NUMERO: 1124

DATA: 22/09/2014

APPUNTI

STUDENTE: Russano

MATERIA: Fisica II

Prof. Gozzellino

Elettrostatica

2.10.2013 / 3.10.2013 / 10.10.2013 / 17.10.2013 / 23.10.2013 / 24.10.2013 /

L' INTERAZIONE GRAVITAZIONALE avviene tra due corpi massivi ed è solo attrattiva PROPORZIONALE ALLE MASSE, INVERSAMENTE ALLA DISTAN

(INTERAZIONE FONDAMENTALE)
L' INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA avviene a causa della carica elettromagnetica, può essere sia attrattiva che repulsiva.

La CARICA non è una grandezza fondamentale e si misura in COULOMB (di solito nell'ordine del pico 10^{-6} o del nano 10^{-9}). È una grandezza QUANTIZZATA: ovvero assume valori solo multipli della carica elementare

$$\left.\begin{matrix} e^- < 0 \\ p^+ > 0 \\ n = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{ATOMO} \qquad |e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \textcircled{C}$$

È PARI ALLA CARICA TRASPORTATA DA UNA CORRENTE DI 1A IN 1s

Il NUMERO ATOMICO Z indica il numero di protoni e determina le caratteristiche elettromagnetiche. Il NUMERO DI MASSA A è poi alla somma di protoni e neutroni.

IN OGNI ATOMO, $e^- + p^+ = 0$, QUINDI L'ATOMO È NEUTRO

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA: In un sistema elettricamente isolato, la somma algebrica delle cariche elettriche si conserva e quindi è costante. Vale sempre

$$\sum_i q_i = \text{cost.}$$

È elettricamente isolato, un sistema che non scambia cariche con l'esterno.

LEGGE DI COULOMB: Descrive come interagiscono due cariche puntiformi e in quiete, ovvero con dimensioni trascurabili rispetto alle distanze e ferme (o si muovono con velocità molto minore della velocità della luce, non relativistica). METODO PER CONFRONTARE QUANTITATIVAMENTE LE CARICHE

La forza con cui interagiscono due cariche è proporzionale alle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

(COME LA FORZA GRAVITAZIONALE)

$$\vec{F} = \textcircled{k}\, \frac{q_1 q_2}{\textcircled{r_{12}^2}}\, \hat{r}_1$$

K DIPENDE DALLE UNITÀ DI MISURA, DAL MEZZO (SOLITAMENTE UN DIELETTRICO)

Nel vuoto, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, dove ε_0 è la PERMETTIVITÀ / COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO pari a $8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Nm}^2/\text{C}$

La direzione della forza è la congiungente le due cariche elettriche. Il verso è dipendente dal tipo di forza: se è attrattiva ($q_1 q_2 < 0$), il verso è parallelo e concorde, viceversa è parallelo e opposto a $\hat{r}_2$. $q_1 q_2 > 0$

- distribuzione volumica: si suddivide in volumi infinitesimi

la densità (SPAZIALE) di carica volumica è pari a $\rho = dq/dV$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{dq}{r^2}\hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho dV}{r^2}\hat{u}_r$$

SE λ, σ, ρ SONO COSTANTI, SI DICE CHE LA DISTRIBUZIONE È UNIFORME

Nel caso ci si trovi in un sistema tridimensionale:

$$E_{x}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(x',y,z')dx'dy'dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}(x-x')$$

Il campo elettrico è un campo vettoriale, quindi gli si possono associare le LINEE DI CAMPO (FLUSSO o FORZA) che sono sempre tangenti al campo in ogni punto, con un verso di percorrenza coincidente con quello del campo elettrico.

LA PRESENZA DI UN SISTEMA DI CARICHE MODIFICA LO SPAZIO CIRCOSTANTE.

LE LINEE DI FORZA NON SI INTERSECANO MAI

Le linee di forza di una carica puntiforme isolata sono radiali alla carica, così come il campo elettrico, con lo stesso verso. Sono addensate dove il campo elettrico è più forte.

In caso di due cariche opposte, le linee escono dalla carica positiva e entrano in quella negativa.

In caso di cariche concordi, le linee di campo vanno a chiudersi all'infinito e tra le cariche il campo elettrico è nullo.

Le linee di campo non si intersecano mai, perché non possono esserci campi elettrici di direzioni diverse).

Se le linee sono rette parallele e equispaziate, il campo elettrico è uniforme.

$$\vec{F} = q_0\vec{E} \rightarrow \vec{a} = \frac{q_0\vec{E}}{m}$$

Se il campo è uniforme, l'accelerazione è costante e la carica si muove di moto uniformemen accelerato. Se la carica è positiva si sposta nel verso del campo elettrico, viceversa si sposta in verso opposto

E' come per la carica puntiforme, quindi a grande distanza non si può conoscere la reale distribuzione di carica. Quindi si assimila a una carica puntiforme nel centro dell'anello, con carica pari alla carica totale.

· POTENZIALE ELETTROSTATICO

Se una carica si muove per azione elettrostatica, compie un lavoro

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q\vec{E}d\vec{s}$$

$$W = \int_{A\,C_1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q\int_{A\,C_1}^{B} \vec{E}d\vec{s}$$

Si definisce TENSIONE ELETTRICA tra A e B lungo C_1, l'integrale di linea tra campo elettrico e spostamento infinitesimo.

$$T_{\substack{A \to B \\ \text{lungo } C_1}} = \int_A^B \vec{E}d\vec{s} = \frac{W}{q_0}$$

$$W = q\int_{A\,C_1}^{B} \vec{E}d\vec{s} + q\int_{B\,C_2}^{A} \vec{E}d\vec{s} = q\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = q\textcircled{\mathcal{E}}$$ IN UN CAMP ELETTROSTATI E' SEMPRE UGUALE A ZERO

$\mathcal{E}$ E' il lavoro di una carica lungo una circuitazione.

la FORZA ELETTROMOTRICE $\mathcal{E}$ è definita come la circuitazione del campo elettrico lungo un percorso chiuso (dipende dal percorso!) (NON E' UNA FORZA!)

Il campo elettrostatico è un campo conservativo, quindi la forza elettrostatica è una forza conservativa. Il lavoro di una carica che si sposta in un campo dipende solo dagli estremi del percorso.

La tensione è sempre la stessa. Se la curva è chiusa, la forza elettromotrice è nulla.

Quindi l'integrale di linea è definibile da una funzione di stato che varia solo per stato iniziale e stato finale.

L'integrale che va da A a B di $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ è quindi uguale all'opposto della variazione di energia

$$U_e(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r} + \text{cost}$$ cost = 0 per $r \to \infty$

$U_e = q_0 V$

Se $qq_0 > 0$, l'energia potenziale decresce al crescere di r, quindi $W > 0$.
Se $qq_0 < 0$, se r aumenta, l'energia potenziale aumenta (tendono ad avvicinarsi) quindi $W < 0$.

VALE SEMPRE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA:

$$U_e + \ldots + U_k = \text{cost.}$$ → L'ENERGIA TOTALE RIMANE COSTANTE

Per il potenziale, vale il principio di sovrapposizione.

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Sigma_i \frac{q_i}{r_i}$$

IL POTENZIALE IN UN PUNTO È PARI AL LAVORO CHE LA FORZA ELETTRICA COMPIE PER SPOSTARE UNA CARICA POSITIVA UNITARIA DA QUEL PUNTO ALL'INFINITO

- lineare

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda\, dl}{r}$$

- superficie

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, d\Sigma}{r} \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Sigma \frac{\sigma\, d\Sigma}{r}$$

LA DIFFERENZA DI POTENZIALE PUÒ ACCELERARE UNA CARICA A SECONDA DEL SEGNO.

- volumico

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, dV_{ol}}{r} \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{Vol} \frac{\rho\, dV_{ol}}{r}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{Vol} \frac{\rho(x',y',z')\,dx'dy'dz'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2}}$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = -dV \Rightarrow \vec{E} = -\boxed{\nabla V}$$

È IL VETTORE TALE CHE IL SUO PRODOTTO SCALARE CON DS DÀ LA VARIAZIONE DI V IN CORRISPONDENZA DELLO SPOSTAMENT

$$E_x = \frac{-\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Il campo elettrostatico è IRROTAZIONALE, perché è conservativo.

TEOREMA DEL GRADIENTE $\Delta V = \int_A^B \nabla V \cdot ds$

PER IL TEOREMA DI STOKES $$\text{rot}\,\vec{E} = \nabla \wedge \vec{E} = 0$$ (CAMPO CONSERVATIVO)

$F = -\nabla U_e$

Una SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE (SPAZIO TRIDIMENSIONALE) è una superficie dove il potenziale è uguale a costante. IN UN PUNTO PASSA UN SOLA SUPERF EQUIPOTENZ

Due superfici equipotenziali non si intersecano mai, perché il potenziale è una funzione univoca.
Il campo elettrostatico è in ogni punto perpendicolar alla superficie. ⊥ ALLE LINEE DI FORZA

si può fare la distanza tra P e il punto medio del dipolo

$$\sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{\boxed{r^2}}$$

DECRESCE PIU' RAPIDAMEN CHE PER UNA CARICA PUNTIFORM

r_1, r_2, r_3 sono pressocche' paralleli

Questo sistema neutro genera un potenziale perche' carica positiva e carica negativa non sono nello stesso punto. Il potenziale decresce come $1/r^2$.

Tramite coordinate polari:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

C'è una simmetria cilindrica

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

$$E_\varphi = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(1\cos\theta\,\hat{u}_r + \sin\theta\,\hat{u}_\theta\right)$$

Campo elettrico generato dal dipolo giace sul piano P-u_r

$$|E| = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

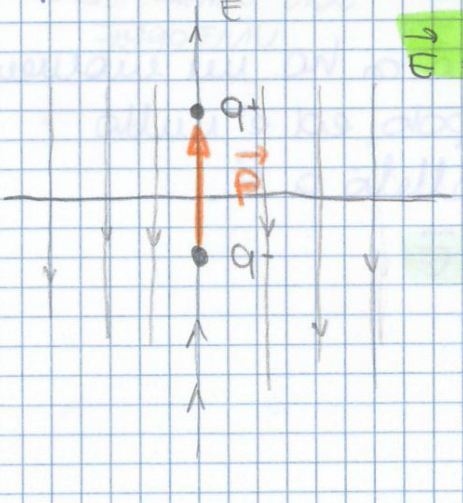
direzione $\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta$

Nei punti sull'asse del dipolo, il campo elettrostatico è parallelo e concorde a $\vec{p}$.

$$\vec{E} = \frac{\cancel{2}p}{{}_2 4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Nel piano perpendicolare all'asse, il campo elettrico è parallelo e discorde a p

$$\vec{E} = \frac{-p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



$$U_e - qV(x+ax,\ y+ay,\ z+az) - qV(x y, z) =$$
$$= qV(\cancel{x}, y, z) - qV(\cancel{x}, y, z) + q\left(\frac{\partial V}{\partial x}ax + \frac{\partial V}{\partial y}ay + \frac{\partial V}{\partial z}az\right.$$
$$= p_x \frac{\partial V}{\partial x} + p_y \frac{\partial V}{\partial y} + p_z \frac{\partial V}{\partial z} = \vec{p} \cdot \nabla V$$

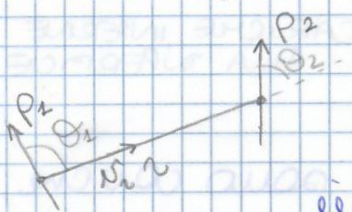
- se $\vec{p} \parallel \vec{E}$, $U_e = -p \cdot \vec{E}$ ed e' la situazione di MINIMA ENERGIA POTENZIALE (equilibrio stabile)
- se $\vec{p}$ e' antiparallelo a $\vec{E}$, $U_e = \vec{p} \cdot \vec{E}$ e' la MASSIMA ENERGIA POTENZIALE (equilibrio instabile)

Facendo ruotare il dipolo di un angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio stabile, esso risente di un MOMENTO DI RICHIAMO che lo riporta nella posizione $\theta = 0$

$$M = -p \sin\theta \vec{E} = -\frac{\partial U_e}{d\theta}$$

perche'
$dW = M d\theta = -dU_e$

Tra due dipoli:



$$U_{e_2} = -p_2 \cdot E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(p_1 \cdot p_2 - 3(p_1 \hat{u}_r)(p_2 \hat{u}_r\right.$$

l'energia potenziale e' simmetrica, infatti $U_{e,1} = U_{e,2}$

la forza e' quindi inversamente proporzional a r^4. l'interazione decresce con la distanza.

se i dipoli hanno momenti concordi disposti su due rette parallele distanti r e ortogonali alla congiungente:

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 p_2 \qquad p_1 \hat{u}_r = p_2 \hat{u}_r = 0$$

$$U_e = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad F_2 = -\nabla U_e u_r = \frac{3 p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4} u_r$$

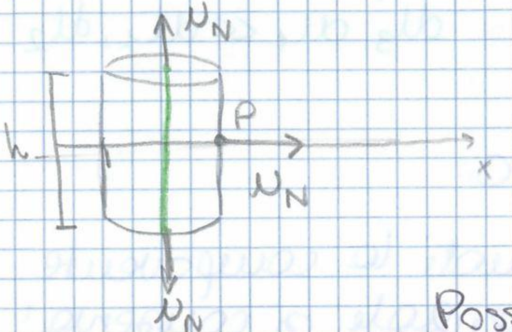
F e' repulsiv

se i momenti sono discordi l'energia cambia segno e la forza e' attrattiva.

SE pE>0 IL DIPOLO TENDE A PORTARSI DOVE IL CAMPO E' PIU' INTENSO

(LO E' SOLO SE GENERATO DA UN DIPOLO)
Il campo elettrico non è quindi un campo solenoidale (div = 0) perchè la divergenza non è mai nulla, inoltre per un campo solenoidale l'integrale sulla circuitazione è nullo.
UN CAMPO SOLENOIDALE HA FLUSSO NULLO.

→ CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO CON GAUSS



$$\lambda = \frac{dq}{dl} > 0$$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma_{chiusa}} \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot d\Sigma = \frac{\boxed{\lambda h}}{\varepsilon_0}$$ carica totale

Posso scriverlo come:

$$\Phi(\vec{E}) = \cancel{\int_{\Sigma_{base}} \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot d\Sigma} + \int_{\Sigma_{lat}} \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot d\Sigma$$

Il campo elettrico è radiale alla superficie, quindi il flusso attraverso le basi è nullo.

$\hat{n} \perp \vec{E} \rightarrow \cos\theta = 90°$

Quindi:

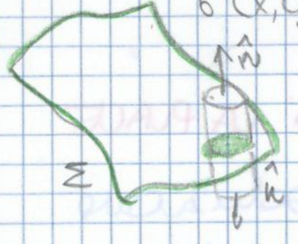
$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma_{lat}} \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot d\Sigma = \vec{E}\,2\pi x h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{n}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

$$V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + \boxed{cost}$$ questa costante non si può eliminare

· STRATO CARICO



$h \ll r$ del cilindro

Calcoliamo la componente normale:

$$d\varphi(\vec{E}) = d\varphi_{base_1} + d\varphi_{base2} + \cancel{d\varphi_{lato}} =$$ estensione trascurabile

$$= (\vec{E}_{1_n} - \vec{E}_{2_n})\, d\Sigma_{base}$$

$$(E_{1n} - E_{2n})\,\cancel{d\Sigma_{base}} = \frac{\sigma\,\cancel{d\Sigma_{base}}}{\varepsilon_0}$$ Vale per tutti i tipi di campo elettrico

Il campo elettrico subisce quindi una discontinuità

• ELETTROSTATICA NEI MEZZI CONDUTTORI

Un MATERIALE CONDUTTORE è un materiale in cui le cariche non sono vincolate, ma sono libere di muoversi. NON TRATTENGONO LA CARICA

IL MOTO ORDINATO DELLE CARICHE LIBERE GENERA LA CORRENTE ELETTRICA

In condizioni di equilibrio, le cariche non sono soggette a nessuna forza, quindi il campo elettrico all'interno è pari a 0. Non si ha quindi il moto ordinato, le cariche sono IN QUIETE macroscopicamente (in realtà si ha il moto di agitazione termica, che però è casuale e quindi la sommatoria dei vettori velocità è pari a zero).

Ma $\vec{E} = -\text{grad}\,\vec{V}$, quindi il potenziale è costante in tutto il conduttore in equilibrio (compresa la superficie) LA SUPERFICIE È EQUIPOTENZIALE

LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO È:
$\vec{E} = 0$ (interno)
(CONDIZIONE MEDIA MACROSCOPICA)

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma_{chiusa}} \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma = 0$$

Ovvero $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow Q_{int} = 0$

le cariche interne sono sempre pari a 0, quindi all'interno del conduttore non ci possono essere cariche libere.

Quindi se il conduttore è carico, le cariche si distribuiscono solo sulla superficie, in modo che la loro densità è massima dove il raggio di curvatura è minore. ($\sigma \neq cost$)

Casi particolari:

- superficie sferica $\sigma = cost$ (raggio di curvatura costante)
- superficie piana $\sigma = cost$ (raggio di curvatura ∞)

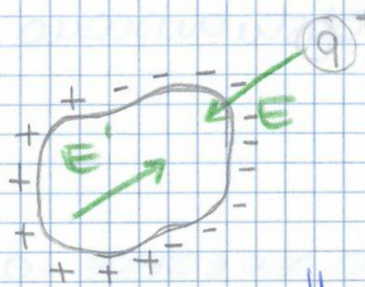
In prossimità della superficie del conduttore, il campo elettrico è diretto lungo la normale alla superficie pari a $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ (subisce una discontinuità). (la superficie è equipotenziale)

TEOREMA DI COULOMB $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{u}_N$ in prossimità del conduttore

USCENTE SE $\sigma > 0$
ENTRANTE SE $\sigma < 0$

· INDUZIONE ELETTROSTATICA

PROCESSO DI SEPARAZIONE DI CARICA



Se avvicino un corpo carico a un conduttore, nella parte vicino al corpo si spostano le cariche di segno opposto.

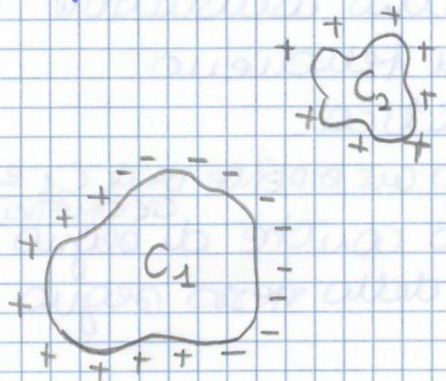
Il corpo carico genera un campo elettrico anche all'interno del conduttore, quindi se ne deve generare un altro che annulla il primo. Questo avviene grazie alla REDISTRIBUZIONE DELLE CARICHE.

$$\vec{E} + \vec{E}' = 0$$

LA DISTRIBUZIONE DI EQUILIBRIO E' UNA SOLA

$\Sigma q_{indotte} = 0$ Tante cariche positive, quante negative

Se il corpo carico viene allontanato, $\vec{E}'$ non deve più crearsi



Se il corpo carico è un conduttore: la carica indotta crea un campo elettrico all'esterno, quindi le cariche si redistribuiscono anche sul conduttore carico perché all'interno di tutti i conduttori il campo dev'essere nullo. SI RISTABILISCE L'EQUILIBRIO

Se i due conduttori vengono messi a contatto se ne crea uno unico: si crea un nuovo potenziale comune a entrambi e la carica si distribuisce (SU UNA SUPERFICIE) su entrambi i conduttori, come fossero uno solo.

METTERE A TERRA significa collegare elettricamente il conduttore con la terra (direttamente o indirettamente).

Se si ha una FUGA DI CARICA, si ha una scarica, un cortocircuito con la terra.

Il PARAFULMINE funziona proprio in questo modo: è un conduttore a punta con messa a terra.

Sulla punta si ha un forte campo elettrico che attira la carica e avviene una SCARICA, un flusso di

Si ha un conduttore all'interno di un altro, cavo, e all'esterno c'è un terzo conduttore carico. All'interno del sistema non succede niente: la redistribuzione delle cariche è solo all'esterno.

Il conduttore è uno **SCHERMO ELETTROSTATICO**, ovvero blocca gli influssi dei campi elettrostatici.

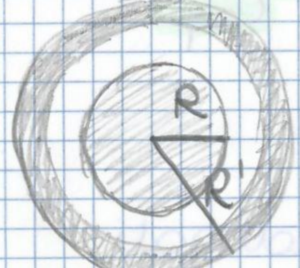
La **GABBIA DI FARADAY** funziona allo stesso modo, ma ha una struttura a griglia.

· CONDENSATORE

VIENE UTILIZZATO PRINCIPALMENTE COME DEPOSITO DI CARICA

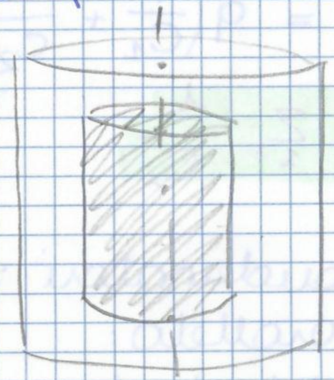
E' un sistema di due conduttori in condizioni di induzione elettrostatica completa.

I due conduttori prendono il nome di **ARMATURE**.

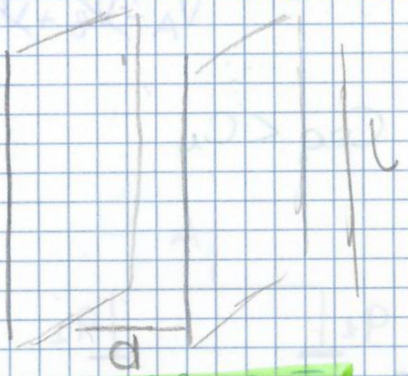


SFERICO:

E' un condensatore a tutti gli effetti (IDEALE)



CILINDRICO:



PIANE PARALLELE:

Ai bordi non tutte le linee di forza si chiudono tra i conduttori, ma li si considerano perfetti quando $d << l$. ESTENSIONE INDEFINITA

La capacità di un condensatore è data da:

$$C = \frac{q}{\boxed{V_1 - V_2}}$$

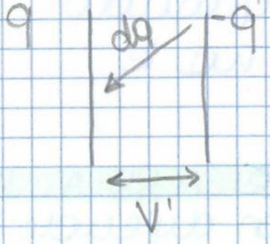
sia reale che indotta

positivo, perché la capacità è sempre positiva

La capacità dipende dalla forma dei conduttori, la loro dimensione, la loro distanza e dalla costante dielettrica del mezzo tra i due conduttori.

Sia σ che q sono le stesse sulle due armature: si crea un campo elettrico all'interno pari a $E = \sigma / \varepsilon_0 \hat{n}$. All'esterno è pari a zero.

Caricare un condensatore significa accumulare cariche dello stesso segno in uno spazio ristretto. Bisogna compiere lavoro, perché naturalmente le cariche si respingerebbero.



Se voglio aumentare la carica, porto della carica da una armatura all'altra.

$$dW = dq'V'$$

DIPENDE DALLA CARICA TRASPORTATA E DALLA CAPACITA'

È il lavoro per caricare una armatura. Non dipende dal tempo, ma solo da situazione iniziale e finale.

$$W = \int_0^q V'dq' = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' =$$

$$= \frac{1}{C}\frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

Il lavoro si trasforma in ENERGIA ELETTRICA immagazzinata sulle armature:

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

L'energia elettrica è pari al lavoro compiuto per caricare il condensatore

L'energia rimane immagazzinata fino a che il condensatore non si scarica, poi viene dissipata. L'energia è legata al campo elettrico.

ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{\sigma^{\cancel{2}}\Sigma^{\cancel{2}}}{\frac{\varepsilon_0\cancel{\Sigma}}{d}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}d\Sigma = \frac{1}{2}\varepsilon_0\underbrace{\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2}_{E^2}\boxed{\Sigma d} =$$

volume tra le armature

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Vol$$

Densità di energia per unità di volume

$$u_e = \frac{dW_e}{dVol} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$u_e(x,y,z) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(x,y,z)$$

In caso di campo elettrico, si ha sempre una densità di energia

$$U_e = \int_{Vol} u_e(x,y,z)\,dVol = \frac{1}{2}\int_{Vol}\varepsilon_0 E^2(x,y,z)\,dVol$$

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Energia di una carica dovuta all'altra

I materiali ANISOTROPI sono i materiali che hanno caratteristiche elettriche diverse a seconda della direzione della cella cristallina (cristallini non cubici).
Gli ISOTROPI invece non variano le caratteristiche (come gli amorfi).

$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 k = \varepsilon$ E' la COSTANTE DIELETTRICA ASSOLUTA DEL MATERIALE

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 k}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 k \Sigma}{d}$$

Un dielettrico in un campo elettrico subisce un fenomeno di POLARIZZAZIONE:

- POLARIZZAZIONE ELETTRONICA

Nel neutro, il centro delle cariche positive coincide con quello delle cariche negative.
Se si ha un campo elettrico, questo non accade più, perché le cariche negative si spostano nel verso opposto al campo e si crea un dipolo (con una distanza massima).
Quindi si può associare un momento di dipolo:

$\vec{p} = Ze\vec{a}$ Non varia al variare della temperatura

Se si toglie il campo elettrico, le cariche tornano nella posizione iniziale.

- POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO (CENTRO DELLE CARICHE + ≠ CENTRO DELLE CARICHE -)

Avviene per le molecole che hanno già un momento di dipolo, come per esempio l'acqua.
Nel corpo, il momento medio è pari a zero.
Se si applica un campo elettrico, il dipolo tende ad allinearsi, ma non tutti si allineano per il moto di agitazione termica.

$P_0 = P_0 \textcircled{N}$ Numero di molecole allineate, inversamente proporzionale alla temperatura

$\langle p \rangle < P_0$ $\vec{P} = \langle p \rangle N$

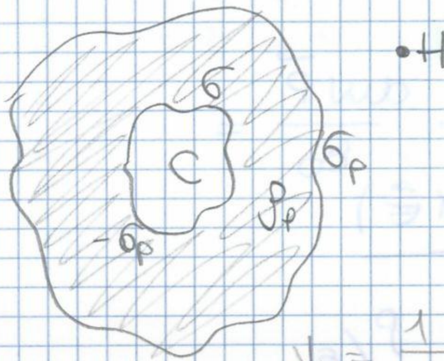
$$\frac{dq_p}{dV} = \rho_p = -\text{div}\,\vec{P}$$

$$P = \text{cost} \longrightarrow \sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

$$P \neq \text{cost} \longrightarrow \sigma_p = P\cdot\hat{n}$$

$$\rho_p = -\text{div}\,\vec{P}$$

la somma delle cariche di polarizzazione e' uguale a zero



$$V_H = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Sigma_{cond}} \frac{\sigma\, d\Sigma}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Sigma_{diel}} \frac{\sigma_p\, d\Sigma}{r_p} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Sigma_{diel}} \rho\frac{dV}{r_p}$$

$$V_H = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{P\cdot u_n\, d\Sigma}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\text{div}P\, d\tau}{r}$$

·EQUAZIONE DI MAXWELL DEI DIELETTRICI

- $\vec{E}$ e' sempre conservativo

$$\oint \vec{E}\, dl = 0 \qquad \text{rot}\,\vec{E} = 0$$

E' uguale!

- Teorema di Gauss

$$\int_{\Sigma_{chiusa}} \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = \frac{q+q_p}{\varepsilon_0} \qquad \text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho+\rho_p}{\varepsilon_0}$$

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\text{div}\,\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0\,\text{div}\,\vec{E} + \text{div}\,\vec{P} = \rho$$

$$\text{div}\underbrace{(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})}_{\vec{D}} = \rho \Longrightarrow \text{div}\,\vec{D} = \boxed{\rho}$$

carica libera

VETTORE DI INDUZIONE DIELETTRICA $\vec{D}$

$$\int_{\Sigma_{chiuso}} \vec{D}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = q$$

Vale sempre! (isotropi e anisotropi)

IN ASSENZA DI CARICHE D E' SOLENOIDALE

↓

NON E' CONSERVATIVO

$$\vec{D} = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0(1+\chi)E = \\ = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}$$

Quindi $\vec{D} \parallel \vec{P} \parallel \vec{E}$

$$\vec{D} = \frac{\cancel{\varepsilon_0}P}{\cancel{\varepsilon_0}\chi} + P = \frac{\chi+1}{\chi}P$$

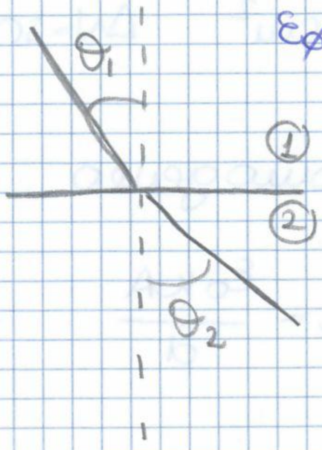
isotropo omogeneo (non cambiano le caratteristiche)

$$\cancel{\text{div}\,\vec{D}} = \text{div}\left[\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right)\vec{P}\right]$$

$$\frac{\chi+1}{\chi}\,\text{div}\,\vec{P} = 0 \longrightarrow \rho_p = 0$$

le cariche non d polarizz. sono sulla superficie

Se il dielettrico è isotropo:



$$\cancel{\varepsilon_0} k_1 E_{1n} = \cancel{\varepsilon_0} k_2 E_{2n}$$

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

$$\frac{tg\theta_1}{k_1} = \frac{tg\theta_2}{k_2}$$

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

LEGGE DELLA RIFRAZIONE DELLE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO

E' la variazione dell'inclinazione di un campo vettoriale

Se $\theta_1 < \theta_2 \rightarrow k_1 > k_2$

Se $\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0$

La RIGIDITÀ DIELETTRICA è il massimo campo che il dielettrico può sopportare. Se ciò avviene, si ha una scarica tra le due armature (è un processo irreversibile).

Dielettrico isotropo $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 k E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2} DE$

Anisotropo $u_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

- POLARIZZAZIONE IONICA

Nei solidi cristallini, gli ioni si spostano provocando un altro momento di dipolo.

I MATERIALI PIEZOELETTRICI si polarizzano se subiscono una forza di trazione o di compressione. Si ha quindi una differenza di potenziale ai capi del materiale. (si polarizzano, ma si deformano anche)

Nella polarizzazione per orientamento, i dipoli seguono le variazioni del campo elettrico fino a che non si ha una frequenza dell'ordine del GHz. A questo punto k diminuisce, più la frequenza aumenta e non si polarizza più per orientamento.

La corrente elettrica

31.10.2013 / 7.11.2013

Se ci sono due conduttori a contatto si ha un flusso di elettroni che si spostano dai punti di potenziale ~~minore~~ MAGGIORE ai punti di potenziale ~~maggiore~~ MINORE, per raggiungerne uno unico.

Se la differenza di potenziale viene mantenuta nel tempo (CON UN GENERATORE DI FEM → MANTIENE UNA ΔV COSTANTE) si avrà un flusso di carica costante (è un moto ordinato di cariche, con stessa velocità che non si annulla come quella del moto di agitazione termica).

Nel conduttore, l'elettrone è un PORTATORE DI CARICA.

In una soluzione elettrolitica, i portatori di carica sono sia gli ioni positivi che quelli negativi.

Nei metalli sono gli elettroni:

portatori di carica per unità di volume

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\boxed{N_A}}{A/\bigcirc\!\!\!\!\rho}$$

densità

Numero di atomi in una mole, che per ipotesi è anche il numero di portatori

Se si ha una differenza di potenziale, è perché è presente un campo elettrico e se c'è un portatore di carica, questo subisce una forza, quindi viene accelerato ed è soggetto ad una VELOCITÀ DI DERIVA (parallela e concorde al campo se le cariche sono positive, parallela e discorde se sono negative).

Consideriamo una superficie Σ attraverso la quale si ha un flusso di carica.

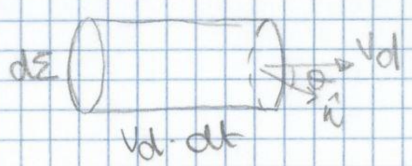
Si definisce INTENSITÀ DI CORRENTE ATTRAVERSO LA SUPERFICIE Σ il

FENOMENO DELLA CONDUZIONE ELETTRICA

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = i = \frac{dq}{dt}$$

È una grandezza scalare e fondamentale del SI

$[i] = A$



Suppongo $\vec{v_d} \parallel \vec{E}$

i coincide con la carica racchiusa nel cilindro di base dΣ e altezza ~~dt~~ $v_d \cdot dt$

$$\int_{vol} \left(\text{div}\, \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dVol = 0$$

EQUAZIONE DI CONTINUITA' DELLA CORRENTE ELETTRICA

$$\text{div}\, \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vale in ogni punto dello spazio

ESPRIME LA CONSERVAZIONE DELLA CARICA

• REGIME STAZIONARIO

Non c'è accumulo di carica: all'interno della superficie rimane costante

$$\frac{\partial Q_{int}}{\partial t} = 0$$

IN CONDIZIONI STAZIONARIE

$\text{div}\, \vec{J} = 0$ (EQUAZIONE DI CONTINUITA' DELLA CORRENTE IN REGIME STAZIONARIO

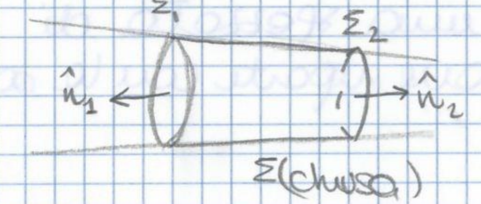
$$\int_{\Sigma chiusa} \vec{J} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma = 0$$

$\text{div}\, \vec{J} = 0 \rightarrow$ E' SOLENOIDALE

TEMPO DI PROPAGAZIONE $t = \frac{L}{c}$

Deve essere piccolo per essere in regime stazionario e $t' \gg t$ (t' = tempo di variazione della corrente)

Consideriamo un conduttore a sezione variabile:



$$\varphi(\vec{J}) = 0 = \int_{\Sigma_1} \vec{J} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \vec{J} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma + \cancel{\int_{\Sigma lat} \vec{J} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma}$$

Non c'è flusso perchè è un contatto con un isolante

$$-i_1 + i_2 = 0$$

$$i_1 = i_2$$

Scorre la stessa corrente indipendentemente dalla sezione

J è omog. $J \parallel \hat{n}$ $\quad i_1 = J_1 \cdot \Sigma_1 \qquad i_2 = J_2 \cdot \Sigma_2$

$$J_1 = \frac{i}{\Sigma_1} \qquad J_2 = \frac{i}{\Sigma_2}$$

La densità di corrente è massima dove la sezione è minima.

i e J sono inversamente proporzionali

LA CONDUZIONE ELETTRICA E' SEMPRE OSTACOLATA DAL MEZZO IN CUI AVVIENE IL MOTO DELLE CARICHE.

UNA PERTURBAZIONE ELETTRICA SI PROPAGA CON VELOCITA' $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

LEGGE DI OHM (in forma locale)

E' UN'EQUAZIONE DI STATO

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{J} = \rho\vec{J}$$

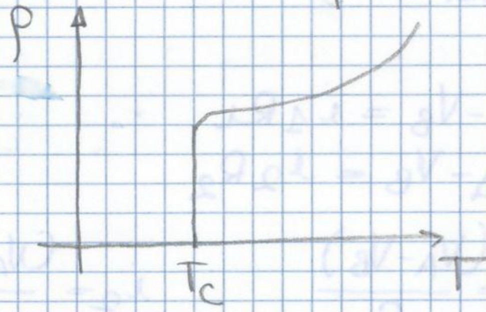
→ E' la RESISTIVITA' ELETTRICA (varia con la temperatura, dipende solo dal tipo di conduttore)

$[\rho] = \Omega \cdot m$ $\qquad$ $[\sigma] = \Omega^{-1} m^{-1} = S$

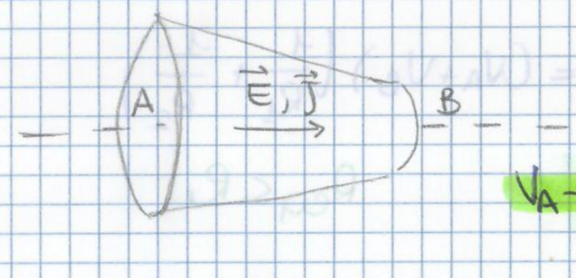
$$\rho(t) = \rho_{20°C}(1+\boxed{\alpha}\Delta t)$$ COEFFICIENTE TERMICO

- se $\alpha>0$ (metalli), ρ aumenta perche' aumentano gli urti con la temperatura
- se $\alpha<0$ (semiconduttori) ρ diminuisce con la temperatura, perche' aumenta il numero di portatori di carica

ρ_0 è il VALORE RESIDUO: dipende dalle impurezze presenti nel materiale quando $T \to 0K$



Nel caso dei SUPERCONDUTTORI, al di sotto di un certo valore di temperatura, la TEMPERATURA CRITICA, la resistività è pari a 0 quindi si hanno cariche in moto anche se $V=0$.



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\,d\vec{l} = \int_A^B \rho\vec{J}\,d\vec{l} = \int_A^B \rho J\,dl =$$

$$(\text{se } J=\text{cost}) = \int_A^B \rho\frac{i}{\Sigma}\,dl = i\int_A^B \frac{\rho}{\Sigma}\,dl$$

E' la RESISTENZA del conduttore (dipende anche dalle caratteristiche geometriche)

$V_A - V_B = iR$ (LEGGE DI OHM)

(PER I CONDUTTORI METALLICI)

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = i \cdot V$$

Se vale Ohm $P = i^2 R = V^2/R$

Il lavoro viene dissipato sottoforma di energia termica (perché aumenta l'energia cinetica).

E' l'**EFFETTO JOULE** - EFFETTO DI RISCALDAMENTO DI UN CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE

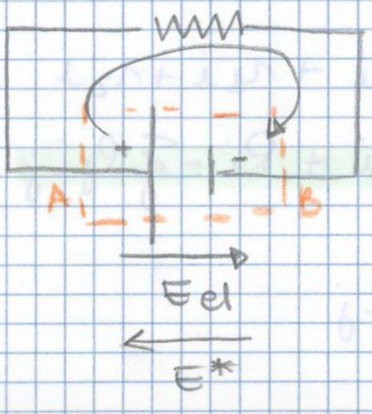
Necessaria per far mettere in moto un e^- $P = \vec{F} \cdot v_d = -|e| E \cdot v_d$

$$P_V = -n|e|\vec{E} \cdot V_d = \vec{J}\vec{E}$$ Potenza per unità di volume

Se vale Ohm $P_V = \rho J^2 = \frac{E^2}{\rho}$

FORZA ELETTROMOTRICE $\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{el} \cdot dl = 0$ se non passa corrente

Si inserisce un ~~gen~~ GENERATORE che è ciò che instaura la differenza di potenziale



$$\mathcal{E} = \oint E dl = \int_A^B E dl + \int_B^A E dl$$

E' solo il campo elettrico che fa fluire le cariche dal potenziale più alto a quello minore.

Bisogna pensare che all'interno del generatore ci sia un altro campo E^* che sia maggiore di quello elettrostatico e di segno opposto che faccia fluire le cariche all'interno

$$|E^*| > |E_{el}|$$

$$\mathcal{E} = \int_A^B E_{el} \cdot d\vec{l} + \int_B^A (E_{el} + E^*) d\vec{l} =$$
$$= \cancel{\oint E_{el} \cdot d\vec{l}} + \int_B^A E^* d\vec{l}$$

E^* non è conservativo perché altrimenti sarebbe nullo

E' la forza elettromotrice che fa fluire le cariche, quindi la corrente

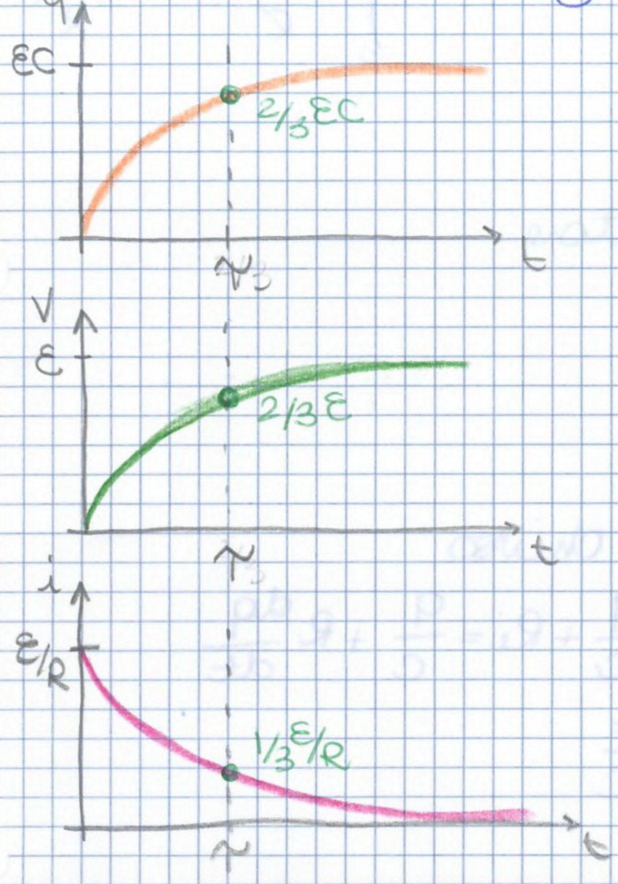
E' IL CAMPO ELETTROMOTORE

$$\int_0^t \frac{R}{dt} = \int_0^q \frac{dq}{\mathcal{E}-q/C}$$

$$\frac{t}{R} = (-C)\ln\left(\mathcal{E}-\frac{q}{C}\right)\Big|_0^q$$

$$-\frac{t}{CR} = \ln\frac{\mathcal{E}-q/C}{\mathcal{E}}$$

$$e^{-t/CR} = \frac{\mathcal{E}-q/C}{\mathcal{E}}$$



$$q = \mathcal{E}C\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

$$V = \frac{q}{C} = \mathcal{E}\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}$$

Tempo caratteristico del sistema

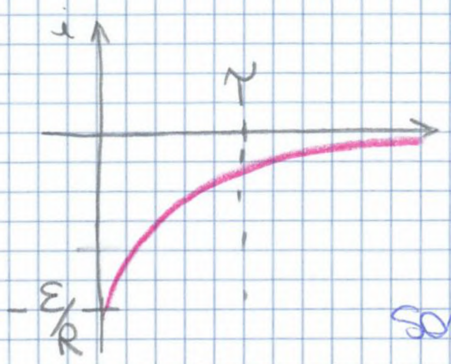
$$\tau = RC$$

$t' = \frac{L}{c} = \frac{1}{3\cdot 10^8} = 0{,}3^{-8}$ s È il tempo impiegato per avere l'informazione a tutto il circuito

Se $R = 10\ \Omega$ e $C = 1\ \mu F$

$RC = 10^{-5}$ s → la variazione della corrente viene sentita immediatamente

È REGIME (QUASI-) STAZIONARIO.



$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{\mathcal{E}\cancel{C}}{R\cancel{C}} e^{-t/RC}$$

Ora il condensatore e' una sorgente di energia, perche' altrimenti non si avrebbe la corrente

$$0 = \frac{q}{C} + Ri$$

$$\frac{q}{C} i\,dt \longleftrightarrow Ri^2 dt$$

l'energia immagazzinata viene dissipata completamente su R e non c'e' più flusso di corrente

NEI CIRCUITI RC (TRANNE CHE NEL TRANSITORIO, CHE DURA POCHE COSTANTI DI TEMPO) NON PUO' ESSERCI IL REGIME DI CORRENTE CONTINUA

Per determinare il flusso di una superficie aperta, basta determinare la linea di contorno

→ **FLUSSO DI SUPERFICI CONCATENATE** FLUSSO CONCATENATO CON UNA LINEA CHIUSA

$$[B] = T = 10^4 G$$

LE AZIONI MAGNETICHE NON SONO ALTRO CHE LA MANIFESTAZIONE DELL'INTERAZ TRA CARICHE ELETTRICHE IN MOVIMENTO

• CARICA IN CAMPO MAGNETICO

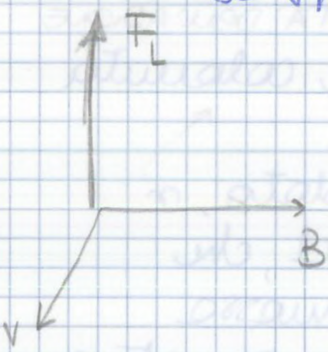
Una carica in moto risente del campo magnetico. E' soggetta alla **FORZA DI LORENTZ**.

UN SISTEMA DI CARICHE IN MOTO GENERA UN CAMPO MAGNETICO

$$\vec{F_L} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$ è ⊥ al piano individuato da $\vec{B}$ e $\vec{v}$

$$|F_L| = qvB\sin\theta$$

Se $v \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{F_L} = 0$ $\quad F_{max} \rightarrow \vec{B} \perp \vec{v}$



E' una forza centripeta: varia la direzione della velocità, ma non il modulo

$$W_L = \int F_L \, ds = \int F_L \, v \, dt = 0 \qquad F_L \perp v$$

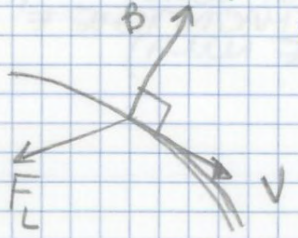
$$W_L = E_{K fin} - E_{K in} = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_{fin}^2 = \frac{1}{2} m v_{in}^2$$

$$v_{fin} = v_{in}$$

$$E_{K fin} = E_{K in}$$ E_K E' COSTANTE

se $\vec{B}$ = unif., $\vec{v} \perp \vec{B}$ $\quad F_L$ è massima

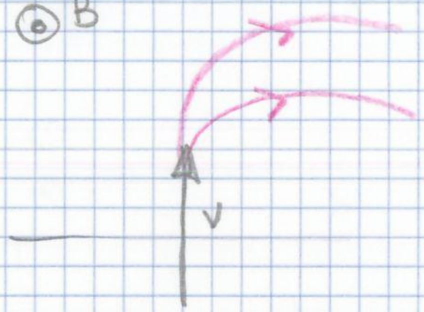


la direzione della velocità varia, ma rimane sullo stesso piano ⊥ a B

$$F_L = q\cancel{v}B = m\frac{v^{\cancel{2}}}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$ R è costante, la carica si muove lungo una circonferenza di moto **CIRCOLARE UNIFORME**

lo SPETTROMETRO DI MASSA utilizza le proprietà della forza di Lorentz per separare isotopi diversi di una sostanza (diverso numero di massa, diverso numero di neutroni).



Si scinde in due fasci separati, perché le masse sono diverse, quindi descrivono traiettorie diverse.

Il campo magnetico terrestre è responsabile delle FASCE DI VAN ALLEN: sono zone intorno alla terra formate da particelle fortemente ionizzate (raggi cosmici) intrappolate dal campo magnetico terrestre, responsabili del fenomeno dell'aurora boreale.

Sugli elettroni (portatori) in moto all'interno di un conduttore su cui agisce un campo magnetico, agisce

$$\vec{F}_L = (-e)(\vec{v}_{th} + \vec{v}_d) \wedge \vec{B}$$

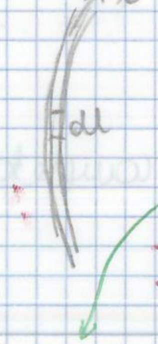
$$dF = n\Sigma dl\,(-e)(\cancel{\vec{v}_{th}} + \vec{v}_d) \wedge \vec{B}$$

PREVALE IL MOTO COLLETTIVO CHE DÀ VITA ALLA CORRENTE ← sono dirette casualmente una rispetto all'altra

$$dF = [n(-e)v_d \wedge \vec{B}]\Sigma dl = \vec{J} \wedge \vec{B}\,\Sigma dl$$

forza per unità di volume $\vec{F}_V = \frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{J} \wedge \vec{B}$

la forza agisce sul corpo del conduttore, perché i portatori agiscono sul reticolo



$J \parallel \hat{u}_n$ $J = cost$

$J = i / \Sigma$

$$dF = \vec{J} \wedge \vec{B}\,\Sigma dl = J\,d\vec{l} \wedge \vec{B}\,\Sigma = i\,d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

NON DIPENDE DAL SEGNO DEI PORTATORI

II FORMULA (O LEGGE FONDAMENTALE) DI LAPLACE

Forza magnetica che si applica su un conduttore filiforme

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DI AMPÈRE (SPIRA - DIPOLO)

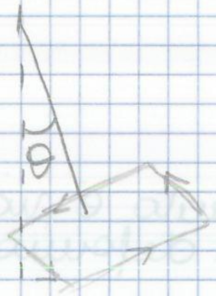
Una spira che racchiude un'area $d\Sigma$, percorsa da una corrente i, equivale a un dipolo magnetico con momento

$$d\vec{m} = i\, d\Sigma\, \hat{u}_n$$

con direzione perpendicolare al piano della spira e verso che coincide con il verso di avanzamento della vite che si avvolge intorno al verso della corrente.

$$[m] = A \cdot m^2$$

Quindi anche la spira si dispone nel verso parallelo a quello del campo magnetico e genera anch'esso un campo magnetico



La spira inizia ad oscillare e il momento meccanico diventa un momento di richiamo.
Per il teorema del momento angolare, il momento meccanico che agisce è uguale al momento di inerzia per l'accelerazione angolare

$$M = I_z \alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \textcircled{-}\vec{m}\,\vec{B}\sin\theta$$

perché di richiamo

$\theta \simeq \sin\theta$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mB\theta = 0$$

OSCILLATORE ARMONICO

$$\omega_c = \sqrt{\frac{mB}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mB}}$$

potrei ricavare B

ENERGIA POTENZIALE MAGNETICA

$$U_m = -\vec{m}\cdot\vec{B} = -mB\cos\theta$$

è minima quando $\theta = 0$

(POSIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE)

$$M = -\frac{dU_m}{d\theta}$$

se $B \neq$ uniforme

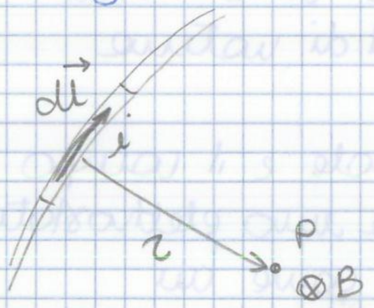
$$\vec{R} \neq 0$$

$$\vec{F} = (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$$

E_h si misura come si misura E del generatore, quando non eroga corrente (misuro ΔV).
In questo modo posso ricavare il numero di portatori e la loro natura. In alcuni metalli per esempio, si hanno le LACUNE, zone di eccesso di carica positiva per l'assenza di un elettrone (che si sposta tra le lacune).
Posso ricavare il campo magnetico con il dispositivo, che viene definito SONDA DI HALL (per campi magnetici stabili o lentamente variabili nel tempo.

. CREAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO

Una carica in moto produce un campo magnetico.



Considero un conduttore filiforme ($\phi << l$) percorso da corrente elettrica
Nel punto P:

$$dB(P) \propto \frac{i\,d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{2}$$

I FORMULA O LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE
(legge sperimentale)

$$d\vec{B}(P) = \underbrace{\boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}}}_{K_m} \frac{i\,d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2}$$

la costante di proporzionalità dipende dal mezzo e il sistema di misura

è perpendicolare a $d\vec{l}$ e $\vec{r}$

ESPRIME IL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UN TRATTO INFINITESIMO DI FILO PERCORSO DA CORRENTE

μ_0 è la PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO

Dato che per $\vec{B}$ vale il principio di sovrapposizione:

LEGGE DI AMPÈRE-LAPLACE
(su tratto finito)

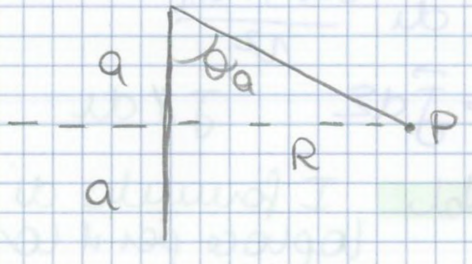
$$\vec{B}(P) = \int_l dB(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_l \frac{d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2}$$

se è chiuso è una circuitazione

$$[\mu_0] = \frac{\Omega \cdot s}{m} = \frac{H}{m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ H/m$$

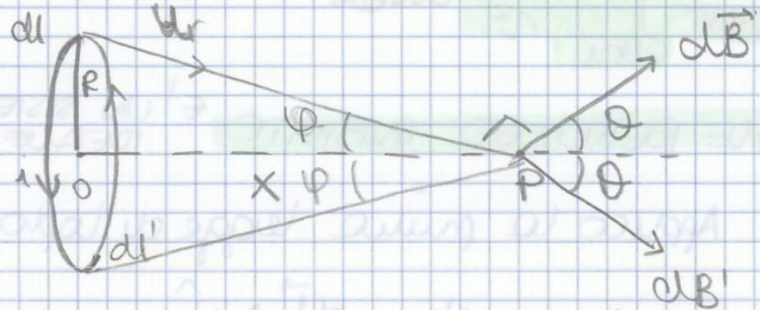
Se il filo ha dimensione finita, P lo si posiziona lungo l'asse:



$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\left(\int_{\theta_a}^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta\right)\hat{u}_\varphi$$

$$\cos\theta_a = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

→ CAMPO MAGNETICO DELLA SPIRA CIRCOLARE



$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2}$$

$$d\vec{B} + d\vec{B}' = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \boxed{(\hat{u}_1 + \hat{u}_2)}$$

le componenti lungo y si annullano

Il verso dipende da quello della corrente

$$\vec{B} = \int d\vec{B} + d\vec{B}' = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{2\cos\theta}{r^2} \int_{\pi R} dl \, \hat{u}_x =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\cancel{\pi}} \frac{\cos\theta}{r^2} \cancel{\pi} R \, \hat{u}_x$$

$$\cos\theta = \sin\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

è massimo avendo $x=0$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} \hat{u}_x$$

lungo l'asse della spira

Se $x \gg R$

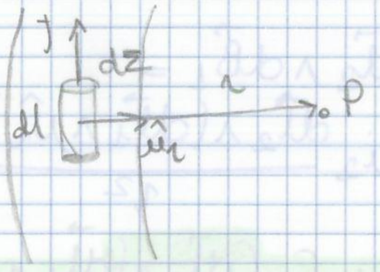
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{x^3} \hat{u}_x = \frac{\mu_0 i 2\pi R^2}{4\pi x^3} u_x =$$

$$= \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi x^3}$$

E' assimilabile al campo elettrico generato da un dipolo elettrico

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left(r^3 (\vec{m} \cdot \hat{u}_n) \hat{u}_n - \vec{m} \right)$$

CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UN PORTATORE



$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \hat{u}_r}{r^2} dV_d$$ Laplace generale

$$\vec{J} = n^+ q^+ \cdot \vec{v}_d{}^+$$

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} n q \frac{\vec{v}_d \wedge \hat{u}_r}{r^2} dV_d =$$

numero di portatori $$= \frac{\mu_0}{4\pi} \boxed{dN} q \frac{\vec{v}_d \wedge \hat{u}_r}{r^2}$$

campo magnetico generato da un portatore $$\vec{B} = \frac{d\vec{B}(P)}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v}_d \wedge \hat{u}_r}{r^2} =$$ moltiplico e divido per ε_0

$$= \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0} \varepsilon_0 q \frac{\vec{v}_d \wedge \hat{u}_r}{r^2}} =$$

È una formula generale non dipende da dove si muove il portatore

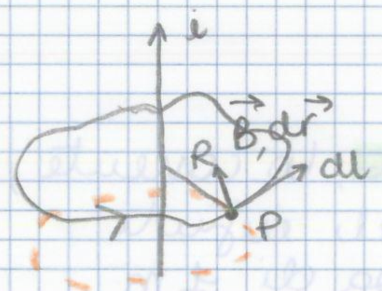
$$= \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v}_d \wedge \boxed{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E}$$

Anche se è un campo elettrostatico, lo considero perché $v_d << c$

Quindi con una carica in moto, campo magnetico e campo elettrico non possono essere considerati separatamente.

La LEGGE DI AMPÈRE mette in relazione il campo magnetico con le sue sorgenti (corrente, composta da cariche in moto), con distribuzioni simmetriche di corrente

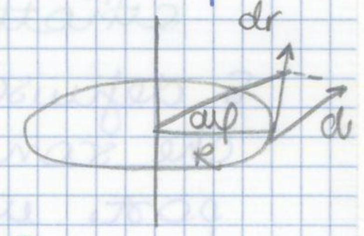
vale solo in regime stazionario



$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint B dr =$$ $dr = r d\varphi$

$$= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{\cancel{r}} \cancel{r} d\varphi =$$

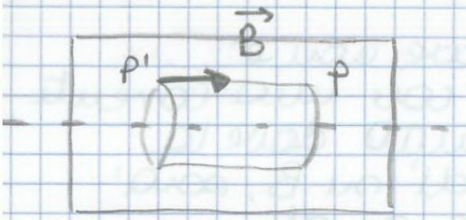
$$= \frac{\mu_0 i}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} = \mu_0 i$$



la circuitazione lungo una linea chiusa non dipende dalla forma

È LA SOMMA DELLE CORRENTI CONCATENATE

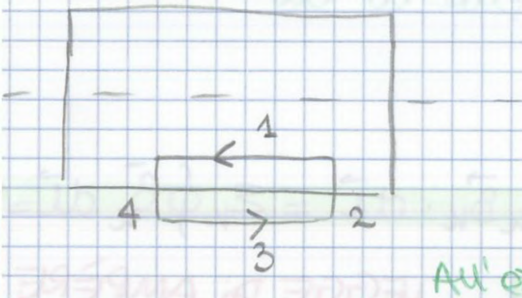
Se la circuitazione avesse verso opposto $$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = -\mu_0 i$$



Considero una superficie coassiale al solenoide

$\phi(\vec B) = 0$

In P e P', $\vec B$ è parallelo all'asse



$$\oint \vec B \cdot d\vec l = \int_1 \vec B \cdot d\vec l + \cancel{\int_2 \vec B \cdot d\vec l} + \cancel{\int_3 \vec B \cdot d\vec l} + \cancel{\int_4 \vec B \cdot d\vec l} =$$

$\vec B \perp d\vec l$

All'esterno del solenoide $\vec B = 0$

$$= Bl = \mu_0 \textcircled{N} i$$

numero di spire

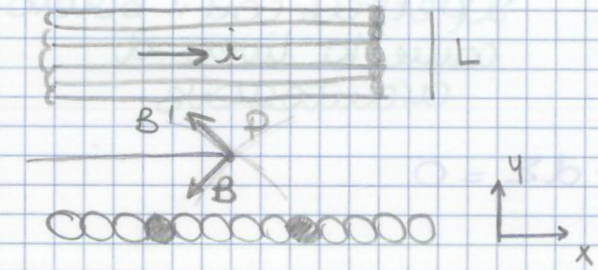
$$B = \frac{\mu_0 N i}{l} = \mu_0 \boxed{n} i$$

numero di spire per unità di lunghezza

Non dipende dalle dimensioni del solenoide

$$\vec B = \mu_0 i n \hat{u}_x$$

N FILI SU SUPERFICIE PIANA INFINITA



N, L molto grandi

$|B| = |B'|$ per Biot-Savart

Proiettando i due vettori, sull'asse x, $\vec B$ e $\vec B'$ si sommano, mentre sull'asse y si annullano perché sono uguali e contrari.

Nel semispazio superiore $\vec B$ è parallelo al piano sul quale giacciono i fili, il verso dipende dalla corrente. Stesso caso per il semispazio inferiore, ma il verso è opposto

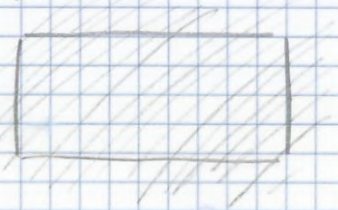
• il campo magnetico non e' conservativo

$\vec{B} = \text{rot}\,\boxed{\vec{A}}$ è il POTENZIALE VETTORE
E' noto a meno di un vettore di un campo scalare

$\vec{A'} = \vec{A} + \text{grad}\,\vec{u} \longrightarrow \text{rot}\,\vec{A'} = \text{rot}\,\vec{A}$

• MATERIALE IN CAMPO MAGNETICO

Considero un solenoide infinito e lo riempio con una sostanza omogenea, isotropa e infinita (no effetti di bordo)



B_0 senza sostanza
B con sostanza
} la direzione non cambia

$$\frac{B}{B_0} = \boxed{K_m}$$ PERMEABILITA' MAGNETICA RELATIVA del materiale: dipende dal tipo di sostanza inserita

$$B = B_0 K_m$$

$$B - B_0 = B_0 (K_m - 1) = B_0 \chi_m$$

$$B = B_0 + B\chi_m = \mu_0 i n + \boxed{\mu_0 \chi_m i n}$$

E' un secondo solenoide coassiale al primo (nuovo sistema di spire con corrente $i\chi_m$, CORRENTE DI MAGNETIZZAZIONE)

$$B = \mu_0 i n (1 + \chi_m) \underset{\text{NO!}}{=} \boxed{\mu_0 \chi_m} i n$$

μ PERMEABILITA' MAGNETICA ASSOLUTA

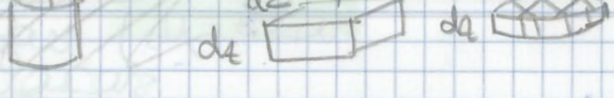
$\mu = \mu_0 K_m$

VETTORE MAGNETIZZAZIONE $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$

RAPPRESENTA IL MOMENTO MAGNETICO PER UNITA' DI VOLUME

• MAGNETIZZAZIONE

B uniforme → M e' costante



posso immaginare una spira nastriforme attorno al parallelepipedo

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{J}$$

INTENSITA' DI CAMPO MAGNETICO

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$[\vec{H}] = A/m$

$\text{rot}\, \vec{H} = \vec{J}$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i$$

SECONDA LEGGE DI MAXWELL PER LA MAGNETOSTATICA
(in un materiale)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Ma non è sufficiente per sapere tutto

EQUAZIONE DI STATO PER IL MEZZO MAGNETIZZATO

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$[M] = A/m = [H]$

H e M sono tra loro paralleli

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 K_m \vec{H} = = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\frac{\vec{M}}{\chi_m} + \vec{M}\right) = \mu_0 \left(\frac{1 + \chi_m}{\chi_m}\right) \vec{M} = \mu_0 \frac{K_m}{K_m - 1} \vec{M}$$

COMPORTAMENTO MAGNETICO

In base al comportamento in campo magnetico, i materiali si distinguono in:

- MATERIALI DIAMAGNETICI $\vec{M}$ E' OPPOSTO A $\vec{B}$

  $\chi_m < 0$ $K_m < 1$

  $-10^{-5} \div -10^{-8}$

  Non dipende dalla temperatura

  E / OSTANTE / SONO / RESPINTE / DAL SOLENOIDE

  _acqua _rame _oro _azoto

  _SUPERCONDUTTORI (diamagneti perfetti)

  $\chi_m = -1$ $K_m = 0$

- MATERIALI PARAGNETICI $\vec{H}$ CONCORDE A $\vec{B}$

  SONO ATTRATE DAL SOLENOIDE

  $\chi_m > 0$ $K_m > 1$

  $10^{-5} - 10^{-8}$

  Dipende dalla temperatura

  costante di Curie

  $$\chi_m(T) = \frac{C \rho}{T}$$

  densità

  PRIMA LEGGE DI CURIE

- MATERIALI FERROMAGNETICI $\vec{M}$ CONCORDE A $\vec{B}$ MA CON RELAZIONE NON LINEARE NE' UNIVOCA

  ONO / ATTRATTE / FORTEMENTE

  $\chi_m \gg 0$ $K_m \gg 1$

  $10 \div 10^5$

  RIMANGONO MAGNETIZZ

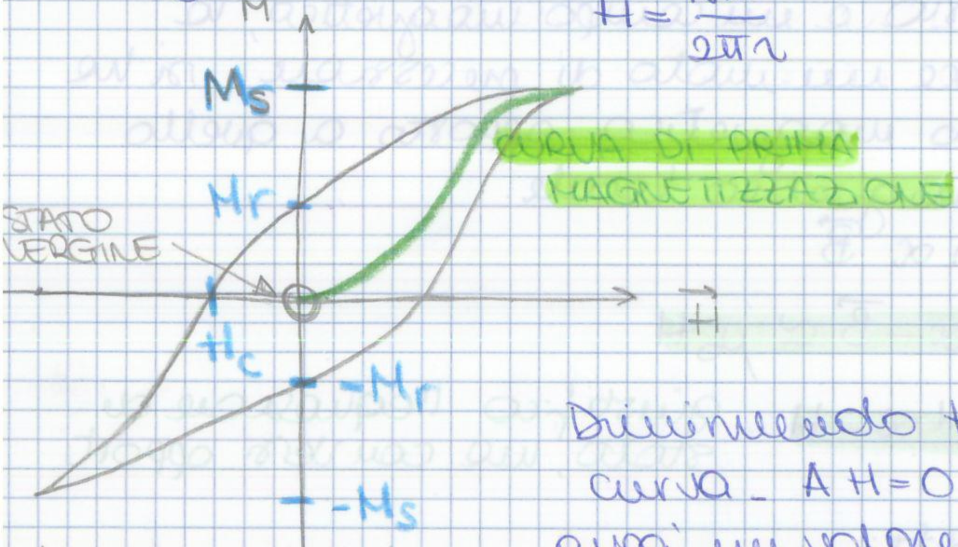
  _ferro _cobalto _nichel _leghe

Nei ferromagneti:
entra in gioco lo spin, in modo prevalente:

$m_J \neq 0$ K_m e χ_m NON SONO FUNZIONI UNIVOCHE

Due atomi vicini tendono ad avere i momenti magnetici orientati nello stesso modo.
Si ha una magnetizzazione (MAGNETIZZAZIONE DI SATURAZIONE) molto intensa localmente.
Si ha una struttura a DOMINI DI WEISS, separati tra loro dalle ~~pare~~ PARETI DI BLOCK (macroscopicamente $\vec{M} = 0$).
Considero un solenoide toroidale, in campo magnetico:

$$\vec{H} = \frac{Ni}{2\pi r}$$

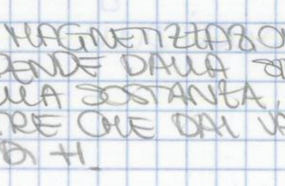


E' IL DIAGRAMMA DI STATO DEI FERROMAGNETI

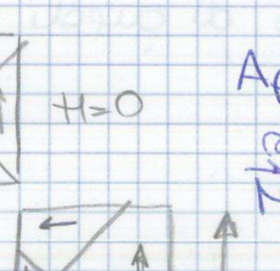
Diminuendo H, cambia la curva. A H=0, M ≠ 0 ma avrà un valore pari a M_r, la MAGNETIZZAZIONE RESIDUA.
Per annullare la magnetizzazione, bisogna invertire la corrente.
H_c è il CAMPO COERCITIVO che annulla la magnetizzazione.
Dopo che raggiunge il valore di $-M_s$, risale passando per $-M_r$ e ritorna a M_s

LE RELAZIONI NON SONO NE' LINEARI NE' UNIVOCHE

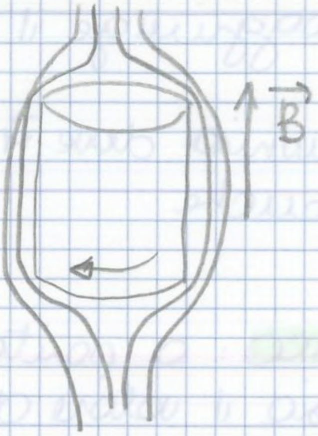
LA MAGNETIZZAZIONE DIPENDE DALLA STORIA DELLA SOSTANZA, OLTRE CHE DAL VALORE DI H.



Applico un campo $\vec{H}$, si allarga il dominio dove $\vec{M} \parallel \vec{H}$, mentre dove è antiparallelo, tende ad annullarsi.

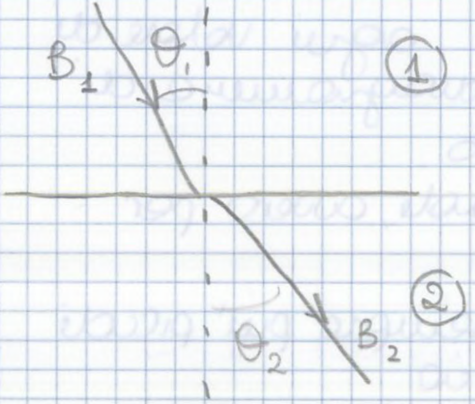


senza attraversarlo _

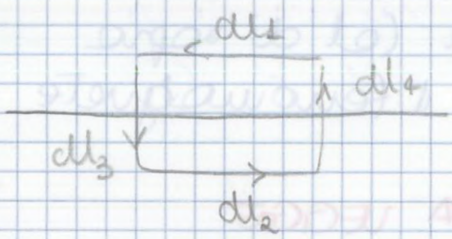


EFFETTO MEISSNER: un tubo di ~~super~~conduttori funzionerà allo stesso modo e quindi come schermo magnetico

· DUE MEZZI DIFFERENTI A CONTATTO



Sulla superficie di separazione, $J_{s,m} \neq 0$ perché contribuiscono le correnti di superficie



$$B_{1n} = B_{2n} \quad Ⓐ$$

$$B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 J_{s,m}$$

$$dl_3 , dl_4 << dl_1 , dl_2$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 dl_1 + H_2 dl_2 + H_3 \cancel{dl_3} + H_4 \cancel{dl_4}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0$$

LA COMPONENTE TANGENZIALE DI H E' CONTINUA

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$B = \mu H$$

$$\frac{B_{1t}}{\cancel{\mu_0} K_{m_1}} = \frac{B_{2t}}{\cancel{\mu_0} K_{m_2}} \quad Ⓑ$$

$$\begin{cases} B_1 \cos\theta_1 = B_2 \cos\theta_2 \\ \dfrac{B_1 \sin\theta_1}{K_{m_1}} = \dfrac{B_2 \sin\theta_2}{K_{m_2}} \end{cases}$$

$$\frac{tg\,\theta_1}{K_{m_1}} = \frac{tg\,\theta_2}{K_{m_2}}$$

- se sia il circuito che la sorgente del campo sono fermi, ma varia K_m.
- se il circuito e la sorgente di $\vec{B}$ sono fermi, K_m e' costante e $\vec{B}$ varia perche' varia la corrente

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \frac{d\varphi(\vec{B})}{dt}$$

la variazione di campo magnetico genera un campo elettrico (non conservativo ne' elettrostatico)

$$\int_\Sigma \text{rot}\,\vec{E}_i \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma$$

$$\int_\Sigma \text{rot}\,\vec{E}_i \cdot n \cdot d\Sigma = -\int_\Sigma \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma$$

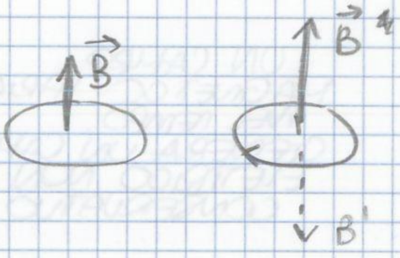
$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{-e} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\int_\Sigma \text{rot}\left(\vec{E}_i + \frac{d\vec{B}}{dt}\right) \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{B}}{dt}$$

VALE IN QUALSIASI MEZZO

LEGGE DI LENZ Il campo elettrico indotto e la forza elettromagnetica indotta si oppongono alla causa ($\vec{B}$) che li ha indotti

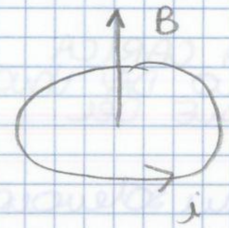


Se $\vec{B}$ aumenta nel tempo e la spira non cambia dimensioni, aumenta anche il flusso concatenato → $\frac{d\varphi(\vec{B})}{dt} > 0$

Si crea una corrente indotta tale da creare un campo $\vec{B}'$ che si oppone all'aumento di $\vec{B}$ (e quindi ha verso opposto). Si crea un secondo flusso concatenato opposto all'altro che rallenta la prima variazione di campo.
Se invece $\vec{B}$ diminuisce, anche il flusso diminuisce. Si crea una corrente indotta che deve opporsi alla diminuzione del campo magnetico, quindi crea un campo B' con stesso verso del primo.

variare il flusso del campo magnetico. la barra è soggetta a una forza che si oppone al verso di movimento.

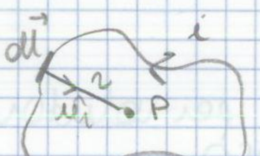
.FENOMENO AUTOINDOTTO



Considero una spira percorsa da corrente: si genera un campo magnetico. Se la corrente cambia valore, anche il campo magnetico cambia. Si ha un flusso concatenato.

$$\varphi(B) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma$$

Quindi si ha una corrente indotta che si va a sommare all'altra. Si genera anche una FORZA ELETTROMOTRICE AUTOINDOTTA (è tutto indotto dalla spira stessa)



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2}$$

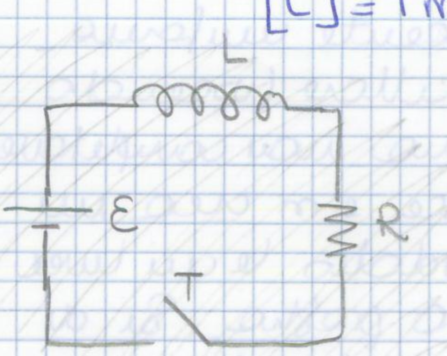
$$\varphi(\vec{B}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_\Sigma \frac{d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2} \hat{u}_n \cdot d\Sigma = L i$$

è l'(AUTO)INDUTTANZA (non dipende da i) $L>0$

L'INDUTTORE IMPEDISCE ALLA CORRENTE DI VARIARE ISTANTANEAMENTE

$$L = \frac{\varphi(\vec{B})}{i}$$

$$[L] = Tm^2 = Wb = \frac{Vs}{A} = \Omega \cdot S = H$$



Sono in un dielettrico.

$t<0$ $i=0$

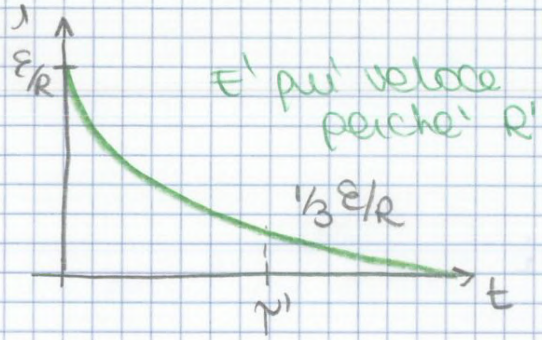
$t=0$ T chiuso

Con la corrente si forma un fenomeno di autoinduzione

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = Ri$$

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_L = -\frac{dLi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = Ri$$



la corrente autoindotta ora è positiva, perché si oppone alla diminuzione.
E' l'EXTRACORRENTE DI APERTURA.

Per far circolare l'extracorrente, c'è bisogno di energia che non fornisce più il generatore.

Con il tasto chiuso

$$\underbrace{\varepsilon i\,dt}_{\text{lavoro erogato dal generatore}} = \underbrace{L\frac{di}{\cancel{dt}}\, i\, \cancel{dt}}_{\text{lavoro per portare la corrente da 0 a } i_\infty} + Ri^2dt$$ } effetto Joule

$$\int_0^t \varepsilon i\,dt = \int_0^i L i\,di + \int_0^t Ri^2dt$$

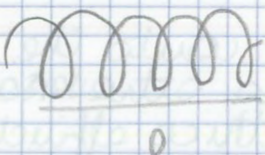
$$U_L = \frac{1}{2} L i^2$$ ENERGIA INTRINSECA DEL CIRCUITO (quella immagazzinata)

Con il tasto aperto

$$0 = \int_i^0 L i\,di + \int_0^t Ri^2dt$$

$$\frac{1}{2} L i^2 = \int_0^t Ri^2dt$$ U_L è tutta dissipata su R

Considero un solenoide:



$$\vec{B} = \mu_0 i n \hat{u}_x$$

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2$$

$$L = \frac{\Phi(\vec{B})}{i} = \frac{N\Phi_{sp}(\vec{B})}{i} = \frac{N\int_\Sigma \vec{B}\hat{n}\,d\Sigma}{i} =$$ superficie parallela all'asse

$$= \frac{NB\Sigma}{i} = \frac{N\mu_0 \cancel{i} \frac{N}{l}\Sigma}{\cancel{i}} = \frac{\mu_0 N^2 \Sigma}{l}$$

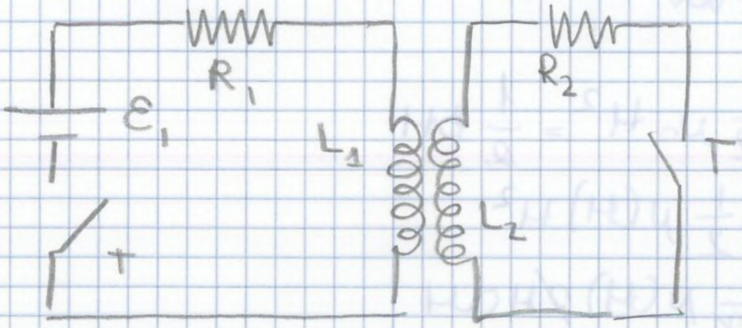
Moltiplico e divido per μ_0 e l

$$U_m = \frac{1}{2}\underbrace{\mu_0^2 \frac{N^2}{l^2}}_{n^2}\Sigma\frac{i^2}{\mu_0} l = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\boxed{\Sigma l}$$ volume

B^2

.MUTUA INDUZIONE

la variazione di flusso del campo magnetico in un circuito genera una forza elettromotrice indotta in un secondo circuito.



$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint \frac{d\vec{l}_1 \wedge \hat{u}_r}{r^2}$$

$$\varphi_2(B_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \int_{\Sigma_2} \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \hat{u}_r}{r^2} \hat{u}_n \cdot d\Sigma =$$

$$= M_{1,2}\, i_1$$

COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE ∝ geometria dei circuiti e la loro distanza

$$\varphi_1(B_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \int_{\Sigma_1} \oint_2 \frac{d\vec{l}_2 \wedge \hat{u}_r}{r^2} = M_{2,1}\, i_2$$

$$M_{1,2} = M_{2,1} = M \qquad [H]$$

Se $M \neq 0$, si hanno CIRCUITI ACCOPPIATI

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{L_1} + \mathcal{E}_{M_1} = R_1 i_1$$

$$\mathcal{E}_{M_2} + \mathcal{E}_{L_2} = R_2 i_2$$

$$\mathcal{E}_{M_1} = -\frac{d\varphi_1(\vec{B}_2)}{dt} = -\frac{d(Mi_2)}{dt} = -M\frac{di_2}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{M_2} = -\frac{d\varphi_2(\vec{B}_1)}{dt} = -\frac{d(Mi_1)}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$$

la corrente nel secondo circuito scorre solo per la mutua induzione

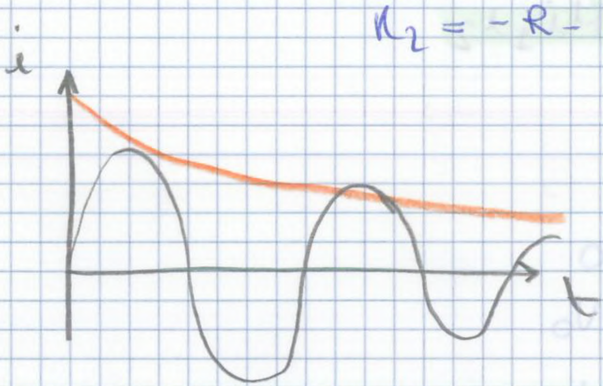
$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 - L_1\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \\ -\dfrac{M di_1}{dt} - L_2\dfrac{di_2}{dt} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Passa energia da un circuito all'altro

- soluzione complessa $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

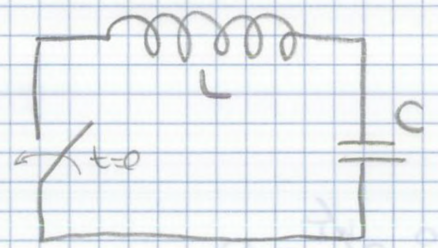
$$K_1 = -R + i\omega_0'$$
$$K_2 = -R - i\omega_0'$$



$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t}e^{i\omega_0' t} + Be^{-\frac{R}{2L}t}e^{-i\omega_0' t} =$$
$$= A' e^{-R/2L\, t} \sin(\omega_0' t + \varphi)$$

SMORZAMENTO DEBOLE
(il termine di smorzamento dipende da R)

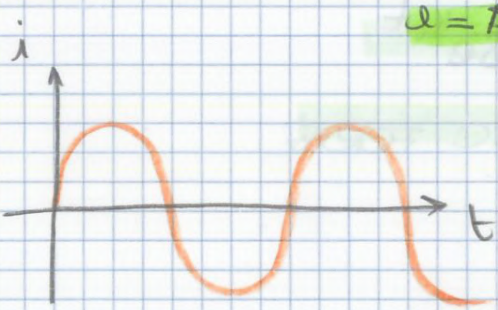
CIRCUITO LC



$$i(t=0) = 0$$
$$V_C(t=0) = V_0$$
$$q_0 = V_0 C$$
$$\mathcal{E}_L = V_C$$
$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0$$
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0 \rightarrow \text{Oscillatore armonico}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$i = A\sin(\omega_0 t + \varphi') \qquad \varphi' = 0$$



CIRCUITO OSCILLANTE

$$q = \int i\, dt = -\frac{A}{\omega_0}\cos\omega_0 t$$

t=0 $\quad q_0 = -\frac{A}{\omega_0} \longrightarrow A = -q_0\omega_0$

$$i = -q_0\omega_0 \sin\omega_0 t$$
$$q = q_0 \cos\omega_0 t$$

Si può ipotizzare che la variazione di un campo elettrico può generare un campo magnetico:

$$\text{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \longrightarrow \rho = \varepsilon_0 \,\text{div}\vec{E}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \text{div}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\text{div}\vec{J} = -\text{div}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

E' un vettore SEMPRE solenoidale

$$\text{div}\boxed{\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)} = 0$$

→ E' la densità di corrente di spostamento

LEGGE DI AMPÈRE MAXWELL

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

In regime non stazionario, le sorgenti di $\vec{B}$ sono sia le correnti di conduzione che le variazioni temporali del campo elettrico

se le variazioni sono molto lente, suppongo di essere ancora in regime stazionario

$$\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_{TOT}$$

$$\underbrace{\int_{\Sigma_1} \vec{J}_{TOT}\, \hat{n} \cdot d\Sigma}_{i} + \int_{\Sigma_2} \vec{J}_{TOT}\, \hat{n} \cdot d\Sigma = 0$$

CORRENTE DI SPOSTAMENTO i_s

$$i_s = \int \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi(\vec{E})}{\partial t}$$

Nella materia: $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} \longrightarrow \text{div}\vec{D} = \rho$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \text{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div}\vec{J} = -\text{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div}\boxed{\left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right)} = 0$$

E' un vettore sempre solenoidale

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) + \mu_0 J_m$$

Si devono sommare anche le correnti di magnetizz.

LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = q\vec{E} \\ \vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})\end{array}\right\} \quad F_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

FORZA DI LORENTZ

(carica in campo magnetico)

si collega l'elettromagn. alla meccanica

$$\left.\begin{array}{l}u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\end{array}\right\} \quad u = \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E} + \frac{1}{2}\frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

energia del campo elettromagnetico

$$\cancel{\frac{\partial B_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial z}} = \mu\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0}$$

$$\cancel{\frac{\partial B_x}{\partial z}} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \longrightarrow -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\varepsilon \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial y}} = \mu\varepsilon \frac{\partial E_z}{dt} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\varepsilon \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial t}}}$$

$\rightarrow$ $E_x = cost = 0$ $\quad$ $B_x = cost = 0$

le onde elettromagnetiche sono ONDE TRASVERSALI, ovvero oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione.

Ipotizzo che $\vec{E}$ sia diretto lungo z: $\vec{E} = E_z u_z$ $\quad E_y = 0$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \qquad B_z = cost = 0$$

→ $\vec{B}$ è diretto lungo y.

→ in un'onda elettromagnetica $B \perp E$.

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

→ Derivo tutto rispetto a ∂x $\quad \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t}$

Derivo tutto rispetto a ∂t $\quad \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad \mu\varepsilon = \mu_0 \varepsilon_0 \kappa \kappa_m = \frac{\kappa \kappa_m}{c^2}$$

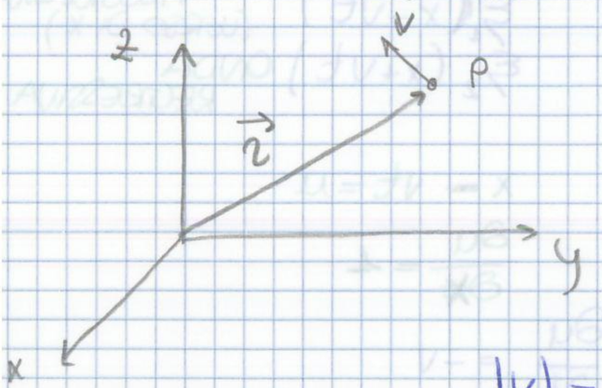
(NATURA ONDULATORIA DELLA LUCE) $\quad c^2 = \dfrac{\kappa_m \kappa}{\mu\varepsilon} = \dfrac{\kappa_m \kappa}{v^2}$ $\quad$ È la velocità dell'onda nel mezzo

$$v^2 = \frac{c^2}{\kappa_m \kappa} \longrightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\kappa_m \kappa}}$$

$$\sqrt{\kappa} \simeq \boxed{n} = \sqrt{\underset{\simeq 1}{\kappa_m} \kappa} = \frac{c}{v}$$ INDICE DI RIFRAZIONE

$$\xi = \xi_0 \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\cancel{2\pi}}{T}\cdot\frac{\lambda}{\cancel{2\pi}} = \lambda f$$



Caso in cui l'onda non si propaga lungo l'asse

$\vec{k}$ è il VETTORE D'ONDA

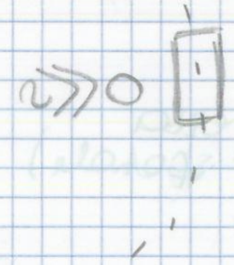
$$|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\xi = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) =$$
$$= \xi_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

Il FRONTE D'ONDA è una qualunque superficie dove l'onda ha fase costante.

Il RAGGIO LUMINOSO è la retta perpendicolare al fronte d'onda in un determinato punto, che indica in quel punto, la direzione di propagazione dell'onda.

Se la sorgente è puntiforme ci si aspetta che l'onda si propaghi uniformemente nello spazio: il fronte d'onda è sferico e il raggio luminoso coincide con il raggio della superficie.



B e E decrescono con la distanza dall'origine.

Il raggio di curvatura tende a ∞.

Posso approssimare il fronte d'onda a una superficie piana.

Qualunque onda può essere scritta come somma o integrale di onde armoniche. (SONO ONDE PERIODICHE)

TEOREMA DI FOURIER $f(t) = a_0 + \sum_1^\infty (a_m \sin m\omega t + b_m \cos m\omega t)$

$$g(t) = \int_0^\infty (a(\omega)\sin\omega t + b(\omega)\cos\omega t)\,d\omega$$

separa lo spazio in cui si trovano le sorgenti dal punto P, è noto, in ogni punto della superficie il valore della perturbazione ed è quello della sua derivata normale (nella direzione perpendicolare alla superficie nel punto P).

PRINCIPIO DI HUYGENS-FRESNEL

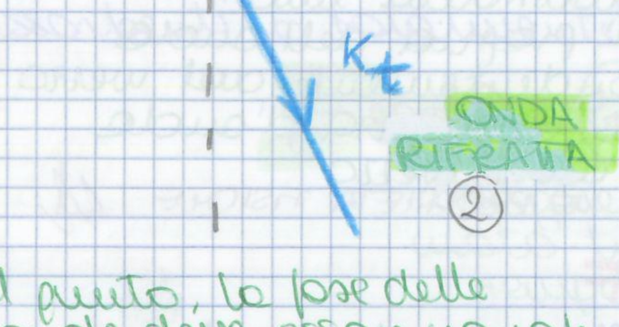
Quindi ogni punto del fronte d'onda può diventare sorgente di un'onda sferica secondaria con ampiezza proporzionale a quella dell'onda primaria, all'area della superficie da cui è emessa e all'angolo tra la direzione della propagazione dell'onda secondaria e la direzione dell'onda primaria (tramite il **FATTORE DI OBLIQUITÀ** $f(\theta)=\frac{1+\cos\theta}{2}$)

la perturbazione in un determinato punto P può essere vista come lo sviluppo dell'onde secondarie che raggiungono il punto.

Si giustificano i fenomeni di **RIFLESSIONE**, **RIFRAZIONE**, **INTERFERENZA** e **DIFRAZIONE**.

• RIFLESSIONE - RIFRAZIONE

È un'onda piana e armonica



→ se la superficie è piana, anche l'onda riflessa e l'onda rifratta sono piane

$$\xi_i = \xi_{0i}\cos(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$\xi_r = \xi_{0r}\cos(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$\xi_t = \xi_{0t}\cos(\vec{k}_t\cdot\boxed{\vec{r}}-\omega t)$$

posizione del punto in cui l'onda incide sulla superficie

Nel punto, la fase delle tre onde deve essere uguale

$$\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\cancel{\omega t}=\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\cancel{\omega t}=\vec{k}_t\cdot\vec{r}-\cancel{\omega t}$$

• INTERFERENZA

E' UN FENOMENO STAZIONARIO, FUNZIONE DELLA POSIZIONE

Si ha quando due onde elettromagnetiche (o qualunque altro fenomeno ondulatorio) si sovrappongono: la risultante non è la somma delle due, si ha una redistribuzione di energia.

Condizioni:

SI HA SOLO LA SOVRAPPOSIZIONE SE IL COMPORTAMENTO COMPLESSIVO DELLE SORGENTI NON NE MODIFICA QUELLO DI UNA

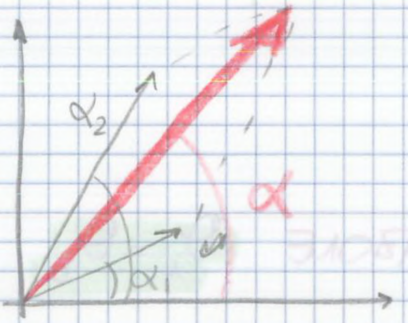
- ONDE ISOFREQUENZIALI
- DIFFERENZA DI FASE che si mantiene costante (ONDE COERENTI)
- stessa direzione di oscillazione

$$\xi_1 = \xi_{01}\cos(k_1 r_1 - \omega t + \varphi_1)$$
$$\xi_2 = \xi_{02}\cos(k_2 r_2 - \omega t + \varphi_2)$$

$$k_1 \cdot r_1 + \varphi_1 = -\alpha_1$$

FASE DELL'ONDA dipende dalla fase iniziale e il percorso

$$k_2 \cdot r_2 + \varphi_2 = -\alpha_2$$



$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\xi_{0R}^2 = \xi_{01} + \xi_{02} - 2\xi_{01}\xi_{02}\cos(\pi - \alpha) =$$
$$= \xi_{01}^2 + \xi_{02} + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\alpha$$

$$I = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta}_{\text{termine interferenziale}}$$

$\delta \neq cost$

$$\langle\delta\rangle = \langle\cos\delta\rangle = 0$$
$$I = I_1 + I_2$$

$\delta = 2m\pi$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

INTERFERENZA COSTRUTTIVA (ONDE IN FASE)

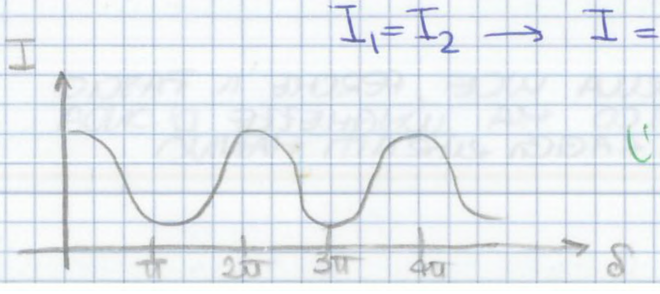
$$I_1 = I_2 \rightarrow I = 4I_1$$

se $\delta = (2m+1)\pi$

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

INTERFERENZA DISTRUTTIVA (ONDE IN OPPOSIZIONE DI FASE)

$$I_1 = I_2 \rightarrow I = 0$$



l'interferenza si studia su tempi dell'ordine di 10^{-8} s

Sull' ultimo schermo compare lo **SPETTRO DI INTERFERENZA** (frange $\overset{\text{MAX.}}{\text{chiare}}$ e $\overset{\text{MIN}}{\text{scure}}$)

$$\sin\theta \sim \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{L}$$

Massimo $y = \frac{m\lambda}{d} L$

Minimo $y = (2m+1)\frac{\lambda}{2d} L$

$$\delta = (k_2 r_2 - k_1 r_1) = n_2 k_0 r_2 - n_1 k_0 r_1 =$$

$$= n(r_2 - r_1)k_0 = (nr_2 - nr_1)k_0$$

cammino ottico

$$n d \sin\theta\, k_0 \begin{cases} 2m\pi \\ (2m+1)\pi \end{cases}$$

$$n\frac{2\pi}{\lambda_0} d\sin\theta \begin{cases} 2m\pi \to nd\sin\theta = m\lambda_0 \\ (2m+1)\pi \to nd\sin\theta = (2m+1)\lambda_0/2 \end{cases}$$

Se si hanno N fenditure, si hanno N sorgenti coerenti

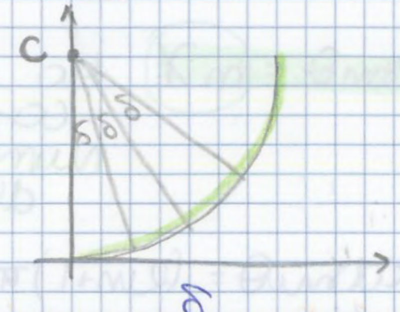
$$L >> \boxed{d(N-1)}$$

→ distanza tra due sorgenti

distanza tra la prima e l'ultima

differenza di cammini $(r_2 - r_1)n = nr_2 - nr_1 = nd\sin\theta$

$$\delta = \underset{k}{k_0 n}\, d\sin\theta$$



sono triangoli isosceli

$$\xi_{0_1} = 2\rho\sin\frac{\delta}{2}$$

$$\xi_{0R} = 2\rho\sin N\frac{\delta}{2}$$

AMPIEZZA DEL MASSIMO PRINCIPALE

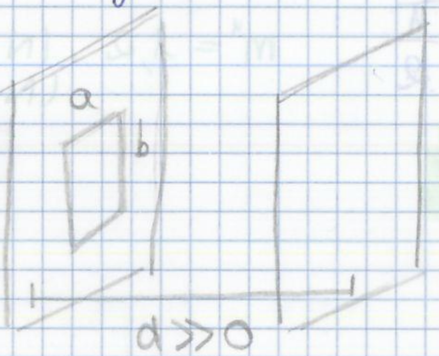
$$\Delta \sin\theta = 2\frac{\lambda}{Nd}$$

Vedi libro
per verso diverso

DIFRAZIONE

si ha quando un'onda incontra una fenditura o un ostacolo con dimensione comparabile alla lunghezza d'onda.
l'interferenza delle onde secondarie che si originano dal fronte d'onda primario creano lo SPETTRO DELLA DIFRAZIONE.
Con la diffrazione, l'onda secondaria non ha per forza la direzione dell'onda primaria.

Nel FENOMENO DELLA DIFRAZIONE DI FRAUNHOFER, l'onda primaria è un'onda piana, quindi si può ipotizzare che il fronte d'onda è piano, quindi lo sono anche le onde secondarie.
(Invece nella DIFRAZIONE DI FRESNEL i fronti d'onda possono essere [illegible] non piani e le distanze tra gli schermi e la sorgente possono non essere molto grandi).



$$dE = \frac{A\, d\Sigma\, \boxed{f(\theta)}}{\boxed{r}}$$

r: distanza dal fronte d'onda

f(θ): angolo tra direz. onda primaria e direzione onda secondaria
↓
trascurabile se < 30°

$$f(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

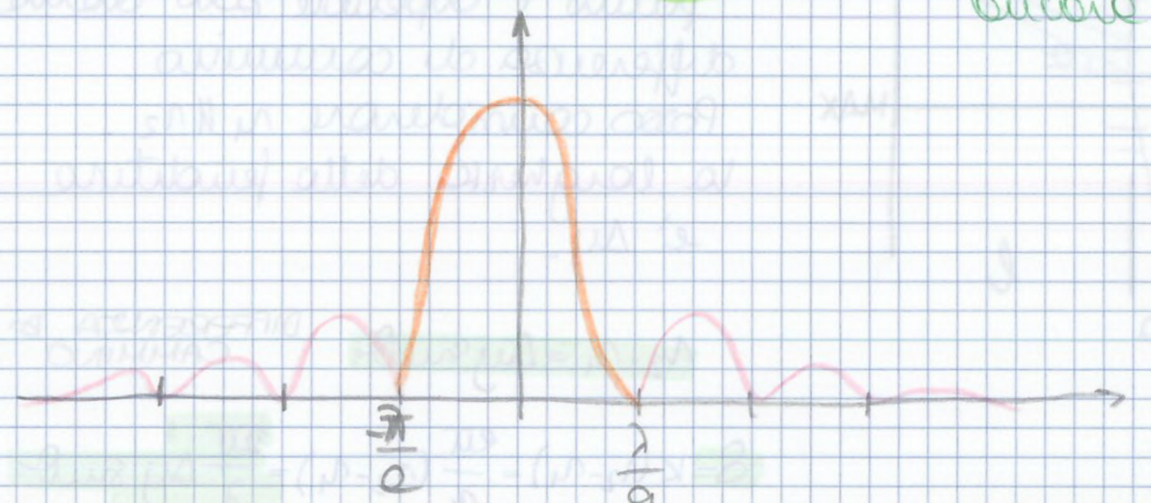
Ipotizzo che il fronte d'onda primario sia complanare al piano della fenditura rettilinea. La direzione di propagazione delle onde secondarie è perpendicolare al piano e avranno stessa fase.

Massimi dell'ordine n

$$\frac{\cancel{\pi} a \sin\theta}{\lambda} = (2m'+1)\frac{\cancel{\pi}}{2}$$

$$\sin\theta = (2m'+1)\frac{\lambda}{2a}$$

$m' = -3, -2, \cancel{0}, 1, 2$
(valori non ancora considerati)



Il massimo centrale è detto anche IMMAGINE DELLA FENDITURA

ampiezza massimo centrale

$$\Delta\sin\theta = \frac{2\lambda}{a}$$

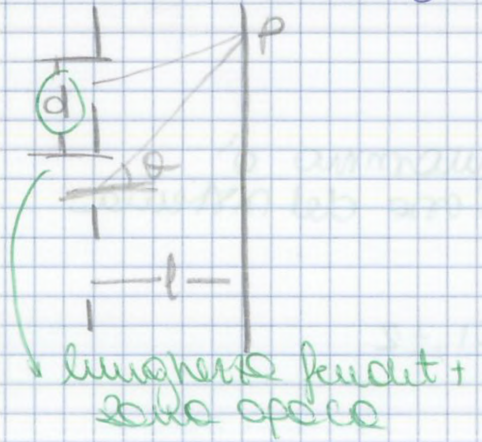
$\lambda \ll a$ non si vede tutta l'intensità

$\lambda = a$ i minimi si formano a distanza infinita

$\lambda \gg a$ si ha un chiarore diffuso (non si distinguono i minimi)

· RETICOLO DI DIFRAZIONE

E' un sistema di N fenditure (rettangolari) per unità di lunghezza



Si hanno N sorgenti coerenti che subiscono il fenomeno dell'interferenza

$Nd \ll l$

$$I = I_1\left(\frac{\sin\frac{N\pi d\sin\theta}{\lambda}}{\sin\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}}\right)^2$$

$$I_1 = I_{max}\left(\frac{\sin\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\right)^2$$

CAMPO ELETTRICO

LEGGE DI COULOMB $\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{u}_r$

CAMPO ELETTRICO $\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$

TENSIONE ELETTRICA $V = \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$

LAVORO ELETTRICO $W = qV$

FORZA ELETTROMOTRICE $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$

POTENZIALE ELETTROSTATICO $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

MOMENTO DI DIPOLO $\vec{p} = q\vec{a}$

POTENZIALE DI UN DIPOLO $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2}$

RISULTANTE DI UN DIPOLO $\vec{R} = (\vec{p} \cdot \nabla) E$

MOMENTO DI UN DIPOLO $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

ENERGIA DI UN DIPOLO $U_e = \vec{p} \cdot \nabla V$

TEOREMA DI GAUSS $\int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$$\mathrm{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

TEOREMA DI COULOMB $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{u}_n$

CAPACITA' $C = \frac{q}{V}$

CAPACITA' DI UN CONDENSATORE $C = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d}$

LAVORO DEL CONDENSATORE $W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV$

ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA $U_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \mathrm{Vol}$

CAMPO ELETTRICO NEL DIELETTRICO $E_k = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$

POLARIZZAZIONE $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

$$\rho_p = -\mathrm{div} \vec{P}$$

INDUZIONE DIELETTRICA $\vec{D} = \varepsilon_0 K \vec{E}$

LEGGE DI AMPÈRE-LAPLACE $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_l \frac{d\vec{l} \wedge \hat{u}_r}{r^2}$

LEGGE DI BIOT-SAVART $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{u}_l \wedge \hat{u}_r$
(FILO INFINITO PERCORSO DA CORRENTE)

FORZA TRA DUE FILI $dF_{1,2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r^2} dl_2 \hat{u}_r$

CAMPO GENERATO DA UN PORTATORE $\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v}_d \wedge \vec{E}$

LEGGE DI AMPÈRE $\oint B \cdot dl = \mu_0 i$ $\quad$ $\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

CAMPO SOLENOIDE $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{L} \hat{u}_x$

MAGNETIZZAZIONE $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$

INTENSITÀ DI CAMPO MAGNETICO $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

EQUAZIONE DI STATO $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

LEGGE DI FARADAY $\varepsilon_i = -\frac{d\varphi(B)}{dt}$

$\text{rot}\,\vec{E}_i = -\frac{\partial B}{\partial t}$

LEGGE DI FELICI $q = \frac{1}{R}(\varphi_i - \varphi_f)$

INDUTTANZA $L = \frac{\varphi(B)}{i}$

MUTUA INDUTTANZA $M = \frac{\varphi_2(B_1)}{i_1}$

LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL $\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

CORRENTE DI SPOSTAMENTO $i_S = \int \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma$

DIFFERENZA DI FASE $\delta = K d \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$

MASSIMI DI INTERFERENZA $\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}$ $I = I_0 N^2$

MINIMI DI INTERFERENZA $\sin\theta = \frac{m'\lambda}{Nd}$

MASSIMI SECONDARI $\sin\theta = \frac{(2m''+1)\lambda}{2dN}$ $I = \frac{I_0}{N^2}$

MASSIMO CENTRALE $\sin\theta = 0$

MINIMI DI DIFFRAZIONE $\sin\theta = \frac{m\lambda}{a}$

MASSIMI DI ORDINE N $\sin\theta = \frac{(2m+1)\lambda}{2a}$

POTERE RISOLUTIVO $R = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} = m \cdot N$