



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1149

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Arcidiacono

MATERIA: Scienza delle Costruzioni

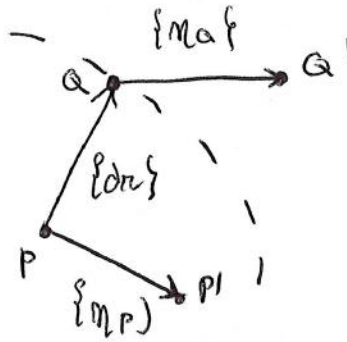
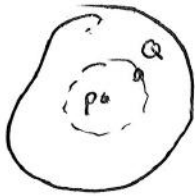
Prof. Chiaia_Surace

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

TENSORE DI DEFORMAZIONE



P e Q si spostano in seguito a delle deformazioni.

sviluppo {m} in serie di Taylor

$$PQ = \{dr\} = dx\vec{x} + dy\vec{y} + dz\vec{z}$$

$$u_Q = u_P + \left(\frac{du}{dx}\right)_P dx + \left(\frac{du}{dy}\right)_P dy + \left(\frac{du}{dz}\right)_P dz$$

$$v_Q = v_P + \left(\frac{dv}{dx}\right)_P dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)_P dy + \left(\frac{dv}{dz}\right)_P dz$$

$$w_Q = w_P + \left(\frac{dw}{dx}\right)_P dx + \left(\frac{dw}{dy}\right)_P dy + \left(\frac{dw}{dz}\right)_P dz$$

Si fermo alla derivata prima perché ipotizziamo piccoli spostamenti

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} u_Q \\ v_Q \\ w_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx} & \frac{dw}{dy} & \frac{dw}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

In forma vettoriale

$$\{m_Q\} = \{m_P\} + [J_P] \cdot \{dr\}$$

SPOST TOT TRASLAZ ROTAZIONE + DEFORMAZIONE

$$[J_P] = [\epsilon_P] + [\varphi_P]$$

MATRICE DI DEFORMAZIONE (simmetrica)

MATRICE DI ROTAZIONE (antisimmetrica)

$$[\varphi_P] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché [J_P] è quadrata

$$[J_P] = \underbrace{\frac{1}{2} ([J_P] + [J_P]^T)}_{[\epsilon_P]} + \underbrace{\frac{1}{2} ([J_P] - [J_P]^T)}_{[\varphi_P]}$$

$$[\epsilon_p^*] = [N] [\epsilon_p] [N]^T$$

$\begin{matrix} m & m & e \\ x & y & z \end{matrix}$

$$[N] = \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \\ l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}$$

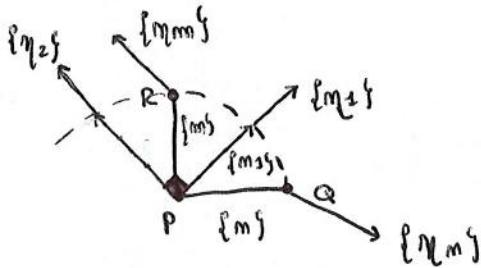
MATRICE DI ROTAZIONE

$$[\epsilon_p] = \begin{bmatrix} \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{mm} & \frac{1}{2} \gamma_{me} \\ \frac{1}{2} \gamma_{mm} & \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{me} \\ \frac{1}{2} \gamma_{em} & \frac{1}{2} \gamma_{em} & \epsilon_e \end{bmatrix}$$

DIREZIONI PRINCIPALI

Ricerca del sistema principale (m_1, m_2, m_3) , non abbiamo scorrimenti angolari

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$



ep. tensoriale $\{m'\} = [\epsilon_p] \{m\}$
 ep. vettoriale $\{m'\} = \epsilon_m \{m\}$

le sottraggio $0 = [\epsilon_p] \{m\} - \epsilon_m \cdot \{m\}$

$$\rightarrow ([\epsilon_p] - [I] \epsilon_m) \{m\} = 0 \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

↳ COSENI DIRETTORI (incognite)

Determino $\epsilon_m \rightarrow$ la soluzione banale $m_x = m_y = m_z = 0$ da escludere poiché $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$ sono 1

CERCO GLI AUTOVALORI

$$\det(A) = \det([\epsilon_p] - [I] \epsilon_m) = 0$$

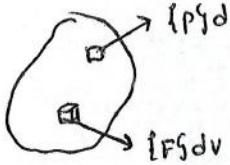
Otengo una equazione del 3° grado

$$\epsilon_m^3 - J_1 \epsilon_m^2 - J_2 \epsilon_m - J_3 = 0$$

$J_1 - J_2 - J_3$ INVARIANTI DELLA DEFORMAZIONE (non dipendono dal SR)

VEETTORE TENSIONE $\{t_m\}$

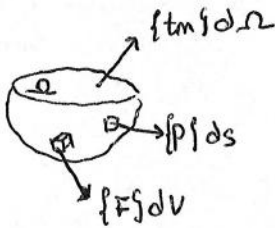
Corpo soggetto a forze esterne, scritto le equazioni codim. della statica affinché ci sia equilibrio



$$\int_V \{F\}dV + \int_S \{p\}ds = 0$$

$$\int_V \{\pi\} \wedge \{F\}dV + \int_S \{\pi\} \wedge \{p\}ds = 0$$

Se sezioniamo il corpo con un piano π di normale m e portiamo per P la porzione di solido isolata non è in equilibrio sotto l'azione delle sole forze agenti ma devo considerare anche le azioni mutue scambiate tra le due porzioni

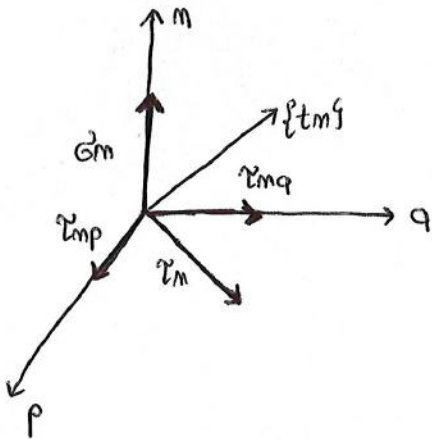


$$\int_V \{F\}dV + \int_S \{p\}ds + \int_\Omega \{t_m\}d\Omega = 0$$

$$\int_V \{\pi\} \wedge \{F\}dV + \int_S \{p\} \wedge \{\pi\}ds + \int_\Omega \{t_m\} \wedge \{\pi\}d\Omega = 0$$

$$\{t_m\} = t_m(P, \{m\})$$

SCOMPONGO IL VETTORE $\{t_m\}$



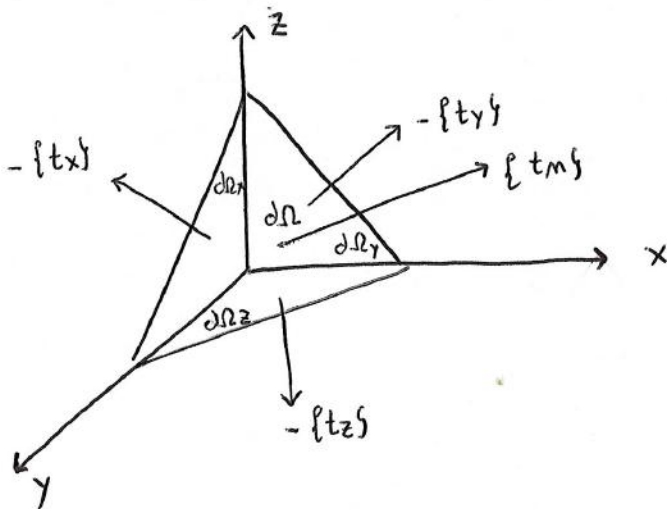
$$\{t_m\} = G_m \cdot \vec{m} + \gamma_{mq} \cdot \vec{q} + \gamma_{mp} \cdot \vec{p}$$

$$T_m = \sqrt{\gamma_{mp}^2 + \gamma_{mq}^2}$$

G = componente normale

γ = componente tangenziale

TETRAEDRO DI CAUCHY E TENSORE DI TENSIONE



$$\{t_x\} = (G_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz})$$

$$\{t_y\} = (G_y, \gamma_{yx}, \gamma_{yz})$$

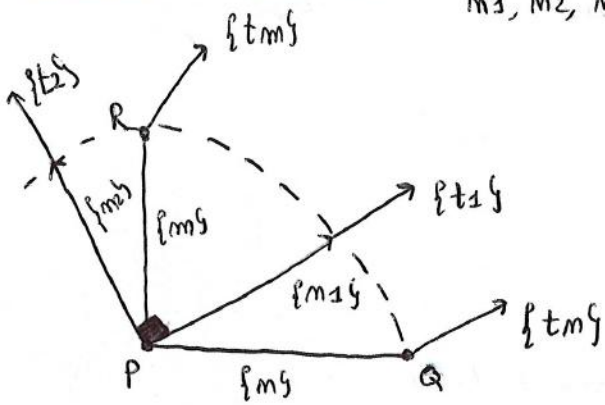
$$\{t_z\} = (G_z, \gamma_{zx}, \gamma_{zy})$$

$$\{t_m\} = (G_m, \gamma_{mx}, \gamma_{my}, \gamma_{mz}) = (t_x, t_y, t_z)$$

DIREZIONI PRINCIPALI

Ricerca un sistema con direzioni principali m_1, m_2, m_3 con tensioni tangenziali nulle

$$[\sigma_p] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



ep. tensoriale $\{tm\} = [\sigma_p] \{m\}$
 ep. vettoriale $\{tm\} = \sigma_m \cdot \{m\}$

e sottraggo $[\sigma_p] \{m\} - \sigma_m \{m\} = 0$

$$\rightarrow ([\sigma_p] - [I] \sigma_m) \{m\} = 0 \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Determino $\sigma_m \rightarrow$ soluzione banale non considerate $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ poiché sono \perp

$$\det(A) = \det([\sigma_p] - [I] \sigma_m) = 0 \quad \text{AUTOVALORI}$$

Otengo una equazione di 3° grado

$$\sigma_m^3 - T_1 \sigma_m^2 - T_2 \sigma_m - T_3 = 0$$

$T_1 - T_2 - T_3 =$ INVARIANTI DELLA TENSIONE (non dipendono da SR)

$$T_1 = \text{INVARIANTE LINEARE} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$T_2 = \text{INVARIANTE QUADRATICO} = - \begin{vmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{vmatrix}$$

$$T_3 = \text{INVARIANTE CUBICO} = \det[\sigma_p]$$

Ricavati gli autovalori li sostituisco uno ad uno in A e trovo gli AUTOVETTORI m_1, m_2, m_3

INVARIANTI NEL S.R. PRINCIPALE

$$T_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad T_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad T_2 = -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3$$

• CERCHI DI MOHR PAG 225

La teoria dei cerchi di Mohr (1882) descrive graficamente lo stato tensionale del punto P nel piano (σ, τ) detto "piano delle tensioni"



- Nel sistema principale m_1, m_2, m_3 :

$$\{t_m\} = [\sigma] \{m\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

ASSEGNATO UNO STATO TENSIONALE GENERICO, TRAMITE I CERCHI DI MOHR SI POSSONO CALCOLARE LE TENSIONI PRINCIPALI E LE DIREZIONI PRINCIPALI IN UN PUNTO

$$\sigma_m = \{m\}^T [\sigma] \{m\} = [m_1 \ m_2 \ m_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

- Il modulo al quadrato del vettore tensione:

$$\textcircled{1} \quad \tau_m^2 = \sigma_m^2 + \tau_m^2 = \sigma_1^2 \cdot m_1^2 + \sigma_2^2 \cdot m_2^2 + \sigma_3^2 \cdot m_3^2$$

- Le componenti normale di tensione:

$$\textcircled{2} \quad \sigma_m = \sigma_1 \cdot m_1^2 + \sigma_2 \cdot m_2^2 + \sigma_3 \cdot m_3^2$$

- Condizione di normalità dei coseni direttori: \rightarrow perché abbiamo 3 circonferenze

$$\textcircled{3} \quad m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$$

Incognite $m_1^2, m_2^2, m_3^2 \rightarrow$ sistema di 3 equazioni
 1 - 2 - 3 \rightarrow sistema di 3 equazioni lineari in 3 incognite

- La soluzione del sistema è:

$$m_1^2 = \frac{\tau_m^2 + (\sigma_m - \sigma_2)(\sigma_m - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)} > 0$$

$$m_2^2 = \frac{\tau_m^2 + (\sigma_m - \sigma_1)(\sigma_m - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_3)} > 0$$

$$m_3^2 = \frac{\tau_m^2 + (\sigma_m - \sigma_1)(\sigma_m - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} > 0$$

Numeratore e denominatore devono avere lo stesso segno

CIRCONFERENZA 1: $C_1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \quad R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

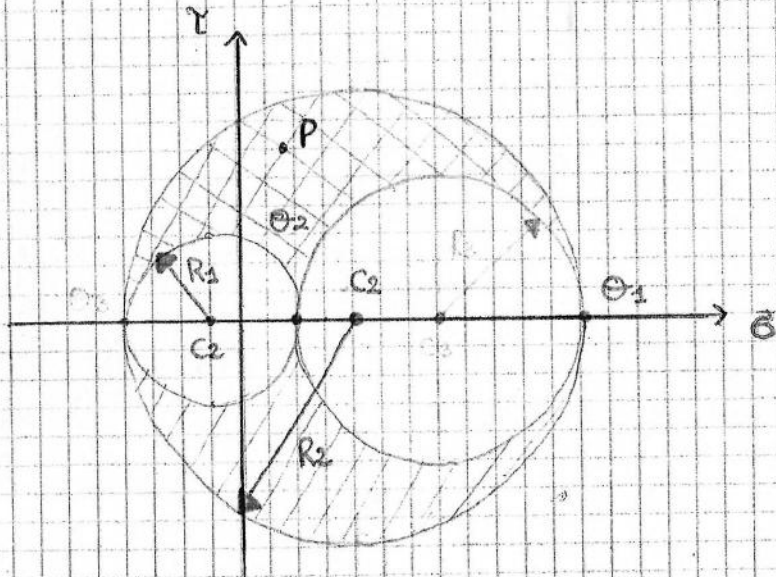
CIRCONFERENZA 2: $C_2 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \quad R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

CIRCONFERENZA 3: $C_3 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) \quad R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

3 CERCHI DI MOHR
RAPPRESENTATIVI DELLO
STATO TENSIONALE
NELL'INTERNO DEL PUNTO P

è l'intersezione e esterna ai cerchi 1 e 3 ed è interna al cerchio 2 (cerchio max)

RAPPRESENTAZIONE DEI CERCHI DI MOHR SUL PIANO ($\sigma - \tau$)



PIANO DI MOHR:

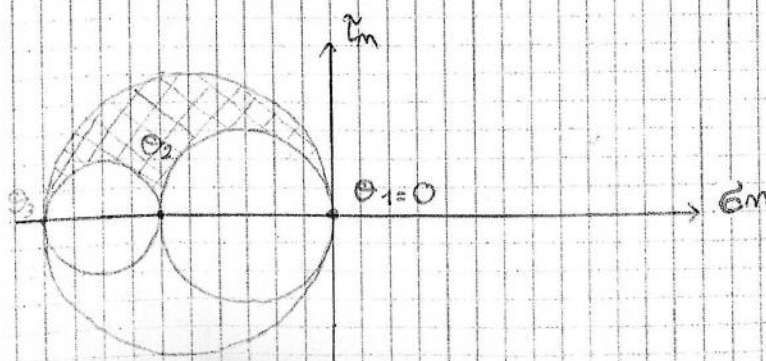
stato di sforzo in P (σ_m, τ)

Vi sono ∞^2 coppie
 σ_m , τ in così come
sono ∞^2 le direzioni
 $\{m\}$ uscenti da P.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

CASI PARTICOLARI

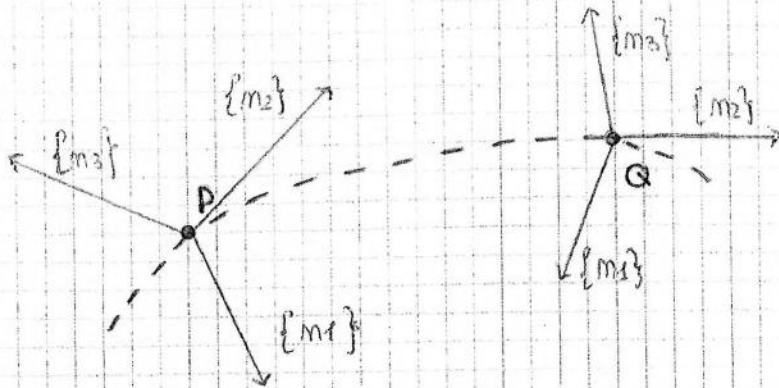
⊗ Stato biassiale → 2 cerchi tangenti all'origine → $\sigma_1 = 0$



È stato tensionale zero
ovvero di compressione
poiché sono nella sinistra
del grafico ($\sigma_m < 0$)

● LE LINEE ISOSTATICHE

In ogni punto possiamo definire 3 direzioni principali della tensione

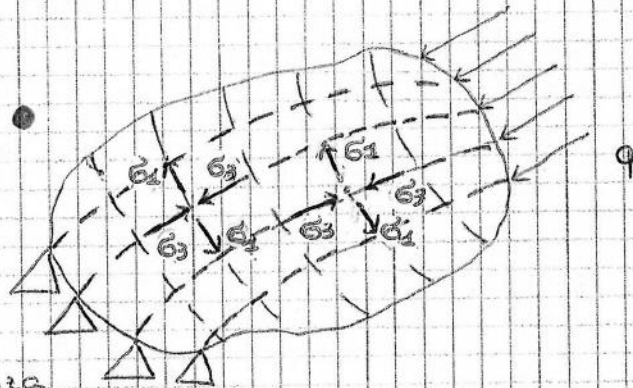


P e Q sono sufficientemente vicini. Se prendiamo la tangente ad $\{m_2\}$ per P e la tangente ad $\{m_2\}$ per Q. Congiungendo le tangenti descriviamo una linea detta **LINEA ISOSTATICA**

- Se le tensioni interne sono nulle allora il campo tensionale è a divergenza nulla.
- Il loro sviluppo conduce a definire tre famiglie di linee mutuamente ortogonali: le **LINEE ISOSTATICHE** (flusso della tensione nel corpo)

* ISOSTATICHE DI TRAZIONE

* ISOSTATICHE DI COMPRESSIONE



Abbiamo un corpo generico soggetto ad un carico q .

Le isostatiche di compressione sono come delle linee di forza che vanno dal carico verso gli appoggi. In corrispondenza di ciascun punto la tg all'isostatica di compressione sarà // alla tensione σ_3 di compressione. Le linee di trazione σ_1 e σ_2 di trazione presentano in ogni punto come tg la direzione principale di trazione e quindi la σ_1 di trazione.

- Le particelle materiali disposte lungo una linea isostatica sono soggette, per definizione, a TENSIONE NORMALE, di tensione o di compressione.
- Se si riuscisse a concentrare la materia lungo un reticolo formato dalle linee isostatiche, si realizzerebbe una condizione ottimale di sforzo.

- Il vettore tensore $\{tn\}$ appartiene sempre al piano delle tensioni 1-2 per qualsiasi orientazione $\{n\}$ dell'asse z .

- Dalla relazione fondamentale, nel riferimento principale:

$$\sigma_3 = 0 \quad \begin{bmatrix} tn_1 \\ tn_2 \\ tn_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \Rightarrow tn_3 = 0 \\ \text{rango} = 2$$

- In un qualunque sistema di riferimento xyz :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3^{\circ} \text{ riga e } 3^{\circ} \text{ colonna} \\ \text{identicamente nulle} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rango del tensore} \\ \bar{e} = 2 \end{array}$$

● RICERCA DELLE TENSIONI PRINCIPALI (nel caso piano)

- Problema agli autovalori

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix} = 0$$

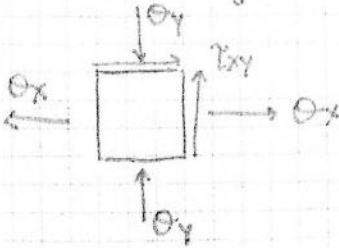
$\sigma_m = 0 \rightarrow$ tensione principale nulla ($\sigma_3 = 0$) \rightarrow dall'ultima equazione

$$\sigma_m^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sigma_m + (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

$$T_1 = \text{traccia} [\sigma]$$

$$T_2 = \sum (\det(\text{minori} [\sigma]))$$

Prova e ottengo

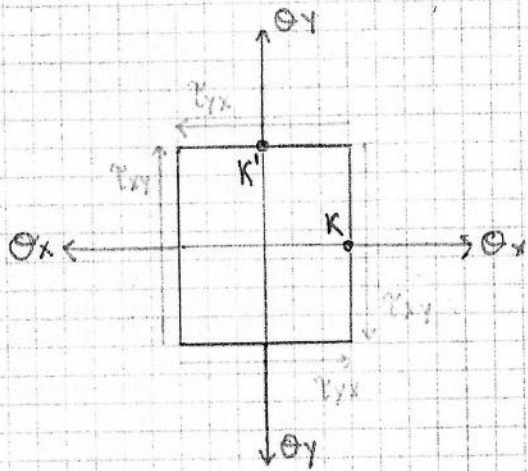


STATO TENSIONALE PIANO IN UN INTERNO DI P≠
NON SONO nelle direzioni principali perché
ho le τ.

- Devo trovare le tensioni principali con ⊗

● CERCHIO DI MOHR - STATO PIANO PAG. 230 - 231

- Si riportano nel piano di Mohr ($\sigma_m - \tau_m$) i valori della tensione nei punti $K(\sigma_x, \tau_{xy})$ e $K'(\sigma_y, -\tau_{xy})$

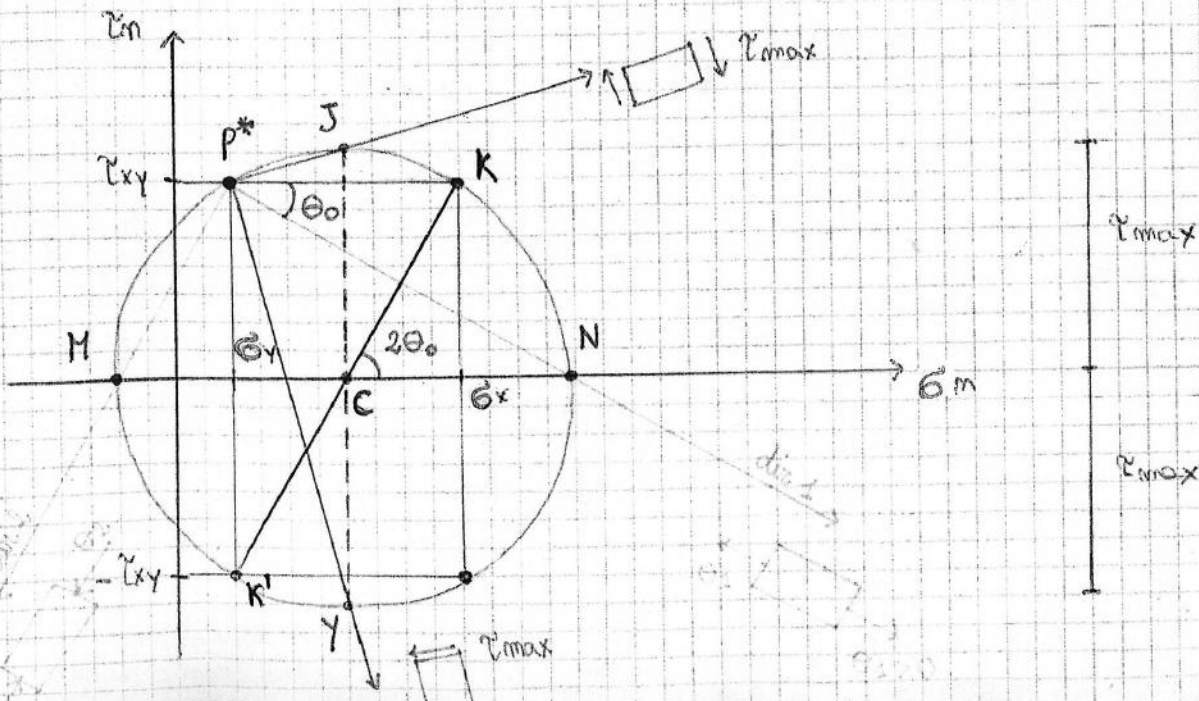


Convenzioni

$\sigma > 0 \rightarrow$ se di trazione

$\tau > 0 \rightarrow$ se orario in K

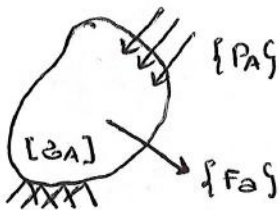
- Si individuano nel piano $\sigma_m - \tau_m$ i punti $K(\sigma_x, \tau_{xy})$ e $K'(\sigma_y, -\tau_{xy})$



PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Consideriamo un corpo deformabile e studiamo due sistemi

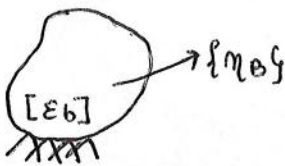
• SISTEMA EQUILIBRATO STATICAMENTE AMMISSIBILE



$$[\partial]^T [\partial A] = -\{F_b\}$$

$$[N]^T [\partial A] = \{P_A\}$$

• SISTEMA CONGRUENTE CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE



$$[\partial] \{u_b\} = \{E_b\}$$

$$\{u_b\} = \{u_v\}$$

I due sistemi sono indipendenti e uno dall'altro. Date due sistemi uno equilibrato e l'altro congruente abbiamo che:

L_{ve}^*	$=$	L_{vi}^*
FORZE x SPOST.		TENSIONI x DEFORM.

$$\int_V \{F_b\}^T \{u_b\} dV + \int_S \{P_A\}^T \{u_b\} dS = \int_V \{\partial A\}^T \{E_b\} dV$$

DIMOSTRAZIONE EURISTICA

$$L_{vi}^* = \int_V \{\partial A\}^T \{E_b\} dV$$

$$L_{ve}^* = \int_V \{F_b\}^T \{u_b\} dV + \int_S \{P_A\}^T \{u_b\} dS$$

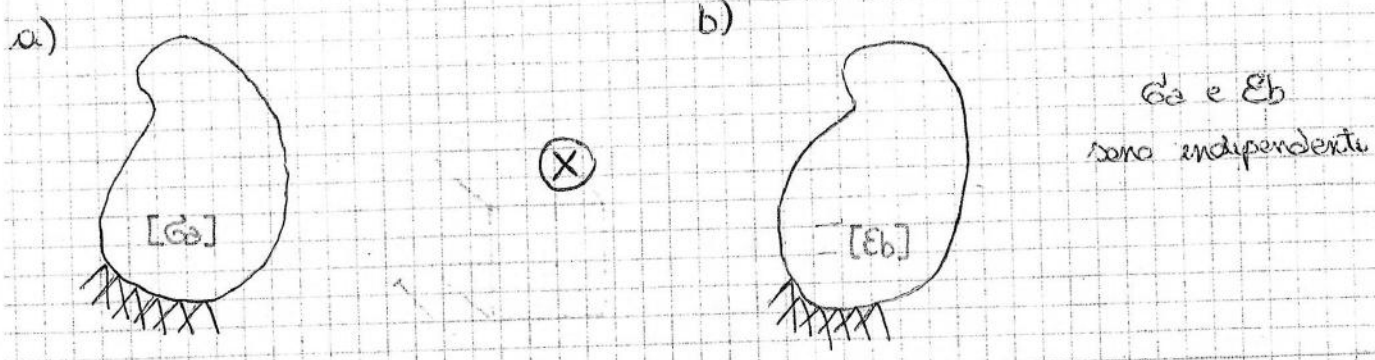
INDIPENDENTE DAL TIPO DI MATERIALE

LAVORO VIRTUALE INTERNO → definizione di lavoro virtuale interno per corpo deformabile

$$L^*_{\text{interno}} = \int_V \{ \epsilon_a \}^T \cdot \{ \epsilon_b \} dV$$

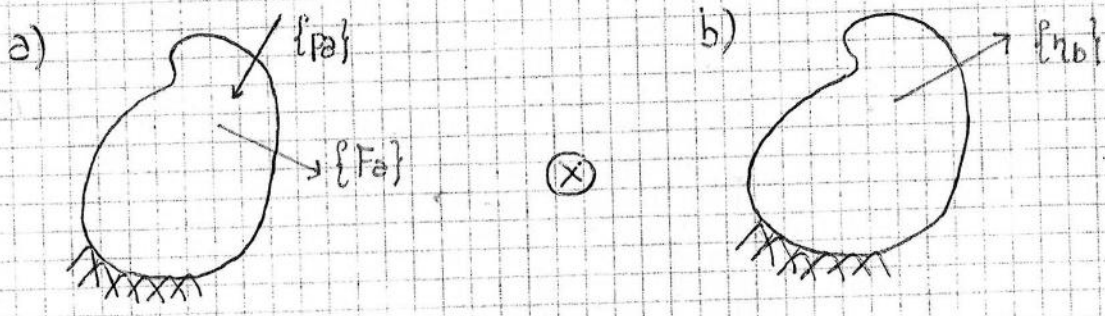
Per avere un prodotto scalare il vettore ϵ_a è trasposto in modo che diventa un vettore riga. Il prodotto sarà un numero, una scalaire. Le energie sono quantità scalari non vettoriali e sono numeri misurabili in Joule o Kg·m e sono numeri puri

- Lavoro interno di deformazione (virtuale): Prodotto scalare tra il vettore delle tensioni ed il vettore delle deformazioni (indipendenti)



LAVORO VIRTUALE ESTERNO

$$L^*_{\text{esterno}} = \int_V \{ F_a \}^T \cdot \{ n_b \} dV + \int_{S_L} \{ p_a \}^T \cdot \{ n_b \} dS$$



● PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI PAG. 240

Lavoro virtuale esterno = lavoro virtuale interno

$$\int_V \{ F_a \}^T \cdot \{ n_b \} dV + \int_{S_L} \{ p_a \}^T \cdot \{ n_b \} dS = \int_V \{ \epsilon_a \}^T \cdot \{ \epsilon_b \} dV$$

- Il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) è l'identità fondamentale della Meccanica del Continuo.
- Il principio è indipendente dal tipo di materiale (ossia dal legame costitutivo)
- Il principio è applicabile per i solidi, per i liquidi, per i gas e per i corpi elastici.

2) RESTRIZIONE DELLE DEFORMAZIONI POSSIBILI

- Corpi rigidi = corpi capaci soltanto di moto rigido (rotazione - traslazione).
- Corpi incompressibili = corpi capaci solo di deformazioni isocore ($Vol = cost$).
- Corpi (aste) inestensibili = aste capaci di inflettersi, ma non di variazione lunghezza assiale.

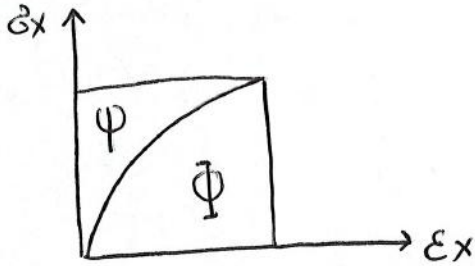
● ASSIOMI DI NOLL (1968)

- 1) Principio del determinismo = lo stato di tensione del continuo dipende dalla storia di deformazione.
- 2) Principio dell'azione locale = lo stato di tensione in un punto P può determinarsi ignorando la deformazione del continuo in punti posti a sufficiente distanza da P (v. la definizione di tensione).
- 3) Principio dell'indifferenza materiale = la risposta di un materiale alle sollecitazioni deve essere indipendente dall'osservatore.

COMPONENTI DI DEFORMAZIONE

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon_y} d\epsilon_y + \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon_z} d\epsilon_z + \dots$$

$$d\psi = \epsilon_x d\epsilon_x + \epsilon_y d\epsilon_y + \epsilon_z d\epsilon_z + \gamma_{xy} d\epsilon_{xy} + \gamma_{xz} d\epsilon_{xz} + \gamma_{yz} d\epsilon_{yz}$$



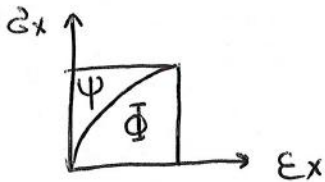
INVERTIBILITÀ DEL LEGAME ELASTICO

$$[\sigma] = \partial([\epsilon]) \rightarrow [\epsilon] = \epsilon([\sigma])$$

l'invertibilità è data dall'esistenza di ψ (CONDIZIONE NECESSARIA)

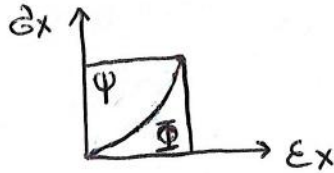
ELASTICITÀ NON LINEARE

$$\Phi \neq \psi$$



$$\Phi > \psi$$

MOLTA ENERGIA IMMAGAZZINATA (GOMME)

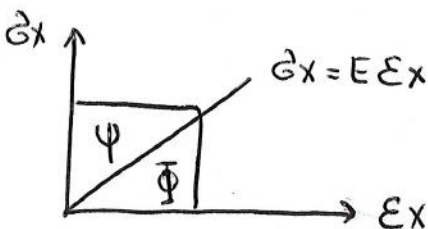


$$\Phi < \psi$$

(MATERIALI BIOLOGICI) VANTAGGIOSA

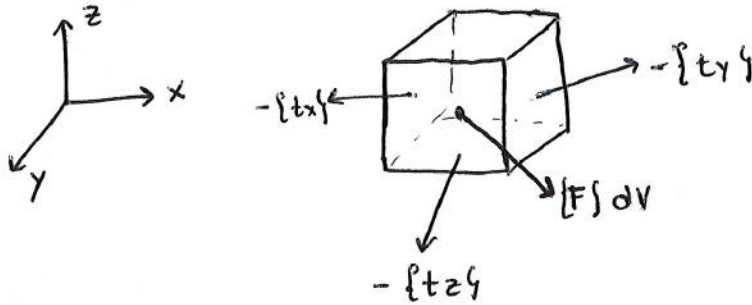
ELASTICITÀ LINEARE

$$\Phi = \psi$$



EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

• Su un parallelepipedo infinitesimo agisce una forza di volume applicata nel baricentro e agiscono i vettori tensione



Per equilibrio alla traslazione otteniamo

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

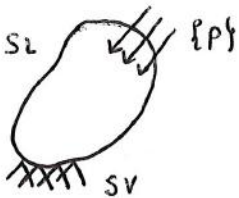
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

$$\text{div}[\sigma] = -\{F\}$$

SISTEMA CON 3 GRADI DI IPERSTATICITÀ

EQUAZIONI DI EQUIVALENZA SULLA FRONTIERA



$$\{t_m\} = [\sigma] \{m\} = \{p\}$$

$$t_{mx} = \sigma_x m_x + \tau_{xy} m_y + \tau_{xz} m_z = p_x$$

$$t_{my} = \sigma_y m_y + \tau_{yz} m_z + \tau_{yx} m_x = p_y$$

$$t_{mz} = \sigma_z m_z + \tau_{zx} m_x + \tau_{zy} m_y = p_z$$

COMPONENTI
CARTESIANE
DEL VETTORE
TENSIONE

DUALITÀ STATICO - CINEMATICA

$$\{\sigma(p)\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon(p)\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

ε = dilatazioni assiali

γ = scorrimenti angolari

σ = tensione normale

τ = tensione tangenziale

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x^2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon_x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon_x} \cdot \sigma_x\right)_0 = E \epsilon_x$$

COME PRIMA

poiché legge di HOOKE

$$\sigma = E \epsilon$$

PER QUESTO SULLA DIAGONALE
ABBIAMO 6 COSTANTI
ELASTICHE

POTENZIALE ELASTICO LINEARE

- Dallo sviluppo di McLaurin sappiamo che:

$$\phi = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T [H] \{ \epsilon \}$$

→ ANALOGIA OSCILLATORE ARMONICO

forma quadratica delle
deformazioni

$$\phi = \frac{1}{2} k x^2$$

- Derivo ϕ rispetto ad $\{ \epsilon \}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = \frac{1}{2} [H] \cdot 2 \{ \epsilon \}$$

$$\{ \sigma \} = [H] \cdot \{ \epsilon \}$$

LEGGE COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE

- Equivali

$$\phi = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T \cdot \{ \sigma \}$$

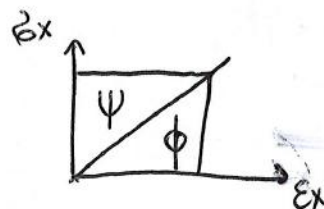
FORMA BILINEARE delle tensioni e deformazioni

- Se voglio scrivere $\{ \epsilon \}$ in funzione di $\{ \sigma \}$

$$\{ \epsilon \} = [H]^{-1} \cdot \{ \sigma \}$$

$[H]$ deve essere definita positiva
 $\det[H] > 0$

↓
ciò garantisce l'esistenza
del potenziale elastico complementare ψ



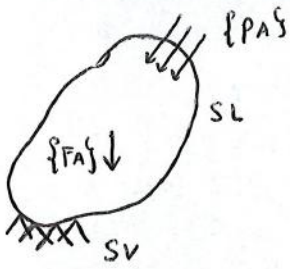
$$\phi = \psi = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T [H] \cdot \{ \epsilon \} = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \}$$

$$\psi = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T [H]^{-1} \{ \sigma \}$$

in forma quadratica delle tensioni

(3)

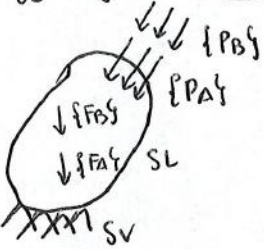
PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



Corpo elastico lineare agisce em sistema di forze A

$$\{F_A\} \{P_A\} \rightarrow \{M_A\} [E_A] [G_A]$$

Aggiungo un sistema di forze B



$$\{F_B\} \{P_B\} \rightarrow \{M_B\} [E_B] [G_B]$$

Azione simultanea di A e B produce la somma degli effetti

$$\{M_A\} + \{M_B\}$$

$$[G_A] + [G_B]$$

$$[E_A] + [E_B]$$

Questo non vale però per il lavoro di deformazione

$$L(A+B) \neq L(A) + L(B)$$

UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DI KIRCHHOFF (SOLO X SISTEMI ELASTICI LINEARI)

Assegnate $\{F_A\}, \{P_A\}, \{M_{0A}\}$ se la soluzione $\{M_A\}$ esiste è unica

DIROSTRAZIONE PER ASSURDO

Immaginiamo un sistema di sollecitazioni $\{m\}, \{f\}, \{p\}$ che mi possono generare 2 diverse soluzioni:

$$[G_A] [E_A] \{M_A\}$$

$$[G_B] [E_B] \{M_B\}$$

Applichiamo il PLV al sistema differenza

$$\int_V \{o\}^T \{ \Delta m \} dV + \int_S \{o\}^T \{ \Delta m \} dS + \int_{S_V} \{ \Delta R \}^T \{o\} dS = \int_V \{ \Delta \sigma \}^T \{ \Delta \epsilon \} dV$$

$$\phi = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \cdot \{ \epsilon \}$$

$$\downarrow$$

$$2 \int_V \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \{ \Delta \epsilon \} dV$$

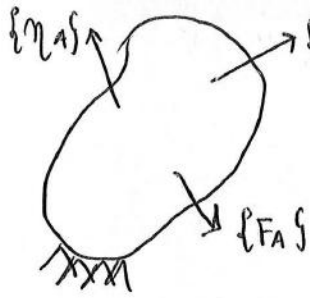
$$\Delta \epsilon_x = \Delta \epsilon_y = \dots = \Delta \gamma_{yz} = 0 \quad \begin{matrix} \text{soluz A e B} \\ \text{coincidono} \end{matrix}$$

UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

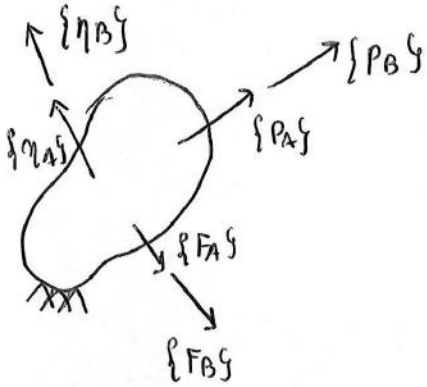
$$2 \int_V \phi(\Delta \epsilon_x, \dots, \Delta \gamma_{yz}) dV$$

(4)

APPLICO CLAPEYRON →



$$L_A = \frac{1}{2} \int_V \{F_A\}^T \{M_A\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_A\}^T \{M_A\} dS$$



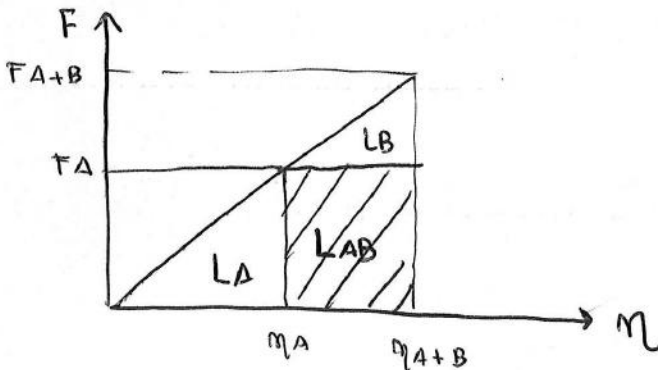
$$L_B = \frac{1}{2} \int_V \{F_B\}^T \{M_B\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_B\}^T \{M_B\} dS$$

$$L_{A+B} \neq L_A + L_B$$

$$L_{A+B} = L_A + L_B + L_{AB}$$

$$L_{AB} = \frac{1}{2} \int_V \{F_A\}^T \{M_B\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_A\}^T \{M_B\} dS$$

LAVORO MUTUO



L_A e L_B = lavori di Clapeyron

L_{AB} = lavoro mutuo.

INVERTENDO il processo di carico

$$L_{BA} = \frac{1}{2} \int_V \{F_B\}^T \{M_A\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_B\}^T \{M_A\} dS$$

$$L_{B+A} = L_A + L_B + L_{BA}$$

$$L_{B+A} = L_{A+B}$$

$$\cancel{L_A + L_B} + L_{BA} = \cancel{L_A + L_B} + L_{AB}$$

$$L_{AB} = L_{BA}$$

(5)

Considero le generiche componenti di $\{\epsilon\}$

$$T_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$T_2 = -\epsilon_x \epsilon_y - \epsilon_x \epsilon_z - \epsilon_y \epsilon_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$$

$$\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ T_1^2 + 2(1+\nu)T_2 \right\}$$

$$\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + 2\cancel{\epsilon_x \epsilon_y} + 2\cancel{\epsilon_y \epsilon_z} + 2\cancel{\epsilon_x \epsilon_z} - 2\cancel{\epsilon_x \epsilon_y} - 2\cancel{\epsilon_y \epsilon_z} - 2\cancel{\epsilon_x \epsilon_z} - 2\nu(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2 \right\}$$

$$\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 \right\} - \frac{\nu}{E} (\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z)$$

$$+ \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

MODULO DI RIGIDEZZA
AL TAGLIO

$$\epsilon_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_x} = \frac{1}{E} [\epsilon_x - \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\epsilon_y - \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\epsilon_z - \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$



CRITERI DI RESISTENZA

Risposte dei materiali alle prove di laboratorio

PROVA DI TRAZIONE UNIASSIALE (su materiali ductile)



PROVINI A FORMA DI I perché deve esserci una sezione minima nel provino A_0

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

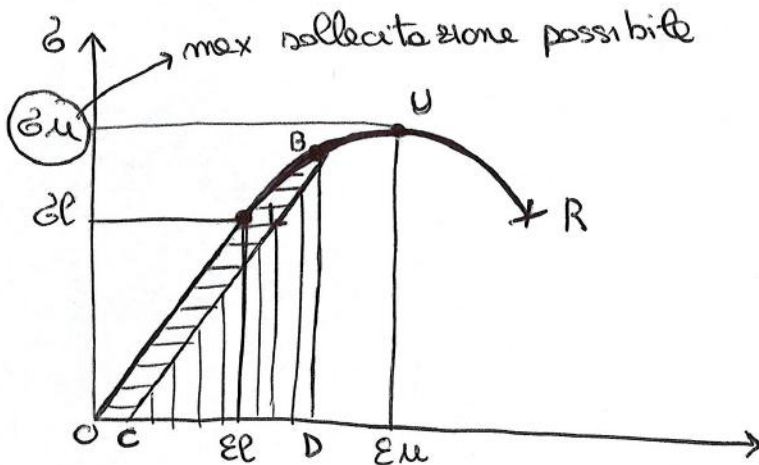


DIAGRAMMA
STRESS
-
STRAIN

OL → campo elastico lineare (proporzionalità diretta tra ϵ e σ → VALE LA LEGGE DI HOOKE $\sigma = E\epsilon$) VALGONO TUTTI I TEOREMI VISTI PER L'ELASTICITÀ (NO DISSIPAZ. DI ENERGIA E DEFORMAZIONI PERMANENTI)

LU → campo plastico, smarrimento (perde la linearità e la pendenza diminuisce, il materiale si rammolisce)

UR → strizione (rottura del provino, oltre ad un determinato carico σ_0 tende a diminuire)

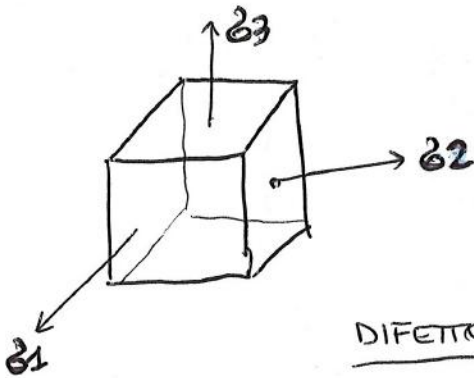
OBC → dissipazione plastica

BCD → energia elastica restituita

OC → deformazione residua (rette di scarico // e quella di carico)

CRITERIO DELLE MAX TENSIONI DI RANKINE

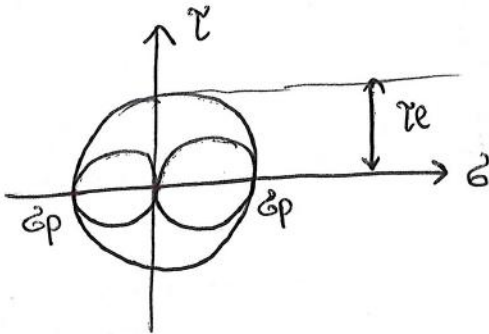
$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq |\sigma_p|$$



CUBO DI LATO $2\sigma_p$

Cubo rappresenta i limiti di resistenza, all'interno siamo in sicurezza

DIFETTO DEL CRITERIO



τ_e = tensione tangenziale massima che provoca rottura (limite)

$$\tau < \max(T_1, T_2, T_3)$$

CUBO NON E' LA FRONTIERA GIUSTA

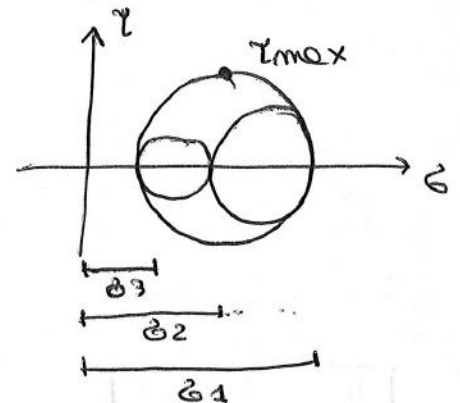
CRITERIO DI TRESCA O DELLA MAX TENSIONE TANGENZIALE

districi

Confronto τ con σ_p

MAX TENSIONI TANGENZIALI

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\}$$



STATO PIÙ PERICOLOSO È QUELLO GENERATO DAL CERCHIO PIÙ GRANDE PERCHÉ ABBIAMO τ_{max}

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3 \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

Il laboratorio ottiene σ_p con le prove monoassiali

FACCIO PROVA MONOASSIALE



2

$T_1^0 = 0$ per definizione

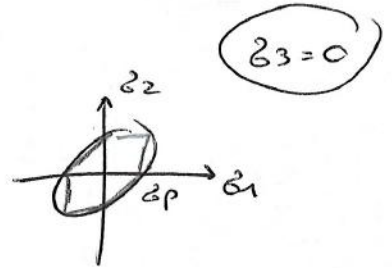
$$\phi^0 = \frac{1+\nu}{3E} \left\{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right\}$$

$$\phi^0_{\text{RODASSIALE}} = \frac{1+\nu}{3E} \{ \sigma_1^2 \} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_p^2 \quad \text{al punto di crisi } \sigma_p = \sigma_1$$

QUINDI

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) < \sigma_p^2$$

TENSIONE IDEALE



ELIPSE

Per Tensori non principale

$$(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \leq \sigma_p^2$$

TRESCA + RESTRITTIVO DI VON-MISES (più restrittivo)

CRITERIO DI COULOMB - YCHR

fragili

PARAMETRI FONDAMENTALI

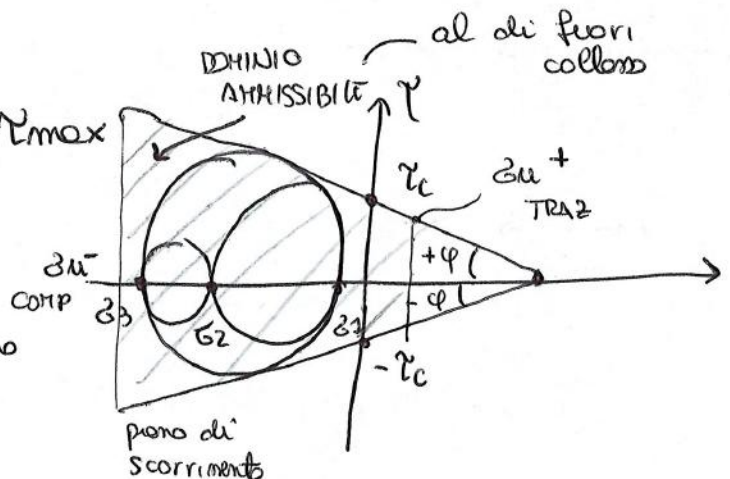
- ATTRITO INTERNO (capacità di opporsi agli sforzi crescente in presenza di compressione)
- COESIONE (capacità di resistere agli sforzi di trazione senza avere uno strato coattivo)

Rottura x raggiungimento della τ_{max}

$$\tau_{max} = \tau_c - \sigma \tan \varphi$$

\downarrow coesione \downarrow angolo di attrito interno

COASSO quando il cerchio tocca le rette



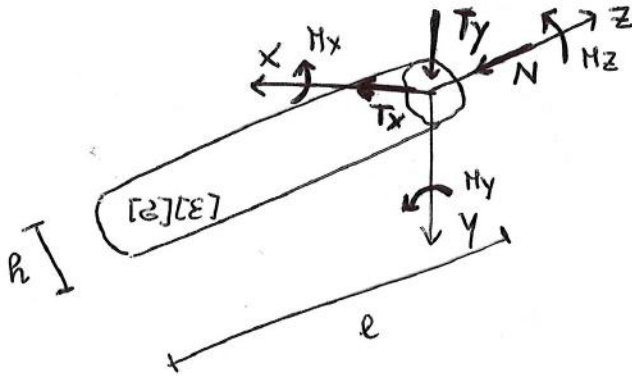
SOLIDO DI DE SAINT-VENANT

* Analizzare la risposta strutturale di un corpo soggetto a sollecitazioni esterne.

DATI: caratteristiche della sollecitazione

RICERCA: stato deformativo e tensionale interno

Il solido che schematizza bene il comportamento di una trave è dato dalla traslazione di una figura piana lungo l'asse z dove $l \gg h$ (SEZIONE SOTTILE)



IPOTESI

EQUAZIONI GOVERNANTI

- equazioni statiche

$$[\partial]^T \{\partial\} = -\{F\}$$

$$[N]^T \{\partial\} = \{p\}$$

- equazioni cinematiche

$$\{\epsilon\} = [\partial] \{m\}$$

$$\{m\} = \{m_0\}$$

- equazione costitutiva

$$\{\partial\} = [H] \cdot \{\epsilon\}$$

GEOMETRIA

- solido deve essere snello
- asse z è il luogo dei baricentri delle successive sezioni traslate
- assi x ed y sono centrali di inerzia e sono baricentrici
- $I_{xy} = 0$

MATERIALE

- elastico (NO TRASF. IRREVERSIBILI) $\rightarrow E =$ modulo di Young
- lineare $\rightarrow \nu =$ coef. di Poisson
- omogeneo
- isotropo $\rightarrow G = f(E, \nu)$ modulo di rigidezza al taglio

Se N è di compressione il solido si accorcerà e subirà una distorsione trasversale la quale può essere impedita con l'uso di cerchiature. Con l'uso di questi possono tensioni reali che comprimono la colonna \rightarrow STATO TENSIONALE BIASSIALE!

Strutture snelle non rispettano la Teoria di DSV \rightarrow ovvero svergolamento

VARIFICA CARICO CRITICO DI EULERO

$$N_c = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

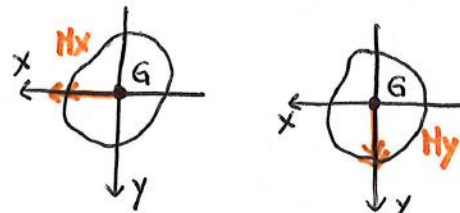
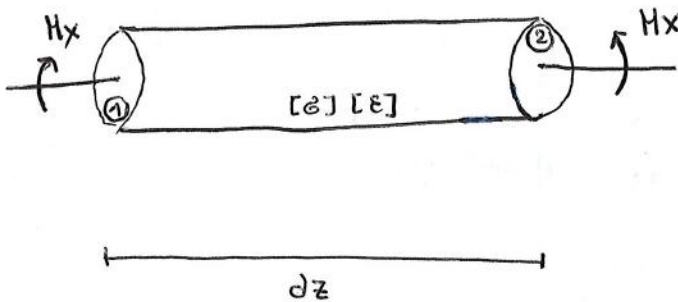
$$\lambda = \frac{l_0}{\rho} \quad \text{RAGGIO DI INERZIA}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

FLESSIONE RETTA

FLESSIONE $\left\{ \begin{array}{l} \text{RETTA} = \text{applicazione di una componente di momento attorno ad un asse centrale di inerzia } (x, y). \\ \text{DEVIATA} = \text{momenti non sono // agli assi centrali di inerzia.} \end{array} \right.$

• Equilibrio alla rotazione attorno a qualsiasi polo

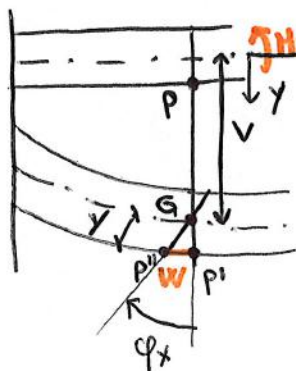


• Metodo semi-inverso

Ipotesi una soluzione cinematicamente ammissibile

IPOTESI DI BERNULLI - EULERO

Conservazione delle sezioni piane



Rotazione sezioni trasversali $\phi_x = -\frac{\partial V}{\partial z}$

Spostamento assiale $w_p = \phi_x \cdot y$

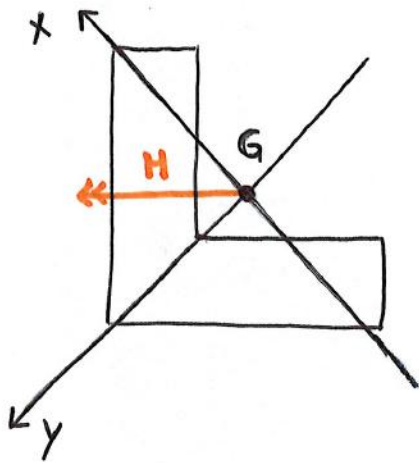
Deformazione assiale $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \phi_x}{\partial z} \cdot y$

Curvatura attorno ad x $\epsilon_z = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cdot y$ SOSTITUITO ϕ_x

(2)

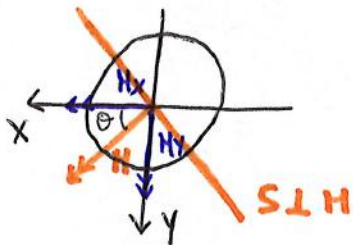
FLESSIONE DEVIATA

Momento non è // ad uno degli assi centrali di inerzia



y ASSE DI SIMMETRIA RETTA

M è deviato perché non giace me' su x e me' su y → scompongo H e trovo M_x ed M_y



$$M_x = H \cos \theta$$

$$M_y = H \sin \theta$$

PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

ASSE S

$$y = -\frac{1}{\tan \theta} x$$

ASSE m: luogo dei punti in cui non c'è tensione di Navier ($\sigma_z = 0$)

EQUAZIONE ASSE NEUTRO

$$\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

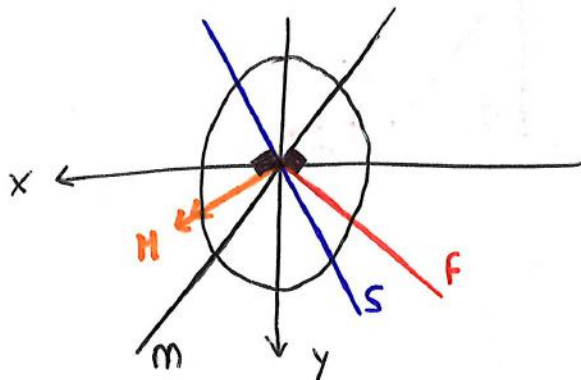
$$\frac{H \cos \theta}{I_x} y - \frac{H \sin \theta}{I_y} x = 0$$

$$\left[y = \frac{H \sin \theta}{I_y} x \cdot \frac{I_x}{H \cos \theta} = \tan \theta \cdot \frac{I_x}{I_y} x \right]$$

$$I_x = A \cdot \rho_x^2$$

$$I_y = A \cdot \rho_y^2$$

→ $f \perp m$ $S \text{ NO } \perp m$ $f \neq S$



APPLICO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$G_z = \frac{N}{A} + \frac{H_x}{I_x} y - \frac{H_y}{I_y} x$$

$$G_z = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_x} y + \frac{N e_x}{I_y} x$$

$$G_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{\Delta e_y}{I_x} y + \frac{\Delta e_x}{I_y} x \right)$$

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A} \quad \text{RAGGI DI INERZIA}$$

$$\rho_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

$$G_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} y + \frac{e_x}{\rho_y^2} x \right)$$

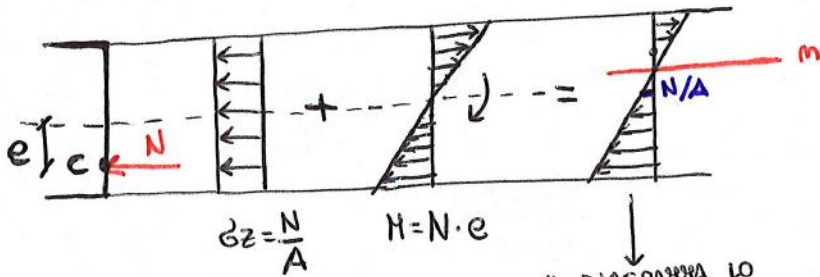
ASSE NEUTRO

$$G_z = 0 \rightarrow N/A = 0$$

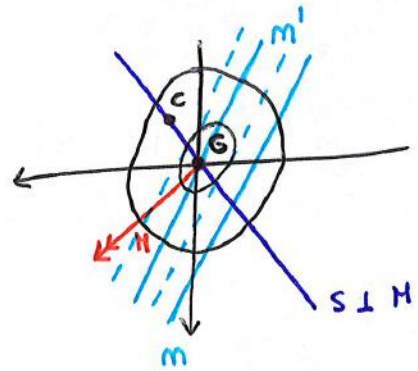
$$1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} y + \frac{e_x}{\rho_y^2} x = 0$$

NON PASSA PER G, dipende dalle coordinate di C e da ρ_x^2 e ρ_y^2

DIAGRAMMI DELLE TENSIONI



IL DIAGRAMMA LO TRACCIA PONENDO $G_z = 0$ SULL'ASSE NEUTRO E $G_z = N/A$ NEL BARICENTRO



m' ed s → DIREZIONI CONIUGATE

POSSIAMO AVERE PRESSOFLESSIONE RETTA

• $e_x = 0$ $N + H_x$ asse neutro // ad x

$$y_m = -\rho_x^2 / e_y$$

• $e_y = 0$ $N + H_y$ asse neutro // ad y

$$x_m = -\rho_y^2 / e_x$$

SFORZO NORMALE CENTRATO

• $e_x = e_y = 0$

FLESSIONE DEVIATA

• $e_x = e_y \rightarrow \infty$

Nel caso in cui c è esterno al nocciolo dovremo avere un materiale che reagisce a trazione ed a compressione \rightarrow se così non fosse abbiamo la PARZIALIZZAZIONE DELLA SEZIONE

PROBLEMA SE I MATERIALI NON REAGISCONO BENE A TRAZIONE (cls)
 \rightarrow è preferibile avere c all'interno del nocciolo, per questi materiali

LAVORO DI DEFORMAZIONE (SFORZO NORMALE ECCENTRICO)

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{H_x^2}{EJ_x} + \frac{H_y^2}{EJ_y} \right]$$

CLAPEYRON

$$dL = \frac{1}{2} N dz$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \rightarrow dL = \frac{1}{2} N \epsilon_z \cdot dz$$

$$\epsilon_z = \frac{N}{EA} \rightarrow dL = \frac{1}{2} N \cdot \frac{N}{EA} \cdot dz \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA}}$$

N, H_x, H_y sono energeticamente ortogonali, non abbiamo lavoro mutuo (vale quindi il principio di sovrapposizione anche per le energie)

$$\textcircled{*} dL = \frac{1}{2} H_x \cdot d\varphi_x$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \cdot y \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \cdot y = -x \cdot y \\ \rightarrow \partial \varphi_x = -x \cdot dz \end{array} \right.$$

$$\epsilon_z = -x \cdot y$$

$$d\varphi_x = \frac{H_x}{EJ_x} \cdot dz$$

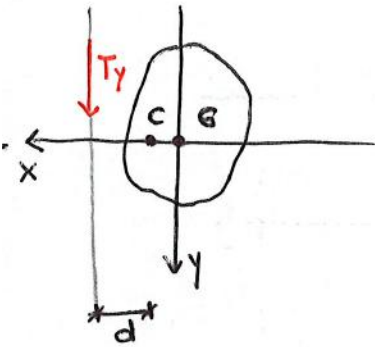
$$\rightarrow dL = \frac{1}{2} H_x \cdot \frac{H_x}{EJ_x} \cdot dz \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{H_x^2}{EJ_x}}$$

Quindi:

$$\varphi_z(T) = 0 \quad \eta_c(Mz) = 0$$

La sollecitazione composta di taglio e torsione equivale ad un'unica forza parallela al taglio con braccio $d = \frac{Mz}{T_y}$ rispetto a C

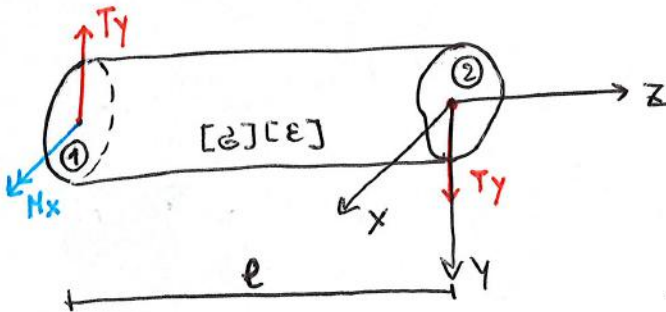


LA SOLLECITAZIONE DI TAGLIO È BASATA SULL'APPROSSIMAZIONE DELLE DISTRIBUZIONI DELLE TENSIONI TANGENZIALI

TAGLIO RETTO

$$T_y = \frac{dMz}{dz} \quad \text{dove il taglio si annulla ovunque il max momento}$$

Taglio retto quando agisce lungo un'asse centrale



- Abbiamo equilibrio alla traslazione
- Per equilibrio alla rotazione

$$M_x = -T_y \cdot l$$

TAGLIO COSTANTE E MOMENTO LINEARE

$N, M_x, M_y \rightarrow$ STATO TENSIONALE MONOASSIALE $[\sigma_z]$

$T_x, T_y, M_z \rightarrow$ STATO TENSIONALE BIASSIALE $[\tau_{zx}] [\sigma_z]$

CONDIZIONI DI EQUIVALENZA SULLE BASI

$$\int_{A_1} p \, dA = \int_{A_2} \{t_z\} \, dA = \begin{cases} \int_{A_1} \tau_{zx} \, dA = 0 \\ \int_{A_2} \tau_{zy} \, dA = T_y \\ \int_{A_3} \sigma_z \, dA = 0 \end{cases}$$

$$\int_{A_1} \{n\} \wedge \{t_z\} \, dA = 0 \rightarrow \text{eq. alla rotazione nelle basi}$$

$$\bar{\tau}_{sz} = \frac{T_y \cdot S_x^{A'}}{I_x \cdot b}$$

FORMULA DI
JURAWSKY
($\bar{\tau}_{sz} = \bar{\tau}_{zs}$)

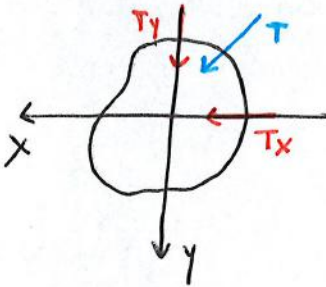
LAVORO DI DEFORMAZIONE

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} t_y \cdot \frac{T_y^2}{GA}$$

TAGLIO DEVIATO

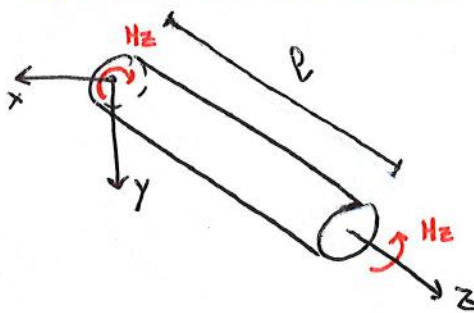
Se T non è // agli assi centrali di inerzia

↓
Genera flessione deviata



TORSIONE

• Travi a sezione circolare



IPOTESI DI PARTENZA

$$u = -\varphi z \cdot y$$

$$v = +\varphi z \cdot x$$

$$w = 0$$

$\varphi z > 0$ ANTICORARIO
ROTAZ.
INFINITESIMA

ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE

$$\Theta = \frac{d\varphi z}{dz} \quad \varphi z = \Theta z$$

fibre // a z subiscono una deformaz. elicoidale (l'asse z rimane indeformato).

STATO DI DEFORMAZIONE

$$u = -\Theta z \cdot y$$

$$v = \Theta z \cdot x$$

$$w = 0$$

→ dalle equazioni cinematiche

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{zx} = -\Theta y$$

$$\gamma_{zy} = \Theta x$$

CAMPO DEFORMATIVO E TENSIONALE

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{zx} = -\theta (y - y_c) + \theta \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{zy} = +\theta (x - x_c) + \theta \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = G\theta \left[\frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right]$$

$$\tau_{zy} = G\theta \left[\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right]$$

$$\theta = \frac{M_z}{G \cdot \underbrace{I_t}_{\text{FATTORE DI RIGIDEZZA TORSIONALE}}}$$

$$I_t \leq I_p$$

LAVORO DI DEFORMAZIONE

SEZIONE CIRCOLARE

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{G I_p}$$

SEZIONE QUALSIASI

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{G I_t}$$

TORSIONE NELLE SEZIONI SOTTILI APERTE

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{I_t} \cdot b$$

TORSIONE SEZ. SOTTILI COMPOSTA

APERTE

$$\tau_{max} = \frac{M_z^i}{I_t^i} b^i$$

TORSIONE SEZ. SOTTILI CURVILINEA

$$\tau_{zs}(s)_{max} = \frac{M_z}{I_t} \cdot b_{max}$$

APERTE

TORSIONE SEZ. SOTTILE CHIUSA

condizioni di sforzo più favorevoli delle sezioni aperte

$$\tau_{zs} = \frac{M_z}{b(s) 2 \Omega}$$

FORMULA DI BRENT

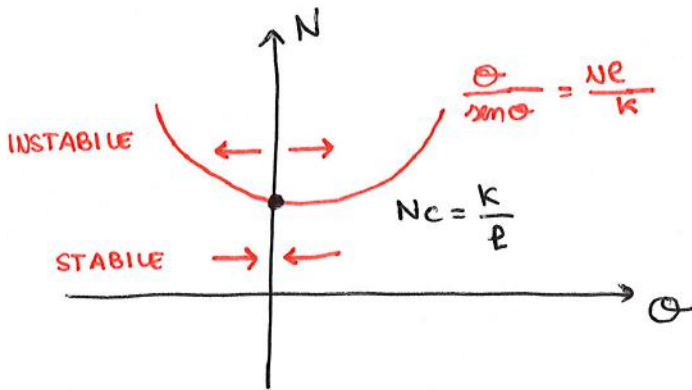
APERTE → τ prop. allo spessore

CHIUSE → τ non prop. allo spessore

$$\tau_{zs}^{max} = \frac{M_z}{b_{min} 2 \Omega}$$

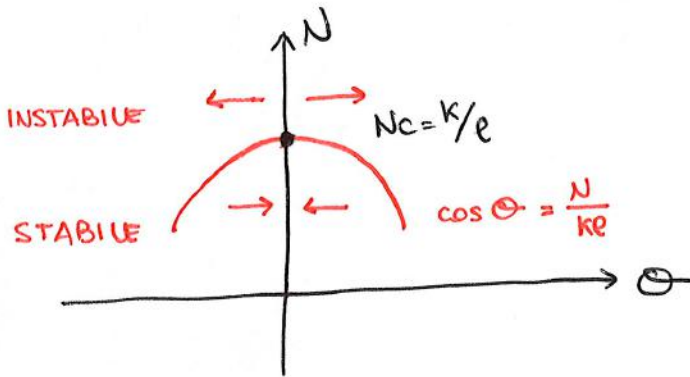
DIAGRAMMA CARICO ROTAZIONALE

- **DIAGRAMMA A CALICE**
(instabilità per diminuzione stabile)



La configurazione per cui $\Theta \neq 0$
è STABILE

- **DIAGRAMMA AD OMBRELLA**
(instabilità per diminuzione instabile)



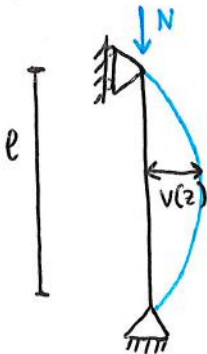
Più pericoloso del precedente
La configurazione per cui $\Theta \neq 0$
è INSTABILE

CARICO CRITICO DI EULERO

Anche per le travi compresse e deformabili oltre un certo valore del carico, detto CARICO CRITICO O DI EULERO, avremo instabilità della configurazione di equilibrio.

Instabilità dell'equilibrio → **SVERGOLAMENTO**

TRAVE DOPPIAMENTE APOGGATA



- Introduco una perturbazione infinitesima $v(z)$
- Scriviamo l'equilibrio nella configurazione deformata

$$M_i = N \cdot v$$

$$M_s = EI \chi = -EI v''$$

$$\chi = \text{CURVATURA} = \frac{1}{R} = \frac{1}{EI}$$

- Cerchiamo il carico critico

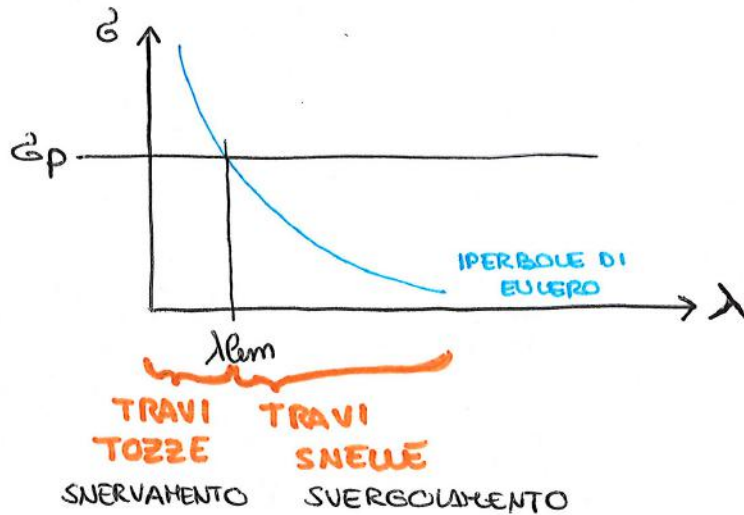
$$M_i = M_s \quad \text{EQ. INDIFFERENTE}$$

$$\chi = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$Nv = -EI v''$$



INTERAZIONE SNERVAMENTO - SVERGOLAMENTO

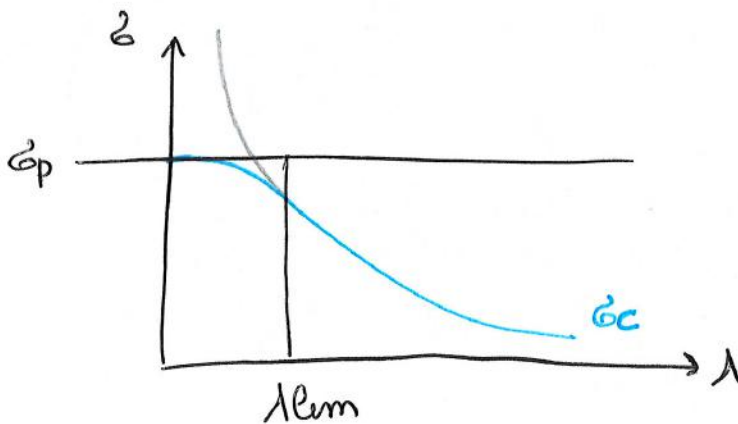


σ_p = TENSIONE DI SNERVAMENTO

λ_{lim} = snellezza limite

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

COMPORTAMENTO REALE



IPERBOLE DI EULERO

TIRANTE $N/A < \sigma_p$

PUNTO $w N/A < \sigma_p$

LAVORO DI DEFORMAZIONE

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(t_y \frac{T^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{\gamma^2}{EJ} \right)$$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA

Spostamenti dovuti a carichi assiali:

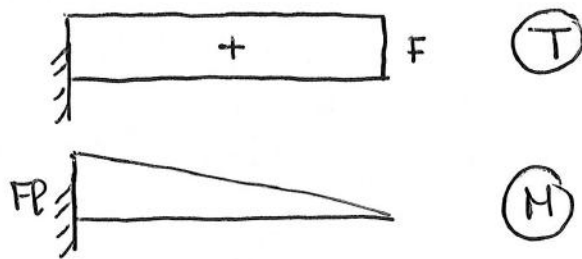
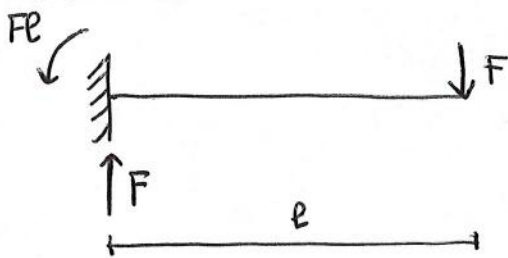
$$\frac{\partial N}{\partial z} = -P \quad \epsilon_z = \frac{N}{EA} \quad N = EA \epsilon_z$$

$$\frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = -\frac{P}{EA} \quad \epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -\frac{P}{EA}}$$

Spostamenti dovuti a carichi trasversali:

MENSOLA



$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \chi_x \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \varphi = \gamma_y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \chi_x &= \frac{M}{EJ_x} \\ \gamma_y &= t_y \frac{T}{GA} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \varphi = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\chi_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = \frac{q}{EJ_x}}$$

+ CONDIZIONI AL CONTORNO

$$M = -EJ_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad T = \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$\longleftarrow T = -EJ_x \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -q$$

$$-q = -EJ_x \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial z^4}$$