



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1142

DATA: 22/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Loverre

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Penna

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Programma del Corso di FISICA 1 (2011-12) Docente: Vittorio Penna

Elenco dettagliato degli argomenti di Teoria svolti nel corso. Testo di riferimento: Fisica Volume 1: Meccanica e Termodinamica, Mazzoldi-Nigro-Voci).

Avviso per chi si iscrive agli appelli. Il numero apparente di studenti interessati a sostenere l'esame di FISICA 1 risulta spesso eccezionalmente elevato. Le statistiche degli anni passati rivelano un'evidente anomalia mostrando che un 20-30 per cento di iscritti all'esame normalmente **non si presenta** in aula il giorno dell'appello causando gravi difficoltà logistiche e l'impiego di un numero maggiore di aule rispetto a quello necessario. Invito caldamente chi non avesse serie intenzioni di partecipare allo scritto (avendo optato nel frattempo per un appello successivo) a RITIRARE l'iscrizione in modo da permettere la valutazione corretta del numero di che è interessato ad affrontare l'esame. Ricordo che chi partecipa allo scritto deve presentarsi in aula munito di documento di identità.

Breve ripasso di analisi vettoriale: riferimenti cartesiani, basi ortonormali, vettori, modulo di un vettore, prodotto scalare e vettoriale.

CAPITOLO 1. Cinematica unidimensionale: leggi orarie, velocità media e istantanea, accelerazione media e istantanea. Formule integrali per la posizione e la velocità istantanea. Unità di misura. Applicazioni: moto uniforme, moto uniformemente accelerato, moto smorzato, moto armonico semplice.

Cinematica tridimensionale: moto curvilineo generico, vettore posizione, vettore velocità media e istantanea, vettore accelerazione media e istantanea. Formule integrali per determinare il vettore posizione e velocità istantanea. Moto uniforme e traiettorie rettilinee. Moto uniformemente accelerato e moto parabolico. Formula di Taylor e approssimazione del vettore posizione.

Vettore velocità in termini di versore tangente e lunghezza d'arco. Derivata di un versore (o di un vettore di modulo costante). Deduzione della formula dell'accelerazione in componente normale e tangenziale, raggio di curvatura. Applicazione al moto circolare: velocità angolare, accelerazione angolare, moto circolare uniforme e uniformemente accelerato.

Descrizione del moto su un piano in coordinate polari: vettore velocità e vettore accelerazione. Connessione con la descrizione del moto in coordinate Cartesiane.

CAPITOLO 2. Leggi della dinamica classica. I legge (principio d'inerzia); definizione di sistema inerziale. II legge di Newton. III legge (prin. di azione-reazione). Quantità di moto e Teorema dell'impulso. Conservazione della quantità di moto nell'interazione a due corpi. Unità di misura della forza.

Risultante delle forze applicate (principio di sovrapposizione). Equilibrio delle forze. Reazioni vincolari. Classificazione delle forze (fondamentali e effettive o statistiche). Forza peso, moto sul piano inclinato.

Forze effettive. Forze d'attrito radente: attrito statico, attrito dinamico, forze di coesione. Forza elastica: derivazione dell'equazione del moto. Forza d'attrito viscoso: derivazione dell'equazione del moto e soluzione (~~caso di un grave in caduta in un fluido~~, velocità limite). Forza centripeta. Tensione dei fili. Applicazioni.

Definizione elementare di lavoro. Lavoro come integrale di linea. Definizione di potenza ed energia cinetica. Unità di misura. Teorema dell'energia cinetica. Campo di forze. Calcolo del lavoro per 1) un campo di forze tridimensionale costante, 2) una forza elastica e 3) un campo di forze centrale a simmetria sferica (campo gravitazionale o campo di una carica puntiforme); definizione, nei tre casi, di energia potenziale. Definizione di campo di forze conservative (confronto e analogia con il concetto di funzione primitiva nel calcolo integrale). Campi conservativi e lavoro su un cammino chiuso.

Teorema di conservazione dell'energia meccanica. Formula del bilancio energetico in presenza di forze non conservative (e. g.: forze d'attrito). Campo di forze come gradiente dell'energia potenziale. Grafico dell'energia potenziale per un pendolo e per una forza elastica: relazione tra energia potenziale e cinetica. Grafico dell'energia potenziale per un moto unidimensionale generico: punti di equilibrio stabile ed instabile.

Definizione di momento delle forze e di momento angolare. Teorema del momento angolare. Derivazione dell'equazione del pendolo semplice. Conservazione del momento angolare per forze centrali. Applicazione al moto planare, velocità areale costante (collegamento alla II legge di Keplero).

CAPITOLO 3. Sistemi inerziali e non inerziali: velocità e accelerazione di trascinamento. Trasformazioni Galileiane. Principio di relatività classico. Dimostrazione dell'invarianza delle leggi della dinamica. Caso generale: sistemi non

CAPITOLO 8. Moto dei fluidi ideali. Descrizione qualitativa del moto in termini di linee di corrente (e tubi di flusso) e campo di velocità stazionario. Definizione di fluido ideale. Equazione di continuità (forma elementare) in termini di portata come conseguenza della incompressibilità del fluido ideale.

Pressione. Unità di pressione. Legge di Stevino. Equilibrio statico di un fluido: forze di volume e forze di pressione. Esempi: fluido in rotazione (facoltativo) e fluido nel campo gravitazionale \vec{g} . Spinta di Archimede. Dimostrazione del teorema di Bernoulli. Applicazioni: portanza di un'ala, velocità di efflusso di un fluido da un foro alla base di un serbatoio (Legge di Torricelli), tubo di Venturi. Cenni sui fluidi reali: moto vorticoso e numero di Reynolds.

CAPITOLO 9. Oscillatore armonico smorzato da una forza costante (par. 9.6). Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa (par. 9.7). Oscillatore armonico forzato (par. 9.8): risonanza in ampiezza e in energia.

CAPITOLI 10-11. Termodinamica. Introduzione: studio dei sistemi complessi mediante grandezze macroscopiche: pressione, volume e temperatura nei gas. Definizione di sistema aperto, chiuso, isolato; definizione di stato termodinamico e di equilibrio termodinamico. Equilibrio termico. Definizione di temperatura assoluta e definizione sperimentale di temperatura. Relazione tra scala Kelvin e scala Celsius, unità di misura. (paragrafi 10.1, 10.2, 10.3). Legge isoterma (Boyle-Mariotte) e Leggi di Gay-Lussac. Deduzione dell'equazione dei gas perfetti. Definizione di mole e definizione della costante R e della costante di Boltzmann. (paragrafo 11.1: pp 393-398)

Cenni di teoria cinetica dei gas (11.10: pp 432-437): equipartizione dell'energia. Calcolo dell'equazione che lega la pressione e l'energia cinetica media. Relazione tra energia cinetica media e temperatura. Formula dell'energia cinetica media nel caso di gas poliatomici. Definizione di Energia interna per i gas ideali e di calore specifico a volume costante (paragrafo 11.5, pp 404-405). Correzioni nella formula per i gas reali. Equazione di Van der Waals dei gas reali (p. 428, pp. 441-442). Lavoro di un gas: rappresentazione nel piano PV e interpretazione geometrica. Ciclo termodinamico: lavoro svolto da una macchina. Applicazioni: lavoro svolto in trasformazioni isobare e isoterme (paragrafi: 11.3, 11.4)

Esperimenti di Joule, equivalenza tra lavoro e calore (paragrafo 10.4). Trasformazioni reversibili e irreversibili (paragrafo 10.6). Calorimetria (paragrafo 10.7): definizione di caloria, calore specifico, capacità termica, bilancio dei calori scambiati. Unità di misura. Relazione tra variazione di energia interna U e calore. Trasmissione del calore: legge di Fourier (paragrafo 10.7).

Il primo principio della termodinamica (paragrafo 10.5). Forma differenziale e forma integrale del primo principio. Concetto di differenziale esatto e funzione di stato. Equivalenza tra calore e lavoro in una trasformazione ciclica. Applicazione del primo principio (lavoro, variazioni di U e scambi di calore) alle trasformazioni isobare, isocore, isoterme. Calcolo delle curve delle trasformazioni adiabatiche mediante il primo principio nei gas (paragrafi: 11.3, 11.4, 11.5, 11.6). Trasformazioni cicliche. La macchina di Carnot. Il rendimento (efficienza) in un ciclo di Carnot come funzione delle temperature delle sorgenti. (paragrafo 11.7, pp 416-418). Rendimento nei cicli di Stirling e Otto.

CAPITOLO 12. Il secondo principio della termodinamica: enunciati di Kelvin e di Clausius (paragrafo 12.1). Equivalenza degli enunciati (facoltativa). Interpretazione del II principio in termini di efficienza di una macchina. Processi reversibili: stati di equilibrio termodinamico e trasformazioni quasistatiche. Confronto tra caso reversibile e irreversibile in una trasformazione adiabatica. Processi irreversibili (esempi: espansione libera, espansione adiabatica rapida ecc.) e definizione di ciclo reversibile e irreversibile in termini di cambiamenti nell'ambiente circostante. (paragrafo 12.2; vedi anche 10.6)

Teorema (di Carnot) sull'efficienza di una macchina reale (reversibile o irreversibile) rispetto ad una macchina di Carnot (parte del paragrafo 12.3). Teorema di Clausius: deduzione della relazione 12.10 per cicli reversibili e irreversibili (paragrafo 12.5). Interpretazione grafica del Teorema di Clausius come macchina complessa unione di più cicli di Carnot.

Teorema di Clausius in un generico ciclo termodinamico e definizione di entropia. Entropia come funzione di stato. Variazione di entropia in un ciclo irreversibile. Calcolo esplicito della funzione di stato entropia di un gas ideale. Calcolo della variazione di entropia in trasformazioni isocore, isobare, isoterme, adiabatiche. Aumento di entropia in due sistemi isolati che scambiano quantità di calore infinitesime o che interagiscono meccanicamente con variazione di volume infinitesima. Legge di aumento dell'entropia (parte dei paragrafi 12.6, 12.7). Disordine e aumento dell'entropia in isocore, isobare e isoterme. Interpretazione del disordine.

CORSO DI FISICA

04.03.2014

- orari: martedì 08:30-11:30 Aula 3
- venerdì 16:00-19:00 Aula 3
- venerdì 11:30-13:00 (esercitazione) Aula 35

Penetrazione per laboratorio → non obbligatorio

libro: Nardelli, Nigro, Voci
Fisica (volume 1) - Meccanica - Termodinamica

Ricevimento: martedì 15:00-17:00 (dipartimento di fisica DISAT) 7303
dipartimento di aula 8

INTRODUZIONE

• distribuzione di probabilità (gaussiana)
distribuzione più comune nell'analisi statistica dei dati (sperimentali)

ce ne sono altre
(lorenziana, Poissoniana)

senza alterare le condizioni sperimentali

è adatta a descrivere la distribuzione delle miscele ottenute sperimentalmente
strumento che permette di vedere come si distribuiscono le miscele

QUALUNQUE

(casuale)

le miscele effettuate hanno un carattere random

miscele sparpagliate ma
si accumulano in una zona piuttosto che in un'altra

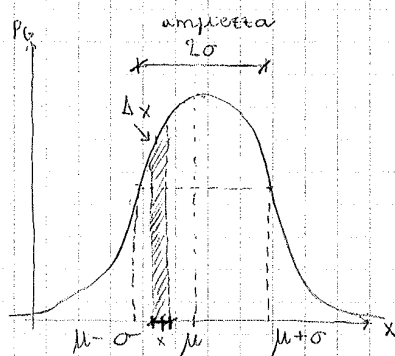
$$P_G(x; \mu, \sigma) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

↓
parametri

$\mu =$ valore medio (teorico)
 $\sigma^2 =$ varianza

variabile che misuriamo
misura della dispersione statistica dei dati
ca dei dati

σ = { deviazione standard
scarto quadratico medio
deviazione quadratico media



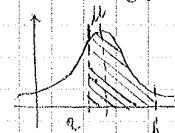
- valore max per $x = \mu$
- simmetrica rispetto a μ
- σ fa allargare o restringere la campana
- σ "piccolo" → \searrow
- σ "grande" → \nearrow
- x int. è la misura che effettuiamo

significato di $P_G(x)$ (ci sono sempre i parametri)
 $P_G(x) \Delta x =$ area sottostante $\Delta x =$ probabilità che si osservi un valore di x nell'intervallo preso a piacere
intervallo preso a piacere valore Δx

$P_G(x) =$ densità → moltiplicata per Δx , ⇒ diventa probabilità

probabilità che si osservi un valore x tra a e b : $P(a,b) = \int_a^b P_G(x) dx$
di probabilità
= area tratteggiata.

densità: evento che si manifesta con regolarità



$P(-\infty, +\infty) = 1$ → probabilità totale $P \in [0, 1]$

Conclusione: l'istogramma riproduce la gaussiana per $N \rightarrow \infty$

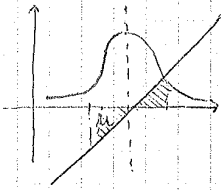
? legge dei grandi numeri = la media delle sequenze è un' approssimazione, che migliora al crescere di n , della media della distribuzione

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \mu$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2$$

sviluppo di μ : $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P_G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} ((x-\mu) + \mu) \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx =$
probabilità
 $= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) P_G(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu P_G(x) dx =$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \mu P_G(x) dx =$
0
 $= \mu \int_{-\infty}^{\infty} P_G(x) dx = \mu$ (1)

$y = x - \mu \rightarrow P_G(x)$ non cambia se quo
 $(x-\mu)$ cambia se quo



$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P_G(x) dx = \dots = \sigma^2$$

media sugli scarti quadratici = σ^2

per dimostrare $\dots = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P_G(x) dx \rightarrow y = x - \mu$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dy =$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y (-\sigma^2) \left(\frac{d}{dy} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right) dy = \frac{d}{dy} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{2y}{2\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} =$$

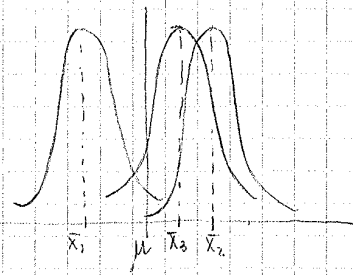
06-03-2014

$\bar{x} \rightarrow \mu$
 $s^2 \rightarrow \sigma^2$
 simmetria \rightarrow larghezza della campana
 \downarrow
 quando misuro tempo infine $\bar{x} \pm s$

teorema del limite centrale:
 (secondo teorema fondamentale della teoria della probabilità) \rightarrow il punto è la legge dei grandi numeri

Sia x_1, x_2, \dots, x_N un insieme di N variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite, con media \bar{x}_N e varianza s_N^2

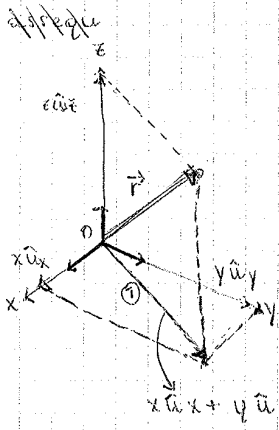
Al crescere di N , la distribuzione di $S_N = (\sqrt{N}(\bar{x}_N - \mu)) / s_N$ tende ad una distribuzione gaussiana, ove le \bar{x}_N si addensano attorno a $\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x}_N$ con varianza $\sigma^2 = s_N^2 / N$



le misure si affollano intorno a $\mu \rightarrow$ escono una distribuzione gaussiana

cinematica DEL PUNTO MATERIALE ①

→ sistemi di riferimento, vettori e loro proprietà



vettori: vettori di lunghezza unitaria per i componenti dello spazio 3D vettoriali

$\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ base cartesiana di vettori

da vettori → vettore qualunque $\vec{r} = \{ x \hat{u}_x + y \hat{u}_y + z \hat{u}_z = (x, y, z) \}$

il punto dello spazio è la punta del vettore \vec{r}

① compongo $x \hat{u}_x$ e $y \hat{u}_y$ → ne faccio la somma regola del parallelogramma così facendo ottengo $x \hat{u}_x + y \hat{u}_y$

② compongo $x \hat{u}_x + y \hat{u}_y$ con $z \hat{u}_z$ e ottengo \vec{r}

In generale, $\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$; $\vec{b} = b_x \hat{u}_x + b_y \hat{u}_y + b_z \hat{u}_z$

somma di vettori → $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{u}_x + (a_y + b_y) \hat{u}_y + (a_z + b_z) \hat{u}_z$

prodotto λ con vettore → $\lambda \vec{a} = \lambda a_x \hat{u}_x + \lambda a_y \hat{u}_y + \lambda a_z \hat{u}_z$

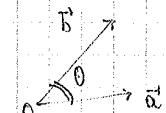
$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = (\lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x) \hat{u}_x + (\lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y) \hat{u}_y + (\lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z) \hat{u}_z$

prodotto scalare → $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ combinazione ordinata delle componenti → è commutativo
 = $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ → regola di Cartesiano

se $\vec{b} = \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ da cui $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ } modulo di \vec{a}
 oppure (a) } lunghezza di \vec{a}

oppure, per semplificare la rappa cartesiana, formula intrinseca

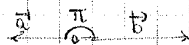
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$



- se i vettori sono paralleli → $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ (valore massimo) o valore minimo

- se $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- se i vettori sono contrapposti → $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \pi = -|\vec{a}| |\vec{b}|$



Il prodotto scalare tra due vettori è nullo

Ricorda: $\vec{a} = |\vec{a}| \hat{u}_a$
 $\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

prodotto vettoriale → $\vec{a} \wedge \vec{b} = \hat{u}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \hat{u}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \hat{u}_z (a_x b_y - a_y b_x)$

$\hat{u}_x \wedge \hat{u}_y = \hat{u}_z$
 $\hat{u}_y \wedge \hat{u}_z = \hat{u}_x$
 $\hat{u}_z \wedge \hat{u}_x = \hat{u}_y$

$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ (antisimmetria)

vettori ortogonali al piano individuato

oppure, formula intrinseca: $\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{u}$

è importante ricordare che se ho due vettori, automaticamente è individuato un piano, sul quale entrambi giacciono

Il prodotto vettoriale dà un vettore dunque è importante moltiplicare per il vettore \hat{u} per ottenere un vettore

Se conosco $v(t)$ nel moto unif. accelerato, allora usando ① trovo la legge oraria $x(t)$

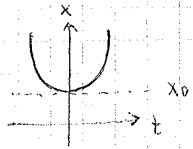
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (v(t_0) + a(s-t_0)) ds$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (v(t_0) + a(s-t_0)) ds = x(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + a \int_{t_0}^t (s-t_0) ds, \text{ da cui}$$

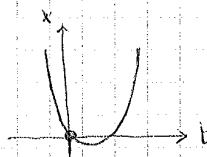
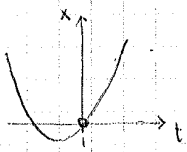
$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \rightarrow \text{parabola} \quad \left[\frac{1}{2}(s-t_0)^2 \right]_{t_0}^t$$

se $v_0 = 0, a > 0, t_0 = 0$

$a > 0 \Rightarrow U$
 $a < 0 \Rightarrow N$



se $x_0 = 0, v_0 > 0, a > 0, t_0 = 0 \rightarrow$ se $x_0 = 0, v_0 < 0, a > 0$



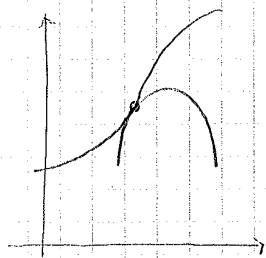
N.B. non c'è sui libri!
formula di Taylor: $t > t_0$
 $x(t) = x(t_0 + \frac{t-t_0}{\Delta t})$

per un moto qualsiasi, posso approssimarlo
un moto con lo sviluppo di Taylor

$$= x(t_0) + \frac{dx}{dt}(t-t_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2}(t-t_0)^2 + \dots \rightarrow \text{grazie alle definizioni date...}$$

$$= x(t_0) + v(t_0) + \frac{1}{2} a(t_0)(t-t_0)^2$$

perché $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow$ eq. differenziale caratteristica del moto unif. accelerato



In generale, posso approssimare qualsiasi moto ad una
parabola (con lo sviluppo di Taylor)
Ho però informazioni in solo punto

unità di misure: $[v] = \frac{1}{T} \rightarrow \frac{m}{s} \quad [a] = \frac{1}{T^2} \rightarrow \frac{m}{s^2}$

cifre significative

l'incertezza deve essere espressa con una sola cifra significativa perché non ha senso specificare le altre (fisicamente sbagliato) ①

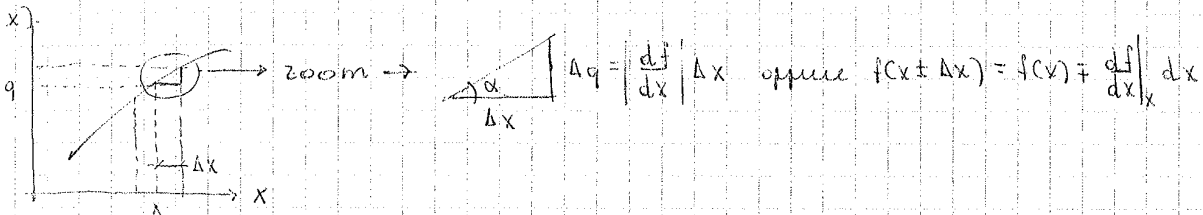
il risultato finale deve avere le stesse cifre decimali dell'incertezza ②

es: $g = (9,8 \overset{\textcircled{1}}{\pm 0,2} \overset{\textcircled{2}}{\text{m/s}^2})$

incertezza su propagazione

$x \pm \Delta x$

$q = f(x) \rightarrow q \pm \Delta q$ perché la misura deve essere sempre dichiarata con la sua incertezza



value assoluto perché l'incertezza è sempre positiva (per il ±)

$\Delta q = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z \rightarrow$ quando f ha più variabili $f(x, y, z)$

sia per misure singole che per più misure

esempi:

$x \pm \Delta x$
 $y \pm \Delta y$
 $z \pm \Delta z \rightarrow z = x + y \rightarrow z \pm \Delta z = x \pm \Delta x + y \pm \Delta y = x + y \pm (\Delta x + \Delta y) \rightarrow$ (errore minimo perché migliori stima di z)
considero errore max di x ed errore max di y

$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ → somma in quadratura (per non perdere errore max)

l'ipotesi è più piccola dei due cateti

$f(x, y, z) = x + y + z = q$
 $\Delta q = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z$
 $= \Delta x + \Delta y + \Delta z$

$q = f(x, y, z) = xyz$
 $\Delta q = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z = |y z| \Delta x + |x z| \Delta y + |x y| \Delta z$

$\frac{\Delta q}{q} = \frac{|y z| \Delta x}{|x y z|} + \frac{|x z| \Delta y}{|x y z|} + \frac{|x y| \Delta z}{|x y z|} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} \rightarrow$ somma delle incertezze relative

$q = f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$
 $\Delta q = |\alpha x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma| \Delta x + |\beta x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma| \Delta y + |\gamma x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1}| \Delta z$

$\frac{\Delta q}{q} = |\alpha| \frac{\Delta x}{x} + |\beta| \frac{\Delta y}{y} + |\gamma| \frac{\Delta z}{z}$

continua:
 $T = \frac{t}{N}$
 $\Delta T = \left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| \Delta t + \left| \frac{\partial T}{\partial N} \right| \Delta N = \frac{1}{N} \Delta t + \frac{t}{N^2} \Delta N$
errore 2%
ho ridotto l'errore

$l = 1 \text{ m}$ $\Delta l = 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$ $\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \rightarrow 9,81 \text{ m/s}^2$

$T = 2 \text{ s}$ $\Delta T = 0,2 \text{ s}$

$\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| \Delta l + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \Delta T = \frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l + 4\pi^2 \frac{l}{T^3} \Delta T \rightarrow 1,98 \text{ m/s}^2 \rightarrow$ è tanto !! 20% incertezza

↑ misura del periodo (stessa incertezza ma cambia $T = \frac{t}{N}$ errore da 20% al 2%
se ne fanno 10
e si divide la

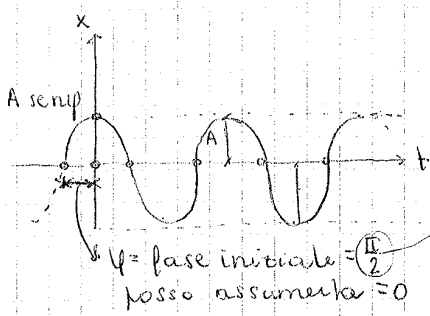
$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{N}}$

se ciascuno $\Delta x_i = \dots$ delle misure Δx_i ho uno di st. gaussiana tutte le parole vanno messe come si può

• moto armonico (senplices) =
 ↓
 è per definizione un moto periodico

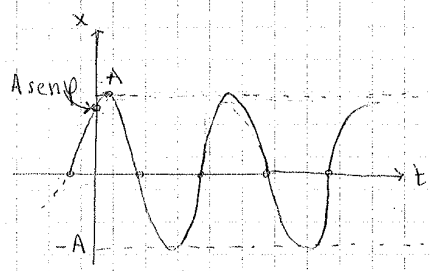
in generale non è semplice perché ci sono vari termini sen, cos

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$
 A = ampiezza
 $\omega \rightarrow$ pulsazione $\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T =$ periodo
 $\varphi \rightarrow$ fase iniziale



caso particolare ①

$\varphi =$ fase iniziale = $-\frac{\pi}{2}$
 posso assumerla = 0 ma non è sempre così

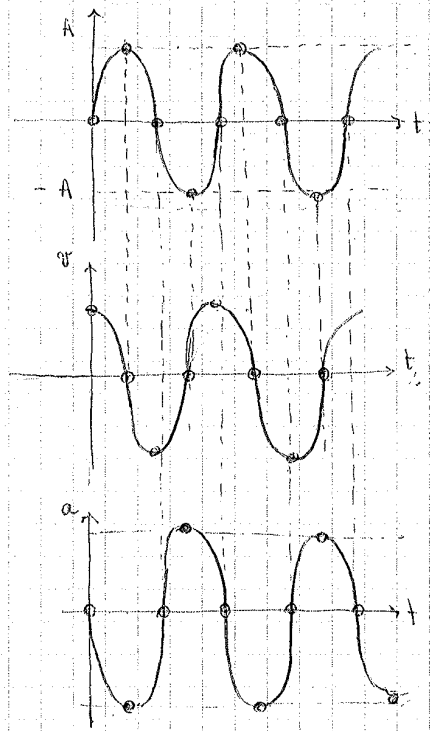


CASI PARTICOLARI
 ① se $\varphi = 0 \Rightarrow x(t) = A \sin(\omega t)$
 ② se $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x(t) = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A \cos(\omega t)$

Perché è periodico?
 $x(t+T) = x(t) = x(t+nT)$

$A \sin(\omega(t+T) + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi + \underbrace{\omega T}_{2\pi}) = A \sin(\omega t + \varphi) = x(t)$

considero $\varphi=0$ per semplicità



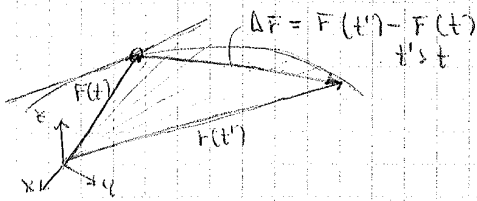
$v(t) = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$
 $a(t) = \frac{dv}{dt} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow$ a non è costante
 $a(t) = -\omega^2 x(t)$
 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \rightarrow$ eq. diff. caratteristica del moto armonico (massa attaccata ad una molla)

Come si fissano i parametri A e φ ?
 Supponiamo $\left. \begin{matrix} x_0 = x(0) \\ v_0 = v(0) \end{matrix} \right\}$ dati

$\begin{cases} x_0 = A \sin \varphi \\ v_0 = A \omega \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = A \sin \varphi \\ \frac{v_0}{\omega} = A \cos \varphi \end{cases}$

① $\frac{x_0}{v_0/\omega} = \tan \varphi \Rightarrow \tan \varphi = \frac{x_0 \cdot \omega}{v_0}$
 ② $x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \sin^2 \varphi + A^2 \cos^2 \varphi \Rightarrow A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$

Alternativa: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \lim_{t' \rightarrow t} \left(\frac{x(t') - x(t)}{t' - t} \hat{i}_x + \frac{y(t') - y(t)}{t' - t} \hat{i}_y + \frac{z(t') - z(t)}{t' - t} \hat{i}_z \right)$



Il vettore velocità istantanea è disposto lungo la direzione

$\vec{v}(t)$ è t_p alla curva in $\vec{r}(t)$

esempio: il vettore che viene fuori è tangente alla curva

Se $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ allora, noto il vettore velocità $\vec{v}(t)$, posso ricavare la legge oraria per il vettore posizione

(non cambia niente, solo notazione vettoriale)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds \Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds$$

ogni termine ha 3 comp. + $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds$
 $\vec{r}(t), \vec{r}(t_0), \vec{v}$ sono vettori
 e hanno 3 componenti

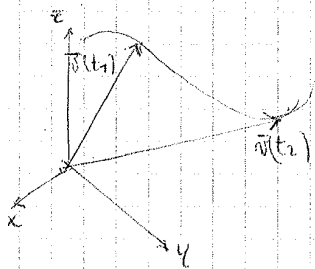
→ caso del moto uniforme

$\vec{v}(t) = \text{cost} = \vec{v} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t - t_0) \rightarrow$ legge oraria del moto uniforme
 (cresce linearmente nel tempo)

$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + v_x(t - t_0) \\ y(t) = y(t_0) + v_y(t - t_0) \\ z(t) = z(t_0) + v_z(t - t_0) \end{cases} \rightarrow$ f. parametriche (dipendono dal parametro tempo) della retta in \mathbb{R}^3

accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$



accelerazione istantanea:

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

ha interpretazione geometrica come per velocità istant.

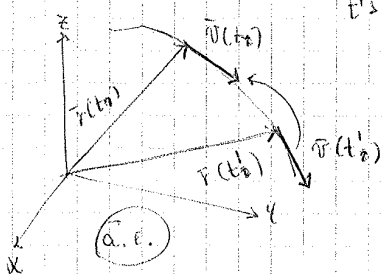
$$= \frac{d}{dt} v_x \hat{i}_x + \frac{d}{dt} v_y \hat{i}_y + \frac{d}{dt} v_z \hat{i}_z = a_x(t) \hat{i}_x + a_y(t) \hat{i}_y + a_z(t) \hat{i}_z$$

Inverso mi dicono qual che succede lungo le tre componenti

$t' \rightarrow t$ $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$



$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$ allora, noto $\vec{a}(t)$, posso ricavare $\vec{v}(t)$

$$\int_{t_0}^t \frac{d\vec{v}}{ds} ds = \int_{t_0}^t \vec{a}(s) ds \Rightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{a}(s) ds \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(s) ds$$

per ricostruire la velocità e la posizione istante per istante

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_{0x} \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} = v_{0y} - gt \rightarrow v_y(t) = 0 \rightarrow t = t_1 = \frac{v_{0y}}{g} \rightarrow \text{tempo per raggiungere il max della parabola} \end{cases}$$

tempo di volo: $y(t) = 0$
 $v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 = 0 \rightarrow t(v_{0y} - \frac{g}{2}t) = 0$
 $t=0 \rightarrow$ istante iniziale
 $t = 2 \frac{v_{0y}}{g} \rightarrow$ tempo di volo = doppio del tempo per raggiungere il max della parabola

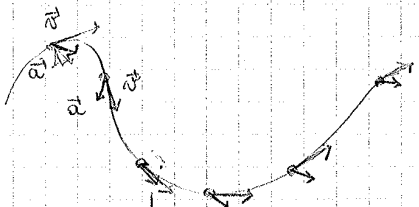
altezza max: $y(t_1) = v_{0y}t_1 - \frac{g}{2}t_1^2 = v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_{0y}^2}{g^2}$
 $= \frac{v_{0y}^2}{2g}$

gittata: $x(t_1) = v_{0x}t_1 = v_{0x} \frac{2v_{0y}}{g} = 2v_0^2 \frac{\sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

gittata max: $\frac{dx}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{d(\sin 2\theta)}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\theta = 0 \rightarrow$ derivata nulla \rightarrow punto di estremo punto di gittata max

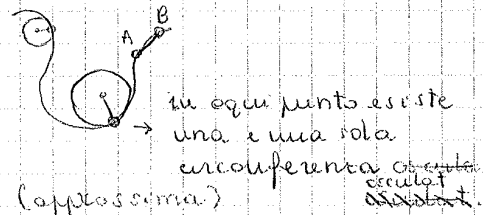
accelerazione tangenziale e normale: descrizione del moto in funzione di quantità intrinseca

\hookrightarrow dipende dal tipo di coordinate



moto curvo qualitativamente:
 - la velocità è tangente alla curva
 - l'accelerazione

$\vec{v} \parallel \vec{a}$ se il moto è rettilineo.
 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\vec{u}_T}{dt}$
 $R =$ raggio della circonferenza osculatrice (approssima)

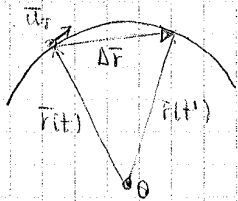


$a_T = \frac{dv}{dt}$ $a_N = \frac{v^2}{R}$ \rightarrow se metto il segno di vettore, metto il vettore

Dimostrazione:

① $\vec{v} = v \vec{u}_T = \left(\frac{ds}{dt} \vec{u}_T \right) \Leftrightarrow v = \frac{ds}{dt}$

s : lunghezza d'arco ($s_{AB} > |\vec{r}_B - \vec{r}_A|$)
 spazio percorso lungo la curva



$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t') - \vec{r}(t)$ $\Delta t = t' - t$
 $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$
 (sottintendiamo \lim) $= \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} \vec{u}_T \rightarrow$ vettore (nel limite $\rightarrow \vec{u}_T$)
 $= \frac{ds}{dt} \vec{u}_T \rightarrow$ diventa $\frac{ds}{dt}$ nel limite $\Delta t \rightarrow 0$

N.B: se conosco $v(t)$: $\leftarrow ds \vec{u}_T$
 $\int_0^t \frac{ds}{dt} dt = \int_0^t v(t) dt$
 $s(t) - s(0) = \int_0^t v(\tau) d\tau \rightarrow s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau$



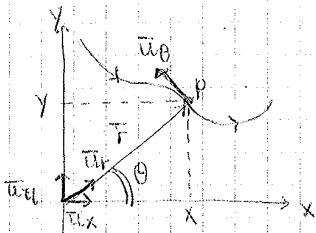
② derivata di un vettore: $\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{u}(t') - \vec{u}(t)}{t' - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{u}|}{\Delta t} \frac{\Delta \vec{u}}{|\Delta \vec{u}|} \rightarrow$ (come prima)*
 $\Delta \theta = |\Delta \vec{u}|$ nel limite $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \frac{\Delta \vec{u}}{|\Delta \vec{u}|} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_N \rightarrow$ vettore ortogonale a quello di partenza

$a = \frac{dw}{dt} \rightarrow w(t) = w(0) + \int_0^t a(\tau) d\tau \rightarrow$ ma $a = \text{cost}$
 $w(t) = w(0) + a t$
 (integrale)

$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t [w(0) + a\tau] d\tau = \theta(0) + w(0)t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow$ legge oraria del moto ^{circolare} uniformemente accelerato

• moto planare coordinate polari
 modo alternativo per rapp. lo spostamento

con le coordinate cartesiane: $\vec{r} = \vec{u}_x \cdot x + \vec{u}_y \cdot y$



$r = |\vec{r}| = |\vec{r}|$ = variabile radiale che dipende dal tempo

θ = variabile angolare = inclinazione del vettore \vec{r}

$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$ + da coordinate cartesiane a polari e viceversa

$\vec{r} = r \cos \theta \vec{u}_x + r \sin \theta \vec{u}_y = r (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) = r \vec{u}_r$ dipende solo dall'angolo

$\vec{u}_r = \vec{u}_r(\theta)$!

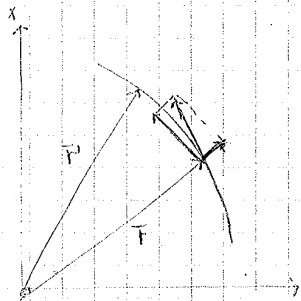
dipende solo da θ

Per verifica: $\vec{u}_r^2 = \cos^2 \theta \vec{u}_x^2 + \sin^2 \theta \vec{u}_y^2 = 1 \rightarrow$ verificato!

+ usando le coordinate polari:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{u}_r) = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$
 velocità radiale velocità angolare

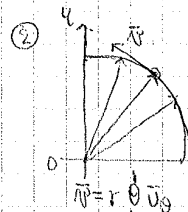
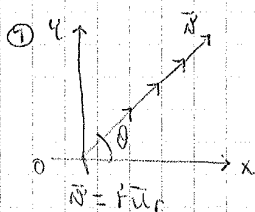
la velocità è decomposta in vettore radiale e vettore tangente velocità angolare



CASI PARTICOLARI: moti elementari

① $\theta = \text{cost} \rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r$ (moto rett.)

② $r = \text{cost} \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$



+ circonferenza

\rightarrow un moto qualsiasi è caratterizzato dalla sovrapposizione dei 2

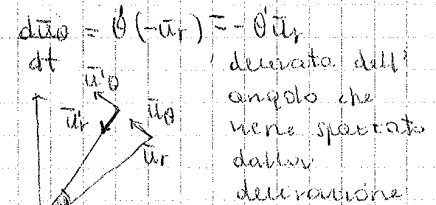
$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$
 $\dot{\theta} = \omega$ = velocità angolare

• accelerazione: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) =$

$= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} =$

$= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta}^2 (-\vec{u}_r) - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$

$= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$ accelerazione angolare



$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dot{\theta} (-\vec{u}_r) = -\dot{\theta} \vec{u}_r$
 derivato dell'angolo che viene spazzato dalla derivazione

Noti "elementari"

① moto radiale uniforme = $\begin{cases} \dot{r} = \text{cost} \\ \ddot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r \rightarrow \vec{a} = 0$

② moto radiale unif. accelerato = $\begin{cases} \dot{r} = \text{cost} \\ \ddot{r} = \text{cost} \\ \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r, \vec{a} = \ddot{r} \vec{u}_r$

③ moto circolare uniforme = $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \text{cost} \\ \ddot{\theta} = 0 \\ r = \text{cost} \end{cases}$ (sto giustando in maniera cost $\Rightarrow \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$ continua...)

7. Dati: moto armonico
 $T = 1,1 \text{ s}$
 $t = 0$

$x_0 = x(0) = 0,28 \text{ m}$
 $v_0 = v(0) = -2,5 \text{ m/s}$

eq moto?
 v_{MAX}
 a_{MAX}

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow$ eq. moto armonico $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,13 \text{ rad/sec}$
 $v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$
 $a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$



$x(0) = A \sin \varphi \Rightarrow \frac{x_0}{v_0} = \frac{1}{\omega} \tan \varphi \rightarrow \tan \varphi = \frac{\omega x_0}{v_0} = -0,1599 \rightarrow \varphi = -0,15858 \text{ rad}$



se lo ometto, faccio un errore accettabile perché $\varphi < 0$ ma $x_0 > 0 \rightarrow$ non accetto

Per scegliere quella giusta vedo graficamente $\rightarrow \varphi = 2,9829$

$A^2 = (x_0^2 + v_0^2) \frac{1}{\omega^2} \rightarrow A^2 = 3,1135 \text{ m}^2 \rightarrow A = 1,77 \text{ m}$

v_{MAX} quando $\cos(\omega t + \varphi) = 1 \rightarrow v_{MAX} = A\omega = 2,53 \text{ m/s}$

a_{MAX} quando $\sin(\omega t + \varphi) = 1 \rightarrow a_{MAX} = A\omega^2 = 3,61 \text{ m/s}^2$

12. Dati: moto circolare

$R = 0,2 \text{ m}$
 $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$
 $t_0 = 0, t_1 = 16 \text{ s}$

acc. ang $\rightarrow \alpha = -0,1 \text{ rad/s}^2, t \geq t_1, \alpha = \omega t = -1,6 \text{ rad/s}^2$
 $\omega_f = 0$

$\alpha = -\omega t \Rightarrow \omega = 0,1 \text{ rad/s}^3$
 $\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(z) dz = \omega_0 + \int_0^t \sigma z dz = \omega_0 - \frac{1}{2} \sigma t^2$

MKANICA ②

principi - assunzioni o leggi non giustificabili
non contraddicibili, inattuabili

Principi della fisica classica

- ① I principio = legge d'inerzia
- ② II " = legge di Newton
- ③ III " = legge di azione e reazione

④ Una particella (libera) si muove con $v = \text{cost.}$ (cioè con accelerazione nulla)

di alcun tipo

libera? Non soggetta ad interazioni con l'ambiente circostante → concetto limite (id.) non realizzabile

NO interazioni ⇒ $\vec{v} = \begin{cases} \text{costante} \\ \text{nulla} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} = \emptyset$

velocità costante? rispetto a che? → concetto non banale

sistema inerziale = una particella o corpo libero: per accettarlo occorre disporre di un sistema di riferimento sicuramente fermo o dotato di velocità costante

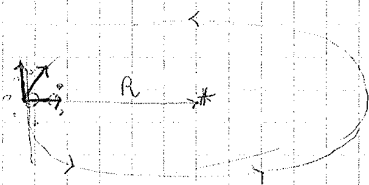
velocità costante o nulla ← (sist. inerziali) → stelle fisse = immobili nell'universo
ferme da secoli

subordinatamente agli strumenti che ne accettano l'immobilità

esempi: ① stelle fisse → miglior sistema inerziale disponibile

② sde → è con buona approssimazione un sist. di riferimento inerziale

③ terra → discreto sistema inerziale per gran parte dei fenomeni che su di essa hanno luogo



$R \rightarrow \infty$

② $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ → l'interazione di un corpo con l'ambiente, espressa tramite il vettore forza \vec{F} , det. determina l'accelerazione del corpo (cioè la variazione della velocità nel tempo)

m = massa inerziale → esprime la resistenza del corpo di massa m a mutare il suo stato di moto

$m \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, $m' = N \cdot m \rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m'} = \frac{\vec{F}}{N \cdot m} = \frac{\vec{a}}{N}$ Resistenza = se la massa è più grande, l'accelerazione è più piccola

difficoltà

\vec{F} { direzione
verso
modulo (con dinamometro)

→ la forza è un vettore



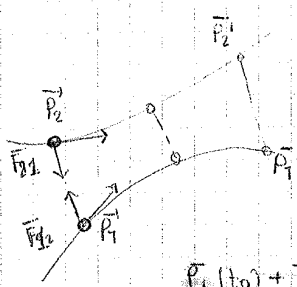
schema per misurare una massa:
caso unidimensionale: $|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m}$, $|\vec{a}'| = \frac{|\vec{F}|}{m'} \Rightarrow \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}'|} = \frac{m'}{m}$

la legge è da uno strumento per misurare la massa m

m = massa di riferimento
 $m' = m \cdot \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}'|}$ ($m = [kg]$)

contenuto di tipo della legge di Newton

\vec{F} = campo vettoriale → $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$ cambia in ogni punto dello spazio
posizioni diverse, vettore forza diversa



$\forall t: \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$
 $\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$
 $\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$
 $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t'} \frac{d\vec{p}_1}{dt} dt = - \int_{t_0}^{t'} \frac{d\vec{p}_2}{dt} dt$
 $\vec{p}_1(t') - \vec{p}_1(t_0) = -(\vec{p}_2(t') - \vec{p}_2(t_0))$

$\vec{p}_1(t_0) + \vec{p}_2(t_0) = \vec{p}_1(t') + \vec{p}_2(t')$ → legge della conservazione della quantità di moto
 vale per ogni istante

20.03.2014

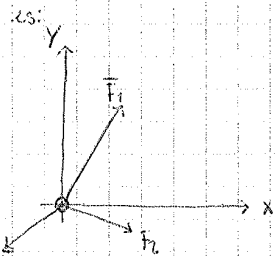
risultante delle forze = un corpo può subire l'azione contemporanea di molte forze la risultante \vec{R} di tante forze produce l'accelerazione del corpo - $m\vec{a} = \vec{R}$

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE FORZE



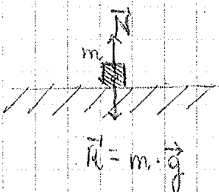
equilibrio statico = un corpo è in eq. se $\vec{R} = \vec{0} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_i F_i \vec{e}_i \rightarrow \begin{cases} R_x = \sum_i F_{ix} = 0 \\ R_y = \sum_i F_{iy} = 0 \\ R_z = \sum_i F_{iz} = 0 \end{cases}$
 un corpo fermo (immobile) non è necessariamente libero.
 un corpo fermo è tale perché $\begin{cases} \text{① } \text{è libero} \\ \text{② } \vec{R} = 0 \end{cases}$



$\vec{F}_1 = 3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y = (3, 0, 0) + (0, 6, 0) = (3, 6, 0)$
 $\vec{F}_2 = (2, -3, 0)$
 $\vec{F}_3 = (-5, -3, 0)$
 $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0, 0, 0)$

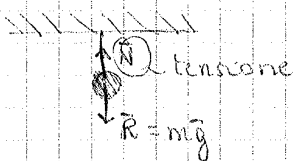
(es. 2.2 pag. 45)

reazioni vincolari = forze non esistenti in natura se un corpo soggetto ad una o più forze tali che la loro risultante $\vec{R} \neq \vec{0}$ rimane fermo allora esiste una R.V. (\vec{V}) tale che $\vec{R} + \vec{V} = \vec{0}$



$g = |\vec{g}| = 9.8 \text{ kg m/s}^2$

\vec{V} è perpendicolare al piano di sostegno o alla tangente nel punto



→ forza che viene stimolata (risponde ad \vec{R})
 reazione a qualcosa
 si adegua alle circostanze (nei limiti)

$$v(t) = \frac{F}{km} - \left(\frac{F}{km} - v_0 \right) e^{-kt}$$

Velocità limite: $v(\infty) = \frac{F}{m \cdot k}$ → l'esponenziale va a 0
 il corpo ha una velocità costante

No libro

$F_v = -\lambda v$ → adatta a corpi non troppo veloci

$F = -\frac{1}{2} \rho v^2 S$ → adatta a corpi veloci

$-\alpha$ coeff. di resistenza → da eq. di Newton: $m \frac{dv}{dt} = F - \alpha v^2$
 ρ = densità
 S = sezione
 continuare!

~~ifbbblbbbsbbbs~~

- forza elastica = molla
 $\vec{F}(x) = -k(x-L) \vec{u}_x$

k = cost. elastica

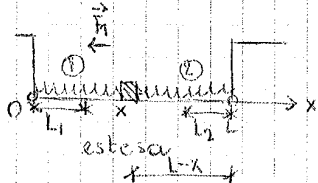
L = lunghezza a riposo della molla

forza di richiamo elastico:
 richiamo verso la posizione di equilibrio ①

caso speciale: molla l'origine nella posizione $x=L$

$$F(x) = -kx \vec{u}_x$$

④ es. di esame



scelgo di lavorare nella situazione: quale è la forza risultante?

lunghezze a riposo $L_1 + L_2 < L$

$$F(x) = F_1 + F_2 = -k_1(x-L_1) + k_2(L-L_2-x)$$

$(x-L_1)$ = deformazione

ma) $F(x) \rightarrow m \ddot{x} = -k(x-L) \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{kL}{m} \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} (x-L) = 0$

da eq. di Newton

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \Rightarrow y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

validi: solo se è soluzione

$$\ddot{y} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$-\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m} A \sin(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Quindi $x(t) = L + y = L + A \sin(\omega t + \varphi)$ dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- forza centripeta esame

applicazioni = auto pesante: una velocità costante v in presenza di attrito statico μ_s la curva ha raggio R



$$m \vec{a} = \vec{F}_a$$

$$\vec{F}_a = F_a \vec{u}_N$$

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

$$\begin{cases} m a_T = 0 \\ m a_N = F_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = 0 \\ m \frac{v^2}{R} = F_a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = \text{cost} \\ m \frac{v^2}{R} = F_a \leq F_a^{\text{max}} = \mu_s m g \rightarrow v^2 \leq \mu_s R g \end{cases}$$

21.03.2011

ESERCITAZIONE ③

1.11/NN

Dati: $h_1 = 3,77 \text{ m}$
 $v_0 = ?$
 $v_0 = 0$

passa la palla $t_1 = |t_A - t_B| = 1,0 \text{ s}$
 $h_{MAX} = ?$

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

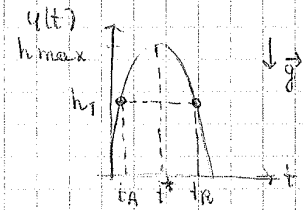
$$y(t_{A/R}) = h_1 = v_0 t_{A/R} - \frac{1}{2} g t_{A/R}^2 \rightarrow t^2 - 2v_0 t + 2h_1 = 0$$

$$t_{A/R} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}}{g} \rightarrow t_1 = t_R - t_A = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}}{g} - \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}}{g}$$

$$t_R - t_A = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh_1}}{g} \text{ da cui } v_0 = \sqrt{\left(\frac{gt_1}{2}\right)^2 + 2gh_1} = 9,99 \text{ m/s}$$

per $h(\text{max}) \rightarrow v(t) = v_0 - gt \rightarrow v(t^*) = 0 \Rightarrow h_{MAX}$
 $y(t^*) = h_2 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = 5,09 \text{ m}$

indietro verso l'alto quindi $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{sen } \theta = 1$



1.26/NN

moto smorzato esponenzialmente

$v_0 = ?$

$v_0 = ?$

$\tau = 75 \text{ s}$

supplente dopo il moto unif. accelerato con stesso v_0 e stesso spazio

$x = 1,8 \text{ m}$

totale percorso.

$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \quad k = \frac{1}{\tau} \quad \text{dalle } k \frac{dx}{dt} = -kv \quad a = -kv \quad \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$x(\infty) = 1,8 = \frac{v_0}{k} \rightarrow \text{ricavo } v_0 = 0,135 \text{ m/s}$$

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

A quale istante il corpo arriva a metà distanza?

$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) = \frac{x(\infty)}{2} \rightarrow \frac{v_0}{k} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{x(\infty)}{2} \rightarrow \frac{x(\infty)}{2} = \frac{v_0}{k} e^{-t/\tau} = x(\infty) e^{-t/\tau}$$

-moto unif. acc. $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} \rightarrow t = \tau \log 2$$

$$v(t) = v_0 + at \rightarrow t_1 = -\frac{v_0}{a} = 150 \text{ s}$$

$$x(t_1) = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = x(\infty)$$

$$= v_0 \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 = -\frac{v_0^2}{2a} \rightarrow a = -1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$$

2.18/NN

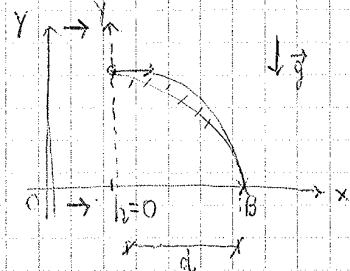
Dati: $v_0 = 100 \text{ km/h}$
 $h = 100 \text{ m}$

all'istante t_0 della sgancia \Rightarrow velocità iniziale nulla

$$x = \frac{v_0 x}{v_0} t$$

$$y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 100 \text{ km} \rightarrow \text{per bersaglio fisso}$$



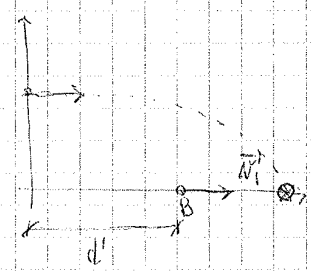
per bersaglio mobile: $v_1 = 50 \text{ km/h}$

scio le due eq del moto e pongo le x uguali

$$x_B = d' + v_1 t$$

il tempo di caduta è lo stesso perché l'altezza dell'arco è la stessa

$$x_B(t) = x(t_1) \rightarrow v_0 x t_1 = v_1 x t_1 + d' \rightarrow d' = 878 \text{ m}$$



Partizione sempre più fitta

$\Delta F_i \rightarrow$ sempre più piccolo

Nel limite di una partizione infinitamente fitta: $W_{AB} = \int_{A \rightarrow B} dW = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

$d\vec{r} \rightarrow$ differenziale

integrale di cammino
curva

$$d\vec{r} = d(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) = \vec{u}_x dx + \vec{u}_y dy + \vec{u}_z dz = \left(\vec{u}_x \frac{dx}{dt} + \vec{u}_y \frac{dy}{dt} + \vec{u}_z \frac{dz}{dt} \right) dt = \vec{v} dt$$

Dato $\vec{F}(t)$ cioè $x(t), y(t), z(t)$

$$W_{AB} = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} g(t) dt$$

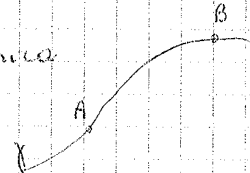
$$g(t) = F_x(\vec{r}(t))v_x(t) + F_y(\vec{r}(t))v_y(t) + F_z(\vec{r}(t))v_z(t) = g(t) \rightarrow \text{funzione del tempo}$$

Teorema dell'energia cinetica

~~teorema~~

$$E_k = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \xrightarrow{\text{dimostro}} W_{AB} = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (\vec{F} = m\vec{a}) = \int_{t_A}^{t_B} m\vec{a} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_A}^{t_B} m a_T v dt = \int_{t_A}^{t_B} m a_T v dt =$$

spara il prodotto scalare perché considero le due componenti parallele



$$= \int_{t_A}^{t_B} m \frac{dv}{dt} v dt =$$

$$= m \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dt =$$

$$= m \left[\frac{v^2}{2} \right]_{t_A}^{t_B} =$$

$$= \frac{m}{2} (v^2(t_B) - v^2(t_A)) =$$

$$= E_k^B - E_k^A$$

$$\vec{v} = v(t) \vec{u}_T(t)$$

$$\vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_N \vec{u}_N$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_T v$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{2} 2v \frac{dv}{dt}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

Dimostrazione alternativa: $W_{AB} = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dt =$

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \text{ - dimostrabile usata derivata di un prodotto}$$

unità del lavoro: $S.I = J = 1N \cdot m = 1kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$

potenza istantanea: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot \vec{F} = m \cdot \vec{a} \cdot \vec{v} = m \frac{dv}{dt} \cdot v = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = \frac{dE_k}{dt}$
causazione dell' E_k nel tempo. velocità istantanea

unità di potenza: $1W = \frac{1J}{1s} = kg \frac{m^2}{s^3} \rightarrow 1KW = 10^3 W$

$1CV = 735,7 W \rightarrow$ cavallo a vapore

27-03-2016

Non sempre i campi di forza sono conservativi (es: attrito)

formula del bilancio energetico

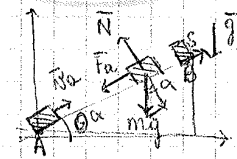
$$W_{AB} = \int_{AY}^B \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = E_K^B - E_K^A \rightarrow \text{in presenza di forze non conservative } \vec{F}_T = \text{totale}$$

$$W_{AB} = \int_{AY}^B (\vec{F}_c + \vec{F}_a) \cdot d\vec{r} = \int_{AY}^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_{AY}^B \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p + W'_{AB} \rightarrow \text{calcolato di volta in volta in base alle forze da utilizzare}$$

$W'_{AB} = \text{lavoro delle forze non conservative}$

Riunite:
 $E_K^B - E_K^A = -(E_p^B - E_p^A) + W'_{AB} \rightarrow \text{f. del bilancio energetico}$

Applicazioni → dev. immediatamente conoscere la forza non conservativa



E_p della quantità → caso con forza costante
 $E_p = mg y + \text{cost}$. ∇E_p man mano che il corpo sale
 $E_p = -\vec{F} \cdot \vec{r} = (-mg \hat{u}_y) \cdot \vec{r} = mg y \hat{u}_y \cdot \hat{r} = (u_y \cdot \hat{r})$
 → en. potenziale del campo gravitazionale

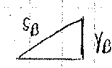
Nota: μ_d
 $F_a = \mu_d N \rightarrow N = mg \cos \alpha \rightarrow F_a = \mu_d mg \cos \alpha$
 $F_a = -F_a \hat{u}_s \rightarrow$ indica la direzione di salita

$N_s = \text{dato}$
 $v_B = ?$
 ⊖ perché si oppone alla salita → se attrito viscoso o radente che il segno ⊖

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -mg(y_B - y_A) + W'_{AB} \rightarrow -\frac{1}{2} m v_A^2 = -mg y_B$$

$$W'_{AB} = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F}_a \cdot d\vec{s} = \int_{s_A}^{s_B} -F_a \hat{u}_s \cdot d\vec{s} \rightarrow \hat{u}_s \cdot d\vec{s} = \hat{u}_s \cdot (\hat{u}_s ds) = ds$$

$$= -\int_{s_A}^{s_B} \mu_d mg \cos \alpha \cdot ds \quad s_A = 0$$



$$-\frac{1}{2} m v_A^2 = -mg y_B - F_a s_B \quad \text{ma } s_B = \text{spazio percorso lungo il piano inclinato}$$

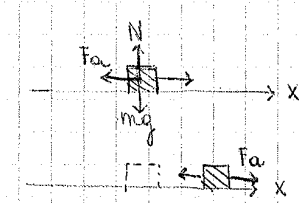
$$\rightarrow y_B = s_B \sin \alpha$$

$$+\frac{1}{2} m v_A^2 = +mg s_B \sin \alpha + \mu_d mg \cos \alpha \cdot s_B$$

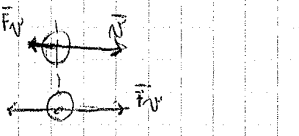
$$\frac{1}{2} v_A^2 = s_B (g \sin \alpha + \mu_d g \cos \alpha) \rightarrow s_B = \frac{v_A^2}{2g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)} \rightarrow \text{f. ottenuta nel caso ①}$$

la variazione di en. cinetico non corrisponde completamente a un pot.
 Se non ci fosse la forza d'attrito ($\mu_d = 0$) allora s_B aumenta perché diminuisce il denominatore
 Una parte di en. cinetica ma in W'_{AB}

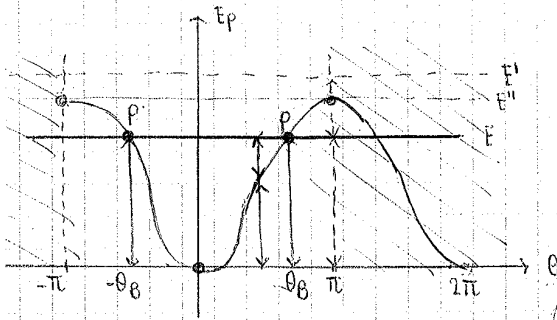
Un campo è definito in maniera unica in ogni punto dello spazio



il campo di forze definito dall'attrito non è conservativo perché tutti in uno stesso punto il campo ha direzione diversa



$\vec{F}_v = -\lambda \vec{v}$
 nello stesso punto, a seconda della velocità e della direzione ho una forza di attrito diversa e quindi non ha senso parlare di campo di forze



$-\pi \leq \theta \leq \pi$

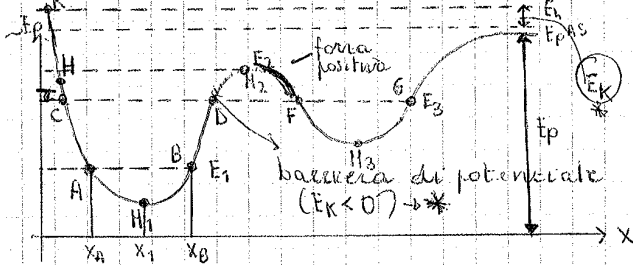
$E = E_k + E_p \rightarrow W = R \dot{\theta}$ perché il moto è circolare
 $= \frac{1}{2} m v^2 + m R (1 - \cos \theta)$

$E_p > \max(E_p(\theta))$

di corpo ha energia necessaria per superare il π

$E'' = \max(E_p(\theta)) \rightarrow$ il punto si ferma se arriva (tempo infinito) alla situazione $\theta = \pi$

il potenziale di un moto 1-dimensionale generico



A, B punti di inversione } E_1
 moto tra x_A e x_B

$\vec{F} = -\nabla E_p$ in 1 dimensione $\rightarrow F_x \hat{u}_x = -\hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x} E_p$
 $F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$ in $(x_1) \rightarrow$ minimo

dove la forza è 0 può essere un minimo

E_3 : steno moto confinato (tra x_C e x_D) oppure (tra x_F e x_G)
 del caso E_1 ma ci sono due bacini diversi

$F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \text{ minimo} \\ x_3 \end{array} \right.$

E_2 : se parto da x_H il moto si arresta in $x = x_2$ e non si muove più
 $F(x) = \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$ in x_2 (massimo)

Anche nei flussi a eq. orizzontali $F(x) = 0$
 le avvisi energia più grande (meno energia cinetica)

E_4 che ne un po' per sfuggire all'infinito da $x = x_1$ arriva da $x = \infty$ $E_k = E_4 - E_p^{AS}$

H_1, H_3 = punti di eq. stabile: allontanando la mano un po' o da x_1 o da x_3 inizia un moto oscillatorio
 la forza richiama sempre la mano o verso x_1 o verso x_3
 minimo di E_p

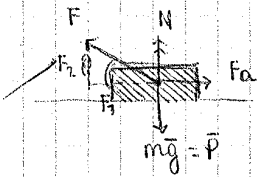
H_2 = punto di eq. instabile = appena spostato da x_2 inizia un moto e non ritorna mai più da x_2 \rightarrow si allontana indefinitamente
 max di E_p

Considero un punto di minimo: $E_p(x) = E_p(x_1) + \frac{\partial E_p}{\partial x} \Big|_{x_1} (x-x_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \Big|_{x_1} \right) (x-x_1)^2 + \dots$
 $\Rightarrow E_p(x_1) + \frac{k}{2} (x-x_1)^2$

28.03.2011

Esercitazione ①

esempio 2.6 pag 52



dati:
 $m = 3 \text{ kg}$
 $\mu_d = 0,1$
 $a = 1,2 \text{ m/s}^2$

angolo θ : $F = \text{minimo}$

$F_a = \mu_d N$

F_1 : componente orizz. = $F \cos \theta$
 F_2 : " verticale = $F \sin \theta$

F devo scomporla $\rightarrow \begin{cases} F_2 + N = P \\ F_1 - F_a = ma \end{cases}$

$F \cos \theta - \mu_d N = ma \rightarrow F \cos \theta - \mu_d (P - F \sin \theta) = ma$
 $N = P - F \sin \theta$
 $F \cos \theta - \mu_d (mg - F \sin \theta) = ma$

$F (\cos \theta + \mu_d \sin \theta) = ma + \mu_d mg \rightarrow F = \frac{ma + \mu_d mg}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}$ per θ generico

F è minimo: $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial \theta} = - \frac{ma + \mu_d mg}{(\cos \theta + \mu_d \sin \theta)^2} (-\sin \theta + \mu_d \cos \theta) = 0 \Rightarrow -\sin \theta + \mu_d \cos \theta \rightarrow \mu_d = \tan \theta$ (si ha F_{min})

(Ricorda $f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{g^2(x)} \cdot g'(x)$ dove $g(x) = \cos \theta + \mu_d \sin \theta$)

$F = \frac{ma + \mu_d mg}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta} = 11,3 \text{ N}$

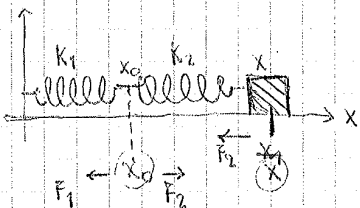
condizione affinché il corpo si stacchi dal piano.

$F \sin \theta = mg \rightarrow \frac{ma + \mu_d mg}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta} \sin \theta = mg \rightarrow \tan \theta = \frac{g}{a}$ (eliminando per $\cos \theta \neq 0$ escludo la soluzione $\theta = \frac{\pi}{2}$)

es 2.7: dati: $m = 0,1 \text{ kg}$
 $k_1 = 20 \text{ N/m}$
 $k_2 = 30 \text{ N/m}$

? periodo di oscillazione

devo verificare se effettivamente è soluzione!



deformazione

$\begin{cases} m \ddot{x} = -k_2(x - x_0 - L_2) \\ k_2(x - x_0 - L_2) - k_1(x_0 - L_1) = 0 \end{cases}$

se avessi una molla tra le molle metto (ma) (non ha molla) $\rightarrow x_0$

punto di unione delle due molle

Ricordo x_0 :
 $k_2(x - L_2) - k_1 x_0 - k_1 x_0 + k_1 L_1 = 0$
 $x_0(-k_2 - k_1) = -k_1 L_1 - k_2(x - L_2)$
 $+x_0(k_2 + k_1) = +k_1 L_1 + k_2(x - L_2)$
 $x_0 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} L_1 + \frac{k_2}{k_1 + k_2} (x - L_2)$

$m \ddot{x} = -k_2(x - L_2) + k_2 x_0$
 $= -k_2(x - L_2) + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} L_1 + \frac{k_2^2}{k_1 + k_2} (x - L_2) \rightarrow m \ddot{x} = -\frac{k_1 k_2 (x - L_1 - L_2)}{k_1 + k_2}$

$\ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)} x = \frac{k_1 k_2 (L_1 + L_2)}{m(k_1 + k_2)} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,15 \text{ s}$

eq $\Rightarrow \dot{x} = 0 \rightarrow x = L_1 + L_2$ + condizione di equilibrio

$\ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)} (x - (L_1 + L_2)) = 0$

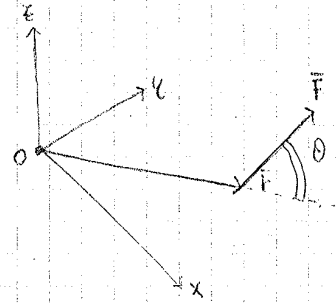
01.06.2014

momento delle forze e momento angolare

$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \rightarrow \vec{F} = \text{forza applicata al punto}$
 $\vec{r} = \text{punto in cui è applicata la forza}$

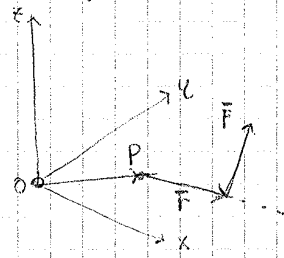
$M = r F \sin \theta$ da def. di prodotto vettoriale
 $M \perp$ al piano individuato da r e F

$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = (r_x \vec{u}_x + r_y \vec{u}_y) \wedge (F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y) =$
 $= r_x F_y - r_y F_x \vec{u}_z$
 $= r_y (x F_y - y F_x) \rightarrow \text{momento calcolato con le componenti:}$

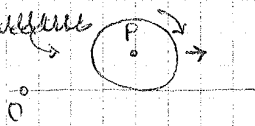


ho implicitamente assunto $O = \text{Polo}$ (ma non necessariamente coincide con l'origine)

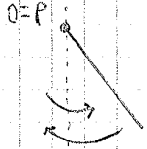
Caso generale:



$O \neq P \rightarrow \text{differenza}$
 $OP = \vec{R}$



\rightarrow caso applicativo $O \neq P$



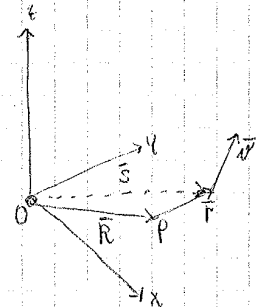
$m \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$

momento angolare: $\vec{L} := \vec{r} \wedge \vec{p} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r v \sin \theta \vec{u}_z$

Polo O: $\vec{L}_O = \vec{s} \wedge \vec{p} =$
 $= (\vec{R} + \vec{r}) \wedge \vec{p} =$
 $= \vec{R} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{p} =$
 $= \vec{R} \wedge \vec{p} + \vec{L}_P \text{ polo P}$

\rightarrow relazione tra L rispetto a O e rispetto a P

$\vec{R} = \vec{OP}$



Se quando rispetto ad O sia v che r vengono visti da O
 " " " " P, v viene visto da un rot. invariabile ma la posizione rispetto a P

Per ora, supponiamo $O \equiv P$

Teorema del momento angolare (caso semplice) \rightarrow analogia con formula di Newton

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{F} \wedge m \vec{v})}{dt} = m \left(\frac{d\vec{F}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \right) =$

$\vec{v} \wedge \vec{v} = 0$

$= m \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{F} \wedge \vec{r}$ perché $m \vec{a} = \vec{F} \rightarrow$ quindi $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{H}$ $\vec{F} = \text{forza applicabile}$
 $= \text{risultante delle forze applicate}$

se $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{cost}$ rispetto al tempo
 \Rightarrow i suoi costituenti (\vec{r}, \vec{v}) moltiplicati vettorialmente e costanti se il loro prodotto vettoriale è costante, ma magari r e v dipendono dal tempo

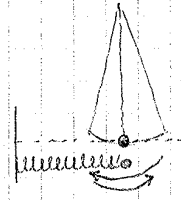
il prodotto vettoriale cancella la dipendenza dal tempo

cu θ per $\theta \ll \frac{\pi}{2}$

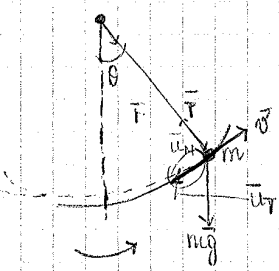
$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots \rightarrow$ sviluppo di McLaurin

$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0 \rightarrow$ moto oscillatorio ($x'' + \frac{g}{l}x = 0$)

$\theta(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ ($\frac{g}{l} = \omega^2$) $\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T}$



Avrei ottenuto lo stesso risultato applicando la legge di Newton perché è semplice



$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$
 $m a_t = -(mg \sin \theta)$ componente di mg

sei fare le cose bene: $\vec{u}_N m a_N = T \vec{u}_N - \vec{u}_N m g \cos \theta$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} = r\ddot{\theta} = a_t$

non un'intesa ~~approssimazione~~ lo tensione del filo costante per costante si adegua $T = m a_N \rightarrow m g \cos \theta$

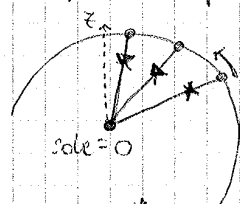
$m r \theta'' = -g m \sin \theta \rightarrow \theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta \rightarrow$ ottengo lo stesso risultato perché la massa è unica

Avrei ottenuto lo stesso risultato con la conservazione dell'energia (movi 1) (coordinate polari)

conclusione: teorema del momento angolare per forze centrali:

- \vec{F} : sempre diretta verso il centro O (origine e polo) \rightarrow esempio: $\vec{F} = -\frac{k}{r^3} \vec{r} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \left(-\frac{k}{r^2} \vec{u}_r\right) = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{costante}$
 sempre parallelo a $\vec{u}_\theta \wedge \vec{F}$



durante il suo moto, il corpo è soggetto ad una forza

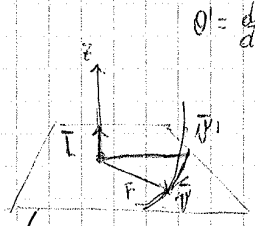
collaudo del teorema: la velocità areolare è costante

$\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r \vec{u}_r \wedge (r' \vec{u}_r + r \theta' \vec{u}_\theta) = m r^2 \theta' \vec{u}_z$

ma $\vec{L} = \text{cost}$ se \vec{F} è centrale
 $L_z = m r^2 \theta' = \text{costante} \rightarrow$ a grande distanza θ' diventa piccolo
 $\Rightarrow r^2 \theta' = \text{costante}$

velocità areolare = $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$

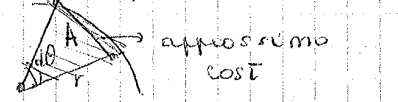
$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2m} \frac{L_z}{r^2} = \frac{L_z}{2m r^2} = \text{costante}$



$\vec{L} = \text{costante} \Rightarrow$ che mi dice che sto ancora nel piano, un istante dopo?

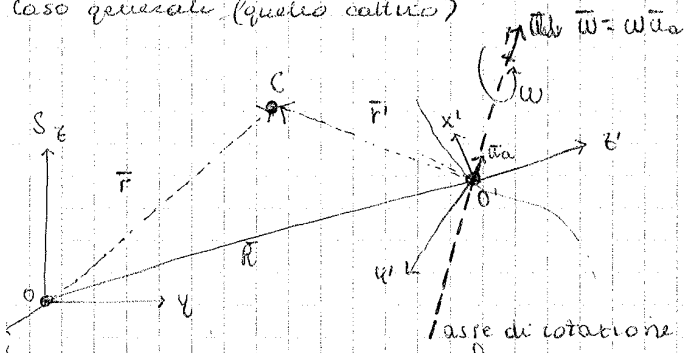
$\vec{v}(t+\epsilon) = \vec{v}(t) + \epsilon \vec{a}(t)$
 $\vec{F}(t+\epsilon) = \vec{F}(t) + \epsilon \vec{F}'(t)$
 stanno sul piano perché \vec{F} e \vec{v} stanno sul piano

(dato un punto di partenza, il piano è unico ed ortogonale a \vec{L} ed è l'unico piano di contenimento \vec{r} e \vec{v})



base = $r d\theta$ \rightarrow approssimato
 $h = r$
 $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$
 $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Caso generale (quello cattivo)



le linee non sono più allineate e inoltre ruotano rispetto all'asse di rotazione

S' basta a metà

asse di rotazione (il più generale qualsiasi) può non essere costante

$$\vec{F} = \vec{R} + \vec{F}' \quad \text{ma} \quad \begin{matrix} \vec{u}_x \neq \vec{u}'_x \\ \vec{u}_y \neq \vec{u}'_y \\ \vec{u}_z \neq \vec{u}'_z \end{matrix}$$

le scale un momento in cui l'accelerazione è uguale? (quindi assi paralleli)

$$\vec{F} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad , \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z \text{ costanti nel tempo}$$

$$\vec{R} = x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z \quad x, y, z, x', y', z' \text{ dipendono dal tempo} \rightarrow \text{solo legge oraria}$$

$$\vec{F}' = x''\vec{u}_x + y''\vec{u}_y + z''\vec{u}_z \quad \begin{matrix} \vec{u}_x = \vec{u}_x(t) \\ \vec{u}_y = \vec{u}_y(t) \\ \vec{u}_z = \vec{u}_z(t) \end{matrix} \rightarrow \text{dipendono dal tempo}$$

teorema delle velocità relative $\rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0' + \omega \wedge \vec{r}'$ dovuto all'effetto rotativo

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \rightarrow \text{TU SEI ATTIVO} \rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z) =$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0' + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Ricordo: derivata di un vettore

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \theta' \frac{d\vec{u}}{dt} = \theta' \vec{u}_z \wedge \vec{u}$$

f. de Poisson

$$= \frac{dx'}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz'}{dt} \vec{u}_z + x' \frac{d\vec{u}_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}_y}{dt} + z' \frac{d\vec{u}_z}{dt} =$$

$$= \vec{v}' + x'(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_x) + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_y) + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_z) = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z) = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

03.01.2011

$$\vec{v} = \vec{v}_0' + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \quad \vec{v}_0' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' = \text{velocità di trascinamento}$$

teorema delle accelerazioni relative $\rightarrow \vec{a} = \vec{a}_0' + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a} = \left(\frac{d}{dt} (\vec{v}_0' + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}') \right)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0' + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')}{dt} =$$

$$= \vec{a}_0' + \frac{d}{dt}(v'_x \vec{u}_x + v'_y \vec{u}_y + v'_z \vec{u}_z) + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$= \vec{a}_0' + \left(\frac{dv'_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{dv'_y}{dt} \vec{u}_y + \frac{dv'_z}{dt} \vec{u}_z \right) + v'_x \frac{d\vec{u}_x}{dt} + v'_y \frac{d\vec{u}_y}{dt} + v'_z \frac{d\vec{u}_z}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')}{dt} =$$

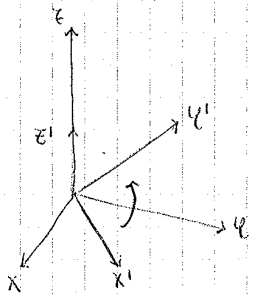
$$= \vec{a}_0' + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (v'_x \vec{u}_x + v'_y \vec{u}_y + v'_z \vec{u}_z) + \vec{\omega} \wedge \vec{u}_x \quad \vec{\omega} \wedge \vec{u}_y \quad \vec{\omega} \wedge \vec{u}_z$$

D) $O \equiv O'$
 $\vec{e}_1 \parallel \vec{e}'_1$
 $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

$\vec{v}'_1 = \vec{v} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}'_1$
 $\vec{a}'_1 = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_1 + \vec{\omega}^2 \vec{r}'_1$
 per moti planari
 $\vec{r}'_1 \in \mathbb{R}^2$

$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}'_1) =$
 $= \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_1) - \vec{r}'_1 (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\vec{r}'_1 \omega^2$
 $\vec{r}'_1 \in (x, y)$

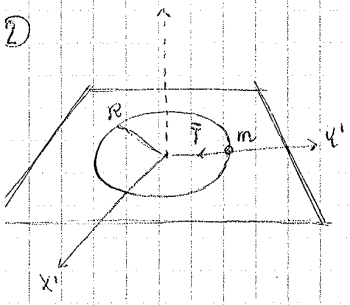
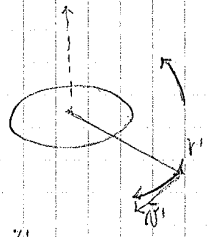
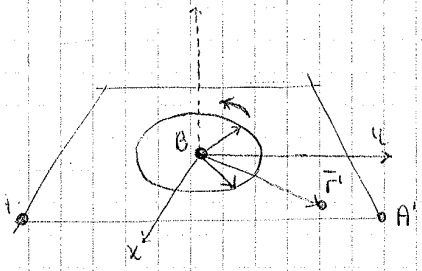
my
B



Regola per prodotti vettoriali di 3:
 $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

S) $\vec{v} = 0$
 $\vec{a} = 0$

S') $\vec{v}'_1 = -\vec{\omega} \wedge \vec{r}'_1$
 $\vec{a}'_1 = -2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_1 + \omega^2 \vec{r}'_1 =$
 $= -2\vec{\omega} \wedge (-\vec{\omega} \wedge \vec{r}'_1) + \omega^2 \vec{r}'_1 =$
 $= 2\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}'_1) + \omega^2 \vec{r}'_1 =$
 $= -2\omega^2 \vec{r}'_1 + \omega^2 \vec{r}'_1 = -\omega^2 \vec{r}'_1 + \text{acc. centripeta}$



Note:
 Raggio disco = R
 ω, m

S) $m\vec{a} = \vec{T} \rightarrow m\vec{a}_n = T$
 S') $\vec{a}'_1 = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_1 + \omega^2 \vec{r}'_1$
 $m\vec{a}'_1 = \vec{T} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_1 + m\omega^2 \vec{r}'_1 = 0$ perché il corpo fermo sulla
 piattaforma
 $= T + m\omega^2 \vec{r}'_1 = 0$
 forza
 centrifuga
 $T = \omega^2 m r'$

"caduta dei gravi verso est"

considero il piano

SISTEMI DI N PARTICELLE (sistemi a "molti corpi") (b)

- definizione di centro di massa: $\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j} \rightarrow$ posizione media del sistema di particelle

Se le masse sono tutte uguali:
 $m_1 = m_2 = \dots = m_N = m$

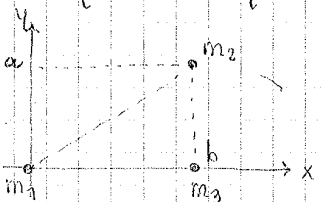
$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{N} \sum_j \vec{r}_j$ - valore medio ge delle pos dei vettori posizione
 valore medio geometrico

domina quello che ha massa maggiore



\rightarrow caso omogeneo
 o centro di massa

- se trovare il centro di massa per tre masse m_1, m_2, m_3 poste sui vertici di un triangolo rettangolo



$m_1: \vec{r}_1 = 0$
 $m_2: b\vec{u}_x + a\vec{u}_y = \vec{r}_2$
 $m_3: \vec{r}_3 = b\vec{u}_x$

$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{M} \rightarrow \vec{r}_j = x_j \vec{u}_x + y_j \vec{u}_y + z_j \vec{u}_z$
 $= \frac{1}{M} (\vec{u}_x \sum m_j x_j + \vec{u}_y \sum m_j y_j + \vec{u}_z \sum m_j z_j)$
 $X_{cm} = \frac{1}{M} \sum_j m_j x_j$
 $Y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_j m_j y_j$
 $Z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_j m_j z_j$

$\vec{R}_{cm} = \frac{\vec{u}_x \sum m_j x_j + \vec{u}_y \sum m_j y_j}{M}$
 $= \frac{\vec{u}_x (m_2 x_2 + m_3 x_3) + \vec{u}_y (m_2 y_2 + m_3 y_3)}{M}$
 $= \frac{(m_2 + m_3) b \vec{u}_x + a m_2 \vec{u}_y}{M}$

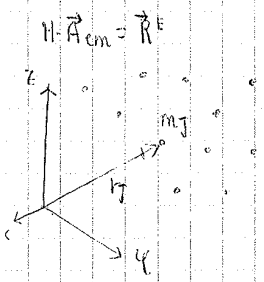
1) $m_3 = 2 m_1$
 $m_2 = m_1 \rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{3}{4} b \vec{u}_x + \frac{1}{4} a \vec{u}_y$

2) $m_3 = 10^{-6} m_1$ (sole)
 $m_2 = 10^{-3} m_1$ (giove)
 $M \approx m_1$
 $\rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{(10^{-3} + 10^{-6}) b \vec{u}_x}{M} + \frac{10^{-3} a \vec{u}_y}{M}$
 $\approx 10^{-3} b \vec{u}_x + 10^{-3} a \vec{u}_y$

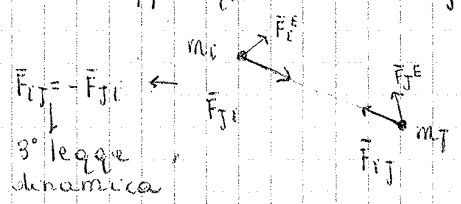
predomina sulle altre \rightarrow il centro della massa è vicino alla massa che predomina (coincide con il punto in cui è applicata la massa che predomina)

Il centro del sole può essere confuso con il centro di massa del sistema solare!
 Il centro di massa viene attratto dalla massa m_0 che predomina sulle altre.

teorema del centro di massa = mi da la legge con cui si muove il centro di massa.



Considero una coppia qualsiasi di m_j, m_i

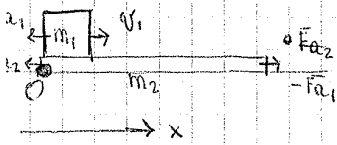


vale di coppia
 j generico = primo indice
 i = esterne (es. cariche)

ESERCITAZIONE ⑤

03.04.2011

es. 2.1b



μ_1 : corpo-piatta
 μ_2 : corpo-piatta-appoggio

relazione tra μ_1, μ_2, m_1, m_2 per far muovere la piastra?

~~Fa2~~ - Fa1 perché si oppone a Fa1 (principio di azione e reazione)

per far muovere la piastra: $F_{a1} > F_{a2}$

$$\mu_1 m_1 g > \mu_2 (m_1 + m_2) g \rightarrow \mu_1 m_1 > \mu_2 (m_1 + m_2)$$

Fisso $m_1 = 2 \text{ kg}$ $\mu_1 = 0,6$
 $m_2 = 3 \text{ kg}$ $\mu_2 = 0,2$

$v = 3 \text{ m/s}$ iniziale

- 1) distanza percorsa dal corpo rispetto alla piastra
- 2) s_1 = percorsa dalla piastra sul suolo
- 3) energia meccanica dissipata

m_1 si muove di moto uniformemente decelerato

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -F_{a1} \\ m_2 a_2 = F_{a1} - F_{a2} \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 a_1 = -\mu_1 m_1 g \\ m_2 a_2 = \mu_1 m_1 g - \mu_2 (m_1 + m_2) g \end{cases}$$

1) x_1 = spazio percorso dal corpo 1 rispetto alla piastra
 $v_1(t) = v_{in} - |a_1| t \rightarrow x_1$ si ferma quando $v_1 = v_2 \rightarrow ? \rightarrow$
 $v_2(t) = a_2 t$

$$v_1 = v_2 \rightarrow v_{in} - |a_1| t^* = a_2 t^* \quad t^* = \text{istante in cui il corpo 1 si ferma e da quell'istante i corpi si muovono e si attaccano}$$

$$x_1(t^*) = v_{in} t^* - \frac{1}{2} |a_1| t^{*2} \rightarrow \text{trovo } x_1 = \dots \quad x_1(t^*) = \text{spazio totale percorso rispetto l'origine}$$

$$x_2(t^*) = \frac{1}{2} a_2 t^{*2} \quad \leftarrow \text{bisogna togliere di quanto si è spostata la piastra}$$

$$d = x_1(t^*) - x_2(t^*) = 0,689 \text{ m}$$

Il fatto che i due corpi si muovono insieme vuol dire che $a_1 = a_2$

$$m_1 \ddot{x} = -F_{a1}^{\text{statico}} = \dots \rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{x} = -F_{a2} = -\mu_2 (m_1 + m_2) g \rightarrow a = -1,96 \text{ m/s}^2$$

$$v_f = v_2(t^*) - |a| t^* \rightarrow t_f \text{ ovvero } v_f = 0$$

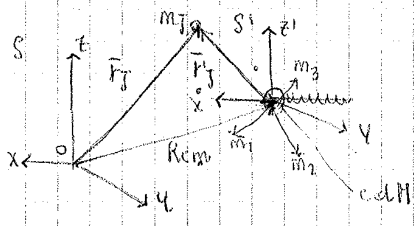
spazio totale = $s + x_2(t^*)$
 spazio percorso del sistema blocco-piatta-massa 1

energia meccanica
 1) energia potenziale = 0 perché si muove orizzontalmente
 $\frac{1}{2} m_1 v^2 \rightarrow$ variazione di energia meccanica perché $v_f = 0$ quindi $\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = 0$

$$F_{a1} \Delta x_1 + \mu_2 (m_1 + m_2) g \Delta x_2$$

spazio in cui agisce la forza di attrito 1

08.04.2011



\$O' = c.d.m\$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{H} \sum_j m_j \vec{r}_j$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{1}{H} \sum_j m_j \vec{v}_j$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_{cm} &= \frac{1}{H} \sum_j m_j \vec{r}_j \leftarrow \text{posizioni viste dal centro di massa} \\ &= \frac{1}{H} \sum_j m_j (\vec{r}_j - \vec{R}_{cm}) = 0 \\ &= \frac{1}{H} \sum_j m_j \vec{r}_j - \frac{1}{H} \left(\sum_j m_j \right) \vec{R}_{cm} \\ &= \left(\frac{1}{H} \sum_j m_j \right) \vec{R}_{cm} = 0 \end{aligned}$$

definizione di centro di massa

$$\begin{aligned} \vec{F}_j + \vec{R}_{cm} &= \vec{F}_j \\ \vec{v}_j + \vec{V}_{cm} &= \vec{v}_j \end{aligned}$$

\$\vec{V}_{cm}\$: velocità del centro di massa nel centro di massa =

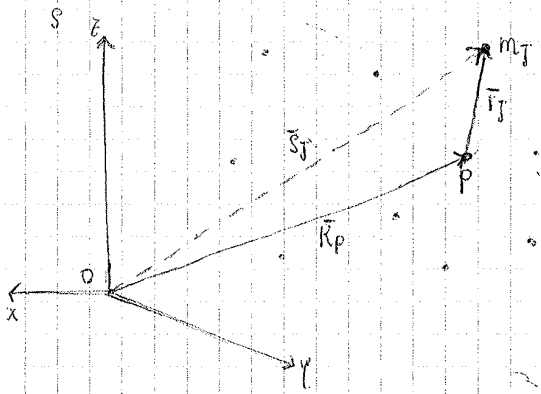
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{H} \sum_j m_j \vec{v}_j = \frac{1}{H} \sum_j m_j (\vec{v}_j - \vec{V}_{cm}) = \\ &= \frac{1}{H} \sum_j m_j \vec{v}_j - \left(\sum_j m_j \right) \vec{V}_{cm} = 0 \end{aligned}$$

↓
velocità del centro di massa

conclusione: $\vec{R}_{cm} = \frac{1}{H} \sum_j m_j \vec{r}_j = 0$
 $\vec{V}_{cm} = \frac{1}{H} \sum_j m_j \vec{v}_j = 0$

teorema del momento angolare per N particelle (2° eq cardinale della dinamica)

il polo non necessariamente coincide con l'origine del sist di riferimento



$$\begin{aligned} \vec{s}_j &= \vec{R}_p + \vec{r}_j \\ \vec{v}_j &= \vec{v}_p + \frac{d\vec{r}_j}{dt} \end{aligned}$$

\$V_{massa}\$ corso definire
 $\vec{L}_i = (\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i) m_i = m_i (\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i)$ ← posizione data rispetto al polo
 $M_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$
 velocità vista rispetto al sistema di rif. inerziale

\$\vec{L}\$: mom ang totale: $\vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} (m_j \vec{r}_j \wedge \vec{v}_j) = \sum_j m_j \frac{d}{dt} (\vec{r}_j \wedge \vec{v}_j) = \sum_j m_j \left(\frac{d\vec{r}_j}{dt} \wedge \vec{v}_j + \vec{r}_j \wedge \frac{d\vec{v}_j}{dt} \right) =$$

$$= \sum_j m_j (\vec{v}_j - \vec{v}_p) \wedge \vec{v}_j + \vec{r}_j \wedge \frac{d\vec{v}_j}{dt} =$$

$$= \sum_j m_j (\vec{v}_j \wedge \vec{v}_j - \vec{v}_p \wedge \vec{v}_j) + \sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{a}_j = -\vec{v}_p \wedge \sum_j m_j \vec{v}_j + \sum_j \vec{r}_j \wedge (\vec{F}_j^E + \vec{F}_j^I)$$

costante
 $= -\vec{v}_p \wedge H \vec{V}_{cm} + \left(\sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j^E \right) + \sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j^I \rightarrow \sum_j \vec{F}_j^E$ sorgente → \$V\$ sorgente ha una forza interna
 momento dovuto dalle forze esterne

$$= -H \vec{v}_p \wedge \vec{V}_{cm} + M^E + \left(\sum_j \vec{r}_j \wedge \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \right) \rightarrow \sum_j \sum_{i \neq j} \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} = 0$$

Quindi:

$$\vec{H}^E = \sum_j \vec{r}_j \wedge (\vec{F}_j^E + \vec{F}_j^I - m \vec{a}_{cm}) = \underbrace{\sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j^E}_{\vec{H}^E} + \underbrace{\sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j^I}_0 - \underbrace{\sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{a}_{cm}}_0$$

$$\vec{H}^E = \sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j^E = \vec{H}^E$$

$$H^E = M^E$$

E quindi: $\left[\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{H}^E \Rightarrow \frac{dL^E}{dt} = M^E \right]$

Teorema di Koenig = fanno capire come vedo le cose in un sistema inerziale e nel sist di rif del centro di massa

1° teorema di Koenig

$$\vec{L} = \sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{v}_j$$

(braccio + polo = 0)

$$= \sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{v}_j =$$

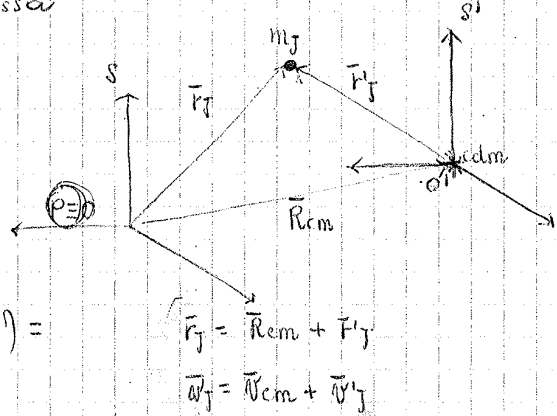
$$= \sum_j m_j (\vec{R}_{cm} + \vec{r}'_j) \wedge (\vec{v}_{cm} + \vec{v}'_j) =$$

$$= \sum_j m_j (\vec{R}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} + \vec{R}_{cm} \wedge \vec{v}'_j + \vec{r}'_j \wedge \vec{v}_{cm} + \vec{r}'_j \wedge \vec{v}'_j) =$$

$$= (\vec{R}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm}) \sum_j m_j + \vec{R}_{cm} \wedge (\sum_j m_j \vec{v}'_j) +$$

$$+ (\sum_j m_j \vec{r}'_j) \wedge \vec{v}_{cm} + \sum_j m_j \vec{r}'_j \wedge \vec{v}'_j =$$

$$= M \vec{R}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} + \vec{L}'$$

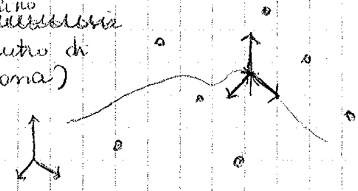


velocità nel centro di massa = 0
 velocità del centro di massa nel centro di massa
 \vec{r}'_j = posizione del centro di massa nel centro di massa = 0

$$\vec{L}^* = \vec{R}_{cm} \wedge M \vec{v}_{cm} + \vec{L}'$$

out di moto) momento angolare con polo preso nel centro di massa

\vec{L}' = termine locale - dovuto dai moti in piccolo (circolari) $\vec{R}_{cm} \wedge M \vec{v}_{cm}$ = termine orbitale - visto in grande al centro di massa
 le masse sono viste da un'unica massa che sta nel centro di massa



Se c'è un'unica massa: $\vec{L} = \vec{R}_{cm} \wedge M \vec{v}_{cm}$ perché $\vec{L}' = 0, \vec{r}'_j = 0$

il moto del centro di massa dipende dalle forze esterne $M \vec{a}_{cm} = \vec{F}^E$

2° teorema di Koenig = riguarda l'energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j (\vec{v}_{cm} + \vec{v}'_j)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j m_j (\vec{v}_{cm}^2 + 2 \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}'_j + \vec{v}'_j^2) =$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \sum_j m_j \vec{v}'_j + \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}'_j^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + E'_k$$

termine orbitale



$$\Rightarrow \vec{v}'_j^2 = \vec{v}'_j \cdot \vec{v}'_j = v_j'^2$$

$$= \sum_j m_j \bar{R}_j \wedge \bar{\omega} + \sum_j m_j \epsilon_j \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{R}_j) =$$

$$\bar{a} \wedge (\bar{b} \wedge \bar{c}) = b(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b})$$

caso del corpo piatto

$$= \sum_j m_j R_j^2 \omega \bar{u}_e + \sum_j m_j \epsilon_j (\bar{\omega} (\bar{u}_e \cdot \bar{R}_j) - R_j (\bar{u}_e \cdot \bar{\omega})) =$$

sono ortogonali per costruzione
paralleli

$$= (\sum_j m_j \bar{R}_j^2) \bar{\omega} - \sum_j m_j \epsilon_j \omega \bar{R}_j =$$

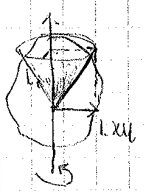
somma di tutte le fette con cui posso dividere il corpo
parte del momento angolare eliminata con $\bar{\omega}$

\bar{R}_j è la parte planare

parte del momento angolare adiacente al piano ($\bar{L}_p = - \sum_j m_j \epsilon_j \omega \bar{R}_j$)

$$\bar{L} = \bar{L}_z + \bar{L}_p \rightarrow$$

sempre paralleli ^{al piano} $x, y \rightarrow$ cerchiano di eliminazione



eff. di precessione del mom. angolare \rightarrow cono \bar{R}_j ruota (non voglio la precessione)

cono che descrive il moto
bisogna eliminare \bar{L}_p (o ridurre) il termine \bar{L}_p

domenica
10-06-2011

per esercizio 2.6
 $\bar{F}_1(\bar{r}) = -\nabla E_p^{(1)}$
 $\bar{F}_2(\bar{r}) = -\nabla E_p^{(2)}$

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = -\nabla (E_p^{(1)} + E_p^{(2)})$$

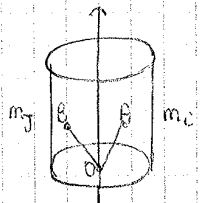
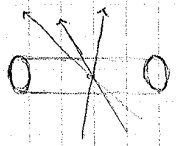
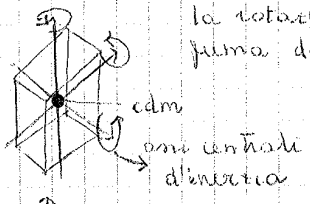


*(cambiando l'asse di rotazione)

assi principali d'inerzia - si può dimostrare che il punto di un generico corpo si possono definire 3 assi ortogonali (assi principali d'inerzia) tali che se l'asse di rotazione coincide con uno di essi allora si $\bar{L} = I_z \bar{\omega}$, $\bar{L}_{xy} = 0$
spacca la componente \bar{L}_p del piano x, y

caso semplice ma frequente!
considero corpi omogenei dotati di simmetria

la rotazione porta il corpo in una posizione indistinguibile dalla prima della rotazione \rightarrow simmetria $(d, \frac{\pi}{2})$
nel caso del parallelepipedo



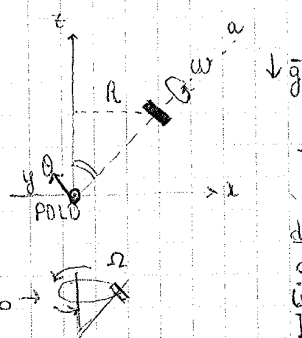
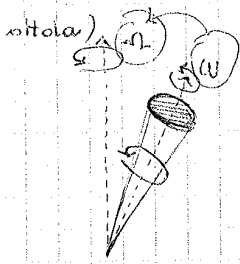
conclusioni:
 $\forall m_j$ esiste $m_j = m_j$ (ipotesi di omogeneità \rightarrow il corpo è uniforme)
tali che la coordinata $\epsilon_i = \epsilon_j$
 $R_i = -R_j$

$$\bar{L}_p = -\sum_j m_j \epsilon_j \omega \bar{R}_j = 0$$

perché a due a due qd si annullano.

$$\bar{L}_p = -\omega (m_1 \epsilon_1 \bar{R}_1 + m_2 \epsilon_2 \bar{R}_2 + \dots + m_j \epsilon_j \bar{R}_j + \dots + m_i \epsilon_i \bar{R}_i)$$

Se il punto è il centro di massa, gli assi d'inerzia si chiamano assi centrali di inerzia



in un mondo ideale, la bobina
girerebbe all'infinito

approssimazione

$$\vec{I} = I_a \vec{\omega} = (MR^2 \sin^2 \theta) \vec{\omega}$$

$$I_i = \sum_j m_j \vec{R}_j^2$$

→ ω = costante
ma il vettore
non cambia

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{R} \wedge M \vec{g}$$

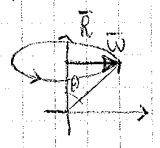
$$I_a \frac{d\vec{\omega}}{dt} + MR^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = RMg \vec{u}_\theta$$

$$\vec{\omega} = \omega \cos \theta \vec{u}_\theta + \omega \sin \theta \vec{u}_\phi$$

non dipende
dal tempo

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \omega \sin \theta \frac{d\vec{u}_\phi}{dt} = \omega \Omega \sin \theta (\vec{u}_\theta \parallel \vec{u}_\phi)$$

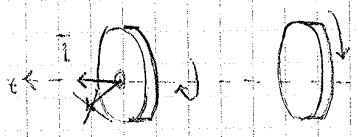
il disco è approssimato ad una
massa puntiforme
forze di attrito non ci ne sono
perché il braccio è nullo.



$$I_a \omega \Omega \sin \theta = RMg \sin \theta \rightarrow \Omega = \frac{RMg}{I_a \omega \sin \theta}$$

precessione

(ruote macchina)



cioè quando il corpo non è perfettamente omogeneo o causa di urti, ...
disallineamento di \vec{I}

esempio = Teorema di (Huygens) Steiner

se un asse di rotazione è H ad una certa distanza per il centro di massa allora il
suo momento d'inerzia è
 $I = I_{cm} + Ma^2$

se quando viene è

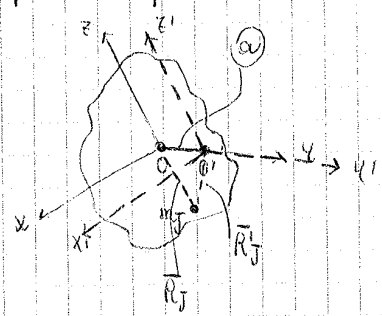
$$I_{cm} = \sum_j m_j \vec{R}_j^2 = \sum_j m_j (x_j^2 + y_j^2)$$

$$= \sum_j m_j (x_j^2 + (a + y_j')^2) =$$

$$= \sum_j m_j (x_j^2 + y_j'^2) + 2a \sum_j m_j y_j' + a^2 \sum_j m_j$$

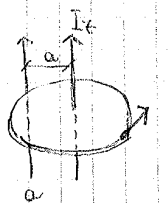
$$= \sum_j m_j (x_j^2 + y_j'^2) + 2a \sum_j m_j y_j' + a^2 \sum_j m_j$$

I_{cm} $\sum_j m_j y_j' = 0$ $\sum_j m_j = M$



$$O = C_{dm}$$

$$\begin{cases} x_j = x_j' \\ y_j = a + y_j' \end{cases}$$



$$I_a a = \vec{H}^2 \rightarrow I_a = I_{cm} + Ma^2$$

coordinata del centro di massa rispetto al centro di
massa

11.04.2011

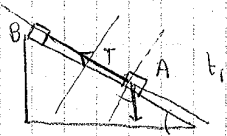
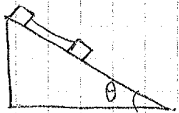
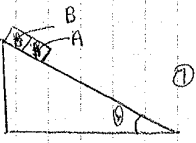
ESERCITAZIONE 6

Luca dall'asta @polito.it

es 2.20

Dati: $m_A = m_B = 1 \text{ kg}$
 $\theta = 30^\circ$
 $d = 10 \text{ cm}$
 $t_f = 0,56 \text{ sec}$
 $v_A = v_B = \theta \cos t$

μ_A
 μ_B



1) A sta scendendo il filo non è teso

$$m a_y = N - m g \cos \theta = 0 \rightarrow N = m g \cos \theta$$

$$m a_x = m g \sin \theta - (\mu_A N) \rightarrow \text{forza di attrito} \rightarrow \text{si oppone al movimento}$$

$$1) m a_x = m g \sin \theta - \mu_A m g \cos \theta$$

sapendo che il moto è uniformemente accelerato: $x(t_1) = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a (t_1)^2$
 $d = \frac{1}{2} a_x t_1^2 \rightarrow a_x = 0,64 \text{ m/s}^2$

Quindi ricavo μ_A da 1) $\mu_A = \frac{g \sin \theta - a_x}{g \cos \theta} = \tan \theta - \frac{a_x}{g \cos \theta} = 0,5$

$m g \sin \theta - \mu_A m g \cos \theta - T = m a_A$ → stessa accelerazione perché altrimenti il filo non sarebbe teso $a_A = a_B = 0$ perché $v_A = v_B = \cos t$

$$2 m g \sin \theta - (\mu_A + \mu_B) m g \cos \theta = 0$$

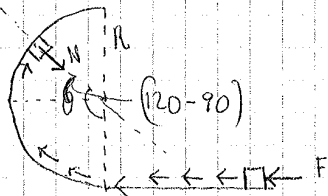
$$\mu_B = 2 \tan \theta - \mu_A = 0,66$$

Il filo è ideale quindi la tensione si propaga

Quindi ricavo la tensione!

2.39

Dati: ...



$m a_x = F$ costante
 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \rightarrow \int \frac{d^2 x}{dt^2} dt = \int \frac{F}{m} dt \rightarrow v_0 = \frac{F}{m} \Delta t = 9,1 \text{ m/s}$

N è sempre perpendicolare quindi non compie lavoro

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad E_{k,\theta} = \frac{1}{2} m v^2(\theta)$$

$$E_{p,\theta} = m g R (1 + \sin(\theta + 90^\circ)) \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2(\theta) + m g R (1 + \sin(\theta - \frac{\pi}{2})) \rightarrow v(\theta) = 6,1 \text{ m/s}$$

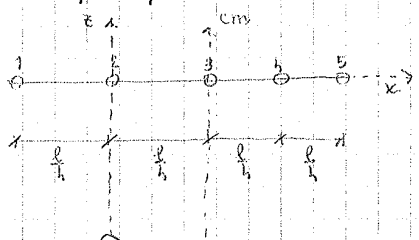
t. di conservazione dell'energia

proiettato lungo l'asse radiale: $m a_r = m \frac{v^2(\theta)}{R} = N + m g \cos 60^\circ$

Quindi ricavo $N = 10,1 \text{ N}$

15.04.2014

- esempio: per esatte



$m_j = m \cdot \forall j$
 $I_c = \sum_j m_j R_j^2 =$ somma delle masse pesate con la distanza al quadrato
 $= \sum_j m_j x_j^2 =$
 $= m_1 \frac{l^2}{16} + m_2 0 + m_3 \frac{l^2}{16} + m_4 \frac{l^2}{16} + m_5 \frac{9l^2}{16} =$
 $= m \frac{l^2}{16} = (1+1+h+9) = \frac{15}{16} ml^2$

$x_1 = -\frac{l}{4}$
 $x_2 = 0$
 $x_3 = \frac{l}{4}$
 $x_4 = \frac{l}{2}$
 $x_5 = \frac{3l}{4}$

Per ricavare I_{cm} applico il teorema di H.S
 Verifico

$I_{cm} = \sum_j m_j R_j^2 = m_1 \frac{l^2}{16} + m_2 \frac{l^2}{16} + m_3 \frac{l^2}{16} + m_5 \frac{l^2}{16} = m \frac{l^2}{16} (h+1+h+1) = \frac{5}{8} ml^2$
 con H.S
 $I_c = I_{cm} + M a^2 \rightarrow I_{cm} = I_c - M a^2 = \frac{15}{16} ml^2 - 5m \frac{l^2}{16} = \frac{5}{8} ml^2$

- equilibrio statico (per corpi rigidi)

↓
 (o riconducibile a corpo puntiforme)
 Per massa puntiforme $\sum_j \vec{F}_j = m \vec{a} = 0 \rightarrow$ condizione di equilibrio
 Per corpi rigidi: non si rimpolpano i moti che tipicamente vengono descritti dai momenti angolari
 condizione di equilibrio:

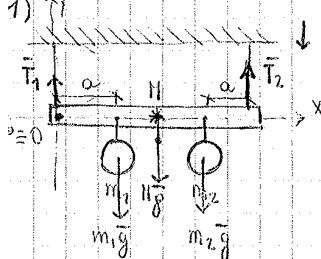
$\sum_j \vec{F}_j = \vec{F} = 0 \rightarrow$ non ci sia accelerazione nel centro di massa

$\sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j = \vec{M} = 0 \rightarrow$ non ci siano momenti interni del corpo (rotazione attorno ad un asse)

• Immobilizziamo completamente il corpo ←

$\vec{M} = \sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j$

(esempio)



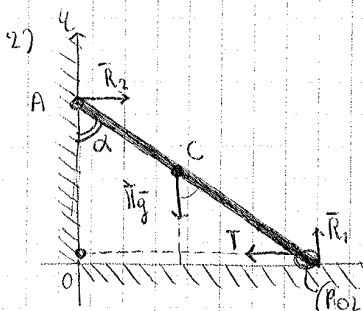
* centro di massa se non ci fossero m_1, m_2 ? \vec{T}_1, \vec{T}_2
 non ci sono momenti di tipo traslatorio se la tensione dei fili riesce a bilanciare le 3 forze peso
 Puro il sistema di riferimento come in figura con semplifica l'eq perché il braccio della tensione è nullo (\vec{T}_1 non fa momento)
 Puro il sistema di riferimento

$\vec{R} = \vec{u}_y (\vec{T}_1 + \vec{T}_2 - m_1 \vec{g} - M \vec{g} - m_2 \vec{g}) = 0 \rightarrow$
 $\vec{M} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F} = a \vec{u}_x \wedge m_1 \vec{g} + \frac{l}{2} \vec{u}_x \wedge M \vec{g} + (\frac{l}{2} - a) \vec{u}_x \wedge m_2 \vec{g} + l \vec{u}_x \wedge \vec{T}_2 \rightarrow$ non considero i segni perché usciranno dal prodotto vettoriale
 $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = (m_1 + m_2 + M) \vec{g}$
 $m_1 g a (\vec{u}_x \wedge (-\vec{u}_y)) + M \frac{l}{2} g (\vec{u}_x \wedge (-\vec{u}_y)) + m_2 g (\frac{l}{2} - a) (\vec{u}_x \wedge (-\vec{u}_y)) + T_2 l (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y) = 0$
 $-m_1 g a \vec{u}_z - M \frac{l}{2} g \vec{u}_z - m_2 g (\frac{l}{2} - a) \vec{u}_z + T_2 l \vec{u}_z = 0$
 $-(m_1 a + M \frac{l}{2} + m_2 (\frac{l}{2} - a)) g + T_2 l = 0 \rightarrow$ Ricavo T_2
 sostituisco nella prima

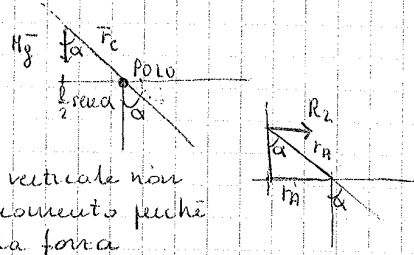
Viene la stessa cosa se cambio il polo
 Provare x credere!

~

2)



$$\begin{cases} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{T} + \vec{H}_g = 0 \\ \vec{F}_c \wedge \vec{H}_g + \vec{F}_A \wedge \vec{R}_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{lungo } x \\ \text{lungo } y \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \vec{F}_c \wedge \vec{H}_g &= \vec{u}_x \frac{l}{2} \text{sen} \alpha \cdot H_g \\ \vec{F}_A \wedge \vec{R}_2 &= -\vec{u}_x l \cos \alpha R_2 \end{aligned}$$

la comp. verticale non da momento perché // alla forza

momenti (POLO = così che forze sono nulle perché il braccio è nullo)

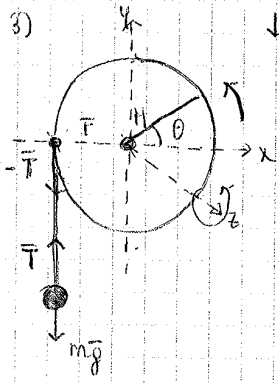
$$\begin{cases} x) R_1 - H_g = 0 \\ y) R_2 - T = 0 \\ \frac{l}{2} \text{sen} \alpha H_g - l \cos \alpha R_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= H_g \quad \text{NO NOTO } \uparrow \\ R_2 &= T \quad \text{NO NOTO } \rightarrow \end{aligned}$$

in questo caso la componente orizzontale non da momento perché // alla forza

$R_2 = \frac{1}{2} H_g \tan \alpha \rightarrow$ sostituisco e sostituisco nelle altre

3)



$$I_z = \frac{1}{2} m R^2$$

trovare l'accelerazione di m
Il ha solo moto rotatorio

$$\begin{cases} m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} \\ I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{T} \wedge (-\vec{u}_x) \end{cases}$$

accelerazione angolare

Ma non c'è un'equazione di Newton
Inoltre per il disco, invece di un fisso non c'è l'eq. cardinale della dinamica

$$\begin{aligned} \vec{T} &= T \vec{u}_y \\ \vec{g} &= -g \vec{u}_y \\ \vec{T} &= -T \vec{u}_x \\ \vec{a} &= a \vec{u}_y \end{aligned} \quad \begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \vec{u}_z = \dot{\theta} \vec{u}_z \\ \theta &\text{ è crescente perché il disco ruota in senso antiorario} \end{aligned}$$

accelerazione verso il basso *

$$\begin{cases} m \vec{a} = -m \vec{g} + \vec{T} \\ I \vec{u}_x \dot{\alpha} = R \vec{T} \wedge (-\vec{u}_x) \end{cases} \rightarrow I \dot{\alpha} = R T \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{R T}{I} \rightarrow 3 \text{ incognite, 2 equazioni } \alpha, a, T$$

$R \dot{\alpha} = |y - y_0| \rightarrow$ se il filo scivola di Δy vuol dire che è stato spazzato un certo angolo perché il filo è inestensibile

$$\begin{aligned} R \ddot{\alpha} &= |\dot{y}| \rightarrow R \ddot{\alpha} = |a| \\ R \alpha &= |a| \end{aligned}$$

accelerazione angolare \rightarrow positiva
metto il modulo per perché altrimenti $\ddot{\alpha} < 0$
 \rightarrow avrei potuto vederlo all'inizio perché $y - y_0 < 0$ mentre $R > 0$

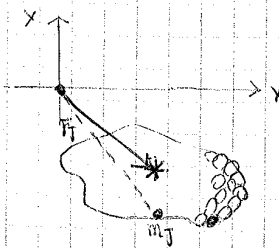
Ricavo tutto!
2 eq. 2 incognite

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{R^2}} \rightarrow \text{esplicito } I \text{ e ottengo } a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2} M}$$

seguenti da ottenere da formula finale (ovvero: $m - \frac{1}{2} M$ è uguale di errore!)

PER ESAME \rightarrow pendolo fisso (quello vero)
dove le masse non sono uniformi

concetto preliminare: momento delle forze di gravità



moto planare
 r_j vettore posizione
 m_j ha r_j e $m_j \vec{g}$

$$\vec{H}^E = \sum_j \vec{r}_j \wedge m_j \vec{g} = \sum_j m_j \vec{r}_j \wedge \vec{g} = M \vec{r}_{cm} \wedge \vec{g}$$

tutta la massa è nel centro di massa

$$F = a \left(M + \frac{I}{R^2} \right)$$

$$a = \frac{F}{M + \frac{I}{R^2}} \rightarrow \text{buon segno!} \quad f = \frac{IFR^2}{MR^2 + I}$$

la conosco a posteriori

Posso aumentare F sino al regime di puro rotolamento? NO perché f ha un valore massimo.

Il moto di puro rotolamento "resiste" finché $f \leq f_a^{\max} = \mu_s N_g$

$$\frac{IF}{MR^2 + I} \leq \mu_s N_g \rightarrow \text{forza massima da applicare } F \leq \frac{N_g \mu_s (MR^2 + I)}{I} \quad (1)$$

Cosa accade dopo?

Suppongo $F > F_a^{\max} \Rightarrow$ Regime di moto misto $\left\{ \begin{array}{l} \text{rotazione} \\ \text{slittamento (scivolo con attrito)} \end{array} \right.$

Attrito dinamico

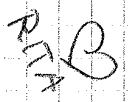
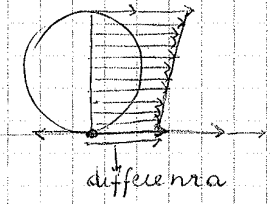
Il punto di contatto ha un valore $\neq 0 \rightarrow$ Attrito dunque delle velocità

$$\begin{cases} N_a = F - f & a \text{ ed } \alpha \text{ sono indipendenti} \\ I\alpha = -Rf & a \neq R|\alpha| \end{cases}$$

In questo caso è nota a priori perché $f = f_{\text{dinamica}} = \mu_d N = \mu_d N_g$

Ricavo a ed α

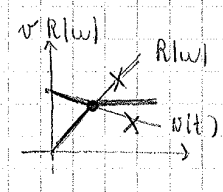
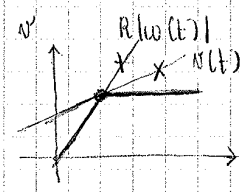
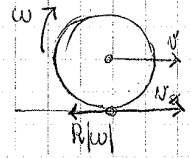
$$a = \frac{F}{m} - \mu_d g \quad \alpha = -\frac{R\mu_d N_g}{I}$$



Applicazione:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + (v_0 t) + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \text{moto unif accelerato lungo } x \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \text{ con } a < 0 \Rightarrow \theta(t) = -\frac{1}{2} |a| t^2 \end{cases} \text{ caso generale}$$

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ \omega(t) = -|a|t \end{cases}$$



- caso + semplice (aereo)

$$F = 0$$

$$a = \frac{F}{M} - \mu_d N_g \rightarrow \text{solo moto di rallentamento } a < 0$$

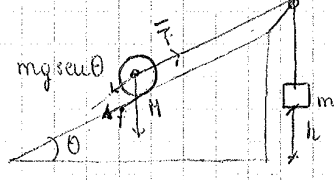
$$\begin{cases} v(t) = v_0 - |a|t \\ \omega(t) = -|a|t \end{cases}$$

c'è di sicuro il moto di puro rotolamento perché le rette si intersecano per forza

lo slittamento fa crescere $R|\omega|$ ad un certo punto uguaglia $v \Rightarrow$ moto di puro rotolamento

se è verificata la (1) perché altrimenti non si avrà mai il moto di puro rotolamento

quindi si ha il moto di puro rotolamento se è verificata la (1)



In regime di p. rotolamento

$$F = T - \mu_d N_g \text{ sen } \theta$$

$$a = \frac{FR^2}{I + MR^2} \text{ se non conosco la tensione del filo}$$

$$\begin{cases} -ma = T - mg \\ NA = T - N_g \text{ sen } \theta - f \\ I\alpha = -Rf \\ a = -\frac{a}{R} \end{cases}$$

Alternativa:

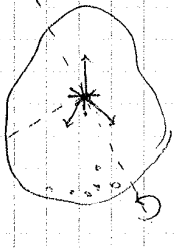
la forza di attrito non fa lavoro

\downarrow
teorema della conservazione dell'energia meccanica

Quindi:

$$E_{KB} - E_{KA} = -(E_{PB}^{TOT} - E_{PA}^{TOT}) \rightarrow E_{KB} + E_{PB}^{TOT} = E_{KA} + E_{PA}^{TOT} \rightarrow t. di conservazione dell'energia per N corpi rigidi$$

applicazioni corpo rigido



$\downarrow \vec{g}$ campo esterno

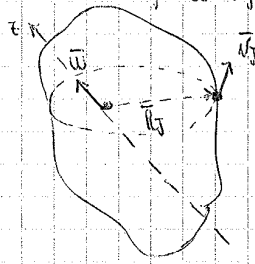
$$\begin{aligned} E &= E_K + E_P^{TOT} = \\ &= \sum_j \frac{1}{2} m_j \vec{v}_j^2 + E_P^F + \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} E_P^{(ij)} \\ &\stackrel{\text{King}}{=} \sum_j \frac{1}{2} m_j \vec{v}_j^2 + \sum_j E_{JP}^F = \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + \sum_j \frac{1}{2} m_j (\vec{v}_j^2) + g \sum_j m_j z_j = \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + \sum_j \frac{1}{2} m_j (v_j^2) + M g z \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 + M g z \end{aligned}$$

C'è ma e come se non ci fosse $E_P^{(ij)} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ costante in un corpo rigido perché $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ è costante

$$m_j g z_j = E_{JP}^F$$

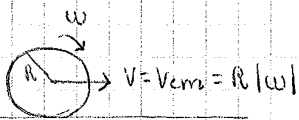
$$z = \frac{1}{M} \sum_j m_j z_j$$

$$\frac{1}{2} \sum_j m_j (\vec{v}_j^2) \Rightarrow \frac{\vec{v}_j^2}{v_j^2} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_j^2 = \omega^2 R_j^2$$

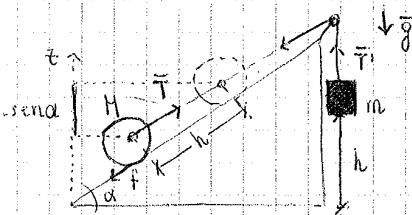


$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 &= \frac{1}{2} (\sum_j m_j \omega^2 R_j^2) \\ &= \frac{1}{2} I_z \omega^2 \end{aligned}$$

corpo che rotola



$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \\ &= (\frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{2} I_z) \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} (M + \frac{I_z}{R^2}) v_{cm}^2 \end{aligned}$$



metodo lungo

$$\begin{cases} N \text{Acm} = T - f - M g \text{sen} \alpha \\ I \alpha = - R f \\ - m a = T - m g \end{cases} \quad \alpha = a \text{cm}$$

$$\text{con } \alpha = -\frac{a}{R}$$

Y spostamento di O $\vec{T} \rightarrow$
 $\vec{T}' = -\vec{T}$ spostamento negativo per m

Il lavoro è quindi nullo (uguale ed opposto)

$$\begin{aligned} E &= E_K + E_P = \frac{1}{2} m v^2 + (\frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2) + M g z_{cm} + m g z \\ &= \frac{1}{2} (m + M + \frac{I}{R^2}) v^2 + M g z_{cm} + m g z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= v_{cm} \text{ (tutto inestensibile)} \\ v_{cm} &= R|\omega| \end{aligned}$$

$$E_K^B - E_K^A = -(E_P^B - E_P^A) \quad N_A = 0 \rightarrow t = 0$$

$$\frac{1}{2} (m + M + \frac{I}{R^2}) v_B^2 = - (M g (z_{cmB} - z_{cmA}) - m g (z_B - z_A))$$

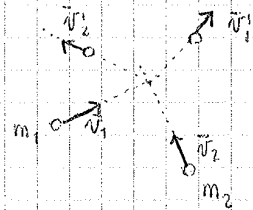
29.01.2014

urto completamente anelastico = applicazione:
corpi che strisciano

urto elastico per corpi bidimensionali:

si conserva la quantità di moto: $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$
 si conserva l'energia (cinetica) $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$
 o un istante prima e un istante dopo dell'urto

l'energia potenziale rimane invariata perché l'interazione avviene in un ~~tempo~~ uno spazio \rightarrow l'Ep non conta che è un punto in un tempo tendente a 0



Se \vec{v}_1 e \vec{v}_2 sono note \rightarrow devo conoscere le componenti di \vec{v}_1' e \vec{v}_2'
 6 incognite con 3+1 eq disponibili
 le altre 2 incognite sono misurate sperimentalmente

Caso 2-dimensionale \rightarrow le incognite sono le componenti x, y di \vec{v}_1' e \vec{v}_2'
 4 incognite con 1+2 eq disponibili
 l'altra incognita è misurata sperimentalmente

Caso 1-dimensionale \rightarrow 2 incognite e 2 equazioni

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' & \textcircled{1} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \\ m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \\ m_1 (v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2 (v_2' + v_2)(v_2' - v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \\ v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \end{cases} \quad \text{sfruttando la prima equazione semplifico i termini}$$

Risolvendo il sistema si ha quindi

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad \rightarrow \text{trovare anche formule inverse}$$

Perché le equazioni del sistema sono simmetriche, anche le soluzioni lo sono ovvero, ricavato v_2' so che v_1' ha la stessa forma di v_2' ma con gli indici scambiati

Casi notevoli ① $m_1 \gg m_2$

m_2 è trascurabile rispetto a $m_1 \rightarrow v_2' = 2v_1 - v_2$ (pensa al limite per $m_1 \rightarrow \infty$)
 $v_1' = +v_1$

② $m_1 = m_2 \rightarrow v_1' = v_2$ (scambio di velocità)
 $v_2' = v_1$

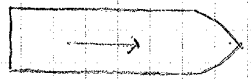
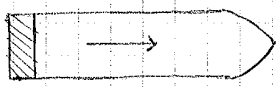
③ $m_2 \gg m_1$

m_1 è trascurabile rispetto a $m_2 \rightarrow v_1' = 2v_2 - v_1$
 $v_2' = v_2$

Se lancio una pallina verso un muro (muro pallina = m_1 e muro = m_2) e se velocità del muro = 0, allora:

- il muro continua ad essere fermo
- la pallina ha una velocità uguale ed opposta \rightarrow la pallina rimbalza con la stessa velocità

sistemi a massa variabile
 esempio del razzo



$m+dm$ ($dm < 0$ perché viene perso)
 $m+dm < m$
 $v+dv$

$v - v^* \rightarrow v^*$

per la conservazione della quantità di moto

$$mv = (m+dm)(v+dv) + (v-v^*)|dm|$$

$$mv = (m+dm)(v+dv) + (v-v^*)|dm|$$

$dm < 0$

$$mv = (m - |dm|)(v+dv) + (v-v^*)|dm|$$

$$mv = mv + |dm|v - |dm|dv + m dv + v|dm| - v^*|dm|$$

infinitesimo di ordine superiore (in ϵ^2) lo posso ignorare?

~~$m dv = v^*|dm|$~~ \rightarrow se tolgo il valore assoluto
 $m dv = -v^* dm$

peso a tutto ciò nel tempo: $m \frac{dv}{dt} = -v^* \frac{dm}{dt} \rightarrow m(t) = m_0 - kt \rightarrow$ regime lineare di consumo del carburante

Quindi:

$$m \frac{dv}{dt} = v^* k + \frac{dv}{dt} = \frac{v^* k}{m(t)}$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{v^* k}{m_0 - kt} dt$$

la velocità del razzo che perde costantemente ^{carburante} nel tempo progredisce con questa legge

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - kt} \right)$$

$$dv = \int_0^t \frac{v^* k}{m_0 - kt} dt \rightarrow v(t) - v_0 = -v^* \int_0^t \frac{k}{m_0 - kt} dt$$

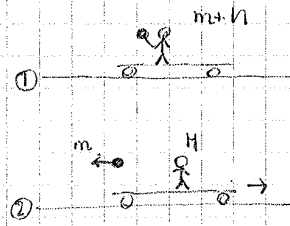
$$v(t) - v_0 = -v^* \left[\ln(m_0 - kt) \right]_0^t$$

$$v(t) = v_0 + v^* (\ln(m_0 - kt) - \ln m_0)$$

$$v(t) = v_0 + v^* (\ln m_0 - \ln(m_0 - kt))$$

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt}$$

$$dv = \frac{d \left(v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} \right)}{dt} = v^* \frac{d \ln \frac{m_0}{m_0 - kt}}{dt}$$



$$mv + Nv = 0$$

$$v = -\frac{mv}{N}$$

per $N \rightarrow \infty \Rightarrow v \rightarrow 0$

Per questo se lancio un razzo fermo sulla terra non mi muovo

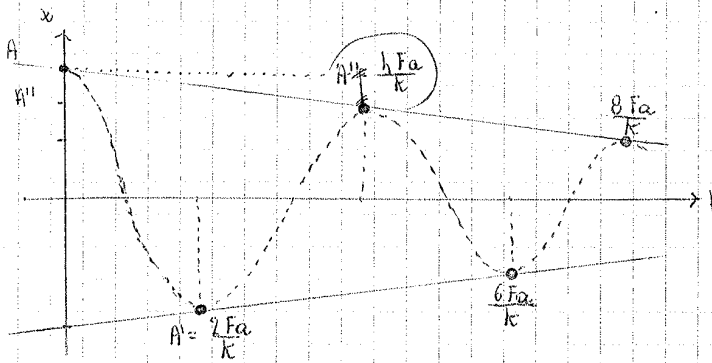
(Però se tutti lanciamo un razzo nella stessa direzione qualcosa potrebbe accadere.)

v^* è costante rispetto al tempo
 perché?

$$f'(x) = \log[f(x)]$$

$$D[m_0 - kt] = -k$$

$$D \left[\ln \frac{m_0}{m_0 - kt} \right] =$$



mau piano le mie oscillazioni si smorzano

$$x_n = \frac{hFa}{k}$$

n = andata e ritorno

Si ferma quando $k|x_n| \leq F_a^{\max} = \mu_s mg$
 e' il periodo ma non e' la periodicità nelle oscillazioni → moto pseudo periodico

- oscillatore armonico smorzato (9.7) da una forza viscosa (9.7)

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ (oscillatore armonico senza attrito viscoso)} \\ \gamma = \frac{\lambda}{2m} \end{cases}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow x = ce^{at}$$

$$x a^2 e^{at} + 2\gamma x a e^{at} + \omega_0^2 x e^{at} = 0 \rightarrow a^2 + 2\gamma a + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \text{polinomio caratteristico}$$

soluzioni generali: $x(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t}$

Ricavo $\alpha_{1,2} \rightarrow \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \rightarrow R$

$$x(t) = A e^{(-\gamma-R)t} + B e^{(-\gamma+R)t} \rightarrow x(t) = e^{-\delta t} (A e^{-Rt} + B e^{+Rt})$$

3 casi: $\begin{cases} \gamma > R & \text{smorz. forte} \\ \gamma = R & \text{" critico} \\ \gamma < R & \text{" debole} \end{cases}$

$$x(0) = A + B$$

$$v(t) = (-A(\gamma+R))e^{-(\delta+R)t} + B(-\gamma+R)e^{(-\delta+R)t}$$

$$v(0) = -A(\delta+R) + B(R-\gamma)$$

in qd dopo l'urto le particelle hanno velocità nulla quindi non posso applicare la quantità di moto

posso applicare il teorema dell'impulso: l'integrale delle f. impulsive che agisce durante l'urto coincide con la variazione della quantità di moto

$$\int_0^{\Delta t} \vec{F} dt = \Delta \vec{P}_{TOT} \rightarrow \int_0^{\Delta t} N dt = N \Delta t = \Delta P_y$$

forza costante

$$\Delta P_y = p_{y \text{ dopo}} - p_{y \text{ prima}} = -(-mv) = mv \rightarrow N = \frac{mv}{\Delta t}$$

interv. di tempo in cui avviene l'urto
si è piccato $\Delta t = N \Delta t$

perché dopo l'urto il sistema non si muove lungo y

$$p_{y \text{ prima}} = 2m \left(\frac{v}{2} \right) = -mv$$

↓
quantità del moto del sistema prima dell'urto (Vau)

• calcolare il "centro di massa" perché le proprietà del sistema coincidono con le proprietà del cm

~~il centro di massa~~
~~è~~

ff: $\left. \begin{array}{l} \text{Numero picciolata (pseudoperiodo)} \\ \text{Il periodo viene allungato rispetto al vecchio periodo} \end{array} \right\} \text{eff. della forza uscosa}$

oscillatore smorzato + termine forzante (motore)

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda \dot{x} + \underbrace{F_0 \sin(\omega t)}_{\text{motore}} \rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \rightarrow \text{forma canonica}$$

la soluzione generale $x(t) = x_h(t) + x_s(t) \rightarrow$ soluzioni particolari
soluzioni dell'omogenea associata
(caso smorzamento debole)

potersi: $x_s(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ con A, θ parametri liberi (non so quando valgono)
e tengo lì per far in modo che venga soddisfatta l'equazione
 $\theta \neq$ fase iniziale

$\omega \neq 0$: per t grande $x(t) = x_h(t) + x_s(t)$
anche contiene lo smorzamento

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta) = x_s(t)$$

$$\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \theta)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta)$$

ostituisco: $-\omega^2 A \sin(\omega t + \theta) + 2\gamma \omega A \cos(\omega t + \theta) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \theta) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \sin(\omega t + \theta) + 2\gamma \omega A \cos(\omega t + \theta) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

ricordo che $\sin(\omega t + \theta) = \sin(\omega t) \cos \theta + \cos(\omega t) \sin \theta$
 $\cos(\omega t + \theta) = \cos(\omega t) \cos \theta - \sin(\omega t) \sin \theta$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)(\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) + 2\gamma \omega A(\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$\left(A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \theta + 2\gamma \omega A \cos \theta \right) \cos \omega t + \left(A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \theta - 2\gamma \omega A \sin \theta - \frac{F_0}{m} \right) \sin \omega t = 0$$

coefficienti di $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ devono essere nulli:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \theta + 2\gamma \omega A \cos \theta = 0$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \theta - 2\gamma \omega A \sin \theta - \frac{F_0}{m} = 0 \rightarrow A, \theta \text{ sono parametri liberi}$$

suppongo che $\left\{ \begin{array}{l} 2\gamma \omega = -R \sin \theta \\ \omega_0^2 - \omega^2 = R \cos \theta \end{array} \right. \rightarrow$ so che due numeri reali li posso scrivere in coordinate polari

quindi:
 $R \cos \theta \sin \theta - R \sin \theta \cos \theta = 0$

risolvo θ : $2\gamma \omega = -\tan \theta \rightarrow \text{risolvo } \theta$

$$\tan \theta = -\frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$AR \cos^2 \theta - (-R \sin \theta) A \sin \theta = \frac{F_0}{m}$$

risolvo A : $A = \frac{F_0}{Rm}$

$$h\gamma^2 \omega^2 = R^2 \sin^2 \theta$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = R^2 \cos^2 \theta \rightarrow R^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + h\gamma^2 \omega^2 \rightarrow \text{quindi } A = \frac{F_0}{Rm} = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + h\gamma^2 \omega^2}}$$

Resonanza in energia

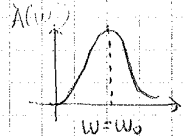
Potenza: $P(t) = \frac{dE}{dt} = v(t) F(t) = \frac{dx}{dt} \cdot F_0 \sin(\omega t) = A \omega \cos(\omega t + \theta) F_0 \sin(\omega t) =$
 $= F_0 \omega A (\cos \theta \cos 2\omega t + \sin \theta \sin 2\omega t) =$
 $= F_0 \omega A (\frac{1}{2} \cos \theta \cos(2\omega t) - \sin \theta \sin(2\omega t))$

valore medio: $\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A \omega F_0 (\frac{\cos \theta}{2} \cos(2\omega t) - \sin \theta \sin(2\omega t)) dt \rightarrow \int \sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$

$= \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{A \omega F_0}{2} \sin \theta dt$

funzioni periodiche $\rightarrow 0$

$\int_0^T \sin(2\omega t) dt = (-\frac{1}{2\omega} \cos(2\omega t)) \Big|_0^T = 0$
 $\int_0^T \cos(2\omega t) dt = 0$ } funzioni periodiche



assorbimento di energia in funzione di ω

avand.: $\langle P \rangle = -\frac{A(\omega) F_0 \omega}{2} \cdot \frac{-2\gamma \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} = \frac{\gamma F_0^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} m$

$\frac{d\langle P \rangle}{d\omega} = 0 \rightarrow 2\omega \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = 0 \rightarrow$ per $\omega = \omega_0$

Potenza massima \rightarrow suscettibilità massima
 attinente al assorbimento massimo di energia

$\langle P \rangle$ (per $\omega = \omega_0$) = $\frac{F_0^2}{4m\gamma}$ \rightarrow risonanza in ampiezza e risonanza in energia
 fortemente influenzato da γ

obtenere
 $V(\vec{r}) := \sum_{j=1}^N V_j(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N -\gamma \frac{m_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \rightarrow \vec{G}(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} V \rightarrow m\vec{V} = E_p$

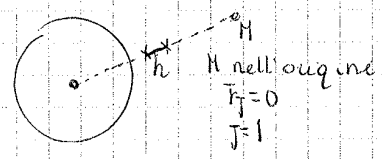
g = accelerazioni di gravità

$\vec{F} = F(r) = m|\vec{G}| = \gamma \frac{mM}{r^2} = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2}$ $h \ll R$

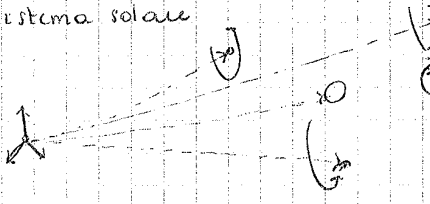
sviluppo di Taylor: $= \gamma \frac{mM}{R^2 (1 + \frac{h}{R})^2} = \gamma \frac{mM}{R^2} (1 - \frac{2h}{R} + \dots)$

$F(R+h) \approx \gamma \frac{mM}{R^2} = mg$

sistema solare



08.05.2014



① Teorema del centro di massa
 $N\vec{A}_{cm} = R^E \rightarrow$ forze esterne (raggio enorme quindi la forza centrifuga è trascurabile)
 $= 0$
 $N\vec{V}_{cm} = \vec{P}_{TOT} = \text{cost}$
 \downarrow
 $V_{cm} = \text{cost}$ vedo le cose dal pm centro di massa (nuovo punto di vista)

② $m_j = sde \Rightarrow m_j =$ masse planeti

$R_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \sum_{j=2}^N \frac{m_j}{M} \vec{r}_j$

$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n \rightarrow$ trascurabili
 $M \approx m_1$

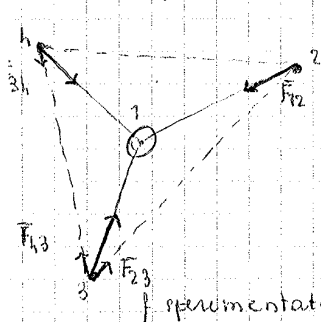
edm = Origini
 il sde è meno al edm

Vedo le cose dall'interno

$\frac{m_j}{M} \approx \frac{m_j}{m_1}$

$R_{cm} \approx \frac{m_1}{M} \vec{r}_1$ \rightarrow confondo spesso il centro di massa con il centro del sole
 posizione moderata per approssimazioni più comode

③ Considero 3 pianeti + sde



$\vec{F}_{10} = -\gamma \frac{m_1 m_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_1)$
 sorgenti: quelle con il sole sono diverse da quelle con 2 masse planetarie

$|\vec{F}_{10}| \gg |\vec{F}_{jk}|$
 $j, k \neq 1 \rightarrow$ il sole non viene coinvolto
 pochi controllate da un prodotto di massa

la forza che domina su ogni pianeta è quella del originata dal sole (le altre sono delle perturbazioni (trascurabili))

la pietra cade sulla terra tanto quanto la terra cade sulla pietra
 (non ce si accorge di questo effetto perché l'accelerazione è tra infinitesime)

D+①+② \rightarrow riduzione dello studio a 2 corpi
 ogni pianeta interagisce con il sole

eq del moto di un pianeta: $m_j \vec{a}_j = \sum_{k \neq j} \vec{F}_{kj} = \vec{F}_{1j} + \vec{F}_{2j} + \dots \rightarrow \vec{F}_{1j} \leftarrow$ conta solo la prima

D'ora in poi \rightarrow scenario di due corpi
 origine = edm

$$r_A + r_B = 2a$$

$$r_A \cdot r_B = b^2$$

$$A = \pi ab \quad (\text{da area di cerchio } (a=b=r \rightarrow A = \pi r^2))$$

} da geometria analitica

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T} \quad (\text{tutta area corso tutto il tempo = periodo}) \quad \textcircled{1} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu}$$

$$\textcircled{2} L = \mu r_A v_A = \mu r_B v_B \rightarrow \text{conservazione del momento angolare} \rightarrow v_A r_A = v_B r_B$$

$$\textcircled{3} E = \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = \text{cost} \rightarrow \text{conservazione dell'energia}$$

quindi

$$\frac{1}{2} \mu \bar{v}_A^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_A} = \frac{1}{2} \mu \bar{v}_B^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_B} \quad \textcircled{4}$$

Dalla $\textcircled{1}$ $\left\{ \begin{array}{l} \mu r_A v_A = 2\mu \frac{\pi ab}{T} \\ \mu r_B v_B = 2\mu \frac{\pi ab}{T} \end{array} \right. \rightarrow \text{per eliminare la velocità} \left\{ \begin{array}{l} v_A = \frac{2\pi ab}{T r_A} \\ v_B = \frac{2\pi ab}{T r_B} \end{array} \right.$

la $\textcircled{4}$ diventa:

$$\frac{1}{2} \mu \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 r_A^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_A} = \frac{1}{2} \mu \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 r_B^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_B}$$

$$\frac{2\pi^2 \mu}{T^2} a^2 b^2 \left(\frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{r_B^2} \right) = \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$\frac{2\pi^2 \mu}{T^2} a^2 b^2 \left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right) = \gamma m_1 m_2$$

$$T^2 = \frac{2\pi^2 \mu a^2 b^2}{\gamma m_1 m_2} \cdot \frac{r_A + r_B}{r_A \cdot r_B} \rightarrow \text{ricordo geometria analitica}$$

ricordo (r_A, r_B)

$$T^2 = \frac{2\pi^2 \mu}{\gamma m_1 m_2} \frac{(r_A + r_B)^2}{4} \rightarrow R = \frac{r_A + r_B}{2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{\gamma m_1 m_2} R^3 \rightarrow \text{ricordo formula ridotta}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1 + m_2)} R^3 \rightarrow T^2 = \textcircled{K} R^3$$

costante K prima calcolata sperimentalmente da Keplero

$DE = E_0$
 tutta l'energia cinetica coincide con l'energia potenziale
 $\dot{r} = 0 \rightarrow r = \text{cost} \rightarrow$ ~~tra~~ orbita circolare

$$E = \frac{\mu}{2} v^2 + E_{pe}$$

$E_1 \in [E_0, 0]$
 nei punti di inversione l'energia cinetica = 0 (velocità nulla)
 $r > r_2 \rightarrow$ energia cinetica
 non vado oltre i punti di inversione perché significa $E_k < 0$ - no senso fisico
 massimo avvicinamento, massimo allontanamento
 $r_1 \leq r \leq r_2 \rightarrow$ ellisse

$E = 0 \rightarrow$ tutti i valori consentiti di r sono maggiore di r_2 perché $E_k < 0$
~~RECCO~~ $r_2 \leq r < \infty \rightarrow$ parabola

$$E = 0 \rightarrow \frac{\mu}{2} v^2 - E_{pe}(r) \rightarrow \frac{\mu}{2} v^2 = E_{pe}$$

$E > 0$
 l'energia potenziale $\rightarrow 0$
 energia cinetica

velocità di fuga = min distanza per cui un allontanamento all'infinito
 orbita aperta \rightarrow scappo

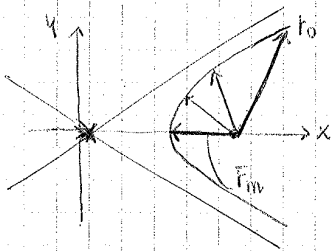
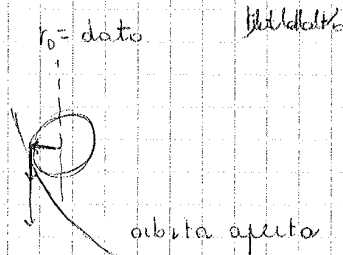
$$E = \frac{\mu}{2} v^2$$

$$\frac{\mu}{2} v^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} < 0$$

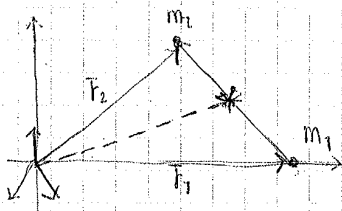
$$\frac{\mu}{2} v^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} \geq 0$$

$$\frac{\mu}{2} v^2 \geq \frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

se = 0 parabola
 > 0 iperbole



~~il sistema di riferimento~~



tutto si sta muovendo anche se penso ad ~~una~~ una cosa che si muove

$$\begin{cases} m_2 \frac{\mu}{r_2} = \bar{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^3} \\ m_1 \frac{\mu}{r_1} = \bar{F}_{21} \end{cases}$$

$r_2 - r_1 = \bar{r}$
 6 eq diff
 0

$$\begin{cases} \frac{\mu}{r_2} = \frac{F_{12}}{m_2} \\ \frac{\mu}{r_1} = \frac{F_{21}}{m_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu}{r_1} = \frac{F_{12}}{m_2} - \frac{F_{21}}{m_1}$$

partizione

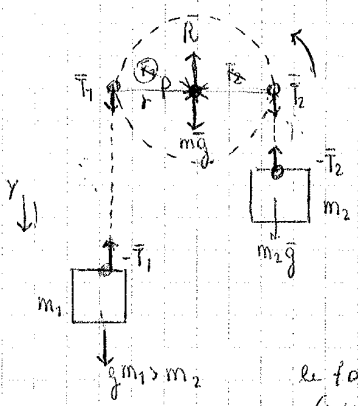
$$\mu \bar{r} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) F_{12} \rightarrow \mu \bar{r} = \bar{F}_{12}$$

$$\mu \bar{r} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} F$$

17 AC 011
09.05.2011

ESERCITAZIONE 8
corpo rigido
meccanica 6.7

Dati: r, m, I
filo sottile e inestensibile



In questo caso la carrucola ha una massa quindi $T_1 \neq T_2$
Nelle carrucole ideali le tensioni si propagano

eq dinamica: $\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases} \rightarrow a_1 = a_2 \rightarrow \text{filo inestensibile}$

corpo rigido: $\begin{cases} m g + T_1 + T_2 - R = 0 \rightarrow \text{cdm è in quiete} \\ r T_1 - r T_2 = I_0 \alpha \rightarrow r(T_1 - T_2) = \alpha I_0 \end{cases}$

Le forze che passano per il polo non generano rotazione (quindi momento)

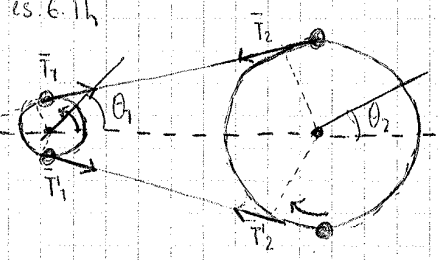
$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ -m_2 a = m_2 g - T_2 \\ m g + T_1 + T_2 - R = 0 \\ r(T_1 - T_2) = I_0 \frac{a}{r} \end{cases} \quad \begin{cases} T_1 = m_1 (g - a) \\ T_2 = m_2 (g + a) \\ I_0 \frac{a}{r^2} = T_1 - T_2 = m_1 (g - a) - m_2 (g + a) \end{cases} \rightarrow \text{trovo } a = \frac{g(m_1 - m_2)}{\frac{I}{r^2} + m_1 + m_2}$$

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

se $m \rightarrow 0 \Rightarrow T_1 = T_2$

caso della carrucola ideale

es. 6.11



Dati: $m_1 = 5 \text{ kg}$, $r_1 = 10 \text{ cm}$
 $m_2 = 20 \text{ kg}$, $r_2 = 20 \text{ cm}$
 $H_1 = 8 \text{ Nm}$
 $H_2 = 1 \text{ Nm} \rightarrow \text{momento frenante}$

$$\left(\omega = \frac{a}{r} \right)$$

$$\begin{cases} I_1 \alpha_1 = H_1 = T_1 r_1 + T_1' r_1 \\ I_2 \alpha_2 = H_2 = T_2 r_2 - T_2' r_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \alpha_1 = H_1 - \Delta T r_1 (\Delta T = T - T') \\ \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \alpha_2 = -H_2 + \Delta T r_2 \end{cases}$$

cinghia ideale quindi le tensioni dei due sono la stessa

$$\begin{aligned} T_1 = T_2 = T \\ T_1' = T_2' = T' \end{aligned} \quad \alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2 = a \text{ allungamento cinghia elastica}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$\Delta T = \frac{H_2 - H_1 + \frac{1}{2} (m_1 r_1 + m_2 r_2) a}{r_2 - r_1}$$

Ricavo a .

$$\begin{aligned} \alpha_1 = a / r_1 \\ \alpha_2 = a / r_2 \end{aligned} \rightarrow \text{accelerazioni angolari costanti} \rightarrow \omega_2 = \alpha_2 t = 90 \text{ rad/s}$$

lavoro = spostamento angolare del disco moltiplicato uniformemente accelerato

$$\theta_1(t) = \frac{1}{2} \alpha_1 t^2 \rightarrow \theta_1(t=5)$$

$$W_1 = \int_0^{\theta_1(t)} H_1(t) d\theta = H_1 \theta_1 \text{ lavoro}$$

$$W_2 = -H_2 \theta_2$$

lavoro fatto al sistema

energia cinetica accumulata dai due dischi

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = W_1 + W_2$$

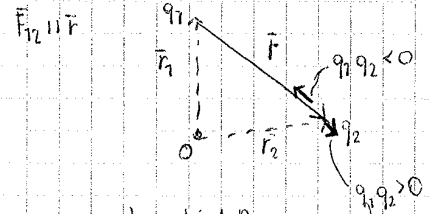
13.05.2014

ELETTROSTATICA

legge di Coulomb: la forza tra due cariche q_1 e q_2 è direttamente proporzionale ad q_1 e q_2 ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra q_1 e q_2 .

$$\vec{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_{12}}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} = q_1 q_2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

1 sorgente
2 prova



ϵ_0 = costante dielettrica nel vuoto = $8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}$

q_1 e q_2 : cariche; si misurano in Coulomb
Nel SI l'e è la carica trasportata in 1 secondo da una corrente di 1 Ampere

carica: proprietà naturale dei corpi

1° grande differenza dal campo gravitazionale

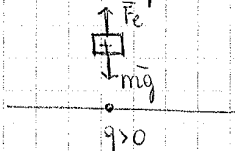
tra le particelle (stabil), quella di riferimento è quella della elettrone

$e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$1\text{C} = 6,24 \cdot 10^{18}$ elettroni

particelle che facilmente troviamo in natura

Sostanza che per strofinio si carica



$$m = 1\text{kg}$$

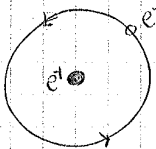
$$mg = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 8,98 \cdot 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$$

$$1\text{kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = q^2 \cdot 8,98 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{m}^2} = 0,33 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

carica significativa nell'esperienza pratica

rischio a tenere 1kg sollevato quasi alla forma elettrica

Atomo di idrogeno:



$r = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
(e in piastra di $1\text{kg}\cdot\text{km}^2$)

$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$|q_e| = |q_p|$

caro gravitazionale
 $|\vec{F}_g| = \frac{m_e m_p}{r^2} = 3,61 \cdot 10^{-47} \text{ N}$

caro elettrico
 $|\vec{F}_e| = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$

la forza gravitazionale è niente rispetto la forza elettrica

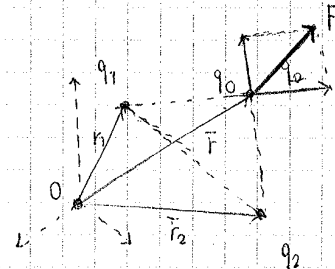
A l. micro tutto è condizionato dalle cariche elettriche

A l. macro la carica elettrica non conta, conta solo quella gravitazionale (la materia normalmente è neutra)

campo elettrostatico \vec{E} : considero distribuzione di cariche $q_1 \dots q_N$ carica di prova q_0

$$\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \dots + \vec{F}_{N0} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_0 (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

\vec{r}_i : posizione di r_i
 $q_i > 0$ repulsione
 $q_i < 0$



$$\vec{F} = q_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} =$$

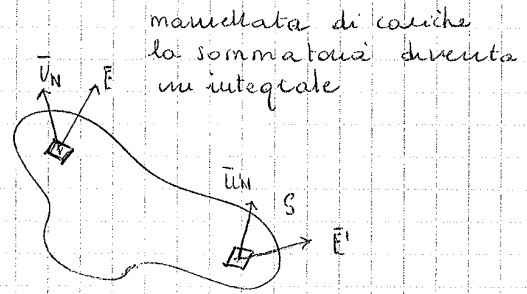
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r})$$

legge di Gauss (teorema) e flusso del campo elettrico \vec{E}

flusso del campo \vec{E} attraverso una superficie infinitesima dS

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_N dS = |\vec{E}| \cos \theta dS \rightarrow \text{flusso infinitesimo}$$

\vec{u}_N vettore ortogonale alla superficie dS nel punto P ove considero il campo $\vec{E}(P)$



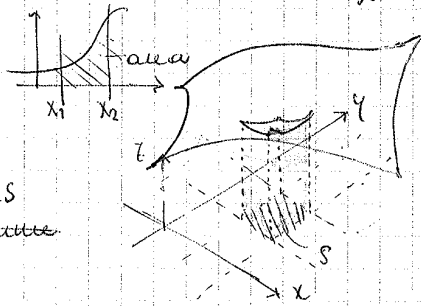
$\vec{E} \parallel$ Superficie \rightarrow il flusso è massimo

$\vec{E} \perp$ Superficie \rightarrow flusso nullo

flusso = numero delle linee di campo che passano dalla superficie

flusso attraverso S (superficie finita): $\Phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_N dS$

1D $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \text{area}$



2D $\iint_S f(x,y) dx dy = \text{volume}$
 $= \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} dx f(x,y) = \text{volume}$
 = volume sottostante alla superficie descritta da $f(x,y)$

integrale sulla superficie di una sfera:

$$\iint_S f(\varphi, \theta) ds = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varphi, \theta) \underbrace{R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}_{ds}$$

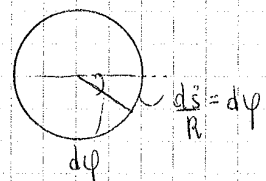
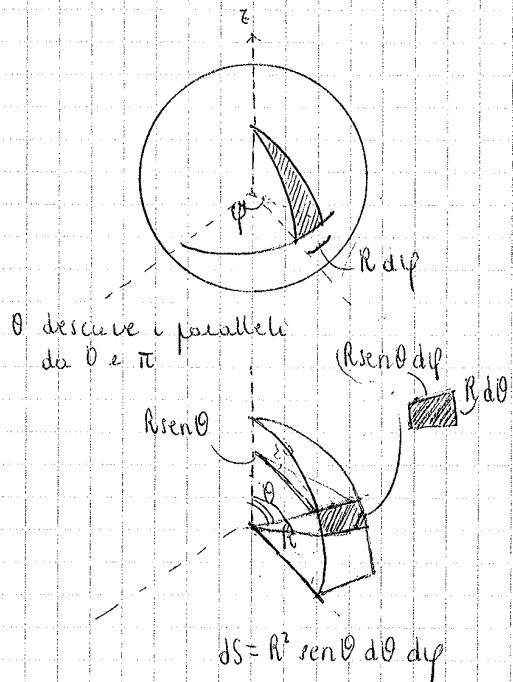
coro. elementari: $f = \cos \theta$

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi R^2 f$$

\rightarrow l'integrale di superficie mi dà la superficie stessa
 area sfera

elemento

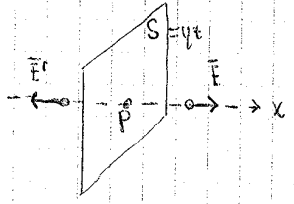
$d\Omega =$ angolo solido (generazione dell'angolo)
 $= \iint_{\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \rightarrow$ angolo solido totale



15.05.2016

Applicazioni

1) campo elettrico generato da un piano carico (piano su cui è stata distribuita uniformemente una carica)
 $\sigma =$ densità superficiale di carica = cost!

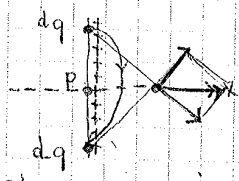


$\vec{E} = E \vec{u}_x \rightarrow$ orientato lungo x
 $\vec{E}' = E' \vec{u}_x$

in particolare l'altro perché presso il piano infinito il campo è ortogonale anche positive.

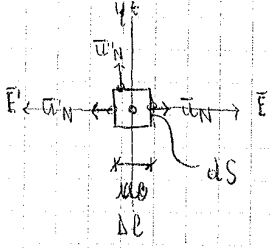
conseguenza legge di Gauss:

$\vec{E} = \frac{\sigma \vec{r}}{\epsilon_0 r^2}$
 $|\vec{E}| \propto \frac{1}{r^2}$ proporzionale



qualunque coppia di campo elettrico non può che essere ortogonale al piano

vedo in sezione:



cilindro di base infinitesima
 flusso infinitesimo

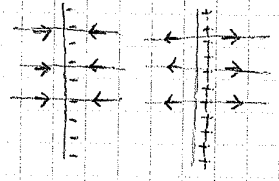
$\Delta \phi = \iint d\phi_e + d\phi_b =$
 $= \iint \vec{E} \cdot \vec{u}_N ds + \cancel{E \vec{u}_N ds} + \vec{E}' \cdot \vec{u}_N ds' =$
 $= E dS + E dS = 2E \cdot dS = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$

$\vec{u}_N = \vec{u}_x$

quindi $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$
 $E' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$
 indipendente dalla distanza

$\vec{u}_x = -\vec{u}_x \rightarrow \begin{cases} E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \\ E' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \end{cases}$



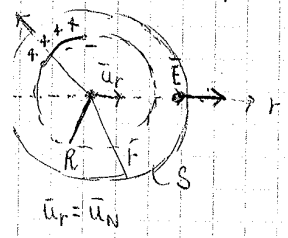
$\vec{E} = -\nabla V$
 $x > 0$
 $V(x) = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \rightarrow \ominus \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \nabla x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$
 $x < 0$
 $V(x) = +\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}$

ossia:
 le superficie equipotenziali sono quelle in cui il potenziale non cambia
 tutti i piani paralleli a E_y hanno stesso potenziale

Il campo \vec{E} è sempre ortogonale alle superficie equipotenziali

2) campo elettrico generato da una sfera carica questo sferico

$\sigma =$ densità superficiale di carica = $Q/S = Q/4\pi R^2$ $R \rightarrow$ raggio sferico



$\vec{E}(r) = E(r) \vec{u}_r$
 decresce se mi allontano

$\phi(E) = \iint_S \vec{E}(r) \cdot \vec{u}_N = E(r) \iint_S dS = E(r) 4\pi r^2$ della sfera più grande

\times Gauss $\rightarrow E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$
 no semplificazione

