NUMERO: 1156

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Prette

MATERIA: Elettrotecnica e Macchine Elettriche + Eserc.
Prof. Canova

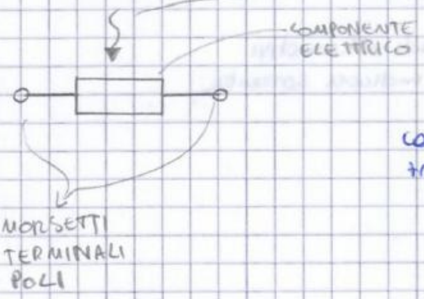
20/11/2013

ELETTROTECNICA

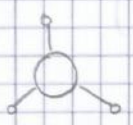
fenomeni x cui i COMPONENTI ELETTRICI si scambiano info ed energia tramite dei TERMINALI

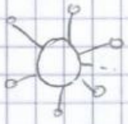
potrebbe ricevere energia anche tramite campo elettromagnetico vedi diodo

BIPOLO



considereremo solo comunicazioni tra componenti tramite morsetti terminali


TRIPOLO


N - POLO

Le equazioni che definiscono 1 sistema elettrico: eq. MAXWELL
(Considereremo 1 sottoinsieme delle eq. di MAXWELL) → eq. KIRCHOFF

GRANDEZZE ELETTRICHE

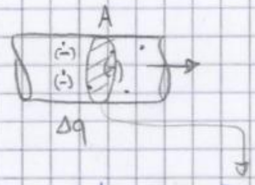
Sono 3 (2 indip. e 1 terza derivata)

1) corrente elettrica

deriva dal concetto di CARICA ELETTRICA (concetto assiomatico)
⊕ ⊖

CONDUTTORI ELETTRICI: materiali che hanno disponibilità di cariche elettriche che possono essere mosse in movimento all'interno del materiale senza mettere in gioco troppa energia

$\underbrace{\text{(Argento, Rame, Allumınio)}}_{\text{i migliori conduttori}}$



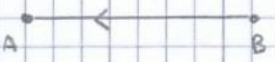
CORRENTE ELETTRICA: considero sez. trasv. del tubo ⇒ la quantità di carica ΔQ che attraversa la sezione A nel tempo Δt = corrente elettrica

$\frac{\Delta q}{\Delta t} = i$

se intervalli infinitesimi: $\frac{dq}{dt} = i$ AMPERE (A) $\Rightarrow 1\ \frac{\text{Coulomb}}{s}$

DENSITÀ DI CORRENTE: $J = \frac{i}{A}$ $\left(\frac{A}{m^2}\right)$

Se siamo ~~[illegible]~~ nel finito (dati 2 punti A e B):



$v_a - v_B = v_{AB}$ diff. di potenziale o tensione elettrica

avere 1 diff. di potenziale posso fare del lavoro sulle cariche x metterle in movimento

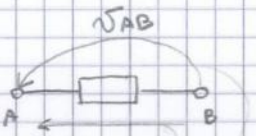
VOLT (V)

Misura tensione

↓

VOLTMETRO

deve misurare valore di tensione e verso (v_{AB} o v_{BA})



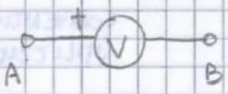
$v_{AB} = v_A - v_B$

↳ doppia informazione

→ modi ≠ di indicare potenziale : il percorso non è imp.

↓

il potenz. dipend solo da punto di partenza e di arrivo



BIPOLO con morsetto contrassegnato

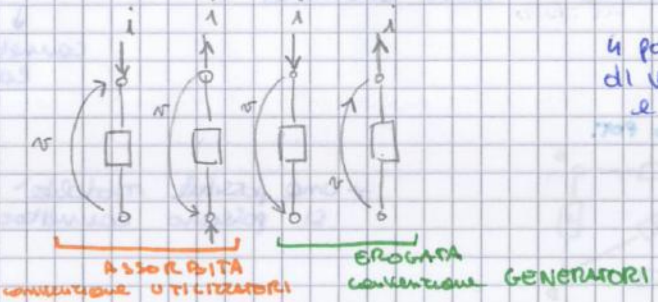
↳ misura v_{AB}

v_{AB} + → $v_A > v_B$

v_{AB} − (significa v_{BA} +) → $v_B > v_A$

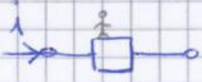
3) Potenza elettrica

$P = v \cdot i$



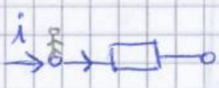
4 possibili combinazioni di versi di tensione e corrente

corrente che "entra in un morsetto" (sono seduto su componente guardo verso morsetto e vedo la corrente entrare)



→ faccio rif. a qst situazione : sono sul componente e vedo morsetto

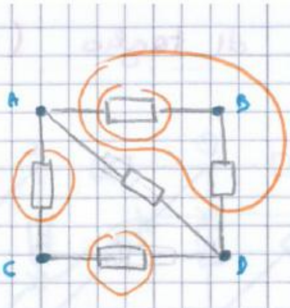
se sto su morsetto la vedo uscire



- la tensione punta verso morsetto dove entra la corrente POTENZA ASSORBITA
  CONVENZIONE degli UTILIZZATORI
- la tensione punta dove esce la corrente POTENZA EROGATA convenzione dei GENERATORI

NODO } GRAFO
LATO

MAGLIA } dipendono dalle prime
INSIEME DI TAGLIO

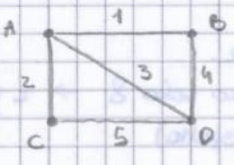


1) **Nodo** punto di connessione di terminali (vedi fig. di prima ABCD..)

2) **Lato** parte di circuito compresa tra 2 nodi (che può anche avere all'interno altri nodi)
↳ bipoli e composizioni di bipoli

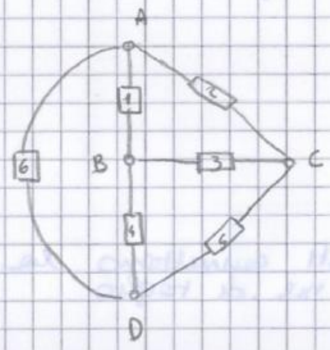
↳ Grafo { Nodi, Lati } rappres. astratta di 1 circuito dove si mette in evidenza che tra i nodi ci sono dei lati:

rappresentazione grafica delle connessioni di 1 circuito



mappa circuito in cui abbiamo perso info al dettaglio dei bipoli

3) **Maglia**



Insieme di lati

1) Tutti i lati della maglia sono connessi (partendo da 1 punto posso raggiungere tutti i lati)

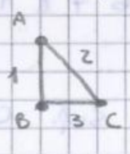
2) Ad ogni nodo della maglia sono connessi 2 e solo 2 lati

Insieme di lati: 1,2,3

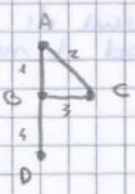
proprietà 1) e 2) soddisfatte

MAGLIA

grafo:



insieme di lati: 1,2,3,4



1) soddisfatta
2) al nodo B arrivano 3 lati ed al nodo D arriva 1 solo lato (non soddisfatta)

⇒ NON È UNA MAGLIA (pur includendo al suo interno 1 maglia)

1, 2, 3
3, 4, 5
1, 4, 6
6, 2, 5

4, 1, 2, 5
6, 1, 3, 5
6, 2, 3, 4

↝ tutte maglie (ho preso percorsi chiusi)

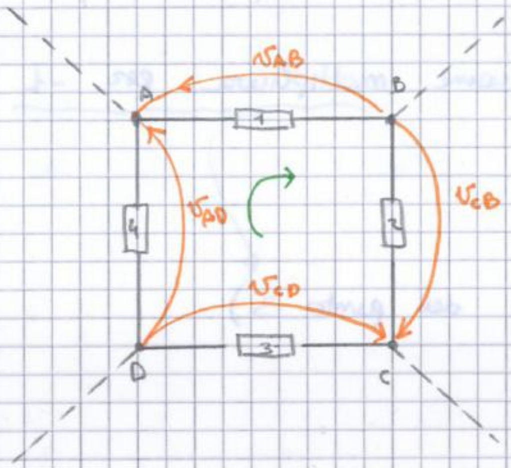
LEGGI DI KIRCHOFF

Legge di Kirchoff delle tensioni (LKT)

Data una maglia la somma algebrica delle tensioni dei lati della maglia è uguale a ∅ in qualsiasi istante

es.

1)

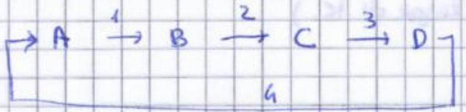


1) versi tensioni
(scegliamo noi)
v_{AB} o v_{BA}

2) verso di percorrenza della maglia
(scegliamo noi)

3) Mettere in relazione
1) ↔ 2)

2)



3) { + v concordi al verso di perc.
{ − v discordi al " "

{ − v concordi "
{ + v discordi "

+ comoda qst convenzione (però la scelta è arbitraria):

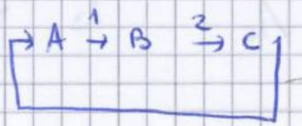
$$-v_{AB} + v_{CB} - v_{CD} + v_{AD} = 0$$

Legge di Kirchoff delle tensioni (LKT) alla maglia generalizzata

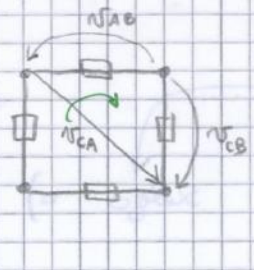
maglia generalizzata: percorso chiuso formato non necessariamente da lati fisici

anche se non c'è 1 lato, c'è cmq una tensione tra i 2 nodi (anche se non c'è 1 lato fisico)

→ quindi se faccio:



torniamo in A senza passare da lato fisico



$$-v_{AB} + v_{CB} - v_{CA} = 0$$

$+i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0$

se avessi scelto i_2 entrante i_2' : $i_2' = -i_2$ → troverei stessa equazione

se avessimo preso verso uscente in 2) veniva $-i_4 + i_2 + i_3 - i_4 = 0$
come moltiplicare per -1

es. ITALIA

eq. di K. sono equazioni di VINCOLO (anche x sistemi molto complessi)
↓
regolano il comportamento
dei BIPOLI (8)

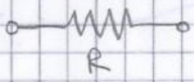
1) RESISTORE
2) GENERATORE di TENSIONE ideale
3) GENERATORE di CORRENTE ideale

4) CORTO-CIRCUITO
5) CIRCUITO APERTO
6) INTERRUTTORE

→ derivati dei precedenti

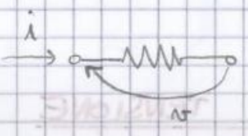
7) GENERATORE di TENSIONE reale
8) // di CORRENTE reale

RESISTORE



RESISTENZA OHM (Ω)

Equazione costitutiva :

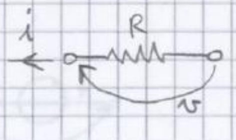


→ se i e v con CONVENZIONE degli UTILIZZATORI

$v = R \cdot i$

(LEGGE DI OHM)

se cambiamo convenzione

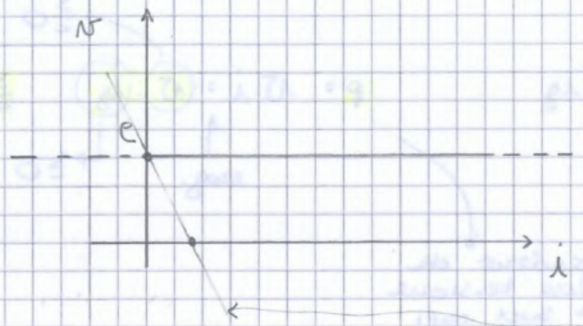


$v = -Ri$

$R \geq 0$ → tutti i materiali in natura hanno 1 resistenza, alcuni molto bassa (superconduttori)

[N.B. $\frac{1}{R} = G$ conduttanza siemens (S)]

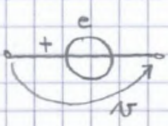
CARATTERISTICA ESTERNA



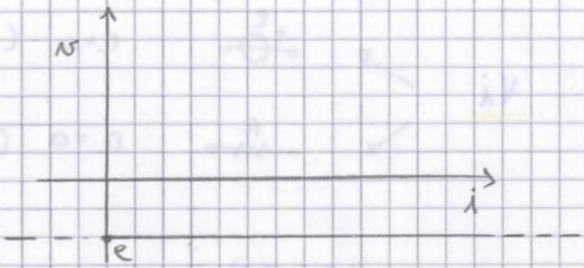
$p \to \infty$

$\to \infty$ → in realtà non abbiamo 1 generatore in grado di tenere la stessa tensione per ∀ valore di corrente (se non gli chiedo niente sì se chiudessi corrente potrebbe ridursi)

se invece cambio convenzione :

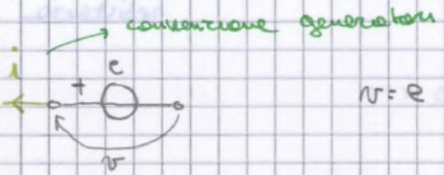


$v = -e \quad \forall i$



CARATT. ESTERNA

Potenza



$v = e$

erogata

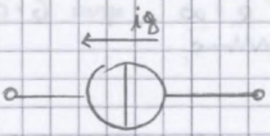
$p = v \cdot i = \boxed{e} \cdot \boxed{i} \gtreqless 0$

≥ 0

non posso dire nulla sul segno se non conosco il sistema $\gtreqless 0$

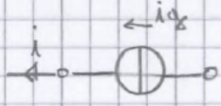
a seconda del contesto in cui è inserito potrà funzionare da utilizzatore o generatore

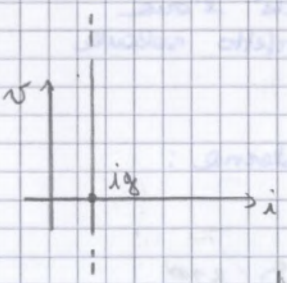
GENERATORE IDEALE di CORRENTE



i_g CORRENTE IMPRESSA del GENERATORE (A)

Equazione costitutiva :



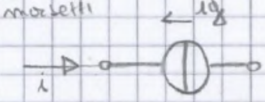


$i = i_g \quad \boxed{\forall v}$

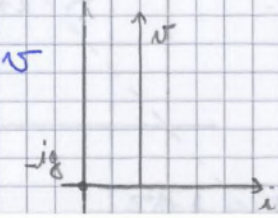
non significa che la tens. sui morsetti sia = 0

se scelgo verso opposto :

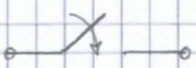
errore frequente !



$i = -i_g \quad \forall v$



INTERRUTTORE

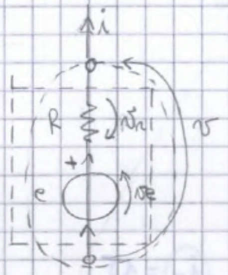


$i=0 \quad \forall V$ CIRC. APERTO

$V=0 \quad \forall i$ CORTO CIRCUITO

26/11/2013

GENERATORE REALE DI TENSIONE



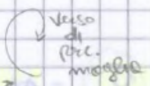
BIPOLO COMPLESSIVO: convenz. generatori

RESISTORE: convenz. utilizzatori

Scrivo x ogni bipolo l'equazione costit. scegliendo la convenzione

$$v_e = e$$
$$v_R = R \cdot i$$

equaz. COSTITUTIVE



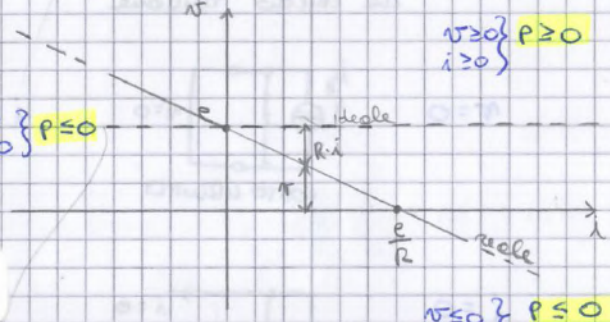
Applico LKT:

$$v_e - v_R - v = 0$$

sost. eq. con: convenzioni

$$e - Ri - v = 0$$

$$v = e - Ri$$ → retta



$v \geq 0$, $i \geq 0$ } $p \geq 0$

$i \leq 0$, $v \geq 0$ } $p \leq 0$

$v \leq 0$, $i \geq 0$ } $p \leq 0$

ideale solo se $i=0$; quando inizio a chiedere corrente scende

$i=0 \qquad v=e$ CIRCUITO APERTO

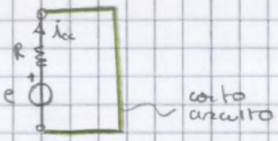
↓

quando il bipolo non è collegato a nulla (morsetto aperto)

$v=0 \qquad i=\frac{e}{R}$ CORTO CIRCUITO

↓

quando la tensione imposta ai morsetti è nulla: mettiamo 1 corto circuito



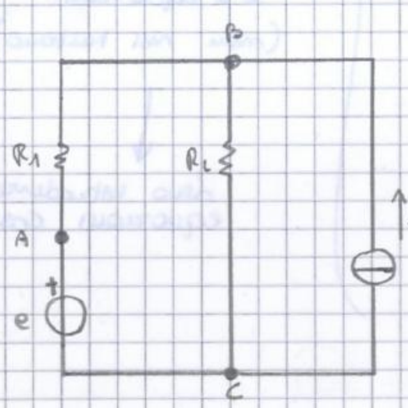
$p = v \cdot i$ erogata (conv. generatori) ≥ 0 nel primo quadrante ($v \geq 0 \quad i \geq 0$) → solo nel 1° quadrante funziona da generatore

GENERATORE REALE — modalità di rappresentazione → nella forma IN TENSIONE (THEVENIN)
→ nella forma IN CORRENTE (NORTON)

Metodi di soluzione dei circuiti

↓

es.



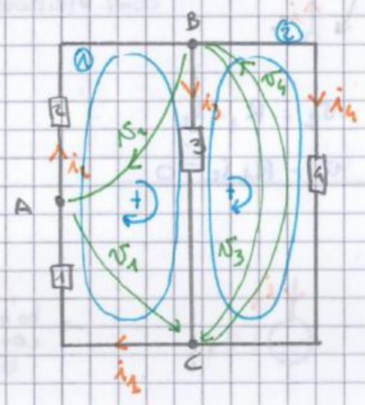
e, R_1, R_2, i_g → 4 bipoli (no 4 lati)

L : LATI = 4

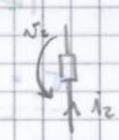
N : NODI = 3

determinare per ogni bipolo tensione e corrente

Metto in evidenza collegamenti tra bipoli (no tipi di bipoli così x non essere influenzato da versi i e v



posso indicare tensioni anche così:



→ vincoli dati da leggi di K.

incognite :

i_1, i_2, i_3, i_4
v_1, v_2, v_3, v_4 } 8 incognite

n° incognite $2 \cdot \boxed{L}$ → n° lati

Usando **LKC** posso scrivere **N - 1** equazioni lin. ind.

$$\| $$
nel nostro caso 2

LKT posso scrivere **L - N + 1** equazioni lin. ind.

$$\|$$
nel nostro caso 2

$$\underbrace{[A]}_{\text{matrice coeff.}} \cdot \underbrace{[x]}_{\text{incognite}} = \underbrace{[y]}_{\text{termini noti}}$$

$$[x] = [A]^{-1}[y]$$

↓ con calcolatrice o matlab

Cerchiamo di semplificare le 8 equazioni (prima di scrivere il sistema):

sostituiamo eq. costitutive ⟶ dentro leggi di K.

di solito si sostituisce tensione in funz. della corrente

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 = -i_g \\ e - R_1 i_2 - R_2 \cdot i_3 = 0 \\ R_2 i_3 \quad - v_4 = 0 \end{cases}$$

→ corrente in generatore di tensione

→ corrente nel resistore R_2

→ corrente nel resistore R_3

→ tensione del generatore

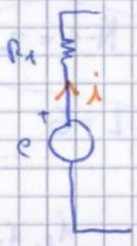
incognite rimaste

(4 equaz. in 4 incognite)

↓

alcune equazioni sono poco significative $i_1 = i_2$ ↑i_2 ↑i_1 è alquanto ovvio

eliminino nodo A:



$i_1 = i_2 = i$

$\cancel{A}$ $N = 2$

numero di equazioni $N - 1 = 1$ → LKC

anche L scende di un'unità : $L \to 3$

ma $L - N + 1 = 2$ → LKT

sost. i_1 e i_2 con i:

3 incognite
3 equazioni

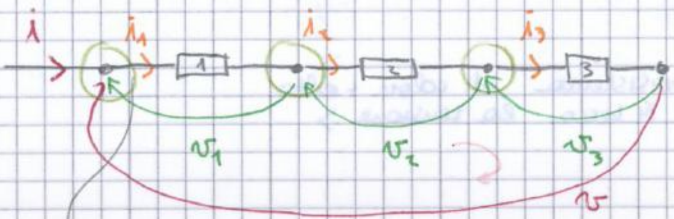
$$\begin{cases} i - i_3 = -i_8 \\ e - R_1 \cdot i - R_2 \cdot i_3 = 0 \\ R_2 \cdot i_3 \quad - v_4 = 0 \end{cases}$$

l'obiettivo è semplificare il circuito in modo da calcolare comodamente le incognite richieste (non servono tutte)

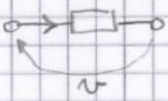
↓ semplificazioni con SERIE e PARALLELO di BIPOLI

SERIE

bipoli connessi in serie quando hanno 1 e 1 solo morsetto in comune e non ci devono essere altri collegamenti che vanno verso altre parti di circuito



se ho collegamenti in serie la corrente è meglio indicarla dentro il bipolo (per evitare confusioni)



legame tra corrente totale i e tensione totale v

applico K. a tutti i nodi

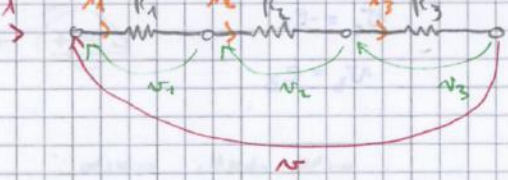
$$\left.\begin{aligned} i &= i_1 \\ i_1 &= i_2 \\ i_2 &= i_3 \end{aligned}\right\} \quad i = i_1 = i_2 = i_3$$

→ percorsi da stessa corrente

la serie implica l'uguaglianza delle correnti (no viceversa)

$$-v_1 - v_2 - v_3 + v = 0 \quad \rightarrow \quad v = v_1 + v_2 + v_3$$

Resistori in serie



$v_1 = R_1 \cdot i_1$

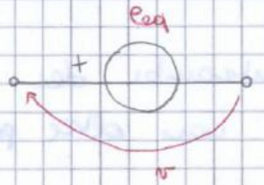
$v_2 = R_2 \cdot i_2$ → conv. utilizzatori

$v_3 = R_3 \cdot i_3$

i è la stessa raccolgo

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 = i\,(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= i \cdot R_{eq}$$



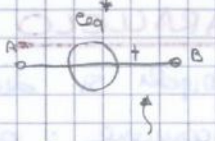
es. $e_1 = 5V$

$e_2 = 20V$

$e_3 = 10V$

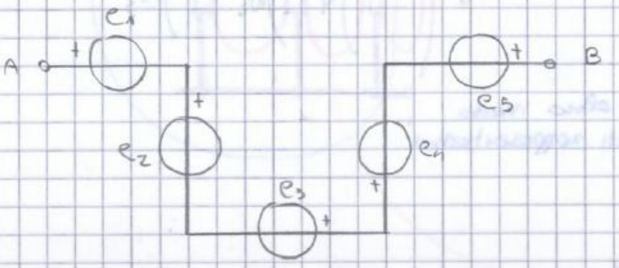
$e_{eq} = -5V \rightsquigarrow e_{eq}^* = 5V$ $(-e_{eq})$

↳ non sappiamo a priori segno di e_{eq}

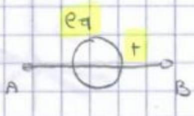


se non voglio portare dietro il ⊖

es:



→



regola x det. e_{eq}: somma algebrica delle e dei generatori prendendo ⊕ le e che hanno il ⊕ verso B (come voglio det. la e eq.)

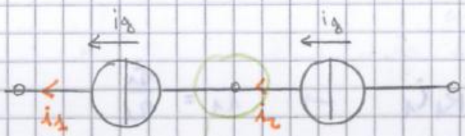
$$e_{eq} = -e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5$$

es. $e_1 = 50V$
$e_2 = 15V$
$e_3 = 10V$

$\rightsquigarrow e_{eq} = 0V$

CORTO CIRCUITO

SERIE di generatori ideali di corrente NON E' POSSIBILE



$$\begin{cases} i_1 = i_{g1} \\ i_2 = i_{g2} \end{cases}$$

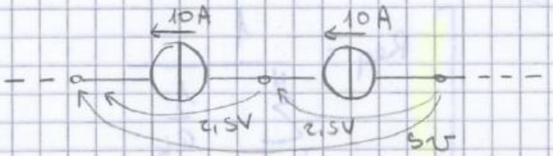
↳ quale delle 2 leggi prevale? nessuna delle 2 questa legge non è POSSIBILE a meno che le correnti siano = (ma ne basta 1 solo per imporre una corrente)

↓

non serve mettere 2 generatori x imporre una corrente

LKC $i_2 - i_1 = 0$ $i_2 = i_1$

in natura in realtà vince la legge di K. perché i componenti non sono ideali



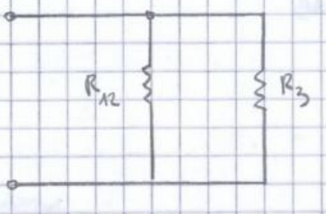
2 generatori inseriti in 1 circuito

ma ai morsetti esterni non cambia nulla

i due generatori si spartiscono lo stato di potenza in generale (se ne ho 2 la potenza totale si ripartisce tra i 2)

$P = 5 \cdot 10 = 50W$ si
$V \cdot i$

Posso anche fare dei passaggi intermedi (operazioni di parallelo parziali)

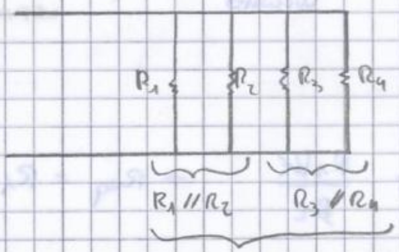


$$R_1 // R_2 : R_{12} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3}$$

prodotto ÷ somma
(formula semplice da ricordare; vale solo per 2 resistenze)

NON VALE $R_{eq} = \cancel{\frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}$ → solo × 2 resistenze



$R_{12} // R_{34} = R_{eq}$

cosa si perde una volta fatto il parallelo:

si perdono correnti $i_1\ i_2\ i_3$
ma possiamo tornare indietro con formula del

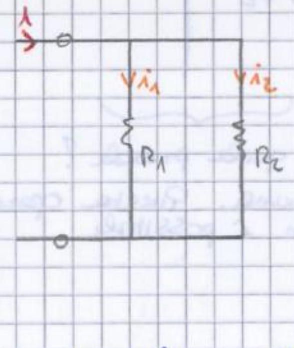
PARTITORE di CORRENTE

$$i_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V}{R_1} = \frac{R_{eq}\, i}{R_1}$$

la resistenza di valore + alto si becca la corrente <

la corrente totale si ripartisce in modo invers. proporzionale alla resistenza che consideriamo

: corrente inv. prop. valore resistenza



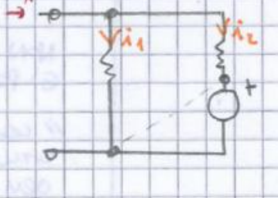
$$i_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} \cdot i = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_1} \cdot i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i$$

se R_1 è grande
passerà + corrente nel ramo con R_2

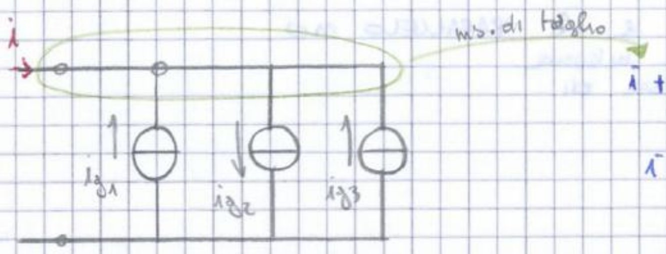
i proporzionali a resistenza dell'altro lato

queste formule valgono su questo schema!



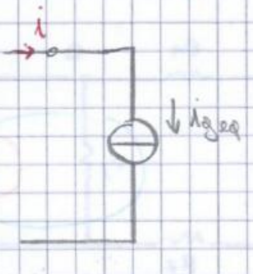
le resistenze non sono in //
perché c'è un generatore (le 2 correnti delle 2 resistenze devono essere in //)

PARALLELO di gen. i. di corrente

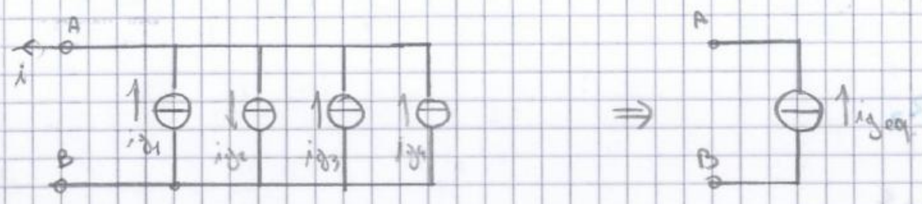


$i + i_{g1} - i_{g2} + i_{g3} = 0$

$i = -i_{g1} + i_{g2} - i_{g3}$

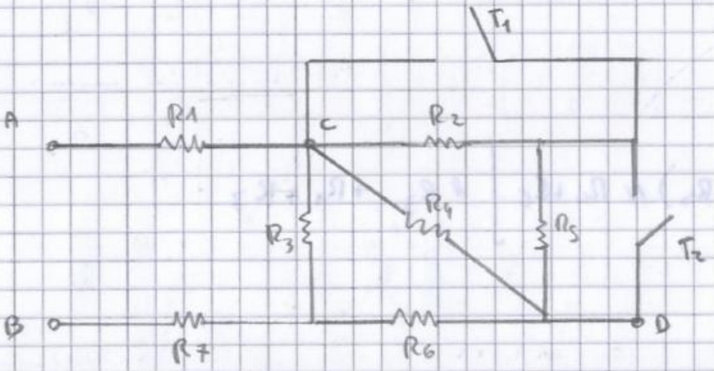


es:



$i_{g_{eq}} = i_{g1} - i_{g2} + i_{g3} + i_{g4}$ (prendo ⊕ le i concordi a i_{geq})

es:

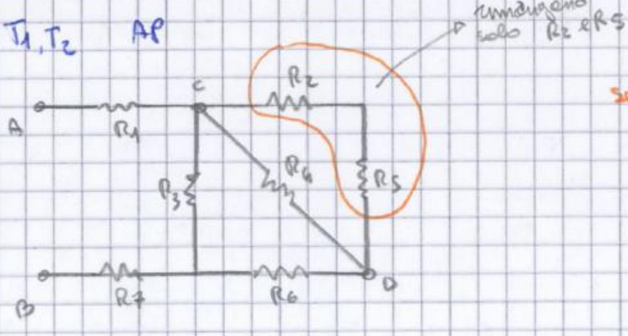


R_{AB} ?

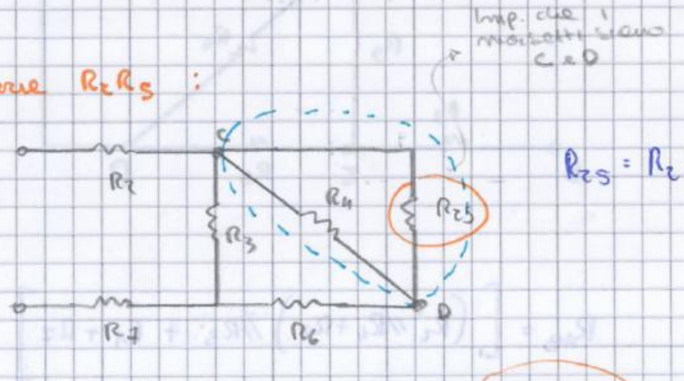
casi possibili:

T_1	T_2
AP	AP
AP	CH
CH	AP
CH	CH

1) T_1, T_2 AP



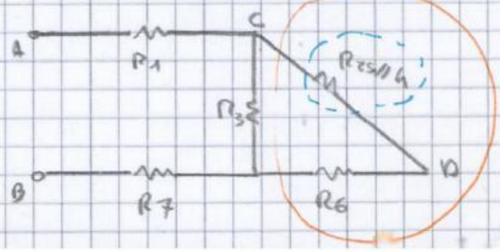
serie $R_2 R_5$:



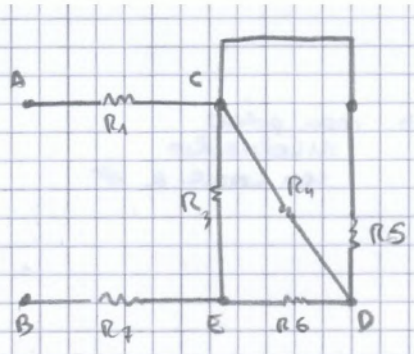
$R_{25} = R_2 + R_5$

parallelo R_{25} R_4 ($R_{25} // R_4$)

$$R_{25//4} = R_{25} // R_4 = \frac{R_{25} R_4}{R_{25} + R_4}$$

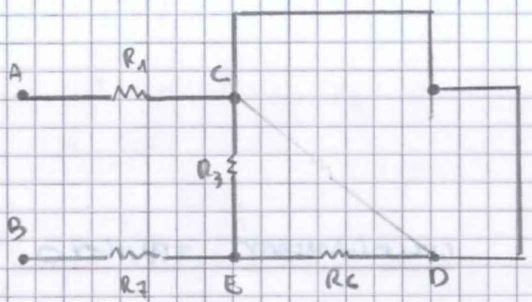


3)



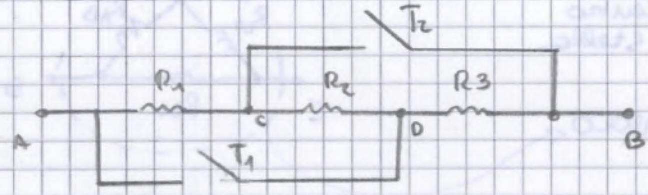
$R_{AB} = (R_5 // R_4 + R_6) // R_3 + R_1 + R_7$

4) NB posso spostare morsetti dove voglio a patto di non saltare 1 bipolo



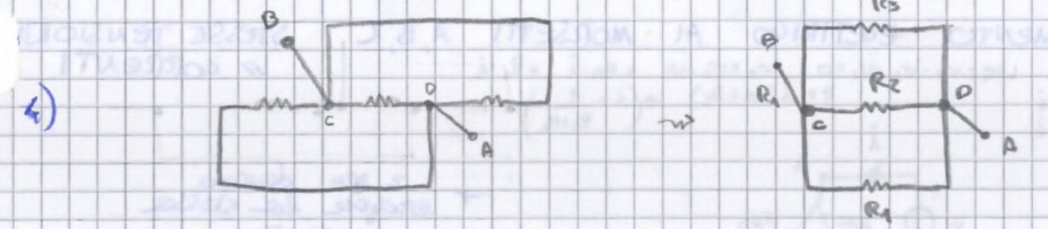
$R_6 // R_3 + R_1 + R_7$

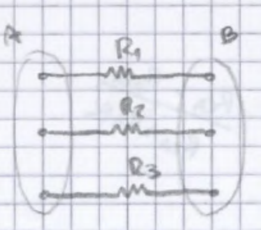
es.



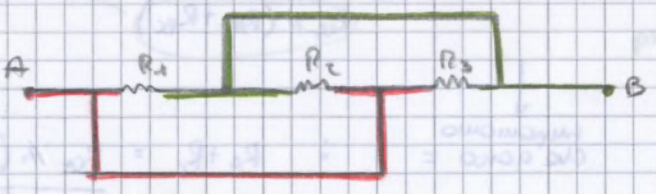
T_1	T_c	R_{AB}	
AP	AP	$R_1 + R_2 + R_3$	tutti in ser
CH	AP	R_3	$R_1 R_2$ in se e in // con c.c.
AP	CH	R_1	
CH	CH	$R_{AB} = R_1 // R_2 // R_3$	

4)





evidenziamo potenziali circuito :



tutte e 3 le resistenze appoggiano 1 morsetto su 1 potenziale e 1 sull'altro quindi sono in //

se alimentiamo C-B

$$R_C + R_B = \frac{R_{BC}(R_{CA} + R_{AB})}{R_{BC} + R_{CA} + R_{AB}}$$

alla fine ho:

$$R_A = \frac{R_{CA} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \longrightarrow$$

prodotto 2 resistenze che hanno A come vertice

$\Delta \rightarrow \lambda$

triangolo → stella

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{BC} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$\lambda \rightarrow \Delta$

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C}$$

nodo sul lato opposto del lato che stiamo considerando

$$R_{BC} = \frac{//}{R_A}$$

$$R_{CA} = \frac{//}{R_B}$$

Casi particolari:

- $R_A = R_B = R_C = R_\lambda \Rightarrow R_{AB} = R_{BC} = R_{CA} = R_\Delta \qquad R_\Delta = 3R_\lambda$
- $R_{AB} = R_{BC} = R_{CA} = R_\Delta \Rightarrow R_A = R_B = R_C = R_\lambda \qquad R_\lambda = \frac{R_\Delta}{3}$

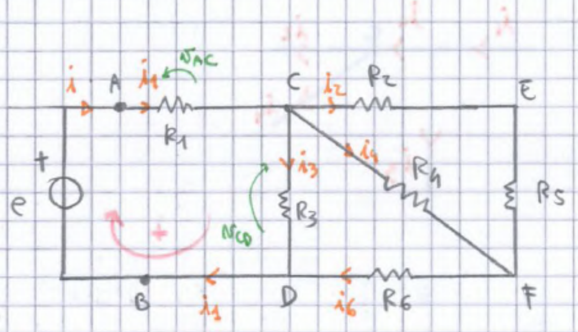
Torniamo all'esercizio

stella: centro stella in F $R_5 - R_4 - R_6$ si appoggia su nodi C DE
in D $R_2 - R_4 - R_3$ si appoggia su CFE
in C $R_1 - R_2 - R_5$ // ADF
in E $R_3 - R_6 - R_7$ // DFG

ma guardiamo solo stelle a 3 punte (le altre si possono trattare ma non le facciamo)

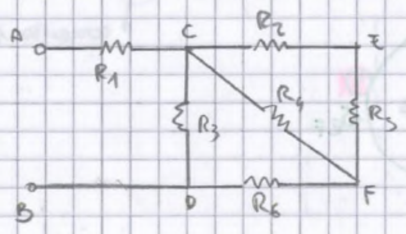
SOLUZIONE DI CIRCUITI AD 1 SOLO GENERATORE

Generatore di tensione



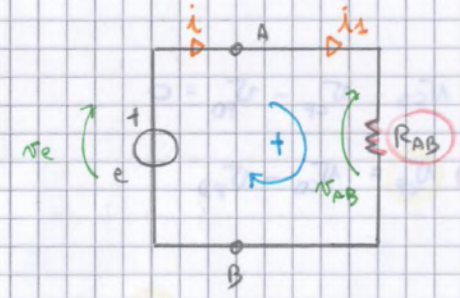
Voglio trovare tutte le v, i dei BIPOLI

1) Req. vista ai morsetti del generatore



$$R_{AB} = \left[(R_2 + R_5) // R_4 + R_6 \right] // R_3 + R_1$$

per ogni bipolo ho 1 incognita di tens. e corrente



$$\begin{cases} v_e = e \\ v_{AB} = R_{AB} \cdot i_1 \end{cases}$$ eq. costitutive

$$\begin{cases} i - i_1 = 0 \\ v_e - v_{AB} = 0 \end{cases}$$ LKC / LKT

$v_e = e$

$e - R_{AB} \cdot i_1 = 0 \rightarrow i_1 = \dfrac{e}{R_{AB}}$ ①

i_1 positiva uscente dal + del generatore

$i = i_1$

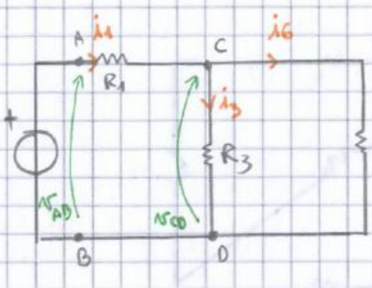
torno al circuito di partenza: voglio trovare v_{AC} ⇒ $v_{AC} = R_1 i_1$

$v_{AB} = e = R_{AB} \cdot i_1$

$v_{AB} - v_{AC} - v_{CD} = 0$ $v_{CD} = v_{AB} - v_{AC}$

invece di fare il partitore di corrente:

circuito equivalente



$$Req_{CD} = (R_2 + R_5) // R_4 + R_6$$

andiamo da valle verso monte nel circuito

ci siamo persi dei nodi e aree equipotenziali (perse delle v) però abbiamo semplificato circuito:

eq. costitutiva ai capi di Req_{CD}

$$i_6 = \frac{v_{CD}}{Req_{CD}}$$

importante mettere in evidenza i potenziali che si sono mantenuti (spariscono se facciamo delle serie)

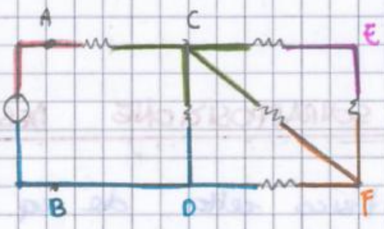
↓

utile se si individuano aree equipotenziali

abbiamo 5 aree equipotenziali

↓

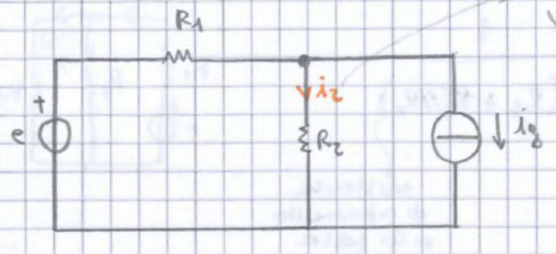
le Δv che individuiamo si mantengono nei circuiti equivalenti



è possibile che passando da 1 circuito ad 1 altro eq. è poss. che i POTENZIALI cambino; quello che rimane uguale sono le DIFFERENZE DI POTENZIALE → alla base di equival. tra circuiti

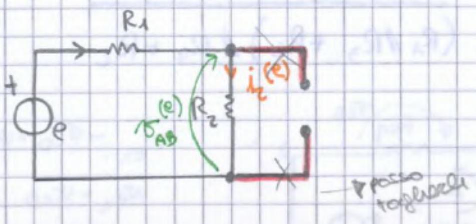
Quando abbiamo circuito con 1 solo generatore poss. individ. subito versi correnti in modo che siano già positive → metodo intuitivo:

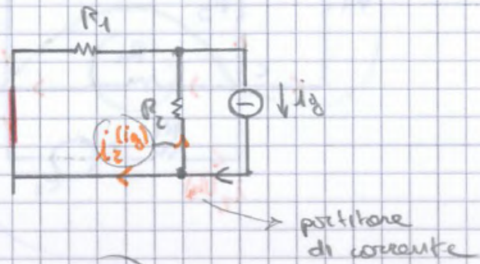
i_1 sicuramente + e uscente da generatore arrivati a nodo C (ragion. idraulico) si divide in tante correnti; ognuna arriva ad 1 nodo e si scende ricongiungendo con le altre → in qst modo ho correnti ⊕ (analogia con comportamento idraulico) es.



i_2 richiesta verso il basso

2 circuiti con 1 solo generatore:





$i_2^{(e)}$ → contributo alla corrente dovuto a generatore e

$$i_2^{(e)} = \frac{e}{R_1+R_2}$$

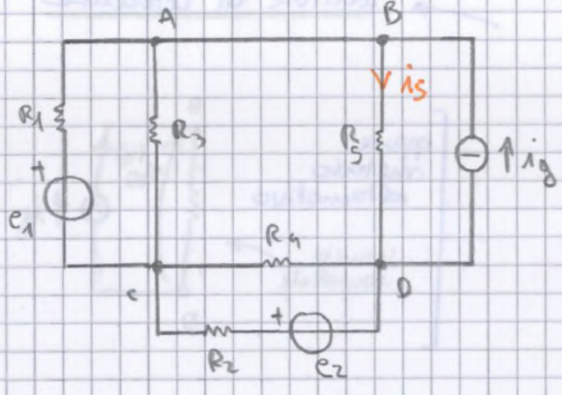
Req → serie di resistenze

$$i_2^{(i_g)} = i_g \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1}{R_2}$$

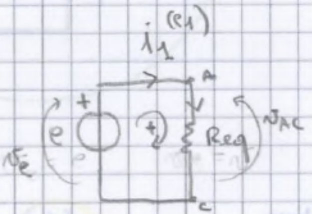
Req parallelo di resistenze

$$i_2 = i_2^{(e)} - i_2^{(i_g)} = \frac{e}{R_1+R_2} - i_g \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

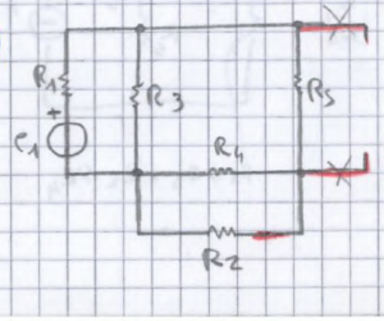
es.

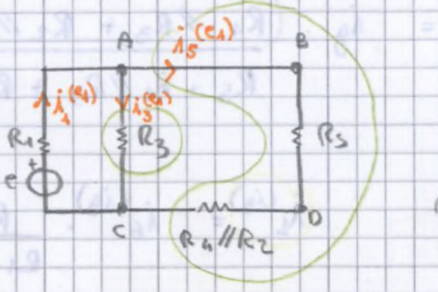


→ 3 generatori



e1)





$$i_1^{(e_1)} = \frac{e_1}{(R_5 + R_4//R_2)//R_3 + R_1}$$

$v_e - v_{AC} = 0 \quad v_e = v_{AC}$

$R_{eq} \cdot i_1 = v_{AC} = v_e = e$

$$\begin{cases} i_S = i_S^{(e_1)} + i_S^{(e_2)} + i_S^{(i_g)} \\ i_1 = i_1^{(e_1)} + i_1^{(e_2)} - i_1^{(i_g)} \end{cases}$$

verso di riferimento

↳ errore $\cancel{i_1 = i_1^{(e_1)}}$ → il generatore risente della corrente anche degli altri generatori

$$P_{R_S} = R_S \cdot i_S^2 = R_S \cdot \left(i_S^{(e_1)} + i_S^{(e_2)} + i_S^{(i_g)}\right)^2$$

se facessi sovrapposizione della potenza → mancano i doppi prodotti non avrei potenza totale

↓

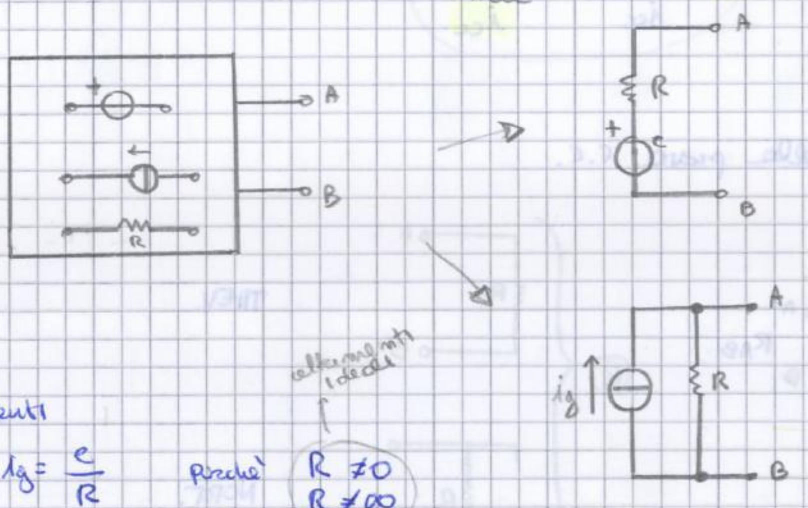
quindi calcolo i_S totale e poi calcolo la potenza

$$P_{e_1} = e_1 \cdot i_1 = e_1 \left(i_1^{(e_1)} + i_1^{(e_2)} - i_1^{(i_g)}\right)$$

→ nei circuiti in cui disattiviamo e1 non esiste quindi non ho senso sovrapp. potenza

TEOREMA DI THEVENIN / NORTON

data 1 rete formata da bipoli lineari internamente, cmq connessi tra loro e che comunica esternamente con 2 morsetti, questa rete può essere sintetizzata ai suoi morsetti con 1 bipolo che è 1 generatore ~~ideale~~ reale (nella forma di tensione o corrente)



GENERATORE REALE DI TENSIONE

THEVENIN

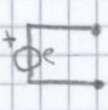
GENERATORE REALE DI CORRENTE

NORTON

NB sono equivalenti

$e = R \cdot i_g \qquad i_g = \frac{e}{R}$ perchè $R \neq 0$, $R \neq \infty$ ← altrimenti ideali

se $R = 0$ ⇒



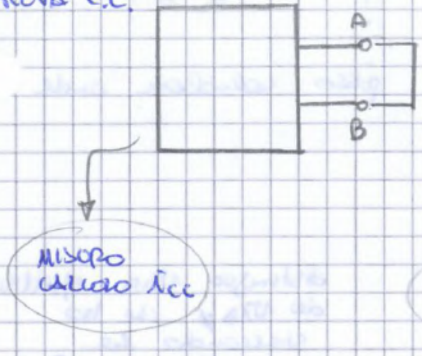
esiste solo THEVENIN

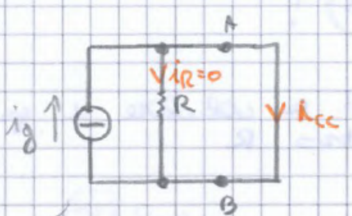
se $R = \infty$ ⇒

esiste solo NORTON

Norton

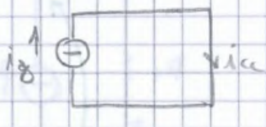
1) PROVA C.C.



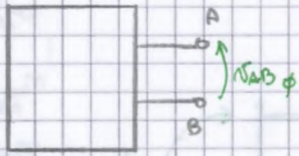


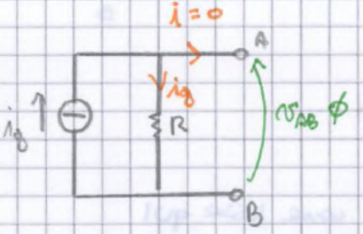
$i_{cc} = i_g$

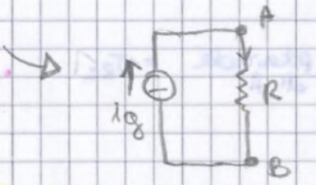
resistenza in // con corto circuito; rimane solo c.c.



2) PROVA A VUOTO







MISURA
CALCOLO $V_{AB\phi} = R \cdot i_g$

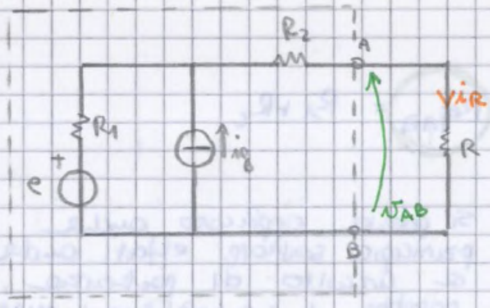
$R = \frac{V_{AB}\ \phi}{i_g} = \frac{V_{AB}\ \phi}{i_{cc}}$

calcolata prima

4/12/2013

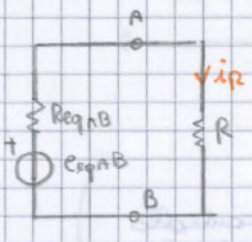
Th. è un modo × SEMPLIFICARE un circuito non per RISOLVERLO

es.

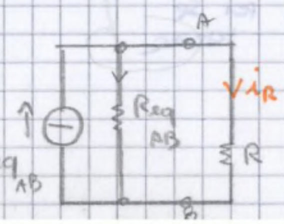


incognita i_R da determinare

semplifico con Thevenin:

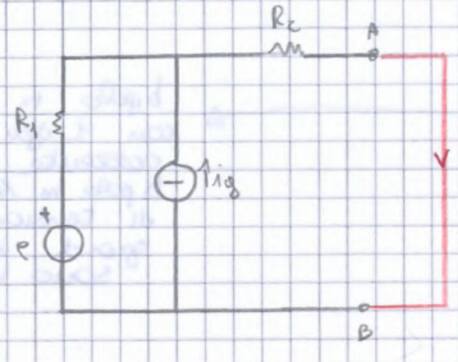


Norton:



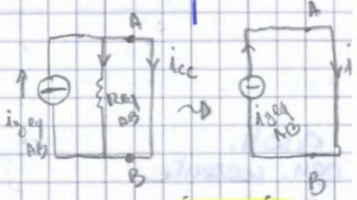
applico Norton :

devo det. la i di corto circuito



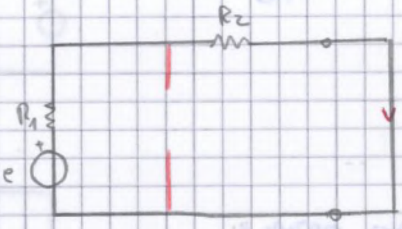
$i_{cc} \Rightarrow i_{g\,eq\,AB}$

$i_{cc} \Rightarrow i_{g\,eq\,BA}$

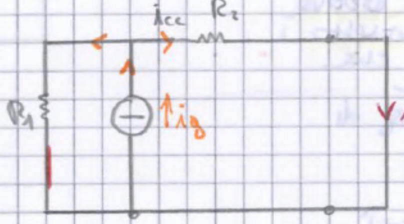


$i_{g\,eq\,AB} = i_{cc}$

i_{cc}) uso sovrapp. degli effetti:



$i_{cc}^{(e)} = \frac{e}{R_1+R_2}$



$i_{cc}^{(i_g)} = i_g \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}$

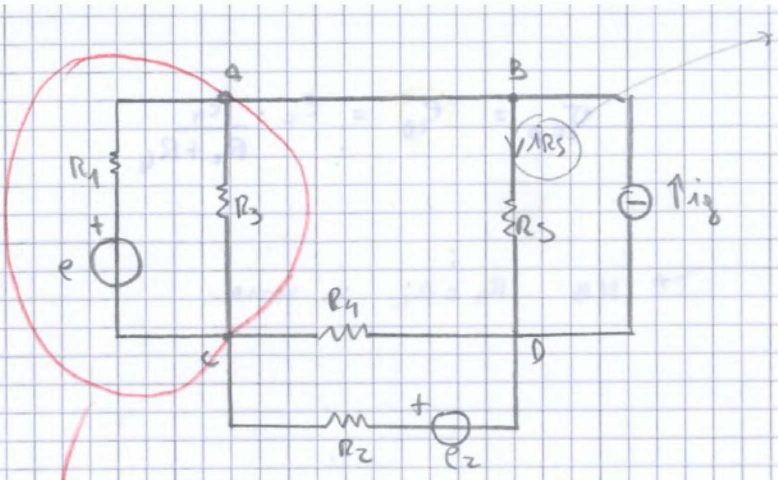
→ R_1 e R_2 sono in //

$$i_{g\,eq\,AB} = i_{cc} = i_{cc}^{(e)} + i_{cc}^{(i_g)} = \frac{e + i_g \cdot R_1}{R_1+R_2}$$

controllo che Req venga = a quella trovata prima:

$$Req_{AB} = \frac{v_{AB0}}{i_{cc}} = \frac{\cancel{e + R_1 i_g}}{\frac{\cancel{e + i_g \cdot R_1}}{R_1+R_2}} = R_1 + R_2$$

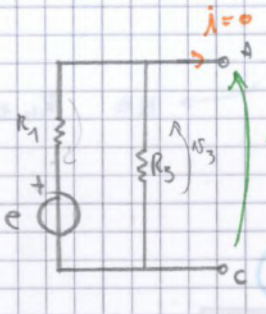
es.



→ dobbiamo trovare qst

→ l'abbiamo già risolto con sovrapp. eff., ora uso Thevenin

stacco qst parte e trovo equivalente di TH



$v_{AC\phi} = e_{AC}$ → quello che vogliamo determinare

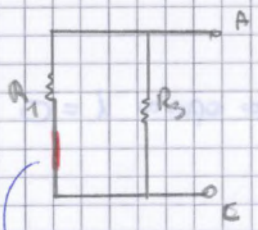
LKT $v_{AC\phi} + R_1 \cdot i - e_1 =$

$i R_3 + R_1 \cdot i = e_1$

$i\,(R_3 + R_1) = e_1$

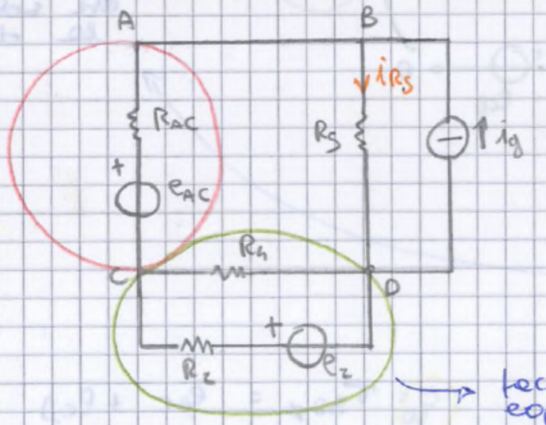
$$v_3 = \underline{\underline{v_{AC\phi}}} = e_{AC} = \frac{e_1 \cdot R_3}{(R_1 + R_3)} \rightarrow R_{eq}$$

→ partitore di tensione!



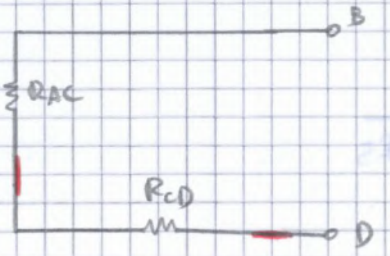
→ togliamo generatore e mettiamo cortocircuito

$$\underline{\underline{R_{AC}}} = R_1 \,//\, R_3$$



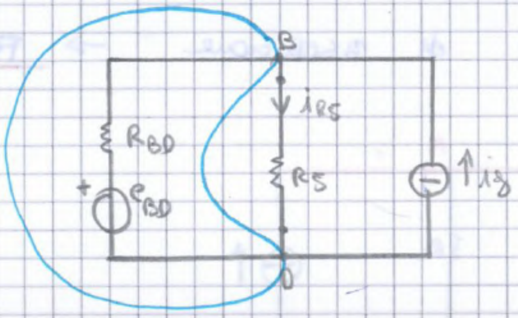
→ facciamo ora equivalenza di qst parte

tolgo generatori:

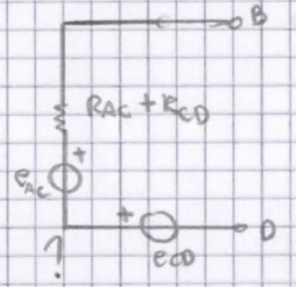


$$R_{BD} = R_{AC} + R_{CD}$$

quindi alla fine il circuito si semplifica ulteriormente:

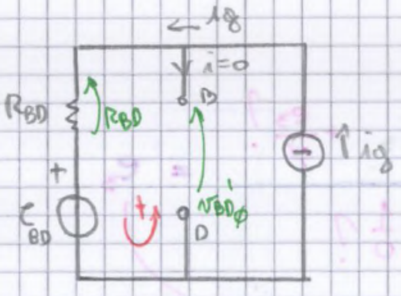


l'ultimo passaggio di Th si poteva evitare se vedavamo che R_{AC} e R_{CD} sono in serie (non topologicamente) → perché attraversati da stessa corrente



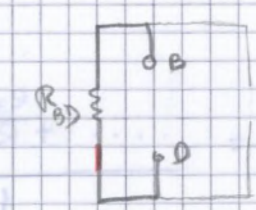
non + nodo C

stacco i_{RS} faccio ultimo Th :



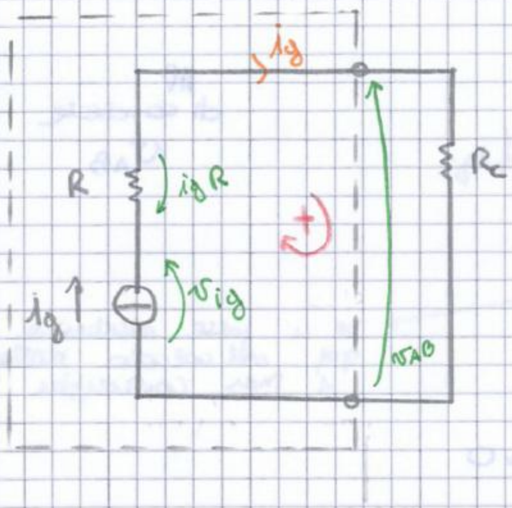
$$v'_{BD\phi} = e'_{BD} = R_{BD} i_g + e_{BD}$$

R'_{BD})



$$R'_{BD} = R_{BD}$$

esempio chiarificatore del xchè non devo contare $\frac{1}{R_q}$:



$v_{AB} = R_c \cdot i_g$

$P_{R_c} = R_c \cdot i_g^2$

↓ fuori dall'insieme contenente R e ⊖ non influisce resistenza R

dentro la presenza di R si fa sentire $v = i_g R$

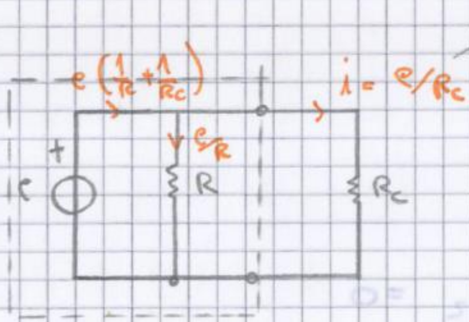
$v_{ig} = i_g R + R_c i_g$
$= i_g (R + R_c)$ → v ai suoi capi + alta di qll che avrebbe senza R

$P_{ig} = i_g \cdot v_g = i_g^2 \cdot (R + R_c) = \underbrace{i_g^2 R}_{\substack{\text{potenza della sua}\\ \text{resistenza interna } R}} + i_g^2 R_c$

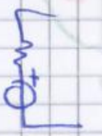
conv. generatori

R si fa sentire sul suo generatore ideale di corrente

es.



→ R non ha influenza

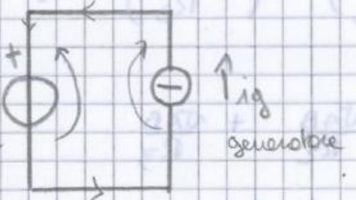


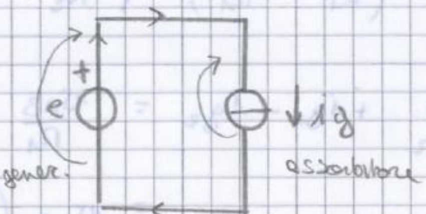
non confondere con generatori reali!

+⊖ $P = e \cdot i$ $\gtrless 0$ $\gtrless 0$

⊖ $P = v \cdot i_g$ $\gtrless 0$ ≥ 0

esercizio x casa :





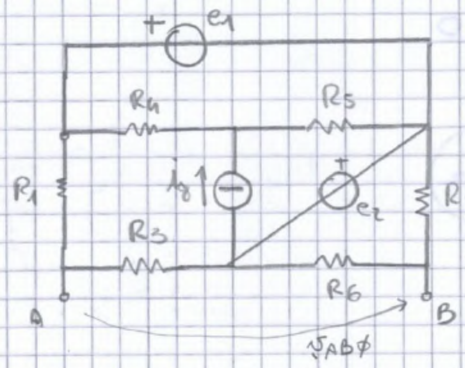
vedere chi eroga e chi assorbe

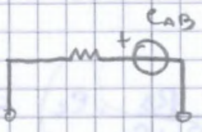
+⊖ impone una tensione e a seconda del contesto funziona da gen o ass invece ⊖↑ impone una corrente $i_g \geq 0$

9/12/2013

ESERCITAZIONI

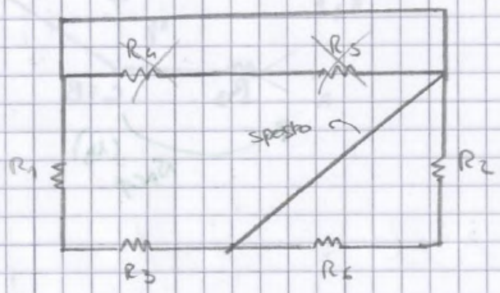
ES. 1)

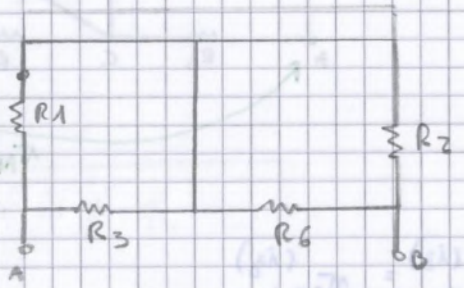




$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 10\Omega$

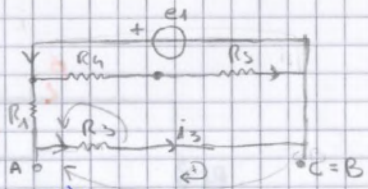
$e_1 = 100 V$ $e_2 = 20 V$ [illegible] $i_g = 32 A$





$R_{AB} = R_1 // R_3 + R_2 // R_6 = 10 \Omega$

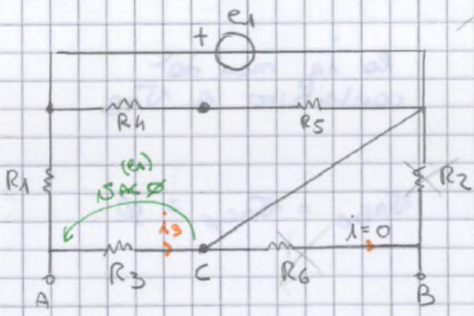
sovrapposizione degli effetti:



$v_{AB\emptyset}^{(e1)} = v_{AC\emptyset}^{(e1)} = e_{AB}^{(e1)} \rightarrow TH$

e1)

$v_{AB\emptyset}^{(e1)}$

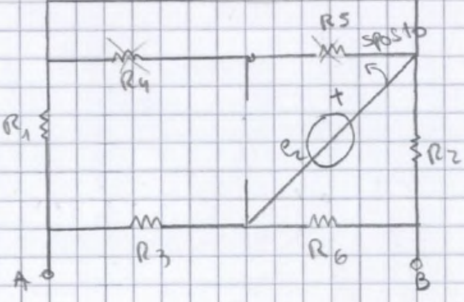


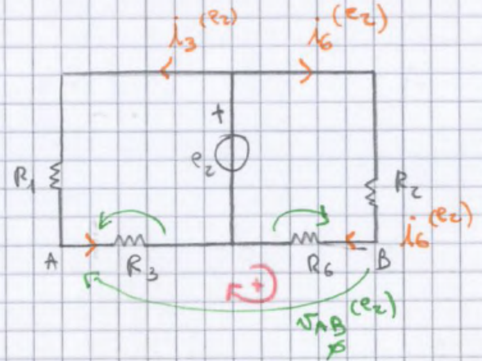
$i_3^{(e1)} = \frac{e_1}{R_1 + R_3}$

$e_{AB}^{(e1)} = v_{AC\emptyset}^{(e1)} = R_3 \cdot i_3^{(e1)} = \frac{R_3}{R_1+R_3} \cdot e_1$

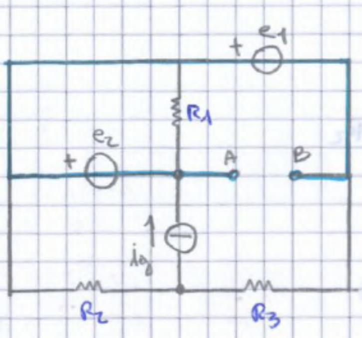
e2)

$v_{AB\emptyset}^{(e2)}$





ES. 6)



$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 15\ \Omega$

$R_3 = 30\ \Omega$

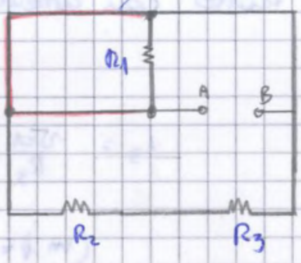
$e_1 = 10V$

$e_2 = 20V$

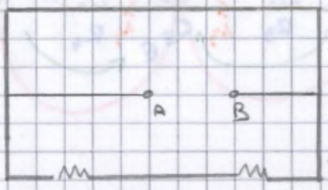
$i_g = 3A$

R_{AB})

R_{AB}
e_{AB}



porto da 1 morsetto:
se seguiamo 1 percorso
e non incontro bipoli la
resistenza è corto circuitata
(la tolgo)



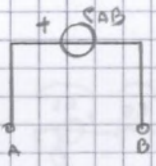
anche
R_2 e R_3
sono
cortocirc.

$R_{AB} = 0$ $e_{AB} = 0$

rimane
corto
circuito

norton non
si può applicare,
solo thevenin

corto
circuito =
generatore
ideale di
tensione



se trovo questo

individuo 1 percorso
che passa per generatori
ideali di tensione

facciamo dirett. LKT
senza fare sovrapposizione
degli effetti:

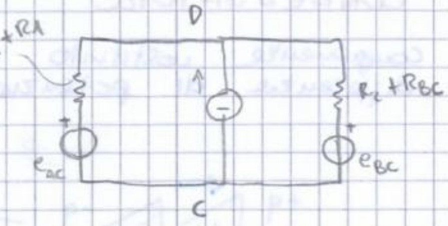
$v_{AB_0} + e_2 - e_1 = 0$ $v_{AB_0} = e_{AB} = e_1 - e_2$

(fare es. 4 esercitazione 1)

Millman:

sono in serie — sono in serie

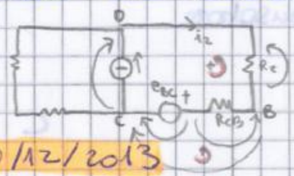
$$v_{DC} = \frac{\frac{e_{AC}}{R_{AC}+R_1} + i_g + \frac{e_{BC}}{R_2+R_{BC}}}{\frac{1}{(R_{AC}+R_1)} + \frac{1}{(R_2+R_{BC})}}$$



LKT: a) $v_{DC} - R_1 \cdot i_1 - R_{AC}\, i_1 - e_{AC} = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{v_{DC} - e_{AC}}{(R_1 + R_{AC})}$

b) $v_{CA} + e_{AC} + R_{AC} \cdot i_1 = 0 \rightarrow v_{CA} = -e_{AC} - R_{AC} \cdot i_1$

rifaccio la stessa cosa dall'altra parte $\Rightarrow v_{CB}$

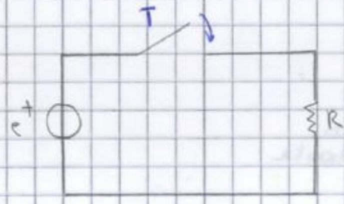


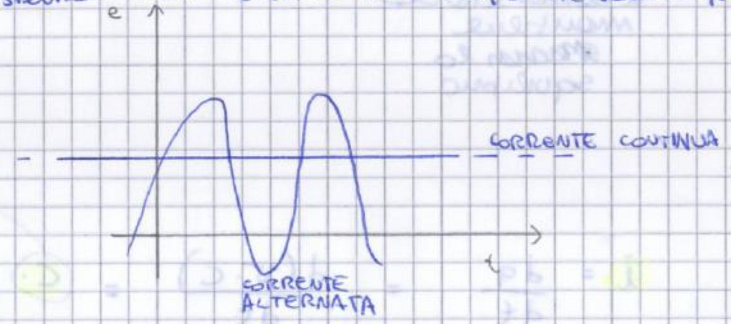
$-v_{CD} - e_{BC} + R_{CB} \cdot i_2 + R_2\, i_2 = 0 \rightarrow i_2 = \frac{v_{CD} + e_{BC}}{R_{CB} + R_2}$

$-v_{CB} - R_{CB}\, i_2 + e_{BC} = 0 \rightarrow v_{CB} = e_{BC} - R_{CB}\, i_2$

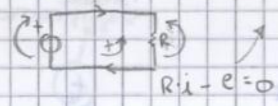
10/12/2013

Reti resistive → la soluz. del sistema non evolve nel tempo (calcolo già il valore finale



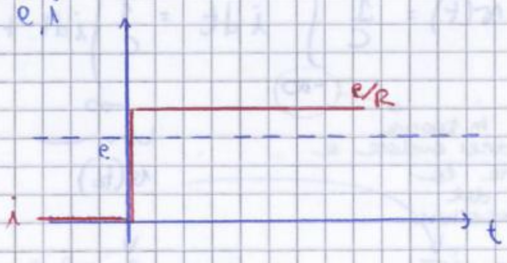


se chiudo interruttore $i = \frac{e}{R}$



$v = R \cdot i$ → eq. algebrica → ci sono dei componenti non retti da eq. alg

T CHIUSO $t = 0$



Componenti:

- CONDENSATORE
- INDUTTORE

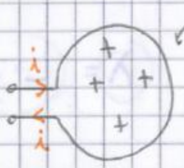
Energia : $W(t) = \int_{-\infty}^{t} \textcircled{p}\, dt = \int_{-\infty}^{t} \boxed{v\, C \frac{dv}{dt}} = \frac{1}{2} C v^2_{(t)}$

se derivo ritrovo : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C v^2\right) = \frac{1}{2} C \frac{dv^2}{dt} = \cancel{\frac{1}{2}} C \cancel{2} v \cdot \frac{dv}{dt}$

$\textcircled{v}$: definisce lo stato energetico del condensatore ⇒ **Variabile di stato**

v : deve essere una funzione continua → (senno' avrei grandezze infinite)
(non può subire dei salti)

INDUTTORE



SPIRA

CAMPO MAGNETICO

oggetti: dipoli magnetici

forze : coppie

spira percorsa da corrente

regola mano dX

corrente

campo entrante

$\vec{H}$: CAMPO MAGNETICO (A/m

$\vec{B}$: INDUZIONE MAGNETICA (TESLA)

legata al campo m. dal materiale di cui è costituito l'oggetto in esame

$$\vec{B} = \textcircled{\mu} \cdot \vec{H}$$

PERMEABILITA' MAGNETICA $= \mu_0 \cdot \mu_r$

μ_r → relativa

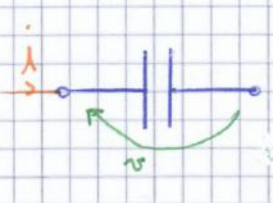
μ_0 → assoluta $4\pi\, 10^{-7}$

INDUTTORE

$$v = L \cdot \frac{di}{dt}$$

convenzioni degli utilizzatori

CONDENSATORE

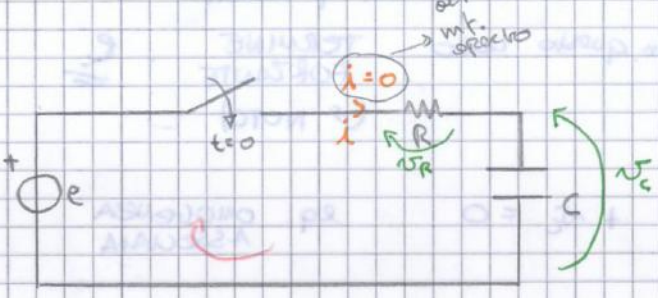


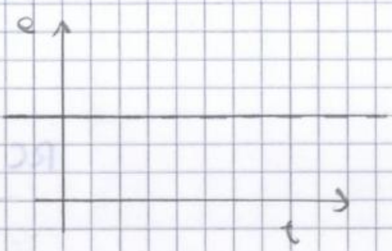
$$i = C\,\frac{dv}{dt}$$

es.

CIRCUITO RC

processo di carica condens.





generatore in corrente continua (tensione continua)

e, R, C } dati

vogliamo studiare come variano nel tempo le grandezze del circuito

ad esempio mi viene dato:

$v(t=0) = 0$

$w = 0$

CONDENSATORE SCARICO

$v(t=0)$ deve essere un dato del problema (potrebbe essere già carico e messo nel circuito, non posso desumerlo dal circuito)

$i(t)$, $v_c(t)$, $v_R(t)$

si parte sempre dal determinare la variaz. nel tempo delle VARIABILE DI STATO

LKT:

$$+e - v_R - v_c = 0$$

$$e - R \cdot i - v_c = 0$$

$$e - RC\,\frac{dv_c}{dt} - v_c = 0$$

$$i = C\,\frac{dv_c}{dt}$$

eq. costit. condensatore

$$\boxed{RC\,\frac{dv_c}{dt} + v_c = e}$$

eq. differenziale del 1° ordine a coefficienti costanti

$$v_C = \underbrace{K \cdot e^{-t/RC}}_{\text{sol. generale}} + \underbrace{E}_{\text{sol. particolare}}$$

K mettiamo in gioco la CONDIZIONE INIZIALE + CONTINUITÀ DELLA v_C

$$v(t=0^-) \overset{\text{continuità}}{=} v(t=0^+)$$

$v(t=0^-)$: un attimo prima di chiudere

$v(t=0^+)$: un attimo dopo aver chiuso

$v(t=0^-) = 0$ → condizione iniziale

$$v(t=0^-) = 0 = K \cdot e^{\frac{0^+}{RC}} + E = K + E$$

0^+ (zero)

$$\boxed{K = -E}$$

$$v_C = -E e^{-t/RC} + E = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$-E e^{-t/RC}$: dopo un certo punto qst termine va a zero (si estingue) TERMINE TRANSITORIO → $e^{-\infty/RC} \to 0$

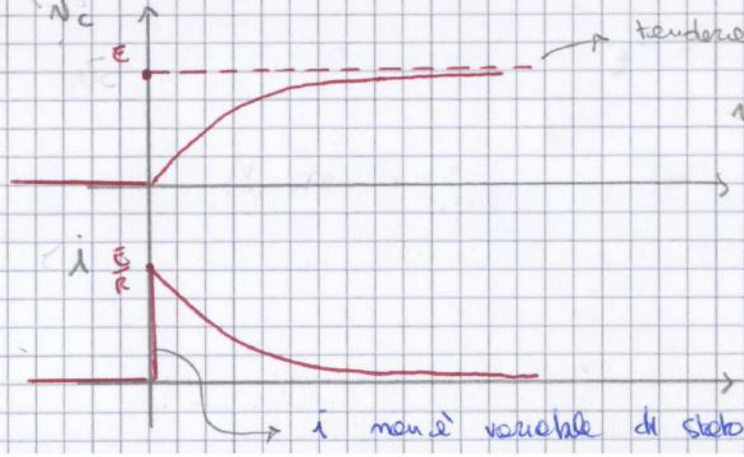
E: quello che rimane dopo la fase iniziale REGIME

Ora troviamo la corrente:

$$i = C \frac{dv_C}{dt} = C \cdot \frac{d\left(-E e^{-t/RC} + E\right)}{dt}$$

$$= \cancel{C} \cdot (-E) \cdot \left(-\frac{1}{R\cancel{C}}\right) e^{-t/RC} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

per $t \to \infty$ $i \to 0$



tenderà al valore E (il termine transitorio si estingue)

$v = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

CARICA DEL CONDENSATORE

$i = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

i non è variabile di stato ∴ può saltare istantaneamente da 0 ad E/R

$$\boxed{v_c = \left(v_c(t=0^-) - v_c(t=\infty)\right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + v_c(t=\infty)}$$

$$\underbrace{\underset{\text{condizione iniziale}}{\downarrow} \quad \underset{\text{regime}}{\downarrow} \quad \underset{\text{esponenziale}}{\downarrow}}_{\text{transitorio}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{regime}}$$

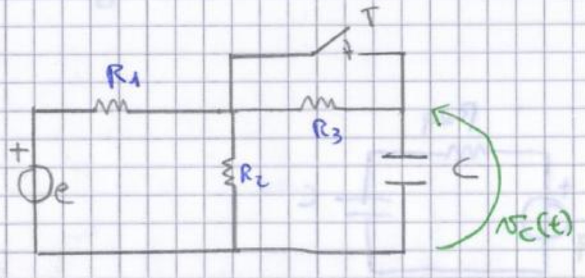
RC = COSTANTE DI TEMPO τ

$e^{-t/\tau}$ $\qquad$ $t = 4 \div 5\tau$ $\qquad$ $e^{-4\div5}$ → molto + piccolo di 1

$\Downarrow$

dopo che passa 4 o 5 volte la costante di tempo il transitorio si è estinto

es.



$e \quad R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad C$

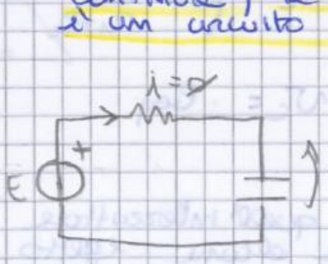
$t=0$ chiudo T

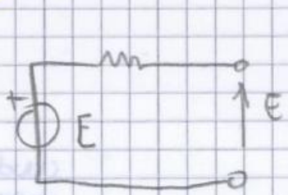
1) CONDIZIONE INIZIALE $v_c(t=0^-)$

il condensatore prima di chiudere l'interruttore si trovava a regime o aveva esaurito tutti i transitori ... → ci danno come valore condizione iniziale

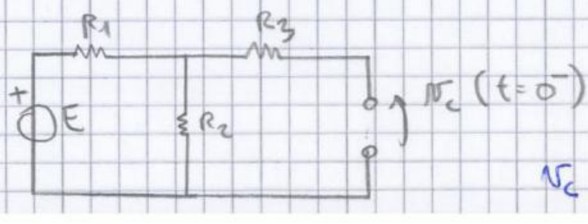
il cond. quando è alimentato da un generatore ~~ad~~ corrente costante si comporta come un circuito aperto ⇝ a regime in un circuito con termini forzanti costanti (in corrente continua) il condensatore è un circuito aperto

i va a zero e v tende ad E (vedi grafici)





posso quindi semplificare così:



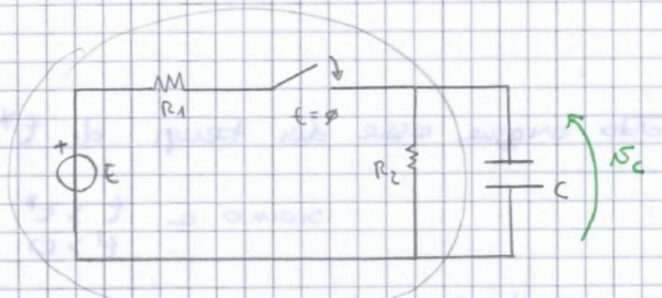
int. aperto

$\boxed{t=0^-}$

$$v_c(t=0^-) = E \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

11/10/2013

25.

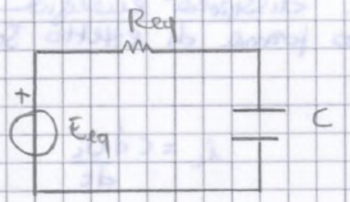


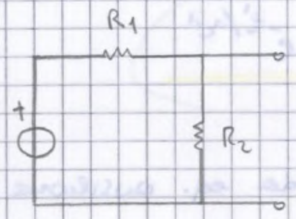
E $v_c(t=0^-)=0$ (scarico) Come si carica il condensatore in questo circuito?

R1
R2
C

t > 0 int. chiuso

equivalente di Thevenin:





$R_{eq} = R_1 // R_2$

$E_{eq} = E \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$

$$v_c(t) = E_{eq}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \tau = R_{eq}\cdot C$$

$t > 4 \div 5\tau$ → int. sott. affinché il cond. possa caricarsi completamente
↓
transitorio esaurito

$$\boxed{v_c(t = 4\div5\tau) = E_{eq} = E\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}}$$

se avessi atteso $t^* < 4\div5\tau$ t^* generico istante

$$v_c(t^*) = E_{eq}\left(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}\right)$$

ENERGIA DISSIPATA DA RESISTORE

$$P_{R_2} = R_2 \cdot i_c^2$$

$$W_{R_2} = \int_0^\infty P_{R_2} \, dt$$

→ solit. non si fa così! tutto l'energia del condensatore so che andrà a scaricarsi sulla resistenza ↓

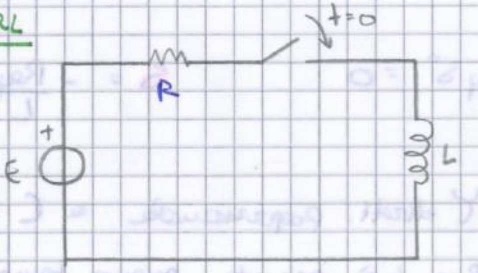
$$W_{R_2} = W_c = \frac{1}{2} C v_c^2 (t=0)$$

N.B. la condiz. iniziale è qll grandezza che si tramanda da 1 transitorio ad 1 altro. Occhio ad istanti di tempo che considero

es. con INDUTTORE

CIRCUITO RL

processo di carica induttore



int. aperto → $i = 0$

$i_L(t<0) = 0$

perchè l'interruttore è aperto (condizione iniziale implicita)

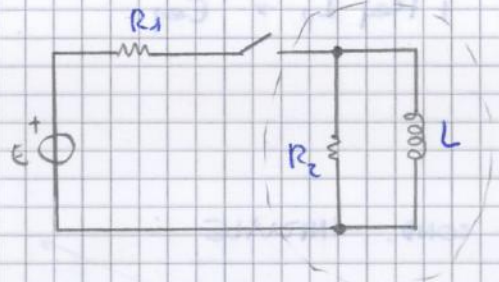
a $t=0$ chiudo l'interruttore

E, R, L

l'induttore vuole corrente continua: non vuole interruz. di corrente (violerei condizioni) LKT e caratt. di L

→ non posso poi + aprire il circuito : funziona la carica la scarica non si può fare

se metto resistenza posso poi riaprirlo:



qst funziona sia in APERTURA sia in CHIUSURA

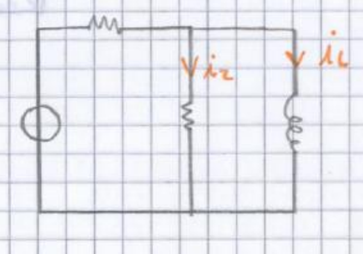
condiz. iniziale però va fornita

↓

$i_c(t<0) = 0$

INDUTTORE SCARICO

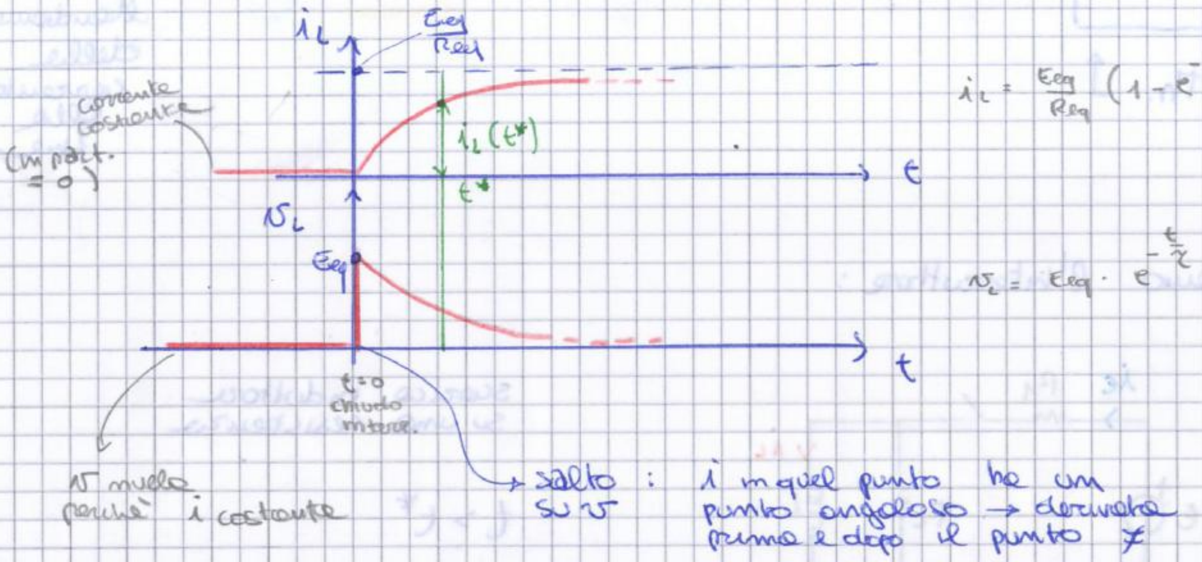
a $t>0$



$$i_L = \frac{E_{eq}}{R_{eq}} - \frac{E_{eq}}{R_{eq}} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{E_{eq}}{R_{eq}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \, \frac{E_{eq}}{R_{eq}} (-) \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau}$$

$$= \cancel{L} \cdot \frac{E_{eq}}{\cancel{R_{eq}}} \cdot \frac{\cancel{R_{eq}}}{\cancel{L}} \cdot e^{-t/\tau} = E_{eq} \cdot e^{-t/\tau}$$



→ salto su v : i in quel punto ha un punto angoloso → derivata prima e dopo il punto ≠

$$i_L = \frac{E_{eq}}{R_{eq}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

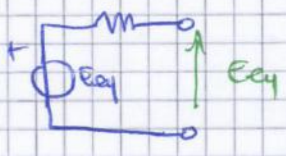
$$v_L = E_{eq} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

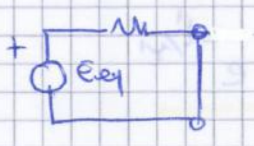
nel regime continuo l'induttore si comporta come un corto circuito : (v va a zero)

l'induttore all'inizio impone una tens. pari ad Eq in modo che la corrente e' = 0 ; poi la corrente inizia a salire e v a scendere fino a che si comp. da c.c. e lascia passare tutta la corrente

istante iniziale
(CIRCUITO APERTO)

fase finale
(CORTO CIRCUITO)

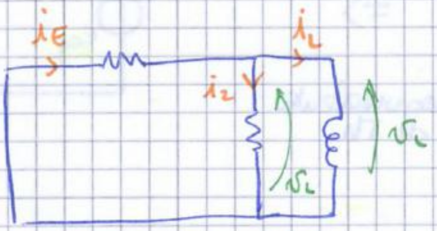




Nel caso venisse chiesta i_E corrente generata da generatore E.

calcolata variabile di stato (formula riassuntiva)

torno a circuito di partenza e risolvo con LKT

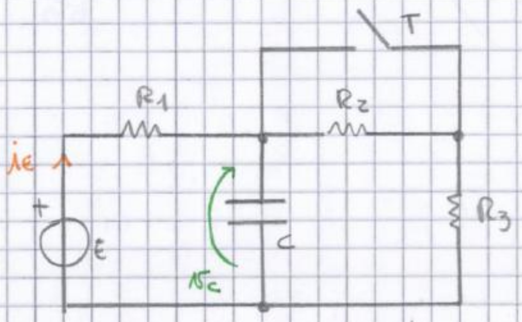


$$\boxed{i_2} = \frac{v_L}{R_2}$$

$$i_E = i_2 + \boxed{i_L}$$

se calcolo subito i_E non va bene, non posso stabilire cond. iniziale di continuità (appena apro interruttore va a zero)

es.



$E = 120\,V$

$R_1 = R_3 = 40\,\Omega$

$R_2 = 20\,\Omega$

$W_c\ (t<0) = 0{,}3\,J$

$v_c\ ?\quad i_E\ ?$

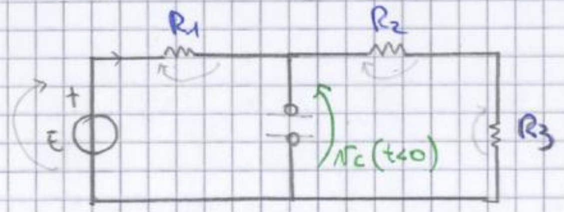
$t < 0$ T APERTO (regime)

$t \geq 0$ T CHIUSO

$t \geq 2\,ms$ T APERTO

$$W_c\,(t<0) = \frac{1}{2}\,C\,v_c^2\,(t<0)$$

$\boxed{t<0}$ REGIME



partitore di tensione

COND. INIZIALE

$$v_c(t<0) = E \cdot \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} = \boxed{12V}$$

$$C = 2\,\frac{W_c}{v_c^2(t<0)} = 115{,}74\,\mu F$$

LKT: $i_E \cdot (R_1+R_2+R_3) - E = 0$

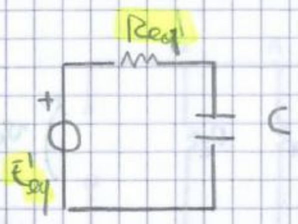
$$i_E\,(t<0) = \frac{E}{R_1+R_2+R_3} = 1{,}2\,A$$

oppure con LKT:

$v_c(t) + R_1 \cdot i_e - E = 0$

$$i_e = \frac{E - v_c(t)}{R_1} = 1{,}2$$

$\Longrightarrow$

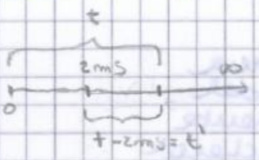


equival. di Th.

Partitore di corrente : $E_{eq}' = E \cdot \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 72\,V$ → equivale a regime che avevamo all'inizio

$R_{eq}' = (R_2 + R_3) // R_1 = \cancel{\frac{4}{360}}\ 24\,\Omega$ $\qquad \tau' = R_{eq}' \cdot C = \frac{1}{360}$

$t' \geq 0 \qquad t' = t - 2\,ms$



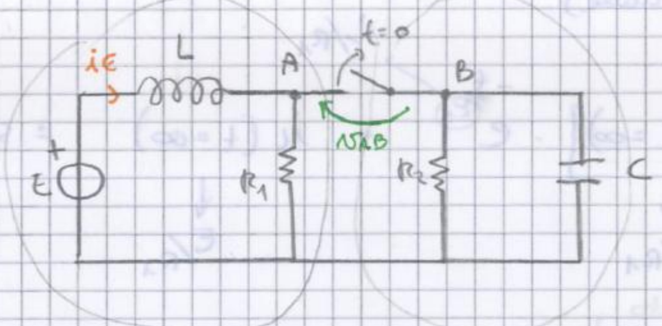
$$v_C = \left[\overbrace{v_C(t = 2\,ms)}^{65,06} - \overbrace{v_C(t' = \infty)}^{72} \right] \cdot e^{-\frac{t'}{\tau'}} + \overbrace{v_C(t' = \infty)}^{72}$$

$$= 72 - 6,94\ e^{-\frac{t'}{\tau}} \longrightarrow 72 - 6,94 \cdot e^{-\frac{(t - 2ms)}{\tau}}$$

se teniamo i 2 ms senza fare la traslazione

$$i_E = \frac{E - v_C}{R_1} = 1,2 + 0,173 \cdot e^{-t'/\tau'} \rightarrow 1,2 + 0,173 \cdot e^{-\frac{t - 2ms}{\tau'}}$$

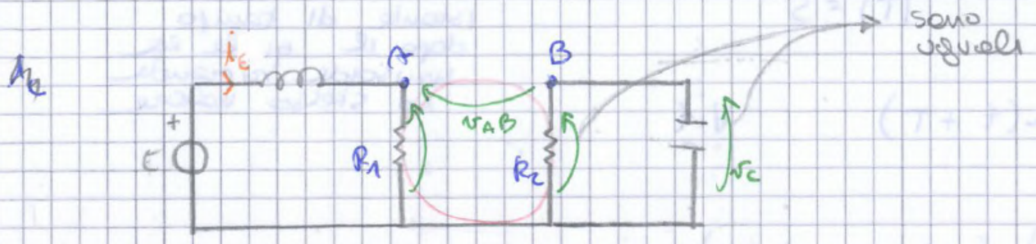
es.



E = 48 V
C = 200 μF
L = 25 mH
R_1 = 5 Ω
R_2 = 20 Ω

t < 0 regime (int. chiuso)
t = 0 apro → i 2 circuiti sono separati (hanno solo 1 filo in comune)

v_{AB} ?
i_E ?
P_{R_2} ?



LKT : $R_1 \cdot i_L - v_{AB} - v_C = 0$

$$\Rightarrow \boxed{v_{AB}} = \underbrace{48 + 12 e^{-200t}}_{5 \cdot (9,6 + 2,4 \cdot e^{-200t})} \underbrace{- 48 e^{-250t}}_{v_C}$$

$\boxed{i_E} = i_L$ $\qquad$ $p_E = E \cdot i_E = \underset{48 \cdot (9,6 + 2,4 \, e^{-200t})}{E \cdot i_L} = 460,8 + 115,2 \, e^{-200t}$

$$\boxed{p_{R_2}} = R_2 \cdot i_2^2 = R_2 \cdot i_C^2 - R_2 \cdot \left(C \frac{dv_C}{dt} \right)^2$$

$$= 20 \cdot \left(c \cdot \frac{d(48 \cdot e^{-250t})}{dt} \right)^2 = 20 \cdot \; C \cdot 48 \cdot (-250) \cdot e^{-25}$$

$$= 20 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 48 \cdot (-250) \cdot e^{-250t}$$

$$= -48 \cdot e^{-250t}$$

16 /12 /2013

REGIME SINUSOIDALE

Sinusoide

$$a(t) = \hat{A} \sin(\omega (t) + \varphi)$$

- valore di picco
- valore massimo

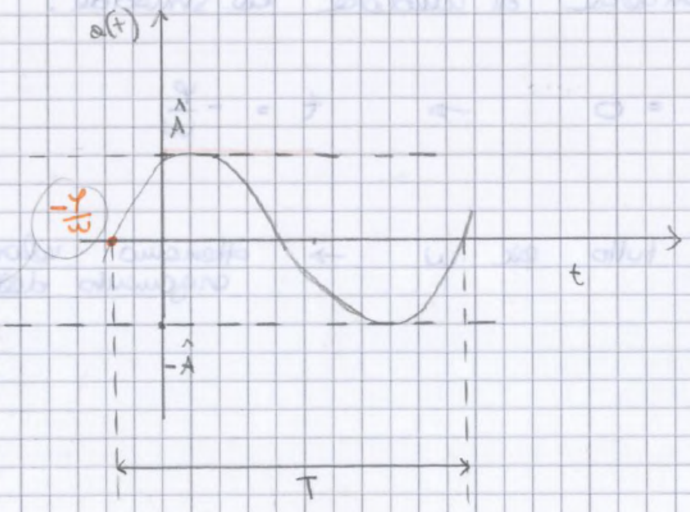
pulsazione elettrica

fase iniziale

$(\hat{A})$ VOLT, AMPERE

(ω) rad/s

(φ) rad



$a(t) = 0$ quando

$\hat{A} \sin(\omega t + \varphi) = 0$

ossia $\omega t + \varphi = 0 \rightarrow t = -\frac{\varphi}{\omega}$

$\hat{A}$ valore di picco (valore massimo)

A_m = valore medio $= \frac{1}{T} \int_{t^*}^{t^*+T} a(t)\,dt \quad \forall t^*$

↳ somma aree + e − è zero

valore efficace (valore quadratico medio)
RMS (root mean square)

↳ valor medio dell'integrale del quadrato della funzione

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t^*}^{t^*+T} a(t)^2\,dt} = \underbrace{\frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}}_{\text{se è una sinusoide viene questo}}$$

LKC

$i_1 = \hat{I}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$

$i_2 = \hat{I}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$

$i_3 = i_1 + i_2 = \hat{I}_3 \sin(\omega t + \varphi_3)$

si può fare qst operazione evitando di usare la trigonometria

sinusoide somma che avrà la stessa pulsazione delle sinusoidi sommate

Formula di EULERO

j unità immaginaria $= \sqrt{-1}$

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$

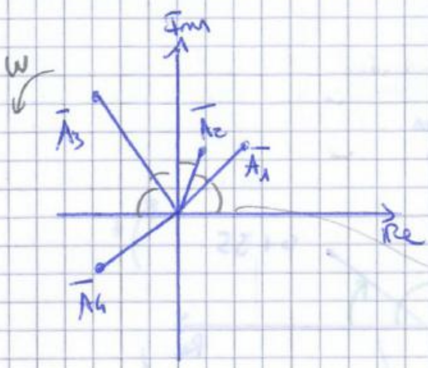
$\alpha = \omega t + \varphi$

$$\hat{A}\, e^{j(\omega t+\varphi)} = \hat{A}\cos(\omega t+\varphi) + \underbrace{\hat{A} j \sin(\omega t+\varphi)}$$

↳ se moltiplico per $\hat{A}$ trovo la sinusoide $a(t)$

$$\hat{A}\sin(\omega t+\varphi) = \operatorname{Im}\left(\hat{A} \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$$

supponiamo di aver trovato tutte sinusoidi ω (analizzeremo circuiti con



ruoteranno tutti con la stessa velocità angolare ω

→ gli angoli tra i vari vettori si mantengono

↓

è inutile studiare cosa avviene nel tempo, studieremo tutto nell'istante $t=0$

$\omega t = 0$

$$\hat{A}_1 e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} = \hat{A}_1 \cdot e^{j\varphi_1}$$

$$\hat{A}_2 \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t} = \hat{A}_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

→ i 2 elem. caratt. sono l'ampiezza e la fase iniziale (ω non è un elemento distintivo)

$$\bar{A} = A \cdot e^{j\varphi}$$

18/12/2013

Ripasso numeri complessi:

$$a(t) = \hat{A} \sin(\omega t + \varphi)$$

↓

$$\boxed{\bar{A} = \hat{A} e^{j\varphi}} \cdot e^{j\omega t}$$

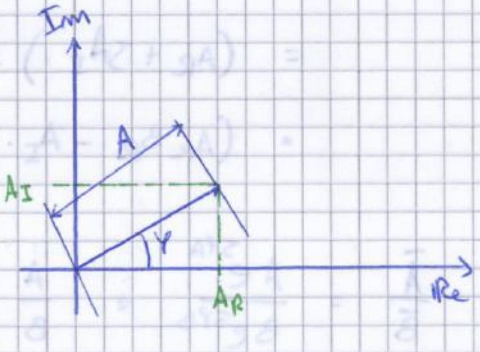
FORMA ESPONENZ. $\bar{A} = A \cdot e^{j\varphi}$ $A \in \mathbb{R}e$

FORMA POLARE $\bar{A} = A \cdot \angle\varphi$

FORMA CARTESIANA / BINOMIA $\bar{A} = A_R + jA_I$

dove $A_R = A\cos\varphi$

$A_I = A\sin\varphi$



POLARE → CARTESIANA

NB $\frac{1}{j} = \frac{1}{\underset{\text{parte Re}}{0} + \underset{\text{parte Im}}{j1}} = \frac{1}{1\, e^{j\frac{\pi}{2}}} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

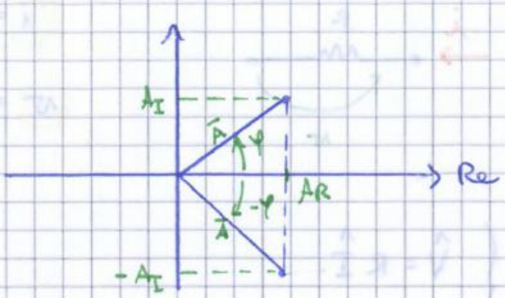
$= -j$

$\sqrt{0^2+1^2}$

arctg $\frac{1}{0}$ = arctg $\infty = \frac{\pi}{2}$

$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$$



COMPLESSO
e
CONIUGATO

$$\bar{A} = A e^{j\varphi} = A_R + j A_I$$

$$\bar{A}^* = A \cdot e^{-j\varphi} = A_R - j A_I$$

speculare rispetto all'asse reale

$a(t) \pm b(t) = c(t)$ → non si fa direttamente con sinusoidi nel dominio del tempo

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\bar{A} \pm \bar{B} = \bar{C}$

→ trasformiamo tutto in numeri complessi

ci servirà per LKT LKC

Altre operazioni utili:

- $k \in \mathbb{R}$ $\qquad k\, a(t) = c(t)$

  $k \cdot \bar{A} = \bar{C}$

  EQUAZIONE COSTITUTIVA DEL RESISTORE

- $\frac{d\, a(t)}{dt} = c(t)$ $\qquad \frac{d}{dt} \to j\omega$ → pulsazione di $a(t)$

  $\downarrow$

  $j\omega \bar{A} = \bar{C}$

  la derivata diventa una operazione algebrica

- $\int a(t) = c(t)$ $\qquad \int \to \frac{1}{j\omega}$

  $\downarrow$

  $\frac{\bar{A}}{j\omega} = \bar{C}$

infatti:

$$\int \frac{d}{dt} a(t)\, dt = a(t)$$

$$\frac{1}{\cancel{j\omega}} \cdot \cancel{j\omega}\, \bar{A} = \bar{A}$$

EQUAZ. COSTITUTIVE INDUTTANZA L e CAPACITA' C

INDUTTORE

$$i = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_I)$$

$$v = L\frac{di}{dt} = \omega L\hat{I}\cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$= \omega L\ \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_I + \tfrac{\pi}{2})\ ^{*}$$

$$= \hat{V}\sin(\omega t + \varphi_V)$$

* NB $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

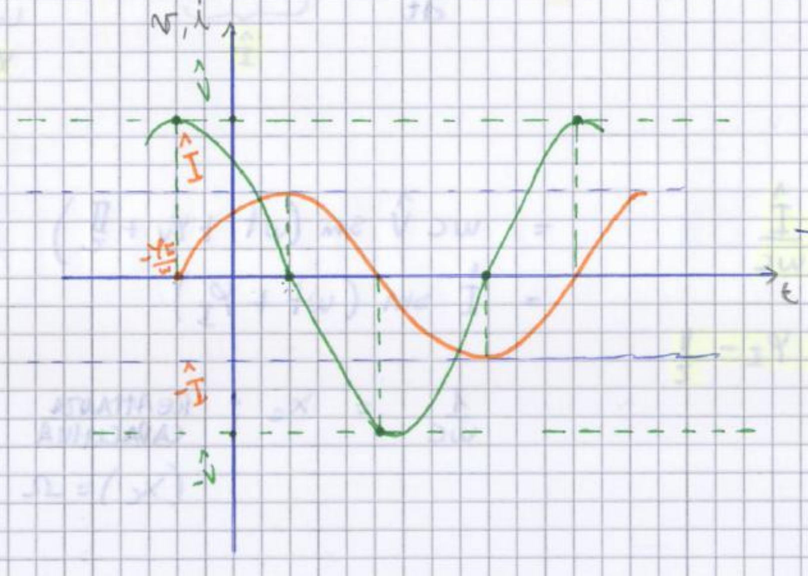
$$\begin{cases} \hat{V} = \omega L\hat{I} = X_L\hat{I} \\ \varphi_V = \varphi_I + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\downarrow$ fase tensione ≠ da fase corrente (sfasate nel tempo)

$X_L = \omega L$: REATTANZA INDUTTIVA

$(X_L) = $ ohm

NB. la tensione non è $= 0$; in corrente alternata non funziona come corto circuito → (solo in corrente continua)



v, i sono in QUADRATURA

v è in anticipo di $\pi/2$ su i

i è in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ su v

v è in ritardo di $\frac{3}{2}\pi$ su i

i è in anticipo di $\frac{3}{2}\pi$ su v

nel piano complesso:

$v = L\frac{di}{dt}$ $\qquad i \equiv \bar{I} = \hat{I}\cdot e^{j\varphi_I}$

associato

$$\bar{V} = L\cdot \underbrace{j\cdot\omega\bar{I}}_{\frac{di}{dt} = j\omega\bar{I}} = j\overset{X_L}{\omega L}\bar{I}$$

$$= j\omega L\hat{I}\cdot e^{j\varphi_I}$$

$$= \omega L\hat{I}\cdot e^{j\varphi_I}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \underbrace{X_L\cdot\hat{I}}_{\hat{V}}\cdot e^{j\underbrace{(\varphi_I+\frac{\pi}{2})}_{\varphi_V}}$$

derivata diventa operazione algebrica

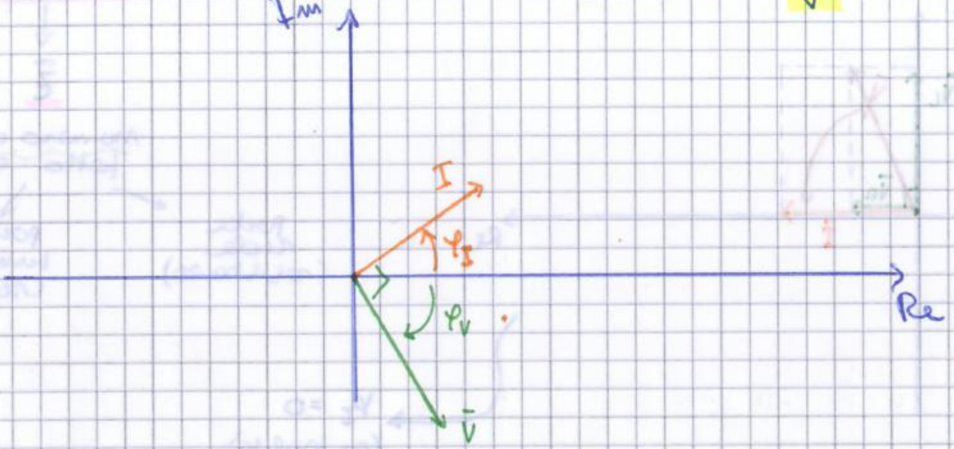
$i = C\boxed{\frac{dv}{dt}}$

$\bar{I} = C\,\boxed{j\omega\bar{V}} \Rightarrow \bar{V} = \frac{\bar{I}}{j\omega C} = -j\frac{\bar{I}}{\omega C} = -j X_C \bar{I}$

$\bar{I} = \hat{I}\,e^{j\varphi_I}$

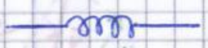
$\bar{V} = \frac{\hat{I}\,e^{j\varphi_I}}{j\omega C} = \frac{\hat{I}}{\omega C}\,e^{j\varphi_I}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$= \underbrace{X_C\,\hat{I}}_{\hat{V}}\;e^{j\overbrace{(\varphi_I - \frac{\pi}{2})}^{\varphi_V}}$



$\bar{V} = \boxed{R}\,\bar{I}$

$\bar{V} = \boxed{jX_L}\,\bar{I}$



$X_L = \omega \cdot L$

$\bar{V} = \boxed{-jX_C}\,\bar{I}$

$X_C = \frac{1}{\omega C}$

posso riassumere con:

$\bar{V} = \bar{Z}\,\bar{I}$

IMPEDENZA

$\bar{Z} = R$

$\bar{Z} = jX_L$

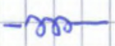
$\bar{Z} = -jX_C$

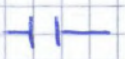
es.
$f = 50\ Hz$
$\omega \cong 314\ rad/s$
$L = 1\ mH$
$\omega L = 0,314\ \Omega$

formula generale per tutti i dipoli; coinvolge 3 numeri complessi

numeri complessi associati a $\bar{Z}$ non hanno un corrispettivo nel dominio del tempo

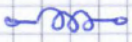
 $\varphi_Z = 0$

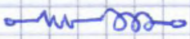
 $\varphi_Z = \frac{\pi}{2}$

 $\varphi_Z = -\frac{\pi}{2}$

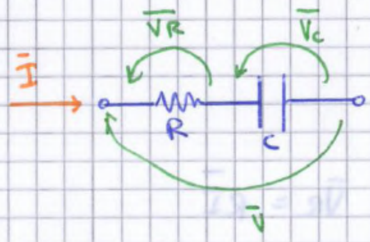
$\xrightarrow{} \operatorname{arctg} \frac{X_L}{R} = \varphi_Z$

se $\varphi_Z = 0$ $X_L = 0$  → resistore perché $(R + \cancel{jX_L})\bar{I} = \bar{V}$ → $\bar{V} = R\bar{I}$

$\varphi_Z = \frac{\pi}{2}$ $R = 0$  → induttore perché $(\cancel{R} + jX_L)\bar{I} = \bar{V}$ → $\bar{V} = jX_L\bar{I}$

$0 < \varphi_Z < \frac{\pi}{2}$ 

- resistore - condensatore



$\bar{V}_R = R\bar{I}$

$\bar{V}_C = -jX_C\bar{I}$

LKT: $\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_C = R\bar{I} - jX_C\bar{I} = \underbrace{(R - jX_C)}_{\bar{Z}}\bar{I}$ impedenza di tipo OHMICO-CAPACITIVO

$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$

$\bar{Z} = R - jX_C$

$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

$\varphi_Z = \operatorname{arctg} -\frac{X_C}{R}$

$$\bar{V} = Z e^{j\varphi_Z} \cdot \hat{I} e^{j\varphi_I}$$

$$= \underbrace{Z\hat{I}}_{\hat{V}} e^{\overbrace{j(\varphi_Z + \varphi_I)}^{}}$$

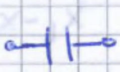
$\underbrace{\varphi_Z + \varphi_I}_{\varphi_V}$

dove $\begin{cases} \hat{V} = Z\hat{I} \\ \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_I \end{cases}$

$\xrightarrow{} \operatorname{arctg}\left(-\frac{X_C}{R}\right) = \varphi_Z$

se $X_C = 0$ abbiamo solo R $\varphi_Z = 0$ $\varphi_V = \varphi_I$  $(R - \cancel{jX_C})\bar{I} = \bar{V}$

$\bar{V} = R\bar{I}$

$R = 0$ $\varphi_Z = -\frac{\pi}{2}$ $\varphi_V = \varphi_I - \frac{\pi}{2}$  $(\cancel{R} - jX_C)\bar{I} = \bar{V}$

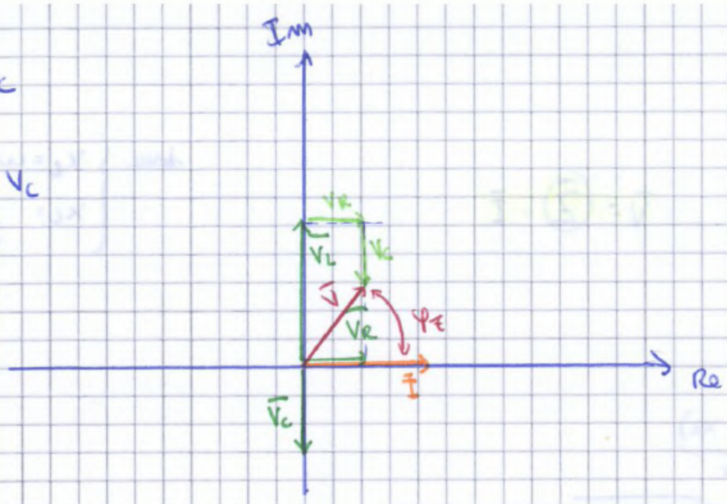
$\bar{V} = -jX_C\bar{I}$

1) $X_L > X_C$

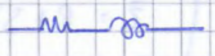
↓

vettore V_L + lungo di V_C

$\varphi_I = 0$



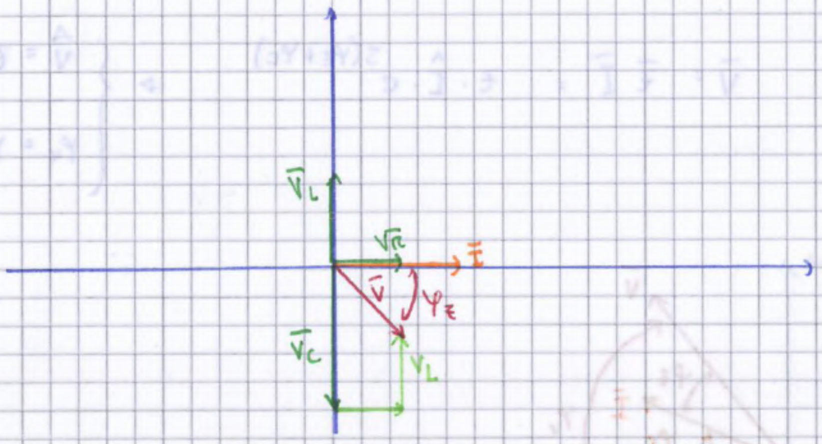
$$\varphi_Z = \text{arctg}\frac{X_L - X_C}{R}$$

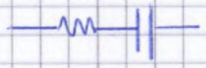


φ_Z è negativo

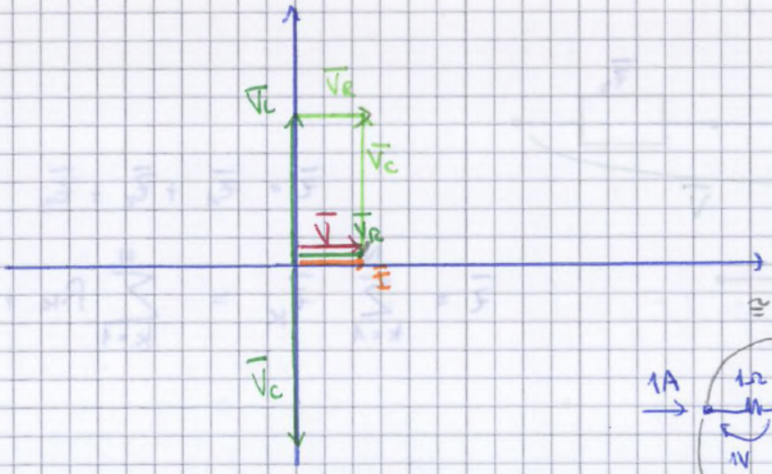
2) $X_L < X_C$

$$\varphi_Z = \text{arctg}\frac{\overbrace{X_L - X_C}^{<0}}{R}$$

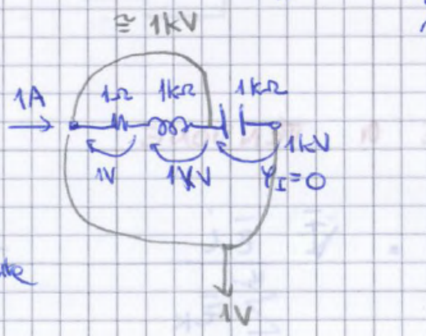




3) $X_L = X_C$

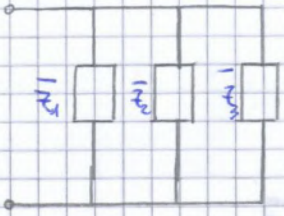


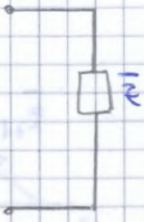
in corrente alternata non posso fare somma dei moduli !



NB in circuiti a corrente alternata posso avere tensione bassa ai morsetti ed alta all'interno

PARALLELO

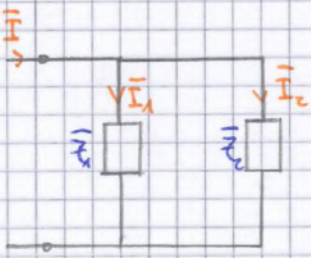




$$\bar{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\bar{Z}_k}}$$

PARTITORE DI CORRENTE



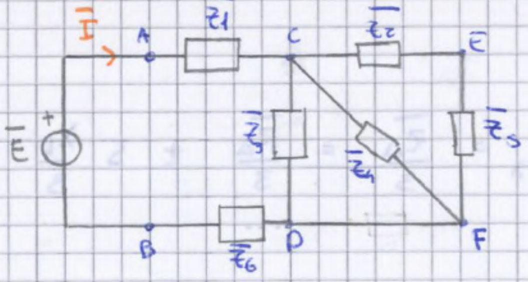
$$\bar{I}_1 = \bar{I} \cdot \frac{1}{\bar{Z}_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2}}$$

$$= \bar{I} \cdot \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

$$\bar{I}_i = \frac{\bar{I}}{\bar{Z}_i} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\bar{Z}_k}}$$

ci si può però
sempre condurre
a solo 2 R m //

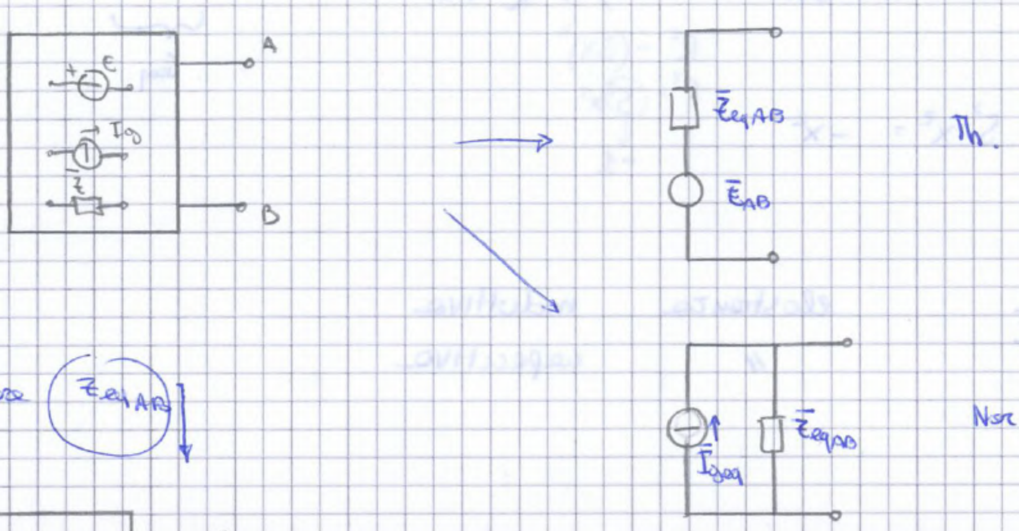
CIRCUITI con 1 solo generatore



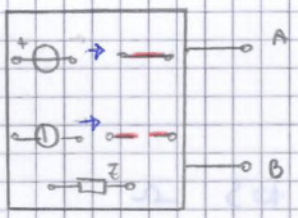
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{eq_{AB}}}$$

$$\bar{Z}_{eq_{AB}} = (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_5) // \bar{Z}_4 \; // \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 + \bar{Z}_6$$

THEVENN - NORTON



Per trovare $\boxed{\overline{Z}_{eq\,AB}}$



$\overline{Z}_{eq\,AB} = 0 + j0 \rightarrow$ solo Thevenin

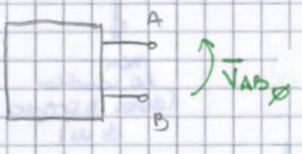
0 entrante

$\overline{Z}_{eq\,AB} = \infty + j\forall \rightarrow$ solo Norton

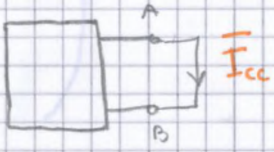
$= \forall + j\pm\infty$

una delle Z = ∞

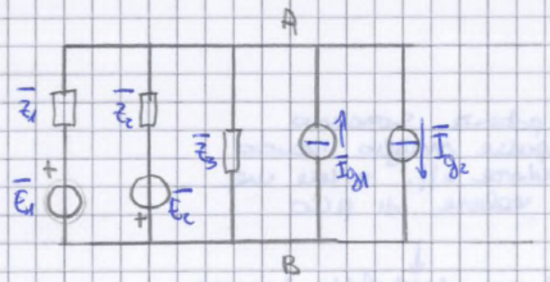
Per trovare $\boxed{\overline{E}_{eq\,AB}}$



Per trovare $\boxed{\overline{I}_{g\,eq}}$



MILLMAN



$$\overline{V}_{AB} = \frac{\frac{\overline{E}_1}{\overline{Z}_1} - \frac{\overline{E}_2}{\overline{Z}_2} + \overline{I}_{g1} - \overline{I}_{g2}}{\frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \frac{1}{\overline{Z}_3}}$$

Ⓡ $\frac{1}{R} = G$ CONDUTTANZA

$\frac{1}{\overline{Z}} = \overline{Y}$ AMMETTENZA

$\frac{1}{\overline{Z}}$

$\overline{Z} = R + jY \rightarrow G_{eq} \pm j B_{eq}$

SUSCETTANZA

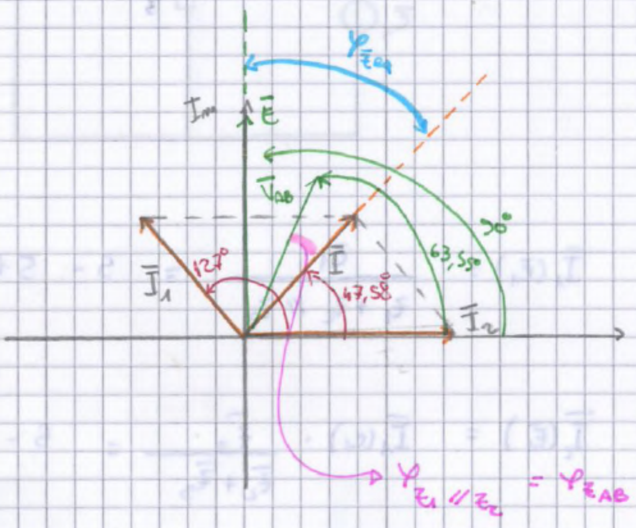
conduttanza

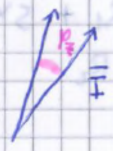
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\underbrace{\bar{Z}_1 \parallel \bar{Z}_2 + \bar{Z}}_{13{,}42 + j\,12{,}26}} = 3{,}71 + j\,4{,}06 = 5{,}5\ e^{j47{,}58}$$

partitore: $\bar{I}_1 = \bar{I} \cdot \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = -3{,}05 + j\,4{,}05 = 5{,}07 \cdot e^{j127{,}00^\circ}$

eq. mach: $\bar{I}_2 = \bar{I} - \bar{I}_1 = 6{,}75 + j\,0{,}01 = 6{,}75 \cdot e^{j0{,}09^\circ}$

$$\bar{V}_{AB} = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_1 = \bar{I}_2 \cdot \bar{Z}_2 = (\bar{Z}_1 \parallel \bar{Z}_2) \cdot \bar{I} = 20 + j\,40{,}6\ V$$
$$= 45{,}35\ e^{j63{,}55^\circ}\ V$$





$$\bar{Z}_1 \parallel \bar{Z}_2 = Z_{AB} \cdot e^{j\,\boxed{\varphi_{Z_{AB}}}}$$

$$\bar{E} = \bar{I} \cdot \underbrace{\bar{Z}_{eq}}_{\bar{Z}_1 \parallel \bar{Z}_2 + \bar{Z}}$$

$\hookrightarrow 13{,}42 + 12{,}26\,j$

$$\boxed{\varphi_{Z_{eq}}} = \operatorname{arctg} \frac{12{,}26}{13{,}42} = 42{,}41^\circ$$

fare es. 5 lezione 12

$$\bar{I}_2 = -\bar{I}_2^{(E_1)} + \bar{I}_2^{(E_2)} = j\,15 \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = I_3^{(E_1)} + I_3^{(E_2)} = 0$$ → gioco delle fasi che fa sì che $\bar{I}_3 = 0$

N.B. $1/j = -j$

se applichiamo Millman:

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}} = \frac{\frac{150}{j10} + \frac{j150}{10}}{//} = \frac{\overset{=0}{\boxed{-\frac{j150}{10} + \frac{j150}{10}}}}{//}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{AB}}{\bar{Z}_3} = 0$$

25.

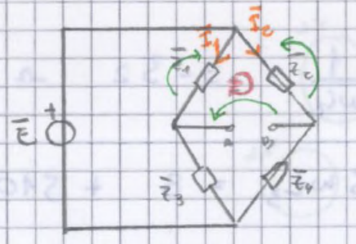
$\bar{E} = 120 \angle 75^\circ$ $= \cdot\, e^{j75}$

$X_1 = 6\,\Omega$

$X_2 = 12\,\Omega$

$R_1 = 8\,\Omega$

$R_2 = 4\,\Omega$



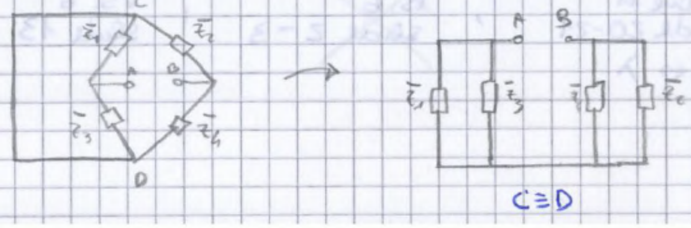
$\bar{Z}_1 = -jX_1 = -j6\,\Omega$

$\bar{Z}_2 = R_2 = 4\,\Omega$

$\bar{Z}_3 = R_1 = 8\,\Omega$

$\bar{Z}_4 = jX_2 = j12\,\Omega$

$\bar{Z}_{eq_{AB}}$



$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_1 // \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 // \bar{Z}_4$$
$$= 6{,}48 - j\,2{,}64\ \Omega$$

↓

alla fine: OHMICO-CAPACITIVO