



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1137

DATA: 20/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bavera

MATERIA: Meccanica Razionale + Eserc.

Prof. Delitala

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

PROF. DELITALA MARCELLO EDOARDO ricevimento merc 10-12

ESERCITAZIONI { IDA BONZANI - CIVILI (12 A) mercoledì 8:30 → 10
 MARCO SCIANNA - AMB - MATE (10 c)

Studente conduttore: SIMONE CONIGLIO (mercoledì 13-14:30 (civili)
 aula 5B lunedì 16-17:30 (amb + mate)

LUIGI PREZIOSI (teoria + es x la cinematica)

Meccanica razionale: quello di congiunzione tra corsi analitici 1° anni e corsi applicativi anni successivi

Scopo: fornire modelli e metodi usati x lo studio di sistemi meccanici

L'idea è di rendere intellegibile la realtà fisica attraverso un modello matematico definito a partire dalle leggi della meccanica classica.

Definito il modello si effettua l'analisi qualitativa per studiare le proprietà delle soluzioni ed eventualmente analisi computazionale (simulazioni numeriche)

TESTO (TEORIA)

- P. BISCARI, T. RUGGERI, G. SACCOMANDI, M. VIANELLO "Meccanica razionale per l'ingegneria", Mondadori editore (copertina blu)

- ESERCIZI → esame tipo es. fatti in classe

Sul portale: temi d'esame

(- TESTO (TEORIA): MURACCHINI, RUGGERI, SECCHIA "Temi d'esame di meccanica razionale", Escubatio, Bologna)

ESAME: scatto 2h

è possibile portare
 FORMULARIO di 1 pag
 su modello caricato
 su portale

- domanda teoria generale
- esercizio → dato un sistema meccanico individuare posizioni eq. e stabilità; eu. cinetica; eq. del moto
 ↳ potenziale (di lagrange);
- linearizzazione eq. moto; reazione vincolare

• statica (equilibrio)

- Meccanica lagrangiana (formali sono astratto che in condizioni particolari ci permette di trovare le eq. di evoluzione del sistema)

- Stabilità, equilibrio e linearizzazioni

5/3

ESERCITAZIONE

Equazioni differenziali del 2° ordine, ordinarie, lineari e a coeff. costanti

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$$

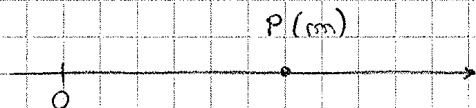
$a = \frac{d^2x}{dt^2}$ $\frac{dx}{dt} = v$

con a, b, c costanti

variabile indipendente è t (tempo)

variabile dipendente (incognita) da determinare e che esprime la posizione di 1 sistema è $x = x(t)$

Rappresentazione meccanica di psta equazione è 1 punto P su guida
↓
dotato di massa



Se $a = m$ (massa) allora $m\ddot{x} = -b\dot{x} - cx = ma$

Per 1° cosa considero l'omogenea associata $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ alla quale

associa l'eq. caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

• λ_1, λ_2 reali distinti ($\Delta = b^2 - 4ac > 0$)

$$\tilde{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

con c_1, c_2 costanti

percorsi x trovare

l'integrale generale

dell'omogenea associata

• $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\Delta = 0$)

$$\tilde{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

← integrale generale

• λ_1, λ_2 complessi coniugati ($\Delta < 0$)

$$\tilde{x}(t) = e^{at} (c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)$$

$$x(t) = \tilde{x}(t, c_1, c_2) + x_p(t)$$

↳ particolare

Relazione tra le 2? sviluppo in $\cos(\omega t + \varphi)$

$$x(t) = \underbrace{A \cos \varphi}_{c_1} \cos \omega t + \underbrace{(-A \sin \varphi)}_{c_2} \sin \omega t$$

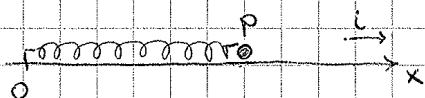
$$c_1 = A \cos \varphi$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{c_2}{c_1}$$

$$c_2 = -A \sin \varphi$$

- Considero ad es 1 sistema massa molla. Punto P di massa m



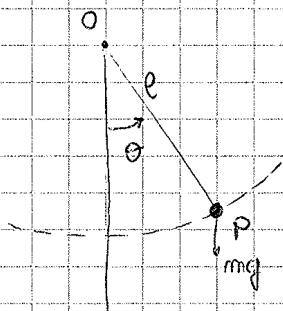
$$F = -Kx \quad K > 0 \text{ costante di elasticità}$$

eq del moto: $m\ddot{x} + Kx = 0$

pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

- Oscillazioni di 1 pendolo intorno alle posizioni di eq! (per piccole oscillazioni) ^{stabile}



$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Considero MOTO ARMONICO SMORZATO

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

con $b > 0 \rightarrow$ rappresentativo di 1 forza di smorzamento (di attrito)
 $a, c > 0$

eq. caratteristica: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- se $b^2 > 4ac$ ho 2 radici reali entrambe negative

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

con λ_1, λ_2 negativi

eq. moto smorzato

- se $b^2 = 4ac$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + t e^{\lambda t}$$

eq. smorzamento critico

• Se $f(t) \neq \text{costante}$. Applico 1 forzante oscillatoria con:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = A \cos \Omega t$$

Es massa molla con forzante oscillatoria

$$m\ddot{x} + kx = A \cos \Omega t$$

$$x_p(t) = C \cos \Omega t \quad \rightarrow \text{so già che viene con}$$

$$\dot{x}_p(t) = -c \Omega \sin \Omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -c \Omega^2 \cos \Omega t$$

Sostituisco nella precedente: ~~$-cm\Omega^2 \cos \Omega t + c\Omega \cos \Omega t = A \cos \Omega t$~~

$$c(-m\Omega^2 + k) = A \quad \rightarrow \quad c = \frac{A}{k - m\Omega^2}$$

$$x_p(t) = \frac{A}{m} \frac{1 \cos \Omega t}{(\omega^2 - \Omega^2)}$$

\Rightarrow se Ω^2 ha valori prossimi a ω^2 può provocare effetti di risonanza

($\Omega^2 \sim \omega^2$: risonanza)

Come migliorare un modello? I modelli sono perfezionabili e devono essere costruiti in base alle esigenze specifiche.

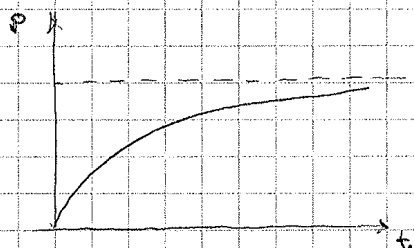
es. Modello di popolazione logistico

- Teniamo in conto anche delle disponibilità delle risorse dell'ambiente.

$$\frac{dp}{dt} = (N - p)p - (c p^2)$$

non lineare
tiene conto della competizione x le risorse
capacità da parte dell'ambiente di fornire le risorse (carrying capacity)

separando le variabili si può verificare che la soluzione satura alla capacità dell'ambiente



COSTRUZIONE MODELLO MATEMATICO

Processo deduttivo a passi \neq :

- Riduzione complessità e ipotesi semplificative
- Identificazione delle variabili in gioco: individuare le variabili di stato che caratterizzano il fenomeno che voglio studiare. (dette VARIABILI DIPENDENTI) e si individuano le variabili indipendenti (ad es. tempo e/o spazio)
- Relazioni costitutive che sono ad es. leggi fisiche ($F = ma$) o fenomenologiche che
- Identifico dei parametri e decido il modello
- Formulazione del modello matematico e analisi qualitativa

analitica
(matematica)

analisi numerica
(computazionale)

- Il modello deve essere consistente, ovvero il numero di incognite deve essere uguale al num. di equazioni indipendenti
- A priori nella costruzione di un modello vi è la scelta della scala di rappresentazione (livello di dettaglio che voglio ottenere)
 - scala microscopica (gli oggetti sono considerati individualmente)

$$\text{E } \bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_N) \\ \dots \\ \frac{du_N}{dt} = f_N(t, u_1, u_2, \dots, u_N) \end{array} \right.$$

Sistema di N eq. alle derivate ordinarie del 1° ordine

Un'altra classe interessante di modelli è descritta da eq. scalari di ordine elevato

$$\frac{d^N u}{dt^N} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}}\right)$$

Eq. di ordine N (massimo grado della derivata della variabile di stato)

scritta in forma normale perché ho isolato la derivata di ordine massimo

Che possano essere riscritte come un sistema di N equazioni del 1° ordine in N incognite.

$$u_1 = u, \quad u_2 = \frac{du}{dt}, \quad u_3 = \frac{d^2 u}{dt^2}, \dots, u_N = \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = u_3 \\ \vdots \\ \frac{du_N}{dt} = f(t, u_1, u_2, u_3, \dots, u_N) \end{array} \right.$$

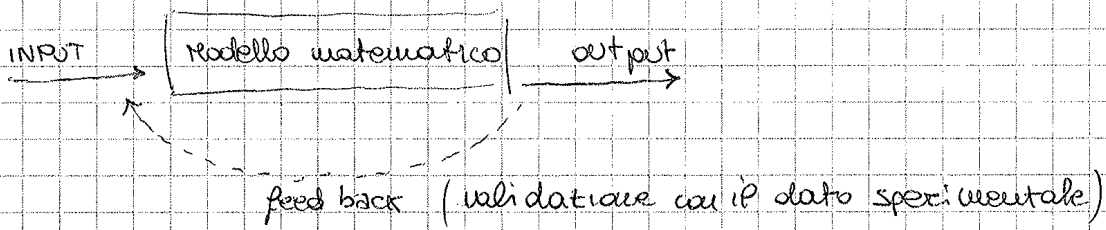
ES. sistema massa molla : $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx$

$$u_1 = x \quad u_2 = \frac{dx}{dt} \quad (\text{velocità})$$

↑
(posizione)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{K}{m} u_1 \end{array} \right.$$

In funzione della tipologia del campo vettoriale si può effettuare la seguente classificazione :



Problema al valore iniziale e ai limiti:

Si assegnano $p < N$ condizioni iniziali

$u_i(t_0) = u_{i,0} \quad i = 1, \dots, p$ e $N - p$ condizioni ai limiti (tempo finale di osservazione)

$u_i(T) = u_{i,1} \quad i = p+1, \dots, N$

- Il problema matematico è ben definito associando al modello (eq. di evoluzione) le condiz. iniziali ai limiti. Tale problema si dice ben formulato se il num. di condizioni (iniziali e ai limiti) è corretto.
- Il problema si dice ben posto se la soluzione esiste, unica e dipende con continuità dal dato iniziale.

TEOREMA ESISTENZA

Se $\bar{f}(t, \bar{u})$ è continuo in un rettangolo

$$R = \left\{ (t, \bar{u}) : \|\bar{u} - \bar{u}_0\| \leq K, (t - t_0) \in T \right\}$$

allora esiste almeno 1 soluzione dell' I.V.P. che è di classe C^1 (soluzione continua con derivate continue) per $|t - t_0| < \hat{T}$ con $\hat{T} = \min \left\{ T, \frac{K}{M} \right\}$

$$\text{con } M = \max_{(t, \bar{u})} \|\bar{f}(t, \bar{u})\|$$

TEOREMA UNICITÀ

Se in più il campo soddisfa la condizione di LIPSCHITZ

$$\|\bar{f}(t, \bar{u}) - \bar{f}(t, \bar{v})\| \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\|$$

↑
costante di Lipschitz

In pratica si può mostrare che è legata alla regolarità del campo \bar{f} e in particolare alla continuità e differenziabilità di \bar{f} → allora la soluzione del I.V.P. è unica

$$t^{*2} = \frac{2x_0}{g} \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2x_0}{g}}$$

es. Caduta grave con attrito

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg - \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{viscosità del mezzo (aria)}}} \quad \text{si oppone al moto in funzione della velocità}$$

Si può risolvere (considerando la ODE del 1° ordine sulla velocità)

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v \quad \text{verificando se es. l'esistenza di 1 velocità limite di caduta di 1 grave (pioggia / proiettili)}$$

In meccanica formalizzerebbe in maniera rigorosa (matematica) il processo deduttivo di 1 modello meccanico. Ad es con le eq cardinali, eq Lagrange ovvero modelli alle derivate ordinarie di cui al max cercheremo soluzioni linearizzate o di equilibrio ma non soluzioni esplicite

$$AB = OB - OA$$

$$\frac{d(AB)}{dt} = \frac{d(OB - OA)}{dt} = \frac{dOB}{dt} - \frac{dOA}{dt} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

Considero il modulo dello spostamento infinitesimo

$$dS = |dP| = |v(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Esso si identifica con la lunghezza d'arco percorsa dal punto

$$S(t) = \int_{t_1}^t |v(\tau)| dt \quad \text{LEGE ORARIA}$$

ASCISSA CURVILINEA

S è una funzione invertibile e posso avere $t(s)$

$$S(t) \leftrightarrow t(s)$$

posso un certo tempo, mi trovo in certo punto

mi trovo poi, quindi è passato "tot" tempo

Quindi, $P(t) = P(t(s)) = \hat{P}(s)$ $\hat{P}(s(t))$ ← funzione del punto

Oppure posso descrivere il moto di P in 2 modi equivalenti:

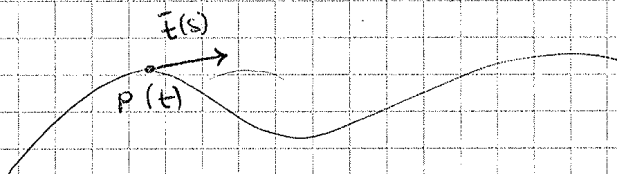
1. definisco la posizione del punto in funzione del tempo $P(t)$

2. $\{\hat{P}(s), S(t)\}$ dando:

↑
traiettoria (aspetto geometrico)
LEGE ORARIA → (percorso nel tempo) (aspetto cinematico)

Come scegliere sistemi di riferimento più o meno opportuni a descrivere il moto del punto?

Con componenti intrinseche di velocità e accelerazione



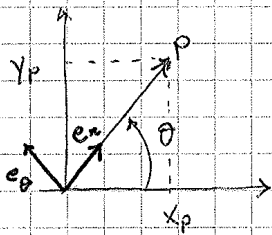
Definisco un versore tangente alla traiettoria: $\vec{t}(s) = \frac{d\hat{P}}{ds}$

↓
ha la proprietà che $\frac{dt}{ds}$ è ortogonale a \vec{t} ovvero $\vec{t} \cdot \frac{dt}{ds} = 0$

infatti $\vec{t} \cdot \vec{t} = 1$ (def. di versore)

MOTO PIANO IN COORDINATE POLARI

MOTO È PIANO se la traiettoria è 1 curva piana → introduciamo le coordinate polari (r, θ)



$$OP = x_p \bar{i} + y_p \bar{j} = r \cos \theta \bar{i} + r \sin \theta \bar{j}$$

Definisco i VERSORI MOBILI:

$$\bar{e}_r = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j}$$

$$\bar{e}_\theta = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j}$$

$$\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

$$\boxed{OP = r \bar{e}_r}$$

$$v = \frac{dOP}{dt} = \frac{d(r \bar{e}_r)}{dt} = \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\bar{e}}_r$$

$$\uparrow \theta = \theta(t)$$

$$\bar{e}_r = \cos \theta(t) \bar{i} + \sin \theta(t) \bar{j}$$

$$\dot{\bar{e}}_r = -\sin \theta \dot{\theta} \bar{i} + \cos \theta \dot{\theta} \bar{j} = \dot{\theta} \bar{e}_\theta$$

$$\boxed{v = \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\theta} \bar{e}_\theta}$$

E analogamente si scrive l'accelerazione in coord. polari:

$$\boxed{a = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \bar{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \bar{e}_\theta}$$

Casi particolari di cinematica del punto:

- moto rettilineo uniforme $v = \text{cost}$, $a = 0$

- moto rettilineo uniformemente accelerato $a = \text{cost}$

- moto circolare → in coord. polari $r = \text{cost} \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$v = \underbrace{\dot{r}}_0 \bar{e}_r + r \dot{\theta} \bar{e}_\theta = r \dot{\theta} \bar{e}_\theta = r \omega \bar{e}_\theta, \text{ con } \omega \text{ velocità angolare}$$

$$a = r \ddot{\theta} \bar{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \bar{e}_r = r \dot{\omega} \bar{e}_\theta - r \omega^2 \bar{e}_r, \text{ con } \dot{\omega} = \text{accelerazione angolare}$$

$$\vec{r}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

vettore tg alla curva è la derivata di $\vec{r}(s(t))$

$$\vec{v}(s(t)) = \dot{\vec{r}}(s) = \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right)$$

Per verificare che le 2 rappresentat. sono = : sostituisco $\frac{s}{\sqrt{2}} = t$ e trovo stesso risultato. Sostituendo $\frac{s}{\sqrt{2}}$ con t ritrovo cioè le coord. cartesiane.

$$c = \left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right| = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

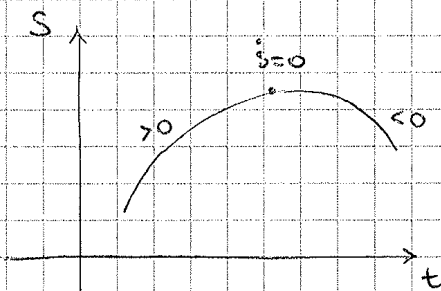
versore $\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$\vec{m}(s) = 2 \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\text{Ora verifico } \vec{a}(t) = \dot{\vec{r}}(s) + c \dot{s}^2 \vec{m}(s) = \frac{1}{2} 2 \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$\dot{s} = 0$

Sostituisco la legge oraria (sostituendo $\frac{s}{\sqrt{2}}$ con t) ottendo stesso risultato delle coord. cartesiane.



$\dot{s} > 0$ MOTO DIRETTO (progressivo)

$\dot{s} = 0$ MOTO ARRESTATO

$\dot{s} < 0$ MOTO INDIRETTO

$\dot{s}(t) = c = \text{costante } \forall t$: moto uniforme

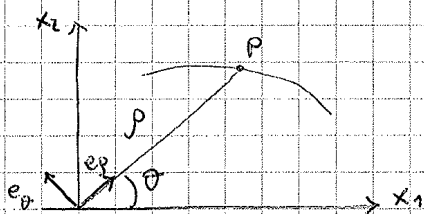
legge oraria:
$$s(t) = \int_{t_0}^t c dt = c(t - t_0) + c t_0$$

\downarrow
 $v_0 = \text{velocità iniziale}$

$\hookrightarrow s_0$

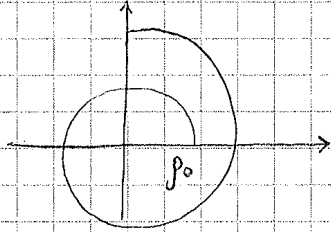
Moto uniformemente vario $S(t) = a_0 \Leftrightarrow S(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0$

Moto piano: tutte le traiettorie sono contenute in 1 piano.



Moto posso descriverlo in coord. polari:

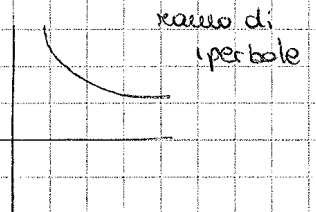
$$x_1(t), x_2(t) \Leftrightarrow \rho(t), \theta(t)$$



es. Descrivere legge del moto data la traiettoria $x_2 = \frac{1}{x_1}$ $x_1(0) = 1$

$$\dot{A} = \text{cost} = \kappa$$

Calcolare velocità e decomporla nella parte radiale e trasversa



$$\dot{A} = \frac{1}{2} (x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) = \kappa \quad \text{Sostituire con traiettoria qui dentro:}$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(x_1 \left(\frac{-\dot{x}_1}{x_1^2} \right) - \dot{x}_1 \left(\frac{1}{x_1} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2x_1 \dot{x}_1}{x_1} \right) = -\frac{\dot{x}_1}{x_1} \quad \text{eq. a variabili separabili} \Rightarrow \frac{x_1}{x_1} = \kappa$$

$$\log x_1 = -\kappa t + c \Rightarrow x_1 = e^{-\kappa t} + c \Rightarrow x_1 = e^{-\kappa t} \quad (\text{applicando } x_1(0) = 1)$$

$$x_2 = e^{\kappa t} \quad (\text{perché } x_2 = \frac{1}{x_1})$$

Calcolo velocità in coord. polari

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{e^{-2\kappa t} + e^{2\kappa t}}$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2} \left(e^{-2\kappa t} + e^{2\kappa t} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-2\kappa e^{-2\kappa t} + 2\kappa e^{2\kappa t} \right) \quad \text{componente radiale}$$

$$\rho \dot{\theta} = ?$$

$$\dot{A} = \text{cost} = \kappa = \frac{\rho \dot{\theta}}{2} \quad \text{si può dimostrare ...}$$

$$\rho \dot{\theta} = \frac{2\kappa}{\rho} = 2\kappa \left(e^{-2\kappa t} + e^{2\kappa t} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Dim: } \dot{A} = \frac{1}{2} (x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) = \frac{1}{2} (\rho \cos \theta \cdot (\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta) - (\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta) \cdot \rho \sin \theta)$$

$$\uparrow \frac{d(\rho \cos \theta)}{dt} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

θ varia con t , quindi lo derivo

$$\downarrow \frac{d(\rho \sin \theta)}{dt} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} (\cancel{\rho \dot{\rho} \cos \theta \sin \theta} + \rho^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta - \cancel{\dot{\rho} \rho \cos \theta \sin \theta} + \rho^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta}$$

c.v.d.

(*) ovvero equivalentemente posso affermare che

$$e_n(t) = \underline{R}(t) \bar{e}_n \quad (2) \quad R \text{ è una rotazione: trasforma lo tetra } \bar{e}_n \text{ nella tetra } e_n$$

La rotazione R è una MATRICE di trasformazione ortogonale ovvero

durante il moto, funzione del tempo

$$R^T R = R R^T = 1 \quad \det R = 1$$

↑ MATRICE IDENTITÀ

Riprendiamo (1)

$$Q P(t) = P(t) - Q(t) = \omega P - \omega Q$$

$$P(t) = Q(t) + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 = Q(t) + \sum_{h=1}^3 y_h \bar{e}_h$$

$$= Q(t) + R(t) \sum_{h=1}^3 y_h \bar{e}_h \quad \leftarrow \text{proiezione tetra mobile su tetra fisso}$$

(2) quantità costante nel tempo = \vec{p} vettore costante \rightarrow assegna la posizione del generico punto P del corpo rispetto all'origine fisso. Quello situazione ipotetica in cui tetra e_n venga proprio a coincidere con tetra \bar{e}_n .

$$= Q(t) + R(t) \vec{p} \quad (3)$$

↑ origine SR solida

R è una matrice di rotazione \Rightarrow abbiamo solo 3 quantità da determinare per definire l'orientamento del SR mobile rispetto al fisso

$$Q P(t) = Q(t) + R(t) \vec{p}$$

comparati su Prop. tetra mobile al c.p.

Tra le \neq possibili parametrizzazioni, una è quella degli ANGOLI DI EULERO, oppure un'altra è quella degli ANGOLI DI CARDANO. La scelta è dettata da questioni di comodità in funzione dell'applicazione.

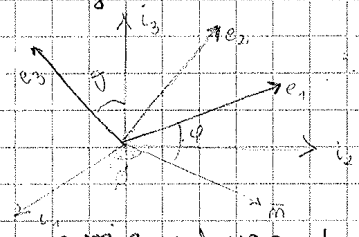
ANGOLI DI EULERO Si possono definire prendendo $i_3 \wedge e_3 \neq 0$ per cui si individua il vettore

$$m = \frac{i_3 \wedge e_3}{|i_3 \wedge e_3|}$$

detto ASSE DEI NODI (intersezione tra piani ortogonali alle direzioni i_3 ed e_3) che permette

di definire i 3 angoli seguenti:

- ANGOLI DI PRESSIONE ψ
- ANGOLO DI NUTAZIONE θ
- ANGOLO DI ROTAZIONE PROPRIA ϕ



Tralasciando i dettagli, si può mostrare che vi è una corrispondenza biunivoca (localmente) tra i valori degli angoli di eulero e l'orientamento degli SR mobile. Inoltre si può trasformare la tetra fisso $\{\bar{e}_n\}$ nella tetra solida attraverso 3 successive rotazioni.

e che indipendentemente dal SA solidale scelto, è definito un vettore

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa} e_{\kappa} \wedge \dot{e}_{\kappa} \quad \text{detto VELOCITÀ ANGOLARE}$$

e $\dot{e}_h = \omega \wedge e_h$ in generale, si può mostrare che un qualunque vettore \bar{w} solidale al CR:

$$\dot{w} = \bar{\omega} \wedge \bar{w} \quad (4)$$

2) legata all'utilizzo di matrici di rotazione.

Si può mostrare la formula fondamentale delle velocità per cui condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia rigido è che

$$v_p(t) = v_o(t) + \omega \wedge QP \quad \forall Q, P \quad (\text{che siano generici punti solidali al CR})$$

Questa relazione ci permette di ricavare la velocità di 1 punto in funzione di quella di 1 altro punto (scelto in maniera astuta) conoscendo la velocità angolare

Dim.: NECESSITÀ: Scegliamo in (L) $W = \bar{\omega} \wedge \bar{W}$ con $W = QP - OP - OQ$

$$\dot{W} = \dot{QP} = \frac{dQP}{dt} = \frac{dQP}{dt} - \frac{dOQ}{dt} = v_p - v_o$$

$$v_p - v_o = \omega \wedge QP \rightarrow v_p = v_o + \omega \wedge QP$$

ritrovo formula fondamentale (assumendo vice le formule di Poisson)

SUFFICIENZA: Verifico la rigidità del moto valutando la distanza

$$\left(\frac{d(QP)}{dt} \right)^2 = \frac{d(QP \cdot QP)}{dt} = \frac{dQP}{dt} \cdot QP + QP \cdot \frac{dQP}{dt} = 2 \frac{dQP}{dt} \cdot QP = 2(v_p - v_o) \cdot QP =$$

↑
variazione nel tempo della distanza di 2 punti generici

x propr. commutativa prodotto scalare

$$= 2(\omega \wedge QP) \cdot QP = 2\omega \cdot (\underbrace{QP \wedge QP}_0) = 0$$

⇒ la distanza tra 2 punti generici non cambia (e la derivata $\dot{e} = 0$) ⇒ il moto è rigido

↑
x formula fondamentale

Torniamo alle FORMULE di POISSON per dimostrare che

$$\dot{e}_h = \left(\frac{1}{2} \sum_{\kappa} e_{\kappa} \wedge \dot{e}_{\kappa} \right) \wedge e_h \quad \text{ricordando che } \{e_1, e_2, e_3\} \quad (5A)$$

$$e_1 = e_2 \wedge e_3 \quad e_2 = e_3 \wedge e_1 \quad e_3 = e_1 \wedge e_2 \quad e_i \cdot e_{\kappa} = \delta_{i\kappa} = \begin{cases} 0 & i \neq \kappa \\ 1 & i = \kappa \end{cases} \quad (5B)$$

$$\mathcal{Q}P(t) = R(t) \tilde{p} \quad (8)$$

equivalentemente $\tilde{p} = R^{-1} \mathcal{Q}P(t) = R^T \mathcal{Q}P$

derivando (8) ho: $v_p(t) = v_0(t) + \dot{R} \tilde{p} = v_0(t) + \dot{R} R^T \mathcal{Q}P$

si può mostrare che

$$W = \dot{R} R^T \text{ è una}$$

(a)

matrice antisimmetrica ovvero

$$W = -W^T$$

$$v_p(t) = v_0(t) + W \mathcal{Q}P$$

si può mostrare che ad ogni matrice antisimmetrica è

(b) associato 1 vettore tale che $W \mathcal{Q}P = \omega \wedge \mathcal{Q}P$

Quindi $v_p(t) = v_0(t) + \omega \wedge \mathcal{Q}P$ che è la formula fondamentale

(a) Mostriamo che $W = \dot{R} R^T$ è antisimmetrica

$$R R^{-1} = R R^T = 1$$

↑ matrice identità

$$\frac{d}{dt}(1) = 0 = \frac{d}{dt}(R R^T) = \dot{R} R^T + R \dot{R}^T \Rightarrow \dot{R} R^T = -R \dot{R}^T \longrightarrow W = -W^T$$

chiamo $W = \dot{R} R^T$ e calcolo $W^T = (\dot{R} R^T)^T = (R^T)^T \dot{R}^T = R \dot{R}^T$ \downarrow W è ANTISIMMETRICA

(b) Mostriamo che $W \mathcal{Q}P = \omega \wedge \mathcal{Q}P$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & \omega_x \\ -\omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

W è antisimmetrica $a_{ij} = -a_{ji}$

e è diagonale $a_{ii} = -a_{ii}$

Considero 1 vettore generico $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$W u = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega \wedge u \quad \text{con } \omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice di rotazione che trasforma la terna fissa in quella mobile è la matrice identità:

$$R = 1 \quad \text{e} \quad e_k = i_k \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad \forall k = 1, 2, 3$$

\uparrow identità \downarrow rimangono costanti

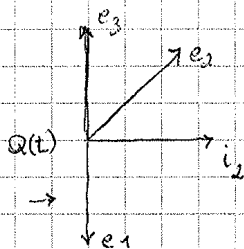
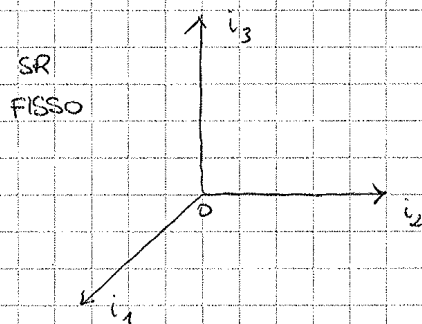
\Rightarrow questo implica che bastano 3 parametri per fissare la posizione di tutti i punti del corpo rigido (le coordinate dell'origine del SR mobile). Si parla di 3 GRADI DI LIBERTÀ di 1 C.R. in moto traslatorio.

Dalla legge delle velocità $v_p(t) = v_q(t) \quad \forall p, q \in \text{C.R.}$, ovvero tutti i punti hanno la stessa velocità, ma (sta, in generale, può essere differente da istante a istante, (a meno che il moto sia uniforme e rettilineo))

N.B. In effetti si può descrivere la posizione e la velocità del C.R. dando posizione e velocità di 1 dei suoi punti (ad esempio il baricentro), quindi devo definire le 3 componenti del punto prescelto \rightarrow 3 gradi di libertà (il moto del C.R. è unicamente determinato definendo il moto di 1 suo punto)

• MOTO ROTOTRASLATORIO

In cui esiste un orientamento solido del corpo che si mantiene costante rispetto all'osservatore fisso e la direzione costante è quella di ω .



(in pratica tengo fermo il sistema i_3 e ruoto rigidamente i_2 e i_1)

Se scegliamo $i_3 = e_3$ parallela alla direzione costante, $\dot{e}_3 = 0$

D'altra parte, dalle formule di Poisson, $\dot{e}_3 = \omega \wedge e_3 = 0 \Rightarrow \omega \parallel e_3$

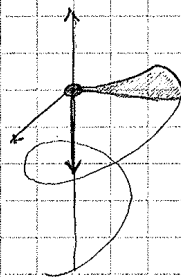
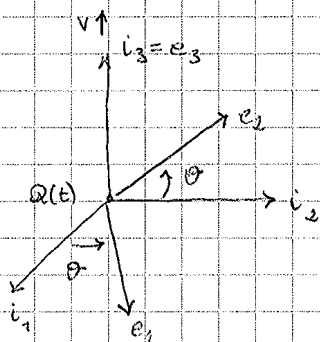
Ovviamente il moto traslatorio è un caso particolare del moto rototraslatorio

Per convenzione la direzione di ω è determinabile attraverso la regola della mano destra in cui le dita "si avvolgono / chiudono" nella direzione della rotazione e ω è identificato nella direzione del pollice.

→ angolo di rotazione ANTICLOCKWISE identifica una ω_z POSITIVA

• MOTO ELICOIDALE

Esiste una retta // alla direzione privilegiata in cui i punti hanno velocità parallela alla retta stesso.

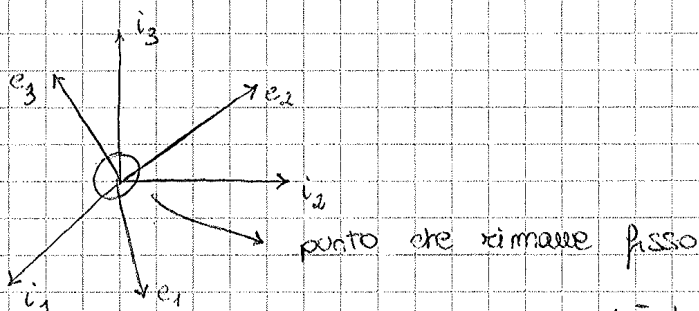


velocità // asse verticale, ma verso punta in basso

Mi bastano 2 parametri, infatti le coordinate x_0, y_0 sono costanti e devo conoscere $\{z_0, \theta\}$

• MOTO POLARE

Se uno dei punti solidale con il C.R. rimane fisso



perché ha direzione variabile nel tempo

C.R. è in rotazione attorno al cosiddetto ASSE Istantaneo di rotazione e ho

bisogno di 3 parametri (ad esempio i 3 angoli di eulero) per definire il moto polare (infatti l'origine Q del SR mobile è nota perché supponiamo sia il punto fisso del moto polare)

1° modo: $P = G(t) + A^T \tilde{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ vt \\ 0 \end{pmatrix} + (*)$

Per trovare matrice di rotazione:
disco all'istante $t=0$

costituisco terra solidale al disco

$\theta = at$

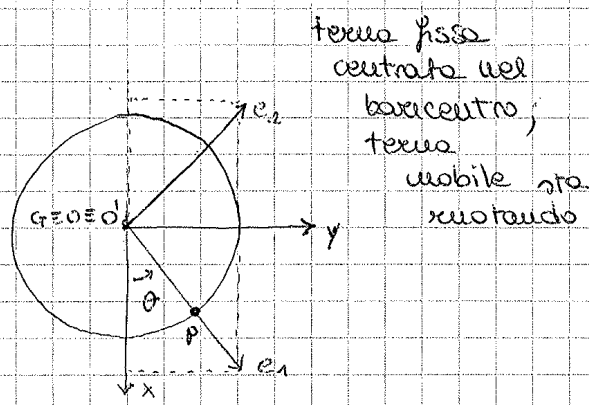
$e_1 = \cos \theta i + \sin \theta j$

$e_2 = -\sin \theta i + \cos \theta j$

$e_3 = k$

ho costruito i
coseni direttori

$A(t) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



matrice di rotazione dipende dal tempo

$(*) P = G(t) + A^T \tilde{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ vt \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos at & -\sin at & 0 \\ \sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

le componenti non cambiano nel tempo risp. alla terra mobile

componente lungo e_1

$P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ vt \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cos at \\ r \sin at \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos at \\ vt + r \sin at \\ 0 \end{pmatrix}$

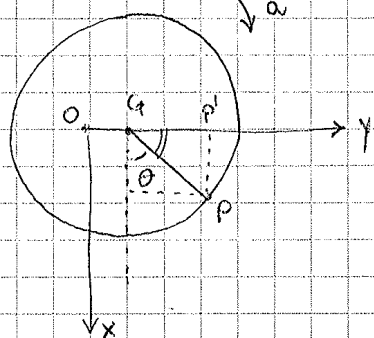
componente x si muove con y

su z non si sta muovendo

r è baricentro trasla. e P si sposta

→ useremo sempre pto!

2° modo (+ veloce):



$x_p = r \cos \theta$

$y_p = OG + GP' = vt + r \sin \theta$

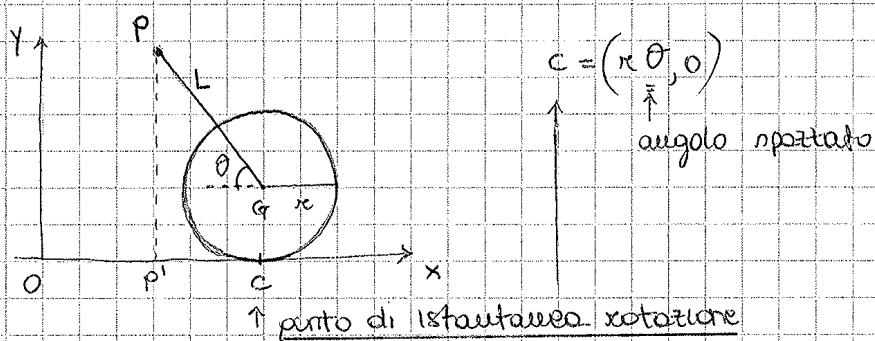
coordinate di P
rispetto SA fisso

↑ coordinata di G in 1 istante generico (è la derivata di $v_G = (0, v, 0)$)

2) Disco rotola senza strisciare su 1 circonferenza. Trovare traiettoria punto P sul bordo del disco

Devo quindi trovare x_p e y_p in 1 istante generico

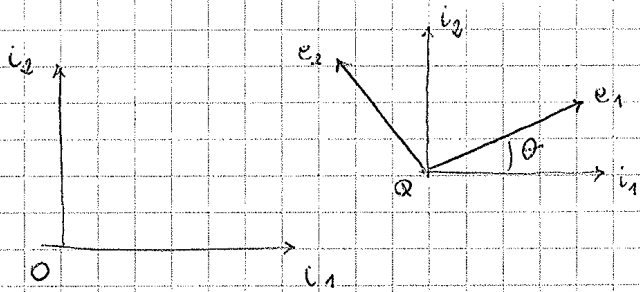
- 4) Corpo P esterno al disco non vincolato. Disco non striscia ma rotola.
 Come si muove P? // attraverso l'asta al centro



$$x_p = OC - PC = r\theta - L\cos\theta$$

P si muove quando disco rotola

$$y_p = r + L\sin\theta$$



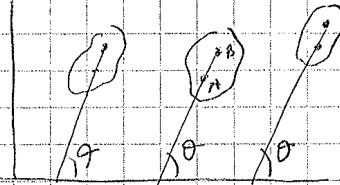
$\{x_Q, y_Q, \theta\}$ servono

3 parametri per descrivere il

moto di 1 corpo rigido libero nel piano

Casi particolari:

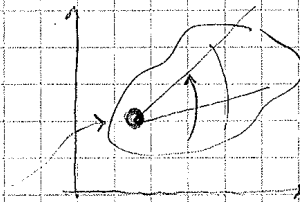
• MOTO PIANO TRASLATORIO



PIANO

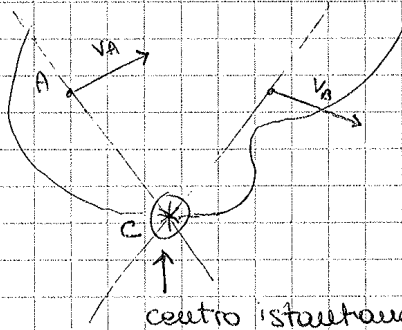
• MOTO ROTATORIO INTORNO AD ASSE FISSO

L'intersezione tra l'asse istantaneo di rotazione e il piano direttore è detto



CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE che si può determinare praticamente grazie al TEOREMA DI CHASLES;

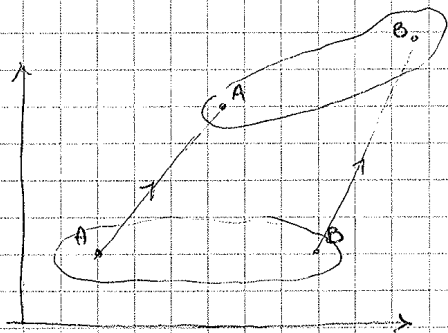
la normale alla velocità



Tracciando la normale alla traiettoria di 2 qualsiasi punti del sistema e trovando l'intersezione

centro istantaneo di rotazione

• MOTO PIANO GENERICO COMBINAZIONI DI TRASLAZIONI E ROTAZIONI



Abbiamo visto i classificazioni di possibili moti rigidi (considerando 1 intervallo di tempo $t \in [t_1, t_2]$).

Un altro punto di vista è quello di andare a studiare gli ATTI di moto ad 1

Nel caso libero l'asta AB è un CR nel piano e necessita di 3 parametri indipendenti (2 coordinate x, y dell'origine del SR solidale e l'angolo di rotazione). Ora con il vincolo di posizione qualunque punto dell'asta è noto una volta conosciuti 2 parametri $\{s(t), \theta(t)\}$

$$OG(s(t), \theta(t)) = \left(s + \frac{l}{2} \cos \theta \right) \mathbf{i} + \frac{l}{2} \sin \theta \mathbf{j}$$

↑ PUNTO MEDIO DELL'ASTA da cui posso calcolare la velocità di G ricordando che $s = s(t), \theta = \theta(t)$

$$V_G = \frac{dG(s, \theta)}{dt} = \frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial G}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

↑ derivato funzione composta $\frac{ds}{dt} = \dot{s} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

$$\text{derivando } OG \rightarrow \left(\dot{s} - \frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta} \right) \mathbf{i} + \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta} \mathbf{j}$$

s, θ sono parametri indipendenti ed essenziali per la descrizione del mio

moto. Chiamando $q_1 = s, q_2 = \theta$, si ha che la velocità di 1 generico punto P:

$$V_P = \frac{\partial P}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \dot{q}_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial P}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

- 2 approcci diversi per descrivere il moto del CR
 - LAGRANGIANO ①
 - EULERIANO ②

① segue ogni punto nella sua evoluzione temporale (punto fatto nella classificazione dei moti rigidi)

② si considera il campo delle velocità ad 1 tempo fissato ("congelo" il sistema)
 si considerano i cosiddetti ATTI DI ROTAZIONE RIGIDA (ad 1 tempo fissato)

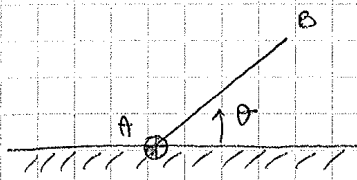
VIRTUALE un atto di moto

si definisce un ATTO DI ROTAZIONE compatibile con i vincoli nell'istante di tempo considerato

Analogamente si definiscono VELOCITÀ VIRTUALI quelle compatibili con i vincoli in 1 determinato istante (e poste una necessariamente corrispondono con le velocità effettive). Equivalentemente si possono definire SPOSTAMENTI

VIRTUALI che derivano dalla relazione:

VINCOLO UNILATERO



Asta deve mantenersi al di sopra della guida orizzontale. Il vincolo ha effetto sulle configurazioni di confine o frontiera che

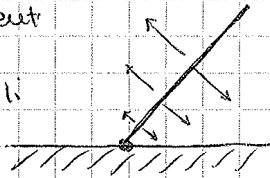
corrispondono a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Def: Uno spostamento virtuale si definisce REVERSIBILE se anche il suo opposto è virtuale.

Posso definire in maniera rigorosa il concetto di UNILATERALITÀ

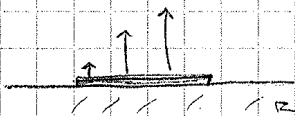
Se il sistema ha configurazioni con spostamenti virtuali non reversibili \rightarrow si dice soggetto a vincoli unilateri.

spostamenti virtuali reversibili



velocità \perp all'asta

Nelle config. di frontiera ho spostamenti virtuali irreversibili:



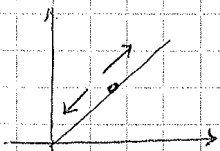
spost. virtuali opposti non definiti

Se invece tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili \rightarrow il vincolo è

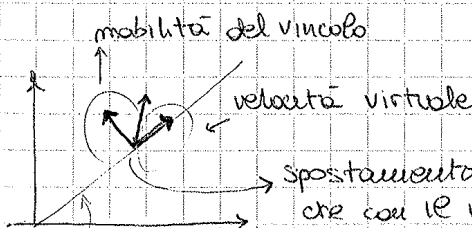
BILATERALE

N.B. Tale definizione può essere fatta considerando spostamenti virtuali e non quelli effettivi.

Se ad es. ruotiamo il punto su guida mobile




spost. virtuali sono legati alle velocità virtuali che sono \perp alla guida \rightarrow esclusi gli estremi dell'asta posso verificare la reversibilità



che con il vincolo mobile ha 1 componente \perp alla guida e concorda con la rotazione del vincolo \rightarrow irreversibilità

punto: 0

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{vincolo doppio (definito da 2 equazioni)}$$

$$\begin{cases} x_A = x_C \\ y_A = y_C \end{cases}$$


$$y_8 = 0 \text{ vincolo semplice (1 equazione)}$$

Ricordiamo che in CR nel piano è descritto da 3 parametri liberi (3 g.d.l.)

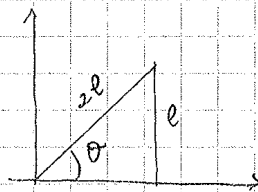
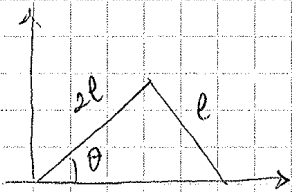
e il nostro sistema è composto da 2 aste ($6 = 3 + 3$ parametri liberi)

i vincoli introducono 5 relazioni $5 = 2 + 2 + 1$ (2 dopp. e 1 semplice)

\Rightarrow mi rimane $1 = (6 - 5)$ parametri liberi.

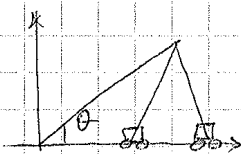
La scelta della coord. libera non è libera!

scelta 1:



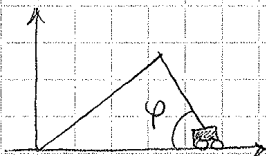
$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$$

Ma con questa scelta



Allo stesso θ possono corrispondere 2 configurazioni \neq

scelta 2:



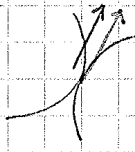
$$\varphi \in [0, 2\pi] \text{ parametrizzazione globale}$$

La scelta della parametrizzazione non è unica ma ci sono scelte migliori di altre!

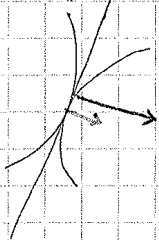
posizione esprimibili in forme olomorfe.

VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO (no strisciamento)

2 dischi
a contatto
che
rotolano

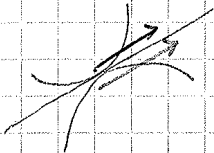


Puro rotolamento se le velocità nel punto di contatto sono coincidenti



Ho distacco se le velocità hanno 1 componente \perp al piano tangente comune che è diversa.

(= le velocità sono \neq)

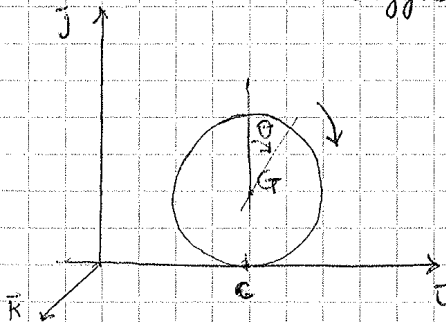


Ho strisciamento se ho componenti delle velocità nelle direzioni tg che sono \neq

Non faremo sempre con dischi che rotolano senza strisciare che ad esempio possiamo modellare ruote dentate



Considero 1 disco che rotola senza strisciare. Cosa succede nel punto di contatto c? \downarrow di raggio R



c punto di contatto e per avere puro rotolamento devo imporre che le velocità siano uguali.

Visto che la guida (il tavolo) è fissa $\Rightarrow \boxed{V_c = 0}$

Oppure, istantaneamente ho 1 atto di moto rotatorio intorno a c (centro istantaneo di rotazione).

"
cambia da istante a istante

Applicando la legge di distribuzione delle velocità del CR, allora:

$$V_G = V_c + (\omega \wedge CG) \rightarrow R\dot{j} = R\dot{\theta}\dot{i}$$

$$V_c = 0 \quad \omega = -\dot{\theta}\dot{k} \quad (\dot{\theta} \text{ è orario} \Rightarrow \text{segno } -)$$

$\omega \wedge CG$:

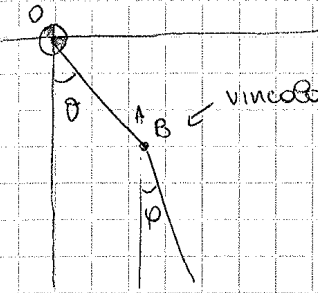
$$\begin{vmatrix} \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix}$$

\rightarrow Il vincolo impone 1 restrizione sulla velocità ($V_c = 0$) che equivale a:

es

vincoli
esterni

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ Y_0 = 0 \end{cases}$$



vincolo interno

$$\begin{cases} X_A = X_B \\ Y_A = Y_B \end{cases}$$

g.d.l.:

$$3 + 3 - 2 - 2 = 2$$

2 c.r. liberi
nel piano

↑ vincolo
doppio interno

↖ vincoli doppio esterno

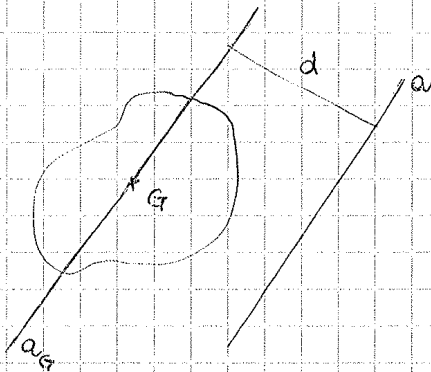
TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

$$I_a = I_{a_G} + m d^2$$

↑
momento di inerzia baricentrico

↑
massa tot del corpo

($\bar{a} \parallel$ asse a e passa per baricentro G)



$$I_a > I_{a_G}$$

MATRICE DI INERZIA

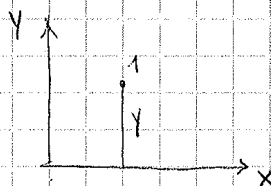
Racchiude tutti i momenti di inerzia

$$I_o = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

↑
centro del sistema di riferimento

$I_{ij} = I_{ji}$ matrice simmetrica e reale (*)
prodotti di inerzia

$$I_x = \int_V \rho(x) \underbrace{(y^2 + z^2)}_{\substack{\text{distanza di 1 corpo} \\ \text{risp. asse } x \text{ (è la proiezione del} \\ \text{punto su asse delle } x)}} dx$$



proiezione del punto 1
su x e y !

$$I_y = \int_V \rho(x) (x^2 + z^2) dx \quad (dx = dV)$$

$$I_z = \int_V \rho(x) (y^2 + x^2) dx$$

Prodotti di inerzia $I_{xy} = - \int_V \rho(x) xy dx = I_{yx}$

Prodotto di inerzia può essere negativo

$$I_{xz} = - \int_V \rho(x) xz dx = I_{zx}$$

(*)

Posso diagonalizzare matrice:

$$I_o \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = I_i e_i$$

vettori

→ vettori principali

i prodotti di inerzia risp. assi principali sono = 0

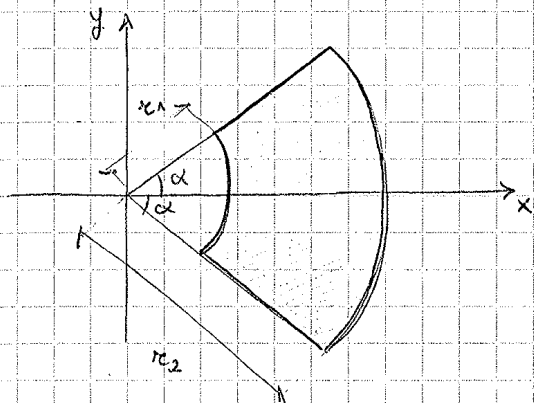
$$I_o \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

↳ MOMENTI DI INERZIA PRINCIPALI

$$x_G = \frac{\overbrace{\rho \pi R^2}^{m_p} \cdot \overbrace{0}^{x_G^p} - \overbrace{\rho \pi R^2}^{m_v} \cdot \overbrace{\frac{R}{2}}^{x_G^v}}{\rho \pi (R^2 - \frac{R^2}{4})} = \frac{-\frac{R^3}{8}}{\frac{3}{4} R^2} = -\frac{R}{6}$$

or, coerente con figura perché ho tolto una parte

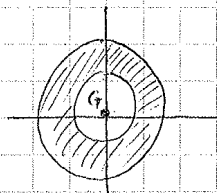
4) corona circolare con $\rho = \text{cost}$. Trovare baricentro



$$x_G = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{r_1}^{r_2} (r \cos \theta) r \, dr \, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \, d\theta} = \frac{\frac{r_2^3 - r_1^3}{3} 2 \text{sen} \alpha}{\alpha (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{2}{3} \frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_1 + r_2} \frac{\text{sen} \alpha}{\alpha}$$

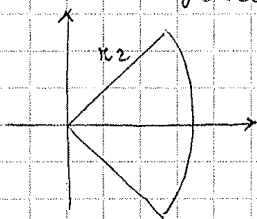
$\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \, d\theta$
 det jacobiano
 θ è coord. circolare
 coordinate cilindriche

• Se $\alpha = \pi$ settore corona circolare diventa:



G è in mezzo
 cioè $x_G = 0$

• Se $r_1 = 0$



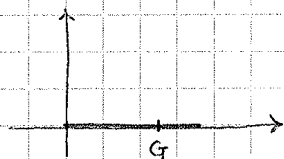
fetta di torta

$$x_G = \frac{2}{3} \frac{r_2^2}{r_2} \frac{\text{sen} \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} r_2 \frac{\text{sen} \alpha}{\alpha}$$

• Se α tende a 0

sto "chiudendo" la torta e trovo asta

$$\Rightarrow \frac{\text{sen} \alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow x_G = \frac{2}{3} r_2$$



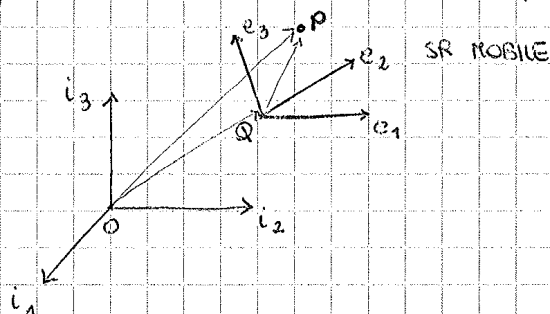
La densità cresce al variare degli estremi

"
 La si può quindi considerare come
 l'asta non omogenea

MOTI RELATIVI

La scelta del sistema di riferimento è importante. SR opportuno o secondo del problema.

SR FISSO (o di laboratorio)



$$x_p = \sum x_j i_j \quad (\text{secondo SR fisso})$$

$$x_p = \sum x'_j e_j \quad (\text{secondo SR mobile})$$

Punto P si muove nel tempo e anche i vettori cambiano nel tempo, quindi:

$$x_p = \sum x_j(t) i_j$$

$$x_p = \sum x'_j(t) e_j(t)$$

TEOREMA DI GALILEO

Dimostrare che $\vec{v}^a = \vec{v}^r + \vec{v}^c$

↑
velocità assoluta
che vedo nel SR fisso

←
velocità relativa
che vedrei se mi
mettessi in SR mobile

←
velocità di trascinamento
del punto solidale con SR
mobile (è la velocità del SR
mobile)

$$\vec{v}_p = v_o \times \omega \times (x_p - x_o)$$

2 punti + vettore che congiunge i 2 punti

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{dx_o}{dt} + \omega \times (x_p - x_o)$$

$$\frac{d}{dt}(x_p - x_o) = \omega \times (x_p - x_o)$$

$$\boxed{\frac{de_j}{dt} = \omega \times e_j}$$

$$x_p = \sum_{j=1}^3 x'_j(t) e_j(t)$$

$$v_p = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{dx'_j}{dt} e_j(t) + x'_j(t) \frac{de_j}{dt} \right] = \sum_{j=1}^3 \left[\dot{x}'_j(t) e_j(t) + x'_j(t) \omega \times e_j(t) \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^3 \dot{x}'_j(t) e_j(t) + \omega \times \underbrace{\sum_{j=1}^3 x'_j(t) e_j(t)}_{x_p - x_o} = \underbrace{v_o}_{v^a} + \underbrace{\omega \times (x_p - x_o)}_{v^c} + v^r$$

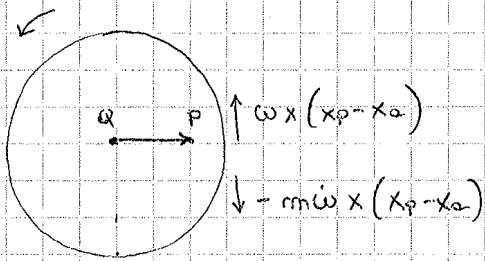
Oscillatore armonico $I_a \ddot{\theta} + h\theta = 0$ $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$I_a \ddot{\theta} + h\theta - mgl \sec \theta = 0$ $h > mgl$ condizione affinché sistema sia stabile

$I_a \ddot{\theta} + h\theta - mgl \sec \theta - mA \sec \omega t l \sec \theta = 0$ eq. diff. risolta per $\theta(t) = 0$ è soluzione

$$m a^{(w)} = \vec{F} - m a_a - m \dot{\omega} \times (x_p - x_a) - m \omega \times [\omega \times (x_p - x_a)] - 2m \omega \times v_r$$

MOTO ROTATORIO ($\omega \neq 0$)



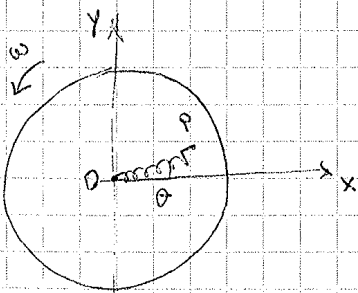
Forza centri fuga $-m \omega \times [\omega \times (x_p - x_a)]$

$\omega \times [\omega \times (x_p - x_a)]$ doppio prodotto vettoriale

$$[\omega \cdot (x_p - x_a)] \omega - [\omega \cdot \omega] (x_p - x_a) = -\omega^2 (x_p - x_a) \rightarrow F_{\text{centri fuga}} = m \omega^2 (x_p - x_a)$$

Forza di Coriolis (se non mi muovo non la sento, se mi muovo sì)

es. disco e molla



Eq. moto: ~~$m \ddot{x} = -Kx$~~ forza elastica

Eq. moto:

$$m \ddot{x} = -Kx - m \omega k \times [\omega k \times (x_i + y_j)] - 2m \omega k \times (\dot{x}_i + \dot{y}_j)$$

↑
forza el

f. centri fuga

f. coriolis

$$\omega k \times [\omega \times j - \omega \times i] = -\omega^2 x i - \omega^2 y j$$

$$\omega k \times (\dot{x}_i + \dot{y}_j) = \omega \dot{x}_j - \omega \dot{y}_i$$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -Kx + m \omega^2 x + 2m \omega \dot{y} \\ m \ddot{y} = -Ky + m \omega^2 y - 2m \omega \dot{x} \end{cases}$$

mi det. il moto del sistema

eq. diff. a coeff costanti

$$x = C \cos\left(\omega + \sqrt{\frac{K}{m}}\right)t + D \operatorname{seu}\left(\omega + \sqrt{\frac{K}{m}}\right)t + E \cos\left(\omega - \sqrt{\frac{K}{m}}\right)t + F \operatorname{seu}\left(\omega - \sqrt{\frac{K}{m}}\right)t$$

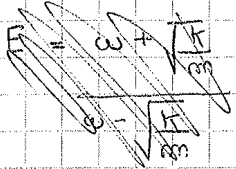
$$y = D \cos(\quad)t - C \operatorname{seu}(\quad)t - F \cos(\quad)t + E \operatorname{seu}(\quad)t$$

è la soluzione fondamentale

Condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C + E = 0 \\ D - F = 0 \\ D\left(\omega + \sqrt{\frac{K}{m}}\right) + F\left(\omega - \sqrt{\frac{K}{m}}\right) = v_0 \\ -C\left(\omega + \sqrt{\frac{K}{m}}\right) + E\left(\omega - \sqrt{\frac{K}{m}}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C + E = 0 \\ (+)C + (-)E = 0 \end{cases} \quad \text{soluzione: } C = E = 0$$

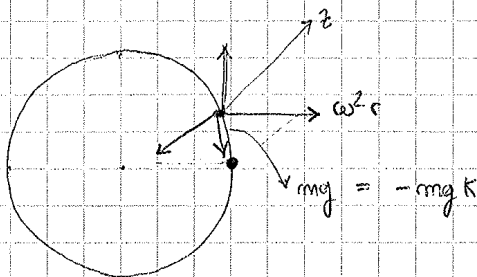


$$D = F \\ \left(\omega + \sqrt{\frac{K}{m}}\right)F + \left(\omega - \sqrt{\frac{K}{m}}\right)F = v_0 \rightarrow F = D = \frac{v_0}{2\omega}$$

$$x = \frac{v_0}{2\omega} \left[\operatorname{seu}\left(\omega + \sqrt{\frac{K}{m}}\right)t + \operatorname{seu}\left(\omega - \sqrt{\frac{K}{m}}\right)t \right] = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{seu} \omega t \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

$$y = \frac{v_0}{2\omega} \left[\cos\left(\omega + \sqrt{\frac{K}{m}}\right)t - \cos\left(\omega - \sqrt{\frac{K}{m}}\right)t \right] = -\frac{v_0}{\omega} \operatorname{seu} \omega t \operatorname{seu} \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

DINAMICA TERRESTRE



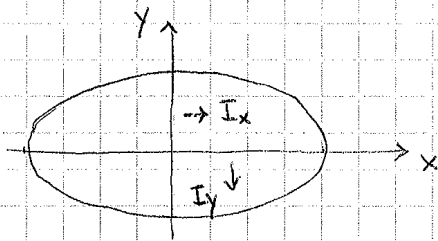
$$\frac{F_c}{F_g} = \frac{m\omega^2 r}{m \cdot g} = \frac{(2\pi)^2}{(24 \cdot 3600)^2} \cdot 6 \cdot 10^6 =$$

$$= \frac{\pi^2}{144 \cdot 360^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^6}{10^9} \approx 3 \cdot 10^{-3}$$

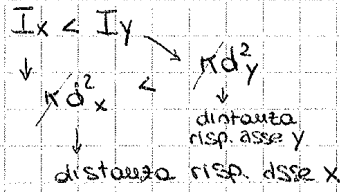
~~$$F_g \approx 1 \cdot 10^9$$~~

F_c è trascurabile

2D



qualitativamente la Ellissoide definisce i focus corpo:



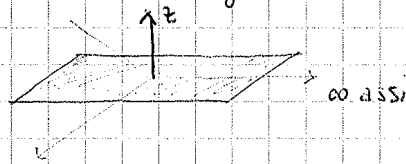
i punti sono + vicini ad asse x e + lontani da asse y

2D $\rightarrow I_z = I_x + I_y$

$$\int p(x^2 + y^2) dx = \int p y^2 dx + \int p x^2 dx$$

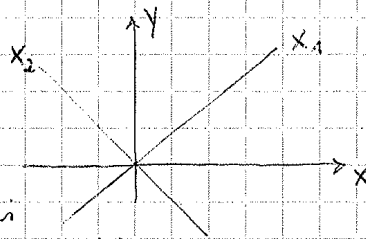
per simmetria

Se ho corpo su x,y, asse principale sarà asse z. Quali sono gli altri 2 assi principali? Uso ellissoide di inerzia \Rightarrow gli assi \checkmark poli x cui si annullano i prodotti es. lamina 2D che cerco sono \checkmark poli x cui si annullano i prodotti di inerzia



Ricerca assi principali su piano x,y:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ y = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{cases}$$



Degli assi complementari al corpo poli sono principali?

x,y come rotazione assi cartesiani
Sostituisco ora nell'ellissoide di inerzia (6) e pongo prodotti di inerzia = 0:

perché è asse principale (non sta rotando)

$$I_x (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)^2 + I_y (x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)^2 + I_z z^2 + 2 I_{xy} (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) = 1$$

($2 I_{xz} x_2 + 2 I_{yz} yz = 0$ perché z è asse principale!)

con prostaferesi ... riscrivu ellissoide secondo assi x_1 e x_2 e z :

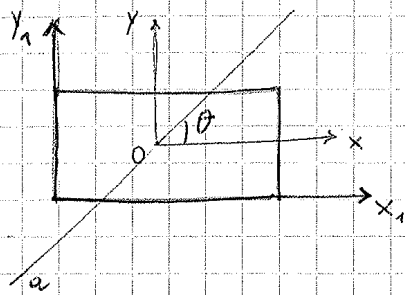
$$\underbrace{(I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + 2 I_{xy} \sin \theta \cos \theta)}_{I_{x_1}} x_1^2 + \underbrace{(I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta - 2 I_{xy} \sin \theta \cos \theta)}_{I_{x_2}} x_2^2 + I_z z^2 + 2 \underbrace{\left(I_{xy} \cos 2\theta - \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta \right)}_{I_{x_1 x_2}} x_1 x_2 = 1$$

Se $I_{x_1 x_2} = 0$ allora gli assi x_1 e x_2 sono principali

$$I_{xy} \cos 2\theta - \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta = 0$$

caso 1, $I_{xy} = 0$ e $I_x = I_y \Rightarrow x_1$ e x_2 principali qualunque siano x e y
non ho alcuna condizione su θ

2) Calcolare momenti inerzia rispetto x_1 e y_1 e rispetto ad asse a inclinato di θ rispetto a quello di riferimento



$x_1 \parallel x \Rightarrow$ Th Huygens per trovare I_{x_1} :

I_{x_1} :

$$I_{x_1} \rightarrow I_x = I_{x_1} - md^2_{x-x_1}$$

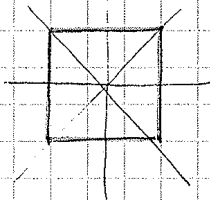
$$\frac{mb^2}{12} = I_{x_1} - \frac{mb^2}{4}$$

$$I_{x_1} = mb^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{12} \right) = \frac{mb^2}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{mb^2}{12} < \frac{mb^2}{3} \quad \text{or, } x_1 \text{ è momento baricentrico } e' \text{ è + piccolo}$$

$$I_a = \frac{mb^2}{12} \cos^2 \theta + \frac{ma^2}{12} \sin^2 \theta$$

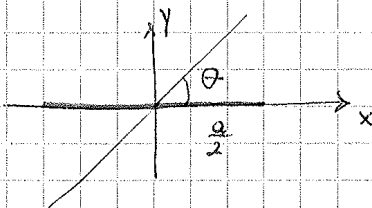
↓
 noto applicando $(I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta)$ x_1^2 perché x_1 era asse inclinato rispetto x , come in questo caso

• se $a = b \Rightarrow I_a = \frac{mb^2}{12} = \frac{ma^2}{12}$ (cioè non dipende da $\theta \Rightarrow$ la fig. è 1 quadrato \rightarrow in una lamina quadrata non ho 1 asse preferenziale)



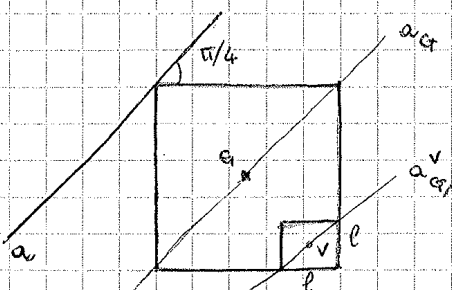
• se $a \neq 0$ e $b = 0 \rightarrow I_a = \frac{ma^2}{12} \sin^2 \theta$ rettangolo diventa 1 asta

tevo momenti di inerzia di 1 asta passante x_1 solo estremi
 risp. rette passanti x baricentro asta e inclinate di θ



3) Lamina quadrata (lato 3ℓ) con taglio (bico) di ℓ . Trovare momento inerzia asse a passante x vertice e inclinato su lato alto lamina

"
 a



$I_a?$

Si parla di DETERMINISTICO MECCANICO perché proiettandolo $\vec{F} = m\vec{a}$ sugli assi coordinati $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

↓ eq. alle derivate ordinarie vettoriali del II ordine

Si ottengono 3 equazioni scalari nelle 3 incognite $\{x(t), y(t), z(t)\}$ associando le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

posizioni iniziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t_0) = v_{0,x} \\ \dot{y}(t_0) = v_{0,y} \\ \dot{z}(t_0) = v_{0,z} \end{cases}$$

velocità iniziali

Per forze suff. regolari, il modello iniziale meccanico ammette soluzione unica (problema di Cauchy ben posto).

Quali forze consideriamo?

Distinguiamo tra FORZE ATTIVE e le FORZE VINCOLARI

FORZE ATTIVE: si dà una rappresentazione matematica (analitica) della forza attraverso 1 modello fenomenologico e queste forze sono note a priori.

ES • FORZE COSTANTI: indipendenti da posizione e velocità del punto e dall'istante considerato. es. forza peso

• FORZE DIPENDENTI DAL TEMPO: es. forze sinusoidal. es. pressione acqua fondo vasca

• FORZE DIPENDENTI DALLA VELOCITÀ: es. l'attrito legato alla viscosità del mezzo (aria/acqua) es. mano fuori dal finestrino d'auto

$$\vec{F} = -c(v)\vec{v}$$

si oppone al moto

coeff. che dipende dal mezzo

• FORZE POSIZIONALI: che non dipendono esplicitamente né dal tempo né dalla velocità, ma solo dalle coordinate del punto

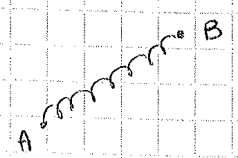
$$\vec{F}(P) = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$$

Sottoclasse importante delle forze posizionali sono le FORZE CONSERVATIVE che

sono caratterizzate dall'esistenza di una funzione potenziale $U(x,y,z)$

continua con derivate parziali tali che $\vec{F} = -\nabla U$

• FORZE ELASTICHE : legge fenomenologica di Hooke



$$\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{u}$$

direzione del vettore lungo la molla

elungazione rispetto alla lunghezza di riposo della molla x_0 (positività ≥ 0)

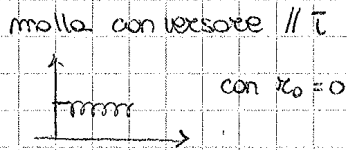
$k > 0$ costante di elasticità della molla (reg. data)

$$U = -\frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{p} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

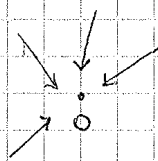
in effetti il lavoro è indipendente dalla traiettoria seguita dal

punto ma dipende solo dagli estremi



• FORZE CENTRALI : dirette verso un punto fisso e che dipendono dalla distanza.

$r = OP$



• P

$$\vec{F} = F(r)\vec{u} \quad \vec{u} = \frac{OP}{|OP|}$$

$$U = \int F(r) dr$$

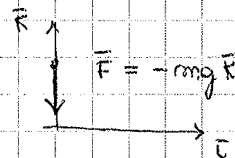
es. Forza gravitazionale

$$F = -\gamma \frac{m_p m_o}{r^2}$$

γ costante di gravitazione universale
 r^2 inversamente proporzionale al quadrato della distanza

In particolare, la forza peso di un punto sulla terra si ha scegliendo $r = R$ (raggio della terra) ed m_o la massa della terra

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad \text{con } g = \frac{\gamma m_o}{R^2} = 9,8 \text{ m/s}^2$$



Il potenziale della forza peso:

$$U = -\int mg dz = -mgz = -mgz + \text{cost}$$

$z = r - R$ quota sulla terra in un SR con asse z orientato nel verso della verticale ascendente

retta di applicazione) i momenti $M_Q = M_O$ coincidono

Nel caso di sistemi di vettori: M

$$M_Q = \sum \omega P_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \omega O \wedge \vec{F}_i + \sum_i \omega O P_i \wedge \vec{F}_i = \omega O \wedge \underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\vec{R}} + \underbrace{\sum_i \omega O P_i \wedge \vec{F}_i}_{M_O} = \omega O \wedge \vec{R} + M_O$$

ovvero la differenza tra momenti risultanti calcolati rispetto a poli diversi dipende solo attraverso la risultante

→ Il momento risultante di un qualsiasi sistema a risultante nulla (a FORZE INTERNE, COPPIE) è indipendente dal polo.

→ Il sistema di vettori applicato si dice equilibrato se ha vettori caratteristici nulli (risultante e momento risultante nulli)

N.B. se il sistema è equilibrato rimane tale anche se scelta ≠ del polo rispetto

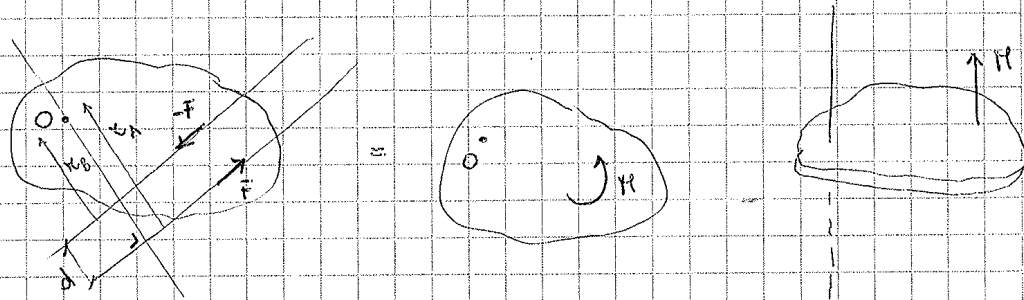
$$\text{a cui si calcola il momento } (R=0 \quad M_O=0 \rightarrow M_Q = \omega O \wedge R + M_O = 0)$$

→ Ad es. il sistema delle forze interne è un sistema equilibrato

COPPIA = sistema di 2 vettori applicati il cui risultante è nullo

$\{(P_+, F) (P_-, F)\}$ e il momento risultante (essendo un sistema a risultante nullo) è indipendente dal polo scelto.

→ in pratica si considerano delle forze = e opposte non allineate: il loro effetto è quello di tendere a far ruotare il corpo.



M è un vettore libero infatti dipende dalle intensità e dalle distanze delle forze applicate ma non dal polo rispetto a cui si calcola:

$$M_O = r_B \wedge (-F) + r_A \wedge F = -r_{BA} \wedge F + r_A \wedge F = (r_A - r_B) \wedge F = d \wedge F$$

↑
distanza tra le forze

DINAMICA DEI SISTEMI

Sono sistemi di N punti materiali:

→ 2^a legge Newton per l' i -esima particella

$$(1) \quad m_i a_i = F_i + \phi_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

\uparrow forze vincolari \uparrow punti

Sommando su tutti i punti:

$$\sum_{i=1}^N m_i a_i = \sum_{i=1}^N F_i + \sum_{i=1}^N \phi_i$$

\downarrow \downarrow

$R^A = R^{ATTIVE}$ $R^V = R^{VINCOLARI}$
 RISULTANTE DELLE FORZE ATTIVE RISULTANTE FORZE VINCOLARI

$$R^A + R^V = \sum_{i=1}^N m_i a_i \quad (2) \quad \rightarrow \quad R^{EXT} = \sum_{i=1}^N m_i a_i$$

\downarrow
 $= R^{EXT}$ = risultante forze esterne sia attive che vincolari

N.B. Non compaiono esplicitamente le forze interne perché per il principio di azione e reazione sono in sistema equilibrato (ovvero con risultante e momento risultante nullo)

• Analogamente moltiplicando (1) per un generico AP_i dove A è un polo arbitrario e sommando:

$$\sum_i AP_i \wedge m_i a_i = \sum_i AP_i \wedge F_i + \sum_i AP_i \wedge \phi_i$$

\downarrow \downarrow

momento risultante delle forze attive rispetto al polo A momento risultante delle forze vincolari rispetto ad A
 M_A^a M_A^v

$$(3) \quad \sum_i AP_i \wedge m_i a_i = M_A^a + M_A^v = M_A^{EXT} \quad \rightarrow \quad \text{MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AD A}$$

Le relazioni (2), (3) valgono per qualsiasi sistema di punti materiali. Per renderle applicabili e pratiche ad un problema specifico dobbiamo usare opportune grandezze dinamiche più pratiche. Queste saranno le

D'altra parte derivando la definizione di Q

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i v_i \right) = \sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_i m_i a_i$$

Ricordando la (2) abbiamo:

$$\boxed{R^{ext} = R^A + R^V = \frac{dQ}{dt} = m a_G} \quad \text{1}^a \text{ EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA}$$

che esprime il fatto che la variazione (derivata) della quantità di moto di 1 sistema qualsiasi eguaglia in ogni istante la risultante delle forze esterne (attive e vincolari) definita in legge causa-effetto per il moto traslatorio o equivalentemente (Teorema del moto del baricentro) il baricentro del sistema si muove come se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema e in esso fossero concentrate tutte le forze esterne (attive + vincolari)
→ estensione della 2^a legge di Newton al moto dei sistemi.

- la quantità di moto di 1 sistema non soggetto a forze esterne (ovvero isolato) è costante nel tempo (si conserva)
→ il baricentro di 1 sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme o in particolare è in quiete.

N.B. le forze interne non compaiono esplicitamente nell'equazione cardinale tuttavia in alcuni casi giocano un ruolo importante (es paracadute, es massa/molla su libro 10.6 moto baricentro)

Il punto è che la 1^a equazione cardinale non permette in generale la determinazione del moto del baricentro. Solo in casi particolari (sistemi G -determinati es sistemi isolati / sistemi soggetti alle forze peso) il moto del baricentro è effettivamente indipendente dalle forze interne.

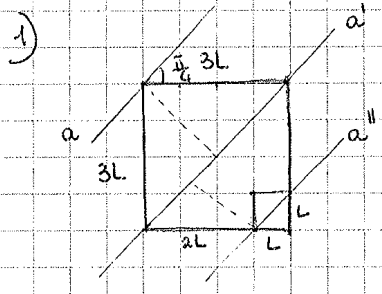
Strada verso la 2^a equazione cardinale:

Per avere 1 idea consideriamo il caso di particelle singole

Si introduce $\boxed{K_A = AP \wedge Q}$
↑
vettore posizione del generico punto rispetto a 1 polo arbitrario

MOMENTO DELLA
QUANTITÀ DI MOTO O
MOMENTO ANGOLARE

ESERCITAZIONE



$$I_{G,\theta} = \frac{1}{12} m (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{12} m a^2$$

↑
a=b

$$I_a^p = I_{a'}^p + m^p d_{a-a'}^2 = \frac{1}{12} m^p (9L^2) + m^p \frac{9L^2}{2} = m^p (9L^2) \frac{7}{12} = \frac{63}{12} m^p L^2 = \frac{21}{4} m^p L^2$$

$$I_a^v = I_{a''}^v + m^v d_{a-a''}^2 = \frac{1}{12} m^v L^2 + m^v \left(\frac{3L}{\sqrt{2}} + \frac{2L}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{12} m^v L^2 + m^v \frac{25}{2} L^2 = \frac{125}{12} m^v L^2$$

Massa generica di un corpo B $M_B = \rho_B V_B$
(se e solo se il corpo è omogeneo)

=> massa piena: $m^p = \rho g L^2$
massa vuota: $m^v = \rho L^2$

Per trovare la massa non posso sottrarre massa piena e vuota, ma devo passare x la densità

Ora applico proprietà di sottrazione

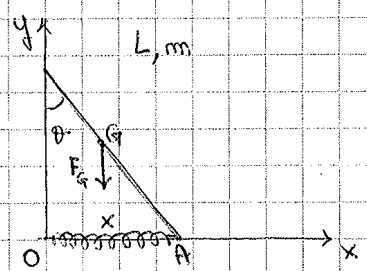
POTENZIALI

2) Asta vincolata su carrucelle su x e y.

Asta omogenea di lunghezza l
↓
vincolata all'origine da 1 molla (costante elastica k)

Calcolare il potenziale

Devo individuare tutte le F conservative e poi calcolare il potenziale



Individuare coordinate libere (θ o x)
Se fisso $\theta \Rightarrow x$ è vincolato, definito e viceversa

Asta soggetta a F gravità => $U = U_{grav} + U_{molla} = -mg y_G - \frac{k}{2} x_A^2 = (*)$
+ F molla

IL POTENZIALE conservative
misura il lavoro che tale F^v fanno sul sistema

$$F_{peso} = mg \Rightarrow U_{peso} = \int_{y_0}^{y_1} mg dy = - \int mg dy = -mg y \Big|_{y_0}^{y_1} = -mg y_1$$

↳ il potenziale va da $y_0 \rightarrow y_1$ quindi si abbassa: tolgo estremi di integrazione e metto "-"

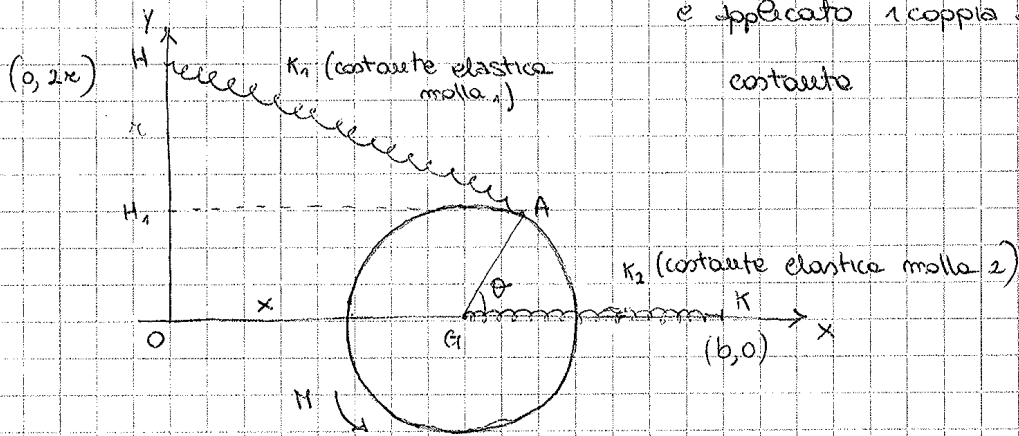
In generale, $F^{(a)} \Rightarrow U_F = + \int F^{(a)} dx_A$

→ può muoversi su x

5) Disco con baricentro vincolato su asse x (massa m, raggio r).

Due molle: 1 lo vincola al punto K, l'altra lo lega al punto A. Sul disco

è applicata 1 coppia di F che dà momento M costante.



momento è anti orologio
punti positivo
↑

$$U = U_{\text{peso}} + U_{\text{molle 1}} + U_{\text{molle 2}} + U_M = \frac{-k_1}{2} (A-H)^2 - \frac{k_2}{2} (G-K)^2 + M\theta \quad (*)_2$$

θ non mi basta per descrivere sistema: se blocco θ , disco può traslare →
mi serve 1 altra coordinata x descrivere traslazione (scelgo x)

⇒ sistema ha 2 gradi di libertà: se blocco θ e x, il sistema è bloccato

$$A-H = (x + r \cos \theta, 2r - r \sin \theta)$$

$$G-K = (b-x, 0)$$

$$(*)_2 = \frac{-k_1}{2} (x^2 + r^2 \cos^2 \theta + 2x r \cos \theta + G r^2 + r^2 \sin^2 \theta - 4r^2 \sin \theta) - \frac{k_2}{2} (b^2 + x^2 - 2bx) + M\theta$$

$$= \frac{-k_1}{2} (x^2 + 5r^2 + 2x r \cos \theta - 4r^2 \sin \theta) - \frac{k_2}{2} (x^2 - 2bx + b^2) + M\theta$$

↳ sono le costanti che mi derivano dall'integrale ⇒ posso riscrivere con:

$$= \frac{-k_1}{2} (x^2 + 2x r \cos \theta - 4r^2 \sin \theta) - \frac{k_2}{2} (x^2 - 2bx) + M\theta + \underline{\text{cost}}$$

Inoltre le equazioni cardinali, che sono "summa" dei principi della meccanica, sono condizioni NECESSARIE per un (qualsivoglia) problema dinamico (sempre valide) e nel caso di (corpi rigidi) sono anche SUFFICIENTI a descrivere completamente il suo moto. Infatti il numero di gradi di libertà di corpo rigido libero nello spazio è 6 e le equazioni cardinali sono 6 equazioni scalari. Indipendenti suff. a determinare i gradi di libertà.

→ Quindi il moto di un corpo rigido qualsiasi è somma di 1 moto traslatorio del baricentro (I. EQ. CARDINALE) e di moto rotatorio attorno al baricentro

(II EQ. CARDINALE $M \dot{r}_G^{EXT} = \frac{dL_G}{dt}$) \rightarrow $R^{EXT} = \frac{dQ}{dt}$

$\sum_i AP_i \wedge m_i a_i = \sum_i AP_i \wedge F_i + \sum_i AP_i \wedge \phi_i$ ottenuta moltiplicando vettorialmente la (1) ($m_i a_i = F_i + \phi_i$) per AP_i e sommando

momento risultante delle F attive rispetto ad A (M_A^{ATT})

momento risultante delle F vincolari resp. ad A (M_A^V)

$\sum_i AP_i \wedge m_i a_i = M^{EXT} = M_A^{ATT} + M_A^V$

↑ momento risultante delle forze esterne resp. ad A

Analogamente a punto fatto per passare da (1) a (2) (I eq. cardinale) cerchiamo di caratterizzare questa quantità con una grandezza propria del sistema materiale considerato: definiamo il momento del plattito di moto (momento angolare) resp. al polo arbitrario A

$K_A = \sum AP \wedge m_i v_i$

Calcoliamo la derivata nel tempo di K_A :

$\frac{dK_A}{dt} = \frac{d(\sum AP_i \wedge m_i v_i)}{dt} = \sum_i \frac{dAP_i}{dt} \wedge m_i v_i + \sum AP_i \wedge \frac{d(m_i v_i)}{dt}$

↑ massa costante

$\frac{dAP_i}{dt} = \frac{d(P_i - A)}{dt} = v_i - v_A$

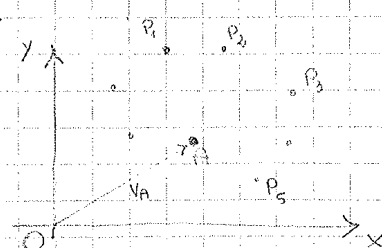
$= \sum v_i \wedge m_i v_i - \sum v_A \wedge m_i v_i + \sum AP_i \wedge m_i a_i = -v_A \wedge Q + M_A^{EXT}$

$= 0$ perché $v_i \parallel v_i$

$= v_A \wedge \sum m_i v_i = v_A \wedge Q$

↑ " per (2) = M_A^{EXT}

↑ punti che rotano attorno ad A



↑ velocità rotazionale di un punto resp. a se e = 0

↑ punti che rotano attorno ad O

Ora dobbiamo caratterizzare K_A e trovare 1 espressione esplicita (ed agevole) e posto si può fare introducendo l'ipotesi che il sistema sia rigido.

Per cui sappiamo che vale la formula fondamentale delle velocità (cinematica rigida).

$$K_A = \sum AP_i \wedge m_i v_i = \sum_i AP_i \wedge m_i v_A + \sum_i AP_i \wedge m_i (\omega \wedge AP_i) =$$

$$v_i = v_A + \omega \wedge AP_i$$

$$= \sum_i m_i AP_i \wedge v_A + \sum_i m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i)$$

(a) (formula fondamentale) (b)

dove A è un punto scelto sul corpo rigido con da poter scrivere la formula fondamentale

$$(a) \quad \sum_i m_i AP_i \wedge v_A = m AG \wedge v_A$$

def. baricentro $AG = \frac{\sum m_i AP_i}{\sum m_i}$

(b) $\sum_i m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) =$
 introduciamo 1 SR solidale con il corpo rigido con origine in A ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) ed indico le coordinate del punto P_i rispetto a posto SR solidale (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) e analogamente la velocità angolare rispetto a questa terna la scriviamo come

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) = \sum_{k=1}^3 x_{ik} \vec{e}_k \wedge \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^3 x_{ik} \vec{e}_k \wedge [(\omega_2 x_{i3} - \omega_3 x_{i2}) \vec{e}_1 +$$

$$+(\omega_1 x_{i3} - \omega_3 x_{i1}) \vec{e}_2 + (\omega_1 x_{i2} - \omega_2 x_{i1}) \vec{e}_3]$$

$$= [\omega_1 (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) - \omega_2 x_{i1} x_{i2} - \omega_3 x_{i1} x_{i3}] \vec{e}_1 + [-\omega_1 x_{i2} x_{i1} + \omega_2 (x_{i1}^2 + x_{i3}^2) - \omega_3 x_{i2} x_{i3}] \vec{e}_2 + [-\omega_1 x_{i3} x_{i1} - \omega_2 x_{i3} x_{i2} + \omega_3 (x_{i1}^2 + x_{i2}^2)] \vec{e}_3$$

Moltiplicando per m_i e \sum si ha che (b)

$$\sum m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) = (I_{11} \omega_1 + I_{12} \omega_2 + I_{13} \omega_3) \vec{e}_1 + (I_{21} \omega_1 + I_{22} \omega_2 + I_{23} \omega_3) \vec{e}_2 + (I_{31} \omega_1 + I_{32} \omega_2 + I_{33} \omega_3) \vec{e}_3$$

dove I_{11}, I_{22}, I_{33} sono i momenti di inerzia del corpo rigido rispetto agli

$$\tau_A = I_A \omega$$

per $A \equiv O$ fisso oppure $A \equiv G$

Il momento delle quantità di moto è stato ricondotto al calcolo di momenti di inerzia e velocità angolare del c.r.

Quindi la 2^a eq. cardinale per scelte opportune di A,

$$M_A^{EXT} = \frac{d\tau_A}{dt} = \frac{d(I_A \omega)}{dt} = I_A \frac{d\omega}{dt}$$

\uparrow \uparrow
 se I_A è costante nel moto considerato
 \downarrow matrice di inerzia

\downarrow è legata alla resistenza che il corpo oppone alla variazione della velocità angolare.
 Per cui a dato momento esterno un corpo con una matrice di inerzia maggiore subirà l'accelerazione minore.

Analogamente al ruolo della 1^a eq. cardinale nel caso del moto traslatorio:

$$F^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m a_G$$

\uparrow \uparrow
 massa \uparrow acc. baricentro
 = tendenza corpo a essere messo in movimento

$$M_A^{EXT} = \frac{d\tau_A}{dt} = I_A \alpha$$

In parti colare nel
 caso di sistema rigido piatto con vettore $\hat{e}_3 \equiv \kappa$ normale al piano del moto
 dalla cinematica rigida ricordiamo che $\bar{\omega} = \dot{\theta} \hat{\kappa} = \dot{\theta} \hat{e}_3$, $\kappa = I_3 \dot{\theta} \hat{e}_3$
 ↑ \hat{e}_3 coincide con
 asse principale di inerzia

Scrivendo la 2° eq. cardinale:

$$M_3^{\text{EXT}} = \frac{d\kappa}{dt} = I_3 \frac{d\dot{\theta}}{dt} \hat{e}_3$$

↑
CR in rotazione
resp. asse fisso

→ I_3 è costante

↓
 (componente M_3^{EXT}
 assiale) $M_3^{\text{EXT}} = I_3 \ddot{\theta}$ → acc. angolare
 ↑
 lungo asse \hat{e}_3 → misura la resistenza che il corpo oppone alla variazione
 della sua velocità angolare

Ricordando la simmetria tra atto di moto traslatorio e rotatorio ritroviamo
 risultati analoghi con I e II eq. cardinale:

$$R^{\text{EXT}} = m a_G \rightarrow R^{\text{EXT}} = m \ddot{x}_G$$

Oss Nella derivazione della II eq. cardinale, abbiamo fatto l'ipotesi che il polo A
 fosse solidale al CR. Cosa fare se vogliamo calcolare il momento delle pianti:
 di moto rispetto al punto B ($\neq A$) non solidale al CR (es punto contatto disco)
 → usiamo la formula di trasformazione dei momenti angolari

$$\kappa_B = \sum_h B P_h \times m_h v_h \quad \begin{cases} B P_h = P_h - B = P_h - A + A - B \\ = A P_h + BA \end{cases} \quad \text{con A solidale}$$

$$= \underbrace{\sum_h A P_h \times m_h v_h}_{= \kappa_A} + BA \times \underbrace{\sum_h m_h v_h}_{= Q}$$

$$\kappa_B = \kappa_A + BA \times Q = m v_G$$

" " solo se $BA \parallel v_G$

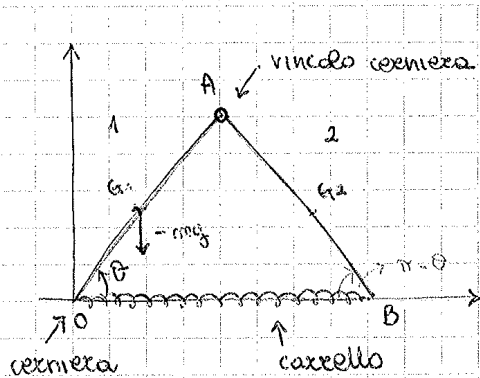
ESERCITAZIONE

Reazioni vincolari

Eq. cardinali della statica $\begin{cases} R^{EXT} = 0 \\ M^{EXT} = 0 \end{cases}$

Il polo \times calcolare il momento va scelto dove sono applicate le forze con mi
semplice calcolo.

1) Due aste calcolate con 1 molla



$2L, K$

$\phi_B? \phi_O?$

reazioni vincolari risp. a A e ad O

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

Impo l'orientamento di θ !!!

$$A (2L \cos\theta, 2L \sin\theta)$$

$$B (4L \cos\theta, 0)$$

$$G_1 (L \cos\theta, L \sin\theta)$$

$$G_2 (3L \cos\theta, L \sin\theta)$$

N.B.

Devo specificare rispetto a cosa calcolare le reazioni vincolari: ϕ risp. all'asta
1, la reazione in A è ext, se considero sistema asta 1+2, vincolo in A è
interno.

Scelgo di risolvere rispetto all'asta 1: eq. in componenti

$$\vec{H}_O^{(2)} \begin{cases} m\vec{g} + K\vec{OB} + \vec{\phi}_O + \vec{\phi}_A = 0 \\ \vec{OG}_1 \wedge m\vec{g} + \vec{OA} \wedge \vec{\phi}_A = 0 \\ \text{III} \\ m\vec{g} \wedge G_1 O \end{cases}$$

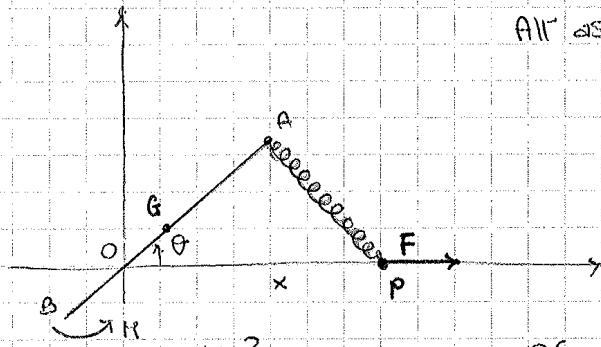
$$\rightarrow \begin{cases} Y \begin{cases} -mg + 0 + \phi_{OY} + \phi_{AY} = 0 \\ 4KL \cos\theta + \phi_{Ox} + \phi_{Ax} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\vec{OG}_1 \wedge m\vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L \cos\theta & L \sin\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -mgL \cos\theta$$

→ massa M

con massa m_p

3) Asta incenterata a $\frac{1}{3}$ nell'origine. Asta collegata con molla ad 1 punto materiale P che è vincolato a muoversi su asse y . Su P applicata 1 forza lungo x .



All'asta applicata poi 1 momento

Trovare potenziale sistema
reazioni vincolari nell'origine
del sistema e del punto P

$$OB = \frac{1}{3}L$$

$$OA = \frac{2}{3}L$$

$U?$

$\phi_0 = ?$

$(\phi_p)_y = ?$

$$P(x, 0); A\left(\frac{2}{3}L \cos \theta, \frac{2}{3}L \sin \theta\right)$$

$$G\left(\frac{1}{3}L \cos \theta, \frac{1}{3}L \sin \theta\right)$$

Calcolo potenziale:

$$U = U_{\text{molla}} + U_{\text{peso, asta}} + U_{\text{peso, P}} + U_M + U_F$$

$$= \frac{-\kappa}{2} \left[\left(x - \frac{2}{3}L \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{2}{3}L \sin \theta \right)^2 \right] - \frac{1}{6} mg L \sin \theta + M\theta + Fx$$

Calcolare reazioni vincolari in 1 generico istante di moto vuol dire che x e θ ci saranno incognite.

Calcolo per P la 1^a equazione:

$$-m_p g + \kappa (PA)_y + (\phi_p)_y = 0 \rightarrow -m_p g + \kappa \frac{2}{3}L \sin \theta + \phi_{py} = 0$$

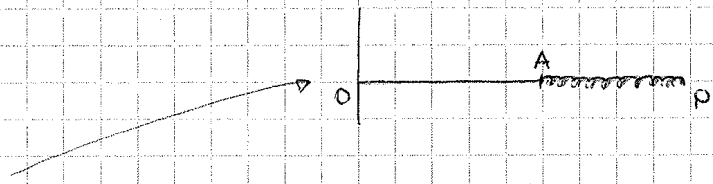
$$\phi_{py} = m_p g - \frac{2}{3} \kappa L \sin \theta \quad (\text{per un generico } \theta)$$

$$\text{Asta (1^a eq.)} \quad m\bar{g} + \kappa (\bar{AP}) + \phi_0 = 0 \quad (\text{forza vettoriale})$$

$$\text{in componenti: } \begin{cases} x & \kappa \left(x - \frac{2}{3}L \cos \theta \right) + \phi_{0x} = 0 \\ y & -mg - \frac{2}{3} \kappa L \sin \theta + \phi_{0y} = 0 \end{cases}$$

$$\phi_{0x} = \kappa \left(\frac{2}{3}L \cos \theta - x \right)$$

$$\phi_{0y} = mg + \frac{2}{3} \kappa L \sin \theta$$



Nel caso di asta orizzontale $\theta \hat{=} 0 \Rightarrow$ riscrivere le soluzioni x psto caso:

$$\theta = 0 \rightarrow \begin{cases} \phi_{py} = m_p g \\ \phi_{0x} = \kappa \left(\frac{2}{3}L - x \right) \end{cases} \quad \phi_{0y} = mg$$

$$M^A + M^V = \frac{dK_A}{dt} = \sum_K I_{A_K} \ddot{\omega}(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \omega(q, \dot{q}) \wedge \underbrace{\kappa_A(q, \dot{q})}_{I_A \omega(q, \dot{q})} \quad (2)$$

\uparrow
 $A \equiv G$
 $A \equiv O$

(1) e (2) sono dette EQUAZIONI DI EULERO

• CORPO RIGIDO NEL PIANO (3 g.d.l.)

$$q = (q_1, q_2, q_3)$$

$$\left[\begin{array}{l} R_x^A + R_x^V = m \ddot{x}_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ R_y^A + R_y^V = m \ddot{y}_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ M_{A_z}^A + M_{A_z}^V = I_{A_z} \ddot{\omega}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} 2 \text{ eq. scalari} \\ 1 \text{ eq. scalare} \end{array}$$

Ho 3 eq. scalari per le 3 coordinate libere (incognite) o equivalentemente 3 g.d.l.

$\omega = \dot{\theta} \pi$ con $\pi = \vec{F}$ normale al piano del moto

$$\Rightarrow \kappa_A = I_3 \dot{\theta} \vec{F}$$

$$\omega \wedge \kappa_A = \dot{\theta} \pi \wedge I_3 \dot{\theta} \pi = 0$$

In generale il numero di eq. scalari è uguale al numero complessivo delle incognite del problema dinamico quindi supponendo di avere m coordinate

lagrangiane

$$\hookrightarrow q_i(t) \quad (q_1, q_2, \dots, q_m)$$

e $\nu = 6 - m$ incognite che rappresentano i vincoli

$$\downarrow$$

$$\nu + m = 6 \quad (6 \text{ g.d.l. nello spazio})$$

Nel piano $\nu = 3 - m \rightarrow \nu + m = 3 \text{ g.d.l.}$

Operando algebricamente sulle eq. cardinali si può scrivere un sistema di m equazioni differenziali (ODE) scritte in forma normale (ovvero risolte rispetto a \ddot{q}) nelle quali non compaiono le incognite di reazione (le reazioni vincolari)

INTEGRALI PRIMI DEL MOTO

Una funzione $F(P_1, P_2, \dots, P_m, v_1, \dots, v_m, t)$ è un integrale primo del moto, se il suo valore è costante nel tempo (F è quantità conservata) (naturalmente condizioni iniziali diverse possono avere diversi valori della quantità conservata)

dalle eq. cardinali possiamo in alcuni casi ottenere facilmente degli integrali primi (che in generale può non essere immediato)

Il vantaggio è che gli integrali primi possono dare utili informazioni sul moto del sistema.

Se ad es. 1 componente delle forze esterne è nulla

$$R^{EXT} \cdot e_j = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dt} \cdot e_j = 0 \quad \text{ovvero la corrispondente componente della quantità di moto si conserva}$$

In generale se $R^{EXT} = 0$ (ovvero il sistema isolato) \rightarrow la quantità di moto si conserva.

Analogamente dalla 2^a eq. cardinale se $\Pi_A^{EXT} \cdot e_j = 0$, è nulla la componente del momento risultante delle forze ext risp. ad A con $A \in G$ oppure $A \in O$

$$\Rightarrow \frac{dK_A}{dt} \cdot e_j = 0 \quad \text{ovvero si conserva la corrispondente componente del momento delle quantità di moto}$$

In generale se $\Pi_A^{EXT} = 0 \Rightarrow$ il momento Π_A si conserva.

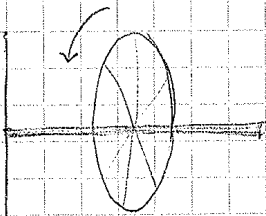
2^o principio della dinamica: in 1 SA ineziale la quantità di moto e il momento delle quantità di moto (momento angolare) di 1 sistema di corpi isolato rimane costante

Im pratica: $\Pi_A = I_A \omega$ con $A \in G, A \in O$

$$\frac{dK_A}{dt} = \Pi_A^{EXT} = 0 \rightarrow K_A = \text{cost}$$

$$\downarrow$$
$$\Pi_A = I_A \omega$$

\uparrow $\because I_A$ è costante
 $\Rightarrow \omega$ si conserva



inerzia giroscopica per cui l'asse del giroscopio o del CR posto in rotazione tende a mantenersi nella stessa direzione

(2) A parità di momento della forza, lo spostamento dell'asse è tanto inferiore quanto è maggiore la velocità di rotazione \rightarrow tenacia asse giroscopico.

Quindi con una buona approssimazione il giroscopo tende a mantenere invariata la direzione dell'asse di rotazione e lo spostamento dell'asse $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ha direzione del momento della forza che per la regola mano dx (prodotto vettoriale) è \perp allo sollecitazione stessa \rightarrow tenerezza al parallelismo dell'asse giroscopico con il momento sollecitante.