NUMERO: 1147

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Arcidiacono

MATERIA: Meccanica Razionale + Eserc.

Prof. Delitala

DOCENTE = Marcello Edoardo Delitala — 5 MARZO 2012

ESERCITATORE = Alfio Grillo → Mercoledì 11:30 - 13:00

ESAME = Scritto (1 o più domande di teoria + esercizi) + Orale (se si prende un voto > 24 si può fare) → Temi d'esame sul portale (ancora da caricare)

SCOPO = Metodi matematici per studiare e modellare dei sistemi meccanici

PROGRAMMA = Modelli differenziali alle ODE → eq. differenziali (Analisi I)

→ core meccanica razionale classica
- CINEMATICA
- VINCOLI
- GEOMETRIA DELLE MASSE

→ eq. cardinali
- MECCANICA LAGRANGIANA

} DINAMICA

CAPITOLO FONDAMENTALE DELLA FISICA che si preoccupa di rendere intelleggibile la realtà fisica attraverso un modello matematico.

MECCANICA
- CLASSICA (FISICA) → "poche" leggi e natura sperimentale
- RAZIONALE → forte componente matematica / deduttiva
- ANALITICA → + matematica
- RELATIVISTICA → alte velocità
- QUANTISTICA → elementi piccoli
- STATISTICA → alto numero di elementi
- CONTINUA → elementi deformabili
- ⋮

LIBRI = P. Biscari, T. Ruggeri, G. Saccomandi, M. Vianello "MECCANICA RAZIONALE PER L'INGEGNERIA". (Copertina Blu)

A. Muracchini, T. Ruggeri, L. Seccia "TEMI D'ESAME DI MECCANICA RAZIONALE"

F. Bampi, M. Benati, A. Moro "PROBLEMI DI MECCANICA RAZIONALE"

ESEMPIO DI MODELLO DI UNA POPOLAZIONE (Modello di Malthus)

$p = p(t)$ numero individui

$$\left[\frac{dp}{dt} = \underbrace{N \cdot p}_{\text{natalità}} - \underbrace{M \cdot p}_{\text{mortalità}} = Ap\right]$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int A \cdot dt \qquad p(t) = K \cdot e^{At}$$

K: det. in funzione della condizione iniziale

$$p(t) = p_0 e^{At}$$

ESTENSIONI

- Termine di competizione per le risorse disponibili

$$\left[\frac{dp}{dt} = Ap - \underbrace{B}_{\text{risorse disponibili nell'ambiente}} p^{\overset{\text{competizione}}{2}}\right]$$

(Modello Logistico)

- Più popolazioni

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = Ap_1 + Bp_1 \cdot p_2 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = C \cdot p_2 + Dp_2 \cdot p_1 \end{cases}$$

competizione tra le specie

(Modello di Lotka - Volterra)

$A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Le eq. lineari sono nella forma $a_0 x^n + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = g(t)$

x^n = derivata ennesima

Se $g(t) = 0$ l'equazione è omogenea

Con i coef. "a" al massimo dipendente da "t".

ES

- $\frac{dx}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + x^2 = \operatorname{sen} t$ → indipendente da x (non omogeneità)

non lineare perché x moltiplicato alla sua derivata

x^2 non è lineare perché c'è x^2 moltiplicato per x

Questa è una eq. alle derivate ordinarie del 2° ordine, non omogenea, non lineare

- $\underbrace{\frac{d^3x}{dt^3} + 2t \frac{dx}{dt}}_{\text{lineare perché non dipende dalle } x} + t^2 x = 0$ → lineare perché x è al 1° ordine

c'è omogeneità

Questa è una eq. alle derivate ordinarie del 3° ordine, omogenea, lineare

- L'equazione $\frac{d^2x}{dt^2} = G(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$ si può scrivere come un sistema di n equazioni del primo ordine

Chiamo $u_1 = x$

$$u_2 = \frac{dx}{dt} \qquad \frac{du_1}{dt} = u_2 \qquad \frac{du_2}{dt} = u_3$$

$$u_n = \frac{d^{(n-1)}x}{dt^{(n-1)}} \qquad \frac{du_n}{dt} = G(t, u_1, u_2, \dots u_n)$$

- $F = m \cdot a = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{F}{m} \\ \frac{dx}{dt} = V \end{cases}$$

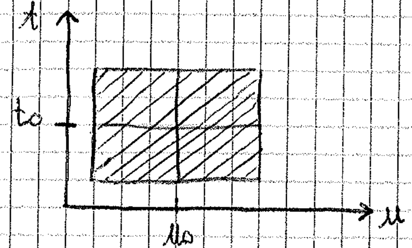
- ESISTENZA

Se il campo f è continuo in un rettangolo

$R = \{ (t, u) : \|u - u_0\| \leq K \quad \|t - t_0\| \leq T \}$

esiste almeno una soluzione

per $\|t - t_0\| \leq \hat{T}$



per $\|t - t_0\| \leq \hat{T}$

$M = \max_{(t, u) \in R} |f(t, u)|$

- UNICITÀ

Se f soddisfa determinate condizioni di regolarità la soluzione è unica e

$\|u(t) - u_0\| = M\hat{T}$

(*) Ad esempio f è differenziabile allora le condizione di regolarità sono soddisfatte
ci basta che tutte le derivate delle componenti siano continue

- DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE

Se f è continua e soddisfa la condizione (*), allora abbiamo che

$\|\hat{u}(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \|\hat{u}_0(t) - \tilde{u}_0(t)\| e^{L|t - t_0|}$

L è una costante dipendente da f.

EQ. LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$x'(t) + a(t)x(t) = g(t)$

possono capitare fenomeni di non unicità della soluzione.
esistenza non globale (tempo di esistenza non infinito).

Nel caso non lineare è + difficile avere la soluzione analitica a meno di non ricadere in casi particolari

$$x'(t) = f(x(t))g(t)$$

posso trovare la soluzione per separazione delle variabili

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t))\,g(t)$$

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)\,dt$$

Modello logistico di dinamica delle popolazioni

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

L'equazione si separa:

$$L\frac{dx}{x(L-x)} = k\,dt$$

Integrando

$$\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x}\right)dx = kt + \text{cost}$$

$$\ln x - \ln(L-x) = kt + \text{cost}$$

$$\ln\left(\frac{x}{L-x}\right) = kt + \text{cost}$$

$$\frac{x}{L-x} = e^{kt + \text{cost}} = ce^{kt}$$

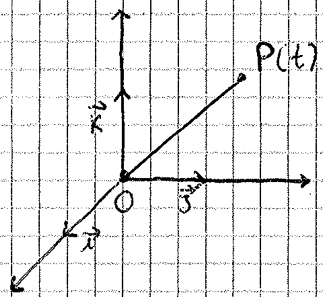
$$x = (\text{cost} \cdot L \cdot e^{kt}) : (1 + ce^{kt})$$

12 MARZO 2010

CINEMATICA

Problema cinematico: descrizione in termini matematici di un generico punto P di un sistema. Presuppone la definizione di un sistema di riferimento (SR).

Definizione delle posizioni occupate dal punto:
- leggi orarie: relazione tra coordinate del punto nel tempo
- traiettoria: luogo geometrico dei punti occupati dal punto materiale nel suo moto
- velocità ed accelerazione del punto



SR → 3 versori ortonormali $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$OP = OP(t)$ detto vettore posizione

$OP(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

L'insieme dei punti che sono occupati da P è la traiettoria o orbita del moto

- La velocità di P

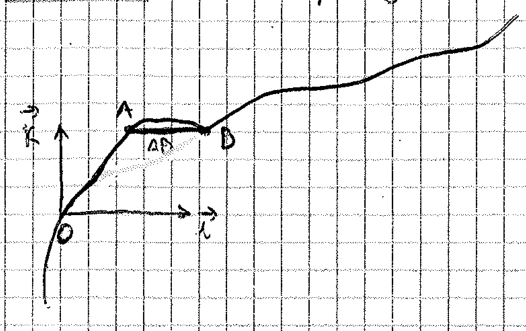
$$V_P(t) = \dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

- L'accelerazione di P

$$a_P(t) = \ddot{P}(t) = \frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$$

- Lo spostamento infinitesimo (nell'unità di tempo)

$$dP = \vec{V}dt = (\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k})dt$$



$AB = OB - OA$

$$\frac{d(AB)}{dt} = \frac{d(OB)}{dt} - \frac{d(OA)}{dt} = \overline{V_B} - \overline{V_A}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 186

La derivata di t è legata alla rapidità con cui cambia direzione la tangente da cui:

$$c = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|$$ è detto CURVATURA ×

e il versore $\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{1}{c}$ è detto NORMALE PRINCIPALE (ortogonale a $\vec{t}$)

Definendo un terzo vettore prodotto esterno di $\vec{t}$ ed $\vec{n}$ detto BINORMALE (o ORTOGONALE AI PRECEDENTI) è definita la terna intrinseca che è un sistema di riferimento associato alla curva del moto

$$\downarrow$$

$$\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\} \times$$

PROP. velocità ed accelerazioni della terna intrinseca

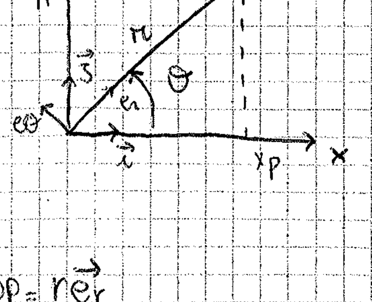
$$\underline{V} = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \vec{t}$$

l'accelerazione è $\underline{a} = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\dot{s} \cdot \vec{t})}{dt} = \ddot{s}\,\vec{t} + \dot{s}\,\underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds}}_{= c \cdot \vec{n}} \cdot \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \cdot \vec{t} + c\,\dot{s}^2\,\vec{n}$

MOTO PIANO IN COORDINATE POLARI

Il moto è piano se la traiettoria è una curva piana

Introducendo le coordinate polari (r, θ)



$OP = r\cos\theta\,\vec{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}$

$e_\theta = -\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$ ×

$\theta \to \theta + \frac{\pi}{2}$

$e_r = \cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}$ ×

$OP = r\vec{e_r}$ VERSORI MOBILI $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{sen}\,\theta$

$\mathrm{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$$\underline{V} = \frac{dOP}{dt} = \frac{d(r\vec{e_r})}{dt} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\vec{e_r}}$$

$$\dot{\vec{e_r}} = (-\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\,e_\theta$$

(2) Questo equivale ad affermare che $e_k(t) = R(t)\vec{i}_k$ dove R è una trasformazione ortogonale ovvero $R^T R = R R^T = \underset{\mathbb{1}}{\underset{\uparrow}{I}}$ $\det R = 1$

$QP(t) = P(t) - Q(t) = OP - OQ$

Dunque da (1) $p(t) = Q(t) + y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3} = Q(t) + \sum_{i=1}^{3} y_k e_k$

$\overset{(2)}{=} Q(t) + R(t) \underbrace{\sum_k y_k \vec{i}_k}_{\text{quantità costante nel tempo}}$

$P(t) = \underbrace{Q(t)}_{\text{origine del SR solidale}} + \underbrace{R(t)}_{\text{matrice di rotazione}} \tilde{p}$ → "tilde" (3)

↳ vettore costante che segna la posizione del generico punto del corpo rispetto all' origine fisso

R è una matrice di rotazione → abbiamo solo 3 quantità arbitrarie da determ. per definire l'orientazione del sistema di riferimento mobile rispetto al fisso

Tra le diverse parametrizzazioni una è quella degli angoli di Eulero. Un' altra è quella degli angoli di Cardano.

La scelta è dettata da questioni di comodità in funzione dell' applicazione

ANGOLI DI EULERO

Quando il rapporto $\vec{i_3} \wedge \vec{e_3} \neq 0$ si può individuare il versore

$$\vec{m} = \frac{\vec{i}_3 \wedge \vec{e_3}}{|\vec{i_3} \wedge \vec{e_3}|}$$

angolo di precessione ψ
angolo di nutazione θ
angolo di rotazione propria ϕ

Al di là dei dettagli si può dimostrare che vi è una corrispondenza (localmente biunivoca) tra i valori dell' angolo di Eulero e gli orientamenti del e in generale si può mostrare che un qualunque vettore $\mathbf{w}$ solidale al CR

$$\dot{\vec{w}} = \vec{\omega} \wedge \vec{w} \qquad (4)$$

Dalle formule di Poisson si può ricavare la legge di distribuzione delle velocità di 1 CR per cui la condizione necessaria e suff. affinché un sistema sia rigido è che:

$$\times \quad V_P(t) = \vec{V}_Q(t) + \vec{\omega}(t) \wedge QP \qquad \forall P, Q$$

dove P e Q sono punti solidali al CR

Questa relazione ci permette di ricavare la velocità di un punto in funzione di quella di un altro punto conoscendo la velocità angolare

DIM.

Necessità: scegliendo in (4)

$$W = QP = OP - OQ$$

$$\dot{W} = \frac{dQP}{dt} = \frac{dOP}{dt} - \frac{dOQ}{dt} = V_P - V_Q$$

la (4) $\quad \dot{w} = \omega \wedge w$

$$\dot{QP} = V_P - V_Q = \omega \wedge \vec{QP}$$

$$\boxed{V_P = V_Q + \omega \wedge \vec{QP}}$$

Per la sufficienza verifico la rigidità del moto valutando la distanza e quindi valuto come varia la distanza $\frac{d(QP)^2}{dt} = 2\frac{dQP}{dt} \cdot QP = 2(V_P - V_Q) \cdot \vec{QP}$

$$= 2(\omega \wedge \vec{QP}) \cdot \vec{QP} = 2\, \omega \cdot (\vec{QP} \wedge \vec{QP})^{0}$$

$= 0 \rightarrow$ quindi la dist tra due punti generici P e Q non cambia $\rightarrow$ il moto è rigido

Analogo discorso si fa x le accelerazioni ottenendo la LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLE ACCELERAZIONI ci dice che:

nel piano e_2 ed e_3 ortogonale a e_1. coerentemente alle (5c)

$$\dot{e}_1 = \frac{2\dot{e}_1}{2} = \frac{1}{2}(\dot{e}_1 + \underset{\uparrow (6)}{\dot{e}_1}) = \frac{1}{2}\left[\dot{e}_1 - (\dot{e}_2 \wedge e_1)e_2 - (e_1 \cdot \dot{e}_3)\cdot e_1\right] \quad (7)$$

Lavoriamo su questi 3 termini e otteniamo

1) $\dot{e}_1 = \underbrace{(e_1 \cdot e_1)}_{=1 \text{ per la } (5b)} \dot{e}_1 \overset{(5d)}{=} (e_1 \wedge \dot{e}_1) \wedge e_1 + \underbrace{(e_1 \cdot \dot{e}_1)}_{=0 \text{ per la } (5c)} \cdot e_1$

$\dot{e}_1 = (e_1 \wedge \dot{e}_1) \wedge e_1 \underset{(5d)}{=} -(\dot{e}_2 \cdot e_1)\cdot e_2 = (e_2 \wedge \dot{e}_2) \wedge e_1 - \underbrace{(e_2 \cdot \cancel{e_1})}_{=0 \text{ per } (5b)} \dot{e}_2 =$

$= (e_2 \wedge \dot{e}_2) \wedge e_1 = -(e_1 \cdot \dot{e}_3)e_3 = -(\dot{e}_3 \cdot e_1)e_3 = (e_3 \wedge \dot{e}_3) \wedge e_1 - \underbrace{(e_3 \cdot \cancel{e_1})}_{=0 \text{ per la } (5b)} \dot{e}_3 =$

$= (e_3 \wedge \dot{e}_3) \wedge e_1$

SOSTITUENDO IN (7) ritroviamo la formula di Poisson

- Altra via per la dimostrazione della formula fondamentale

Avevamo visto x le coordinate

$P(t) = Q(t) + \underset{\uparrow R(t)}{R}\, \tilde{p}$ ← costante

$QP = R\tilde{p}$

derivando

$V_P(t) = V_Q(t) + \dot{R}\tilde{p}$

$\tilde{p} = R^{-1} \cdot QP = R^T \cdot QP$

↑ R è una rotazione

$RR^{-1} = RR^T = 1$

matrice antisimmetrica (si può mostrare che $W = -W$

$W = \dot{R} R^T$)

$V_P(t) = V_Q(t) + \underbrace{\dot{R} \cdot R^T}_{} \cdot QP$

Viceversa se $\omega = 0 \Rightarrow \dot{e}_k = \omega \wedge e_k = 0$

Quindi la matrice di rotazione che trasforma la terna fissa in solidale è la matrice identità $\mathbb{R} = I \to \mathbb{1}$ ed $e_k = i_k \ \forall t$

e questo mi implica che bastano 3 parametri per fissare la posizione di tutti i punti del sistema (le coordinate variabili del tempo, dell'origine $Q(t)$ del sist. di riferimento mobile).

Essendo $\omega = 0$

$\vec{V}_P(t) = \vec{V}_Q(t)$

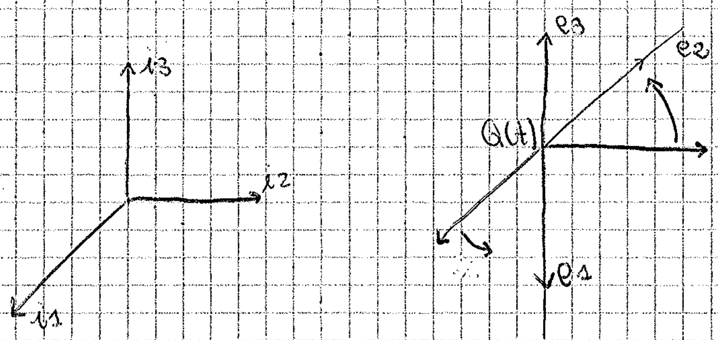
$\vec{a}_P(t) = \vec{a}_Q(t)$

$\leftarrow$ dalle leggi delle velocità ed accelerazione abbiamo che nel moto traslatorio

$\downarrow$

Tutti i punti hanno la stessa velocità ma in generale questa può essere differente da istante a istante a meno che il moto non sia uniforme e rettilineo

- MOTO ROTO TRASLATORIO



in cui esiste un orientamento solidale al corpo che si mantiene costante rispetto all'osservatore fisso e la direzione costante è quella di ω

$\hookrightarrow \omega$ costante

Se scegliamo $i_3 = e_3$ parallelo alla direzione costante

$$\dot{e}_3 = \omega \wedge e_3 = 0 \quad \Rightarrow \omega \text{ è } // \text{ a } e_3$$

Ovviamente il moto traslatorio è un caso particolare del moto roto traslatorio in cui non solo un versore solidale ma tutti si mantengono costanti

Di quanti parametri ho bisogno?

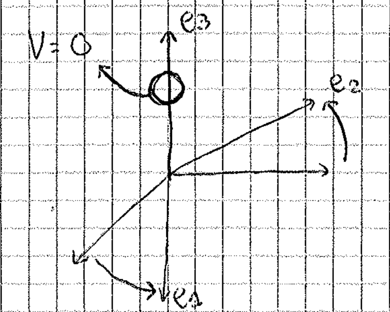
La terna mobile ~~traslazionalmente mobile~~ quando conosco l'angolo di rotazione

Mi bastano 2 parametri infatti le coordinate x_Q, y_Q sono costanti e devo conoscere la x_{Q3} cioè la z_Q e l'angolo Θ.

$$\{z_Q, \Theta\}$$

- MOTO ROTATORIO

in cui una retta detta ASSE DI ROTAZIONE // alla direzione privilegiata indicata da $\vec{i_3}$ tale che i suoi punti hanno velocità nulla



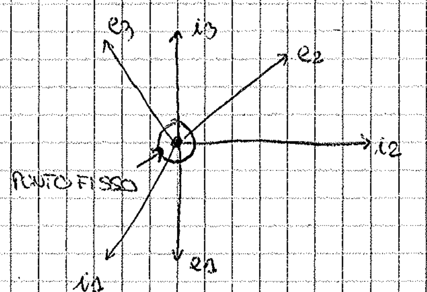
Basta un parametro per descrivere il moto rotatorio

$$V_P = V_Q + \dot{\Theta}\, i_3 \wedge PP^*$$

$V_Q \Rightarrow 0$; P^*: proiez. di P sull'asse di rotazione

- MOTO POLARE

Se uno dei punti solidali con il corpo rigido rimane fisso



La rotazione avviene attorno all'ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE (cambia nel tempo a diff. dell'asse di rotazione, per questo è detto istantaneo)
→ direz. variabile nel tempo

Ho bisogno di 3 parametri (ad es. i 3 angoli di Eulero) per definire il moto polare (infatti l'origine del SR mobile è nota supponendo che sia il punto fisso del m. polare

22 MARZO 2012

ATTI DI MOTO

In cui con un approccio Euleriano si considera a tempo fissato il campo delle velocità (fotografia che "congela" il sistema).

DEF: Atto di moto traslatorio in cui tutti i punti hanno la stessa velocità.

DEF: Atto di moto rototraslatorio se esiste una direzione privilegiata in cui tutti i punti hanno velocità uguale o hanno stessa velocità. (Tale retta mantiene direzione invariata → direzione della velocità angolare ω per atti di moto rigido).

DEF: Atto di moto elicoidale se esiste una direzione privilegiata i cui punti hanno velocità parallela a tale direzione.

DEF: Atto di moto rotatorio se esiste la retta parallela alla direzione privilegiata con punti a velocità nulla.

INVARIANTE SCALARE CINEMATICA DA QUI RIASSUNTI

$$\underline{I = \vec{V}(P) \cdot \vec{\omega}}$$

che è indipendente dal punto P scelto per calcolare infatti

$$\underline{V(P) = V(Q) + \omega \wedge QP} \quad \text{LEGGE VELOCITÀ}$$

moltiplico scalarmente per ω

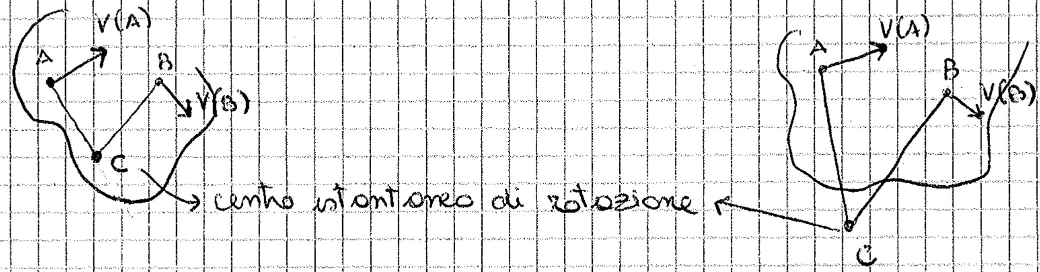
$$V(P) \cdot \omega = V(Q)\, \omega + \underbrace{\omega \wedge QP \cdot \omega}_{=0}$$

quindi è INVARIANTE e la componente lungo ω della velocità è uguale per tutti i punti.

- Se abbiamo $\underline{\omega = 0} \rightarrow \underline{I = 0}$ e $V(P) = V(Q) \Rightarrow$ atto di moto rigido traslatorio (punti con = velocità)
- Se abbiamo $\underline{\omega \neq 0} \rightarrow$ se considero un atto di moto rototraslatorio si può definire l' **ASSE DI MOZZI** come l'insieme dei punti $QH = \dfrac{\omega \wedge V(Q)}{\omega^2} + \lambda \omega$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Ne segue che un sistema in moto rigido piano ha atto di moto o traslatorio ($\omega = 0$) o rotatorio ($\omega \neq 0$ e $I = 0$)

Nel caso rotatorio l'intersezione tra il piano direttore del moto e l'asse istantaneo di rotazione è detto <u>centro istantaneo di rotazione</u> che si può determinare grazie al <u>TEOREMA DI CHASLES</u> tracciando la normale alla traiettoria di un qualsiasi punto del sistema e trovando l'intersezione



<u>CINEMATICA RELATIVA</u>

<u>Studiare come cambiano velocità, accelerazione e velocità angolari in funzione della scelta di osservatori diversi.</u>

- Supponiamo che distanze e tempi siano quantità invarianti (MECCANICA CLASSICA) e studiamo queste leggi in funzione di osservatori <u>FISSI</u> e <u>MOBILI</u> (DISTINZIONE FORMALE)
- Il corpo rigido è in movimento sia rispetto al SR <u>fisso</u> (osservatore fisso o assoluto) che rispetto <u>al SR mobile o relativo</u> e la terna a cui è solidale è
- Come cambia la <u>derivata di un vettore rispetto ai due osservatori</u>

$$\dot{C} = C' + \omega \wedge C$$

$\dot{C}$: derivata rispetto ad un osservatore fisso

C': derivata rispetto ad un osservatore mobile

C: vettore generico

Infatti $C = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$ con $\{e_1, e_2, e_3\}$ Terna mobile

$$\dot{C} = \dot{c}_1 e_1 + \dot{c}_2 e_2 + \dot{c}_3 e_3 + c_1 \dot{e}_1 + c_2 \dot{e}_2 + c_3 \dot{e}_3$$

$$= \underbrace{\boxed{\dot{c}_1 e_1 + \dot{c}_2 e_2 + \dot{c}_3 e_3}}_{C'} + \omega \wedge c_1 e_1 + \omega \wedge c_2 e_2 + \omega \wedge c_3 e_3$$

FORMULE DI POISSON $\dot{e}_m = \omega \wedge e_m$

$\Rightarrow V_a = \underbrace{V_Q + V_R + \omega \wedge QP}_{\to V_t}$

$$\boxed{V_a = V_t + V_R}$$

- Legge per le accelerazioni → <u>TEOREMA DI CORIOLIS</u> in cui:

$$\boxed{a_A = a_R + a_T + a_C} \; *$$

a_R = accel. relativa del corpo rispetto all'osservatore mobile

* $a_T = a_Q + \dot{\omega} \wedge QP + \omega \wedge (\omega \wedge QP)$ è l'accel. di trascinamento che è quella che P avrebbe se fosse trascinato rigidamente alla terna mobile

↑ accel. nell'origine (SR mobile)

* a_C = accelerazione di Coriolis = $2\omega \wedge V_R$
<u>o complementare</u>

- Se SR mobile è traslante ($\omega = \dot{\omega} = 0$) $a_T = a_Q$ e $a_C = 0$

* → $\boxed{a_A = a_R + a_Q}$ → <u>TEOREMA DI RIVALS</u>

- Se SR mobile è in moto rettilineo uniforme ($a_Q = 0$) allora i due osservatori misurano le stesse accelerazioni $\boxed{V_A = V_R + V_T \text{ e } a_A = a_R}$ → <u>TRASFORMAZIONI DI GALILEO</u>

DIM: $V_A = V_R + V_Q + \omega \wedge QP$

deriviamo rispetto al tempo

$a_A = a_Q + \dot{\omega} \wedge QP + \omega \wedge \dot{QP} + \dot{V_R}$

↑ sto derivando rispetto all'osservatore fisso

$a_A = a_Q + \dot{\omega} \wedge QP + \omega \wedge (\underbrace{QP'}_{\text{derivo ottengo } V_R} + \omega \wedge QP) + \underbrace{V_R'}_{} + \omega \wedge V_R$

derivato rispetto all'osservatore mobile → quindi = a_R

Sottraendo

$$V_{P,A} - V_{P,T} = V_{H,A} - V_{H,R} + (\omega_A - \omega_R) \wedge HP$$

E sostituendo $V_{H,A}$

$$\omega \wedge QP = \omega \wedge QH - (\omega_R - \omega_A) \wedge HP$$

$$\longrightarrow \omega \wedge \underbrace{(QP - QH)}_{= HP} + (\omega_R - \omega_A) \wedge HP = 0$$

$$(\omega + \omega_R - \omega_A) \wedge HP = 0$$

Deve valere per generici punti H e P $\Rightarrow$ $\boxed{\omega + \omega_R - \omega_A = 0}$ ⊛

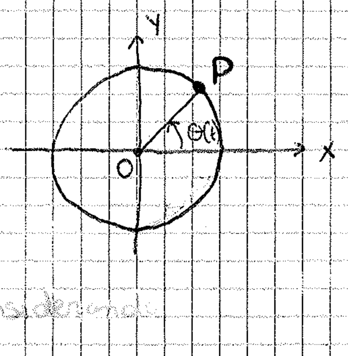
26 MARZO 2012

SISTEMI VINCOLATI

Consideriamo un punto o un corpo rigido soggetto a vincoli da intendersi come restrizioni a priori sulle configurazioni del sistema.

• VINCOLI DI POSIZIONE: restrizioni a priori imposte alla posizione dei punti

ES| Punto su guida fissa (es. biglia)



$z = 0$

$x^2 + y^2 = R^2$ $\longrightarrow$ eq. circonferenza

Il vincolo si traduce in relazioni matematiche consider. coordinate polari

$$OP(t) = R\cos\theta(t)\vec{i} + R\,\text{sen}\,\theta(t)\vec{j}$$

Un punto libero nello spazio necessita di 3 parametri (3 coordinate) per essere descritto (descrivere il suo moto).

Il vincolo ha ridotto ad uno il numero di parametri necessari

θ PARAMETRO LIBERO

che può essere variato arbitrariamente per ottenere le configurazioni del sistema

Un atto di moto compatibile con i vincoli nell'istante considerato (fotografia del sist) è detto VIRTUALE.
Analogamente si definiscono VELOCITÀ VIRTUALI quelle compatibili con i vincoli ad un determinato istante (che non necessariamente corrispondono alle velocità effettive).

Si possono definire naturalmente gli SPOSTAMENTI VIRTUALI che non necessariamente coincidono con gli spostamenti effettivi.

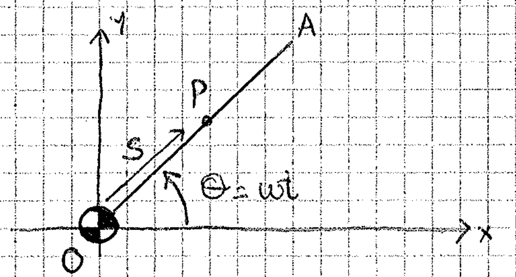
$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2}\delta q_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial P}{\partial q_k}\delta q_k$$

δP: spostamento virtuale (compatibile con il vincolo)

$$\left(v = \frac{ds}{dt} \qquad ds = v\,dt \right)$$

ds: spostamento effettivo

ES] Punto vincolato su guida mobile



Asta in moto rotatorio uniforme con velocità angolare costante

La posizione di P sulla guida è determinata dalla coordinata libera s.
Il vincolo è mobile e compare esplicitamente il tempo

$$OP(s, t) = s \cdot \cos(\omega t)\vec{i} + s\,\mathrm{sen}(\omega t)\vec{j}$$

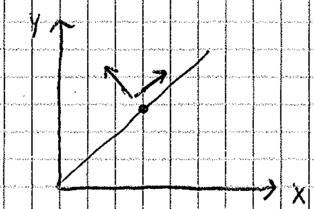
t: xK compare esplicitamente il tempo ≠ differenza dell'esempio precedente

Consideriamo le velocità virtuali queste sono tutte // alla guida (congelo il sistema → il vincolo diventa fisso)
Mentre le velocità effettive (guida che ruota) hanno anche una componente perpendicolare
→ tra le ∞ velocità virtuali non troviamo quelle effettive (in questo caso)

$$V_P = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial s}\dot{s} + \boxed{\frac{\partial P}{\partial t}}$$

VELOCITÀ EFFETTIVA

xK il vincolo è mobile e si annulla considerando velocità virtuali (si congela il s)



Spostamenti effettivi avranno componente velocità ⊥ alle guide e concorde alla sua rotazione → IRREVERSIBILE

[VINCOLI] → BILATERALI → equazione
→ UNILATERALI → disequazione

→ FISSI
→ MOBILI → dipendenza esplicita dal tempo

→ POSIZIONALI → equazioni in cui non compaiono le velocità
→ NON POSIZIONALI → equazioni in cui compaiono le velocità

→ SEMPLICI
→ DOPPI/TRIPLI
} quante equazioni per descrivere il vincolo (quanti gradi di libertà vengono tolti al sistema)

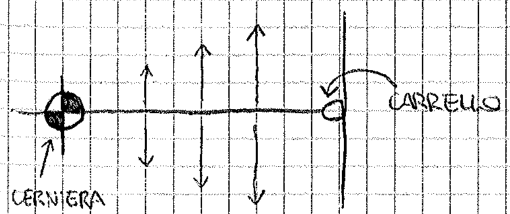
29 MARZO 2012

VELOCITÀ VIRTUALE

Velocità compatibile con vincoli ad un istante fissato

SPOSTAMENTI VIRTUALI

IN LINEA DI principio diverso dagli spostamenti effettivi



Le velocità virtuali ⊥ all'asta sono compatibili con i vincoli ma non hanno nulla a che vedere con le velocità effettive infatti il sistema non si può muovere

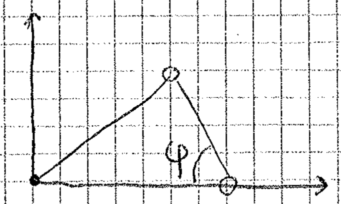
Nel caso di un corpo rigido si può usare la formula fondamentale delle velocità

$$dP = dQ + \underbrace{\omega dt}_{\text{VETTORE DI ROTAZIONE INFINITESIMA}} \wedge QP \qquad \text{spostamenti effettivi}$$

$$dP = dQ + \omega' dt \wedge QP \qquad \text{spostamenti virtuali}$$

SCELTA 2

La scelta non è univoca ma ci sono scelte migliori di altre



se sposto il carrello l'angolo $\varphi \in [0, 2\pi]$ cambia

PARAMETRIZZAZ. GLOBALE

- Avevamo visto come assegnate le $q_k(t)$ ovvero il moto del sistema la velocità di un generico punto

$$V_P = \frac{dP}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial P}{\partial t}$$

SPOSTAMENTO EFFETTIVO

$$dP = V_P\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P}{\partial t}dt$$

SPOSTAMENTI VIRTUALI

$$\delta P = V_P'\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial q_k} \delta q_k$$

Andando a valutare la reversibilità degli spostamenti virtuali distinguiamo tra vincoli bilaterali e unilaterali

I vincoli impongono un legame tra le coordinate $(q_1, q_2 \dots q_n)$ che individuano la posizione del sistema → ovvero q_k non sono liberi di assumere qualsiasi valore (restrizione alle possibilità di moto).

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n; t) = 0$$

- Un vincolo bilatero che sia traducibile matematicamente in una relazione di questo tipo è detto **OLONOMO**.

Le coordinate libere necessarie a scrivere il sistema saranno ridotte da tale vincolo

- Se invece consideriamo un vincolo unilatero allora questo si esprime in forma di disequazione

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \gtreqless 0$$

GRADI DI LIBERTÀ (3)

Se i vincoli sono tutti olonomi cioè bilaterali e di posizione allora il numero di gradi di libertà è uguale al numero di coordinate libere.

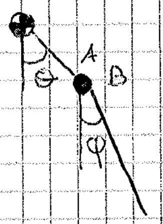
Infatti per assegnare posizione e atto di moto dobbiamo conoscere tutte le q_k e le velocità $\dot{q}_k$ e nel caso di vincoli olonomi possono essere assegnate arbitrariamente o liberamente (vincolo solo sulle posizioni)

- Se invece considero "m" vincoli di pura mobilità allora le velocità assegnate in modo arbitrario saranno ridotte ad $N-m$ (num. coord. libere) $\rightarrow$ i gradi di libertà sono pari al numero di spostamenti virtuali indipendenti ammissibili in una generica configuraz.

Praticamente se lavoriamo con vincoli bilaterali e di posizione (olonomi) e considero un sistema composto da più corpi rigidi il numero di gradi di libertà (che è uguale al numero di coordinate libere necessarie a descrivere il sistema lo ottengo sommando i G.d.L di ogni parte rigida (3 G.d.L nel piano e 6 nello spazio) e sottraendo il numero di vincoli semplici/doppi interni ed esterni al sistema

ES.

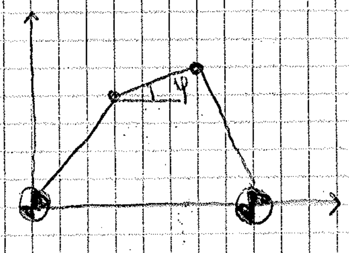
doppio $\begin{cases} x_o = 0 \\ y_o = 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$

$$\underbrace{\overset{\text{ASTE}}{3+3}}_{\text{liberi}}-2-2=2 \text{ G.d.L}$$

che sono anche il numero di coordinate libere (θ e φ)



$$\underbrace{3+3+3}_{\text{liberi}}-(2+2+2+2)=1 \text{ G.d.L } (\varphi)$$

- Sistemi continui

$$OG = \frac{\int_C \rho \, OP \, d\tau}{\int_C \rho \, d\tau} \quad * \text{ integrali doppi e tripli}$$

$\int_C \rho \, d\tau \rightarrow$ massa totale

OSS il baricentro dipende esclusivamente dalle posizioni dei punti del sistema e non dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento.
Infatti supponiamo per assurdo che cambiando origine del sistema di riferimento in O' cambi il baricentro in G'

$$mGG' = m(GO + OO' + O'G')$$
$$= m(OO' + O'G' - OG)$$
$$= mOO' + \sum_i m_i O'P_i - \sum_i m_i OP_i = mOO' + \sum_i m_i (O'P_i - OP_i)$$

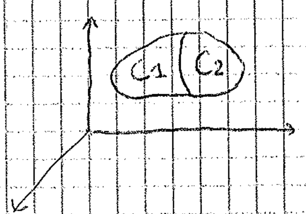
definiz. dei baricentri

$$= m\,OO' - \sum_i m_i (OO') = 0 \quad \text{perché}$$
$$= mOO' - OO' \underbrace{\sum_i m_i}_{m} = 0$$

$$G \equiv G'$$

- Dati due punti materiali il baricentro si trova sul segmento che li congiunge

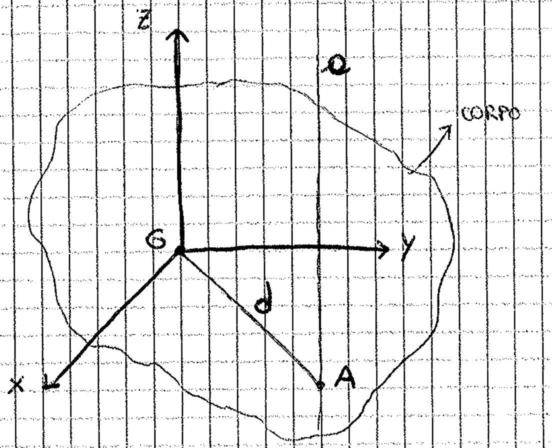
- Se ho un sistema piano il baricentro è contenuto nel piano del sistema
- Composizione di baricentri



$$m_{TOT} \, OG = \int_C OP \, d\tau = \int_{C_1} OP \, d\tau + \int_{C_2} OP \, d\tau$$

per l'additività degli integrali

- Proprietà di simmetria: un corpo simmetrico rispetto ad un dato asse ha il baricentro appartenente a tale asse. Se individuo due o più assi di simmetria allora il baricentro lo trovo si trova nell'intersezione di tali assi



DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un SR con origine nel baricentro ($x_G = 0, y_G = 0, z_G = 0$) con z // all'asse a

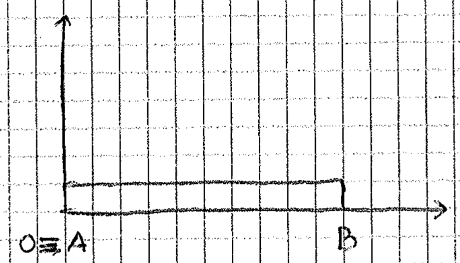
$$I_a = \int \rho \left[(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 \right] d\tau$$

$$= \int \rho \, (x^2 + y^2) \, d\tau + (x_a^2 + y_a^2) \int \rho \, d\tau +$$

$$- 2 x_a \int x \cdot \rho \, d\tau - 2 y_a \int \rho y \, d\tau =$$

$$= I_{a_G} + m d^2 - 2 x_a m \underbrace{\cancel{x_G}}_{\to 0} - 2 y_A m \underbrace{\cancel{y_G}}_{\to = 0}$$

ES ASTA OMOGENEA



Omogenea $\rightarrow \rho = \rho_0$

AB= $\rightarrow$ lunghezza asta

$$I_o = \int_0^L x^2 \cdot \rho_0 \cdot dx = \rho_0 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \rho \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{m L^2}{3} \; *$$

MOMENTO DI INERZIA DELL'ASTA RISPETTO AD UN ESTREMO

$$m = \int_0^L \rho_0 \, dx = \rho_0 \cdot L$$

$$I_G = I_o - m d^2 = \frac{m \cdot L^2}{3} - m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{m \cdot L^2}{12} \; *$$

MOMENTO D'INERZIA RISPETTO AL BARICENTRO

$$I_{xy} = -\int_C \rho xy\, d\tau \qquad I_{xz} = -\int_C \rho xz\, d\tau \qquad I_{yz} = -\int_C \rho yz\, d\tau$$

Nota la matrice di inerzia si calcola facilmente il momento di inerzia rispetto ad un asse generico (nella direzione di $\vec{u}$) passante per il punto O (centro della retta)

Ragionando in componenti abbiamo

$$OP = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$$

$$\vec{u} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3} \quad \rightsquigarrow \alpha, \beta, \gamma \text{ sono i coseni direttori}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$OP \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (y\gamma - z\beta)\vec{e_1} - (x\gamma - z\alpha)\vec{e_2} + (x\beta - y\alpha)\vec{e_3}$$

$$I_o = \int_C \rho \underset{\substack{\uparrow \\ (OP \wedge u)^2}}{r^2} d\tau = \int_C \rho \left[(y\gamma - z\beta)^2 + (x\gamma - z\alpha)^2 + (x\beta - y\alpha)^2 \right] d\tau$$

$$= \dots\dots = I_x\alpha^2 + I_y\beta^2 + I_z\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma$$

$\rightarrow$ ovvero in forma compatta $I_u = \vec{u} \cdot I_o \vec{u}$

Visto che la matrice di inerzia è simmetrica e definita positiva, questa è diagonalizzabile

$\longrightarrow \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$ utilizzando una terna di autovettori di I_o detta TERNA PRINCIPALE DI INERZIA e in tale terna, formata dagli autovettori (quelli sulla diagon.) detti ASSI PRINCIPALI DI INERZIA, i momenti non nulli sono MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA; se inoltre sono calcolati rispetto al baricentro si dicono CENTRALI

Una interpretazione geometrica è quella dell'ellissoide di inerzia

- Ricerca degli assi principali per la diagonalizzazione della matrice di inerzia

  $\rightarrow$ sono $\boxed{\text{assi principali di inerzia}}$ gli ASSI DI SIMMETRIA di un corpo rigido omogeneo e le PERPENDICOLARI ai piani di simmetria.

- Nel caso di sistemi piani ad esempio considero un piano $xy \rightarrow z=0$ e quindi $\longrightarrow$

quali forze?

→ FORZE ATTIVE (1)

→ FORZE VINCOLARI (2)

(1) Si da una rappresentazione analitica delle forze attraverso un modello fenomenologico

Es. → forze dipendenti dal tempo (ad esempio forze sinusoidali)

→ forze dipendenti dalla velocità (ad esempio attrito legato alla resistenza del mezzo [aria/acqua])

$$F = -c(v)\,\vec{v}$$

↑ coef. che dipende dal mezzo

→ forze posizionali (che non dipendono né dal tempo esplicitamente né dalla velocità) dipendono solo dalle coordinate del punto.

$$F(P) = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$$

Sottoclasse importante delle forze posizionali sono le <u>forze conservative</u> caratterizzate dall'esistenza di una funzione potenziale

$U(x,y,z)$ continua e con derivate parziali tali che

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

dove si ricorda che la forma differenziale esatta è in un opportuno dominio se il campo vettoriale F è IRROTAZIONALE cioè se

$\mathrm{Rot}\,\vec{F} = 0 \iff$ devono valere le condizioni di compatibilità

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Caso particolare la FORZA PESO di un punto sulla Terra dove scegliendo $r = R$ raggio della terra e m_0 la massa della terra

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad g = \frac{\gamma m_0}{R^2} = 9,8 \ldots \frac{m}{sec^2}$$

Il potenziale della forza peso

$$U = -\int mg\,dr = -mgr = -mgz + cost \qquad z = r - R$$

quota sulla terra in un SR con asse z orientato nel verso della verticale ascendente

(2) Se nel caso (1) avevamo $F = m \cdot a$, ora nel considerare un corpo vincolato dobbiamo tener conto che l'accelerazione deve soddisfare le restrizioni imposte dal vincolo. Postuliamo che il vincolo esplichi la sua azione sul punto in una maniera rappresentabile come una forza

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{\phi}$$

$\vec{\phi}$ ↓ forza delle reazioni vincolari

In generale per un sistema di punti

$$m_i \cdot a_i = \underbrace{\sum_{\substack{j \neq i \\ \in \varphi_1}} F_{ij} (P_i, P_j, v_i, v_j)}_{\substack{\text{risultante forze interne} \\ \text{esercitate tra coppie di} \\ \text{punti interni al sistema}}} + \underbrace{\sum_{n \in \varphi_2} F_{in}^{(e)} (P_i, v_i, t)}_{\substack{\text{risultante delle} \\ \text{forze esterne}}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 186

- Nel caso di <u>sistemi di vettori</u>

$$M_Q = \sum_i QP_i \wedge \vec{v}_i = \sum_i QO \wedge \vec{v}_i + \sum QP_i \wedge \vec{v}_i$$

$$M_Q = QO \wedge \sum_i \vec{v}_i + \sum_i OP_i \wedge v_i$$

$$M_Q = QO \wedge R + M_O$$

La differenza tra momenti risultanti calcolati rispetto a poli diversi dipende solo attraverso la risultante

- Il sistema di vettori applicati si dice <u>EQUILIBRATO</u> se la risultante e momento risultante (vettori caratteristici) nulli.

NB: se il sistema è equilibrato rimane tale anche per scelte diverse del polo rispetto cui si calcola il momento.

$$R = 0 \quad M_O = 0 \longrightarrow M_Q = QO \wedge \underbrace{R}_{0} + \underbrace{M_O}_{0} = 0$$

DINAMICA DEI SISTEMI

Sistemi di punti materiali

$$m_i a_i = F_i + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{forze vincolari}}}{\phi_i} \quad (1) \qquad i = 1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ punti}}}{n}$$

Sommiamo su tutti i punti

$$\sum_{i=1}^{n} m_i a_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} F_i}_{R^A = R^{ATTIVE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \phi_i}_{R^V = R^{VINCOLARI}}$$

Quindi $\underbrace{R^A + R^V}_{} = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$ (2)

R^{EXT} = risultante forze esterne attive e vincolari

[Non compaiono esplicitamente le forze interne, infatti queste per il principio di azione e reazione sono un sistema equilibrato.

è la quantità di moto per un qualsiasi sistema materiale è data dal prodotto tra la massa totale e la velocità del baricentro.

Derivandola rispetto al tempo

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\vec{v_G}) = m\,\frac{dv_G}{dt} = m\,a_G$$

d'altra parte

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v_i} = \sum_i m_i\,\frac{dv_i}{dt} = \sum m_i\,a_i$$

quindi la ② si può risolvere come

$$\boxed{R^a + R^v = \frac{dQ}{dt} = m\,a_G}$$ ✗ **I° EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA**

Esprime che la derivata della quantità di moto di un qualsiasi sistema è = in ogni istante alla risultante delle forze esterne (attive e vincolari).

O equivalentemente (<u>TEOREMA DEL MOTO DEL BARICENTRO</u>) il baricentro del sistema si muove come se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema e vi fossero applicate tutte le forze esterne (attive e vincolari)

NB: <u>Le forze interne non compaiono esplicitamente nell'equazione cardinale tuttavia giocano un ruolo importante in alcuni casi</u> (es. paracadute, molle).
Il punto è che la I° EQ. CARDINALE non permette in generale la determinazione del moto del baricentro. Solo in casi particolari (sistemi G-determinati) il moto del baricentro è effettivamente indipendente dalle forze interne

• $\rightarrow A \equiv O$

$$V_A \wedge Q = \underset{\text{zero}}{\emptyset} \wedge Q = \emptyset$$

In tali casi

$$\boxed{M_A^a + M_A^v = \frac{dK_A}{dt}}$$

A fisso oppure baricentro

che ha struttura analoga alla I° EQ CARDINALE e afferma che la derivazione del momento angolare rispetto al baricentro o ad un punto fisso è uguale al RISULTANTE DEI MOMENTI DELLE FORZE ESTERNE (attive e vincolari)

Il sistema composto dalla I e II eq cardinale permette di determinare moto e reazioni vincolari del sistema.

Tuttavia per un sistema generico queste sono condizioni necessarie ma non sufficienti a determinare un moto. Vedremo che nel caso rigido saranno invece sufficienti.
sistemi rigidi

• Che forma ha K_A?

Per sistemi rigidi si può mostrare che il momento angolare K_A è uguale a:

$$K_A = m AG \wedge V_A + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MATRICE DI} \\ \text{INERZIA}}}{I_A} \cdot \omega$$

e nello specifico scegliendo A fisso ma solidale al corpo oppure coincidente con il baricentro allora

$$K_A = I_A \omega$$

infatti se $A \equiv G$ $\quad m \underbrace{GG}_{=0} \wedge V_G = 0$

se A fisso $\quad m AG \wedge \underbrace{V_A}_{=0} = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 186

Moltiplicando per m_i e sommando si ha:

$$\sum m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) = \left[I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3\right]\vec{e_1} + \left[I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3\right]\vec{e_2} + \left[I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3\right]\vec{e_3}$$

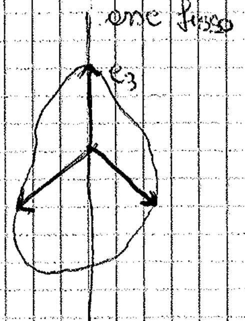
→ MOMENTI DI INERZIA

$I_{12}, I_{13}, \dots$ sono i prodotti di inerzia.

[In casi particolari l'espressione si può ulteriormente semplificare]

ES] Sistema rigido con asse fisso

$\omega = \omega_3 \vec{e_3}$ $\qquad \omega_1 = \omega_2 = 0$



$$K_A = \sum_k I_{k_3} \omega_3 \vec{e_k} = \omega_3 \left(I_{13}\vec{e_1} + I_{23}\vec{e_2} + I_{33}\vec{e_3}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Se in particolare l'asse fisso è PRINCIPALE DI INERZIA

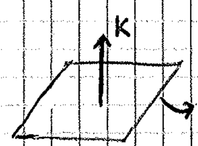
$$K_A = I_3 \omega_3 \Lambda_3$$

Λ_3 versore dell'asse fisso

In questo caso il momento angolare è // al vettore velocità angolare

ES] Caso piano - Sistema rigido piano

$\Lambda_3 = \vec{K}$



$\omega = \dot{\theta} \Lambda_3$

$\longrightarrow K_A = I_3 \dot{\theta} \Lambda_3 = I_3 \dot{\theta} \vec{K}$

$$K_G = \sum_i GP \wedge m_i \underbrace{v_i}_{v_G + v_R} = \sum_i GP_i \wedge m_i (v_G + v_i^R)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i GP_i}_{=0} \wedge v_G + \sum_i GP_i \wedge m_i v_i^R = \sum_i GP_i \wedge m_i v_i^R = K_G^R$$

def. baricentro in GG

• Ultimo tassello è vedere (scrivere) $\frac{dK_A}{dt}$ nel caso di un corpo rigido

Lavoriamo scegliendo come polo il baricentro

$$K_G = I_G \vec{\omega}$$

vettore — matrice di inerzia

Si può mostrare che $\left[\frac{dK_G}{dt} = I_G \dot{\omega} + \omega \wedge I_G \omega\right]$ ⊛

Infatti ricordiamo che in cinematica relativa

$$\dot{C} = C' + \omega \wedge C$$

derivata rispetto ad un osservatore fisso — derivata rispetto ad un osservatore mobile solidale

per il momento angolare abbiamo

$$\dot{K}_G = (K_G)' + \omega \wedge K_G$$

$$K_G = I_G \omega \quad \rightarrow (K_G)' = I_G \omega' = I_G \cdot \dot{\omega}$$

$\omega' = \dot{\omega}$ per cinematica relativa

⊛ $\left[\dot{K}_G = I_G \dot{\omega} + \omega \wedge K_G\right]$

19 APRILE 2012

Equazioni cardinali della dinamica

$$\vec{R}^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m \cdot a_G$$ 1 equazione vettoriale (3 eq. scalari)

$$\vec{M}_A^{EXT} = V_A \wedge Q + \frac{dK_A}{dt}$$ momento angolare

EXT = (attive + vincolari)

$$\vec{M}_A^{EX} = \frac{d\vec{K}_A}{dt}$$

scegliendo opportunamente il polo A   1 equazione vettoriale (3 eq. scalari)

Nel caso del corpo rigido (della dinamica del corpo rigido)

$$K_A = m\, AG \wedge V_A + I_A\, \omega$$ ← VELOCITÀ ANGOLARE

I_A: MATRICE DI INERZIA

- Asse fisso principale di inerzia

$$\vec{K}_A = I_3\, \omega_3\, \Lambda_3 \qquad K_A \,/\!/\, \omega$$

- Caso piano

$$\vec{K}_A = I_3\, \dot{\theta}\, \vec{k}$$ $\vec{k}$ = normale al piano direttore

$$\vec{M}_A^{EXT} = I_A\, \dot{\omega} + \vec{\omega} \wedge I_A\, \vec{\omega}$$

OSS) Il sistema di forze esterne compare solo attraverso i suoi vettori caratteristici (Risultante e momento risultante) → sollecitazioni esterne equivalenti (con gli stessi valori caratteristici) determinano la stessa dinamica per il corpo rigido (ad esempio sollecitazione peso distribuito sul corpo e il risultante applicato al baricentro)

OSS) Ruolo delle forze interne
Un sistema equilibrato (con vettori caratteristici nulli) può essere trascurato o sostituito con un sistema nullo →

In generale il numero di eq. scalari è uguale al numero complessivo di incognite del problema dinamico

Quindi supponendo di avere **m** coordinate lagrangiane $q_i(t)$ e

$r = 6 - m$ incognite che rappresentano i vincoli

$\searrow (3-m)$ nel piano

$$m + r = \begin{cases} 6 \text{ nello spazio} \\ 3 \text{ nel piano} \end{cases}$$

Operando algebricamente sulle eq. cardinali si può scrivere un sistema di m equazioni differenziali in forma normale, cioè risolte rispetto a $\ddot{q}$, nelle quali non compaiono le incognite di reazione (le ϕ, reazioni vincolari).

Tali equazioni della forma $\ddot{q}_i = f_i(q, \dot{q}, t)$ sono dette <u>eq. pure del moto</u> perché non compaiono i vincoli.

Le restanti ν $(= 6 - m)$ equazioni permettono di determinare le reazioni vincolari

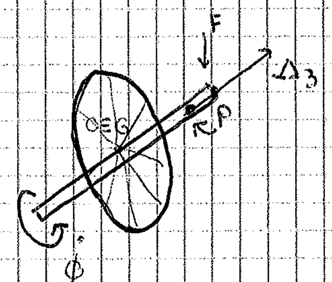
$\hookrightarrow$ le eq. cardinali sono necessarie e sufficienti per determinare il moto del corpo rigido e anche le reazioni vincolari che in ogni istante sono trasmesse al corpo rigido.

- Imponendo un numero opportuno sulle condizioni iniziali sulle coordinate lagrangiane si ha un problema matematico ben formulato sotto ipotesi di sufficiente regolarità delle forze applicate tale problema è ben posto ovvero si ha esistenza e unicità della soluzione (il moto del corpo rigido)

- Tuttavia nel caso di più gradi di libertà (ad esempio se consideriamo un sistema articolato con N parti rigide connesse tra loro) tale processo algebrico di scrittura in forma normale può essere oneroso e si cercano altre vie per avere eq. pure del moto (senza le reazioni vincolari che a differenza delle forze attive esterne non conosciamo) $\rightarrow$ integrali primi _ principio dei lavori virtuali

PRECESSIONE GIROSCOPICA = se sollecitiamo un giroscopio in rotazione (ma anche una trottolina) con una forza il suo asse non si muove nel piano della forza ma in una direzione ad esso ortogonale (powerball)

ES)



Giroscopio vincolato nel suo baricentro trascinando le alte velocità di rotazione

$$\vec{\omega} = \dot\phi\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ASSE} \\ \text{PRINCIPALE}}}{\Delta_3}$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO AL BARICENTRO

$$K_G = I_3\, \dot\phi\, \Delta_3$$

La II EQ CARDINALE MI DICE

$$M_G^{EXT} = \frac{dK_G}{dt}$$

Supponiamo di applicare una forza $\perp$ all'asse giroscopico

$$M_G^{EXT} = PG \wedge F = \frac{d}{dt}\left(I_3\, \dot\phi\, \Delta_3\right) \underset{\substack{\uparrow \\ I_3 \text{ è costante}}}{=} I_3\, \ddot\phi\, \Delta_3 + I_3\, \dot\phi\, \frac{d\Delta_3}{dt}$$

Notiamo che $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{direzione} \\ \text{dell'asse di} \\ \text{rotazione}}}{PG} \wedge F \rightarrow \perp$ all'asse di rotazione o asse giroscopico

E ricordando che $\frac{dn}{dt} \perp n$ con n vettore generico $\rightarrow \frac{d\Delta_3}{dt} \perp$ asse giroscopico

Quindi in componenti

$$\begin{cases} I_3\, \ddot\phi = 0 \Rightarrow \ddot\phi = 0 \Rightarrow \dot\phi \text{ costante} \\ PG \wedge F = I_3\, \dot\phi\, \underset{\nwarrow \text{ opposto dell'asse giroscopico}}{\frac{d\Delta_3}{dt}} \end{cases}$$

- Equilibrio di una particella materiale:

$$\vec{F}(P) = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_x(x,y,z) = 0 \\ F_y(x,y,z) = 0 \\ F_z(x,y,z) = 0 \end{cases}$$ LIBERA

$$\vec{F}(P) + \bar{\phi} = 0$$ VINCOLATA

- Equilibrio di un sistema di punti:

$$\begin{cases} F_i = 0 & \forall P_i \text{ libero (non soggetto a vincoli)} \\ F_i + \phi_i = 0 & \forall P_i \text{ vincolato} \end{cases}$$

Un sistema di punti è in equilibrio se ogni suo punto è in equilibrio

D'altra parte la statica, ovvero la ricerca delle configurazioni di equilibrio, è un caso particolare della dinamica. Quindi devono valere le equazioni cardinali ridotte (semplificate) al caso statico

I° EQ. DELLA STATICA (CARDINALE)

$$R^e = \frac{dQ}{dt} = \cancel{m a_G} \quad \Rightarrow R^e = 0$$

$= 0$

risultante delle forze esterne agenti sul sistema

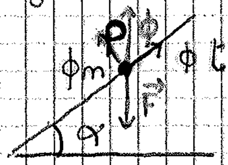
II° EQ. DELLA STATICA (CARDINALE)

$$M_A^e = 0 \ \forall$$

Il momento delle forze esterne (attive e vincolari) rispetto ad un polo arbitrario è nullo

- Le due equazioni cardinali della statica sono equivalenti alla richiesta che il sistema delle forze esterne sia equilibrato

Consideriamo per semplicità un piano inclinato con inclinazione α e una forza oltre P agente sul piano



L'equilibrio si ha quando l'angolo di inclinazione del piano non supera un valore critico ϕ_s con $\phi_s \in [0, \frac{\pi}{2})$

Valore critico = ANGOLO DI ATTRITO STATICO = ϕ_s

$$\vec{\phi} = \vec{\phi_t} + \phi_m \vec{n}$$

Componente tangenziale e normale al punto

$|\phi_t|$ è l'attrito

Si individua una situazione fenomenologica detta LEGGE DI COULOMB - MORIN

$$|\phi_t| \leq f_s |\phi_n| \quad *$$

$$f_s = \tan \phi_s \geq 0 \qquad \text{Coef. di attrito statico}$$

Quindi quando si considera l'equilibrio dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} F(P) + \phi = 0 \\ f(P) = 0 \\ |\phi_t| \leq f_s |\phi_n| \end{cases}$$

Condizioni di equilibrio

Eq. Cartesiana

Scrivendo in componenti le condizioni di equilibrio

$$|F_t(P)| = |\phi_t| \quad , \quad |F_n(P)| = |\phi_n|$$

$$\rightarrow \underset{|F_t|}{\overset{\shortparallel}{|\phi_t|}} \leq f_s \underset{|F_n|}{\overset{\shortparallel}{|\phi_n|}} \Rightarrow \begin{cases} f(P) = 0 \\ \psi(x,y,z) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{con } \psi = |F_t| - f_s |F_n|$$

Le soluz. di ciò sono tutte quelle che soddisfano contemporaneamente tale sistema (infinito)

Ci sono vincoli dove la trattazione si semplifica?

VINCOLI IDEALI

Lavoro di un sistema di forze applicate a punti P_i

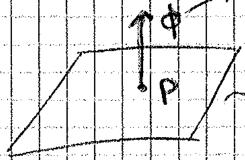
LAVORO EFFETTIVO $dL = \sum_i F_i \, dP_i$

↳ spostam. effettivi

$\Omega = \sum_i F_i \, \delta P_i$

↳ spostamento virtuale compatibili con i vincoli congelati ad un dato istante

(ES) Punto vincolato su superficie liscia con vincolo unilatero



Gli spostamenti virtuali ammessi sono quelli:

- appartenenti al piano tangente: sono reversibili (anche l'opposto è ammesso)
- quelli che formano un angolo acuto con ϕ: sono irreversibili (lo spostam. opposto non è ammesso perché penetrerei nella superficie).

Quindi il lavoro virtuale delle forze vincolari è

$$\delta L^v = \phi \cdot \delta P \geq 0 \qquad \forall \delta P \; \gamma$$

In particolare $\delta L^v = 0$ per gli spostamenti reversibili (che appartengono al piano tangente) e $\delta L^v > 0$ per gli spostamenti irreversibili.

NB: È fondamentale l'assenza di attrito che mi garantisce che ϕ sia ⊥ alla superficie

→ VINCOLI IDEALI (o PERFETTI)

BILATERALI $(\delta L^V = 0)$ X

→ VINCOLI IDEALI

UNILATERALI $(\delta L^V > 0)$ X

(vincoli ideali) bilaterali ?

Tra questi obbiamo i vincoli privi di attrito e bilaterali sia fissi che mobili, vincoli di rigidità, vincoli interni ai sistemi articolati costituiti da più parti rigide, vincoli di rotolamento senza strisciamento

Tra i vincoli ideali unilaterali abbiamo quelli privi di attrito unilaterali (ad es. la superficie).

Per i sistemi soggetti a vincoli ideali vale il PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI che afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione sia di equilibrio per un sistema sottoposto a vincoli ideali è che

$$\delta L^A \leq 0 \qquad \forall \delta P \in C$$

Ovvero il lavoro delle forze attive è non positivo per ogni spostamento virtuale a partire da C. In particolare

$$\delta L^A = 0 \qquad \forall \Omega \text{ reversibile a partire da } C$$

Infatti partiamo dall' eq. fondamentale della dinamica

$$F_i + \Phi_i = m_i a_i$$

moltiplichiamo per δP_i e Σ

$$\underbrace{\sum_i F_i\,\delta P_i}_{\delta L^A \text{ - lav.}} + \underbrace{\sum_i \Phi_i\,\delta P_i}_{\delta L^V = \text{ lavoro vincolare vincolari}} = \sum m_i \cancel{a_i} \cdot \delta P_i$$

$\hookrightarrow = 0$ CASO STATICO

$$\partial L = \sum_{i=1}^{m} F_i (\partial Q + \varepsilon \wedge QP) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} F_i \cdot \partial Q}_{\substack{\text{Risultante} \\ \text{forze esterne}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} F_i \cdot \varepsilon \wedge QP}_{\substack{\text{permutando fattori} \\ \text{prodotto misto}}}$$

$$R \qquad = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} QP_i \wedge F_i\right)}_{\text{MOMENTO RISULTANTE RISPETTO A } Q} \cdot \varepsilon$$

$$\partial L = R \cdot \partial Q + M_Q \cdot \varepsilon$$

Il lavoro di un sistema di forze vigente su un corpo rigido dipende esclusivam. dai vettori caratteristici del sistema stesso

LAVORO DI FORZE AGENTI SU UN SISTEMA OLONOMO

$P_i \quad i = 1, \ldots, n$ punti

N coordinate libere o lagrangiane
$(q_1, q_2, \ldots, q_N)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{lavoro virtuale}}}{\delta L} = \sum_{i=1}^{m} F_i \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spostamento virtuale}}}{\delta P_i}$$

Ma $\quad \delta P_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k$

Infatti la posizione P_i è esprimibile attraverso le N coordinate lagrangiane.

$$\delta L = \sum_{i=1}^{m} F_i \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_m} \partial q_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right)}_{\substack{Q_k = \text{componente} \\ \text{lagrangiana delle} \\ \text{forze attive}}} \partial q_k$$

P sulla curva che si muove di moto assegnato

$$dL = F \cdot dP = F \cdot \left(\tau \, ds + \frac{\partial P}{\partial t} dt \right)$$

$$= \underbrace{F \cdot \tau}_{Q_s} \, ds + F \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) dt$$

La componente generalizzata della forza è la componente della forza nella direzione tangente alla curva

Se la curva γ è fissa allora lo spostamento elementare si riduce a $ds\,\tau$
$\rightarrow$ il lavoro effettivo è

$$dL = Q_s \, ds$$

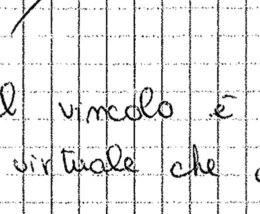
Considerando il lavoro virtuale $\rightarrow$ irrigidiamo o congeliamo il vincolo ad un dato istante $\Rightarrow$ la posizione (P_i) non dipende esplicitamente dal tempo e quindi abbiamo che

$$\delta L = Q_s \, \delta s$$

$\hookrightarrow$ spostamenti virtuali

Ricordiamo che se il vincolo è fisso allora uno degli infiniti spostamenti virtuali del sistema coincide con lo spostamento effettivo $dP = \dot{s} \, dt \, \tau$
che è quello in cui δs è scelto tale da verificare l'uguaglianza $\delta s = \dot{s} \, dt$

Spostamenti virtuali tangenti alla curva



invece se il vincolo è mobile (curva in movimento) non esiste uno spostamento virtuale che coincida con lo spostamento effettivo.

Anal[illegible] vincoli sono fissi l'insieme dei lavori virtuali
c' [illegible] di incrementi arbitrari delle coordinate Lagrangiane
con il lavoro effettivo.

Le posizioni di equilibrio sono quelle in cui si annullano le forze generalizzate

$$Q = Q(q) = 0$$

Si ha quindi dualità tra statica del punto (equilibrio del punto P se $F(p) = 0$) e statica dei sistemi olonomi.

- Se considero vincoli unilaterali vi saranno configurazioni ordinarie in cui gli spostamenti virtuali sono reversibili che appartengono alla parte interna delle configurazioni consentite e per queste le configurazioni di equilibrio devono soddisfare $Q(q) = 0$
- Vi saranno anche configurazioni di confine in cui gli spostamenti virtuali sono irreversibili e per queste configurazioni, per il principio dei lavori virtuali, $\delta L^A \leq 0$ e almeno una coordinata libera ha uno spostamento virtuale di segno determinato dal vincolo (irreversibile) tali configurazioni sono d'equilibrio se
  - $Q_k \leq 0$ se $\delta q_k \geq 0$
  - $Q_k \geq 0$ se $\delta q_k \leq 0$ → IRREVERSIBILE
  - $Q_k = 0$ se $\delta q_k \gtrless 0$ → REVERSIBILE

Supponiamo che le forze attive siano conservative

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (*)$$

e la ricerca delle configurazioni di equilibrio in cui per vincolo ideali e bilaterali il $Q_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$ e si riduce a trovare i punti di di stazionarietà del potenziale → massimi, minimi o flessi

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \longrightarrow \boxed{\text{TEOREMA DI STAZIONARIETÀ DEL POTENZIALE}}$$

Le configurazioni di equilibrio per un sistema olonomo V e vincoli ideali e bilaterali sono quelle che annullano la derivata del potenziale

Consideriamo sistemi olonomi soggetti solo alla forza peso come forza attiva.
Se pot... ...vere come

(G)

quota del baricentro

L'angolo tra spostamento effettivo e peso è sempre ottuso $\rightarrow \Delta L^A < 0$

Angolo tra spostamenti effettivi e forza peso è acuto / ottuso / retto $\rightarrow \Delta L^A \gtreqless 0$

$\Rightarrow$ una configurazione di equilibrio è stabile q^* se il lavoro effettivo delle forze attive per portare il sistema da q^* ad $\bar{q}$ è strettamente negativo.

$$\Delta L^A_{q^* \to \bar{q}} < 0 \qquad \text{con } \bar{q} \in I(q^*, \varepsilon) \setminus q^*$$

punto in un intorno di q^* di raggio piccolo ε.

$\hookrightarrow$ quindi se il sistema è soggetto a <u>forze conservative</u>

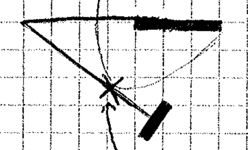
$$\Delta L^A_{q^* \to \bar{q}} = U(\bar{q}) - U(q^*)$$

$$\Rightarrow U(\bar{q}) < U(q^*)$$

Ovvero la configurazione di equilibrio è <u>stabile</u> se corrisponde ad un massimo relativo isolato del potenziale (ovvero un minimo dell'energia potenziale).

- Per un sistema soggetto solo alle forze peso il massimo del potenziale corrisponde al minimo della quota del baricentro che corrisponde ad un equilibrio stabile.

es. MARTELLO



minimo della quota del baricentro $\rightarrow$ eq. stabile condizioni di compatibilità non sono verificate.

- La funzione potenziale è definita a meno di una costante

$$\underline{F = \nabla U} = \nabla (U + C)$$

ES

- Forza costante

$$\vec{F} = F_{x_0} \vec{i} + F_{y_0} \vec{j} + F_{z_0} \vec{k}$$

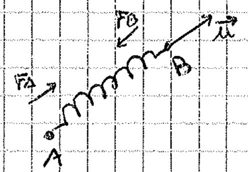
$$U = F_{x_0} \vec{x} + F_{y_0} \vec{y} + F_{z_0} \vec{z} + cost$$

↳ forza peso

$$U = -mgz + cost$$

- Forze elastiche

Se r_0 è la lunghezza della molla a riposo la forza elastica esercitata sull'estremo B

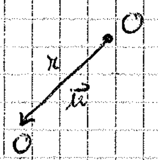


$$\vec{F} = -\underbrace{K}_{\substack{\text{costante} \\ \text{elastica} \\ \text{(RIGIDITÀ DELLA MOLLA)}}} \underbrace{(r - r_0)}_{\text{ELONGAZIONE MOLLA RISPETTO AL RIPOSO } (\gtrless 0)} \vec{u}$$

$$\vec{U} = -\frac{K}{2} (r - r_0)^2 + cost$$

- Forze centrali dirette verso un centro O

$$\vec{F} = F(r) \vec{u}$$



$$U = \int_0^r F(\rho) d\rho + cost$$

ES. Caso gravitazionale / coulombiano

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i (v_i^{(R)})^2}_{T^{(G)}}$$

$T^{(G)}$ = ENERGIA CINETICA RELATIVA AL BARICENTRO

ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO

o in generale un atto di moto rigido

le velocità sono distribuite secondo la legge fondamentale $v_i = v_A + \omega \wedge \overrightarrow{AP_i}$

dunque
$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i \cdot v_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i \cdot \left[v_A + \omega \wedge \overrightarrow{AP_i} \right] =$$

$$T = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_i m_i v_i \cdot v_A}_{= m\, v_G} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_i m_i v_i \cdot \omega \wedge \overrightarrow{AP_i}}_{\text{permutazione fattori}}$$

permutazione fattori
prodotto misto $a \cdot b \wedge c = c \cdot b \wedge a$

$$T = \frac{1}{2} m v_G \cdot v_A + \frac{1}{2}\omega \cdot \underbrace{\sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i v_i}_{K_A}$$

K_A = MOMENTO DELLE QUANTITÀ DI MOTO

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G \cdot v_A + \frac{1}{2}\omega \cdot K_A} \quad \times$$

con A un punto arbitrario solidale al corpo rigido.

Se in particolare il sistema ha un punto fisso conviene far coincidere la scelta del punto arbitrario A con questo punto fisso. In tal caso ricordando che

$$K_A = \underbrace{m\, AG \wedge v_A}_{=0 \text{ perché } v_A = 0} + I_A \omega$$

e quindi

$$T = \frac{1}{2}\cancel{\sum m v_G} \cdot \underset{0}{\underset{\parallel}{v_A}} + \frac{1}{2}\omega \cdot \underbrace{K_A}_{= I_A \omega}$$

ENERGIA CINETICA PER SISTEMA RIGIDO CON PUNTO FISSO **A**.

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_A \omega \cdot \omega} \quad \gamma$$

terna principale di inerzia

$$T = \frac{1}{2}\sum_k I_k \omega_k^2 = \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum_k I_k \omega_k \vec{\Lambda}_k$$

dove $a_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_j}$ MATRICE DI MASSA

$$b_i = 2 \sum_k m_k \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial t}$$

$$C = \sum_k m_k \left(\frac{\partial q_n}{\partial t} \right)^2$$

$a_{ij}(\vec{q}, t)$ è la matrice di massa

$\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$

che è simmetrica (dalla simmetria prodotto scalare) ed è definita positiva per garantire la positività dell'energia cinetica)

$\rightarrow$ si può verificare che è diagonalizzabile ed invertibile

I termini $b_i(\vec{q}, t)$, $c(\vec{q}, t)$ si annullano quando i vincoli sono fissi e quindi P è $P(\vec{q}) = P(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ senza dipendenze esplicite dal tempo cioè $\left(\frac{\partial P_k}{\partial t} = 0 \right)$

In questo caso abbiamo che l'energia cinetica dipende solo dal termine quadratico delle velocità Lagrangiane (quello con la matrice di massa)

$$\boxed{T = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(\vec{q})\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j}$$

Energia cinetica per un sistema olonomo soggetto a vincolo fisso.

TEOREMA ENERGIA CINETICA

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \sum_k m_k V_k \cdot V_k \right) = \frac{1}{2} \Bigg[\underbrace{\sum_k m_k \frac{dV_k}{dt} \cdot V_k + \sum_k m_k V_k \overbrace{\frac{dV_k}{dt}}^{a_k}}_{2 \sum_k m_k a_k V_k} \Bigg]$$

$$= \sum_k m_k a_k V_k$$

Ricordando che

$$m_k a_k = F_k + \Phi_k$$

Infatti:
Con vincoli ideali bilaterali e fissi ricordiamo che lo spostamento effettivo sarà uno degli infiniti spostamenti virtuali e quindi che il lavoro effettivo apparterrà all'insieme dei lavori virtuali

Ovvero $$dL^v \in \{\delta L^v\}$$ ← l'insieme

Inoltre della definizione di vincolo ideale e bilaterale

$$\delta L^v = 0$$

$$\Rightarrow dL^v = 0$$

ovvero il lavoro effettivo è nullo perché coincide con uno degli infiniti lavori virtuali delle reazioni del vincolo che per definizione stessa di vincolo ideale e bilaterale sono nulli per qualsiasi spostamento virtuale.

→ Il teorema dell'energia cinetica in questo caso

$$dT = dL^a + \underbrace{dL^v}_{=0}$$

↓
compaiono solo le forze attive e non le reazioni vincolari
→ eq. prima del moto.

Nell'ulteriore ipotesi di forze attive conservative con potenziale $U(\vec{q})$

$$dL^a = dU \longrightarrow dT = dU$$

Integrando nel tempo si ottiene l'integrale primo dell'energia (conservazione dell'energia meccanica).

$$T - U = cost = E$$

L'energia meccanica è calcolabile come differenza tra en. cinetica e il potenziale e rimane costante nel tempo (ovvero all'energia calcolata all'istante iniziale)

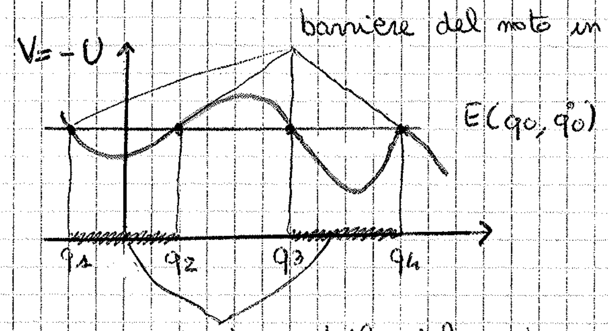
$$E = T_0 - U_0$$

In realtà molte informazioni si possono ottenere da un'analisi qualitativa (TEORIA DI WEIESTRASS)

Infatti $T(q,\dot{q}) \geq 0$ e $T=0$ se e solo se $\dot{q}=0$

quindi $E-V \geq 0$ ⟶ ed è positiva se non si annulla la velocità lagrangiana ed è nulla quando $\dot{q}=0$

↳ il moto avverrà quando $E-V \geq 0$ ovvero $E \geq V$

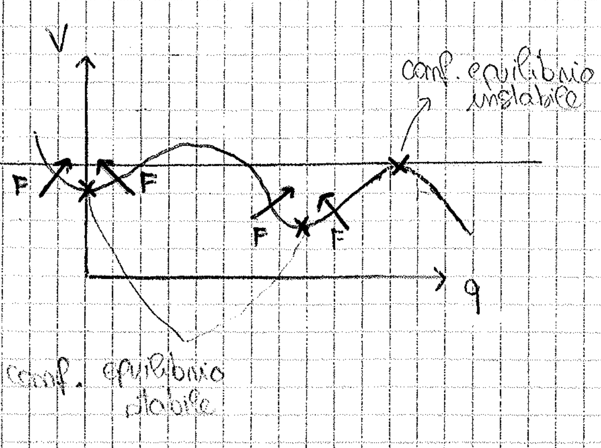


I punti di minimo dell'energia potenziale corrispondono ai punti di massimo del potenziale che corrispondono per il teorema di stazionarietà del potenziale a punti di equilibrio stabili del sistema.

La configurazione corrispondente a q_4 è un massimo dell'energia potenziale (minimo del potenziale) punto di eq. instabile.

Effettivamente un ragionamento grafico diretto conferma i risultati.
Ad esempio se sono in una dimensione:

$$F = \frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$



Se V cresce la forza è < 0 (diretta a sinistra).

Se V decresce la forza è diretta a destra.

la $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\phi}$

$$\begin{cases} m\ddot{s} = (\vec{F} + \vec{\phi}) \cdot \vec{t} \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = (\vec{F} + \vec{\phi}) \vec{n} \\ 0 = (\vec{F} + \vec{\phi}) \cdot \vec{b} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m\ddot{s} = F_t + \phi_t \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n + \phi_n \\ 0 = F_b + \phi_b \end{cases}$$

La componente generalizzata delle forze attive

$$Q_h = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h}$$ → nel nostro caso sistema olonomo ad un grado di libertà

$$Q_s = \vec{F} \cdot \frac{dP}{ds} = \vec{F} \cdot \vec{t} = \vec{F}_t$$

Le posizioni di equilibrio sono quelle in cui si annulla la componente tangenziale delle forze.

Maggiori informazioni sul moto le otteniamo specificando la natura del vincolo (guida liscia o scabra).

Nel caso di GUIDA LISCIA

$$\phi \cdot \vec{t} = \phi_t = 0 \qquad \text{per definizione}$$

La prima equazione diventa

$m\ddot{s} = F_t$ che è una eq. pura del moto che posso risolvere ed ottenere il moto del sistema $s(t)$

Le altre equazioni le uso per determinare completamente le reazioni vincolari (problema semi-diretto)

$m\ddot{s} - F_t = 0$

Moltiplico per $\dot{s}$

$$\dot{s}(m\ddot{s} - F_t) = 0 \xrightarrow{\text{integro}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{s}^2 - U\right)$$

→ Quindi introducendo la forza di inerzia agente sul punto $F_T = -ma$ (forza di trascinamento)

$$(F + F_T) + \Phi = 0$$

⊛

Ovvero la relazione dinamica la posso interpretare come una equazione della statica introducendo le forze di inerzia

Principio di d'Alambert che permette di passare dalle condizioni di equilibrio a quelle dinamiche inserendo sulle forze agenti sul sistema tutte le forze di inerzia

N.b) Forze di inerzia su tutti i punti del sistema e non solo sui punti su cui sono applicate le forze

$$\{(P_i, m_i) \quad i = 1, \ldots m\}$$ INSIEME DI PUNTI MATERIALI

e su una parte di questi agiscono delle forze

$$\{F_i \quad i = 1, \ldots m\}$$

Equilibrio si ha quando (per la 1° eq cardinale della statica)

$$\sum_{i=1}^{K} F_i = 0$$

La condizione necessaria per la dinamica ottenuta attraverso il principio di d'Alembert

$$\sum_{i=1}^{K} (F_i - m_i a_i) - \sum_{i=1}^{K} m_i a_i = 0$$

e non $$\sum_{i=1}^{K} (F_i - m_i a_i) = 0$$

In maniera analoga a quanto fatto per ottenere il principio dei lavori virtuali ricaviamo l'equazione simbolica della dinamica

→ considero un sistema di punti $\{(P_i, m_i)\ i, 1, \ldots m\}$ sottoposto a vincoli ideali e un sistema di forze $\{(P_i, F_i)\ i = 1, \ldots m\}$.