NUMERO: 1158

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Beghini

MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc.

Prof. Mazzi

① FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

→ RICHIAMI SU TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$

DISTANZA EUCLIDEA IN $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n)$

$d(P,Q) = \sqrt{(x_{1,P} - x_{1,Q})^2 + \dots + (x_{n,P} - x_{n,Q})^2}$

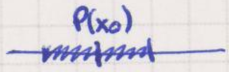
PROPRIETÀ

① $d(P,Q) \geq 0$ (radice sempre ≥ 0)
② $d(P,Q) = d(Q,P)$ (simmetria)
③ $\forall P,Q,R \in \mathbb{R}^n$, $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$

} spazio che contiene funzione con queste proprietà: SPAZIO METRICO (serve per definire topologia $\mathbb{R}^n$)

INTORNO

intervallo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \mid \{\forall x \in \mathbb{R},\ d(x - x_0) < \varepsilon\}$



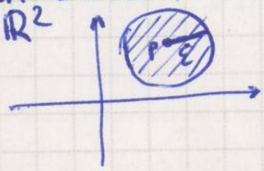
INTORNO SFERICO

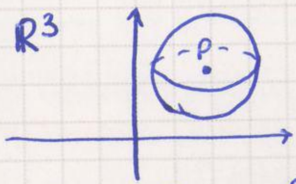
$P \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$

Intorno sferico di P di raggio ε: $B_\varepsilon(P) = B(P,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,P) < \varepsilon\}$

con B = ball.

Gli interni sono sempre degli aperti





PUNTO INTERNO al sottoinsieme $\mathbb{R}^n$ $\longrightarrow \mathring{A} = \mathrm{Int}(A)$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

P interno ad A se $\exists B_\varepsilon(P) \mid B_\varepsilon(P) \subseteq A$

PUNTO ESTERNO $\longrightarrow \mathrm{Est}(A)$

$P \in \mathbb{R}^n$ esterno ad A se $\forall B_\varepsilon(P) \mid B_\varepsilon(P) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$, cioè completamente contenuto nel complementare

PUNTO DI FRONTIERA $\longrightarrow \partial A$

$P \in \mathbb{R}^n$ è un punto di frontiera di A se $\forall B_\varepsilon(P) \mid B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset$, $B_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.

$([0,1] \times [0,1] = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\})$

Non necessariamente i punti di frontiera sono punti di A

INSIEME APERTO

$\mathring{A} = A$ tutti i punti sono interni (deve avere delle dimensioni, area($\mathbb{R}^2$), volume($\mathbb{R}^3$))

Gli intorni sono sempre aperti.

PROPRIETÀ

$\lim_{x \to \bar{x}} F(x) = L = (l_1, \dots, l_m) \iff \lim_{x \to \bar{x}} F_i(x) = l_i$

FUNZIONE CONTINUA

- F continua in $\bar{x} \in A = \text{dom } F$
- $\forall B_\varepsilon(F(\bar{x}))\ \exists\ B_\delta(\bar{x}) \mid x \in B_\delta(\bar{x}) \cap A \Rightarrow F(x) \in B_\varepsilon(F(\bar{x}))$ (non tolgo $\bar{x}$)
  ↳ non tolgo $\bar{x}$ → se $\bar{x}$ di accumulazione: F continua in $x \iff \lim_{x \to \bar{x}} F(x) = F(\bar{x})$
  → se $\bar{x}$ isolato $\Rightarrow F$ continua in $\bar{x}$

TEOREMA WEIERSTRASS

- A compatto
- f continua $: A \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \bar{x}, \underline{x} \in A \mid \forall x \in A \quad \underset{\text{minimo}}{f(\underline{x})} \leq f(x) \leq \underset{\text{massimo}}{f(\bar{x})}$

→ DERIVATE PARZIALI E DIREZIONALI

DERIVATE PARZIALI

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- x_0 interno al dominio di f

$\Rightarrow f$ derivabile in x_0 se $\exists$ finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ (curva ammette tg)

① $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ tg al grafico in x_0
② se f derivabile in $x_0 \to f$ continua in x_0

$f(x, y) \quad P(x_0, y_0) \in \text{dom } f$

- incremento una variabile per volta

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

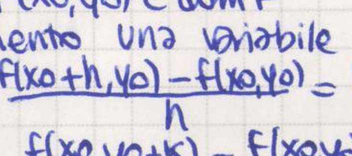
se $\exists$ finito ho DERIVATA PARZIALE

- studio intersezione tra
  ↳ piano $y = y_0$
  ↳ $g(x) = f(x, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x)}{h} = g'(x_0)$$

se $\exists$ finito, $\exists$ tg.
se $\exists$ anche tg a curva data da intersezione tra $x = x_0$ e $g(x) = f(x_0, \dots$
allora trovo le rette che generano piano tangente in $P(x_0, y_0)$

Derivate parziali non sufficienti per garantire continuità di f perché i
un punto posso arrivare da ∞ direzioni e dovrebbero dare tutte lo stess
valore in quel punto.



TEOREMA

se f differenziabile in $\bar{x}$

1. f continua in $\bar{x}$
2. $\exists\ JF(\bar{x})$
3. $L = JF(\bar{x}) \rightarrow L(x-\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ \dots \\ x_n - \bar{x}_n \end{pmatrix}$ applico Jacobiana al vettore colonna degli incrementi

→ DIFFERENZIABILITÀ

f differenziabile in $\bar{x} \in$ dom (interno al dominio) se:

- $\bar{x} \in \text{dom} f$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $h = (h_1, \dots, h_n)$ vettore degli incrementi
- $\exists$ l'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ |

$\Rightarrow f(x) = f(\bar{x}) + L(x-\bar{x}) + o(\|x-\bar{x}\|)$ per $x \rightarrow \bar{x}$

oppure

$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + L(h) + o(\|h\|) \quad h \rightarrow 0$ ($\|h\|$ = distanza di h da zero)

$\forall\ \bar{x}\ \exists\ L\bar{x}$ che si chiama DIFFERENZIALE di f in $\bar{x}$

Se f differenziabile in un punto allora f è continua, si può scrivere piano per un punto, $\exists$ tutte le derivate direzionali, soprattutto quelle parziali.

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE

- f differenziabile in $(x_0,y_0) \in \text{dom} f$

$\Rightarrow$
1. f continua in (x_0,y_0)
2. $\exists$ derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$
3. $\forall\ \vec{v}$ versore $\exists \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \cdot \vec{v}$
4. $\exists$ piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:
   $y = f(x_0,y_0) + L(x-x_0, y-y_0)$

$$L(\cancel{x_0},y_0) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}_{\text{gradiente di } f} \underbrace{(x-x_0, y-y_0)}_{\text{prodotto scalare}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$ EQ PIANO TANGENTE in x_0,y_0 (contiene tutte le tangenti in P)

funzione differenziabile se: $\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right]}{\|(x-x_0, y-y_0)\|}$

TEOREMA

$f \in C^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^n \Rightarrow f$ differenziabile in A

$g(x)$ C^1 su $\mathbb{R} \Rightarrow f(x,y) = g(x)$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}$.

→ TEOREMA INVERTIBILITÀ LOCALE

- $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- $\bar{x}$ interno al dominio

$\Rightarrow$ INVERSA LOCALE di F in $\bar{x}$ $F^{-1}: B_s(F(\bar{x})) \to B_r(\bar{x}) \mid \forall x \in B_r(\bar{x})$:
- $F^{-1}(F(\bar{x})) = x$
- $\forall y \in B_s(F(\bar{x}))$ $\quad F(F^{-1}(y)) = y$

TEOREMA FUNZIONE INVERSA

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertibile $\Leftrightarrow$ matrice che identifica L ha $\det A \neq 0$
(spazi vettoriali tra cui agisce L devono avere la stessa dimensione)
F invertibile se è sia suriettiva che iniettiva;
f globalmente invertibile se $\exists f^{-1}: f(A) \to A$ e $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$

TEOREMA

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\bar{x}$ interno al dominio $= A$
- f derivabile in $\bar{x}$
- $f'(\bar{x}) \neq 0$

$\Rightarrow \exists B_r(\bar{x}), \exists B_s(f(\bar{x})), \exists f^{-1}: B_s(f(\bar{x})) \to B_r(\bar{x})$ inversa di f
f^{-1} derivabile in $f(\bar{x})$ e $(f^{-1})'(f(\bar{x})) = \dfrac{1}{f'(\bar{x})}$

TEOREMA

- $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $A = \operatorname{dom} f$ aperto
- $F \in C^1(A)$, entrate delle matrici sono funzioni continue
- $\bar{x} \in A$
- $JF(\bar{x})$ invertibile

$\Rightarrow \exists F^{-1}: B(F(\bar{x}), s) \to B(\bar{x}, r)$, F^{-1} e C^1 su $B(F(\bar{x}), r)$
$JF^{-1}(F(x)) = (JF(x))^{-1}$ inverto matrice Jacobiana di f

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$JA(x) = A \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

L'applicazione lineare è invertibile $\Leftrightarrow$ matrice A è invertibile ($\det A \neq 0$)
$J(L^{-1})(L(x)) = [JL(x)]^{-1} = A^{-1}$

→ CAMPI VETTORIALI

Campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$ un'applicazione che ad ogni punto $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ associa un vettore $F(x) \in \mathbb{R}^n$.
Applicazione $F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Posto $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$, $x \in A$, le funzioni $F_i: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i = 1 \dots n$ che definiscono il campo verranno dette componenti del campo F.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ CONNESSO PER ARCHI

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto
A connesso per archi se $\forall\, x_1, x_2 \in A\ \exists$ curva $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid \gamma(a) = x_1, \gamma(b) = x_2$
$\gamma(t) \subseteq A\ \ \forall t \in [a,b]$ ($\exists$ curva che connette x_1 e x_2 all'interno dell'insieme)

TEOREMA

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

$$\left.\begin{array}{l}\exists\, x_1 \in A \quad f(x_1) < 0 \\ \exists\, x_2 \in A \quad f(x_2) > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \bar{x} \in A \quad f(\bar{x}) = 0$$

(si annulla f in almeno un punto proprio perché dominio connesso per archi)

→ SUPERFICIE NELLO SPAZIO IN FORMA PARAMETRICA

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto connesso per archi
- $\vec{G}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua → funzione con tali caratteristiche è SUPERFICIE PARAMETRICA

$$(u,v) \to \left.\begin{array}{l} x: G_1(u,v) \\ y: G_2(u,v) \\ z: G_3(u,v) \end{array}\right| G(u,v)$$

$\Sigma = \vec{G}(A)$ = SOSTEGNO DELLA SUPERFICIE = immagine

(u,v) generano un piano $\vec{n}, \vec{m}$

$$\left|\begin{array}{l} x = n_1 u + m_1 v = \sigma_1(u,v) \\ y = n_2 u + m_2 v = \sigma_2(u,v) \\ z = n_3 u + m_3 v = \sigma_3(u,v) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \to \vec{G}(u,v)\end{array}$$

= piano generato da $\vec{n}$ e $\vec{m}$ passante per $(0,0,0)$

→ SUPERFICIE REGOLARE

① $\vec{G}$ SEMPLICE se continua e iniettiva (è una superficie nel senso intuitivo del termine)

② $\vec{G}$ REGOLARE se → $\vec{G}$ classe C^1 su A (tutte derivate continue)
→ $J_{\vec{G}}$ ha rango massimo

$$\underset{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}{J_{\vec{G}}(u,v)} = \left(\frac{\partial \vec{G}}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \vec{G}}{\partial v}(u,v)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial G_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial G_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial G_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

rango massimo 2 (due vettori l.i.)

→ PIANO TANGENTE IN UN PUNTO DELLA SUPERFICIE REGOLARE

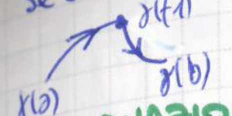
$\frac{\partial \vec{G}}{\partial u} = \partial_u \vec{G} \qquad \frac{\partial \vec{G}}{\partial v} = \partial_v \vec{G}$

→ $\vec{G}(u, \bar{v})$ = curva (ottenuta fissando un valore di v)
$\gamma(u) = \vec{G}(u, \bar{v})$ curva coordinata

→ $\frac{\partial \vec{G}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) = \gamma'(\bar{u})$ vettore tangente al sostegno di γ per valore fissato $\bar{u}$ della curva $\vec{G}(u, \bar{v})$

e lo stesso si può fare dalla superficie fissando un valore $\bar{u}$ e facendo variare v.
se i due vettori colonna sono l.i., anche i due vettori tangenti sono l.i. e si dimostra che in quel caso $\exists$ piano tg.

se curva regolare a tratti, l'orientamento di γ è coerente all'orientamento del primo arco regolare



in $\gamma(t_1)$ non esiste il vettore tangente.

OSSERVAZIONE

se γ regolare ma non semplice, nei punti di intersezione della curva con sé stessa ci possono essere nello stesso punto due vettori tangenti diversi

SOMMA DI CURVE

supponiamo di avere due archi di curva $\gamma_1: [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2: [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n \mid \gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$

Possiamo definire l'ARCO SOMMA $\gamma: [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \to \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{se } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

γ orientato come γ_1 e γ_2 è regolare a tratti e si indica come $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

se consideriamo la curva $\tilde{\gamma}_1: [-b, -a] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma_1(t)$ $\Rightarrow$ $\tilde{\gamma}_1'(t) = -\gamma_1'(-t)$ ha orientamento opposto a γ_1, curva viene indicata con $-\gamma_1$

CAMBIAMENTO DI PARAMETRO

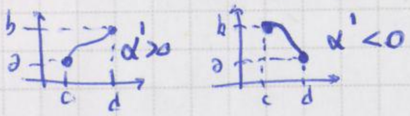
$\alpha: [c, d] \to [a, b]$

cambiamento di parametro regolare se:

1. α biunivoca
2. α classe $C^1([c,d])$
3. $\alpha'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [c,d]$

OSSERVAZIONE

1. Poiché α continua e biunivoca, α è strettamente monotona
2. Dato che α classe $C^1([a,b])$ applicando teorema permanenza del segno ad α', è garantito che α' abbia segno costante.
3. $\alpha'(s) > 0 \Rightarrow \alpha$ crescente $\quad \alpha(c) = a \quad \alpha(d) = b$
   $\alpha'(s) < 0 \Rightarrow \alpha$ decrescente $\quad \alpha(c) = b \quad \alpha(d) = a$



Dati due archi di curva regolari: $\delta: [c,d] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

γ, δ differiscono per cambiamento di parametrizzazione se $\exists$ cambiamento di parametrizzazione:

$\alpha: [c,d] \to [a,b]$ tale che $\Rightarrow \gamma(\overset{t}{\alpha(s)}) = \delta(s) \quad \forall s \in [c,d]$

$s \longmapsto \alpha(s)$

se $\alpha'(s) > 0$ γ e δ sono EQUIVALENTI

$$\begin{tikzcd} {[c,d]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] & {[a,b]} \arrow[d, "\gamma"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

OSSERVAZIONI

1. $\gamma([a,b]) = \delta([c,d])$, cioè hanno lo stesso sostegno
2. γ regolare $\Leftrightarrow$ δ regolare
3. γ semplice $\Leftrightarrow$ δ semplice
4. γ chiusa $\Leftrightarrow$ δ chiusa

SUPERFICI

CAMBIAMENTO DI PARAMETRIZZAZIONE

- $\phi: A' \to A$, con ϕ cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^2$
- $\phi \in C^1(A')$, $\det J\phi \neq 0$ su A

$\sigma: A \to \mathbb{R}^3$ sup. regolare
$\delta: A' \to \mathbb{R}^3$ sup. regolare

differiscono di cambio di parametrizzazione se $\exists\, \phi: A' \to A$ cambiamento variabili regolare |

$$\begin{tikzcd} \overset{(s,t)}{A'} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\delta"'] & A^{(u,v)} \arrow[d, "\sigma"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \delta(s,t) = \sigma(\phi(s,t))$$

$\forall (s,t) \in A'$

è vero che:
1. $\delta(A') = \sigma(A)$ stesso sostegno
2. σ regolare $\Leftrightarrow$ δ regolare
3. σ iniettiva $\Leftrightarrow$ δ iniettiva (cioè semplice)

$$\vec{N}_\delta(s,t) = \frac{\partial \delta}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \delta}{\partial t}(s,t)$$

$$\vec{N}_\sigma(\phi(s,t)) = (\det J\phi(s,t)\, \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\phi(s,t)) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\phi(s,t))$$

1. se $\det J\phi(s,t) > 0 \Rightarrow \vec{N}_\delta$ e $\vec{N}_\sigma$ hanno stesso verso e le superfici hanno lo stesso orientamento
2. se $\det J\phi(s,t) < 0 \Rightarrow \vec{N}_\delta$ e $\vec{N}_\sigma$ hanno verso opposto e orientamento opposto

TEOREMA

δ e σ sono calotte superficiali regolari che differiscono per cambiamento di parametrizzazione e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow \int_\sigma f\, d\sigma = \int_\delta f\, d\delta$

→ INTEGRALE DI RIEMANN SUI RETTANGOLI

Definiamo quando possibile l'integrale di f su R
- f limitata su R $(\exists\, M>0\ \forall (x,y)\in R,\ |f(x,y)|\le M)$
- funzioni maggioranti a scala di f = funzioni a scala h su R | $\boxed{f(x,y)\le h(x,y)}$ $\forall x,y \in \cup R_{ij}$ (unione degli R_{ij}) con R_{ij} partizione di R a cui h è adattata
- funzioni minoranti a scala g: $\boxed{g(x,y)\le f(x,y)}$

esistono sempre perché f è limitata

Possiamo considerare:

$$H:\left\{\int_R h(x,y) : h \text{ maggiorante a scala di } f(x,y)\right\}$$

$$G:\left\{\int_R g(x,y) : g \text{ minorante a scala di } f(x,y)\right\}$$

poiché $g(x,y)\le f(x,y)\le h(x,y) \Rightarrow \int_R g \le \int_R h$

Segue che G superiormente limitato, H inferiormente limitato:

$\underline{\int}_R f = \sup G \qquad \overline{\int}_R f = \inf H$

I due numeri $\exists$ finiti e sono integrale superiore e integrale inferiore di f su R con $\underline{\int}_R f \le \overline{\int}_R f$

RIEMANN-INTEGRABILE

una funzione limitata su R è Riemann-integrabile se $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$

OSSERVAZIONE

Non tutte le funzioni sono Riemann integrabili

Ad esempio: $f(x,y): \begin{cases} 1 & \text{se } x\in\mathbb{Q},\ y\in\mathbb{R} \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ y\in\mathbb{R}\end{cases}$

Non è integrabile su alcun rettangolo: $h(x,y)=1$ su R e $g(x,y)=0$

$\Rightarrow \overline{\int}_R f = 1 \ne \underline{\int}_R f = 0$

TEOREMA

sono Riemann-integrabili su R:

a) funzioni continue su R chiuso

b) funzioni continue su una partizione R_{ij} (aperto) e limitata su R (chiuso)

FORMULE DI RIDUZIONE

f Rieman integrabile su $R=[a,b]\times[c,d]$

a) se $\forall y\in[c,d]\ \exists\ g(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx \Rightarrow g(y)$ è integrabile su $[c,d]$

$$\int_R f = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_c^d g(y)\,dy$$

b) se $\forall x\in[a,b]\ \exists\ h(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy \Rightarrow h(x)$ è integrabile su $[a,b]$

$$\int_R f = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b h(x)\,dx$$

se f continua si può procedere in entrambi i modi

TEOREMA

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato,
Ω è misurabile $\Leftrightarrow |\partial\Omega| = 0$

HANNO MISURA NULLA

1. Punti
2. segmenti
3. Sostegni di archi di curva, cioè $\{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ dove $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ f continua e iniettiva
4. $\{(x, f(x)) : x \in [a,b], f$ integrabile su $[a,b]\}$;
5. $\{(g(y), y) : y \in [c,d], g$ integrabile su $[c,d]\}$;
6. sottoinsiemi di insiemi di misura nulla
7. unione di insiemi di misura nulla

PROPRIETÀ

$\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile
1. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow |\Omega_1| \leq |\Omega_2|$
2. $|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2| - |\Omega_1 \cap \Omega_2|$
3. $\mathring{\Omega}_1 \subseteq \tilde{\Omega}_1 \subseteq \bar{\Omega}_1 \Rightarrow |\mathring{\Omega}_1| = |\tilde{\Omega}_1| = |\bar{\Omega}_1|$ (perché misura del bordo è nulla)

→ **PROPRIETÀ INTEGRALI DOPPI**

Ω misurabile, f, g integrabili su Ω
1. $\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$
2. $f(x,y) = g(x,y) \Rightarrow \int_\Omega f = \int_\Omega g \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus C \quad |C| = 0$ (integrale non cambia se si modifica f su insieme di misura nulla)
3. $f(x,y) \geq 0$ su $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f \geq 0$
4. se $f(x,y) \geq 0$ e f continua $\Rightarrow \int_\Omega f = 0 \Leftrightarrow f = 0$
5. $f \leq g \Rightarrow \int_\Omega f \leq \int_\Omega g$
6. $|f|$ integrabile su Ω
   $|\int_\Omega f| \leq \int_\Omega |f|$
7. $\int_\Omega |f| =$ volume spazio tra piano $z=0$ e $f(x,y)$
8. MEDIA INTEGRALE
   a) Ω connesso e misurabile $\Rightarrow \underset{(inf)}{m} \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \leq \underset{(sup)}{M}$
   b) se Ω anche connesso e f continua
   $\Rightarrow \exists \bar{x}, \bar{y} \mid \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f = f(\bar{x}, \bar{y})$
9. ADDITIVITÀ RISPETTO DOMINIO
   $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f + \left(\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f\right) \to = 0$ se $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$
10. $\int_{\mathring{\Omega}} f = \int_\Omega f = \int_{\bar{\Omega}} f \Rightarrow$ integrale non dipende da parti del bordo $\in$ dom.

TEOREMA

Ω misurabile, sono integrabili su Ω:
1) funzioni continue su Ω
2) funzioni limitate su Ω e continue su $\Omega \setminus C$, con $|C| = 0$

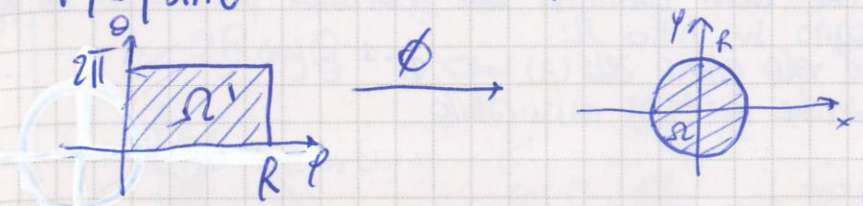
$J\phi(s,t) = \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = |v_1 w_2 - w_1 v_2|$ $\neq 0$ perche v, w li

$|\Omega'| = \int_{\Omega'} dxdy = |v||w| \sin\alpha = |v \wedge w| = |v_1 w_2 - w_1 v_2| = \int_{\Omega} |\det J\phi(s,t)| ds dt =$

$= |\det J\phi(s,t)| \cdot |\Omega|$ → area quadrato 1.1

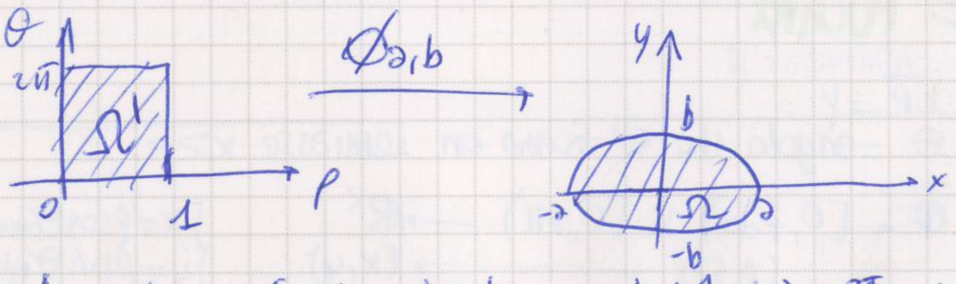
② AREA CERCHIO DI RAGGIO R

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$



$$\int_{\Omega} dxdy = \int_{\Omega'} \rho \, d\rho \, d\theta = \left(\int_0^R \rho \, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

③ AREA ELLISSE, a, b



$$\int_{\Omega} dxdy = \int_{\Omega'} ab\rho \, d\rho \, d\theta = ab\left(\int_0^1 \rho \, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = ab\pi$$

INTEGRALI DOPPI PER CALCOLO GRANDEZZE FISICHE

$\rho(x,y)$ = densità

$M(\Omega) = \int \rho(x,y) dxdy$ = massa lamina piana

$\left. \begin{array}{l} x_G = \frac{1}{M(\Omega)} \int_{\Omega} x \, \rho(x,y) dxdy \\ y_G = \frac{1}{M(\Omega)} \int_{\Omega} y \, \rho(x,y) dxdy \end{array} \right\}$ = coordinate baricentro

se densità costante $\begin{cases} x_G = \frac{1}{\cancel{K}\cdot|A|} \iint_A x \cancel{K} dxdy \\ y_G = \frac{1}{\cancel{K}|A|} \iint_A y \cancel{K} dxdy \end{cases}$ → x_G, y_G coordinate baricentro geometric

$d(x,y)$ = distanza dei punti dall'origine ⇒ $\int_{\Omega} d^2(x,y)\rho(x,y)$ = MOMENTO D'INERZIA RISPETTO Z

$a,b>0$: $\phi: [0,+\infty) \times [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

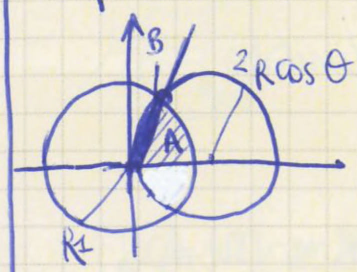
$(\rho,\theta) \longleftrightarrow \begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$ ϕ non biunivoca se $\rho = 0$

coeff. angolare della retta $\overline{OP}$: $\frac{y}{x} = \frac{b\cancel{\rho}\sin\theta}{a\cancel{\rho}\cos\theta} = \frac{b}{a}\, tg\,\theta$ → fattore schiacciamento

$$\boxed{\det J\phi(\rho,\theta) = ab\rho}$$

★ se circonferenza: R, $C(R,0)$ tangente all'origine.

$\rho < 2R\cos\theta$



$R1 = 2R\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{R1}{2R}$ → trovo θ_0

Divido dominio in:

A: $\{(\rho,\theta) : 0 \le \theta \le \theta_0, \quad 0 \le \rho \le R1\}$

B: $\{(\rho,\theta) : \theta_0 < \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le 2R\cos\theta$

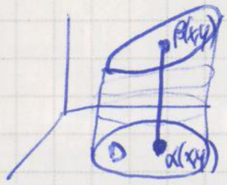
tg a circonferenza

→ PROPRIETÀ INTEGRALE TRIPLO

1. $\int_\Omega f$ lineare
2. $f \geq 0 \Rightarrow \int_\Omega f \geq 0$
3. se $f = g \Rightarrow \int_\Omega f = \int_\Omega g$
4. $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$
5. $|\Omega| = 0 \Rightarrow \int_\Omega f = 0$

→ METODI DI INTEGRAZIONE

① PER FILI



$\{(x,y,z) : (x,y) \in D \quad \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$

se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile
$\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)$
$(x,y) \in D$
α, β continue su D

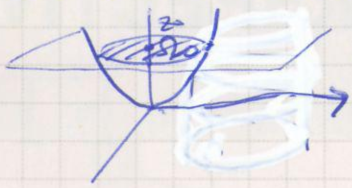
$\Rightarrow$ l'insieme è misurabile

$f(x,y,z)$ continua e limitata su $\Omega \Rightarrow f$ integrabile su Ω

$$\int_\Omega f = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\,dy$$

prima integro altezze e poi l'altezza su tutta l'area.

② PER STRATI



$a \leq z \leq b$

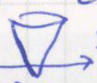
$\Omega_{z_0} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \Omega\} \Rightarrow \Omega$ misurabile

f continua su $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\, dx\,dy \right) dz$

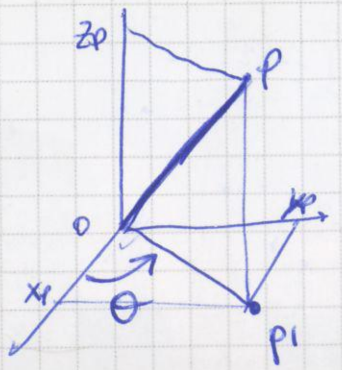
prima integro area e poi l'area su tutta l'altezza

★ SUPERFICI NOTEVOLI

1. SFERA $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
2. ELLISSOIDE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
3. PARABOLOIDE $z = x^2 + y^2$
4. PARABOLOIDE IPERBOLICO $z = x^2 - y^2$
5. CILINDRO $x^2 + y^2 = 1$
6. SEMICONO $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ → se z^2 fisso è cono con sezioni ellittiche
7. IPERBOLOIDE A UNA FALDA $z^2 = x^2 + y^2 - 1$
8. IPERBOLOIDE A DUE FALDE $z^2 = x^2 + y^2 + 1$



② COORDINATE CILINDRICHE



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

$\rho \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\boxed{\det J\phi = \rho}$$

③ COORDINATE CILINDRICHE ELLITTICHE

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\cos\theta \\ z = t \end{cases}$$

$$\boxed{\det J\phi = ab\rho}$$

→ CALCOLO VOLUMI

(① VEDI VOLUME ELLISSE)

② VOLUME SFERA

$$\int_\Omega 1\,dxdydz = \int \rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi = \left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R\right)\cdot\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(-\cos\varphi\, d\varphi\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi\cdot(+1+1) - \frac{4}{3}\pi R^3$$

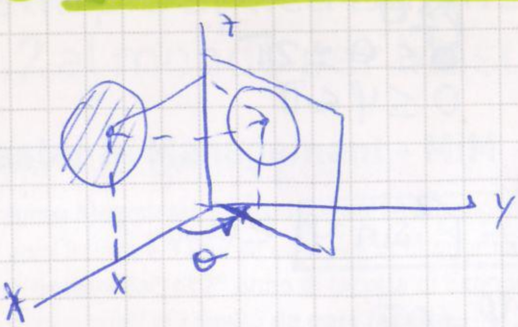
$$\Omega \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$0 \leq \rho \leq R$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

③ SOLIDI DI ROTAZIONE



prendo superficie in piano qualunque ortogonale all'asse di rotazione

Ω_S = solido che si ottiene facendo ruotare S intorno

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

$\underbrace{(\rho, t)}_{\text{figura nel piano xz}} \in S$ ($\rho \to x$, $t \to z$)

$\underbrace{\theta \in [0, 2\pi)}_{\text{esprime rotazione intorno a z}}$

→ INDIPENDENZA INTEGRALE DA PARAMETRIZZAZIONE CURVA

TEOREMA

- Ω aperto
- $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua
- $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare
- $\delta: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ regolare

} sostegno contenuto in Ω e differiscono per cambiamento di parametrizzazione $\delta(s) = \gamma(\alpha(s))$

- α: cambiamento di variabili regolare

$$\Rightarrow \int_\gamma f\,ds = \int_\delta f\,ds$$

DIMOSTRAZIONE

$\alpha: [c,d] \to [a,b]$ cambiamento di parametrizzazione | $\delta(s) = \gamma(\alpha(s))$

$$\vec{\delta}'(s) = \alpha'(s) \cdot \vec{\gamma}'(\alpha(s))$$

- $\int_\delta f = \int_c^d f(\delta(s)) \, \|\delta'(s)\| \, ds$
- $\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$

↳ applico cambiamento di variabili

$t = \alpha(s)$
$dt = \alpha'(s)ds$
$a \to \alpha^{-1}(a)$
$b \to \alpha^{-1}(b)$

$$= \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot \alpha'(s)\, ds$$

CASO 1

$\boxed{\alpha'(s) > 0}$

α crescente ⟨ $\alpha^{-1}(a) = c$, $\alpha^{-1}(b) = d$

$$= \int_c^d f(\delta(s)) \, \| \alpha'(s) \cdot \gamma'(\alpha(s)) \| \, ds =$$

$$= \int_c^d f(\delta(s)) \, \| \delta'(s) \| \, ds = \int_\delta f$$

CASO 2

$\boxed{\alpha'(s) < 0}$

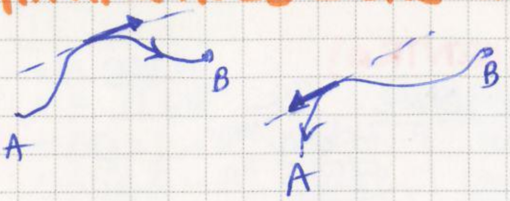
α decrescente ⟨ $\alpha^{-1}(a) = d$, $\alpha^{-1}(b) = c$

$$= \int_d^c - f(\delta(s)) \, \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot |\alpha'(s)| \, ds =$$

$$= \int_c^d f(\delta(s)) \, \|\gamma'(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)\| \, ds =$$

$$= \int_c^d f(\delta(s)) \, \|\delta'(s)\| \, ds = \int_\delta f$$

→ DIPENDENZA DA ORIENTAMENTO MA NON DA CAMBIAMENTI DI PARAMETRIZZAZIONE CHE CONSERVANO ORIENTAMENTO



τ dipende da orientamento ⇒ $F \cdot \tau$ dipende da orientamento

TEOREMA

- F campo continuo su Ω aperto che contiene sostegno di α
- γ, δ due curve che differiscono per cambio di parametrizzazione α

⇒ ① se $\alpha'(s) > 0$ (δ, γ = orientamento)

$$\int_\gamma F dP = \int_\delta F dP$$

② se $\alpha'(s) < 0$ (δ, γ orientamento opposto)

$$\int_\gamma F dP = -\int_\delta F dP$$

Integrale dipende da <u>sostegno</u> e <u>orientamento</u> (dato che si deve integrare prodotto scalare tra F e $\gamma'(t)$)

$$\boxed{\bigstar \quad \gamma(t) = (t, t^2, t^3) \quad \text{CURVA GOBBA}}$$

→ INTEGRALI SUPERFICIALI

- $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con Ω = aperto <u>continua</u>
- $G : K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ <u>calotta superficiale regolare</u>

$$\Rightarrow \boxed{\int_G f \, dG = \int_K f(G(u,v)) \|N(u,v)\| \, du \, dv}$$

→ PROPRIETÀ

SIGNIFICATO FISICO

- massa lamina $= \int_G \rho \, dG$
- coordinate baricentro ⇒ $x_G = \frac{1}{M} \int_G x \cdot \rho \, dG$

CAMBIAMENTO PARAMETRIZZAZIONE

L'integrale non dipende dalla superficie, ma solo da $G(K)$ = <u>sostegno</u> della superficie

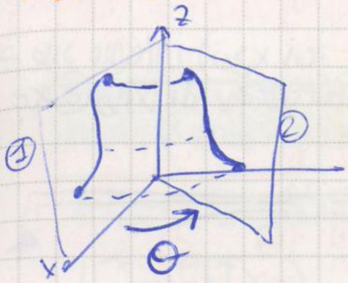
$$\int_\Sigma 1 \, dG = \int_K \|N(u,v)\| \, du \, dv = \text{area}(\Sigma)$$

$$\|N(\theta,\rho)\| = \sqrt{\cos^2\theta\sin^4\varphi + \sin^2\theta\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \rho^2\sin\varphi$$

$$\text{Area(sfera)} = \int_K \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \underset{\rho=1}{=} 2\pi \cdot \left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\right) = 4\pi$$

$$R \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

→ AREA DI SUPERFICI DI ROTAZIONE



$\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$$① \begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = 0 \\ z = \gamma_2(t) \end{cases}$$

con $\gamma_1(t) \ge 0$ per $t \in [a,b]$: $② \begin{cases} x = \gamma_1(t)\cos\theta \\ y = \gamma_1(t)\sin\theta \\ z = \gamma_2(t) \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} a \le t \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$

$$N(t,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \gamma_1'(t)\cos\theta & \gamma_1'(t)\sin\theta & \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1(t)\sin\theta & \gamma_1(t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(-\gamma_2'(t)\cdot\gamma_1(t)\cdot\cos\theta, -\gamma_2'(t)\gamma_1(t)\sin\theta, \gamma_1'(t)\gamma_1(t)\right)$$

$$\|N(t,\theta)\|^2 = \gamma_1(t)^2\|\gamma'(t)\|^2 = \gamma_1(t)^2\cdot\left(\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2\right)$$

$$\boxed{\|N(t,\theta)\| = \gamma_1(t)\cdot\|\gamma'(t)\|} \quad \gamma_1(t) \ge 0$$

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_K \|N(t,\theta)\| \cdot dt\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_a^b \gamma_1(t)\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt\,d\theta = 2\pi\cdot\int_a^b \gamma_1(t)\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = 0 \\ z = \gamma_2(t) \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = x \to f(\gamma(t)) = \gamma_1(t)$$

$$2\pi\int_\gamma x\,ds = 2\pi\int_a^b \gamma_1(t)\cdot\underbrace{\|\gamma'(t)\|\,dt}_{\text{lunghezza curva}}$$

FORMA ANALITICA TEOREMA DI GULDINO

Area superficie che si ottiene facendo ruotare la curva γ intorno asse z:

$$\boxed{2\pi\int_\gamma x\,ds = \text{Area(sup. rotazione)}}$$

PROPOSIZIONE

G e S differiscono per un cambiamento di variabili ϕ

① stesso orientamento: $\det J\phi > 0 \Rightarrow \int_G F \cdot \vec{n} = \int_S F\vec{n}$

② orientamento opposto: $\det J\phi < 0 \Rightarrow \int_G F\vec{n} = -\int_S F\vec{n}$

→ FORME DIFFERENZIALI

$f(x_1, \dots, x_n)$ è differenziabile in x_0 se $\exists$ applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ | $\forall h$ numero reale associ il prodotto $f'(x_0)h$.

$f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|) \quad h \to 0$

$L = \nabla f(x_0)$

$L(h) = \nabla f(x_0) \cdot h$

$$\boxed{d_{x_0} f(h) = L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_n}$$

Prendiamo in particolare la funzione che associa al vettore $(x_1, \dots, x_n)$ la sua componente j-esima: FUNZIONI COORDINATE

$f(x_1, \dots, x_n) = x_j = P_j(x)$ (nome della funzione)

$d_{x_0} P_j(h) = \nabla P_j(x_0) \cdot h = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0) \cdot h = h_j$

i vari incrementi $h_1, \dots, h_n$ possono essere visti come differenziale calcolato in x_0.

$h_1 = dP_1(x_0)(h) \qquad P_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$

$\vdots$

$h_n = dP_n(x_0)(h) \qquad P_n(x_1, \dots, x_n) = x_n$

$$\boxed{\begin{array}{l} dP_1 = dx_1 \\ \dots \\ dP_n = dx_n \end{array}}$$

$$d_{x_0} f(h) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)}_{\text{numero}} \cdot \underbrace{dx_1(h)}_{h_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \underbrace{dx_n(h)}_{h_n}$$

$$\boxed{d_{x_0} f(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n}$$

DIFFERENZIALE DI f in x_0 interpretato come forma differenziale

se f definito su Ω aperto $\Rightarrow d_{x_0} f$

$\boxed{x_0 \longmapsto \text{applicazione lineare } d_{x_0} f}$

$df(x_0) = f'(x_0)h$

$df(x_0) = f'(x_0)dx \qquad dx(h) = h$

Dalla teoria dei campi conservativi segue che su dominio semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}$
FORMA DIFFERENZIALE ESATTA SOLO SE CHIUSA

→ TEOREMI DI GREEN, DI STOKES (O DEL ROTORE) E DI GAUSS (O DELLA DIVERGENZA).

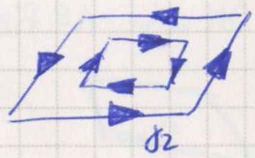
→ TEOREMA DI GREEN

Def ① $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, non vuoto, limitato, misurabile
② ∂A = unione numero finito di curve chiuse e regolari a tratti
⇒ APERTO CON BORDO

TEOREMA GREEN

① A aperto con bordo,
② ∂A orientato positivamente
③ F campo vettoriale di classe C^1 su un aperto Ω che contiene $\overline{A}$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\partial A} F \cdot dP = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx\,dy}$$



$$\int_{\partial A} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F\,dP + \int_{\gamma_2} F\,dP$$

TEOREMA DI JORDAN (della curva chiusa)

Nel piano: ogni curva chiusa, semplice divide il piano in due parti una limitata e una illimitata.

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto con bordo se:
1) $\mathring{A} \neq \emptyset$
2) $\overline{A}$ chiuso e limitato (compatto)
3) $\mathring{A}$ connesso
4) ∂A = unione sostegni di numero finito di curve chiuse, semplici e regolari a tratti, sostegni disgiunti

Def: aperto con bordo ha bordo orientato positivamente se un osservatore che cammina lungo bordo si muove nella direzione i vede dominio alla sinistra.

FORMULE DI GREEN

① $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, Ω aperto, $\neq \emptyset$
② A aperto con bordo
③ ∂A orientato positivamente

$$\Rightarrow \int_{\partial K} f\,dy = \iint_K \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial K} (0,f) \cdot dP$$

$$\int_{\partial K} f\,dx = \iint_K \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial K} (f,0) \cdot dP$$

→ TEOREMA DI GAUSS - DELLA DIVERGENZA

DIVERGENZA DI F

$\text{div } F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(F_1, \dots, F_n)$

APERTO CON BORDO IN $\mathbb{R}^3$

- $\mathring{K} \neq \emptyset$
- K compatto
- K connesso
- $\partial K = \bigcup$ numero finito di calotte superficiali regolari il cui sostegno si interseca al più lungo una curva

TEOREMA DI GAUSS

- $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Ω aperto $\neq \emptyset$
- $F \in C^1$
- $K \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto con bordo orientato positivamente

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\partial K} F \cdot \vec{n} = \iiint_K \text{div } F \, dx\,dy\,dz}$$

Flusso uscente dal solido

$\text{div } F : \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} : \Omega \to \mathbb{R}$

★

$$\boxed{\int \log(a+t^2)\,dt = a \cdot t \cdot \log(a+t^2) - 2t + 2 \operatorname{arctg} + c}$$

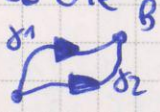
$\int \cos^2\theta =$

$\int \sin^2\theta =$

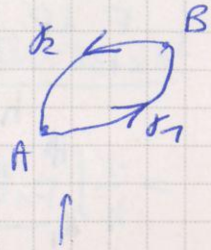
DIMOSTRAZIONE

① CAMPO CONSERVATIVO $\rightleftarrows$ ② $\int_\gamma F dP$ $\rightleftarrows$ ③ $\oint F dP = 0$

② ⇒ ③



so che $\int_{\gamma_1} F dP = \int_{\gamma_2} F dP$



Devo dimostrare che $\forall \gamma$ chiusa, $\oint_\gamma F dP = 0$

Prendo γ curva chiusa e divido sostegno in 2 parti: $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$

$$\int_\gamma F dP = \int_{\gamma_1+\gamma_2} F dP = \int_{\gamma_1} F dP + \int_{\gamma_2} F dP = \underbrace{\int_{\gamma_1}}_{\text{curva da A a B}} F dP - \underbrace{\int_{-\gamma_2}}_{\text{curva da A verso B}} F dP = 0$$

$\forall$ curva scelta, circuitazione è zero

③ ⇒ ②

se $\oint_\gamma F dP = 0 \Longrightarrow \int_{\gamma_1} F dP = \int_{\gamma_2} F dP$

γ_1, γ_2 curve che uniscono A e B, $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$ curva chiusa

$$\oint_\gamma F dP = \int_{\gamma_1-\gamma_2} F dP = \int_{\gamma_1} F dP + \int_{-\gamma_2} F dP = \int_{\gamma_1} F dP - \int_{\gamma_2} F dP = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} F dP = \int_{\gamma_2} F dP$$

② ⇒ ①

So che $\forall$ curva γ che unisce A a B $\int_\gamma F dP$ è lo stesso

Fisso A e X entrambi $\in \Omega$ e chiamo γ_x curva qualunque che li unisce

$$g(x) = \int_{\gamma_x} F dP$$

Voglio dimostrare che $g(x)$ è potenziale di F su Ω, cioè:

$\nabla g(x) = F(x)$

$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall i = 1 \dots n$

Dimostriamo che $\frac{\partial g}{\partial x_1} = F_1(x)$ sarà lo stesso per tutte le altre

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

DIMOSTRAZIONE

se F conservativo $\Rightarrow \exists\, g$ potenziale di F su Ω, cioè $\exists g \,|\, \nabla g(x) = F(x)$

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$$

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} \in C^1 \Rightarrow g \in C^2 \Rightarrow$ vale teorema di Schwarz

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

$=$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

<u>F irrotazionale</u> su Ω se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$

TEOREMA

F conservativo e $C^1 \Rightarrow F$ irrotazionale

⚠ $\exists$ campi con $\text{rot}\, F = 0$ che <u>non</u> sono conservativi
(cioè $\exists$ curva in modo che su di essa campo non sia conservativo)

INSIEME SEMPLICEMENTE CONNESSO

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>semplicemente connesso</u> su ogni curva chiusa se cappio può essere sciolto senza uscire da omega.
(nel piano: no buchi, su $\mathbb{R}^3$: $\forall$ curva chiusa con sostegno $\subseteq \Omega$ è bordo di una calotta superficiale con sostegno $\subseteq \Omega$)

TEOREMA

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\neq 0$
  - <u>semplicemente connesso</u>
  - connesso
- $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ classe $C^1(\Omega)$
- se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$ (se F irrotazionale)

$\Rightarrow F$ conservativo su Ω

DIMOSTRAZIONE

$\boxed{\mathbb{R}^2}$ Ω semplicemente connesso $\Rightarrow \forall$ curva chiusa semplice è la frontiera di un aperto limitato
$\boxed{\gamma = \partial A}$
(A = aperto con bordo)

F conservativo $\Rightarrow \forall\, \gamma$ curva chiusa semplice $\boxed{\oint_\gamma F\, dP = 0}$

1) SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE

→ DEFINIZIONE SUCCESSIONE NUMERICA E LIMITE DI UNA SUCCESSIONE, CRITERI RADICE E RAPPORTO

- $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad a(n) = a_n$
  oppure $\quad \text{dom } f = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$

  una successione soddisfa definitivamente una certa proprietà se $\exists\, n_0 \mid \forall n \geq n_0$ la successione soddisfa tale proprietà.

- $\forall a,\ (a, +\infty) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \Rightarrow +\infty$ è punto di accumulazione di $\mathbb{N}$
  I limiti si posso calcolare solo con punti di accumulazione, quindi in questo caso limite ha senso solo con $+\infty$.

  $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se: $\forall B_\varepsilon(l)\ \exists n_0 \mid n > n_0 \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(l)$
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \mid n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
  $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$(M, +\infty)$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \qquad \forall M,\ \exists n_0 \mid n > n_0 \Rightarrow a_n > M}$$

$(-\infty, M)$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \qquad \forall M\ \exists n_0 \mid n \geq n_0 \Rightarrow a_n < M}$$

successione
- CONVERGENTE ($\exists\, l$) $\to \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$
- DIVERGENTE (+ e −) $\to \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$
- INDETERMINATE $\to \nexists \lim$

- SOTTOSUCCESSIONI di $\{a_n\}$ = restrizioni di a_n a dominio $M \subseteq \mathbb{N}$ illimitato: a_{n_K} variano in $M = \{n_K,\ K \in \mathbb{N}\}$

  $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l \iff a_n \to c$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = l$

→ $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$ soltanto se $\forall$ sottosuccessione $\lim\limits_{K \to +\infty} a_{n_K} = l$

→ Se $\exists \{a_{n_K}\}$ e $\{a_{n_h}\}$ sottosuccessioni di $\{a_n\} \mid \lim\limits_{K \to +\infty} a_{n_K} = l_1 \neq \lim\limits_{h \to +\infty} a_{n_h} = l_2$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

in particolare si usano a_{2K} e a_{2K+1}

→ se $a_{2K} \to l$ e $a_{2K+1} \to l \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$

→ SERIE NUMERICHE

Somma di una serie di ∞ termini $\{a_n\}$ con $n \geq 0$

$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n\geq 0} a_n$ oggetto formale, non si sa a priori se è un numero.

→ SOMMA DI UNA SERIE NUMERICA

$s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2$

$\vdots$

$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n \rightarrow \{s_n\}$ SUCCESSIONE DELLE RIDOTTE

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \begin{cases} s \in \mathbb{R} & \text{serie converge ad } s = \text{somma della serie} \\ +\infty & \text{diverge} \\ -\infty & \\ \nexists & \text{indeterminata o oscillante} \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad a_n \text{ termine generale della serie, } s_n = a_0+\ldots+a_n \text{ ridotta } n\text{-esima}}$$

SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE q

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad s_n = q^0 + q^1 + \ldots + q^n$

Dal prodotto notevole: $(1-x^{n+1}) = (x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^n)$

$$\lim q^{n+1} \begin{cases} 0 & -1<q<1 \\ \nexists & q \leq -1 \\ +\infty & q>1 \end{cases}$$

$$\lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \begin{cases} \frac{1}{1-q} & -1<q<1 \rightarrow \frac{1}{1-q} = \text{somma della serie} \\ +\infty & q \geq 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

Se $\lim s_{2k} \neq \lim s_{2k+1} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} s_n$ serie è indeterminata

per le serie non valgono proprietà associativa e commutativa perché portano a limiti $\neq$.

→ INVARIANZA COMPORTAMENTO SERIE SE CAMBIA N° FINITO DI TERMINI

PROPOSIZIONE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots$

$\Rightarrow \exists n_0 | \forall n > n_0 \quad b_n = a_n \Rightarrow \sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento

SERIE TELESCOPICA

$$\boxed{\sum \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)}$$

Esempio: $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $s_n = \log(n+1)$

$\lim s_n = +\infty \Rightarrow$ serie diverge a $+\infty$

→ CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA E CRITERIO SUL RESTO

CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serie numerica convergente $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

DIMOSTRAZIONE

$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad \exists \lim_{n\to+\infty} s_n = s$

$s_{n-1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s$

$s_n - s_{n-1} = a_n$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$

Corollario

Data $\sum a_n$,

se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ o $\nexists \Rightarrow a_n$ non converge

CRITERIO NECESSARIO DEL RESTO

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a s, RESTO ENNESIMO DELLA SERIE $r_n = s - s_n$

$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$

Se a_n converge a $s \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} r_n = 0$

DIMOSTRAZIONE

$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n} s - s_n = s - s = 0$

Dimostrazione

$b_n \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$ $\qquad c_n \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$

$\sum b_n$ e $\sum c_n$ sono serie a termini positivi

$0 \leq b_n \leq |a_n|$
$0 \leq c_n \leq |a_n|$ $\forall n$

Per ipotesi $|a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}\sum b_n \\ \sum c_n\end{matrix}\right\}$ convergono per criterio confronto

$$a_n = b_n - c_n = \begin{cases} a_n - 0 & a_n \geq 0 \\ 0 - (-a_n) & a_n < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum a_n = \sum (b_n - c_n)$$

Se $\sum b_n$ converge e $\sum c_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum (b_n - c_n) = \sum b_n - \sum c_n \Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$$

$$\sum a_n = \lim s_n = a_0 + \ldots + a_n$$

$$\sum |a_n| = \lim (|a_0| + \ldots + |a_n|)$$

$$|s_n| = |a_0 + \ldots + a_n| \leq |a_0| + \ldots + |a_n|$$

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$$

→ SERIE A TERMINI POSITIVI

Sono a termini positivi le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$

PROPOSIZIONE

serie a termini positivi o CONVERGONO a $S \geq 0$ o DIVERGONO a $+\infty$

DIMOSTRAZIONE (comportamento serie a termini positivi)

consideriamo la successione delle ridotte

$s_0 = a_0 \geq 0$
$s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1 \geq a_0 \geq 0$
$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \geq s_1 \geq 0$
$s_n = a_0 + \ldots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$ $\forall n \geq 0$

$\Rightarrow \{s_n\}$ crescente e a termini positivi

$\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} s_n = \sup\{s_n, n \geq 0\}$, quindi la serie converge a $S \geq 0$ o diverge a $+\infty$

moltiplico per $b_n > 0$: $\quad 0 \le b_n(l-\varepsilon) < b_n \cdot \frac{a_n}{b_n} < b_n(l+\varepsilon)$

① $\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ per criterio confronto $\sum(l-\varepsilon)b_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge

② $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow$ per criterio confronto $\sum(l+\varepsilon)b_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

③ $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow$ per criterio confronto $\sum(l-\varepsilon)b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

④ $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ per criterio confronto $\sum(l+\varepsilon)b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

ESEMPI

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge perché confrontata con serie di Mengoli

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$ per criterio confronto.

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \underset{n=1}{\frac{1}{1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + S \le 2$$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha > 2$ converge perché $n^\alpha \ge n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge a $t \le 1 + S \le$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge perché $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge $\Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ diverge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{per } \alpha \ge 2 \\ \text{diverge} & \text{per } 0 < \alpha \le 1 \end{cases}}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad a_n > 0$

se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$
- $l = 1$ no risposte
- $l < 1$ $\sum a_n$ CONVERGE
- $l > 1$ $\sum a_n$ DIVERGE

CRITERIO DELLA RADICE

$\sum a_n$, $a_n \ge 0$

$\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$
- $l = 1$ no informazioni
- $l > 1$ $\sum a_n$ diverge
- $l < 1$ $\sum a_n$ converge

DIMOSTRAZIONE

① $\boxed{l > 1}$ per criterio della radice delle successioni: $\lim_n a_n = +\infty$

$\Rightarrow \sum a_n$ diverge per criterio necessario della convergenza

② $\boxed{l < 1}$ · scelgo $\varepsilon > 0 \mid l + \varepsilon < 1$, per def. limite $\exists n_0 \mid \forall n > n_0$

$l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon = q < 1$

· elevo alla n: $0 \le a_n \le (l+\varepsilon)^n = q^n \longrightarrow$ serie geometrica di ragione $q <$ che converge

$\Rightarrow$ per criterio confronto $\sum a_n$ CONVERGE

CRITERIO DI MACLAURIN o CRITERIO INTEGRALE

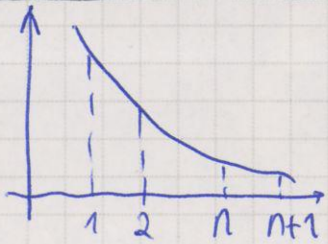
Sia $f(x): [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

1. $f(x) \geq 0$
2. $f(x)$ decrescente su $[1,+\infty)$

Allora

1) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hanno lo stesso comportamento
2) se la serie e l'integrale convergono: $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$
3) se convergono: $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} f(p) \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{p=n}^{\infty} f(p) = R_{n-1}$

DIMOSTRAZIONE



$\forall x \in [n, n+1] \Rightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

per monotonia integrali: $\underbrace{1}_{\text{ampiezza intervallo } dx} \cdot f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx = f(n) \cdot 1$

Quindi $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$

se sommiamo da 1 a n:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

ridotta $T_{n+1} = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n$

Passando al limite: $\lim_{T \to +\infty} \int_1^{T} f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx$ per corollario visto prima

Per criterio confronto sui limiti: $\lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \lim_{n \to +\infty} s_n$

se $\lim s_n = l \Rightarrow \lim_n \int_1^{n+1} f(x)dx$ converge a $m \leq l$

Quindi: $\lim_n \int_1^{n+1} f(x)dx = \lim_n \int_1^{+\infty} f(x)dx$ convergente

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ converge $\Rightarrow f(1) + \sum_{k=2}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge

cioè serie e integrale improprio hanno lo stesso comportamento e quando convergono:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

DIMOSTRAZIONE

① se a_n ha ordine $\alpha \leq 1$ rispetto a $\frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge per criterio confronto asintotico

② se a_n ha ordine inferiore a $\frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{a_n} \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \mid n \geq n_0$

$$-\varepsilon < \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{a_n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \leq \varepsilon a_n$$

- se $\alpha \leq 1$ $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge per confronto

se a_n ha ordine $\geq \alpha > 1 \Rightarrow a_n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \ \forall \beta \in (1, \alpha)$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_n}{\frac{1}{n^\beta}} < \varepsilon \Rightarrow 0 \leq a_n \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{n^\beta}$$

- se $\sum \frac{1}{n^\beta}$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge per confronto

→ SERIE A SEGNO ALTERNO

$\sum (-1)^n b_n$ o $\sum \cos(\pi n)\, b_n$ con $b_n \geq 0$

si studia prima CONVERGENZA ASSOLUTA $\Rightarrow$ se converge assolutamente allora converge

se non converge assolutamente si applica criterio Leibniz

CRITERIO LEIBNIZ

$\sum (-1)^n b_n$ tale che:

① $b_n \geq 0 \quad \forall n \geq 0$

② $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

③ $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n$, decrescente

$$\Rightarrow \sum (-1)^n b_n \text{ CONVERGE a } S \text{ e } |R_n| = \left| S - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k \right| \leq b_{n+1}$$

cioè resto ennesimo $|r_n| = |S - S_n| \leq b_{n+1}$

$$|r_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k b_k$$

DIMOSTRAZIONE

scriviamo la successione delle ridotte

$S_0 = (-1)^0 b_0 = b_0 \geq S_1 = b_0 - b_1$

$S_0 \geq S_2 = b_0 \underbrace{- b_1 + b_2}_{\substack{\leq 0 \text{ perché} \\ \text{serie decrescente}}} \geq S_3 = b_0 - b_1 + \underbrace{b_2 - b_3}_{\geq 0} \geq S_1$

$S_{2n-2} \geq S_{2n} = \underbrace{b_0 - b_1 + \ldots + b_{2n-2}}_{S_{2n-2}} \underbrace{- b_{2n-1} + b_{2n}}_{\leq 0} \geq S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$

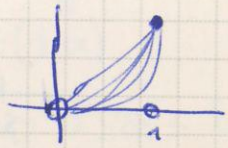
SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

sia $f_n: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
(es. $f_n(x) = x^n$)
Punto per punto $f_n(\bar{x}) = \bar{x}^n$ è una successione numerica

$$\lim_n x^n \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 1 & x=1 \\ +\infty & x>1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

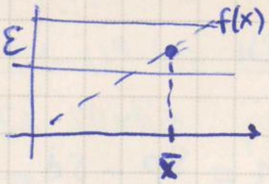
Allora $\forall x \in (-1,1]$: $x^n \to f(x) \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$



CONVERGENZA PUNTUALE

$f_n(x)$ converge puntualmente su I a $f(x)$ se $\forall x \in I$ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)}$

cioè se $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 = N_0(\varepsilon, x) : n > N_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

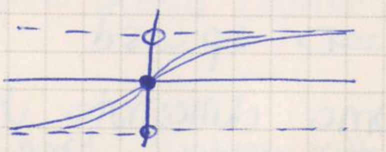


Da un certo N_0 in poi tutte le $f_n(\bar{x})$ sono distanti meno di ε da $f(\bar{x})$.

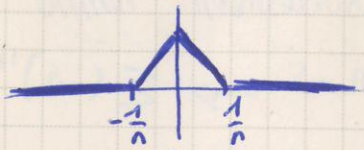
N_0 è scelto in base a $\bar{x}$ e ε

ESEMPI

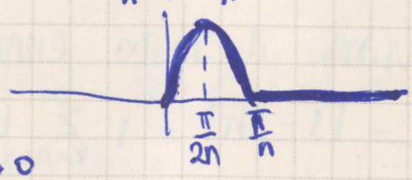
① $f_n(x) = \text{arctg}\, nx \to \begin{cases} +\pi/2 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$



② $g_n(x) = \begin{cases} 1+nx & x \in [-\frac{1}{n}, 0) \\ 1-nx & x \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



③ $f_n(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi/n \\ 0 & \frac{\pi}{2} < n \end{cases}$



$\lim_n f_n(x) = 0$ $\quad \sin n \cdot x = \sin n \cdot 0 = 0 \to 0$

Per $x>0$, $\exists n_0 \mid x \geq \frac{\pi}{n_0}$

Quindi $\forall \bar{x} > 0$, $\exists n_0$, $n > n_0$ $x > \frac{\pi}{n_0} > \frac{\pi}{n} \Rightarrow f_n(x) = 0 \Rightarrow |f_n(x) - 0| = 0 < \varepsilon$

Allora $f_n(x)$ converge a $f(x) = 0$

• $f_n(x) = x^n$ conv. unif su $[0,a] \subseteq [0,1)$

$f_n(x) - x^n < \alpha^n \quad \forall x \in [0,a)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = \left[\frac{\log \varepsilon}{\log a}\right], n > N_0 \Rightarrow x^n < \varepsilon \quad \forall x \in [0,a]$

③ $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x^n$

$\frac{1}{n} \cdot x^n \to 0 \quad \forall x \in [0,1]$ perché $f_n(1) = \frac{1}{n} \to 0$

converg. unif:

$$\sup_{x \in [0,1)} \left|\frac{1}{n} x^n - 0\right| = \sup_{x \in [0,1]} \left(\frac{1}{n} \cdot 1^n\right) = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

TEOREMA: LIMITE UNIFORME

$\left.\begin{array}{l} f_n(x) \text{ continua su } I \\ f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ su } I \end{array}\right\} f \in C(I)$ continua

DIMOSTRAZIONE

Devo dimostrare che: $\forall \bar{x} \in I, \exists B(\bar{x}) = (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \mid x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \cap I \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.

- CONDIZIONE (1) - convergenza uniforme:
  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad n > n_0 \quad x \in I \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
- CONDIZIONE (2) - continuità:
  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B(\bar{x}) = (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \quad x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \cap I \Rightarrow |f_n(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$
  (Cioè $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - \bar{x}| < \delta, |f_n(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$)

fissato ε scelgo n in modo che valga (1) e scelgo δ in modo che sia vera condizione (2)

$\bar{x} \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$: $\quad |f(x) - f(\bar{x})| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(\bar{x}) + f_n(\bar{x}) -$

$$\le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\underset{(1)}{< \varepsilon}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(\bar{x})|}_{\underset{(2)}{< \varepsilon}} + \underbrace{|f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|}_{< \varepsilon}$$

$< 3\varepsilon$

$\Rightarrow f$ continua $\forall \bar{x}$

Corollario

- $f_n(x)$ continue su I
- $f_n(x) \to f(x)$ su I
- $f(x)$ non continua su I

$\Rightarrow f_n(x)$ NON converge uniformemente a $f(x)$ su I

CRITERIO RADICE

Data $\sum_{n\geq n_0} a_n x^n$,

$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$

① $l=0 \Rightarrow R=+\infty$

② $l>0 \Rightarrow R=\frac{1}{l}$

③ $l=+\infty \Rightarrow R=0$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum_{n\geq n_0} a_n x^n$ con $a_n \neq 0$ definitivamente

$\exists \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$

① $l=0 \Rightarrow R=+\infty$

② $l>0 \Rightarrow R=1/l$

③ $l=+\infty \Rightarrow R=0$

COROLLARIO

Sotto le stesse ipotesi (teorema) criterio del rapporto, se $\exists \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ allora $=R$

DIMOSTRAZIONE CRITERIO RAPPORTO

Per $x\neq 0 \rightarrow$ Applico criterio del rapporto alla serie numerica a termini positivi $\sum_{n\geq n_0} |a_n x^n|$

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|\,|x|^{n+1}}{|a_n|\,|x|^n} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot|x|$$

① $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow 0$, $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot|x| = 0 \quad \forall |x|$

$\Rightarrow$ la serie $\sum |a_n x^n|$ converge assolutamente $\forall |x|>0$

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ converge $\forall x\in\mathbb{R} \rightarrow R=+\infty$

② $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow +\infty$ $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot|x| = +\infty \quad \forall x\neq 0$

$\Rightarrow$ serie non converge assolutamente $\forall x\neq 0$

③ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow l>0$ $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot|x| = l|x|$

$\Rightarrow \sum |a_n x^n|$ converge assolutamente $\Leftrightarrow l|x|<1 \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{l}$

$\Rightarrow \sum$ serie non converge $\Leftrightarrow l|x|>1 \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{l}$

cioè $\lim_n \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_{n+1}|} > 1 \rightarrow$ criterio rapporto delle successioni dice che $\lim_n |a_n x^n| = +\infty$, cioè serie diverge

→ SERIE DI POTENZE

Serie di potenze centrata in x_0 una serie di funzioni

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n}$$

- Tutte le serie di potenze <u>CONVERGONO NEL PROPRIO CENTRO x_0</u>

Infatti: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + \dots + a_n(x-x_0)^n$

se $x = x_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-x_0)^n = a_0$

- Sono una generalizzazione dei polinomi

Esempi

① $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge in $(-1,1)$ a $\frac{1}{1-x}$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x)^n$

- se $|x|>1$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n}x^n\right| = \lim_n \frac{|x|^n}{n} = +\infty$ serie <u>non converge</u>
- se $|x|<1$: $\left|\frac{1}{n}x^n\right| = \frac{|x|^n}{n} \to 0$

ordine di infinitesimo superiore a 1 rispetto a $\frac{1}{n}$ per 2° criterio confronto asintotico

serie <u>converge assolutamente</u>

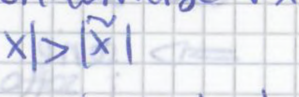
- se $x=1$ $\sum \frac{1}{n}(+1)^n = \sum \frac{1}{n}$ <u>diverge</u>
- se $x=-1$ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ <u>converge</u> per Leibniz

serie converge puntualmente in $[-1,1)$ assolutamente in $(-1,1)$

LEMMA Data serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

① se $\sum_{n\geq n_0} a_n x^n$ converge in $\bar{x}\neq 0 \Rightarrow$ converge assolutamente in $(-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$

② se $\sum_{n\geq n_0} a_n x^n$ non converge in $\tilde{x}\neq 0 \Rightarrow$ non converge $\forall x \mid |x|>|\tilde{x}|$



COROLLARIO

se $\sum_{n\geq n_0} a_n x^n$ converge in $\bar{x}\neq 0 \Rightarrow$ converge uniformemente su ogni intervallo $[-x_1, x_1] \subset (-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$

RAGGIO DI CONVERGENZA

$R = \sup\{|x| : \sum_{n\geq n_0} a_n x^n \text{ converge}\}$, $R\geq 0$

DIMOSTRAZIONE

Per teorema calcolo se $F_n(x)$ e $F(x)$ continue, anche la differenza è continua su I

Se considero intervallo $[a,b]$ contenente x_0, x so che
$$\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| = \max_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)|$$
devo dimostrare che $\to 0$ per $n\to\infty$

$a \quad x_0 \quad x \quad b$

$\forall x \quad |F_n(x) - F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|dt \le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt$

$f_n(t) \rightrightarrows f(t) \to \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \to 0$

$\Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| \to 0$ per $n\to+\infty$

$\Rightarrow F_n(x) \rightrightarrows F(x)$ su $[a,b]$

cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ n \ge n_0 \Rightarrow \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt < \varepsilon$

TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE

$h(x)$ continua su I

$\Rightarrow \forall x_0, x \in I \quad \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} h(t)dt = h(x)$

COROLLARIO

se $h(x) = f'(x) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) \Rightarrow \boxed{f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt}$

TEOREMA DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE

- $\{f_n(x)\} \ C^1(I)$
- $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ su $\forall [a,b] \subseteq I$ chiuso
- $\exists x_0 \in I$, $f_n(x_0) \to z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$
- $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ uniforme su $[a,b] \subset I$
- $f(x) \in C^1(I)$
- $f'(x) = g(x)$

OSSERVAZIONE: $f_n'(x)$ continue $\Rightarrow g(x)$ continua su I

DIMOSTRAZIONE

① $f_n'(x)$ per ipotesi sono funzioni continue su I

$f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ su $\forall [a,b] \subseteq I \Rightarrow g(x)$ continua su I

② Per teorema fondamentale calcolo integrale se $f_n(x) \in C^1$,

Preso $x_0 \in I \Rightarrow f_n(x) = f_n(x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt}_{f_n(x) - f_n(x_0)}$

- so che $f_n(x_0) \to z$ per $n\to+\infty$
- Per teorema sull'integrazione

$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ sui compatti

$f_n(x) \to z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = f(x)$

- per continuità di g e per teorema fondamentale del calcolo integrale $f(x)$ derivabile

$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(z + \int_{x_0}^{x} g(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} g(t)dt = g(x) \quad \forall x \in I$

$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1} f_n(x) \right| \leq \sum_{k=n+1} |f_k(x)| \leq \textbf{(1)}$

criterio su convergenza assoluta $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge $\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|$ converge

$\textbf{(1)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$ = resto n-esimo di $\sum M_n$

$|S(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \quad \forall x \in I$

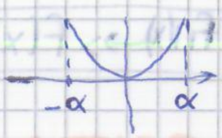
$\Rightarrow \sup_{x \in I} |S(x) - S_n(x)| \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k}_{\text{resto ennesimo di una serie convergente}} \to 0$

$\Rightarrow \lim_n \sup_{x \in I} |S(x) - S_n(x)| = 0 \Rightarrow \sum f_n(x)$ converge uniformemente

$\left| \sum f_n(x) \right| \leq \sum |f_n(x)| \leq \sum M_n$

ESEMPIO

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente su $[-\alpha, \alpha] \subseteq (-1, 1)$



$|x^n| = |x|^n \leq \alpha^n \quad \forall x \in [-\alpha, \alpha] \quad 0 < \alpha < 1$

$\sum \alpha^n$ converge perché $0 < \alpha < 1$ per Weierstrass uniformemente su $[-\alpha, \alpha]$

- converge uniformemente su $[2, +\infty)$

x^{4n} è crescente: $x^{4n} \geq 2^{4n} = 16^n$

$\frac{1}{x^{4n}} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n = M_n$

$\sum \frac{1}{x^{4n}}$ converge uniformemente su $[2, +\infty) \to$ su $[\alpha, +\infty)$ con $\alpha > 1$

$\sum \left(\frac{1}{x^4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^4}} = \frac{x^4}{x^4 - 1}$

- serie possono convergere uniformemente ma non assolutamente

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{|x| + n} \qquad 0 \leq \frac{1}{|x| + n}$ definita $\forall x \in \mathbb{R}$

$\to$ conv. assoluta: $\left| (-1)^n \frac{1}{|x| + n} \right| > \frac{1}{|x| + n} \sim \frac{1}{n}$ che diverge $\Rightarrow$ serie non converge assolutamente

$\to$ per x fissato la serie numerica converge uniformemente?

Applico Leibniz
1. $\lim b_n \to 0$
2. $b_n \geq 0$
3. $b_n > b_{n+1} : \frac{1}{|x| + n} \geq \frac{1}{|x| + n + 1}$

converge puntualmente

$|S(x) - S_n(x)| \leq b_{n+1}$

$|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{|x| + n + 1} \leq \frac{1}{n + 1}$

$\sup |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \to 0$

$\lim_n \sup |S(x) - S_n(x)| = 0 \Rightarrow$ serie converge uniformemente vale $\forall \bar{x} \in (-1,1) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)(\bar{x})^n = \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{1-x}\,dx = -\log|1-x|\Big|_0^{\bar{x}} = -\log(1-\bar{x})$

se serie converge
→ calcolare la somma della serie

TEOREMA

- $f_n(x)$ continua su I
- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ sui compatti $[a,b] \subseteq I$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt$ convergenza uniforme sui compatti

PRESO: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ per $x \in (-1,1)$ converge unif. sui compatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^n\,dt\right) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\log|1-x|$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log|1-x|} = -\left[x + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}(-x)^n + o(x^{n+1})\right]$$

serie di Taylor o MacLaurin

TEOREMA DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE

- $f_n(x) \in C^1$ su $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto
- $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$ converge uniformemente sui compatti
- $\exists\, \bar{x} \in I \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\bar{x})$ converge a $\bar{z}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente sui compatti contenuti in I ad una funzione $S(x)$ < $\in C^1$, $S'(x) = g(x)$

DIMOSTRAZIONE

- $S_n(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x)$ classe C^1
- $S_n'(x) = f_0'(x) + \dots + f_n'(x)$
  - → $S'_n(x) \rightrightarrows g(x)$
  - \+ $S_n(\bar{x}) \rightarrow \bar{z}$
  - ⇒ teorema delle successioni
    - $\exists\, S(x) \in C^1(I)$ |
    - ① $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ sui compatti
    - ② $S'(x) = g(x) \quad \forall x \in I$

TEOREMA 4

$\sum a_n x^n$ converge a $s(x)$ su I con $R>0$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \int_0^x a_n t^n dt$ ha raggio di convergenza R e converge a $\int_0^x s(t)dt$

DIMOSTRAZIONE

$s(x)$ continua su $I \Rightarrow \exists\ \forall x\ \int_0^x s(t)dt$

Per corollario Teorema di integrazione termine a termine, poiché serie converge unif. sui compatti $\subseteq I$ allora anche:

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt$ converge unif. sui compatti a $\int_0^x s(t)dt$ con

R uguale a quello della serie

TEOREMA 5 (DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE)

$\sum a_n x^n$ converge a $s(x)$ su I e $R>0$

$\Rightarrow$ serie delle derivate ha raggio R e

$$\sum_{n\geq 0} \frac{d}{dx}(a_n x^n) = \sum n a_n x^{n-1} = s'(x) \quad \forall x \in (-R,R)$$

Osserviamo che se $s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$\Rightarrow s'(x) = a_1 + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \dots$

COROLLARIO

$\sum a_n x^n$ converge a $s(x)$ con R

$\Rightarrow s(x)$ è di classe C^∞ su $(-R,R)$

Dimostrazione

$s(x)$ continua su I per Teo. 3

$s'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ continua su $(-R,R)$ per Teo 3.

Per Teo 5: $s''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}$ continua su $(-R,R)$ per Teo 3

Iterando procedimento:

$\exists\ s^{(k)}(x)$ definita su $(-R,R)$ $k \geq 1$

ESEMPI

Per teo 5 serie e serie delle derivate hanno stesso raggio ma non assicura che convergano allo stesso insieme

ⓐ $s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$

- $R = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}} = 1 \Rightarrow R=1$
- $x=1$ $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} 1^n$ converge
- $x=-1$ $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} (-1)^n$ converge ass

$\Rightarrow$ serie converge su $[-1,1]$ $R=1$

ⓑ $s'(x) = \sum \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n(n-1)}x^n\right) = \sum \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)} x^{n-1} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1} \frac{1}{n} x^n$

$\Rightarrow$ serie converge su $[-1,1)$ $R=1$

ⓒ $s''(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\Rightarrow$ converge su $(-1,1)$, $R=1$

SERIE DI TAYLOR

f C^∞ in $B_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow$ posso scrivere f di Taylor di ordine n centrata in x_0

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^n(x_0)(x - x_0)^n}_{\text{polinomio di Taylor}}$$

$+ o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$

oppure

resto di Lagrange : $\exists c$ compreso tra x e x_0 |

$$f(x) = f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^n$$

$f(x)$ associa serie di Taylor centrata in x_0 : $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$

$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ $\quad 0! = 1$

Non tutte le serie di Taylor convergono alla funzione per $x \neq x_0$

Per $x = x_0$ serie di Taylor $= f(x_0)$

Se serie di Taylor $\Sigma 0 = 0$

la serie con resto di Lagrange $\neq 0$ perché c'è il resto che è $\neq 0$

$\Rightarrow$ serie di Taylor di f centrata in $x = 0$ NON converge a f se $x \neq 0$ (serie di Taylor $\neq$ dalla funzione)

FUNZIONE ANALITICA

funzione di classe C^∞ su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è ANALITICA se serie di Taylor di f centrata in x_0 converge a $f(x)$ in un intorno di x_0

$\exists\ \delta_1 < \delta,\ \delta_1 > 0 \mid f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$

CRITERI PER ANALITICITÀ DELLE FUNZIONI

- f C^∞ su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I$
- $\exists M > 0 \quad \forall x \in I, \forall n \geq 0 \mid |f^{(n)}(x)| \leq M^n$

$\Rightarrow$ serie di Taylor di f centrata in x_0 $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ converge a $f(x)$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e f è analitica in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

corollario

- $f \in C^\infty$ su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- $\exists M > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ \forall n \mid |f^{(n)}(x_0)| \leq M$

$\Rightarrow$ serie di Taylor di f converge a f e f è analitica in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

CONSEGUENZA

$|f^{(n)}(x)|$:

- $|\sin x| \leq 1$
- $|\cos x| \leq 1$

derivate sempre maggiorate da 1

- $f^{(n)}(x) = e^x \leq e^{x_0 + 1} = M$

analitiche su $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{CONTINUA + LIMITATA} \Rightarrow \text{RIEMANN INTEGRABILE}}$

f continua → f ha derivata continua "quasi ovunque", al più su insieme locale finito di punti, cioè f ha al più un numero finito di punti in cui derivata non è continua.
Nei punti in cui f' non esiste ∃ derivata dx e sx

f C^1 a tratti → f classe C^1 "quasi ovunque". Dove f non è C^1, f' non esiste e ∃ derivata dx e sx come nei punti angolosi

TEOREMA CONVERGENZA UNIFORME

- f C^1 a tratti
- f periodica

⟹ serie di Fourier converge uniformemente su $\mathbb{R}$

e converge anche puntualmente in base al 2° teorema di convergenza puntuale

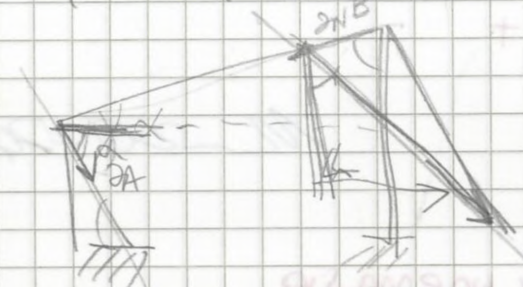
TEOREMA DI LOCALIZZAZIONE

Se f soddisfa le ipotesi del teorema precedente, cioè:
- C^1 a tratti, su [a,b]
- periodica

⟹ serie di Fourier converge uniformemente a f su [a,b] e poi per periodicità su tutti gli intervalli ottenuti per traslazione di periodo T

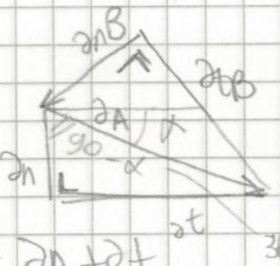
- 3 dim
- dim. meccanico ← freni, frizioni, (transitori), (Fibre), ruote dentate

- 1 es. per tipo + 2 sui transitori



$a_A = \omega_1^2 AO$

$a_B = a_0 + a_{nB} + a_{tB}$



$a_B = a_n + a_t$

$a_n = \omega_3^2 \cdot BD = a_A \cdot \cos 30 =$

$a_n = 0{,}09$

ω_3^2

$a_t = \dot{\omega}_3 \cancel{BD} = \dfrac{10 \cdot \sin 30}{0{,}10}$

se $\langle v,v \rangle \rightarrow v \cdot v = v_1 v_1 + \ldots + v_n v_n = v_1^2 + \ldots + v_n^2 = [\langle v,v \rangle]$

$\|v\| = 0 \iff \langle v,v \rangle = 0 \iff v = 0$

se $\exists v \mid \langle v,v \rangle \geq 0 \quad \|v\| = 0 \quad e \ v \neq 0 \rightarrow$ PSEUDO NORMA

- Se V è spazio di dimensione finita n, posso definire uno spazio vettoriale $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormale $\rightarrow \langle e_i, e_i \rangle = 1$ normale , $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

  se spazio ha dimensione infinita $v \overset{?}{=} \sum_{i=0}^{\infty} v_i e_i$
- se $v \perp w$: $\langle v,w \rangle = 0$

CONVERGENZA IN NORMA (QUADRATICA) DI SUCC. O SERIE

V spazio vettoriale con prodotto scalare

① SUCCESSIONE CONVERGE IN NORMA se $\lim_n \|v - v_n\| = 0$

② $\sum_{i=0}^{\infty} v_n$ converge in norma a V se : $\lim_n \|v - s_n\| =$

con $s_n = v_0 + \ldots + v_n$ $\quad = \lim_n \|v - \sum_{i=0}^{\infty} v_i\| = 0$

La norma $\| \ \|$ è applicazione lineare $V \rightarrow \mathbb{R}$ che associa un numero reale ≥ 0 con proprietà seguenti:

$V \longmapsto [0, +\infty)$
$v \longmapsto \|v\| \geq 0$

① $\|v\| = 0 \iff v = 0$

② $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

③ $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

$C((a,b))$ funzioni continue e limitate su (a,b)

$\sup_{x \in (a,b)} |f(x)| = \|f\|_{\infty}$ norma del sup

$f_n \rightarrow\rightarrow f$ uniforme su (a,b)

$\lim_n \left(\sup |f_n(x) - f(x)| \right) = 0 \qquad \|f_n - f\| = \|f - f_n\|$

- V ammette sistema di coordinate ortonormali di riferimento se $\exists$ famiglia di vettori $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$

① $e_i \cdot e_i = 1$
② $e_i \cdot e_j = 0 \quad i \neq j$
③ $\forall v \in V, \exists$ serie $\sum_{i=0}^{\infty} v_i e_i$ che converge alla norma di V

QUINDI PER SERIE PERIODICHE posso:

① Definire prodotto scalare
② costruire sistema di riferimento ortonormale :
cioè funzioni possono essere scritte come serie $\sum_{i=0}^{\infty} v_i e_i$

$<f,g> = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$

$<f,f> = 0 \iff f = 0$

$<f,f> = \int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ (basta prendere funzione nulla tranne in numero finito di p

$\iff f(x) = 0$ tranne al più in un numero finito di punti

Applicando tale convenzione si ottiene uno spazio vettoriale $L^2([a,b])$ sul quale è definito uno pseudo prodotto vettoriale: $\boxed{L^2([a,b]),\ <f,g>}$

- f periodica di periodo 2π:

$f|_{[0,2\pi]}$ sia $L^2([0,2\pi])$ $\quad \Sigma <f,e_i>e_i$ $\quad$ Base ortonormale in $[0,2\pi]$

Sistema di riferimento: $1, \cos kx, \sin kx$

$<1,1> = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi$

$<\cos kx, \sin kx> = \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \sin kx\,dx = 0$

$<\sin kx, \cos hx> = 0$

$<1, \sin kx> = 0$

$<1, \cos kx> = 0$

ortogonali

$<\sin kx, \sin kx> = \pi$

$<\cos kx, \cos kx> = \pi$

SERIE FOURIER

$L^2([a,b])$ funzioni | f^2 integrabile $[a,b]$

$<f,g> = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$<f,f> = \int_a^b f^2\,dx$

con $f(x)$ non identicamente nulla su $[a,b]$

SERIE TRIGONOMETRICA

A quadrato integrabile tra 0 e 2π

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

PROPRIETÀ FUNZIONI PERIODICHE

- f periodica di periodo $T > 0$ è una funzione def. su $\mathbb{R}$ e | $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+T) = f(x)$

Data f periodica su $[0,T]$ si dice prolungamento di f per periodicità una funzione $\tilde{f}(x)$

$x = \tilde{x} + kT \qquad \bar{x} \in [0,T)$

$\tilde{f}(x) = f(\bar{x}) \qquad \bar{x}: x = \bar{x} + kT$

prendo $f(x)$ tra 0 e T e la replico

$f(x)$ continua su $[0,T)$, non per forza anche il suo prolungamento è continuo

- f ha periodo $T \Rightarrow \forall \alpha \neq 0$ $f(\alpha x)$ ha periodo $\boxed{\frac{T}{\alpha}}$
- f periodica di periodo T e localmente integrabile su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$

② $\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos Kx \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos Kx$

$$\left(\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos Kx \, dx\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos Kx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cos Kx \, dx\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos Kx = \underbrace{\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos Kx\right)}_{a_K} \cos Kx$$

③ $$\langle f, \sin Kx \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin Kx = \underbrace{\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin Kx \, dx\right)}_{b_K} \sin Kx$$

f integrabile e quadrato integrabile su $[0, 2\pi]$, periodica di periodo 2π
posso associare la serie di Fourier:

$$\boxed{a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} (a_K \cos Kx + b_K \sin Kx)}$$

Polinomio di f di ordine K è un polinomio trigonometrico di ordine K

$$a_0 + \sum_{n=1}^{K} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{2K+1} \langle f, e_i \rangle e_i}_{e_0, \dots, e_{2K+1}}$$ → proiezione ortogonale della funzione sul piano generato dai vettori

TEOREMA

- f periodica $T = 2\pi$
- f integrabile e quadrato integrabile su T

$P_n(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{K} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ polinomio di Fourier di ordine K

$\Rightarrow \|f - P_K(x)\|_2 \mid \forall Q_K(x)$ polinomio di Fourier di ordine K:

$$\underbrace{\|f - P_K(x)\|_2}_{\text{scarto quadratico medio}} \le \|f - Q_K(x)\|_2$$

vettore con distanza minore da f

scarto quadratico medio $= \sqrt{\int_0^{2\pi} (f(x) - P_K(x))^2 \, dx}$

polinomio di Fourier minimizza lo scarto quadratico medio

$$\left(\int_0^{2\pi} (f(x) - Q_K(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} = F(a_0, a_K, b_K)$$

$$\|f - P_K(x)\|_2^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{2K+1} \langle f, e_i \rangle^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^{K} (a_n^2 + b_n^2)$$

TEOREMA

- f periodica $T = 2\pi$
- f integrabile e quadrato integrabile su T

$\Rightarrow$ ① serie di Fourier di f converge a f in norma quadratica cioè:

$$\lim_K \|f(x) - P_K(x)\|_2 = 0$$

② Vale identità di Parseval

$$\|f\|_2^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{K=1}^{\infty} (a_K^2 + b_K^2)$$