}{d\theta} = \frac{b}{\sin^2\theta}$ derivo x rispetto θ

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{b}{\sin^2\theta} \rightarrow \sin^2\theta \rightarrow \frac{b \cdot d\theta}{dx}$

$dE = \frac{K\lambda dx}{b}$

$dE_x = \frac{K\lambda \cos\theta dx}{b}$

$dE_y = \frac{K\lambda \sin\theta dx}{b}$

$E = \frac{K\lambda}{b} \left[\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}} \right]$

$E_x = \frac{K\lambda}{b} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}} \right]$

$E_y = \frac{K\lambda}{b} \left[\frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$

Applico sovrapposizione effetti:

$\int dE = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{K\lambda dx}{b}$

$E = \frac{K\lambda}{b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{K\lambda}{b} (\theta_2 - \theta_1)$ campo sulla sbarretta

$\sin\theta_1 = \frac{b}{r_1} = \frac{b}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}}$

$\cos\theta_1 = \frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}}$

$\sin\theta_2 = \frac{b}{r_2} = \frac{b}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\theta_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

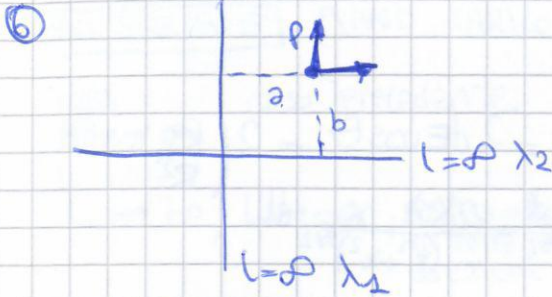
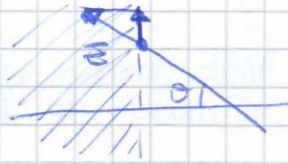
$E_x = \frac{K\lambda}{b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{K\lambda}{b} [\sin\theta_2 - \sin\theta_1]$

$E_y = \frac{K\lambda}{b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{K\lambda}{b} [\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{K\lambda L}{b\sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{K\lambda L}{b\sqrt{l^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{b^2}{l^2} \right)}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{K\lambda}{\frac{1}{2} \cdot b} = \frac{2K\lambda}{b}$$

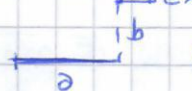
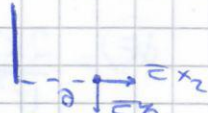
In alternativa si può considerare solo una metà (simmetria) e calcolo solo E_y perché so che $E_x = 0$ perché ha due contributi uguali e opposti.

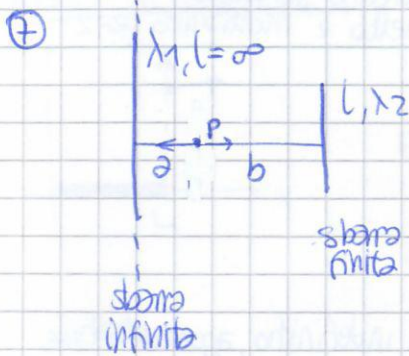
$$\int_{\frac{l}{2}}^0 2dE_y = [R(\theta)]_{\frac{l}{2}}^0$$



$$E_x = \frac{2K\lambda_2}{a}$$

$$E_y = \frac{2K\lambda_1}{b}$$

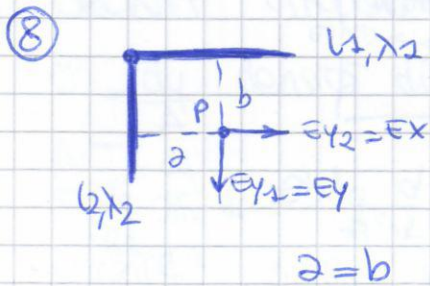
calcolo del campo con sbarra finita  e poi con  poi limite con $l \rightarrow +\infty$, poi somma $E_{y1} + E_{y2}$ e $E_{x1} + E_{x2}$



su y tutti contributi uguali e simmetrici: $E_y = 0$

sbarra finita e simmetrica: $E_{x1} = \frac{K\lambda_2}{b} \left(\frac{L}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}} \right)$
 sbarra infinita: $\frac{2K\lambda}{b} \rightsquigarrow \frac{2K\lambda_1}{a} = E_{x2}$

$$E_x = E_{x1} - E_{x2} = \frac{K\lambda_2 L}{b\sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}} - \frac{2K\lambda_1}{a}$$



$$E_x = \frac{K\lambda_2 L}{b\sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}} = \frac{K\lambda_1 L}{b\sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}}$$

$$E_y = \frac{K\lambda_2}{2} \frac{L}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}} = \frac{K\lambda_1 L}{b\sqrt{\frac{l^2}{4} + b^2}}$$



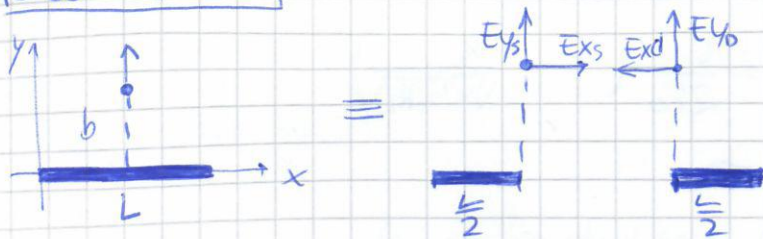
caso particolare con $b = 0$ dell'1

$$E_x = \int dE_x = \int_0^l \frac{K\lambda dx}{r^2} = \int_0^l \frac{K\lambda dx}{(l+a-x)^2} = \frac{K\lambda}{l\lambda} \frac{dy}{y^2} = K\lambda \frac{1}{y} \Big|_a^{l+a} = K\lambda \left[\frac{1}{l+a} - \frac{1}{a} \right]$$

$$E_x = K\lambda \left(\frac{1}{l+a} - \frac{1}{a} \right)$$

CAMPO COULOMBIANO $\left\{ \begin{array}{l} \text{funzione di } \frac{1}{r^2} \text{ e all'origine va } a \infty \\ \text{per corpi continui} \end{array} \right.$

CASO SPECIALE I

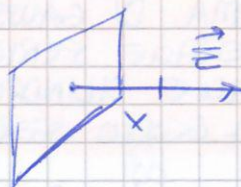


$$E_y = 2E_{y_s} = 4K\sigma \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{b^2 + L^2}} \right)$$

CASO SPECIALE PIANO CARICO UNIFORME

lim caso precedente
 $L \rightarrow +\infty$

$L \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$ nastro $\rightarrow \infty$
 in tutte le direzioni



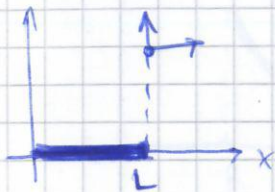
$$E = 2K\sigma\pi$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$\arcsin \rightarrow 0 \Rightarrow E = 2K\sigma\pi = 2K\sigma\pi$

CASO SPECIALE

$$\rightarrow \alpha = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sin \theta_2 = 1 \\ \sin \theta_1 = \frac{b}{\sqrt{L^2 + b^2}} \end{array} \right.$$



$$E_x = K\sigma \ln \left(\frac{1 - \sqrt{L^2 + b^2}}{b} \right) = K\sigma \ln \left(1 + \frac{L^2}{b^2} \right)$$

$$E_y = 2K\sigma \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{L^2 + b^2}} \right)$$

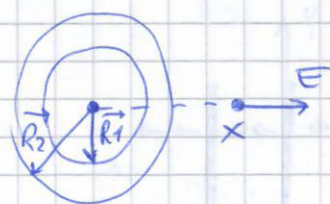
3) CORONA CIRCOLARE

$\sigma = \frac{dq}{A}$ densità di carica superficiale

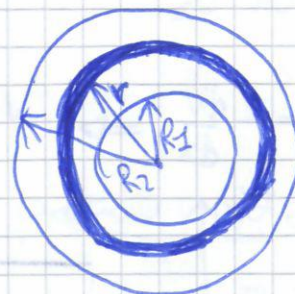
$$A\sigma = dq$$

$$\sigma \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r dr = dq$$

$$\sigma \left(\frac{2\pi R_2^2}{2} - \frac{2\pi R_1^2}{2} \right) dq \rightarrow \sigma = \frac{q}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}$$



considero corona come insieme di
 corone infinitesimali approssimabili
 ad anelli che con tengono cariche infinitesimali



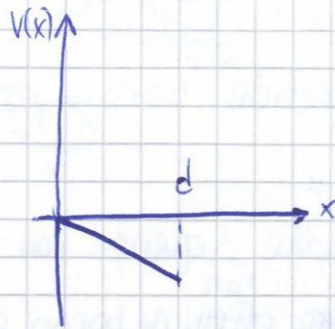
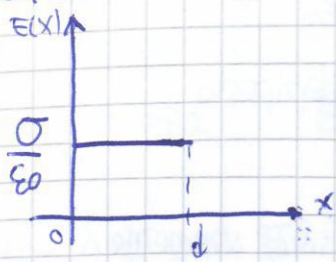
$$dE = \frac{Kdqx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{K\sigma dA x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{K\sigma x 2\pi r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

con r che oscilla tra
 R_1 e R_2

$$E = K\sigma 2\pi x \int_{R_1}^{R_2} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} \right)$$

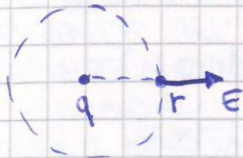
continuità di $V(x)$ in 0 e $d \Rightarrow \begin{cases} V(0^-) = V(0^+) \\ V(d^-) = V(d^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0 \\ c_3 = +\frac{\sigma d}{\epsilon_0} x \end{cases}$

③ caso speciale es. 2
 $\sigma_1 = \sigma = -\sigma_2$



$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

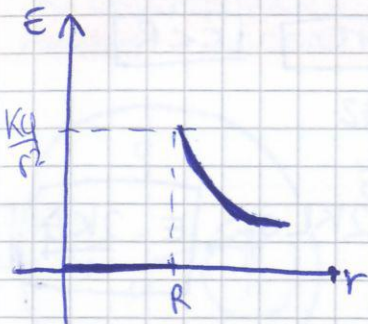
④



$E?$

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{kq}{r^2}$$

⑤

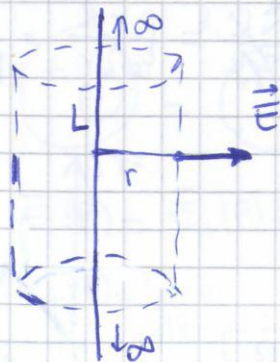


sfera cap: $R, q \Rightarrow E?$

$$\Sigma_1: 4\pi r^2 \cdot E = \frac{0}{\epsilon_0} \rightarrow E = 0$$

$$\Sigma_2: 4\pi r^2 \cdot E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{kq}{r^2}$$

⑥ filo retto ∞, λ

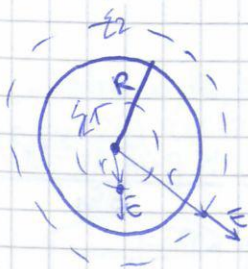


$$2\pi r \cdot L \cdot \vec{E} + \cancel{\pi r^2 \cdot 0} + \cancel{\pi r^2 \cdot 0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$2\pi r \cdot L \cdot \vec{E} = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}$$

$$2\pi r \cdot L \cdot \vec{E} \cdot \frac{2}{2} = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{2K\lambda}{r}$$

⑦ Sfera piena R, ρ uniforme al suo interno $\Rightarrow E(r)?$



$$\Sigma_1: 4\pi r^2 \cdot E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{4\pi r^3}{3 \cdot 4\pi r^2} \cdot \rho \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{r \cdot \rho}{3\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{r \cdot \rho}{3 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{4\pi R^3}{3}}$$



$$E = \frac{r \rho}{\epsilon_0 4\pi R^3} \rightarrow \boxed{E = \frac{K \rho r}{\pi R^3}} \quad \boxed{0 < r < R}$$

$$\Sigma_2: 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{Kq}{r^2}} \quad \boxed{r > R}$$

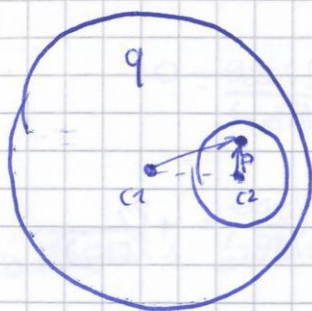
② guscio cilindrico, $R_1, R_2, q, \lambda, \rho$

$$E(r) \begin{cases} r < R_1 & E(r) = 0 \\ R_1 < r < R_2 & 2\pi r L \cdot \vec{E} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} \rightarrow 2\pi r L \vec{E} = \frac{\lambda}{\pi R^2} \pi k (R^2 - R_1^2) \vec{e}_r \rightarrow \vec{E} = \frac{2k\lambda (R^2 - R_1^2)}{r} \vec{e}_r \\ r > R_2 & \vec{E} = \frac{2k\lambda}{r} \vec{e}_r \end{cases}$$

$$q_c = \lambda \cdot L = \rho \cdot \pi R^2 \cdot L \rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\pi R^2}$$

④ ELETTROSTATICA: CAMPO ALL'INTERNO DI CAVITÀ SFERICA ECCENTRICA PRESENTE ALL'INTERNO DI UNA SFERA CARICA UNIFORMEMENTE. CAMPO ALL'INTERNO DI CAVITÀ CILINDRICA INDEFINITA ECCENTRICA ALL'INTERNO DI CILINDRO INDEFINITO CARICO UNIFORMEMENTE. INTERAZIONE TRA DIPOLI ELETTRICI //, ANTI// IN SERIE CON STESSA ORIENTAZIONE, IN SERIE CON ORIENTAZIONE ALTERNATA. CALCOLO CAPACITÀ DI SISTEMA SFERA + GUSCIO SFERICO CONCENTRICO CHE LA CONTIENE.

①



Sfera q, R_1 ; cavità sferica R_2 eccentrica

\vec{E} all'interno cavità?

Cavità eccentrica causa all'interno della cavità \vec{E} uniforme con DIREZIONE = CONGIUGENTE NUCLEI

$$\text{(+)} \bigcirc = \text{(+)} \bigcirc + \text{(-)} \bigcirc$$

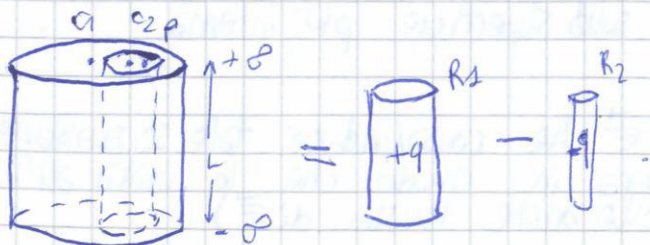
sistemi asimmetrici come somma di sistemi simmetrici.

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_+(P) + \vec{E}_-(P)$$

$$\vec{E}_+(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}, \quad \vec{E}_-(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{c_2 P}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{c_1 P} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{c_2 P} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{c_1 P} - \vec{c_2 P}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{c_1} - \vec{c_2}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{c_1 c_2}$$

② cilindro ∞, R_1, λ uniforme con cavità cilindrica eccentrica ∞, R_2 . \vec{E} nella cavità?

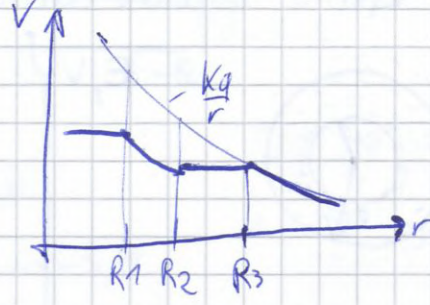
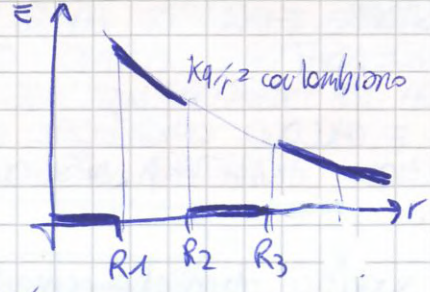


$$\vec{E}(P) = \vec{E}_+(P) + \vec{E}_-(P)$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{c_1 P} - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{c_2 P} =$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{c_1 c_2}$$

$$E, V \left\{ \begin{array}{ll} r < R_1 & E=0 \quad \text{cost 1} \\ R_1 < r < R_2 & E = \frac{Kq}{r^2} \quad \frac{Kq}{r} + \text{cost 2} \\ R_2 < r < R_3 & E=0 \quad \text{cost 3} \\ r > R_3 & E = \frac{Kq}{r^2} \quad \frac{Kq}{r} + \text{cost 4} \end{array} \right.$$



$$V(+\infty) = 0 \rightarrow \text{cost 4} = 0$$

$$V(R_3^+) = V(R_3^-) \rightarrow \frac{Kq}{R_3} = \text{cost 3}$$

$$V(R_2^+) = V(R_2^-) \rightarrow \text{cost 3} = \frac{Kq}{R_2} + \text{cost 2}$$

$$\frac{Kq}{R_3} = \frac{Kq}{R_2} + \text{cost 2}$$

$$\text{cost 2} = Kq \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$V(R_1^+) = V(R_1^-) \rightarrow \text{cost 1} = \frac{Kq}{R_1} + \text{cost 2}$$

$$\text{cost 1} = \frac{Kq}{R_1} + \frac{Kq}{R_3} - \frac{Kq}{R_2}$$

$$\text{cost 1} = Kq \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{sf} = \text{cost 1} = Kq \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\ V_{guscio} = \text{cost 3} = \frac{Kq}{R_3} \end{array} \right\} \Delta V = V_{sf} - V_{guscio} = Kq \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

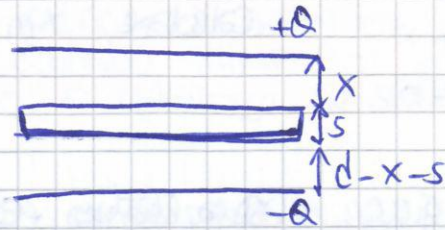
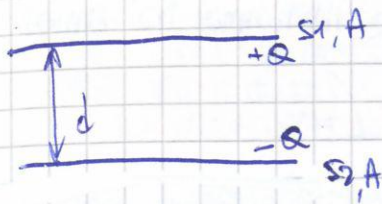
$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{Kq \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

$$\text{capacità} = \frac{q}{\text{potenziale}} \quad F = \text{farad}$$

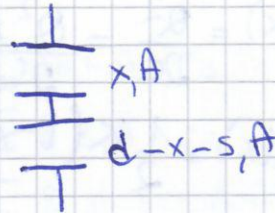
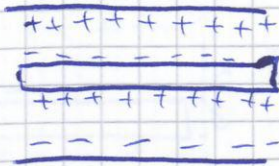
$$[C] = \frac{[q]}{[V]} = \frac{[q]}{[E][L]} = \frac{[q]}{\frac{[F]}{[q]} [L]} = \frac{[q^2]}{[F] \cdot [L]} \Rightarrow 1 \text{ farad} = \frac{C^2}{N \cdot m}$$

capacità \rightarrow proprietà geometrica del sistema.

③ Inserimento lastra metallica spessa s tra armature di condensatore piano.
 Calcolare ΔU se generatore scollegato
 ΔU se generatore collegato



carica si distribuisce in modo che dentro $s, E=0$



CALCOLO C:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

ϵ iniziale senza la lastra $\rightarrow C(0)$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_x} + \frac{1}{C_{d-x-s}} = \frac{x}{\epsilon_0 A} + \frac{d-x-s}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{\epsilon_0 A} (d-x+x-s) = \frac{d-s}{\epsilon_0 A} \quad C \text{ finale con lastra}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d-s} \rightarrow C(s)$$

capacità non dipende da posizione lastra
 denominatore diminuito, capacità aumentata

avvicinando armature
 aumentando spessore

1) Generatore scollegato

Q cost, V diminuisce

$$\Delta V = V(s) - V(0) = \frac{Q}{C_2} - \frac{Q}{C_1} = Q \left(\frac{d-s}{\epsilon_0 A} - \frac{d}{\epsilon_0 A} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0 A} (d-s-d) = -\frac{Qs}{\epsilon_0 A} < 0$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 - \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_2} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1} = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{d-s-d}{\epsilon_0 A} \right) = -\frac{Q^2 s}{2\epsilon_0 A} < 0$$

potenziale diminuisce

2) Generatore collegato

Q aumenta, V costante

$en_{finale} < en_{iniziale}$, corrente
 to en_{per} far entrare lastra

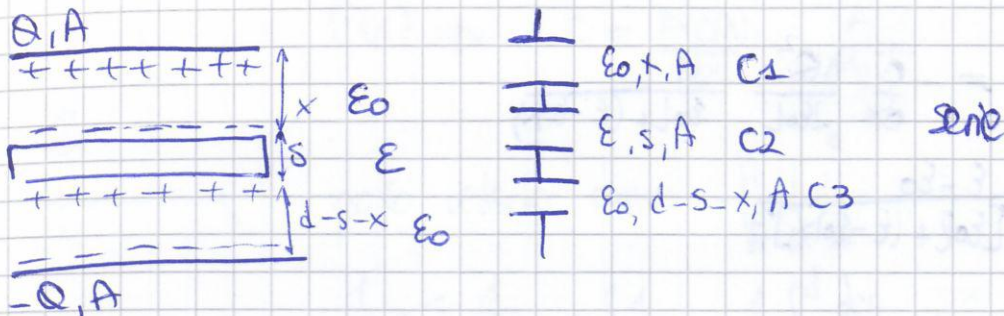
$$\Delta Q = Q(s) - Q(0) = C_2 \cdot V - C_1 V = V \epsilon_0 A \left(\frac{1}{d-s} - \frac{1}{d} \right) = V \epsilon_0 A \left(\frac{d-d+s}{d(d-s)} \right)$$

$$\Delta U = U(s) - U(0) = \frac{1}{2} C_2 V^2 - \frac{1}{2} C_1 V^2 = \frac{\epsilon_0 V^2 A}{2} \left(\frac{s}{(d-s)d} \right) = \frac{V^2 \epsilon_0 A s}{2d(d-s)} > 0$$

energia a spese generatore

6) CAPACITA' EN. CONDENSATORE CON LASTRA DIELETRICA SPESIA. FORZA DI RICHIAMO DI UN DIELETRICO ALL'INTERNO DI CONDENSATORE PIANO. C CONDENSATORE PIANO CONTENENTE VARI DIELETRICI TRA LE ARMATURE. C SFERA METALLICA RIVESTITA DA STRATO DI DIELETRICO. C CONDENSATORE CON MEZZO CON COSTANTE DIELETRICA VARIABILE CON CONTINUITA' TRA LE ARMATURE. CALCOLO F MAGNETICA SU 2 CATI CIRCUITO A FORMA DI SEMI CIRCONFERENZA QUANDO IMMERSO IN UN CAMPO B COMPLANARE AL CIRCUITO, CALCOLO F MAGNETICA SU SPIRA RETTANGOLARE IN B UTE (A INVESTE).

1) Inserimento dielettrico tra armature condensatore, $Q, A, d, \epsilon, \epsilon_0$. Calcolare ΔU



* CALCOLO CAPACITA'

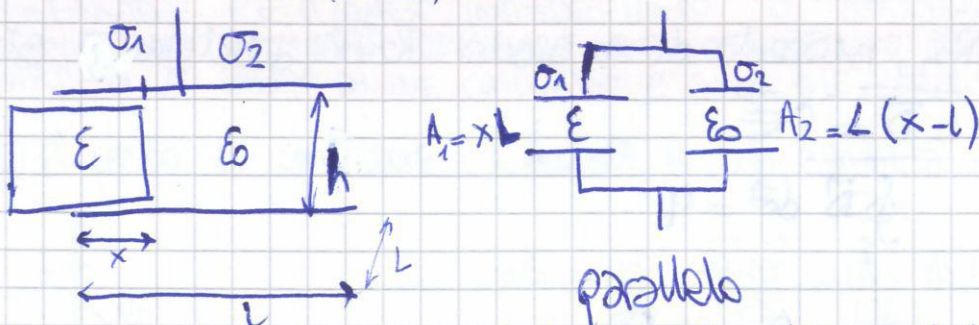
$$C(s) = \frac{A}{\frac{d-s}{\epsilon_0} + \frac{s}{\epsilon}}$$

$$\frac{1}{C(s)} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{x}{\epsilon_0 A} + \frac{s}{\epsilon A} + \frac{d-s-x}{\epsilon_0 A} = \frac{d-s-x+x}{\epsilon_0 A} + \frac{s}{\epsilon A}$$

$$C(0) = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{spessore metallo } \epsilon = \infty \quad C = \frac{\epsilon_0 A}{d-s}$$

$$\Delta U = U(s) - U(0) = \frac{Q^2}{2C(s)} - \frac{Q^2}{2C(0)} = \frac{Q^2 s}{2\epsilon_0 A} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon}$$

2) Inserimento dielettrico tra armature condensatore $h, L, \ell, x, \epsilon_0, \epsilon, Q$ iniziale. Calcolare F risucchio del dielettrico nel condensatore.



* CALCOLO CAPACITA' $C(x) = \frac{\epsilon}{h} A_1 + \frac{\epsilon_0 A}{h} = \frac{\epsilon x L}{h} + \frac{\epsilon_0 L(x-L)}{h} = \frac{L}{h} (\epsilon x + \epsilon_0(x-L)) = \frac{L}{h} (\epsilon_0 L + (\epsilon - \epsilon_0)x)$

1) $V_1 = V_2 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\epsilon} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$

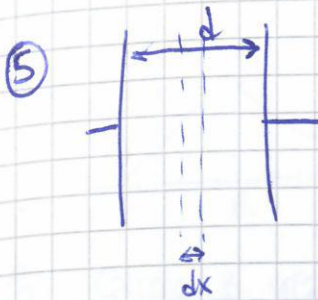
2) $Q_{tot} = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = \sigma_1 x L + \sigma_2 L(x-L)$
 $\epsilon_0 \sigma_1 = \sigma_2 \epsilon$
 $\sigma_1 = \frac{Q}{L} \frac{\epsilon}{\epsilon_0 L + (\epsilon - \epsilon_0)x}$
 $\sigma_2 = \frac{Q}{L} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 L + (\epsilon - \epsilon_0)x}$

3) $U(x) = \int V_1 dV_1 - \int V_2 dV_2 = \frac{1}{2} \epsilon E_1^2 V_1 - \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 V_2 = \frac{\epsilon}{2} (\epsilon_0 V_1 - \epsilon_0 V_2^2) = \frac{\sigma_1^2}{2\epsilon^2} (\epsilon h L x + \epsilon_0 h L^2)$

$$\Delta V = V(R_1) - V(\infty) = \frac{q}{4\pi} \left(\left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon R_1} \right)$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{4\pi}{\left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon R_1}}$$

se manca dielettrico $R_2 \rightarrow R_1 = R \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0$



Tra armature c'è dielettrico con $\epsilon(x)$ che dipende da x .
Calcolare C .

$$\epsilon(x) \Rightarrow C = \frac{A \epsilon(x)}{dx} = \frac{A}{\int_0^d \frac{dx}{\epsilon(x)}}$$



posso vederlo come:

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C(x)} = \int \frac{1}{C(x)} = \frac{1}{A} \int_0^d \frac{dx}{\epsilon(x)}$$

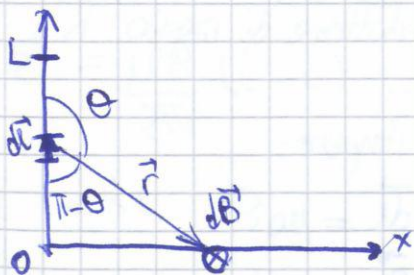
esempio: $\epsilon(x) = \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} x$

$$C = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) A}{d \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

⑥⑦ vedi teoria \Rightarrow ⑤ CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA CIRCUITO PERCORSO DA i

⑦ CALCOLO CAMPI MAGNETICI SU: ASSE SPIRA, ASSE ANELLO CARICO RUOTANTE, ASSE DI DISCO (CORONA CIRCOLARE) CARICO RUOTANTE, ASSE ROTAZIONE ASTA CARICA RUOTANTE CHE DESCRIVE CORONA CIRCOLARE. CREATO DA FILO CILINDRICO INDEFINITO ALL'INTERNO SOLENOIDE RETTANGOLARE INDEFINITO O TOROIDALE. CALCOLO FORZE MAGNETICHE SU: SBARRA COMPLANARE CON FILO INDEFINITO CREANDE CAMPO SBARRA DA PARTE DI \vec{B} CREATO DA DUE CONDUTTORI // SULLA MEZZERIA DEI DUE CONDUTTORI.

① \vec{B} creato da conduttore i , L distante R da estremità inferiore



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \cdot r \cdot \sin\theta}{r^3} (-\hat{u}_z) = -\hat{u}_z \frac{\mu_0 i \sin\theta}{4\pi r^2}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$$

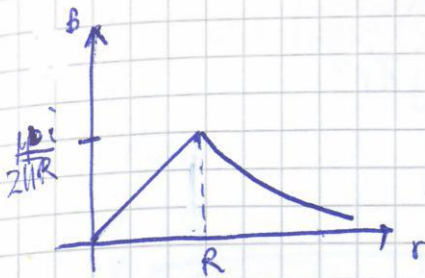
$$\tan\theta = -\tan(\pi - \theta) = -\frac{R}{L} \Rightarrow L = -\frac{R}{\tan\theta} \Rightarrow dl = \frac{dL}{d\theta}$$

$$\Rightarrow dl = \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$$

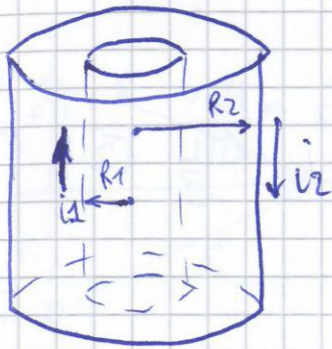
$$d\vec{B} = -\hat{u}_z \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin\theta}{\sin^2\theta} R d\theta \cdot \frac{\sin^2\theta}{R^2} = -\hat{u}_z \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} d\theta$$

$$ic = j\pi r^2 = \frac{j}{\pi R^2} \pi r^2 = j \frac{r^2}{R^2}$$

$$2\pi r B = \mu_0 \cdot i \frac{r^2}{R^2} \rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{r}{R^2}}$$



③ Calcolo \vec{B} creato da due conduttori superficiali cilindrici R_1, R_2 percorsi da i_1, i_2 in senso opposto



① concentri solo i_1

② concentri i_1 e i_2 che vanno in verso opposto, quindi sottrazione

1) $r < R_1$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot 0 \rightarrow \boxed{\vec{B} = 0}$$

2) $R_1 < r < R_2$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_1$$

$$2\pi r B = \mu_0 \cdot i_1$$

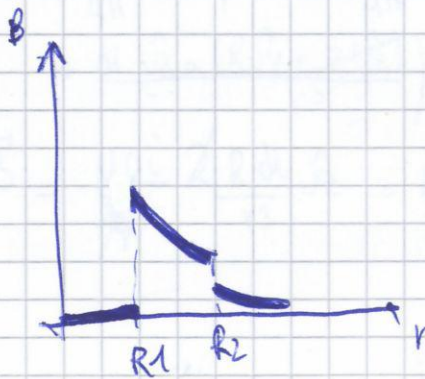
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}}$$

3) $r > R_2$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_2$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_1 - i_2)$$

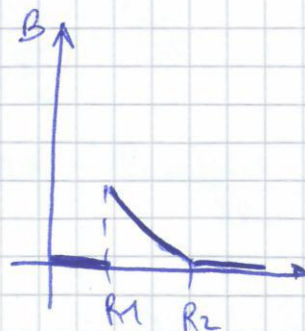
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 (i_1 - i_2)}{2\pi r}}$$



④ caso particolare del ③ con $|i_1| = |i_2|$

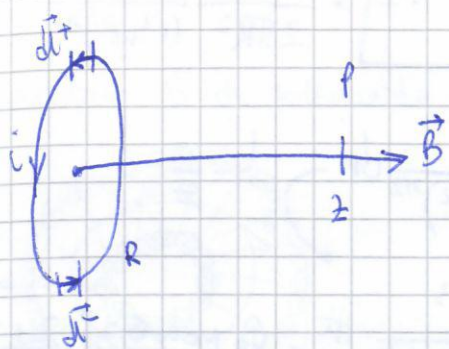
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} (i - i) = 0 \quad r > R_2$$

$$B = \begin{cases} r < R_1 & 0 \\ R_1 < r < R_2 & B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \\ r > R_2 & 0 \end{cases}$$

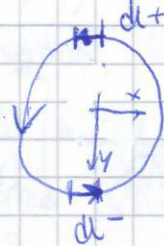


⑧ \vec{B} CREATO DA: INSIEME DI CONDUTTORI RETTILINEI INDEFINITI CIRCUITO FORMATO DA 2 LATI CIRCOLARI E DUE RETTILINEI RADIALI, SUPERFICIE CILINDRICA INDEFINITA CARICA IN ROTAZIONE DA GUSCIO CILINDRICO INDEFINITO CARICO IN ROTAZIONE SULL'ASSE DI UNA SUPERFICIE CILINDRICA DI ALTEZZA FINITA CARICA IN ROTAZIONE SULL'ASSE DI ROTAZIONE DI ASTA CARICA FORMANTE UN ANGOLO DATO CON ASSE' DI ROTAZIONE. INTERAZIONE (CALCOLO MOMENTO MECCANICO) TRA 2 FILLI INDEFINITI SCHEMBI \perp PERCORSI DA CORRENTE.

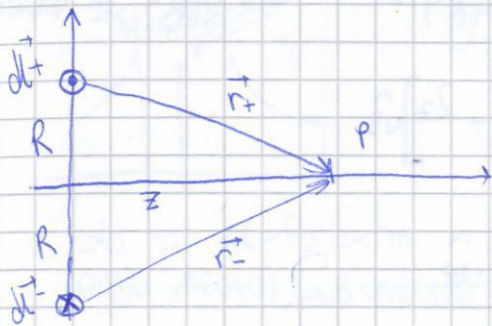
①



Calcolare \vec{B} creato da anello R, i a distanza z su asse



$$\begin{cases} d\vec{l}^+ = -d\hat{u}_x \\ d\vec{l}^- = d\hat{u}_x \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{r}^+ = -R\hat{u}_y + z\hat{u}_z \\ \vec{r}^- = R\hat{u}_y + z\hat{u}_z \end{cases}$$

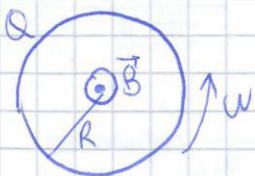
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left(\frac{d\vec{l}^+ \wedge \vec{r}^+}{r^3} + \frac{d\vec{l}^- \wedge \vec{r}^-}{r^3} \right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left(\frac{d(-\hat{u}_x) \wedge (-R\hat{u}_y + z\hat{u}_z)}{r^3} + \frac{d\hat{u}_x \wedge (R\hat{u}_y + z\hat{u}_z)}{r^3} \right)$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{R dz}{r^3} \hat{u}_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{R dz}{r^3} \hat{u}_z \rightarrow \vec{B} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} d\vec{B} = \hat{u}_z \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{R}{r^3} \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} dz$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{u}_z}$$

nel centro: $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R} \hat{u}_z$

②



Calcolare \vec{B} su asse anello R, Q che ruota con ω

$$i = \frac{Q}{T} = \frac{Q}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

B nel centro $B = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi R}$

$$B = \frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{u}_z$$

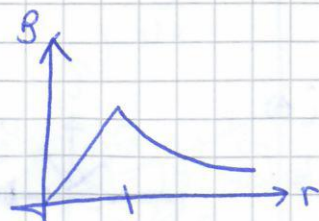
calcolare B di conduttore indefinito di raggio R

6

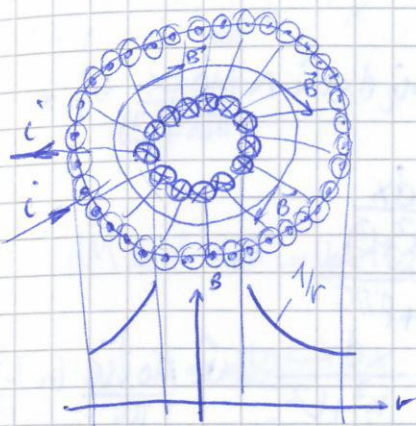


$$\oint_r \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot i$$

$$B \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r & r < R \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$



7 calcolare B di solenoide toroidale, R_1, R_2, i



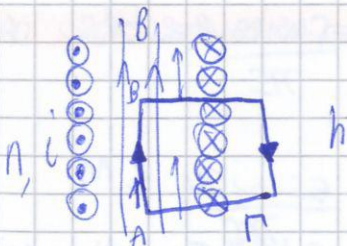
fuori $2\pi r B = \mu_0 \cdot 0$

interno $2\pi r B = \mu_0 \cdot Ni$

$$B \begin{cases} r < R_1 & 0 \\ R_1 < r < R_2 & \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \\ r > R_2 & 0 \end{cases}$$

solo se $R_1 - R_2 \ll r_m$
(raggio medio) $\rightarrow B$ uniforme

8 Calcolo \vec{B} solenoide indefinito



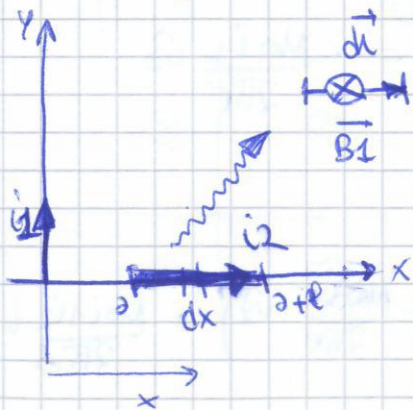
unico tratto che dà contributo perché

$B \neq 0$
 $B \perp \vec{l}$

$$\oint_r \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i N \Rightarrow h B = \mu_0 i N \Rightarrow B = \mu_0 i \frac{N}{h}$$

All'interno del solenoide B ovunque uniforme, modulo non dipende dal raggio ma da $j = ni$

9



calcolare forza sulla sbarretta l, i_2 che si trova immersa nel campo B_1 creato dal filo indefinito i_1

$$\vec{B}_1(x) = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \hat{u}_z$$

$$d\vec{F}_2 = i_2 \vec{l} \wedge \vec{B}_1 = i_2 (dx \hat{u}_x) \wedge \left(-\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \hat{u}_z \right) =$$

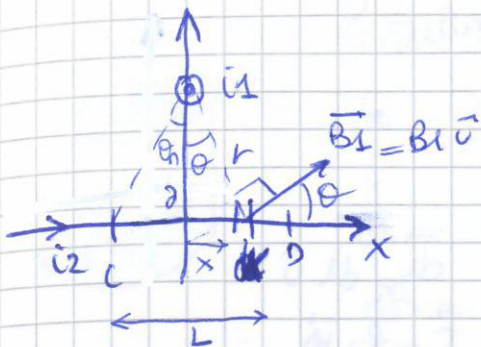
$$= \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \frac{dx}{x} \hat{u}_y$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \hat{u}_y}{2\pi} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x} = \hat{u}_y \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{l}{a}\right)$$

$$\vec{F}_3 = -\hat{y} \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)$$

$$F_{\text{risultante}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a}\right) \hat{u}_x$$

②



Due fili rettilinei indefiniti i_1, i_2
Calcolare momento rispetto y delle forze su CD

$$d\vec{F} = i_2 (\hat{u}_x dx) \wedge \left(\frac{\mu_0 i_1 \hat{u}}{2\pi r}\right)$$

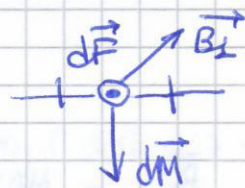
$$d\vec{M} = (x \cdot \hat{u}_x) \wedge d\vec{F}$$

$$d\vec{F}_x = dF \hat{u}_z$$

$$d\vec{M} = -dM \hat{u}_y$$

$$dM = x dF = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \frac{x}{r} \sin\theta dx$$

$$\begin{cases} x = 2a \tan\theta \\ dx = \frac{2a}{\cos^2\theta} d\theta \\ x = r \sin\theta \\ \theta_n = \arctan \frac{L}{2a} \end{cases}$$



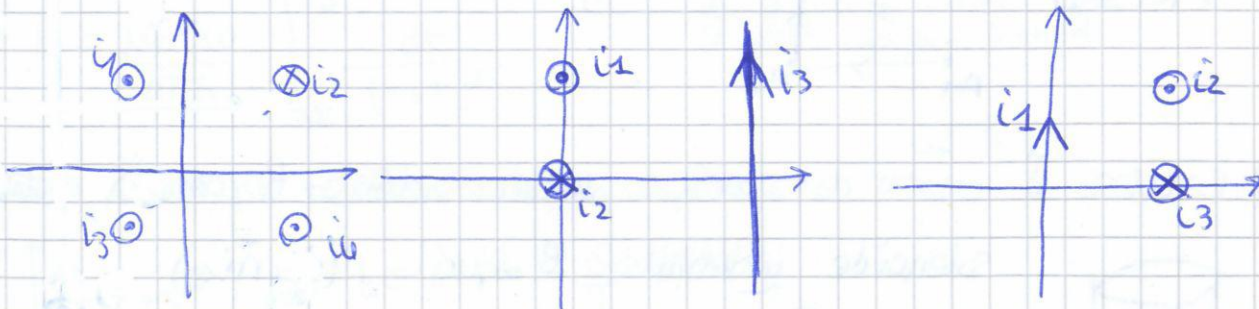
$$dM = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \frac{\sin\theta \sin\theta}{\cos^2\theta} \frac{2a}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} 2 \tan^2\theta d\theta$$

$$M = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi} \int_{-\theta_n}^{\theta_n} \tan^2\theta d\theta = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi} \left[\tan\theta - \theta \right]_{-\theta_n}^{\theta_n}$$

$$\vec{M} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi} \left[\frac{L}{2a} - \arctan \frac{L}{2a} \right] (-\hat{u}_y)$$

③

calcolare \vec{B} risultante in vari punti del piano



$$\vec{i} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda w}{2\pi} \rightarrow B = \frac{\mu_0 \lambda w}{2\pi}$$

- 7) Calcolare \vec{B} creato da cilindro indefinito R che porta carica p e ruota con w attorno al suo asse.



strato cilindrico $r, dr \equiv$ sup. cilindrica percorsa da di

$$di = \frac{d\lambda}{T} = \frac{w}{2\pi} d\lambda = \frac{w}{2\pi} \frac{p dV}{h} = \frac{w}{2\pi} p \frac{h 2\pi r dr}{h}$$

$$di = w p r dr$$

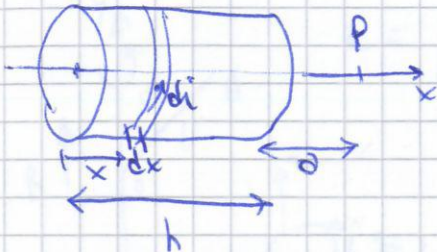
$$dB = \mu_0 di$$

$$B = \mu_0 w p \int_r^R r dr$$

superfici con raggio $< r$ non contribuiscono a \vec{B} perché p esterno a queste superfici.

$$B = \frac{\mu_0 w p (R^2 - r^2)}{2}$$

- 8) Calcolare \vec{B} creato da sp. cilindrica R, h, Q, w ad un punto P distante a dalla base.



$$I = \frac{Q}{T} = \frac{Qw}{2\pi}$$

$$di = \frac{I}{h} dx = \frac{Qw}{2\pi h} dx$$

$$dB = \frac{\mu_0 di R^2}{2 [R^2 + (h+a-x)^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q w R^2}{4\pi h} \int \frac{dx}{[R^2 + (h+a-x)^2]^{3/2}}$$

$$z = h+a-x \Rightarrow dx = dz$$

$$x=0 \Rightarrow z = a+h$$

$$x=h \Rightarrow z = a$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q w R^2}{4\pi h} \int_a^{a+h} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

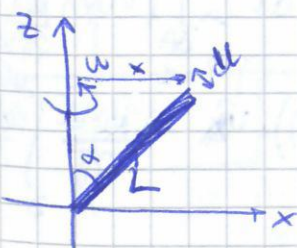
$$t = \frac{z}{R} \Rightarrow dz = R dt$$

$$z = a \Rightarrow t = a/R$$

$$z = a+h \Rightarrow t = (a+h)/R$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q w}{4\pi h} \int_{a/R}^{(a+h)/R} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$$

- 9) Calcolare \vec{B} su asse z . Sbarretta L, Q, α, w

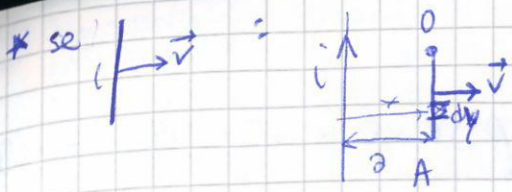


$$dq = \lambda dl = \frac{Q}{L} dl$$

$$di = \frac{Q w dl}{L 2\pi} \frac{L}{dx}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{2 (x^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \mu_0 di x^2$$

$$B = \frac{\mu_0 Q w}{4\pi \sin \alpha} \int_a^{L \sin \alpha} \frac{x^2 dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$



$$\vec{v} = v \hat{u}_x$$

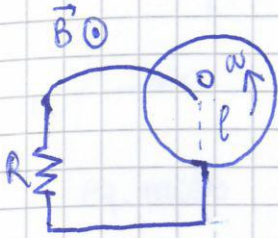
$$d\vec{l} = dy \hat{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} (-\hat{u}_z)$$

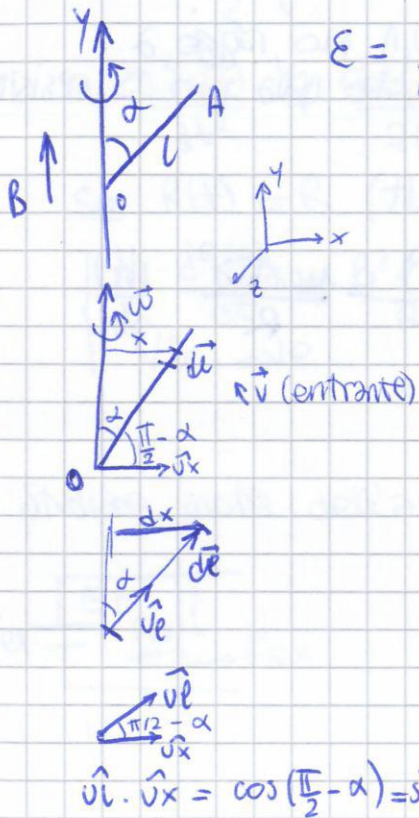
$$\mathcal{E} = \int_{OA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{OA} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \frac{v \mu_0 i}{2\pi a} \int_{OA} (\hat{u}_x \wedge (-\hat{u}_z)) \cdot \hat{u}_y dy$$

$$= -\frac{v \mu_0 i}{2\pi a} \int_0^l dy = -\frac{v \mu_0 i l}{2\pi a}$$

③ Disco metallico rotante ω , raggio l , Determinare \mathcal{E} indotta nel tratto attivo OA equivalente ad asta OA rotante: $(\text{es } \perp) \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{B \omega l^2}{2}$



④ OA ruota con ω attorno a z in presenza di \vec{B} calcola \mathcal{E}_{OA}



$$\mathcal{E} = \int_{OA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{OA} \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = \int_{OA} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{v} = \omega x (-\hat{u}_z)$$

$$\vec{B} = B(\hat{u}_y)$$

$$d\vec{l} = d(x \hat{u}_r) = \frac{dx}{\sin \alpha} \hat{u}_e$$

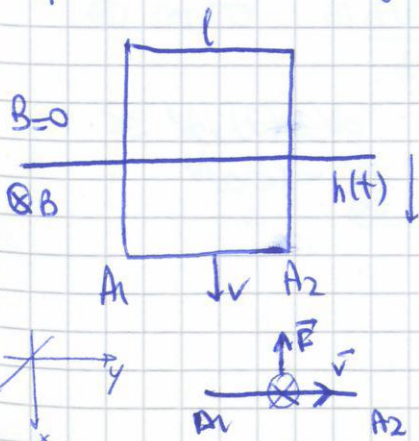
$$\mathcal{E} = \int (\omega x (-\hat{u}_z) \wedge B(\hat{u}_y)) \cdot \frac{dx}{\sin \alpha} \hat{u}_e =$$

$$= \frac{\omega B}{\sin \alpha} \int (\hat{u}_x)(\hat{u}_e) \cdot x dx = \frac{\omega B}{\sin \alpha} \int dx x \sin \alpha$$

$$= \omega B \int_0^{l \sin \alpha} x dx = \frac{\omega B l^2 \sin^2 \alpha}{2} = \frac{\omega B l^2}{2} \sin^2 \alpha$$

$$\hat{u}_e \cdot \hat{u}_x = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

⑤ Spira entra in una regione \vec{B} , m , R (resistenza). Calcolare v nel caso non dipenda da t



$$h(0) = 0$$

$$\Phi(t) = B \cdot l \cdot h(t)$$

trovo \mathcal{E} :

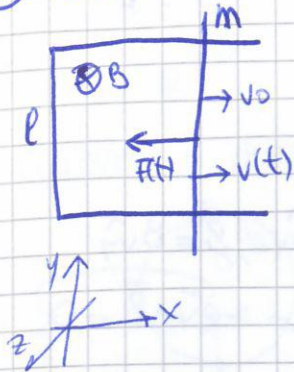
$$a) \mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = -Bl \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -Blv$$

$$b) \mathcal{E} = \frac{F}{q} = \frac{q \vec{v} \wedge \vec{B}}{q} = vB (\hat{u}_y \wedge (-\hat{u}_z)) = -vB \hat{u}_x$$

$$\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_l^l vB \cdot dl = -vBl$$

11) INDUTTANZE, EN. MAGNETICA, INDUTTANZA PER UNITA' DI LUNGHEZZA E EN. MAGNETICA IMMAGAZINATA IN CONDUTTORE FORMATO DA SUP. CILINDRICHE COASSIALI PERCORSE DALLA STESSA CORRENTE IN VERSI OPPOSTI E STESSI CALCOI PER SOLENOIDE TOROIDALE
 CALCOLO COEFF. DI MUTUA INDUZIONE DI 2 SOLENOIDI RETTILINEI COMPENETRATI PER UN TRATTO DI DATA LUNGHEZZA

1) Asto di massa m parte con v_0 , calcolare $v(t)$ lungo x



$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = -\frac{\partial B \cdot l \cdot x(t)}{\partial t} = -Bl \frac{\partial x(t)}{\partial t} = -Blv(t)$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R(t)}$$

$$F(t) = Bl I(t) \rightarrow F(t) = \frac{Bl \cdot Blv(t)}{R(t)} = \frac{B^2 l^2 v(t)}{R(t)}$$

eq. moto $m \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v(t)}{R(t)}$

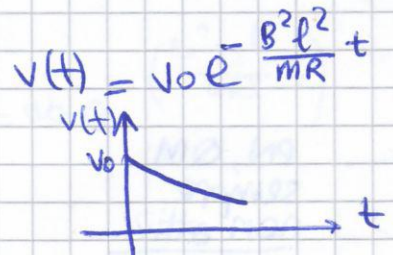
$$R(t) = \frac{2l}{s} (l + x(t))$$

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{B^2 l^2 s}{2l} \frac{1}{l+x(t)} \frac{dx(t)}{dt} = 0$$

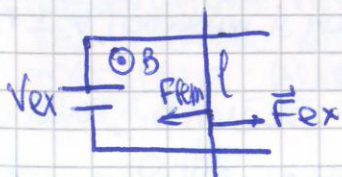
Se $R(t) = R$

$$\int m \frac{dv(t)}{dt} + \frac{B^2 l^2}{R} v(t) = 0$$

$v(0) = v_0$



2) Studiare moto dell'asto



$$v_{ex}(t)$$

$$I_{ex}(t) = \frac{v_{ex}(t)}{R}$$

$$F_{ex}(t) = Bl I_{ex}(t)$$

$$\mathcal{E}_{fem}(t) = -Blv(t)$$

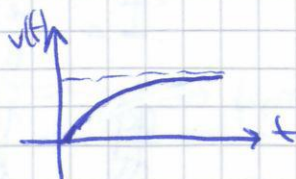
$$I_{fem}(t) = \frac{\mathcal{E}_{fem}(t)}{R}$$

$$F_{fem} = -Bl I_{fem}(t)$$

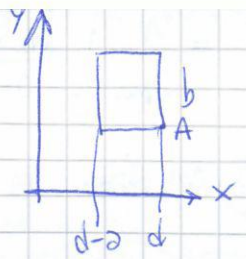
$$F(t) = F_{fem}(t) + F_{ex}(t) = \frac{Bl v_{ex}(t)}{R} - \frac{B^2 l^2 v(t)}{R}$$

eq. moto $m \frac{dv(t)}{dt} = F(t)$

Se $v_{ex}(t) = v_0$
 $v(\infty) = \frac{v_0}{Bl}$



$$\Phi_1 = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \int_A dx dy B(x) = b \int_{d-a}^d B(x) dx$$



$$\Phi_2 = \dots$$

$$Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

5) Calcolare il momento frenante τ



$$d\tau = r dF = \frac{WB_0^2 r^2}{2R} r dr$$

$$dF = i b d\ell = \frac{WB_0^2}{2R} r dr$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{WB_0^2}{2R}$$

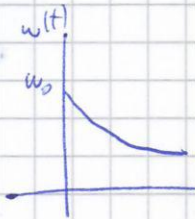
$$\mathcal{E} = \int \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = \int v \cdot B \cdot dr = \int_0^{r_0} \omega r B dr = \frac{WB_0^2}{2} r_0^2$$

$$\tau = \int d\tau = \frac{WB_0^2}{2R} \int_0^{r_0} r dr = \frac{WB_0^2 r_0^4}{4R}$$

$$I \alpha = \tau$$

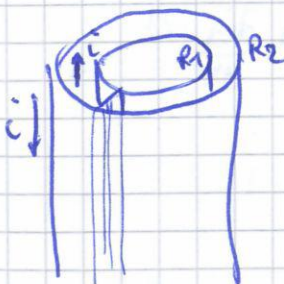
$$I \frac{d\omega}{dt} = - \frac{B^2 r_0^4}{4R} \omega$$

$$\omega = \omega_0 e^{-\left(\frac{B^2 r_0^4}{4RI} t\right)}$$



12) ES. SU AMPERE-MAXWELL: CALCOLO B INDOTTO E IN ELETTROMAGNETICA NEL CONDENSATORE PIANO AD ARMATURE A DISCO QUANDO E' AUMENTATO DA TENSIONE VARIABILE NEL T. CALCOLO E INDOTTO ED EN. RELATIVA A SOLENOIDE TOROIDALE AUMENTATO DA CORRENTE VARIABILE NEL TEMPO QUANDO SI TROVA TRA ARMATURE A DISCO DI UN CONDENSATORE PIANO.

1) Calcolare L e U_L del cavo coassiale cilindrico R_1, R_2 percorso da i.



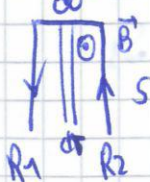
$$[R_1 < r < R_2] \quad \text{da Ampere} \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_s \frac{d\sigma}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{l dr}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

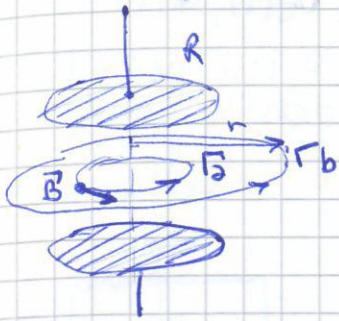
$$a) \Phi = Li \rightarrow L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$b) U_L = \frac{1}{2} Li^2 = i^2 \frac{\mu_0 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$b') U_L \int_V U_L dV = \int_V \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV =$$



④ Condensatore piano, armature dischi. È alimentato da $V(t)$.
 Calcolare $\vec{E}(t, \vec{r})$, $\vec{B}(t, \vec{r})$, $U_{em}(t)$



$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \begin{cases} 0 < r < R & \frac{V(t)}{d} \hat{u}_z \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Per calcolare \vec{E} in r
 ad un certo istante t
 non posso integrare tra
 0 e ∞ per trovare Φ
 sistema se V dipende da
 t e non è stazionario.
 Infatti \vec{E} viaggia con v
 luce c e nel tempo t
 percorre lo spazio
 $r = c \cdot t \Rightarrow \int_0^{ct} dr$

Calcolo $\vec{B}(t, \vec{r})$ con Amp-Max

a) $|r| < R$ $\Gamma_a = \text{circ } r$: $2\pi r B = 0 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \pi r^2 \frac{V(t)}{d}$

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2d} r \frac{dV(t)}{dt} \hat{u}_y$$

b) $|r| > R$ $\Gamma_b = \text{circ } r$: $2\pi r B = 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \pi R^2 \frac{V(t)}{d}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 R^2}{2d} \frac{1}{r} \frac{dV(t)}{dt} \hat{u}_y$$

$$U_E = \int_{V_E} u_E dV_E = \int_{V_E} u_E = \pi R^2 d \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{\pi R^2 \epsilon_0}{2d} V(t)^2$$

$$U_M = \int_{V_1} u_{M1} dV_1 + \int_{V_2} u_{M2} dV_2$$

$$\int_{V_1} u_{M1} dV_1 = \int_0^R \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0^2 \epsilon_0^2}{4d^2} r^2 \left(\frac{dV(t)}{dt} \right)^2 d 2\pi r dr = \frac{\mu_0 \epsilon_0^2 \pi}{4d} \left(\frac{dV(t)}{dt} \right)^2 \int_0^R r^3 dr$$

$$= \frac{\mu_0 \epsilon_0^2 \pi R^4}{16d} \left(\frac{dV(t)}{dt} \right)^2$$

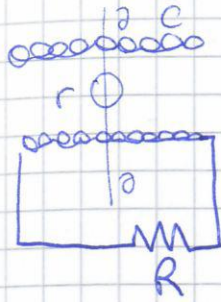
$$\int_{V_2} u_{M2} dV_2 = \int_R^D \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 \epsilon_0^2 R^4}{4d^2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{dV(t)}{dt} \right)^2 d 2\pi r dr = \frac{\mu_0 \epsilon_0^2 \pi R^4}{4d} \left(\frac{dV(t)}{dt} \right)^2 \int_R^D \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 \epsilon_0^2 \pi R^4}{4d} \left(\frac{dV(t)}{dt} \right)^2 \ln \frac{D}{R}$$

$$D \rightarrow +\infty \int_{V_2} u_{M2} dV_2 = +\infty$$

v regime: $\frac{1}{R} Blv \cos \theta = \frac{mgsin \theta}{lB \cos \theta} \rightarrow v = \frac{mgsin \theta}{l^2 B^2 \cos^2 \theta}$

③ Solenoide l, N, R alimentato da V_0 spira di raggio r ruota con ω attorno all'asse, calcolare $v(t)$ nella spira.



$t=0$ $A(0)$ della spira = 0

$\Phi(t) = B \pi r^2 \sin \omega t$

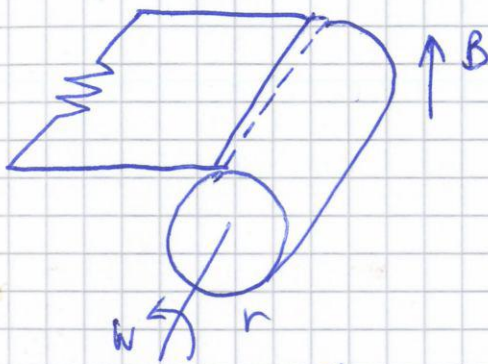
$\mathcal{E}(t) = -B \pi r^2 \omega \cos \omega t$

$B = \mu_0 i \cdot n = \mu_0 \frac{V_0}{R} \frac{N}{l}$

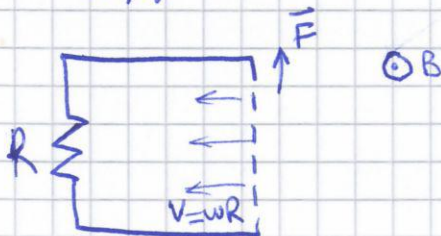
$A(t) = \pi r^2 \cos \omega t$

$\mathcal{E}(t) = \frac{-\mu_0 V_0 N \pi r^2 \omega}{R l} \cos \omega t$

④



linea tratteggiata è tratto attivo del circuito perché su di essa \vec{v} hanno $\nabla \times \vec{v}$ al cilindro!



Fluente \vec{v}

$\mathcal{E} = v l B = \omega r B l$

$\mathcal{E} = \frac{F}{q} = v B$

$\mathcal{E} = \int_r^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = E l = v B l$

$\ln w = -\frac{B^2 l^2 r^2}{R l} x + \text{cost}$

$w = e^{-\frac{B^2 l^2 r^2}{R l} x + \text{cost}}$

$w = w_0 \cdot e^{-\frac{B^2 l^2 r^2}{R l} x}$

calcolare w_∞ nel caso di V_0 di alimentazione

$\mathcal{E} = V_0 \Rightarrow \omega r B l = V_0$

$w = \frac{V_0}{r B l}$

$w_\infty = \frac{V_0}{r B l}$

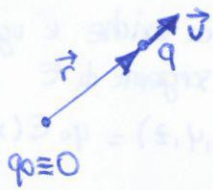
1) LEGGE COULOMB, PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI, DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA.

FORMA VETTORIALE DELLE LEGGE DI COULOMB

$$\vec{F} = K \frac{q_0 \cdot q}{r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F} = K \frac{q_0 \cdot q}{r^3} \cdot \vec{r}$$

LEGGE COULOMB



direzione: congiungente due cariche puntiformi
 verso: $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ versore del vettore \vec{r} , uscente da

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$q_1 q_2$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{stesso segno, } F = \text{verso di } \vec{u} : \text{repulsivo} \\ \text{segno opposto, } F = \text{verso opposto a } \vec{u} : \text{attrattivo} \end{array} \right.$

PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI

Forze elettriche agenti su q_0 dovute a cariche circostanti si sommano.

\vec{F}_i = forza esercitata su q da q_i

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N K \frac{q_0 \cdot q_i}{r_i^3} \cdot \vec{r}_i$$

contributo finito dovuto ad ogni carica puntiforme



N = somma di elementi infinitesimi
 sommatoria diventa integrale

FUNZIONE DENSITA' DI CARICA = funzione che, se moltiplicata per l'elemento di volume dV , si ottiene carica nel volume; e' scalare

$$dq' = \rho(t, \vec{r}') dV \quad \text{con } \rho(t, \vec{r}') = \text{densita' di carica}$$

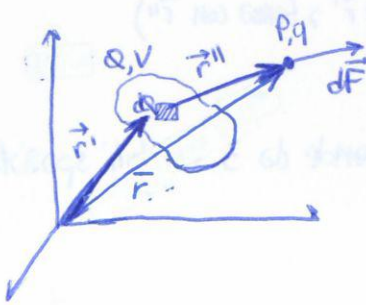
$$\vec{F} = \int K q \frac{dq'}{r'^3} \cdot \vec{r}' \quad dq' = \rho(t, \vec{r}') dV, \quad q' = \int_V \rho(t, \vec{r}') dV$$

$$\vec{F} = K q \int \frac{\rho(t, \vec{r}')}{r'^3} \cdot \vec{r}' dV$$

espressione della forza coulombiana che un corpo di volume V esercita su carica di prova q .

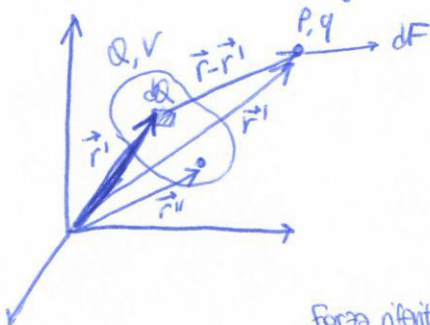
- r'' dipende dalla distanza tra le due cariche
- r' dipende dalla distanza dall'origine

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}'' \rightarrow \vec{r}'' = \vec{r} - \vec{r}'$$



$$\vec{F} = K q \int_V \frac{\rho(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV \rightarrow \vec{F}(\vec{r}, t) \text{ dipende da posizione carica e dal tempo}$$

E' da risolvere integrale di volume:



campo ha direzione $\vec{r} - \vec{r}'$

dF forza infinitesimale generata da dq

$$dF = K q \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV$$

integrando si ottiene F su carica tota

$$\vec{F} = K q \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

Forza riferita alla carica in P
 campo elettrico creato dal campo continuo perche' non dipende da proprieta' della carica in P

$$\vec{E} = K \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV$$

② CAMPO ELETTRICO, POTENZIALE ELETTROSTATICO, LAVORO DELLA FORZA ELETTRICA, LINEE DI CAMPO ELETTRICO, SUP. EQUIPOTENZIALI, ROTORE E

CAMPO ELETTRICO

\vec{E} prodotto nel vuoto da sistema di cariche q in un qualsiasi punto dello spazio è rapporto tra \vec{F} che agisce su q_0 e q_0 ($q_0 \ll q$): $\vec{E} = \vec{F}/q_0$

\vec{E} prodotto da

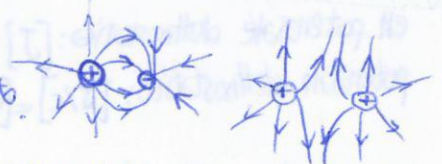
- carica q : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$
- sistema discreto di cariche: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$
- distribuzione continua di cariche: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}$

[NIC] = [V/m]

LINEE DI FORZA

- In ogni punto tangente al campo e ha stesso verso di \vec{E} (concorde a \vec{E} in quel punto)
- linee adensate dove intensità del campo maggiore
- non si incrociano mai (\vec{E} definito univocamente)
- linee originate dalle cariche positive e terminano sulle negative.

→ finite se cariche di segno opposto
 → semiinfinite se cariche dello stesso segno, si chiudono all'infinito.

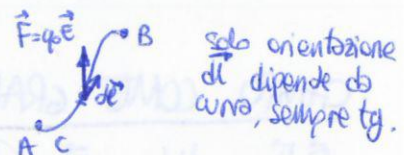


se cariche puntiformi → radialicampo \vec{E} uniforme → linee // costanti dir. e verso e equidistanti (modulo costante)

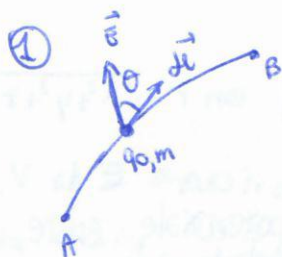
LAVORO FORZA ELETTRICA

TENSIONE ELETTRICA: $\mathcal{E}_{AB} = \int_{CA0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

integrale di linea (percorsi \neq danno valori diversi)



$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \text{FEM FORZA ELETTROMOTRICE} =$ rapporto tra lavoro compiuto sulla carica e la carica stessa per lo spostamento C .
 Dipende dal percorso C e dalle caratteristiche del campo, ma non della carica.
 È UN CAMPO, NON UNA FORZA.



Lavoro della forza $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} \rightarrow W = \int_{CA0} F \cdot dl = \int_{CA0} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{CA0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \mathcal{E}_{AB}$

lavoro fatto da q_0 per spostarsi da A a B in presenza di \vec{E} è dato da carica per \mathcal{E} cioè $W_{\text{forza elettrica}} = q_0 \text{ volte } \mathcal{E}$ (la quale descrive una proprietà di \vec{E} , cioè la sua circuitazione)



$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \mathcal{E}$

$\mathcal{E}_{AB} = W_{AB} \cdot \frac{1}{q_0}$

Il lavoro su circuito chiuso solitamente $\vec{e} \neq 0$, però CAMPO ELETTROSTATICO È CONSERVATIVO: $\int_{CA0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ non dipende dal percorso ma solo dal valo finale e iniziale

SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE

Superficie in cui potenziale elettrostatico ha lo stesso valore.

$$V(x, y, z) = \text{costante}$$

- per un punto passa una sola sup. equipotenziale
 - linee di forza sempre \perp alle superfici equipotenziali
- se $q > 0$: campo uscente, potenziale decresce con la distanza } verso del campo indica verso di
 se $q < 0$: campo entrante, potenziale cresce con la distanza } decrescita del potenziale.
- sup. equipotenziali si avvicinano dove campo \vec{E} maggiore; in un campo uniforme sono equispaziali

ROTORE DEL CAMPO ELETTROSTATICO

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ se \vec{E} conservativo si dimostra che rotore = 0
 perché posso sostituire ad \vec{E} , $-\vec{\nabla} V$ e le parentesi diventano nulle

FORMULAZIONE LOCALE
 \vec{E} conservativo e irrotazionale.
 $\text{rot}(-\vec{\nabla} V) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) \vec{i} + \dots = 0$

per TEOREMA DI STOKES: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{\text{rot } \vec{E}} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma$

\vec{E} conservativo per cui circuitazione su c è nulla.
 Il secondo membro nullo per qualsiasi superficie Σ che si appoggi o qualunque percorso chiuso c , solo se $\text{rot } \vec{E}$ è nullo.

ENERGIA ELETTROSTATICA DIPOLI

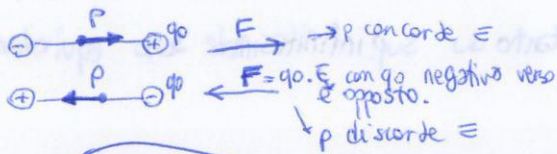
lavoro di M per far ruotare sistema di angolo θ

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta d\theta = pE \cos\theta - pE \cos\theta_0 = -[U_e(\theta) - U_e(\theta_0)]$$

$$U_e(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

INTERAZIONI TRA DIPOLI

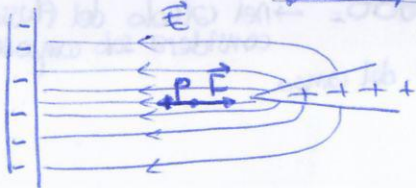
DIPOLI IN CAMPO \vec{E} NON UNIFORME



Forza concorde ad \vec{E} se dipolo concorde al campo e viceversa se dipolo discorde.
 Nel primo caso si sposta verso i punti in cui \vec{E} è più intenso, nel secondo verso quelli in cui \vec{E} è più debole.

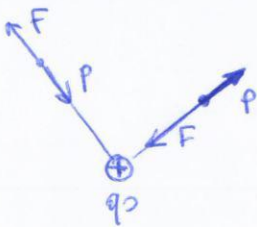
$$E_2 > E_1$$

E_2 E_1 campo decresce $\rightarrow F = p \cdot \frac{dE}{dx}$ derivata negativa, F ha verso opposto



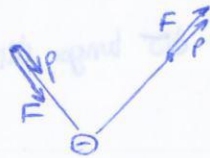
$$E_1 > E_2$$

DIPOLI IN CAMPO \vec{E} PRODOTTO DA CARICA PUNTIFORME



$$E_1 > E_2$$

campo radiale uscente
 (campo decresce, F ha verso opposto)



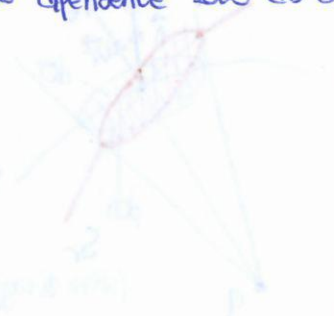
$$E_1 < E_2$$

campo radiale entrante
 (campo cresce, derivato di $E > 0$, F verso concorde)



$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dr} \vec{e}_r$$

CAMPO ELETTROSTATICO \rightarrow CONSERVATIVO \rightarrow non caratteristica specifica di campo radiale che dipende dalla distanza come $\frac{1}{r^2}$, ma vale \forall campo $\vec{E} = E(r) \vec{U}_r$, con modulo dipendente solo da distanza, cioè centrale.





ANGOLO SOLIDO = area su superficie di raggio r = $\frac{d\sigma_n}{r^2} = d\Omega$

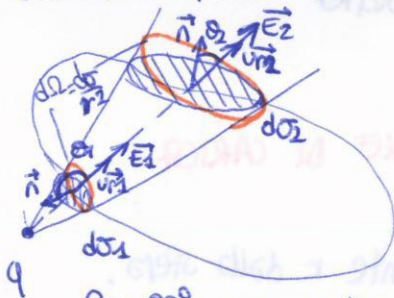
$d\sigma_n$ è parte di una sfera perché campo è coulombiano, cioè RADIALE, funzione di $\frac{1}{r^2} \Rightarrow d\phi = Kq \frac{d\sigma_n}{r^2} = Kq d\Omega$

$\Phi = \oint_{\Sigma} d\phi = Kq \oint_{\Sigma} d\Omega = Kq (4\pi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$ INDIPENDENTE da

FORMA SUPERFICIE
POSIZIONE CARICA
contando che sia interna a superficie chiusa
DISTRIBUZIONE CARICA

$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$

- calcoliamo flusso per distribuzione carica discontinua, Gauss vale separatamente \forall carica: $\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$
- Flusso per distribuzione continua di carica rispetto Gauss, considerata come somma cariche puntiformi infinitesime: $\Phi = \frac{q_{TOT}}{\epsilon_0}$
- Calcoliamo flusso con conica puntiforme esterna:



\vec{n} non radiale ma $\perp d\sigma$ e sempre uscente negli integrali superficie

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{\sigma}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{\sigma}_2 = \frac{Kq}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 \cdot \vec{n} d\sigma_1 + \frac{Kq}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 \cdot \vec{n} d\sigma_2$$

$$= \frac{Kq}{r_1^2} (-) d\sigma_{1n} + \frac{Kq}{r_2^2} \cdot d\sigma_{2n} = -Kq \frac{d\sigma_{1n}}{r_1^2} + Kq \frac{d\sigma_{2n}}{r_2^2} =$$

$$= -Kq d\Omega + Kq d\Omega = 0$$

se conica esterna $\Phi = 0$

$\theta_1 > 90^\circ$ coseno negativo
 $\theta_2 < 90^\circ$ coseno positivo

$d\Omega_1 = d\Omega_2 = d\Omega =$ apertura cono
(aumenta area, ma aumenta proporzionalmente r)

Nel caso più generale della distribuzione continua di carica:

$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$

$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} dq$ integrale esteso a tutto il volume racchiuso da superficie.

\vec{E} è prodotto da tutte le cariche interne ed esterne alla superficie, però il suo flusso attraverso Σ dipende solo dalle cariche interne.

La dimostrazione di Gauss si basa sul fatto che il raggio sia elevato al quadrato, infatti Gauss non vale per campo radiale qualsiasi $1/r^n$ con $n \neq 2$.

Gauss può essere considerato una formulazione alternativa di Coulomb, basata sul concetto di ~~carica~~



6) TEOREMA DI GAUSS FORMA DIFFERENZIALE, EQ. POISSON

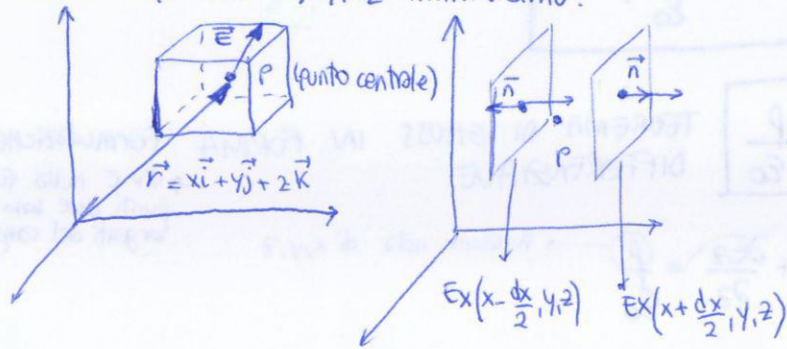
TEOREMA GAUSS FORMA DIFFERENZIALE

TEOREMA DELLA DIVERGENZA : flusso campo vettoriale attraverso sup. chiusa è uguale all'integrale della divergenza del campo vettoriale, $\nabla \cdot E$, esteso al volume τ racchiuso da:

in fisica conviene esprimere eq. in forma differenziale, non integrale.

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho$$

particolare superficie dx, dy, dz infinitesima.



solo componenti \perp sup. danno contributo al flusso, componenti lungo y, z non contribuiscono.

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z$$

$$d\phi_x = -E_x(x - \frac{dx}{2}, y, z) dy dz + E_x(x + \frac{dx}{2}, y, z) dy dz$$

flusso negativo attraverso faccia dx (pointing to the first term)
 flusso positivo attraverso faccia dx (pointing to the second term)
 area faccia infinitesima (pointing to the $dy dz$ terms)

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} (x - x_0)$$

$$\xrightarrow{x - x_0 = dt, x_0 = t, x = x_0 + dt} f(t + dt) \underset{dt \rightarrow 0}{\sim} f(t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_t dt$$

$$F(x + dx) \underset{\text{argomento prossimo}}{\sim} F(x) + \frac{\partial F(x)}{\partial x} dx$$

$$E(x - \frac{dx}{2}, y, z) \sim E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} (-\frac{dx}{2}) = E_x(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dx$$

$$d\phi_x = -E_x(x - \frac{dx}{2}, y, z) dy dz + E_x(x + \frac{dx}{2}, y, z) dy dz = -[E_x(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dx] dy dz +$$

$$[E_x(x, y, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dx] dy dz = \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz =$$

$$d\phi_x = \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dV$$

$$d\phi_y = \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} dV$$

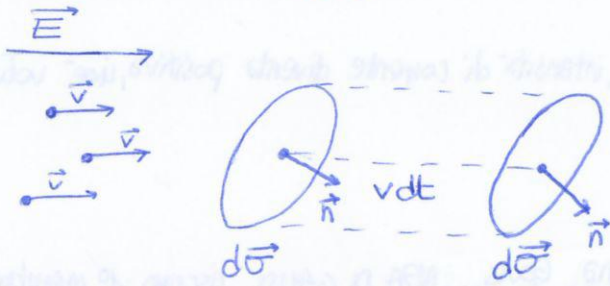
faccia sup. e inferiore $E(x, y \pm dy, z)$

$$d\phi_z = \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} dV$$

faccia davanti e dietro $E(x, y, z \pm dz)$
 volume parallelepipedo $E(x, y, z)$

7) CORRENTE ELETTRICA, EQ. DI CONTINUITA'

CORRENTE ELETTRICA



portatori di carica si muovono sotto l'azione della forza elettrica $\vec{F} = q\vec{E}$

acquistano velocità lungo la direzione di \vec{E} , VELOCITA' DI DERIVA \Rightarrow cariche in movimento originano corrente elettrica.

In un arco temporale dt le particelle percorrono un tratto $d\vec{s} = \vec{v}dt$

dV (volume cilindretto) = $\underbrace{\vec{v} dt}_{\text{altezza}} \underbrace{d\vec{\sigma}}_{\text{area}}$, faccia sinistra descrive cilindro traslando verso dx (se $\vec{n} \parallel \vec{v}$: cilindro retto)

Cilindro infinitesimale contiene carica infinitesimale $dq = \rho dV = N \cdot e \cdot dV$

\vec{j} = vettore densità di corrente = $\rho \vec{v} = \boxed{Ne\vec{v}}$ \rightarrow informazioni su stato cinetico particelle, ma non $d\vec{\sigma}$ informazione completa \vec{j} (tante particelle con \vec{v} bassa = poche particelle \vec{v} alta)



$$di = \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

INTENSITA' LORRENTE = flusso densità di corrente attraverso superficie

$$i = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} \quad [A = \frac{C}{s}]$$

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} \rightarrow \rho \leftrightarrow \vec{j}$$

$i_m = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ intensità corrente media

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} i_m$ intensità corrente istantanea

Definisco due equazioni equivalenti: $\{ \rho; \vec{v} \}$; $\{ \rho; \vec{j} \}$

\hookrightarrow funzione densità di carica e di corrente non sono del tutto svincolate ma legate da EQ. CONTINUITA' DI CARICA.

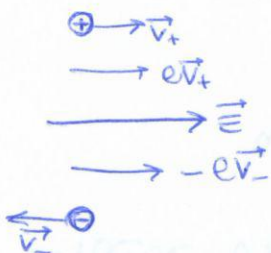
$i = j \Sigma$; $j = \frac{i}{\Sigma}$

\rightarrow densità di corrente = corrente che attraversa l'unità di superficie \perp direzione del moto delle cariche.

• Nei CONDUTTORI METALLICI, i portatori di carica sono NEGATIVI, quindi \vec{v}_d stessa direzione ma verso opposto ad \vec{E} mentre $\vec{j} = -n_e \vec{v}_d$ ha stesso verso di \vec{E}

• Nei SEMICONDUCTORI i portatori di carica sono sia negativi che positivi;

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_+ - n_- e \vec{v}_- \quad \text{stesso verso di } \vec{E}$$



Su scala macroscopica non è possibile correlare verso della corrente e segno dei portatori di carica. Fissata differenza di potenziale, si hanno gli stessi effetti se conduzione è dovuta a cariche positive con moto concorde ad \vec{E} o negative con moto discorde ad \vec{E} . Solo con effetto microscopico: EFFETTO HALL si ricompra segno dei portatori di carica. (93)

CONVENZIONALMENTE: verso corrente è quello cariche positive, dai punti a potenziale maggiore a quelli a potenziale minore.

DIMOSTRAZIONE =

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

CONDIZIONE CHIMICA, LEGGE DI JOULE

$$\rho(\vec{r}, t)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$i = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

$$i = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \implies \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = 0$$

$$\frac{\partial q(V^*)}{\partial t} + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = 0$$

$$\frac{\partial q(V^*)}{\partial t} + \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

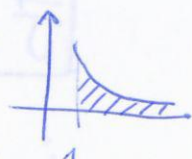
teorema divergenza di Gauss

$$q = \lim_{V \rightarrow \infty} q(V^*) \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

ρ e \vec{j} sono quantità fisiche che devono tendere a zero all' ∞

$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(\vec{r}, t) = 0$ e $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ se all'infinito $\rho \rightarrow 0$ anche $\vec{j} \rightarrow 0$

per l'integrale superficiale, quello di volume è costante!



$$\text{Quindi } \left. \begin{aligned} \frac{dq(V^*)}{dt} + \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} &= 0 \\ q = \lim_{V \rightarrow \infty} q(V^*) \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} &= 0 \end{aligned} \right\} \frac{dq}{dt} = 0$$

LEGGI DI OHM / EFFETTO JOULE

1^a LEGGE DI OHM $V = Ri$

MKSC = metro Kilo Secondo Coulomb
 MKSA = metro Kilo Secondo Ampere

$$\frac{C}{s} = \text{Ampere (A)} \quad \frac{N \cdot m}{C} = \text{Volt (V)} \quad \frac{kg \cdot m^2}{C^2 \cdot s} = \text{Ohm } (\Omega)$$

GRANDEZZE INTRODOTTE

$$E = \frac{F}{q}$$

$$V = E \cdot h$$

$$P = \frac{m}{Ne^2 \tau}$$

$$R = \frac{\rho h}{S}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$G = \frac{1}{R} \quad i = GV$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}$$

POTENZA

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

potenza consumata per far condurre il conduttore a causa delle interazioni dell' e di conduzione con il materiale

$$P = e \vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$P = eE \cdot \frac{e\tau}{m} \cdot E = \frac{e^2 \tau}{m} \cdot E^2$$

$$P_1 = \frac{e^2 \tau}{m} E^2$$

energia totale persa da e nell'attraversamento del materiale conduttore (1 particella)

$$P_N = N \cdot P_1 = \frac{Ne^2 \tau}{m} E^2$$

densità di potenza persa per unità di volume (N particelle)

$$P_V = \sigma E^2 \quad P_V = \rho J^2$$

potenza per volume infinitesimale dV

$$dP = P_V dV = P_V \cdot S \cdot dh = \rho \cdot J^2 \cdot S dh = \rho \frac{i^2}{S^2} S dh = \rho \frac{dh}{S} i^2$$

$$P = \int dP = \int_0^h \rho \frac{dh}{S} i^2 = \rho \frac{i^2}{S} \int_0^h dh = \left(\frac{\rho h}{S}\right) i^2 \rightarrow \boxed{P = Ri^2} \quad \boxed{P = \frac{V^2}{R}} \quad \boxed{P = Vi}$$

h = lunghezza circuito

CONDUTTORI

Per parlare di conduzione è necessario parlare di cariche in movimento → concetto dinamico
 Applicando differenza di potenziale ad un metallo, costituito da un reticolo di cationi in un mare di e^- liberi, si genera un movimento di cariche, cioè corrente elettrica.

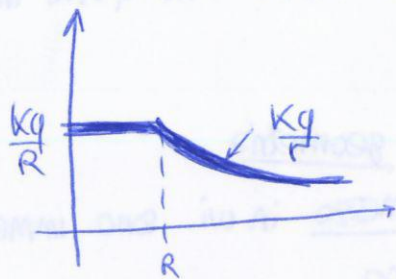
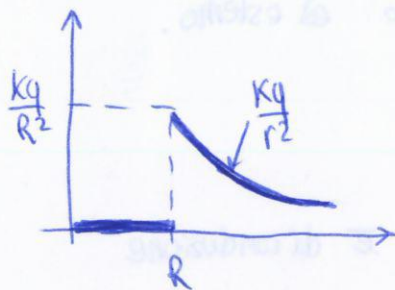
In condizioni stazionarie ($\Delta V = 0$) le cariche di conduzione sono tutte sulla superficie, all'interno del conduttore $E = 0$.

All'esterno del conduttore però un campo elettrico esiste ed è coulombiano (decresce come $1/r^2$)

$$E = \begin{cases} r < R & 0 \\ r > R & \frac{kq}{r^2} \end{cases} \quad q = \rho_s 4\pi R^2 \quad \text{carica distribuita uniformemente su superficie sferica: } 4\pi r^2 \epsilon = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = -\frac{dV}{dr} \rightarrow dV = -E dr$$

$$V = C - \int E dr = C - kq \int \frac{dr}{r^2} = C + \frac{kq}{r}$$



in condizioni stazionarie, potenziale costante

- potenziale costante nel conduttore
- campo E nelle vicinanze della superficie del conduttore è \perp superficie e vale $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (σ = densità carica superficiale nel punto)

Il valore di \vec{E} per conduttore di forma qualunque si calcola applicando legge di Gauss ad un cilindretto retto con basi dS e sup. laterale trascurabile, con una base all'interno del conduttore dove $\vec{E} = 0$ e l'altra all'esterno dove $\vec{E} \perp$ superficie: $\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = E dS = \frac{1}{\epsilon_0} dq = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma dS \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$$

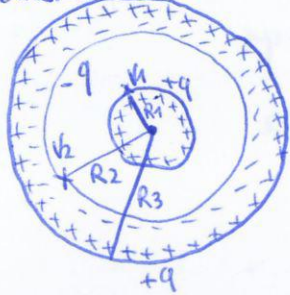
TEOREMA DI GAUSS

- verso uscente se densità > 0 , entrante se < 0
- \vec{E} maggiore se σ è maggiore
- σ maggiore dove raggio di curvatura della superficie è minore, ad esempio su punta.
- E all'interno del conduttore $= 0 \forall$ forma del conduttore
- Avvicinando un conduttore ad un altro corpo carico, ovvero introducendo un \vec{E} esterno, gli elettroni si spostano, a causa dell' \vec{E} interno che è adesso $\neq 0$ e coincidente con \vec{E} esterno, e si accumulano in una zona della superficie lasciando un eccesso di carica positiva. si crea così un \vec{E} indotto E_i che contrasta movimento elettroni e si raggiunge equilibrio quando $E + E_i = 0$ in tutto l'interno del conduttore. tutto questo processo la carica elettrica del conduttore rimane costante \Rightarrow INDUZIONE ELETTROSTATICA
- se poniamo a contatto conduttori, si costituisce un corpo unico con $E = 0$ e $V = \text{cost}$. I conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale costante (infatti se non fosse costante ma ci fosse un ΔV allora dovrebbe esserci anche un $E \neq 0$)

10 CALCOLO CAPACITÀ SISTEMA 2 CONDUTTORI, COLLEGAMENTO SERIE E // DI 2 CAPACITORI

CALCOLO CAPACITÀ SISTEMA 2 CONDUTTORI

• COND. SFERICO



INDUZIONE COMPLETA

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

Sistema costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa è condensatore. I due conduttori prendono nome di ARMATURE DEL CONDENSATORE

$C = \frac{q}{\Delta V}$ → carica sulle armature
 ΔV → differenza potenziale tra le armature

• CONDENSATORE CILINDRICO

armature = porzioni di superficie cilindriche coassiali con d uguale e $R_2 > R_1$. Si crea un conduttore all'interno di un conduttore cavo con induzione approssimativamente completa. \vec{E} radiale

$$\Phi_E = \Sigma E = 2\pi R \cdot h E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

carica entro Σ : $q = \int \rho dv = \rho \pi R^2 h$, $\lambda = \frac{q}{h} = \frac{\rho \pi R^2 h}{h}$

$$\Phi_E = 2\pi R h E = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R}$$

differenza di potenziale tra le armature: $V_2 - V_1 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$

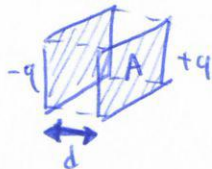
$$C = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{\lambda d}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

dividendo per d trovo capacità per unità di lunghezza.

se $h = R_2 - R_1 \ll$ raggi

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \frac{R_2 - R_1}{R} = \frac{h}{R} \rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\frac{h}{R}} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot d \cdot R}{h} = \frac{C_0 \Sigma}{h}$$

• CONDENSATORE PIANO



$$E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \Delta V = Ed$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

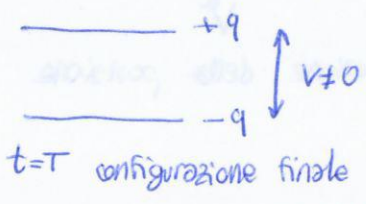
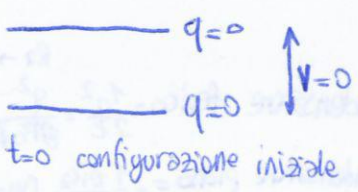
$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{E d} = \frac{q}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d} = \frac{\sigma \cdot A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d} = \frac{A \cdot \epsilon_0}{d} \quad (A = \Sigma)$$



capacità elevate ← aree molto grandi
 distanze molto piccole

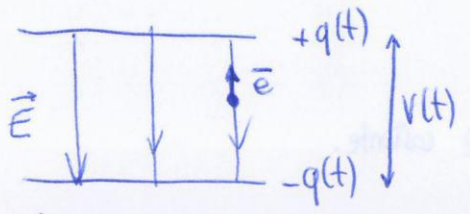
\vec{E} è regolare solo nella zona centrale del condensatore, mentre vicino ai bordi le linee di forza sono deformate ed escono all'esterno assumendo una configurazione che assicura la nullità della circuitazione di \vec{E} . In ogni caso \vec{E} decresce rapidamente verso l'esterno ⇒ CAMPO ELETTRICO DISPERSO (insidioso l'astro di isola in un condensatore piano)

EN. CAMPO ELETTROSTATICO



processo di carica di un condensatore consiste in una separazione di cariche e richiede un certo lavoro che, essendo \vec{E} conservativo dipende solo da posizione finale e iniziale, non dalle modalità.

$0 < t < T$



per caricare condensatori devo spostare elettroni, i quali si spostano perché avvertono una forza contraria allo spostamento che li porta all'armatura negativa per caricare ulteriormente il condensatore.

(in teoria sono i protoni che si spostano)

Il lavoro che è necessario fornire dall'esterno è: **LAVORO DI SEPARAZIONE**. \vec{E} tra armature continua ad aumentare; in un certo senso \vec{E} si crea/accresce spostando cariche.

$W = U$ (energia accumulata) **LAVORO DI SEPARAZIONE**

q' = carica generica istante su ogni armatura
 dq' = carica che si stacca da armatura superiore

$$dW' = V' dq' = \frac{q'}{C} \cdot dq'$$

lavoro fatto su dq' , tramite agente esterno, per spostargli da un'armatura all'altra essendo fornito dall'esterno è negativo. Devo vincere forza che fa spostare particella nel verso opposto. dW dipende da quanto sono cariche le armature fino a quel momento più sono cariche e più intenso è il lavoro da compiere, perché maggiore è la forza repulsiva alla quale sono sottoposti gli e^- .

$$W = \int dW' = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{1}{C} \left[\frac{q'^2}{2} \right]_0^q \Rightarrow \boxed{W = \frac{q^2}{2C}}$$

LAVORO DA COMPIERE PER SPOSTARE CARICA NOT.
 Dipende da $\leftarrow q$ geometria condensatore

Non da informazioni sul processo effettivo, ma viene effettuato contro la forza elettrostatica che si oppone a un accumulo di cariche dello stesso segno. Lavoro è immagazzinato come en. potenziale elettrostatica. se $q=0$ $W = Ue$ (spostamento cariche richiede lavoro, en. elettrostatica diminuisce)

• $C = \frac{q}{V} \Rightarrow \boxed{W = \frac{q \cdot V}{2}}$

• $q = C \cdot V \Rightarrow \boxed{W = \frac{C \cdot V^2}{2}}$

lavoro in funzione di q, V } validità generale \forall condensatore
 lavoro in funzione di C, V }

Si può trovare forma alternativa di esprimere l'energia legandola non alle sorgenti, ma allo stesso \vec{E} :

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} \cdot \left(\frac{\sigma d}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 \cdot \underbrace{A \cdot d}_V = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot V$$

simplifico $\frac{1}{d}$

$$\ln \left| \frac{q - CE}{CE} \right| = -\frac{1}{RC} \cdot t$$

$$\left| \frac{q - CE}{CE} \right| = e^{-\frac{t}{RC}}$$

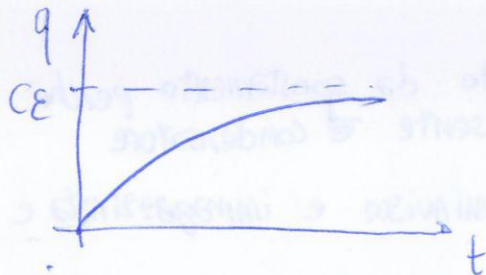
$$\left| \frac{q}{CE} - 1 \right| = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{q}{CE} - 1 = \pm e^{-\frac{t}{RC}}$$

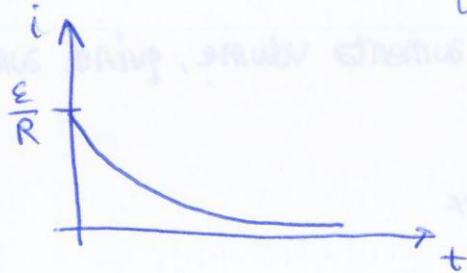
$$q = CE(1 \pm e^{-\frac{t}{RC}})$$

all'istante $t=0$, q deve essere $=0$. Quindi l'unica possibilità è del volgo segno $-$ (non $+$).

$$q = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



at $t \rightarrow \infty$, $q \rightarrow CE$ asintoto orizzontale. All' ∞ condensatore in condizioni stazionarie $q(\infty) = CE$

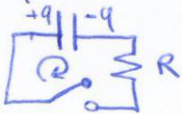


$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}}))}{dt} = -e^{-\frac{t}{RC}} \cdot -\frac{1}{RC} \cdot CE = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

$$C = \frac{q(\infty)}{E}$$

Quando il condensatore è carico al massimo V tra le armature $= E$, non c'è più bisogno di separare cariche, quindi non c'è più spostamento di carica = corrente i .



SCARICA CONDENSATORE

$$q(t) = q_0$$

$$-\frac{1}{C} q(t) - Ri(t) = 0$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q$$

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln \left| \frac{q}{q_0} \right| = -\frac{1}{RC} \cdot t$$

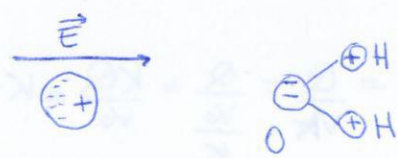
per avere all'istante iniziale $t=0$, la carica q_0 deve prendere

$$q = \pm q_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} t}$$

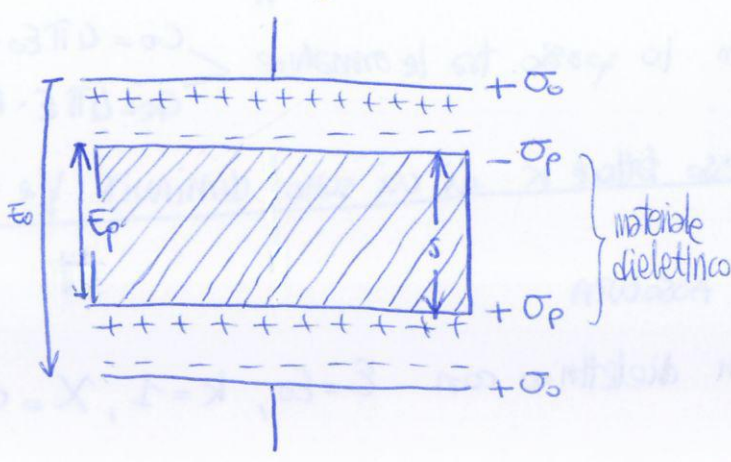
$$i = -\frac{1}{RC} q_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} t}$$

MATERIAU DIELETRICI, EN. CONDIZIONI DI CONTINUITA', POLARIZZAZIONE, DIELETTICA, INDUZIONE DIELETTICA, LEGGE GAUSS CON DIELETTICO

MATERIAU DIELETRICI



polazzazione per orientamento, si orienta nella direzione di \vec{E}



introduciamo parallelamente senza toccare lastra conduttrice spessa $s < h$, sulle facce si formano per induzione elettrostatica completa con due distribuzioni σ_p con segno tale da annullare il campo all'interno della lastra. All'esterno il campo rimane invariato.

Ripetiamo con una lastra di materiale isolante, la ddp diminuisce e, a parita di s , l'effetto e' minore di quello riferito con la lastra di conduttore.

la ddp diminuisce linearmente all'aumentare di s , il valore minimo e' V_k quando dielettrico occupa tutto lo spazio tra le armature. Il contatto tra la lastra isolante e le armature non produce effetto perche' non si forma carica libera.

Sostanze isolanti che hanno proprieta' di ridurre ddp tra armature, e quindi \vec{E} , si chiamano dielettrici:

$$K = \frac{V_0}{V_k} > 1$$

COSTANTE DIELETTICA RELATIVA

$$V_k = \frac{1}{K} \cdot V_0$$

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$$

$$\chi = K - 1$$

SUSCETTIVITA' ELETTRICA (chi)

$$V_k = \frac{1}{K} V_0 \rightarrow E_k = \frac{1}{K} E_0$$

$$E_k = E_0 - E_p$$

$$E_p = E_0 - E_k = E_0 - \frac{1}{K} E_0 = E_0 \left(1 - \frac{1}{K}\right) = E_0 \left(\frac{K-1}{K}\right) = E_0 \frac{\chi}{K}$$

$$E_p = E_0 \cdot \frac{\chi}{K}$$

piu' intenso campo e maggiore e' la polarizzazione (dato che χ e' proporzionale al campo)

$$E_p < E_0$$

$$E_k < E_0$$

$\rightarrow E_k = \frac{V_k}{h} = \frac{V_0}{K \cdot h} = \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 K}$ E all'interno ridotto dello stesso fattore K

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

POLARIZZAZIONE DIELETTICA

- All'interno dei conduttori esiste gas di elettroni praticamente liberi, perciò nei conduttori l'induzione elettrostatica rende possibile la separazione delle cariche.
- Negli isolanti gli elettroni sono legati agli atomi e non si separano spontaneamente, occorre agire dall'esterno, ma avviene solo un spostamento locale di cariche.

POLARIZZAZIONE ELETTRONICA

① In conduttori normali, senza campi elettrici esterni, la distribuzione di elettroni è simmetrica rispetto al nucleo. Sotto l'azione di \vec{E} centro di massa della nube negativa si sposta in senso inverso a \vec{E} e il nucleo in senso concorde e si raggiunge una posizione di equilibrio in cui l'effetto è bilanciato da cariche di segno opposto:

$$P = Z \cdot e \cdot \bar{x} \quad \text{MOMENTO DI DIPOLLO ELETTRICO}$$

atomo acquista P indotto da \vec{E} , // e concorde e l'effetto cessa quando si annulla il campo

② POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO

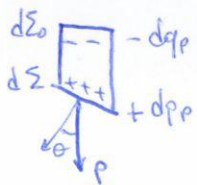
alcune molecole hanno momento di dipolo intrinseco, in cui la distribuzione di cariche è tale che centro delle cariche negative non coincide con quello delle cariche positive. In assenza di campo sono orientati a caso, \vec{E} ne causa orientamento parziale perché disturbati da agitazione termica.

Grado di allineamento aumenta al diminuire di T e all'aumentare dell'intensità di \vec{E}
 Ogni molecola acquista MOMENTO DI DIPOLLO ELETTRICO MEDIO $\langle P \rangle$

VETTORE POLARIZZAZIONE $\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} = \left(\frac{N}{V} \right) \langle \vec{p} \rangle = n \cdot \langle \vec{p} \rangle$ ← molecole per unità di volume

$$\langle \vec{p} \rangle // \vec{E} // \vec{P}$$

compensazione delle cariche, spostate da posizioni di equilibrio, all'interno del dielettrico uniformemente polarizzato ma non alla superficie limite dove la discontinuità di mezzo impedisce compensazione
 lastra equivale quindi a due distribuzioni di carica localizzate sulle facce con densità:
 $\pm \sigma_p = \pm P$ → cariche di polarizzazione non libere, vincolate agli atomi



$$\sigma_p = P \cdot \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P \cdot \cos \theta = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$$

→ densità superficiale delle cariche di polarizzazione è uguale alla componente di P lungo la normale alla superficie.

Se polarizzazione è uniforme non si manifestano cariche all'interno del dielettrico e quindi carica superficiale totale deve essere nulla.

Se polarizzazione non uniforme ci sono cariche di polarizzazione anche all'interno, ma somma cariche di polarizzazione superficiali e di volume è sempre nulla.

$$\vec{P} = \epsilon_0 (K - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad P \propto E$$

- DIELETTICI LINEARI → anisotropia spaziale
- mezzi anisotropi $P // E$ solo lungo assi cristallografici

FORZA MAGNETICA SU CARICA IN MOTO, MOTO CARICA IN CAMPO MAGNETICO UNIFORME, EFFETTO HALL, MOTO PARTICELLA IN CAMPO MAGNETICO UNIFORME, FORZA MAGNETICA SU CONDOTTORE RETTILINEO IN CAMPO MAGNETICO UNIFORME.

FORZA MAGNETICA SU CARICA IN MOTO.

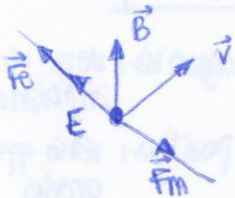
- * carica elettrica può sempre essere isolata, cioè possibilità di separazione già a livello elementare. Nei poli magnetici è impossibile separare polo positivo (N) da quello negativo (S), cioè poli magnetici 3 solo a coppie di egual valore e segno opposto; **DIPOLI MAGNETICI**.
- * come per campo elettrico, le linee di campo magnetico sono sempre tangenti al campo magnetico.

INTRODUZIONE

Filo percorso da corrente produce campo \vec{B} . Le azioni magnetiche sono manifestazioni di cariche elettriche in movimento. In ogni molecola esistono correnti microscopiche locali = correnti amperiane o correnti molecolari di Ampere. Interazione tra circuito percorso da corrente e un magnete è risultato delle interazioni tra elettroni liberi in moto e le microcorrenti del materiale magnetizzato. Questo presuppone che moto elettroni dia origine a momenti magnetici atomici elementari. Campi magnetici variabili nel tempo producono campi elettrici (non conservativi), e campi elettrici variabili nel tempo danno origine a campi magnetici. \vec{E}, \vec{B} non possono avere esistenza indipendente sono unificati nel concetto di campo elettromagnetico. Interazione magnetica in sistema di riferimento inerziale può sembrare elettrostatica in un altro sistema di riferimento inerziale e viceversa.

L'azione magnetica è dovuta al fatto che un sistema di cariche in moto genera \vec{B} e che l'altro sistema di cariche in moto risente di una forza \vec{F}_M in quanto immerso in \vec{B} . Cioè particelle ferme rispetto sorgenti del campo magnetico non risentono dell'azione di forze

Se particella in moto con \vec{v} essa subisce FORZA DI LORENTZ:

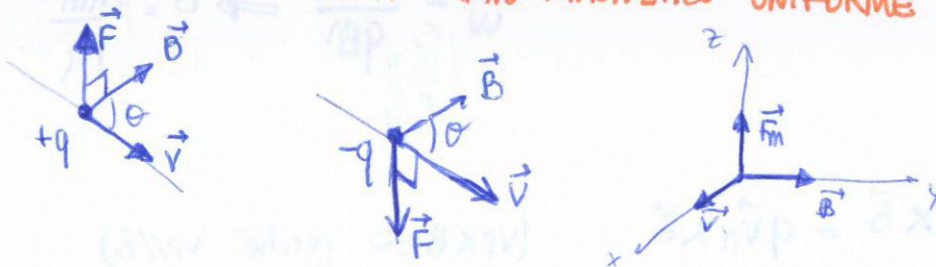


$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_M = F_{\text{LORENTZ}} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qvB \sin \alpha \rightarrow \text{dipende da } \begin{cases} \text{carica} \\ \text{stato cinetico} = \text{velocità} \end{cases}$$

se $\vec{B} \parallel \vec{v} \iff \vec{F}_M = 0$

MOTO DI UNA CARICA IN CAMPO MAGNETICO UNIFORME

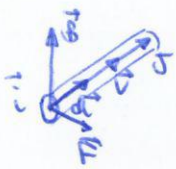


$$\Delta E_C = E_C F - E_C i = W_{A1A2} = \int_{A1A2} \vec{F} d\vec{l} = q \int_{A1A2} \vec{v} \wedge \vec{B} \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \right) dt = q \int_{A1A2} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \vec{v} dt = 0$$

- * FORZA ELETTRICA: stessa direzione campo elettrico, mentre quella di Lorentz $\perp \vec{B}, \perp \vec{v}$
- * FORZA MAGNETICA al contrario di quella elettrica si sente solo se carica in movimento

$$\left[\vec{B} = \frac{N}{C \cdot m} = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{Kg}{A \cdot s^2} = T \text{ (tesla)} \right]$$

FORZA MAGNETICA SU CONDUTTORE RETTILINEO



$$dV = S \cdot dl$$

$$d\vec{l} = \frac{\vec{v}}{v} dl$$

$$\vec{J} = \frac{\vec{v}}{v} J$$

$$\vec{J} dl = J \left(\frac{\vec{v}}{v} dl \right) = J d\vec{l}$$

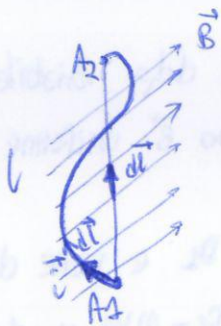
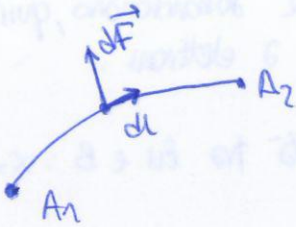
$$\vec{J} = -Ne\vec{v} = \rho\vec{v}$$

$$\vec{F}_1 = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$d\vec{F} = \vec{F}_1 N dV = (-e\vec{v} \wedge \vec{B}) N S dl =$$

$$= -Ne\vec{v} \wedge \vec{B} S dl = \vec{J} \wedge \vec{B} S dl =$$

$$= \vec{J} S dl \wedge \vec{B} = \oint J d\vec{l} \wedge \vec{B} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$



$F \propto i$ + segno dei portatori di carica

$$F = i \int_{A1A2} d\vec{l} \wedge \vec{B} = -i \int_{A1A2} \vec{B} \wedge d\vec{l}$$

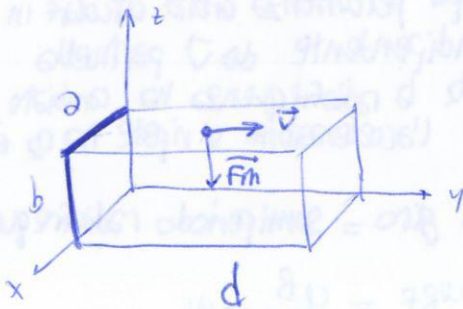
$$F = i \left[\int d\vec{l} \right] \wedge \vec{B} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$$

CON B UNIFORME

per conduttore curvilineo ma piano continua a valere $F = i \vec{l} \wedge \vec{B}$ con $\vec{l} = A1A2$

- Forza su filo percorso da corrente che giace in un piano in cui agisce \vec{B} uniforme non dipende da forma filo ma solo da lunghezza segmento che unisce gli estremi.
- Se circuito piano è chiuso e \vec{B} che agisce sul piano è uniforme $\Rightarrow F = 0$

EFFETTO HALL



$$\vec{B} = B \hat{u}_x$$

$$\vec{J} = \frac{i}{ab} \hat{u}_y, \quad \vec{J} = Ne\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{i}{abNe} \hat{u}_y$$

$$\vec{F}_2 = e\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{i}{abNe} \hat{u}_y \wedge B \hat{u}_x = \frac{i}{abN} \hat{u}_y \wedge B \cdot \hat{u}_x =$$

$$= -\frac{iB}{abN} \hat{u}_x \wedge \hat{u}_y = -\frac{iB}{abN} \hat{u}_z$$

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}_1}{e} = \frac{iB}{abNe}$$

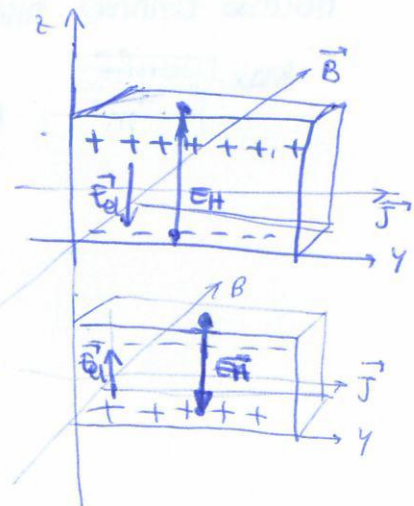
↓
CAMPO ELETTROMOTORE = CAMPO HALL

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}_1}{e} = \frac{e\vec{v} \wedge \vec{B}}{e} = \frac{\vec{J}}{ne} \times \vec{B}$$

TENSIONE DI HALL

$$E = \int E dz = E b = \frac{iB}{\alpha n N}$$

campo elettrico di origine magnetica, non conservativo

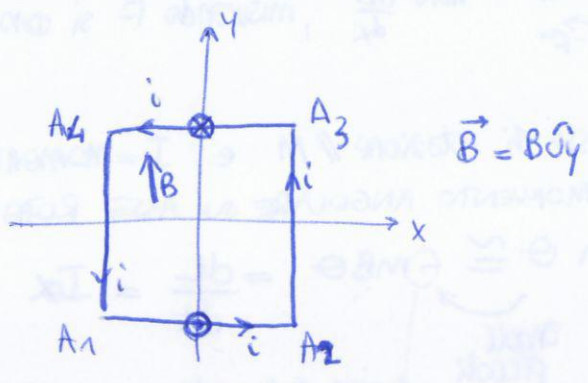
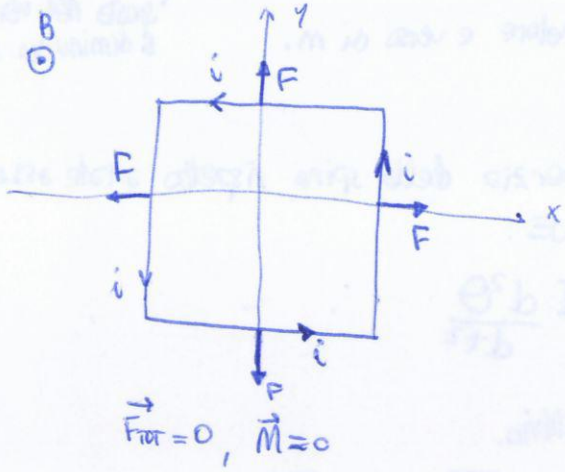


aggiunge componente \perp a \vec{v} deriva provocando deflessione moto cariche, quindi tende ad accumulare cariche opposte sulle facce \perp a \vec{E}_H . Questo accumulo origina un campo elettrostatico \vec{E}_E che si oppone ad un ulteriore accumulo:

$$E_H + E_E = 0$$

MOMENTO MAGNETICO, GAUSS PER CAMPO MAGNETICO

MOMENTO MAGNETICO



$$\vec{F}_{A1A2} = i \vec{L}_{A1A2} \wedge \vec{B} = i L_{A1A2} B \hat{u}_x \wedge \hat{u}_y = i L_{A1A2} B \hat{u}_z$$

$$\vec{F}_{A3A4} = -i L_{A3A4} B \hat{u}_z$$

$$\vec{F}_{A2A3} = \vec{F}_{A4A1} = 0$$

$$\vec{F}_{TOT} = 0$$

$$M = i L_{A1A2} B$$

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{r} = L_{A2A3} \hat{u}_y$$

$$\left. \begin{aligned} L_{A2A3} \hat{u}_y \wedge (-i L_{A1A2} B \hat{u}_z) &= \\ = i L_{A1A2} L_{A2A3} B (\hat{u}_y \wedge \hat{u}_z) &= \\ = -i \frac{L_{A1A2} L_{A2A3}}{S} B \hat{u}_x &= \end{aligned} \right\}$$

area spira

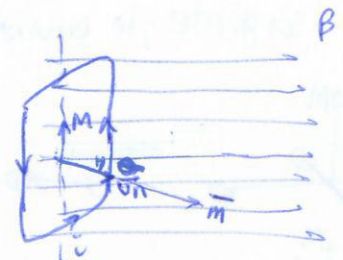
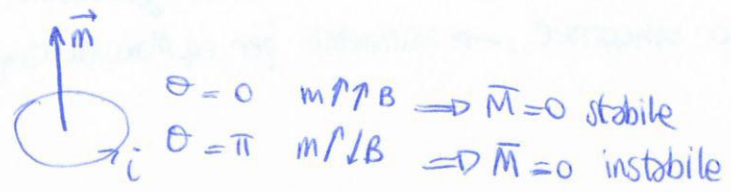
$$\vec{M} = L_{A2A3} \wedge \vec{F}_{A3A4} = L_{A2A3} \hat{u}_y \wedge (-i L_{A1A2} B \hat{u}_z) = \frac{i L_{A2A3} L_{A1A2} B}{S} (\hat{u}_y \wedge \hat{u}_z) = i S B (\hat{u}_z \wedge \hat{u}_y) =$$

$$= i S \hat{u}_z \wedge B \hat{u}_y$$

$\vec{M} = i \vec{S} \wedge \vec{B}$ con $\vec{S} = S \hat{u}_z$ **AREA ORIENTATA**
 vettore normale

$\vec{M} = i \vec{S}$ \Rightarrow MOMENTO MAGNETICO DELLA SPIRA

$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ \Rightarrow MOMENTO MECCANICO SPIRA

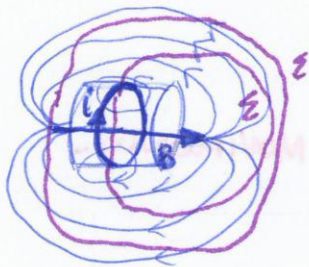


spira tende a ruotare in modo da portare momento magnetico $\vec{m} \parallel$ e concorde a

$U_p =$ energia potenziale legata alla posizione angolare rispetto $B = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta = -i S B \cos \theta$

$M = -\frac{dU_p}{d\theta} = -mB \sin \theta$

LEGGE GAUSS PER CAMPO MAGNETICO



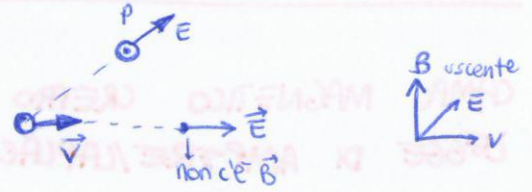
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$\forall \Sigma, \phi(\vec{B}) \text{ sempre } = 0.$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E} \quad (\text{se } \vec{v} \parallel \vec{E} \rightarrow \vec{B} = 0)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

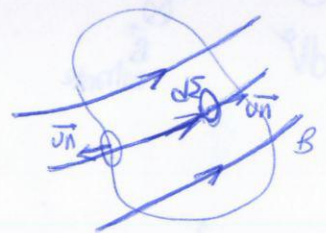


$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{v} \wedge \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$F = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \vec{F} = i \int d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

linee di campo \vec{B} sono sempre linee chiuse. Flusso di \vec{B} attraverso superficie: $d\phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma$

$$\phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$



vettore normale \vec{u}_n sempre verso l'esterno.
 se l'angolo tra \vec{B} e $\vec{u}_n < \frac{\pi}{2}$ $\Phi > 0$ uscente dalla superficie
 $> \frac{\pi}{2}$ $\Phi < 0$ entrante

Dato che linee di campo sono chiuse, \forall superficie il flusso entrante deve essere uguale al flusso uscente, quindi flusso complessivo deve essere nullo.

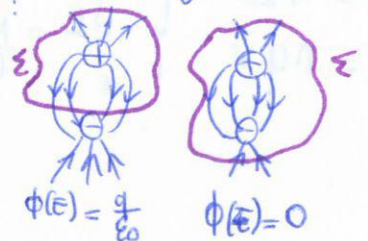
$$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0$$

FORMA LOCALE LEGGE DI GAUSS PER \vec{B} : $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$ divergenza di B sempre nulla.

l'altro tipo di sorgente è costituito da correnti microscopiche (amperiane), presenti a livello atomico nei corpi magnetizzati, equiparabili a dipoli magnetici. Qualsiasi superficie Σ usata per calcolare $\phi(\vec{B})$, nessuna tagliere i dipoli magnetici isolando un monopolo magnetico, il flusso è sempre nullo, mentre per campo \vec{E} :

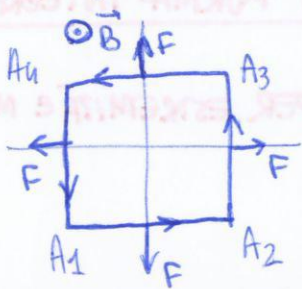
[magnetizzazione: A/m]

[flusso magnetico: Wb = weber = Tm² = Vs]



CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA CIRCUITO PERCORSO DA I

① spira quadrata \Rightarrow vedi momento magnetico (14)



$$\vec{B} = B \hat{z}$$

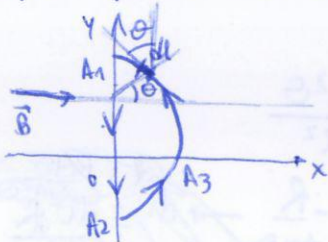
$$\vec{F}_{A1A2} = i \vec{l}_{A1A2} \wedge \vec{B} = i l_{A1A2} \hat{u}_x \wedge B \hat{z} = -i l_{A1A2} B \hat{y}$$

$$\vec{F}_{A2A3} = i l_{A2A3} B \hat{x}$$

$$\vec{F}_{A3A4} = +i l_{A3A4} B \hat{y}$$

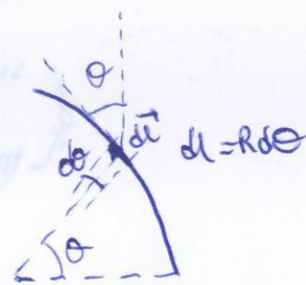
$$\vec{F}_{A4A1} = -i l_{A4A1} B \hat{x}$$

② spira piana \Rightarrow vedi pag. 150



$$\vec{B} = B \hat{x}$$

$$dl = R \cdot d\theta$$



Forze che sentono rami del circuito:

$$\vec{F} = i \int_C d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$dF_{A1A2} = i (-dy \hat{y}) \wedge B \hat{x} = i B dy \hat{z}$$

$$F_{A1A2} = i 2R B \hat{z}$$

$$dF_{A2A3A1} = i dl \hat{u} \wedge B \hat{x} = -i dl B \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \hat{z} = -i B \cos \theta R d\theta \hat{z}$$

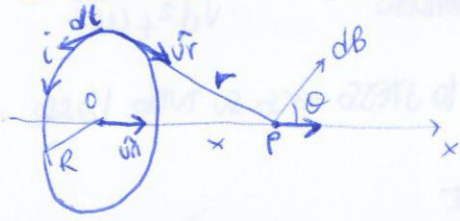
$$F_{A2A3A1} = -\hat{z} i B R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = -2i B R \hat{z}$$



momento coppia = $2i B R^2$

LEGGE BIOT-SAVART: campo magnetico filo rettilineo indefinito dipende solo dalla distanza dai fili
 linee di campo sono circonferenze concentriche al filo e concorrenti alla sorgente del campo stesso, cioè corrente i .

* SPIRA CIRCOLARE \Rightarrow vedi esercitazione



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{|dl \times \vec{r}|}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_z$$

nel centro: $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \hat{u}_z$

$$\vec{m} = i \sum \vec{u}_n = i \pi R^2 \hat{u}_n$$

$$x \gg R: \vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \hat{u}_n = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{2\pi R^2}{x^3} \hat{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{r^3}$$

Quindi \vec{B} su asse di una spira \vec{e} campo di dipolo magnetico

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} (2 \cos\theta \hat{u}_r + \sin\theta \hat{u}_\theta)$$

andamento \vec{B} su spira forma qualunque \vec{e} uguale a quello di \vec{E} di un dipolo.

- linee del campo concatenate con la sorgente che le ha prodotte.
- linee di forza di \vec{E} escono ed entrano da cariche sorgenti \rightarrow circuitazione nulla lungo una qualsiasi linea chiusa.
- linee campo magnetico \vec{B} sono chiuse, senza inizio e fine. \rightarrow se si prende percorso chiuso coincidente con linee del campo B di una spira circolare vedremo che campo \vec{e} sempre equiverso lungo tale linea, quindi circuitazione non puo essere nulla.

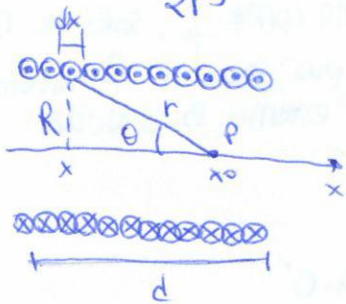
CAMPO CREATO DA CONDUTTORE INDEFINITO

filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica a piccolo passo: SOLENOIDE

$n = \frac{N}{d}$ numero di spire per unita di lunghezza \rightarrow se abbastanza fitte possiamo considerarle distribuite con continuita con $n dx$ spire nel tratto dx

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2r^3} dx$$

in un punto sull'asse della spira



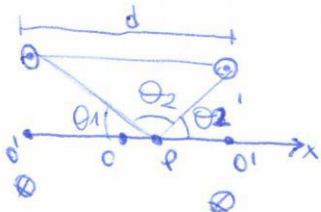
$$r \sin\theta = R$$

$$x - x_0 = -R \cot\theta$$

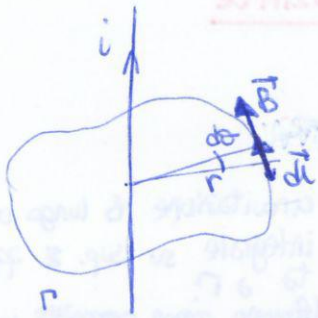
$$dx = \frac{R d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2 \sin^3\theta}{R^2} n \frac{R d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\mu_0 i}{2} \sin\theta d\theta n$$

$$B = \frac{\mu_0 i n}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 i n}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 i n}{2} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$



LEGGE AMPERE-MAXWELL FORMA INTEGRALE

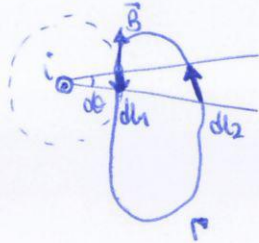


$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B dl = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} \cdot dl = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{dl}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i$$

angolo piatto completo

Γ = curva chiusa di Ampere
 $d\vec{l}$ tangente alla curva e
 anche alla circonferenza
 circolare localmente
 $dl = r d\theta$

circuitazione campo magnetico lungo curva Γ chiusa: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$
 indipendente da forma curva



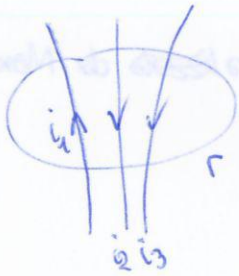
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 + \int \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = \int -B_2 dl_2 + B_1 dl_1$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int \frac{dl}{r_1} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int \frac{dl}{r_2} =$$

$d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$ versi opposti
 $\vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = B_2 dl_2 \cos \pi = -B_2 dl_2$
 $\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = B_1 dl_1 \cos 0 = B_1 dl_1$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi r_1} \int r_1 d\theta - \frac{\mu_0 i}{2\pi r_2} \int r_2 d\theta$$

contributi si annullano se considero
 coppie "opposte"



$$i_c = i_1 - i_2 - i_3$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c$$

legame diretto tra sorgenti e \vec{B} (analogo a quella che fornisce Gauss per \vec{E}).

Essendo circuitazione $\vec{B} \neq 0 \Rightarrow \vec{B}$ non conservativo

Ampere vale solo per correnti di conduzione, cioè al moto di cariche in regime stazionario



$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot \left(\epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

se divergenza di un vettore è zero, tale vettore deve essere il rotore di un altro vettore, che moltiplicato per la divergenza dà zero: $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{A}_1 = \vec{\nabla} \wedge \mathbf{A}_2$ cioè $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{A}_2) = 0$

Quindi $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \rightarrow \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_2$ → simile alla forma differenziale della legge di Ampere $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

moltiplica tutto per μ_0

$$\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_2$$

se $\mu_0 \cdot \vec{A} = \vec{B}$ le due si equivalgono

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

LEGGE AMPERE-MAXWELL PER \vec{B} (differenziale)
 per condizioni stazionarie $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, cioè \vec{E} non varia nel tempo e diventa Legge di Ampere.

Verifica che termine correttivo sia esatto:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

semplifica per μ_0 :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

termine correttivo esatto perché ottengo legge stazionaria di Ampere

LEGGE AMPERE-MAXWELL IN FORMA INTEGRALE



Flusso attraverso superficie aperta Σ dei due campi vettoriali della legge di Ampere

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}$$

stokes $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}$$

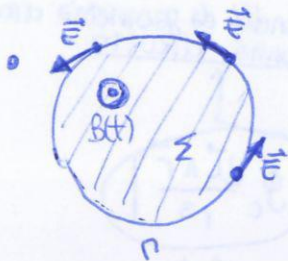
flusso su curva $\rightarrow \vec{E}, \vec{B}$ strettamente legati \leftarrow flusso attraverso sup. appoggiata sulla curva

campo elettrico in condizioni stazionarie è conservativo e si può scrivere:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \xrightarrow{\text{applicando stokes}} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

LEGGE DI LENZ: segno meno indica che l'effetto della fem indotta è sempre tale da opporsi alla causa che ha generato il fenomeno, perciò \mathcal{E} che si manifesta nel circuito è tale da produrre una corrente indotta i cui effetti magnetici si oppongono alle variazioni di flusso $\Phi(B)$ concatenato al circuito stesso in accordo con PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA.

APPLICAZIONI LEGGE FARADAY-LENZ



$$2\pi R \mathcal{E}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \pi R^2 B(t)$$

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{1}{2} R \frac{\partial B(t)}{\partial t}$$

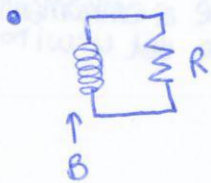
campo elettrico, al contrario del campo magnetico, produce lavoro (= $F \cdot \text{spostamento}$)

$$\Delta W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -e \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -e 2\pi R \mathcal{E}(t) = -e 2\pi R \left(-\frac{1}{2} R \frac{\partial B(t)}{\partial t} \right) = e \pi R^2 \frac{\partial B(t)}{\partial t}$$

se campo magnetico costante nel tempo non si ha lavoro

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \pi R^2 \frac{\partial B(t)}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 + \pi R^2 \frac{\partial B(t)}{\partial t}$$

variando B si accelera particelle sulla guida circolare.



$\Phi(B)$
 $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} \rightarrow$ Nel caso in cui il circuito comprenda una maglia piana e un numero N di spire il flusso è:
 $\Phi = N S B$

$$\mathcal{E} = -N S \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$I = -\frac{N S}{R} \frac{\partial B}{\partial t}$$

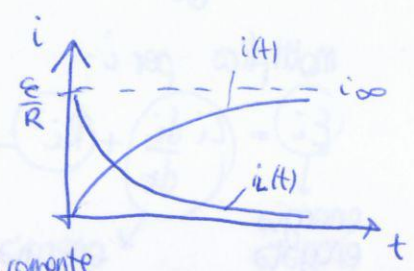
posso creare una corrente quando ci troviamo in condizioni dinamiche, cioè quando cambia il flusso o con



$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = R i \Rightarrow \left| \mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + R i \right| \quad \text{EQUAZIONE MAGLIA}$

Chiusura circuito

$t=0$
 $i(0) = 0 \rightarrow i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
 $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0$



i cresce fino al raggiungimento del valore di regime $i_{\infty} = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

Maggiore è l'induttanza, più è tempo necessario per stabilizzarsi della corrente

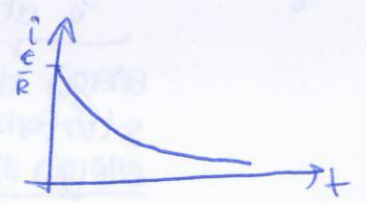
$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = -\mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = \frac{L}{R}$

$i_{\infty} - i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = -\frac{\mathcal{E}_L}{R} = i_L \quad \text{extracorrente di chiusura}$

Apertura circuito

$t=0$
 $i_{\infty} = \frac{\mathcal{E}}{R} \rightarrow i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau'}$

con $\tau' = \frac{L}{R'}$ (molto maggiore di R)



$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = \frac{R'}{R} \mathcal{E} e^{-t/\tau'} \rightarrow$ particolarmente elevata all'apertura. Per $t=0$, $\mathcal{E}_L = \frac{R'}{R} \mathcal{E} \gg \mathcal{E}$ e la corrente corrispondente è $i_L = \frac{\mathcal{E}_L}{R'} = i(t)$ (cioè unica fem agente nel processo e quella autoindotta). Questa corrente, $\neq 0$ per tempo molto breve, è extracorrente di apertura. fem si manifesta all'apertura come ddp che origina scintilla se dielettrico è aria, R' = resistenza alla scintilla che mantiene chiuso circuito per un breve tempo.

\Rightarrow per circuito disegnato prima (CIRCUITO A)

$\mathcal{E}_0 - L \frac{di}{dt} - R i - \frac{q}{C} = 0$

$i = \frac{dq}{dt}$

$\mathcal{E}_0 - L \frac{d^2q}{dt^2} - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$

moltiplica per $\frac{1}{L}$: $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C L} = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{L} \right) \rightarrow$ con $\mathcal{E}_0 = 0$ eq. omogenea

eq. 2° ordine, servono 2 eq. condizioni iniziali (2° ordine dovuto a propagazione e spostamenti)

2-1) SOLUZIONI EQ. MAXWELL LIBERE, SOLUZIONI TIPO ONDE PIANE

4 eq. Maxwell raggruppate e considerate indipendenti e sono le eq. fondamentali

① TEOREMA GAUSS PER \vec{E} : $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{\epsilon_0}$
 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

② TEOREMA GAUSS PER \vec{B} : $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$
 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

③ LEGGI FARADAY-HENRY $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{u} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{t}$
 $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

④ LEGGI AMPERE-MAXWELL $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{u} = \mu_0 \cdot i + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} \rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{u} = \mu_0 i$
 $\nabla \wedge \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$ $\rightarrow \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
condizioni dinamiche (dipendono da t) condizioni stazionarie

EQ. MAXWELL SENZA SORGENTI ESTERNE

- (1) $\nabla \cdot \vec{E} = 0$
- (2) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
- (3) $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- (4) $\nabla \wedge \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\vec{E} = \vec{E}(x,t)$
 $\vec{B} = \vec{B}(x,t)$ soluzioni piane

(1) $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$

(2) $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$

(3) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{array} \right.$

(4) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{array} \right.$

tutte sullo stesso piano ($x=0$), il vettore campo elettrostatico sarà lo stesso perché \vec{E} non dipende da y e z , \vec{E} verrà chiamato soluzione piana.

$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow E_z$
 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow E_y$

$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}$

inverti ordine di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ per ottenere componenti E_z e E_y del campo.

$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow E_y$
 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow E_z$

$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$

EQ. DI D'ALEMBERT E WAVE

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{c^2 \partial^2 \xi}{\partial x^2}$

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$

EQ. DI LAPLACE NELLA FORMA UNIDIMENSIONALE

$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = 0$

EQ. LAPLACE NELLA FORMA TRIDIMENSIONALE

$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \Delta \xi$

operatore laplaciano = ∇^2

$\delta(x-t) = \delta(t-x)$



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \\ s(x,0) = f(x) \end{cases} \Rightarrow \xi(x,t) = f(x-ct)$$

note

profilo di $f(x)$ dato, all'istante iniziale, in condizioni iniziali (2 perché è di 2° ordine)

Presenta due soluzioni $\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi(x-ct) \text{ verso dx} \\ \xi_2 = \xi(x+ct) \text{ verso sx} \end{array} \right\}$ stesso \vec{v} , ma devo assumere solo una delle due forme.

\vec{v} propagazione dell'onda dipende da caratteristiche elettromagnetiche del vuoto μ_0 e ϵ_0 e cambiando mezzo cambia \vec{v} .

Specificando che le onde meccaniche necessitano di un mezzo in cui muoversi, mentre quelle elettromagnetiche posso muoversi anche nel vuoto (in nessun caso no trasporto effettivo di materia), qualsiasi \vec{v} in mezzi \neq dal vuoto e sempre minore a

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = v \text{ nel vuoto.}$$

La soluzione complessiva è una combinazione lineare delle due: $\xi = A_1 \xi(x-ct) + A_2 \xi(x+ct)$ con $\xi = \sin$ o \cos e per semplicità pongo $A_2 = 0 \rightarrow \xi = \xi(x-ct)$

Quindi campo \vec{E} e \vec{B} hanno caratteristiche delle onde

$$\left. \begin{array}{l} E_y = E_y(x-ct) \\ E_z = E_z(x-ct) \\ B_y = B_y(x-ct) \\ B_z = B_z(x-ct) \end{array} \right\} \text{ è sufficiente avere } E_y(x,0), E_x(x,0), B_y(x,0), B_z(x,0) \text{ per conoscere propagazione e caratteristiche generali di } \vec{B} \text{ e } \vec{E}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = E_y(x-ct) \hat{u}_y + E_z(x-ct) \hat{u}_z \\ \vec{B} = B_y(x-ct) \hat{u}_y + B_z(x-ct) \hat{u}_z \end{array} \right.$$

ONDA **PIANA**

non contengono le variabili spaziali y e z e non contiene le componenti \perp al piano di \vec{E} (E_x) e B_x)

In generale ONDA: qualsiasi perturbazione impulsiva o periodica che si propaga a v definita. Ha origine da una sorgente, cioè vibrazione di corpo materiale che mette in movimento o le molecole di un mezzo (onde elastiche) o le cariche elettriche (onde elettromagnetiche).

Per onde elettromagnetiche la sorgente è un sistema di cariche accelerate che producono $\vec{E}(x,y,z,t)$ e $\vec{B}(x,y,z,t)$ come dati che costituiscono le funzioni d'onda, che descrivono l'onda elettromagnetica

Caso particolare ONDA PIANA: spazialmente unidimensionale $\vec{E}(x,t)$. Il nome deriva dal fatto che in un certo istante t_0 , assume lo stesso valore $\vec{E}(x_0, t_0)$ in tutti i punti del piano di equazione $x = x_0 \perp$ all'asse di propagazione x e // al piano yz .

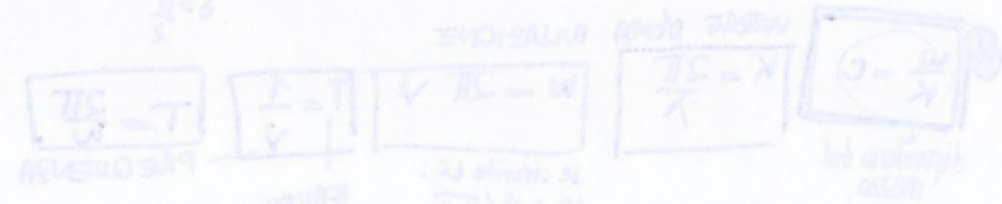
PROPRIETA' ONDE ELETTROMAGNETICHE

- \vec{E}, \vec{B} si propagano con la stessa velocità $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- vale la proporzionalità $B = \frac{E}{c}$
- \vec{E}, \vec{B} ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione, le onde elettromagnetiche sono trasversali, per esse è significativo il concetto di polarizzazione.
(onda piana è polarizzata rettilineamente se $B \parallel y$ e $E \parallel z$)
- verso di $\vec{E} \wedge \vec{B}$ definisce verso di propagazione dato da c
- onde elettromagnetiche obbediscono al PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, perché \vec{E}, \vec{B} compiono di forma lineare (alla prima potenza)

$$E(x-t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$B(x-t) = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

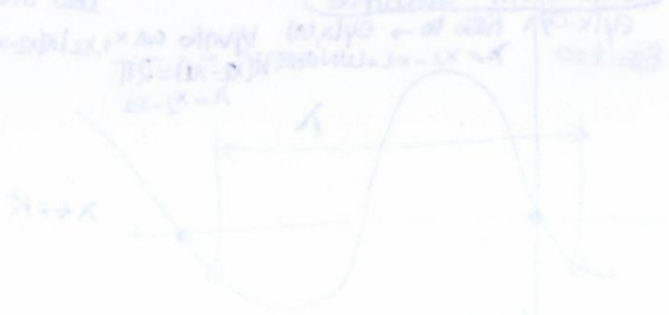
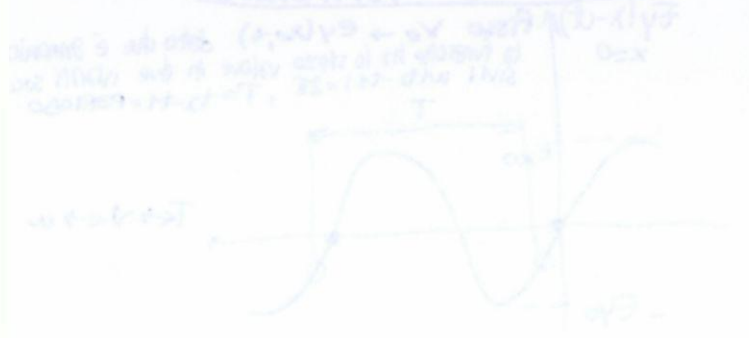
$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$



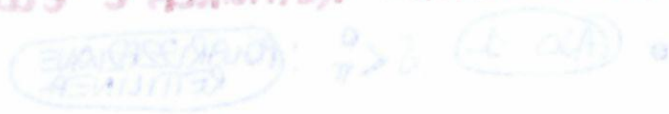
$$E(x-t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$B(x-t) = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t)$$

PERIODICHE LEONTOGONE



PERIODICHE RETTILINEE E ELLITTICHE



$$E(x-t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$B(x-t) = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t)$$



$$\frac{E}{B} = c$$