www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1145

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Arcidiacono

MATERIA: Fisica II domande d'esame + Eserc.

Prof. Rossani

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 48

FISICA II

DOMANDA 1: Ricavare l'equazione di Poisson, calcolare $\nabla^2 V$ in simmetria sferica e cilindrica. Potenziale di una distribuzione continua di dipoli.

Il potenziale di una distribuzione continua di cariche soddisfa una naturale eq. differenziale

$\underline{E} = -\,\mathrm{grad}V \longrightarrow$ campo elettrico di una carica puntiforme

$V = q/r$

Infatti:

$$\underline{\nabla}(q/r) = q\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\underline{r}}{r}\right) = -q\frac{\underline{r}}{r^3}$$

$$V = \int \frac{\rho\cdot dv}{r} = \iiint \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{E} = 4\pi\rho \longrightarrow -\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}V = 4\pi\rho \longrightarrow \boxed{\nabla^2 V = -4\pi\rho} \longrightarrow$$ EQUAZIONE DI POISSON

L'equazione di Poisson omogenea è detta equazione di Laplace: $\nabla^2 V = 0$

L'equazione di Poisson ci è utile poiché è possibile calcolare il potenziale senza conoscere le caratteristiche del campo $\underline{E}$. (*)

SIMMETRIA SFERICA

$$\nabla^2 V = \underline{\nabla}\,\underline{\nabla}\,V = \underline{\nabla}\left(V'\frac{\underline{r}}{r}\right)$$

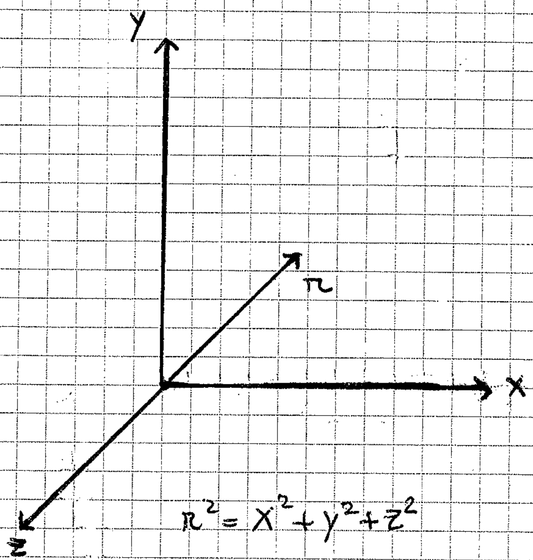
$$= \left(\frac{V'}{r}\right)\mathrm{div}\,\underline{r} + \underline{r}\cdot\underline{\nabla}(V'/r)$$

$$= \frac{3V'}{r} + \underline{r}\left(\frac{V'}{r}\right)'\frac{\underline{r}}{r}$$

$$= \frac{3V'}{r} + r\left(\frac{V'}{r}\right)'$$

$$= \frac{3V'}{r} + r\,\frac{V''r - V'}{r^2}$$

$$= \frac{2V'}{r} + V'' = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)$$



$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 48

DOMANDA 2: Teorema di Gauss, $div(\underline{r}/r^3) = 0$, $\int \underline{E}\cdot\underline{n}\, ds = 4\pi q$, $\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 4\pi\rho$

Si chiama TEORIA DEL POTENZIALE la teoria matematica delle forze che si esercitano tra le cariche elettriche in riposo. Fondamentale per tutta la teoria è la legge di Coulomb la quale afferma che: "la forza F che si esercita tra due cariche elettriche, o magnetiche, puntiformi q1 e q2, in quiete, poste a distanza r, ha la direzione della congiungente le due cariche è data da":

$$F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad k = \text{costante positiva}$$

Ad un'azione repulsiva faremo corrispondere il segno +, mentre ad un'azione attrattiva il segno −.

Si chiama CAMPO ELETTRICO $\underline{E}$, la forza che si esercita su una carica elettrica positiva unitaria in quiete posta in P. Esso è un campo vettoriale. Si dicono "linee di forza" e "tubi di forza" le linee di flusso e i tubi di flusso del campo $\underline{E}$.

$$|E| = \frac{q}{r^2} \longrightarrow \underline{E} = \frac{q}{r^2}\underline{u}_r = \frac{q}{r^3}\cdot\underline{r}$$

Se la carica è positiva le linee di forza sono uscenti dalla carica, viceversa se la carica è negativa.

Il TEOREMA DI GAUSS è anche noto come teorema del flusso.
L'enunciato di questo teorema ha due espressioni; una integrale ed una differenziale. Queste sono legate tra loro dal teorema della divergenza.

$$\int_D div\underline{E}\, dv = \int_{\partial D} \underline{E}\cdot\underline{n}\cdot dS \qquad \text{TEOREMA DELLA DIVERGENZA}$$

Il teorema della divergenza afferma che il flusso di un campo vettoriale $\underline{E}$ attraverso una superficie chiusa ∂D coincide con l'integrale della divergenza del campo nel volume D di cui la superficie è frontiera.

Il Teorema di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico $\underline{E}$ attraverso una superficie chiusa dipende solo dalle cariche interne alla superficie

→

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 48

Se abbiamo una distribuzione continua di carica nello spazio introduciamo ρ $[dq = \rho\, dv]$. Applico all'integrale il teorema della divergenza

$$\int_{\partial S} \underline{E} \cdot \underline{n} \cdot dS = 4\pi \int \rho \, dv$$

$$\int_{S} \text{div}\, \underline{E} \; dv = 4\pi \int \rho \, dv$$

$$\longrightarrow \int (\text{div}\, \underline{E} - 4\pi\rho)\, dv = 0$$

Applico il teorema della media

$$\frac{4\pi r^3}{3} \underbrace{\langle \text{div}\, \underline{E} - 4\pi\rho \rangle}_{\text{VALOR MEDIO}} = 0$$

$r \to 0$ $\boxed{\text{div}\, \underline{E} = 4\pi\rho}$ TEOREMA DI GAUSS IN FORMA LOCALE

In ogni punto dello spazio la divergenza del campo è uguale alla densità di carica per l'unità di volume. Se $\rho = 0$ infatti non c'è campo

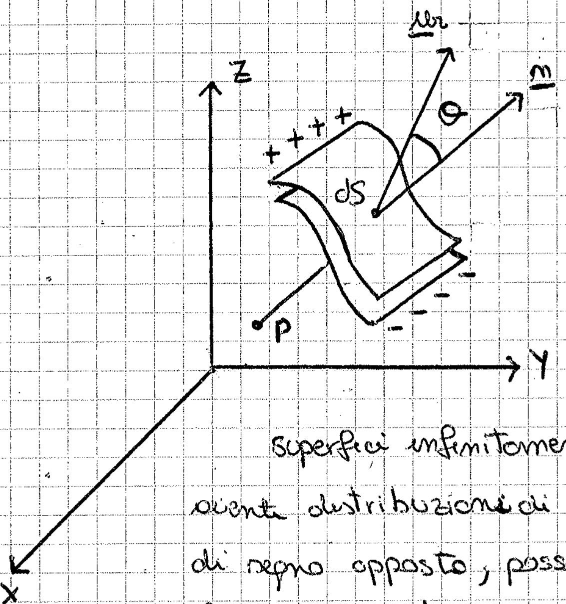
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 48

$$\boxed{V = \frac{m\cos\theta}{r^2}}$$ POTENZIALE

$$\boxed{\underline{E} = -\nabla V}$$ CAMPO

CONCETTO DI DOPPIO STRATO



superfici infinitamente vicine aventi distribuzioni di carica uniformi, di segno opposto, possono essere paragonate ad un dipolo se il doppio strato viene studiato a livello infinitesimale.

Vogliamo il potenziale nel punto P

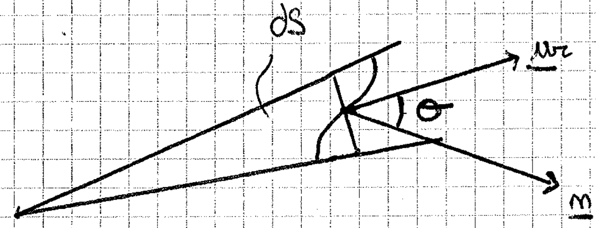
$$dV = -\frac{d\underline{m}\cdot\underline{u_r}}{r^2}$$

$$dV = -\frac{\underline{n}\cdot\mathcal{M}\,ds\cdot\underline{u_r}}{r^2}$$

$$dV = -\mathcal{M}\cdot\frac{dS\cos\theta}{r^2} = -\mathcal{M}\,d\omega$$

$\mathcal{M}$ = densità di dipolo

- Considero l'elemento di superficie

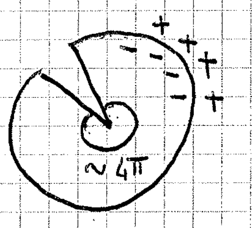


$$dS' = dS\cos\theta \qquad S' = S\cos\theta$$

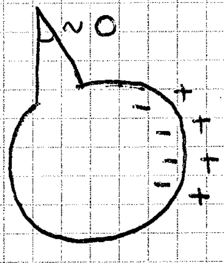
$$r^2\,d\omega = dS\cos\theta$$

$$\frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS'}{r^2} = d\omega$$

- Doppio strato di distribuzione di dipolo uniforme e chiuso



$$V_- \simeq -4\pi\mathcal{M}$$



$$V_+ \simeq 0$$

$$\lim(V_+ - V_-) = \lim(0 + 4\pi\mathcal{M}) = 4\pi\mathcal{M}$$

Il potenziale di un doppio strato è discontinuo attraverso la superficie.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 48

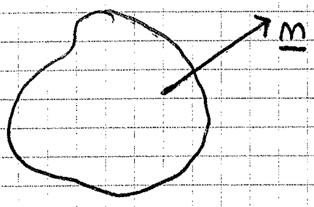
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 48

$d \to 0$

$$J(\underline{n}) = n_x J(\underline{e}_1) + n_y J(\underline{e}_2) + n_z J(\underline{e}_3) = \underline{n} \cdot \underline{J}$$

$$\underline{J} = \underline{e}_1 J(\underline{e}_1) + \underline{e}_2 J(\underline{e}_2) + \underline{e}_3 \cdot J(\underline{e}_3)$$

Consideriamo una regione delimitata da una superficie arbitraria



$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int \rho \, dv}_{\text{VARIAZIONE DI CARICA}} = \underbrace{-\int J(\underline{n})\, dS}_{\text{CIÒ CHE PERDO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE}} = -\int \underline{n} \cdot \underline{J} \, dS = -\int \operatorname{div} \underline{J} \, dv$$

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{dt} + \operatorname{div} \underline{J} \right) dv = 0$$

applico il teorema della media

$$\frac{4\pi}{3} r^3 \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{J} \right\rangle = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ (è analoga all'equazione di continuità per i fluidi).

LEGGE DI OHM

La legge lega al campo $\underline{E}$ la densità di corrente $\underline{J}$.

il suo inverso è la resistività $1/\gamma$.

$$\boxed{\underline{J} = \gamma \cdot \underline{E}}$$

γ è la conducibilità elettrica

Se $\gamma = 0$ abbiamo un materiale isolante

La corrente è proporzionale al campo
- mezzo isotropo: moltiplicazione scalare
- mezzo anisotropo: moltiplicazione vettoriale

$$\operatorname{div} \underline{J} = \gamma \operatorname{div} \underline{E}$$

$$-\frac{\partial \rho}{dt} = 4\pi \gamma \rho$$

come varia all'interno del conduttore la densità di carica

$$\rho = \rho_0 \exp(-t/\tau)$$

$$\tau = 1/4\pi\gamma$$
- τ GRANDI: materiali non metallici
- τ PICCOLI: materiali metallici

τ = tempo di decadimento

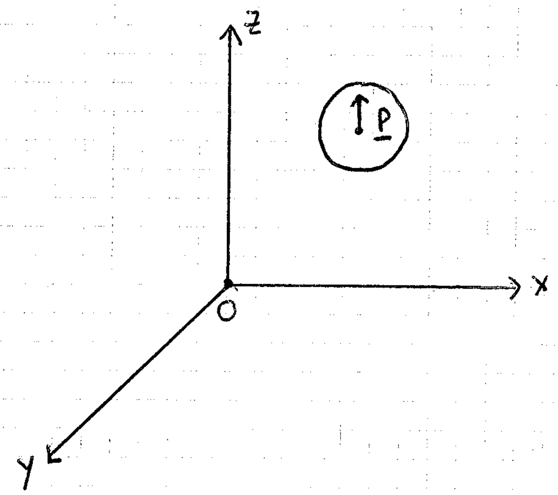
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 48

DOMANDA 5: Dielettrici, potenziale di una distribuzione di dipoli, spostamento elettrico

I dielettrici sono corpi non conduttori, come ad esempio il vuoto.
Un dielettrico è un materiale che viene polarizzato da un campo elettrico.
A prima vista il fenomeno può sembrare uguale all'induzione, ma non è così, poiché se in questo caso tagliamo il dielettrico, nella faccia tagliata compariranno delle cariche tali da annullare la somma delle stesse nel corpo.
Quindi non si ha una vera e propria ridistribuzione ma una variazione delle proprietà.

DIELETTRICO SOTTOPOSTO AD UN CAMPO ELETTRICO:



Consideriamo un volume dv come dipolo, il momento sarà:

$$d\underline{m} = \underline{P} \cdot dv$$

$\underline{P}$ = vettore polarizzante proporzionale al campo $\underline{E}$ secondo: $\underline{P} = \chi \underline{E}$

$\chi > 0$ suscettività elettrica

Ogni elemento dv produrrà un dV (potenziale):

$$dV = \underline{P} \cdot \underline{\nabla} \cdot \frac{1}{r} \cdot dv$$

Il potenziale dovuto alla polarizzazione può essere pensato come dovuto ad una distribuzione di carica sulla superficie del dielettrico.

$$\underline{\nabla}\left(\frac{1}{r} \cdot \underline{P}\right) = \frac{1}{r}\, \underline{\nabla} \cdot \underline{P} + \underline{P} \cdot \underline{\nabla} \cdot \frac{1}{r}$$

$$V = \int \left(\underline{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \underline{P} \right) - \frac{1}{r} \underline{\nabla} \cdot \underline{P} \right) dv = \underbrace{\int_S \frac{1}{r}\, \underline{P} \cdot \underline{n} \cdot ds}_{\text{DISTRIBUZIONE CARICHE IN SUPERFICIE}} - \underbrace{\int \frac{1}{r}\, \underline{\nabla} \cdot \underline{P} \cdot dv}_{\text{DISTRIBUZIONE CARICHE INTERNE}}$$

$$\sigma^* = \underline{P} \cdot \underline{n}$$

$$\rho^* = -\operatorname{div} \underline{P}$$

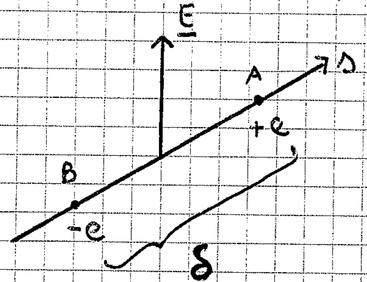
$\longrightarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 48

DOMANDE 6 E 7: Forze risultante su un dipolo, momento risultante su un dipolo, energia potenziale, dipolo e doppio strato, densità di energia

L'energia di una carica puntiforme q, posta in P a potenziale V, vale:



$$u = \int V \rho \, dv$$

$$u = \lim_{\delta \to 0} (eV_A - eV_B)$$

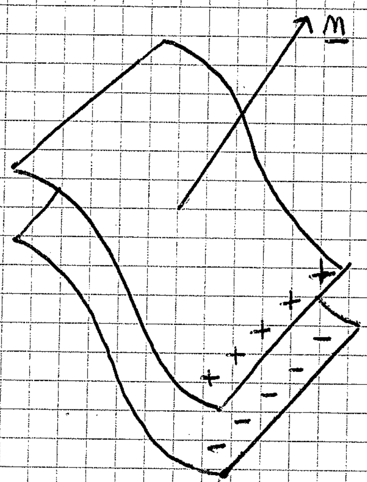
$$u = m \lim_{\delta \to 0} \frac{V_A - V_B}{\delta}$$

SISTEMA DI CARICHE IN UN CAMPO ELETTRICO

$$u = m \frac{dV}{ds} = \underbrace{\underline{m} \cdot \underline{s}}_{\text{momento del dipolo}} \cdot \underbrace{\underline{\nabla} \cdot V}_{\text{campo}} = \underline{m} \cdot \underline{E}$$

Tale energia è dovuta all'azione tra il dipolo ed il campo.

DOPPIO STRATO



L'energia di un doppio strato posto in un campo $\underline{E}$ vale:

$$u = -\int \underline{M} \cdot \underline{E} \, ds$$

$$u = -M \int \underline{E} \cdot \underline{m} \cdot ds \qquad \text{per } M = \text{cost}$$

DENSITÀ DI ENERGIA (ENERGIA DI SISTEMI DI CARICHE)

$$u = \frac{1}{2} \sum_{j} \sum_{i=j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{j} q_j V_j$$

$$u = \frac{1}{2} \int_v \rho V \, dv = \frac{1}{2} \int_v V \frac{\operatorname{div} \underline{D}}{4\pi} \, dv$$

$$\operatorname{div}(V\underline{D}) = V \operatorname{div} \underline{D} + \underline{D} \cdot \operatorname{grad} V$$

$$u = \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(V\underline{D}) \, dv - \frac{1}{8\pi} \int \underline{D} \operatorname{grad} V \, dv$$

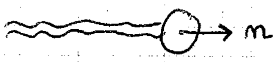
$\longrightarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 48

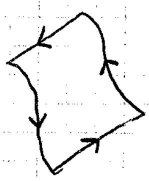
DOMANDE 8, 9 e 12: Teorema di Ampere, equivalenza circuito elettrico e lamina magnetica, 1° legge di Laplace, 2° legge di Laplace, forza su un conduttore percorso da corrente

Ampere formulò un principio di equivalenza tra correnti e magneti e affermò che un circuito percorso da corrente si comporta come un magnete.
Ampere ricavò una legge analoga alla legge di Gauss che pone in relazione una distribuzione di correnti nello spazio ed il campo magnetico da esse prodotto. Esso vale per correnti stazionarie (che non variano nel tempo) e si deve far ricorso alla circuitazione del campo magnetico. La circuitazione del campo magnetico dipende dal percorso delle correnti con esso concatenato: il campo magnetico non è conservativo.



$$\underline{m} = \frac{\mu}{c} I S \underline{n}$$

Un cappio percorso da corrente genera un campo come un dipolo.



$$\mathcal{M} = \frac{\mu}{c} I$$

Una spira percorsa da corrente equivale ad un doppio strato

$$\mathcal{U} = -\mathcal{M}\int \underline{H}\cdot\underline{n}\cdot ds = -\frac{I}{c}\int \underline{B}\cdot\underline{n}\cdot ds = -\frac{I}{c}\Phi$$ energia potenziale

* TEOREMA DI AMPERE E 1° LEGGE DI LAPLACE

$$\boxed{\oint \underline{H}\cdot d\underline{s} = 4\pi\cdot\frac{I}{c}}$$ TEOREMA DI AMPERE

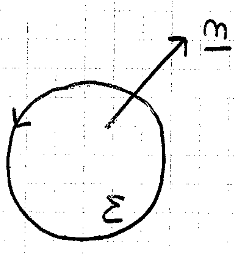
$$\oint \underline{H}\cdot d\underline{s} = \frac{4\pi}{c}\int_\Sigma \underline{j}\cdot\underline{n}\cdot ds$$

Applico il teorema di Stokes

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}\underline{H}\cdot\underline{n}\cdot ds = \frac{4\pi}{c}\int_\Sigma \underline{j}\cdot\underline{n}\cdot ds$$

$$\int_\Sigma \left(\mathrm{rot}\underline{H} - \frac{4\pi}{c}\underline{j}\right)\cdot\underline{n}\cdot ds = 0$$

Immagino una superficie di contorno ℓ su cui è stata tracciata una fitta rete di linee che la dividono in maglie piccolissime. Su ogni maglia scorre corrente, ma lungo i bordi di ognuna le correnti sono opposte e si annullano. Alla fine rimane solo la corrente nel bordo → DA QUI ABBIAMO L'EQUIVALENZA CON UNA SPIRA LUNGA ℓ.



→

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 48

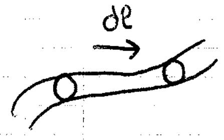
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 48

$$\int_{\partial D}\left(J_z \cdot \frac{m_2}{r} + J_y \cdot \frac{m_3}{r}\right) ds = 0$$

$$\underline{H} = -\frac{1}{c}\int \text{grad}\,\frac{1}{r} \times \underline{J}\, dv$$

$$\text{grad}\,\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\underline{r}} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\underline{r}}{r} = -\frac{1}{r^3}\cdot\underline{r}$$

L'integrale in dv, per conduttori filiformi, si trasforma in un integrale di linea

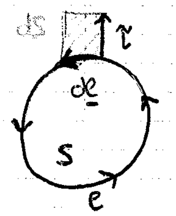


$$\underline{J}\, dV = \underline{J}\cdot S\cdot dl = I\cdot d\underline{l}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{c}\int \frac{\underline{r}}{r^3}\times\underline{J}\, dv = \frac{I}{c}\int\frac{\underline{r}\times d\underline{l}}{r^3}}$$

1° LEGGE DI LAPLACE

* 2° LEGGE DI LAPLACE E FORZA DI LORENTZ



SPIRA

τ = traslazione infinitesima (vettore infinitesimo arbitrario)

Supponiamo che un elemento infinitesimo della spira, $d\underline{l}$, sia mobile e supponiamo di imporgli una traslazione $\underline{\tau}$ (mentre si provvede a mantenere costante la I).

Il lavoro che compio per spostare il circuito è uguale e opposto alle forze che il campo esercita.

$$U = -\frac{I}{c}\phi \qquad dU = -\frac{I}{c}\,d\phi = -\frac{I}{c}\,\underline{B}\cdot\underline{m}\cdot dS$$

$$\underline{m}\cdot dS = \underline{\tau}\times d\underline{l}$$

$$dU = -\frac{I}{c}(\underline{\tau}\times d\underline{l})\,\underline{B} = -\frac{I}{c}(d\underline{l}\times\underline{B})\,\underline{\tau}$$

$dU = -\underline{\tau}\cdot d\underline{F}$ lavoro necessario per spostare l'elementino

$$\underline{\tau}\cdot d\underline{F} = \frac{I}{c}(d\underline{l}\times\underline{B})\,\underline{\tau} \quad \rightarrow \text{per } \underline{\tau} = \tau\cdot\underline{i}$$

$$\cancel{\tau}\cdot d\underline{F}x = \frac{I}{c}(d\underline{l}\times\underline{B})\,\underline{i}\cdot\cancel{\tau}$$

$$I\cdot d\underline{l} = I\cdot dl\cdot\underline{u}$$

$$I\cdot\underline{u} = \underline{J}\cdot S$$

$\longrightarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 48

DOMANDE 10 e 11: Prima equazione di Maxwell, Legge di Faraday e 2° equazione di maxwell

$$\text{rot}\,\underline{H} = \frac{4\pi}{c}\,\underline{J}$$ $\underline{J}$ è assunta costante nel tempo e solenoidale

FORMA DIFFERENZIALE TEOREMA DI AMPERE

Quando la densità di corrente $\underline{J}$ non è solenoidale il campo da esso prodotto dovrà soddisfare una equazione diversa da quella precedente ma dovrà contenerla come caso particolare.

La generalizzazione dell'equazione fu intuita da Maxwell.

La densità di corrente $\underline{J}$ soddisfa l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0 \qquad \text{dove} \quad \rho = \frac{\text{div}\,\underline{D}}{4\pi}$$

Dunque, anche se $\underline{J}$ non è solenoidale, è sempre tale $\underline{\nabla}(\underline{J} + \underline{J}s) = 0$ con

$$\underline{J}s = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$$

Possiamo quindi scrivere la forma più generale della <u>1° equazione di Maxwell</u>

$$\boxed{\text{rot}\,\underline{H} = \frac{4\pi}{c}(\underline{J} + \underline{J}s) = \frac{4\pi}{c}\,\underline{J} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial D}{\partial t}}$$

Questa equazione si riduce all'equazione $\text{rot}\,\underline{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \underline{J}$ se $\underline{H}$ è indipendente dal tempo t.

L'ipotesi che ci ha condotto alla 1° equazione di Maxwell consiste nell'ammettere che le correnti di spostamento producono gli stessi effetti delle vere correnti elettriche.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0 \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{D} = 4\pi\rho \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 48

Applicando il teorema di Stokes otteniamo:

$$\iint_{\Sigma}\left(\text{rot}\,\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right)\underline{n}\cdot dS = 0$$ FORMA INTEGRALE DELLA LEGGE DI FARADAY

dove S è una qualsiasi superficie avente per contorno Σ

Dovendo questa relazione valere per qualunque superficie S, se ne ricava: ⊛

$$\boxed{\text{rot}\,\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}$$

Questa relazione vettoriale, equivalente a 3 equazioni differenziali scalari, è la 2° equazione di Maxwell.

Possiamo interpretare il fenomeno dell'induzione dicendo: "una corrente di spostamento magnetica genera un campo elettrico con la stessa legge, salvo il segno, con cui una corrente elettrica genera un campo magnetico!"

QUADRO DELLE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

$$\begin{cases} \text{div}\,\underline{B} = 0 \\ \text{div}\,\underline{D} = 4\pi\rho \\ \text{rot}\,\underline{H} = \dfrac{4\pi}{c}\underline{J} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \underline{D}}{\partial t} \\ \text{rot}\,\underline{E} = -\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} \end{cases}$$

Tutti i fenomeni elettromagnetici sono dunque governati dalle equazioni fondamentali scritte a lato.

⊛ La seconda equazione di Maxwell si ricava applicando la seguente formula ad un disco $\bigcirc\!\longrightarrow \underline{n}$

$$\int_{\Sigma}\left(\text{rot}\,\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right)\underline{n}\cdot dS = 0 \longrightarrow \iint\left(\text{rot}\,\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right)\underline{i}\cdot dS = 0$$

$$\pi r^2 \left\langle \text{rot}\,\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right\rangle i = 0 \longrightarrow \boxed{\text{rot}\,\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}$$ 2° EQUAZIONE DI MAXWELL

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 48

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}\left(\underline{H}\cdot \text{rot}\,\underline{E} - \underline{E}\,\text{rot}\,\underline{H}\right) + \underbrace{\underline{E}\cdot\underline{J}}$$ perdita di energia del campo elettromagnetico

→ energia dissipata come calore

Si definisce vettore di Poynting:

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi}\,\underline{E}\times\underline{H}$$

$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} = \text{div}\,\underline{S} + \underline{E}\cdot\underline{J}}$$

dove: $\text{div}\,\underline{S}$ = energia persa attraverso la superficie

$\underline{E}\cdot\underline{J}$ = energia persa sotto forma di calore.

BILANCIO DI ENERGIA IN FORMA DIFFERENZIALE (LOCALE)

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial t}\int_D W\,dv = \int_{\partial D}\underline{S}\cdot\underline{n}\cdot d\sigma + \int_D \underline{E}\cdot\underline{J}\cdot dv}$$

BILANCIO DI ENERGIA IN FORMA INTEGRALE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 48

$$\cancel{i}\underline{K} \times \underline{H_0} = -\cancel{i}\omega \underline{E_0} \frac{\varepsilon}{c} \qquad (1)$$

$$\cancel{i}\underline{K} \times \underline{E_0} = \cancel{i}\omega \underline{H_0} \cdot \frac{\mu}{c} \qquad (2)$$

$\underline{H_0}$ e $\underline{E_0}$ devono soddisfare le equazioni vettoriali

Ricavo $\underline{E_0}$ dalla (1) e poi sostituisco $\underline{E_0}$ nella (2) e ottengo:

$$\underline{E_0} = -\frac{c}{\varepsilon\omega} \underline{K} \times \underline{H_0} \qquad (3)$$

$$-\frac{c}{\varepsilon\omega} \underline{K} \times (\underline{H_0} \times \underline{K}) = \omega \underline{H_0} \frac{\mu}{c} \qquad (4)$$

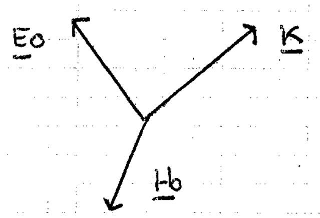
$\underline{H_0} \cdot \underline{K} = 0 \longrightarrow \underline{H_0} \perp \underline{K}$

$\underline{E_0} \cdot \underline{K} = 0 \longrightarrow \underline{E_0} \perp \underline{K}$

$\Big\}$ $\underline{E_0}$ e $\underline{H_0}$ sono normali alla direzione di propagazione

$\underline{K} \times \underline{H_0} = -\omega \frac{\varepsilon}{c} \underline{E_0}$ dalla (3)

$0 = \underline{E_0} \cdot \underline{H_0} \longrightarrow \underline{E_0} \perp \underline{H_0}$ $\Big\}$ Campo elettrico è perpendicolare al campo magnetico.



Sviluppando il doppio prodotto vettoriale della (4)

$$-\frac{c}{\varepsilon\omega} \left[\underline{K} (\underline{H_0} \cdot \underline{K}) - \underline{H_0} \cdot k^2 \right] = \omega \frac{\mu}{c} \underline{H_0}$$

$$\frac{c}{\varepsilon\omega} \underline{H_0} \cdot k^2 = \omega \frac{\mu}{c} \underline{H_0}$$

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}$$ Relazione di dispersione

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$ c = velocità della luce nel vuoto

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 48

POLARIZZAZIONE

La polarizzazione di un'onda elettromagnetica indica la direzione di oscillazione del vettore campo elettrico durante la propagazione dell'onda (il campo magnetico sarà polarizzato nella direzione ortogonale).

$$\underline{E} = (\underline{E_1} + i\underline{E_2})e^{i\varphi} = (\underline{E_1} + i\underline{E_2})(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi) = \underline{E_1}\cos\varphi - \underline{E_2}\,\mathrm{sen}\varphi + i(\underline{E_2}\cos\varphi + \underline{E_1}\,\mathrm{sen}\varphi)$$

$$X = E_{1x}\cos\varphi - E_{2x}\,\mathrm{sen}\varphi$$

$$Y = E_{1y}\cos\varphi - E_{2y}\,\mathrm{sen}\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{Y E_{2x} - X E_{2y}}{D} \qquad \mathrm{sen}\varphi = \frac{E_{1x} Y - E_{1y} X}{D} \qquad D = \begin{vmatrix} E_{1x} & -E_{2x} \\ E_{1y} & -E_{2y} \end{vmatrix} = -E_{1x}E_{2y} + E_{1y}E_{2x}$$

$$(E_{1x} Y - E_{1y} X)^2 + (E_{2x} Y - E_{2y} X)^2 = D^2$$

Si dice che l'onda è polarizzata in maniera ellittica. Se E_0 e H_0 sono reali, l'onda è polarizzata in modo lineare. La punta del vettore di Poynting descrive la seguente traiettoria:

$$X^2(E_{1y}^2 + E_{2y}^2) + Y^2(E_{1x}^2 + E_{2x}^2) - 2XY(E_{1x}E_{2y} + E_{2x}E_{2y}) = D^2$$

CASO IN CUI ABBIAMO UN MEZZO CONDUTTORE ($\gamma \neq 0$) B

Vale la legge di Ohm

$$\begin{cases} c\,\mathrm{rot}\underline{H} = 4\pi \underline{J} + \varepsilon \dfrac{\partial \underline{E}}{\partial t} \\ c\,\mathrm{rot}\underline{E} = -\mu \dfrac{\partial \underline{H}}{\partial t} \end{cases}$$

Riscrivo usando l'espressione dell'onda armonica piana

$$\begin{cases} ic\underline{K} \times \underline{H_0} = 4\pi\gamma \underline{E_0} - i\omega\varepsilon\underline{E_0} \\ ic\underline{K} \times \underline{E_0} = i\omega\mu \underline{H_0} \end{cases}$$

$$\underline{K} \times \underline{H_0} = -i\frac{4\pi\gamma}{c}\underline{E_0} - \frac{\varepsilon\omega}{c}\underline{E_0} = -\frac{\omega}{c}\left(\varepsilon + \frac{4\pi i\gamma}{\omega}\right)\underline{E_0} = -\frac{\omega\varepsilon'}{c}\underline{E_0}$$

$$\underline{H_0} = \frac{c}{\omega\mu}\underline{K} \times \underline{E_0} \rightarrow \frac{c}{\omega\mu}\underline{K} \times (\underline{K} \times \underline{E_0}) = -\frac{\omega\varepsilon'}{c}\underline{E_0} \rightarrow -\frac{c}{\omega\mu}K^2\underline{E_0} = -\frac{\omega\varepsilon'}{c}\underline{E_0}$$

$$\omega^2\varepsilon'\mu = c^2K^2$$

$$\boxed{\omega^2\left(\varepsilon + \frac{4\pi i\gamma}{\omega}\right)\mu = c^2K^2} \qquad \text{LEGGE DI DISPERSIONE}$$

Se K è complesso posso separare la parte reale da quella immaginaria ($K = \alpha + i\beta$)

$$\exp\{i[\hat{\underline{k}}(\alpha + i\beta)\, r - \omega T]\} = \exp(-\beta\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r})\exp[i\alpha(\underline{k}\cdot\underline{r} - v't)] \quad \text{con } v' = \omega/\alpha \longrightarrow$$

CONTINUA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 48

DOMANDA 15: Potenziale elettromagnetico

EQUAZIONI CHE RISOLVONO LE EQUAZIONI DI MAXWELL

C'è un modo per scrivere le equazioni di Maxwell con un sistema a 4 incognite, utilizzando il potenziale vettore e il potenziale scalare.

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \mathrm{rot}\underline{V} \quad \longrightarrow \mathrm{div}\underline{H} = 0$$

$$\mathrm{rot}\underline{E} = -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\underline{V} \qquad \text{MAXWELL}$$

$$\mathrm{rot}\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\mathrm{rot}\underline{V}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{POTENZIALE VETTORE}} = \underbrace{-\,\mathrm{grad}V}_{\text{POTENZIALE SCALARE}}$$

$$V \to V - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\underline{U} \to \underline{U} + \mathrm{grad}\varphi$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\left(\underline{U} + \mathrm{grad}\varphi\right) = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\underline{V}$$

$$\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{U} + \mathrm{grad}\varphi\right) = -\,\mathrm{grad}\left(V - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

I potenziali vettore e scalare sono definiti a meno di un campo scalare φ.
Ora cerchiamo una coppia di equazioni per il campo scalare e vettoriale.

$$\mathrm{rot}\underline{H} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{\varepsilon}{c}\cdot\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\underline{U} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}V - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\underline{U} - \nabla^2\underline{U}\right) = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}V - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}\right)$$

$$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{div}\underline{U} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{1}{\mu}\nabla^2\underline{U} - \frac{\varepsilon}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\underline{U}}{\partial t^2}$$

Prendo φ tale che $\mathrm{div}\underline{U} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\nabla^2\underline{U} - \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\cdot\frac{\partial^2\underline{U}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\cdot\underline{J} \qquad \text{GAUGE DI LORENTZ}$$

$\longrightarrow$

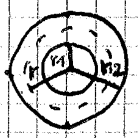
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 48

1) TEOREMA DI GAUSS

• SIMMETRIA SFERICA

SFERA CAVA



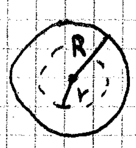
$r_1 < r < r_2$

$$\Phi = 4\pi q$$

$$\cancel{4\pi} r^2 E = \cancel{4\pi}\rho \frac{4\pi}{3}(r^3 - r_1^3)$$

$$E = \frac{4\pi\rho}{3}\cdot\frac{r^3 - r_1^3}{r^2}$$

SFERA PIENA



$$\Phi = 4\pi q$$

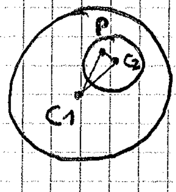
ALL' INTERNO

$$\cancel{4\pi} r^2 E = \cancel{4\pi}\rho \frac{4\pi}{3} r^3 \qquad E = \frac{4\pi}{3}\rho r$$

$$\cancel{4\pi} r^2 E = \cancel{4\pi}\rho \frac{4\pi}{3} R^3 \qquad E = \frac{4\pi R^3}{3r^2}\rho$$

ALL'ESTERNO

SFERA CON CAVITÀ SFERICA ECCENTRICA (PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI)

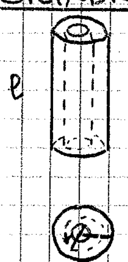


$$E = \frac{4\pi}{3}\rho\,\overline{C_1P} - \frac{4\pi}{3}\rho\,\overline{C_2P} = \frac{4\pi}{3}\rho(\overline{C_1P} - \overline{C_2P})$$

$$E = \frac{4\pi}{3}\rho\,\overline{C_1C_2}$$

• SIMMETRIA CILINDRICA

CILINDRO CAVO



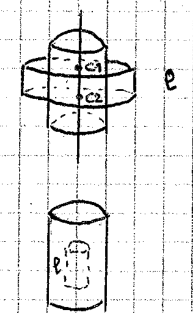
$r_1 < r < r_2$

$$\Phi = 4\pi q$$

$$\cancel{2\pi} r \cancel{l} E = \cancel{4\pi}^{2}\rho\pi(r^2 - r_1^2)\cancel{l}$$

$$E = \frac{2\pi\rho}{r}(r^2 - r_1^2)$$

CILINDRO PIENO (calcolo E all'interno e all'esterno)



$$\Phi = 4\pi q$$

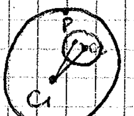
$$2\pi r l E = 4\pi\pi R^2 l \rho$$

$$E = \frac{2\pi R^2\rho}{r} \qquad \text{ALL'ESTERNO}$$

$$2\pi r l E = 4\pi\pi r^2 l \rho$$

$$E = 2\pi\rho r \qquad \text{ALL' INTERNO}$$

CILINDRO CON CAVITÀ CILINDRICA ECCENTRICA

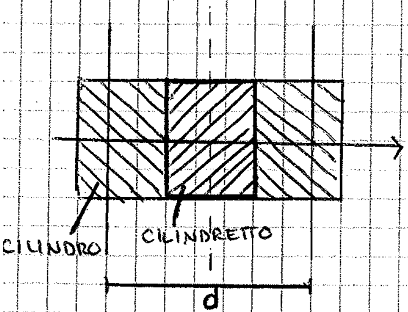


$$E = 2\pi\rho\,\overline{C_1P} - 2\pi\rho\,\overline{C_2P} = 2\pi\rho(\overline{C_1P} - \overline{C_2P})$$

$$E = 2\pi\rho\,\overline{C_1C_2}$$

• SIMMETRIA PIANA

: Abbiamo uno strato piano uniformemente carico, abbiamo simmetria. Lo strato piano è una lastra indefinita spessa d



Considero il cilindro e il cilindretto come 2 superfici di Gauss di raggio R

$$\Phi = 4\pi q$$

$$2\pi R^2 E = 4\pi\rho\pi R^2 2x$$

$$E = 4\pi\rho x$$

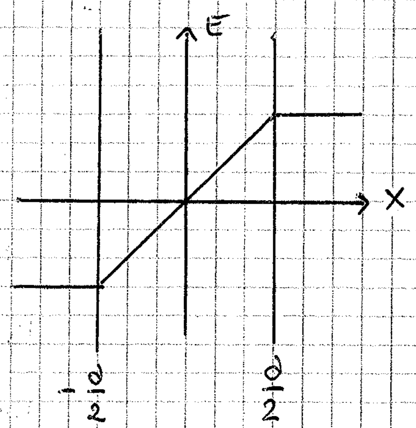
ALL' INTERNO

$$\Phi = 4\pi q$$

$$2\pi R^2 E = 4\pi\rho\pi R^2 d$$

$$E = 2\rho\pi d$$

ALL' ESTERNO



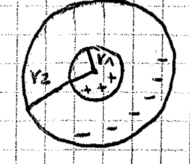
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 48

③ CONDENSATORI

Capacità di un condensatore $C = \frac{q}{V_{01} - V_{02}}$ $\quad q_2 = -q_1$

• CONDENSATORE SFERICO



$\frac{dV}{dr} = -E_0 = -\frac{q}{r^2}$

$E = \frac{q}{r^2}$ tra le sfere

$V_{01} - V_{02} = \int_{V_{02}}^{V_{01}} dV = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dV}{dr}\, dr = -\int_{r_2}^{r_1} q \frac{dr}{dr^2}$

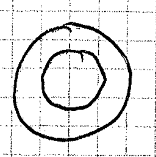
$= q\left[\frac{1}{r}\right]_{r_2}^{r_1} = q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = q\,\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1} = q\,\frac{4\pi d}{\sqrt{S_1 S_2}}$

$S_1 = 4\pi r_1^2 \qquad S_2 = 4\pi r_2^2$

$S_1 S_2 = 16\pi^2 r_1^2 r_2^2 \qquad \sqrt{S_1 S_2} = 4\pi r_1 r_2$

$C = \frac{q}{V_{01} - V_{02}} = \frac{\sqrt{S_1 S_2}}{4\pi d} \longrightarrow \frac{S}{4\pi d}$ quando le superfici sono molto grandi $S_1 \sim S_2$

• CONDENSATORE CILINDRICO



$E(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{2\lambda}{r}$

$V_{01} - V_{02} = \int_{V_{02}}^{V_{01}} dV = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dV}{dr}\, dr =$

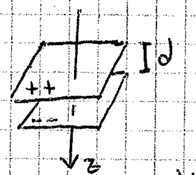
$= -\int_{r_2}^{r_1} \frac{2\lambda}{r}\, dr = 2\lambda \ln\frac{r_2}{r_1} = 2\,\frac{q}{\ell} \ln\frac{r_2}{r_1}$

x GRANDI RAGGI

$C = \frac{q}{V_{01} - V_{02}} = \frac{\ell}{2}\,\frac{1}{\ln r_2/r_1} \simeq \frac{\ell}{2}\,\frac{r_1}{\delta} = \frac{S}{4\pi\delta}$

$r_2/r_1 = \frac{r_1 + \delta}{r_1} = 1 + \frac{\delta}{r_1} \qquad \ln\frac{r_2}{r_1} \simeq \frac{\delta}{r_1}$

• CONDENSATORE PIANO



$E = 2\pi\sigma + 2\pi\sigma = 4\pi\sigma$

$\frac{dV}{dt} = -4\pi\sigma$

$V_{01} - V_{02} = 4\pi\sigma d$

$V_{01} - V_{02} = \int_{z_2}^{z_1} \frac{dV}{dz}\, dz = -4\pi\sigma(z_1 - z_2) =$

$= 4\pi\sigma d = 4\pi\left(\frac{q}{S}\right) d \qquad C = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{S}{d}$

• CONDENSATORI CON DIELETTRICO

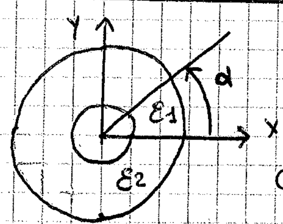
SFERE IN SERIE

$r_1 < r < r_2 \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \;\; | \;\; r_2 < r < r_3 \quad \varepsilon = \varepsilon_2$

$C_1 = \varepsilon_1 Q\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \qquad C_2 = \varepsilon_2 Q\,\frac{r_3 - r_2}{r_2 r_3}$

$\frac{1}{C} = \frac{r_1 r_2}{\varepsilon_1 Q (r_2 - r_1)} + \frac{r_3 \cdot r_2}{Q \varepsilon_2 (r_3 - r_2)} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

SFERE IN PARALLELO

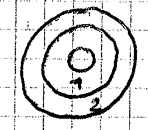


$\begin{cases} 0 < \theta < \alpha & \varepsilon = \varepsilon_1 \\ \alpha < \theta < 2\pi - \alpha & \varepsilon = \varepsilon_2 \end{cases}$

$C_1 = \frac{\alpha}{2\pi}\,\varepsilon_1\,\frac{r_2 \cdot r_1}{r_2 - r_1} \qquad C_2 = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}\,\varepsilon_2\,\frac{r_2 \cdot r_1}{r_2 - r_1}$

$C = C_1 + C_2 = \frac{r_2 \cdot r_1}{2\pi(r_2 - r_1)}\left(\alpha\varepsilon_1 + (2\pi - \alpha)\varepsilon_2\right)$

CILINDRI IN SERIE

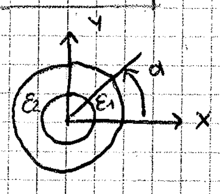


$r_1 < r < r_2 \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \;\; | \;\; r_2 < r < r_3 \quad \varepsilon = \varepsilon_2$

$C_1 = \frac{\ell}{2\ln^{r_2/r_1}}\,\varepsilon_1 \qquad C_2 = \frac{\ell}{2\ln^{r_3/r_2}}\,\varepsilon_2$

$\frac{1}{C} = \frac{2\ln(r_2/r_1)}{\varepsilon_1 \ell} + \frac{2\ln(r_3/r_2)}{\varepsilon_2 \ell} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

CILINDRI IN PARALLELO

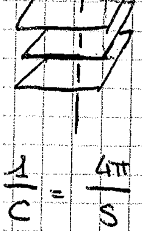


$\begin{cases} 0 < \theta < \alpha & \varepsilon = \varepsilon_1 \\ \alpha < \theta < 2\pi - \alpha & \varepsilon = \varepsilon_2 \end{cases}$

$C_1 = \frac{\alpha}{2\pi}\,\varepsilon_1\,\frac{\ell}{2\ln^{r_2/r_1}} \qquad C_2 = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}\,\varepsilon_2\,\frac{\ell}{2\ln^{r_2/r_1}}$

$C = C_1 + C_2 = \frac{\ell}{4\pi \ln^{r_2/r_1}}\left(\varepsilon_1\alpha + (2\pi - \alpha)\varepsilon_2\right)$

PIANI IN SERIE



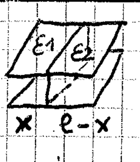
$0 < z < z_1 \qquad \varepsilon = \varepsilon_1$

$z_1 < z < z_2 \qquad \varepsilon = \varepsilon_2$

$C_1 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \cdot \frac{S}{z_1} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2}{4\pi}\,\frac{S}{z_2 - z_1}$

$\frac{1}{C} = \frac{4\pi}{S}\left(\frac{z_1}{\varepsilon_1} + \frac{z_2 - z_1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

PIANI IN PARALLELO



$C_1 = \frac{S}{4\pi d} \cdot \frac{x}{\ell}\,\varepsilon_1$

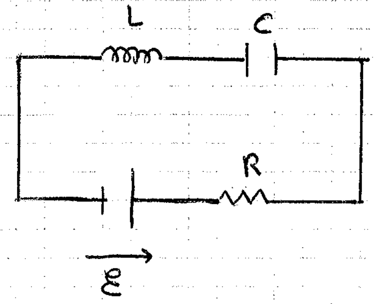
$C_2 = \frac{S}{4\pi d}\,\frac{\ell - x}{\ell}\,\varepsilon_2$

$C = C_1 + C_2 = \frac{S}{4\pi d}\left(x\varepsilon_1 + (\ell - x)\varepsilon_2\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 48

(4)



$\mathcal{E}$ oscillante

1° METODO

$$\mathcal{E} - RI - \frac{Q}{C} - LI' = 0$$

$$\mathcal{E}' = RI' + \frac{I}{C} + LI''$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cos \Omega t + \mathcal{E}_2 \operatorname{sen} \Omega t \qquad \mathcal{E}' = -\mathcal{E}_1 \Omega \operatorname{sen} \Omega t + \mathcal{E}_2 \Omega \cos \Omega t$$

$$I = I_1 \cos \Omega t + I_2 \operatorname{sen} \Omega t \qquad I' = -I_1 \Omega \operatorname{sen} \Omega t + I_2 \Omega \cos \Omega t$$

$$I'' = -\Omega^2 I_1 \cos \Omega t - I_2 \Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t$$

$$-\mathcal{E}_1 \Omega \operatorname{sen} \Omega t + \mathcal{E}_2 \Omega \cos \Omega t = R\left(-I_1 \Omega \operatorname{sen} \Omega t + I_2 \Omega \cos \Omega t\right) + \frac{1}{C}\left(I_1 \cos \Omega t + I_2 \operatorname{sen} \Omega t\right) +$$

$$+ L\left(-\Omega^2 I_1 \cos \Omega t - \Omega^2 I_2 \operatorname{sent} \Omega\right)$$

$$-\mathcal{E}_1 \Omega = -R I_1 \Omega + \frac{1}{C} I_2 - \Omega^2 L I_2$$

$$\mathcal{E}_2 \Omega = R I_2 \Omega + \frac{1}{C} I_1 - \Omega^2 L I_1$$

$$\begin{bmatrix} -R\Omega & -\Omega^2 L + \frac{1}{C} \\ -\Omega^2 L + \frac{1}{C} & R\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D} = -R^2 \Omega^2 - \left(\frac{1}{C} - \Omega^2 L\right)^2$$

$$I_1 = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{vmatrix} -\mathcal{E}_1 & -\Omega^2 L + \frac{1}{C} \\ \mathcal{E}_2 & R\Omega \end{vmatrix} = -\frac{1}{\mathcal{D}}\left[\mathcal{E}_1 R \Omega + \mathcal{E}_2\left(-\Omega^2 L + \frac{1}{C}\right)\right]$$

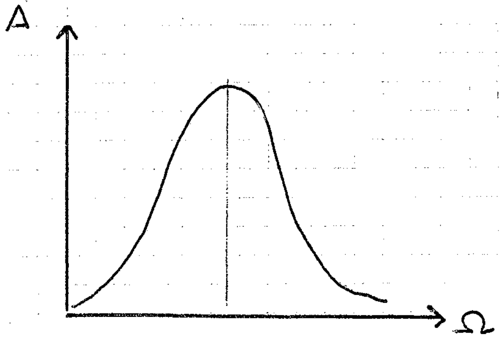
$$I_2 = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{vmatrix} -\Omega R & -\mathcal{E}_1 \\ -\Omega^2 L + \frac{1}{C} & \mathcal{E}_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\mathcal{D}}\left[\Omega \mathcal{E}_2 R + \mathcal{E}_1\left(-\Omega^2 L + \frac{1}{C}\right)\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 48

$$A = \frac{|E|}{R} \qquad A = \frac{|E|^2}{4R^2} = \frac{|E|^2}{\left(\frac{1}{C}-\Omega L\right)^2 + R^2}$$

$$4R^2 = \left(\frac{1}{C\Omega} - \Omega L\right)^2 + R^2$$



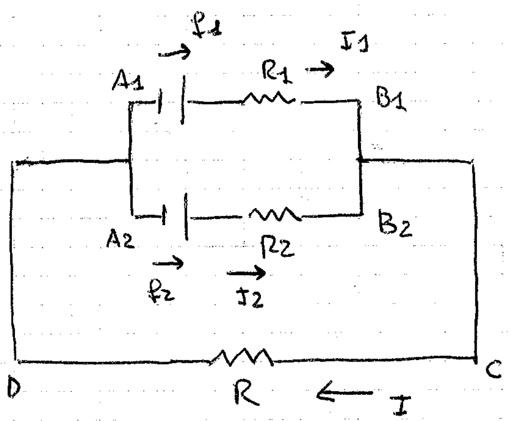
$$3R^2 = \left(\frac{1}{C\Omega} - \Omega L\right)^2$$

$$\frac{1}{C\Omega} - \Omega L = \pm R\sqrt{3}$$

$$\Delta\Omega = \frac{R\sqrt{3}}{L} + \frac{R\sqrt{3}}{L} = \frac{2R\sqrt{3}}{L}$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\mp \frac{4\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right)$$

•



<u>A_1B_1CD</u>

$$f_1 - I_1R_1 - RI = 0$$

<u>A_2B_2CD</u>

$$f_2 - I_2R_2 - RI = 0$$

2° LEGGE DI KIRCHOFF

$$I = I_1 + I_2$$

$$f_1 = I_1(R_1 + R) + I_2R$$

$$f_2 = I_1R + I_2(R_2 + R)$$

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} R_1 + R & R \\ R & R_2 + R \end{vmatrix} = (R_1 + R)(R_2 + R) - R^2 = R_1R_2 + R(R_1 + R_2)$$

$$\mathcal{D}_1 = \begin{vmatrix} f_1 & R \\ f_2 & R + R_2 \end{vmatrix} = f_1(R + R_2) - Rf_2$$

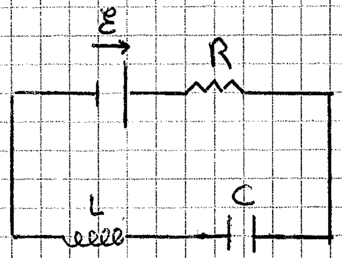
$$\mathcal{D}_2 = \begin{vmatrix} R_1 + R & f_1 \\ R & f_2 \end{vmatrix} = (R_1 + R)f_2 - Rf_1$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}} \qquad I_2 = \frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{D}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 48

4 CIRCUITI RLC

- 

$\mathcal{E}$ COSTANTE (OPPURE f)

$$\mathcal{E} - RI - \frac{Q}{C} - LI' = 0$$

$$RI' + \frac{I}{C} + LI'' = 0$$

$$I = Ae^{\lambda t}$$

$$L\lambda^2 \cancel{A} + R\lambda \cancel{A} + \frac{\cancel{A}}{C} = 0 \longrightarrow L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

$$\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$$

1) $R^2 > 4\frac{L}{C}$ 2 radici reali negative $\lambda = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$

2) $R^2 < 4\frac{L}{C}$ 2 radici complesse coniugate $\lambda = \dfrac{-R \pm \sqrt{4L/C - R^2}}{2L}$

$$\omega = \frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}$$ PULSAZIONE

$$Ae^{i\omega t} = (A_1 + iA_2)(\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t) = A_1\cos\omega t + A_2\,\mathrm{sen}\,\omega t + i(A_2\cos\omega t + A_1\,\mathrm{sen}\,\omega t)$$

$$Be^{-i\omega t} = (B_1 + iB_2)(\cos\omega t - i\,\mathrm{sen}\,\omega t) = B_1\cos\omega t + B_2\,\mathrm{sen}\,\omega t + i(B_2\cos\omega t - B_1\,\mathrm{sen}\,\omega t)$$

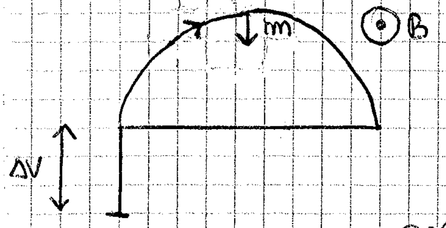
$$\mathrm{Re}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) = (A_1 + B_1)\cos\omega t + (B_2 - A_2)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$\mathrm{Im}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) = (A_2 + B_2)\cos\omega t + (A_1 - B_1)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 48

5 • SPETTROMETRO DI MASSA



accelerazione centripeta

$$\underline{F} = q\underline{v} \times \underline{B} = qvB \cdot \underline{n} \qquad \underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

$$\underline{a} = \frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \underline{n}$$

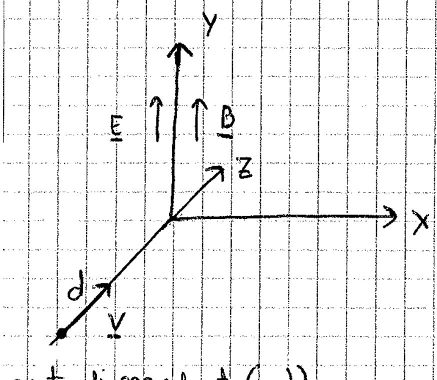
$$q\cancel{v}B = \frac{mv^{\cancel{2}}}{r} \rightarrow v = \frac{qBr}{m} \qquad \frac{mv^2}{r} = q\Delta V \rightarrow qvB = \frac{2q\Delta V}{r} \rightarrow v_B = \frac{2\Delta V}{r}$$

Ci permette di misurare le masse di particelle cariche

$$\frac{qB^2r}{m} = \frac{2\Delta V}{r} \longrightarrow m = \frac{qr^2B^2}{2\Delta V}$$

METODO DELLA PARABOLA

Dove finiscono le cariche per effetto di $\underline{B}$ ed $\underline{E}$?



punto di coordinate $(-d)$

$$x = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{d}{v}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{qBv}{mc}t^2 = \frac{1}{2}\frac{qB\cancel{v}d^2}{mc\,v^{\cancel{2}}}$$

elimino $\rightarrow v$

$$\frac{y^2}{x} = \frac{1/4\,(qB/mc)^2\,d^4}{1/2\,qE/m\,d^2}$$

si dispongono lungo lo schermo xy secondo una parabola di equazione

• METODO DI HALL

$m\dot{\underline{v}} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}/c) - m\underline{v}$ particella carica che collide con particelle neutre

$t \rightarrow \infty \qquad m \cdot \underline{v} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}/c)$

$\underline{v} = \underline{a} + \underline{v} \times \underline{b}$ $\qquad \underline{a}$ e $\underline{b}$ sono vettori $\Big\langle$ $\underline{a}$ proporz. campo elettrico; $\underline{b}$ proporz. campo magnetico

$$\underline{v} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{v} \times \underline{b} = \underline{a} \times \underline{b} + (\underline{v} \times \underline{b}) \times \underline{b} = \underline{a} \times \underline{b} - \underline{b} \times (\underline{v} \times \underline{b}) = \underline{a} \times \underline{b} - \underline{v} \cdot b^2 + \underline{b} \cdot \underline{v} \cdot \underline{b} =$$

$$= \underline{a} \times \underline{b} - \underline{v} \cdot b^2 + \underline{b} \cdot \underline{a} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{v} = \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b} - b^2\underline{v} + \underline{b} \cdot \underline{a} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{v} = \frac{1}{1 + b^2} \cdot (\underline{a} + \underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \cdot \underline{a} \cdot \underline{b})$$

Per $\underline{b} = 0 \qquad \underline{v} = \underline{a} = \dfrac{qE}{h}$ ~~effetto Hall~~ EFFETTO HALL

~~senza~~ ho l'effetto Hall, particella carica frenata da un mezzo, immersa in un campo $\underline{E}$ e magnetico $\underline{B}$ che ne deriva la velocità $v = H \cdot E$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 48

$$\mathrm{div}\,(\varphi \underline{v}) = \varphi \underline{\nabla} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \varphi$$

$$\mathrm{rot}\,(\varphi \underline{v}) = \varphi\, \mathrm{rot}\, \underline{v} + \mathrm{grad}\, \varphi \times \underline{v}$$

$$\mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \underline{v} = \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \underline{v} - \nabla^2 \underline{v}$$

$$\mathrm{div}\,(\underline{A} \times \underline{B}) = (\mathrm{rot}\, \underline{A}) \cdot \underline{B} - \underline{A} \cdot \mathrm{rot}\, \underline{B}$$

— · —

$$\int_A^B \mathrm{grad}\, \varphi \cdot d\underline{s} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}\, \underline{v} \cdot \underline{n}\, dS = \int_{\partial \Sigma} \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

$$\int_D \mathrm{div}\, \underline{v}\, dv = \int_{\partial D} \underline{v} \cdot \underline{n}\, dS \quad (*)$$

$$*) \Rightarrow \int_D \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dv = \int_{\partial D} \varphi\, \underline{n} \cdot \underline{i}\, dS$$

$$= \int_{\partial D} \varphi\, n_x\, dS$$

— · —

$$\mathrm{grad}\, r = \underline{r}/r$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 48

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 48

eq. di Maxwell

$$\operatorname{div} \underline{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho$$

$$\operatorname{div} \underline{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}$$

— · —

equazione di Poisson

$$\nabla^2 V = -4\pi \rho$$

$$V = \iiint \frac{\rho(\underline{r}_0)}{|\underline{r} - \underline{r}_0|} \, dx_0 \, dy_0 \, dz_0$$

— · —

densità d'energia:

$$W = \frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \underline{E}^2 + \mu \underline{H}^2 \right)$$

vettore di Poynting:

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \times \underline{H}$$

(2)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 48