NUMERO: 1122

DATA: 22/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lingardo

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Penna

CINEMATICA UNIDIMENSIONALE

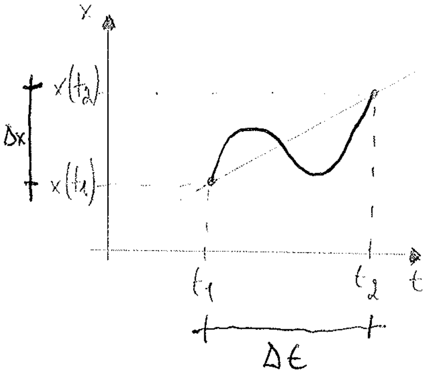
In fisica, per definire i vari moti, c'è bisogno di una LEGGE ORARIA, che è una funzione dello spazio dipendente dal tempo e definisce il moto di un corpo.

-Definiamo, ora, i concetti di VELOCITÀ MEDIA e VELOCITÀ ISTANTANEA.

VELOCITÀ MEDIA

Fornisce informazioni generali sulla velocità, non entrando nel dettaglio.

[redacted]

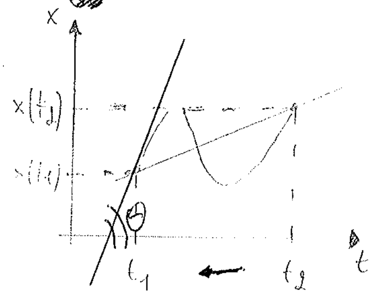


$$\text{Velocità media} = \boxed{V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

VELOCITÀ ISTANTANEA

Fornisce informazioni sulla velocità al tempo richiesto

[redacted]



Legge Oraria: dx rappresenta uno spostamento Δx infinitesimo, dove $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = t_g\,\theta$$

Ne segue che, conoscendo $v(t)$:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v(t)\,dt \Rightarrow \boxed{x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(s)\,ds}$$

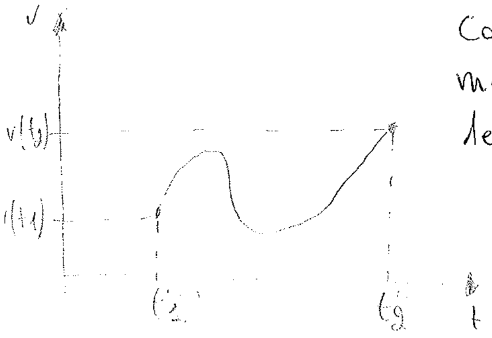
Es. 1 =>

Dato $v(t) = v = cost$, Ricavo $x(t_2)$, conoscendo le CONDIZIONI INIZIALI

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v\,ds \Rightarrow x(t_2) = x(t_1) + v\,(t_2 - t_1) \Rightarrow x(t_2) = x(t_1) + v\Delta t$$

-Una simile distinzione va fatta per l'ACCELLERAZIONE ~~la VELOCITÀ~~ MEDIA e ISTANTANEA

ACCELLERAZIONE MEDIA



Come per la Velocità Media anche l'accellerazione media fornisce informazioni generali, ma non dettagliate. [redacted]

$$\text{accellerazione media} = \boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

MOTO SMORZATO ESPONENZIALMENTE

L'accellerazione, in questo moto, è sempre contraria alla velocità, che perciò deve diminuire. Tale condizione è descritta dalla legge oraria

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -k\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -k\int_{t_0}^{t}dt = \log\frac{v}{v_0} = -kt$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-kt} \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{-kt}}$$

Considerando $v(x)$

$$\frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \overset{=v}{\boxed{\frac{dx}{dt}}}\frac{dv}{dx} = -kv \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -k \Rightarrow dv = -k\,dx$$

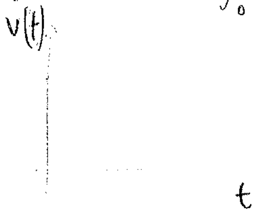
$$\int_{v_0}^{v}dv = -k\int_{x_0=0}^{x}dx \Rightarrow v - v_0 = -k(x-x_0) \Rightarrow v(x) = v_0 - kx$$

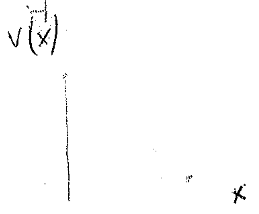
È facile notare che la velocità si annulla per $x = v_0/k$, questo perché

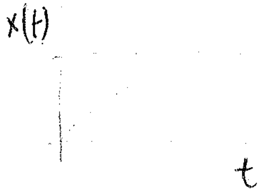
$$v(x) = 0 \Rightarrow 0 = v_0 - kx \Rightarrow kx = v_0 \Rightarrow x = v_0/k$$

Conoscendo $v(t)$ è possibile ricavare $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt} \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-kt} \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}\left(e^{-kt} - 1\right)$$



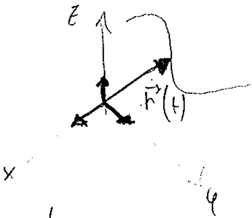




CINEMATICA 3 DIMENSIONALE

Un esempio di moto studiato in 3 dimensioni, è il moto curvilineo generico

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mu}_x + y(t)\vec{\mu}_y + z(t)\vec{\mu}_z$$



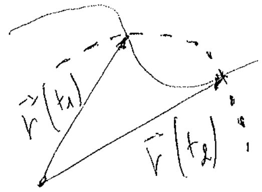
Analizziamo l'esempio del VETTORE VELOCITÀ ISTANTANEA, dando 2 definizioni

Def. 1 ⇒

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{\mu}_x + y\vec{\mu}_y + z\vec{\mu}_z\right) = \frac{dx}{dt}\vec{\mu}_x + \frac{dy}{dt}\vec{\mu}_y + \frac{dz}{dt}\vec{\mu}_z$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = v_x(t)\vec{\mu}_x + v_y(t)\vec{\mu}_y + v_z(t)\vec{\mu}_z$$

COME USARE LA FORZA $\vec{r}(t)$ IN UN MOTO QUALSIASI!



Approssimando la traiettoria con TAYLOR

Allora $\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1 + \Delta t)$

$$= \vec{r}(t_1) + \frac{d\vec{r}}{dt}\Delta t + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Delta t^2 + \dots + \frac{d^n\vec{r}}{dt^n}dt^n$$

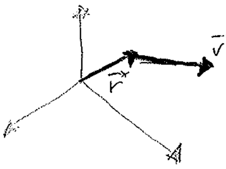
$$\Rightarrow \vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2$$

CONCLUSIONE: Approssimando il moto con una parabola, grazie al formalismo vettoriale, posso dare 3 specifiche con una sola formula!

QUINDI:

$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t_0)\Delta t^2$, se $\vec{a} = 0$

$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)\Delta t$, scritta in componenti:

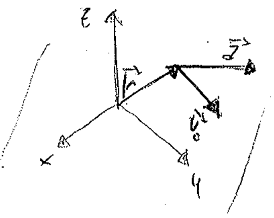


$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \\ z(t) = z_0 + v_z t \end{cases} \quad \text{se } a \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_y t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z(t) = z_0 + v_z t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{cases}$$

Se $\vec{v} \parallel \vec{a}$, Allora il moto continua ad essere descritto da una retta

Se $\vec{v} \nparallel \vec{a}$, Allora il moto è descritto da una parabola

DIMOSTRAZIONE:



Dato un piano generico individuato da $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$

Per semplicità, avendo solo un punto mobile:

1. ip: assumo $\vec{r} = 0$
2. Pongo l'asse z ortogonale al piano dato
3. Assumo $\vec{a} \parallel y$

ip: $v_0 z + a_0 z = 0$

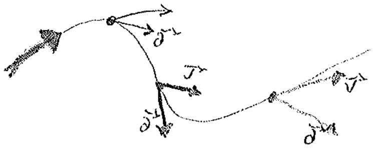
$$\begin{cases} x(t) = 0 + V_{0x}t + 0 \Rightarrow t = \frac{x}{V_{0x}} \\ y(t) = 0 + V_{0y}t + \frac{1}{2}a y^2 \Rightarrow y(t) = V_{0y}\boxed{\frac{x}{V_{0x}}} + \frac{1}{2}a_y\frac{x^2}{V_{0x}^2} \\ z(t) = 0 + a \end{cases}$$

passa dall'origine per ipotesi

$$y(t) = x\left(\frac{V_{0y}}{V_{0x}} + \frac{\cancel{1}a_{0y}}{2V_{0x}^2}x\right) \Rightarrow y(t) = 0 \begin{cases} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow x = \frac{-2V_{0x}V_{0y}}{a_{y0}} \end{cases}$$

ACCELLERAZIONE TANGENZIALE E NORMALE

Descrizione del moto in funzione di Quantità INTRINSECHE ⇒ prescindono dal tipo di coordinata



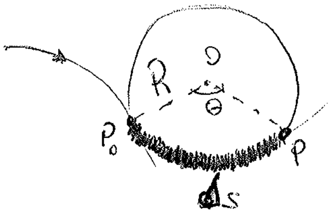
MOTO VARIO:

- La velocità è tangente alla curva
- L'accellerazione indica la direzione e il verso della forza agente che incurva la traiettoria

N.B. ⇒ approssimativamente $\vec{a} \parallel \vec{v}$ se il moto è rettilineo

⇒

PERCHÉ $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$?



$\frac{\Delta s}{R} = \theta \Rightarrow \frac{\theta}{\Delta s} = \frac{1}{R}$,

Se $\Delta s \to 0$

$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$

N.B. => θ è funzione del tempo
$\theta(t) = \theta[s(t)]$

APPLICAZIONI

- MOTO UNIFORME ,

$v = |\vec v| = cost.$

$\vec a_T = \frac{dv}{dt} \vec\mu_T = 0$

$\vec a_N = \frac{v^2}{R} \vec\mu_N \Rightarrow \vec a = \vec a_N = \frac{v^2}{R} \vec\mu_N$

$a_N' > a_N$
$R' > r$

- Vettore velocità sempre uguale in modulo
- Cambio Orientamento
- C'è accellerazione Normale
- Cambio il raggio

- MOTO CIRCOLARE

$\omega = cost \Rightarrow \theta(t) = \theta(0) + \omega t$

$\vec a = \vec a_T + \vec a_N$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$\vec a_T = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\underbrace{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)}_{} \Rightarrow \boxed{\vec a_T = \alpha R}$ α = accellerazione angolare

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$

$\boxed{\vec a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2}$

- MOTO CIRCOLARE UN. ACCELLERATO

$\alpha = cost.$

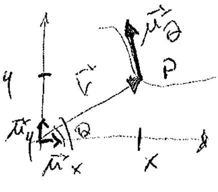
$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha t} \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta(0) + \omega(0) t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$

- MOTO POLARE

Usando le coordinate polari, fornisce un metodo di rappresentazione dello spostamento

1. Usando le coordinate cartesiane $\vec r = \vec\mu_x x + \vec\mu_y y$

$\vec r$ = variabile radiale θ = variabile angolare



$$\begin{cases} x = \vec r \cos\theta \\ y = \vec r \sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\vec r = r\cos\theta \vec\mu_x + r\sin\theta \vec\mu_y = r\underbrace{(\cos\theta\vec\mu_x + \sin\theta\vec\mu_y)}_{= \vec\mu_r}$$

$\Rightarrow \vec r = r\vec\mu_r$

VERIFICA : $\vec\mu_r^2 = \cos^2\theta\vec\mu_x + \sin^2\theta\vec\mu_y = 1$ c.v.d.

$\vec\mu_r = \vec\mu_r(\theta)$ = Dipende da θ

MOTO ARMONICO SEMPLICE

Il moto armonico semplice è un moto vario di legge oraria:

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$$

- A = ampiezza (metri)
- $\omega t + \varphi$ = fase del moto
- ω = pulsazione ($rad \cdot s^{-1}$)
- φ = fase iniziale (rad)

N.B. => A, ω, φ sono grandezze costanti

N.B. => Il moto armonico è un moto periodico di periodo $\pm 2k\pi$, $k \in N$

Il punto descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O, tutte uguali tra loro e caratterizzate dalla durata, detto periodo T;

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

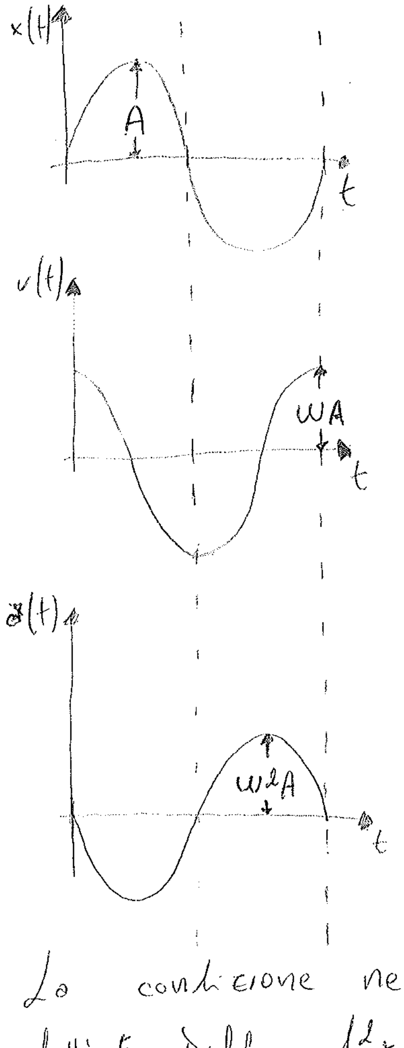
e si misura in secondi.

L'inverso del periodo è la frequenza ν, che indica le oscillazioni al secondo

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}.$$

Dato ω otteniamo una classe di moti armonici

e



$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}}$$

Si noti che la velocità assume valore massimo dove vale ωA mentre l'accelerazione, in modulo, $\omega^2 A$

Note le condizioni iniziali x_0 e v_0 ricaviamo

$$\boxed{A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad e \quad \boxed{tn\,\varphi = \frac{\omega x_0}{v_0}}$$

Può anche essere calcolata la dipendenza della velocità dalla posizione

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\omega^2(x_0 - x) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2) \Rightarrow \boxed{v^2(x) = \omega^2(A^2 - x^2)}$$

La condizione necessaria perché un moto sia armonico è data dall'Eq. Diff. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$. Tali eq. diff. sono sempre uguali

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$$

DINAMICA

LEGGI DELLA MECCANICA NEWTONIANA

- 1° Principio (Legge di inerzia)
- 2° Principio (Legge di Newton)
- 3° Principio (Legge d'Azione e Reazione)

• Il primo principio afferma che una particella libera si muove di moto rettilineo uniforme ($v=cost$, $a=0$)

N.B. => "LIBERA": non soggetta ad interazioni, di alcun tipo, con l'ambiente [redacted] circostante. Se non ci sono influenze di alcun genere, il corpo avrà velocità nulla o costante.

I sistemi inerziali sono quelli dotati delle caratteristiche su citate, cioè $v=cost$; $a=0$

Es.:

1. Stelle Fisse
2. Sole (con un certo grado di approssimazione)

Per definire un corpo libero è necessario disporre di un sistema di riferimento fermo o a $v=cost$, in pratica, di un sistema inerziale.

• Il secondo principio afferma che [redacted] $\vec{F}=m\vec{a}$, quindi che l'interazione di un corpo con l'ambiente, espresso tramite il vettore Forza, determina l'accellerazione del corpo (cioè la variazione della velocità nel tempo), tramite la legge $\vec{F}=m\vec{a}$

• $\vec{F}$ = Forza, viene espresso in Newton

• m = Massa inerziale, viene espressa in Kg e rappresenta la RILUTTANZA (la tendenza di un corpo a rimanere fermo, coeff. inerziale) del corpo di data massa al variare del suo stato di moto

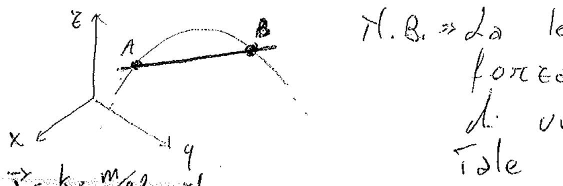
• $\vec{a}$ = Accellerazione, espresso in m/s^2

CONCETTO DI INFORMAZIONE SULLA LEGGE DI NEWTON

$$\underbrace{\vec{F}(\vec{r})}_{\text{campo vettoriale}} = \vec{F}(x,y,z) = \vec{F}_x(\vec{r})\vec{\mu}_x + F_y(\vec{r})\vec{\mu}_y + F_z(\vec{r})\vec{\mu}_z$$

Sapendo che $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{cases} m x'' = F_x(x,y,z) \\ m y'' = F_y(x,y,z) \\ m z'' = F_z(x,y,z) \end{cases} \Rightarrow$ eq. differenziali accoppiate

Dalla soluzione delle eq. differenziali, ottengo 3 leggi orarie, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, che rappresentano l'evoluzione del sistema, rappresentata dalla curva del moto:



N.B. => La legge di Newton, grazie all'uso del campo di forza, individua le cause oggettive della DINAMICA di un corpo ed è del tipo probabilistico/deterministico
Tale legge accorda DINAMICA e CINEMATICA

$\vec{F} = m\vec{a} = kg\ m/s^2 = N$

• Il terzo principio afferma che, [redacted] se un corpo 1 esercita una forza $\vec{F}_{1,2}$ su un corpo 2, allora questo reagisce esercitando una forza $\vec{F}_{2,1}$, uguale e contraria, tale che $\boxed{\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}}$

CONCETTO DI QUANTITÀ DI MOTO ($\vec{p}$)

$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$, Ridefinisco il II principio $\Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}}$

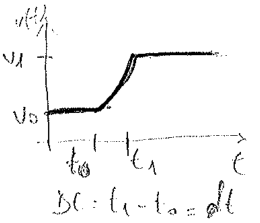
TEOREMA DELL'IMPULSO

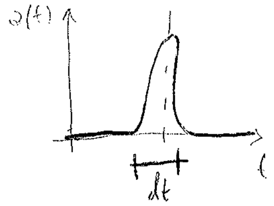
Definita la quantità di moto, l'impulso di una forza applicata provoca la variazione di velocità

$$\vec J = \int_0^t \vec F(t)dt = \int_0^t \frac{d\vec p}{dt}dt = \vec p(t) - \vec p(0) \Rightarrow \boxed{\vec J = m\vec v(t) - m\vec v(0)}$$

APPLICAZIONE

Calcolare la $\vec F_{media}$ esercitata su una massa (m) nei fenomeni impulsivi (repentina variazione del moto di un corpo)



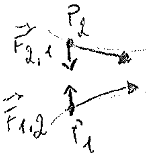


$$\int_{t_0}^{t_1}\vec F(t)dt = m[\vec v(t_1) - \vec v(t_0)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec F_m(t_1-t_0) = m\vec v(t_1) - m\vec v(t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec F_m = \frac{m\vec v(t_1) - m\vec v(t_0)}{t_1-t_0}}$$

ESEMPIO



$\vec F_{2,1} = -\vec F_{1,2}$

$$\begin{cases}\vec F_{1,2} = \frac{d\vec p_1}{dt}\\ \vec F_{2,1} = \frac{d\vec p_2}{dt}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec p_1}{dt} = -\frac{d\vec p_2}{dt}$$

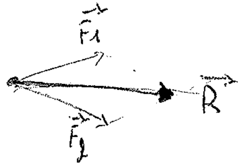
LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\Rightarrow \boxed{\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\vec p_1}{dt}dt = -\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\vec p_2}{dt}dt}$$

RISULTANTE DELLE FORZE

Un corpo può subire l'azione di tante forze contemporaneamente, di cui definiamo la risultante $\vec R$, come sommatoria di tutte le forze $\vec F_1 + \vec F_2 + \dots \vec F_n$. Per cui $\boxed{\vec R = \sum_{i=1}^{N} F_i}$, dove $\vec R$ determina l'accelerazione secondo il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE FORZE $\vec R = \sum_{i=1}^{N}(m\vec a)_i$

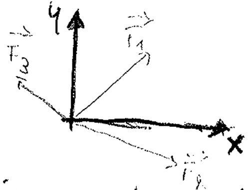
ESEMPIO:



EQUILIBRIO STATICO

Un corpo è in equilibrio se:

1. è libero
2. la risultante delle forze, $\vec R = 0 \Rightarrow \vec R = \sum_{i=1}^{N} \vec F_i = 0$ $\begin{cases}\vec R_x = \sum_{i=1}^{N} \vec F_{xi} = 0\\ \vec R_y = \sum_{i=1}^{N} \vec F_{yi} = 0\\ \vec R_z = \sum_{i=1}^{N} \vec F_{zi} = 0\end{cases}$



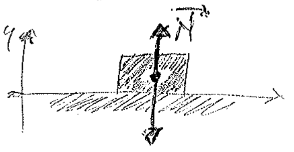
$\vec F_1 = (3,6,0)$, $\vec F_2 = (2,-3,0)$

$\vec F_3 = (-5,-3,0)$

$\vec R = \vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 = (3,6,0) + (2,-3,0) + (-5,-3,0) = 0$

REAZIONI VINCOLARI

Se un corpo soggetto a una o più forze, tali che, la loro risultante $\vec R \neq 0$, rimane fermo, allora esiste una reazione vincolare $\vec N$, tale che, $\vec R + \vec N = 0$



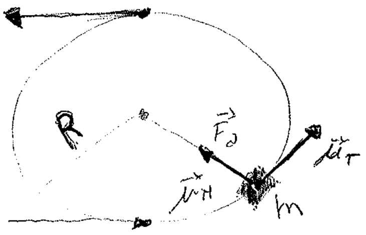
$\vec R = m\vec g$

N.B. ⇒ $\vec N$ risulta sempre normale al piano

FORZA CENTRIPETA

1ª Applicazione

Un'auto percorre una curva piana a velocità costante $\vec{v} = |\vec{v}| = cost.$ in presenza di ATTRITO STATICO $\vec{\mu}_s$. La curva ha raggio R



$$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T = \frac{v^2}{R}\vec{\mu}_N + \frac{dv}{dt}\vec{\mu}_T$$

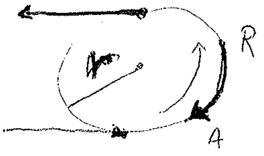
$$\vec{F}_a = m\vec{a} \Rightarrow F_a\vec{\mu}_N = m\vec{a}$$

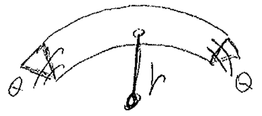
$$\begin{cases} m\vec{a}_T = 0 \\ m\vec{a}_N = \vec{F}_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\frac{dv}{dt} = 0 \\ m\frac{v^2}{R} = \vec{F}_a \leq \left[F_a^{max} = \vec{\mu}_s mg\right] \end{cases}$$

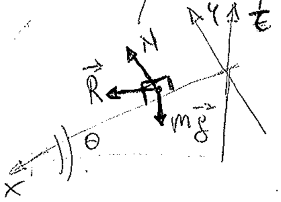
$$\Rightarrow \vec{v}^2 \leq \vec{\mu}_s Rg \Rightarrow \vec{v} \leq \sqrt{\vec{\mu}_s Rg}$$

2ª Applicazione

Un corpo percorre una curva inclinata di raggio R a velocità $\vec{v} = |\vec{v}| = cost.$ in assenza di attrito STATICO ($\vec{\mu}_s = 0$). La strada ha inclinazione θ. Trovare $\vec{v}$ tale che il corpo non vada fuori pista.





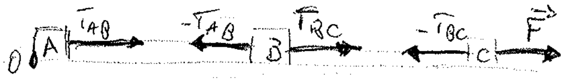


$$\vec{R} = \vec{N} + m\vec{g} \qquad m\vec{a} = R \qquad \vec{a} = a_z\vec{\mu}_z + \vec{a}_N + \vec{a}_T$$

$$\begin{cases} ma_z = R_z = N\cos\theta - mg = 0 \\ m\vec{a}_T = 0 \\ m\vec{a}_N = R_x = N\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} a_z = 0 \text{ se } N\cos\theta = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta} \\ a_T = 0 \text{ perche } \vec{v} = cost \\ m\vec{a}_N = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta \Rightarrow m\vec{a}_N = tg\theta\, mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\frac{v^2}{r} = tn\theta\, mg \Rightarrow v = \sqrt{tn\theta\, rg}$$

Esempio: (tensione filo)



Dati dei fili inestensibili, tali che $\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = a \Rightarrow a = \frac{F}{m_A + m_B + m_C}$

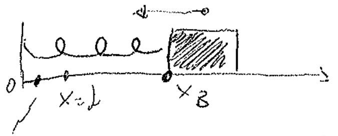
$T_{AB}, T_{BC} = ?$ $\quad a = ?$

$$\begin{cases} m_C\vec{a}_C = \vec{F} - T_{BC} \\ m_B\vec{a}_B = T_{BC} - T_{AB} \\ m_A\vec{a}_A = T_{AB} \end{cases} \Rightarrow \quad T_{AB} = m_A\frac{\vec{F}}{m_A + m_B + m_C}$$

$$T_{BC} = \vec{F} - m_C a = \vec{F} - \frac{m_C\vec{F}}{m_A + m_B + m_C} = \left(\frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C}\right)\vec{F}$$

N.B.: $T_{AB} < T_{BC}$

LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA



Sappiamo, per definizione che,

$$\vec{F}_e = -k(x-l)\vec{u}_x$$

Allora $W_{A,B} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_A^B -k(x-l)\vec{u}_x \cdot (\vec{u}_x dx)$

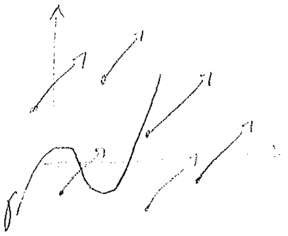
$$\Rightarrow W_{AB} = -k\int_A^B (x-l)\,dx = -\frac{1}{2}k\left|(x-l)^2\right|_{x_A}^{x_B}$$

$$\Rightarrow W_{AB} = -\frac{1}{2}k\left[(x_B-l)^2-(x_A-l)^2\right] \Rightarrow W_{AB} = -(E_p^B - E_p^A)$$

È facilmente intuibile che, l'energia potenziale riferendosi ad un lavoro elastico, sarà uguale a:

$$E_p = +\frac{1}{2}k(x-l)^2$$

LAVORO IN UN CAMPO DI FORZE COSTANTI



$$\vec{F} = F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y + F_z\vec{u}_z = \text{cost.}$$

$$W_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\int_{A\gamma}^{B} d\vec{r}$$

$$W_{AB} = \vec{F}\int_{A\gamma}^{B}(\vec{u}_x dx + \vec{u}_y dy + \vec{u}_z dz)$$

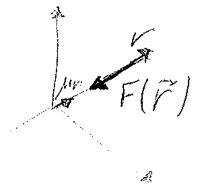
$$\Rightarrow W_{AB} = \vec{F}\cdot\left[\vec{u}_x(x_B-x_A)+\vec{u}_y(y_B-y_A)+\vec{u}_z(z_B-z_A)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = -(E_p^B - E_p^A) \Rightarrow W_{AB} = -(E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A))$$

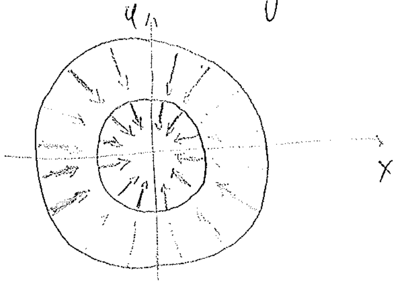
N.B.: $E_p(\vec{r}) = c - \vec{F}\cdot\vec{r}$

LAVORO DI UN CAMPO DI FORZE CENTRALI

$\vec{F}_r = F(\vec{r})\vec{\mu}_r$, $\vec{\mu}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, $F(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2}$



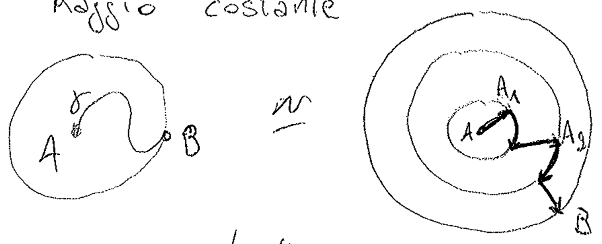
Il campo di forze $F(\vec{r})$ giace sulla retta di $\vec{r}$, ma ha verso diretto verso l'origine degli assi



Esempio di **CAMPO DI FORZE CENTRALI** $F(\vec{r})$ dove ogni forza è controllata dalla legge

$F(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2}\bar{\mu}_r$?

Posso, inoltre, pensare ogni cammino γ come una sommatoria di piccoli cammini radiali e poi costanti lungo la circonferenza a raggio costante



$W_{AB} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

N.B.: lungo la circonferenza, i tratti possono essere annullati perché $\vec{F} \perp d\vec{r}$

Lungo i tratti rettilinei: $d\vec{r} = \vec{\mu}_r dr$

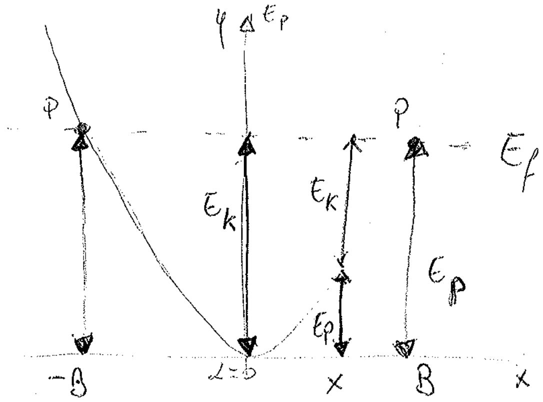
$\Rightarrow W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{k}{r^2} d\vec{r} \Rightarrow W_{AB} = k\left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right)^{-1} = E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A)$

N.B.: va calcolato un integrale per ogni tratto di spostamento lungo la circonferenza, per cui

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{k}{r^2} d\vec{r} \Rightarrow W_{AB} = \int_{r_A}^{r_{A_1}} -\frac{k}{r^2} d\vec{r} + \int_{r_{A_1}}^{r_{A_2}} -\frac{k}{r^2} d\vec{r} + \int_{r_{A_2}}^{r_B} -\frac{k}{r^2} d\vec{r}$$

$$\Rightarrow W_{AB} = \sum_{i=1}^{N=3} \int_{r_{A_i}}^{r_{A_N} = r_B} -\frac{k}{r^2} d\vec{r}$$

GRAFICO DELLA E_p DELL' OSCILLATORE ARMONICO



$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x-l)^2$

Per semplificare il calcolo pongo l'origine nella posizione di riposo della molla

$E_p(x_0) = \frac{1}{2}kx^2$, E_f = fissata

$E_T = E_K + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

N.B.: E_T ha valore cost. per il
TEO DI CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA

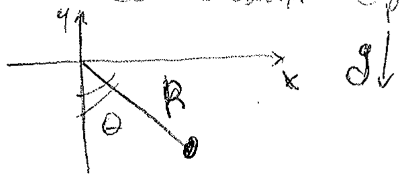
P = PUNTO DI INVERSIONE

Nel punto di partenza $E = E_K$

In P, $E = E_p$ quindi il corpo è fermo ($E_K = 0$)

La forza elastica rimette in moto la massa che attraversa l'origine e va in posizione $-B$ e, se non ci fosse la forza di attrito dell'aria, ciò continuerebbe all'infinito

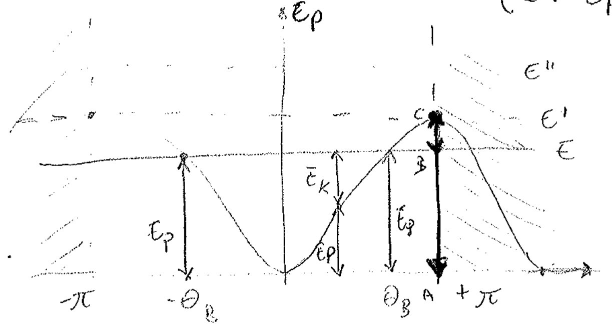
GRAFICO DELLA E_p DEL PENDOLO SEMPLICE



$E_p(y) = mgy + C = -mgR\cos\theta + mgR$

$E_p(\theta) = mgR(1-\cos\theta)$

$$\begin{cases} y = -R\cos\theta \\ C: E_p(\theta = 0) = 0 \Rightarrow C = mgR \end{cases}$$



$-\pi \leq \theta \leq \pi$

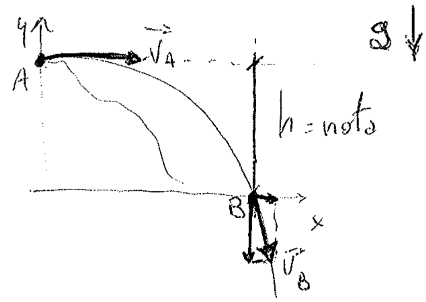
$E = E_K + E_p \rightarrow v = R\frac{d\theta}{dt}$ (perchè è MOTO CIRCOLARE)

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta)$

N.B.: • Nel tratto $\overline{CB}$ c'è un SURPLUS DI ENERGIA CINETICA, mentre l'ENERGIA POTENZIALE oltrepassa il Punto di inversione (P). Tale condizione consente al pendolo di compiere un giro completo.

• E'' rappresenta il punto di Max dell' $E_p(\theta)$, tale situazione implica che il corpo si ferma in un tempo (t) infinito

ESEMPIO 1.



1. Calcolare l'E_p
2. Calcolare l'E_k all'atterraggio (in B) conoscendo v_A e h
3. Calcolare il vettore velocità $(\vec{v}_B)$

1. $E_p = mgy \Rightarrow \left(-\nabla E_p = \frac{d}{dy}(mgy)(-\vec{\mu}_y) = -mg\vec{\mu}_y = \vec{F}\right)$

VERIFICA

2. $E_k^A + E_p^A = E_k^B + E_p^B$ (TEO. DI CONSER. DELL' EN. MECCANICA)

$\Rightarrow \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 + mgh = \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 + \cancel{mgy_B}$ N.B.: $y_B = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\cancel{\vec{v}_{Ax}^2} + \vec{v}_{Ay}^2\right) + mgh = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}_{Bx}^2 + \vec{v}_{By}^2\right)$

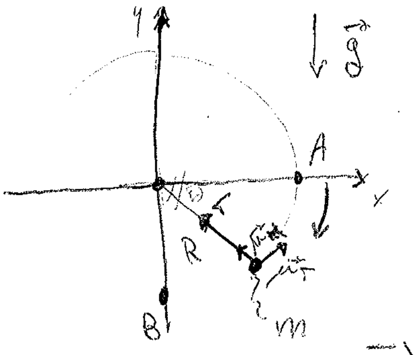
$\Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}\vec{v}_{By}^2 \rightarrow v_{By}^2 = 2gh \longrightarrow v_{By}^2 \overset{+}{\ominus}\sqrt{2gh}$

↳ Scelgo il segno meno perchè v_{By} è rivolto verso il basso, mentre il sistema di riferimento è verso l'alto

Quindi

$\vec{v}_B = \vec{\mu}_x\vec{v}_{Ax} + \vec{\mu}_y\vec{v}_{By} = \vec{\mu}_x v_{Ax} - \vec{\mu}_y\sqrt{2gh}$

ESEMPIO 2.



$\vec{v}_A = 0$ Tensione del filo in B = ?

R = noto

$E_T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - mgR\cos\theta$ (TEO. DI CONS. DELL'ENERGIA)

$E_p = -mgR\cos\theta$

$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}m\vec{v}_A^2} - \cancel{mgR\underbrace{\cos\theta_A}_{=0}} = \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - mgR\underbrace{\cos\theta_B}_{=1}$

$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - mgR \Rightarrow \vec{v}_B = \sqrt{2gR}$

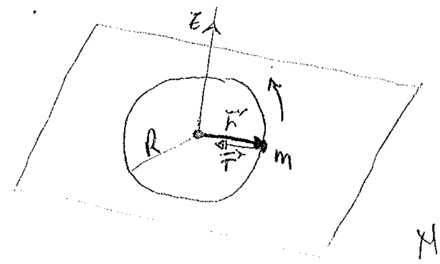
Quindi:

$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$, so che $\vec{a} = a_T + a_N = \frac{dv}{dt}\vec{\mu}_T + \frac{v^2}{R}\vec{\mu}_N$

$\Rightarrow m\frac{v^2}{R} = \vec{T} - mg\underbrace{\cos\theta_B}_{=1} \Rightarrow T_B = m\frac{\vec{v}_B^2}{R} + mg = m\frac{2g\cancel{R}}{\cancel{R}} + mg$

$\Rightarrow T_B = 3mg$

Esempio 1: (Moto circolare uniforme)



$m\vec{a} = \vec{F} \Longleftrightarrow m\vec{a}_N = \vec{F} \parallel \vec{r}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0 \longrightarrow \vec{L} = \text{cost} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = \underline{mrv\vec{\mu}_z}$

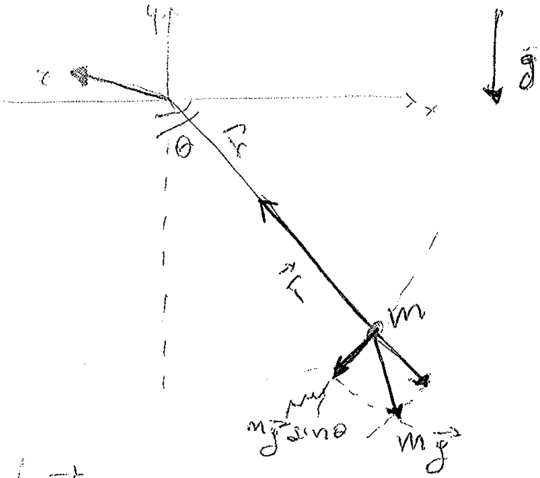
N.B.: Dati $\vec{r}_0 < \vec{r}$, $\vec{v}_0 > \vec{v}$, $\underline{\vec{r}_0\vec{v}_0 = \vec{r}\vec{v} = \text{cost.}}$

$\vec{R} < \vec{R}'$

$\Rightarrow \vec{v}\vec{R} = \vec{v}'\vec{R}'$

$\Rightarrow \vec{v}' = v\frac{\vec{R}}{\vec{R}'} < \vec{v}$

Esempio 2:



$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge (m\vec{g} + \cancel{\vec{T}})$; $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge m\vec{g} = \vec{r} \wedge m\vec{g}_T$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = r m g \sin\theta (-\vec{\mu}_z)$; $\vec{v} = r'\vec{\mu}_r + \theta' r \vec{\mu}_\theta$

$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr\vec{\mu}_r \wedge (\cancel{r'\vec{\mu}_r} + r\theta'\vec{\mu}_\theta) = \underline{mr^2\theta'\vec{\mu}_z}$

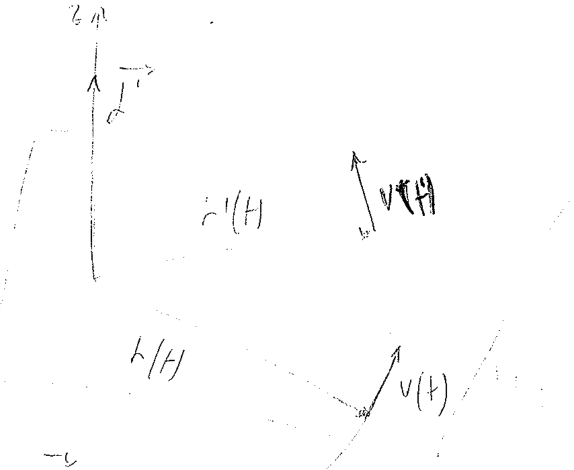
$r\theta'' = -g\sin\theta$; $mr^2\theta''\vec{\mu}_z = -\vec{\mu}_z rmg\sin\theta$

$\Rightarrow \underline{\frac{d}{dt}(mr^2\theta'\vec{\mu}_z) = -\vec{\mu}_z rmg\sin\theta}$ $= \cancel{m}r^2\theta''\cancel{\vec{\mu}_z} = -\cancel{\vec{\mu}_z} rmg\sin\theta$

$= \theta'' + \cancel{g}/r \sin\theta = 0$

$\Rightarrow \theta \to 0$: $\theta'' + g/r\, \theta = 0$ $\Rightarrow \underline{\theta(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$ N.B.: $\omega = \sqrt{g/r}$

27

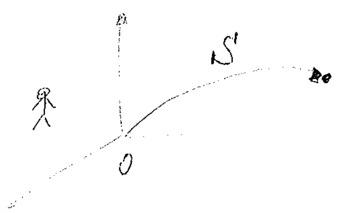


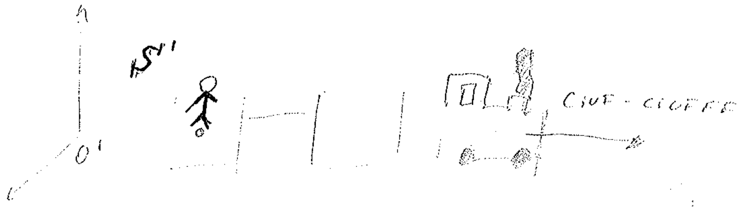
$$\vec{L} = cost = m\vec{r}\wedge\vec{v} = \vec{\mu}_\varepsilon \underbrace{r^2\theta' m}_{L_\varepsilon = cost.}$$

$$\begin{cases} v(t') = \vec{v}(t+\overset{\sim\varepsilon}{dt}) = v(t) + \varepsilon\vec{a}(t) = \frac{1}{2}r^2 d\theta \\ \vec{r} = \vec{r}(t+\varepsilon) = \vec{r}(t) + \varepsilon\vec{v}(t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\vec{a}(t) \end{cases}$$

$$\vec{L} = m\vec{r}\wedge\vec{v} = m\vec{r}'\wedge\vec{v}' = m\left(\vec{r} + \varepsilon\vec{v} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a^2\right)\wedge\left(\vec{v} + \varepsilon\vec{a}\right)$$
$$= m\left(\vec{r}\wedge\vec{v} + \varepsilon\cancel{\vec{r}\wedge\vec{a}} + \varepsilon\cancel{\vec{v}\wedge\vec{v}}\right) = m\vec{r}\wedge\vec{v}$$

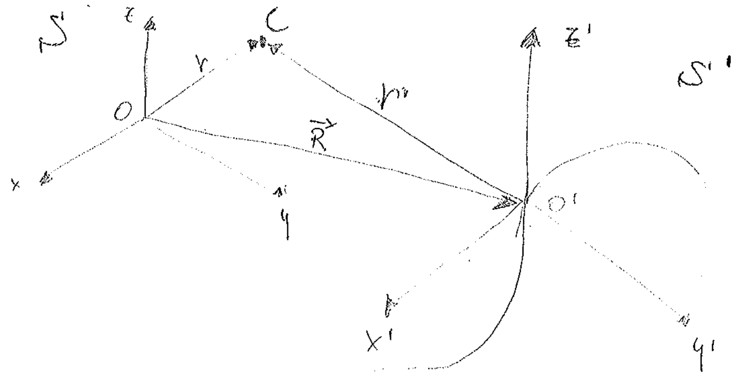
MOTI RELATIVI





Un moto **RELATIVO** è un moto visto da due posizioni diverse, cioè ~~[illegible]~~ SISTEMI DI RIFERIMENTO diversi!

S, S': hanno assi paralleli (sempre), O' è in moto rispetto a O



$\overrightarrow{OO'} = \vec{R}$

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$

$\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{v}'$

$\vec{a} = \vec{A}_0 + \vec{a}'$

NB: $\vec{A} = \vec{a}_{O'}$ = ACCELLERAZIONE RELATIVA O DA TRASCINAMENTO

$\vec{V} = \vec{V}_{O'}$ = VELOCITÀ RELATIVA O DA TRASCINAMENTO

TEOREMA DELLE VELOCITA' RELATIVE

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

RICORDA:

$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \theta' \vec{\mu}_\perp = \theta' \vec{\mu}_z \wedge \vec{\mu}$

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{0'} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{0'} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{\mu}'_x + y\,\vec{\mu}'_y + z\,\vec{\mu}'_z\right)$$

$$= \vec{v}_{0'} + \frac{dx'\vec{\mu}'_x}{dt} + \frac{dy'\vec{\mu}'_y}{dt} + \frac{dz'\vec{\mu}'_z}{dt} + x'\frac{d\vec{\mu}'_x}{dt} + y'\frac{d\vec{\mu}'_y}{dt} + z'\frac{d\vec{\mu}'_z}{dt}$$

$$= \vec{v}_{0'} + \vec{v}' + x'\omega\vec{\mu}'_x + y'\omega\vec{\mu}'_y + z'\omega\vec{\mu}'_z$$

$$= \vec{v}_{0'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{\mu}'_x + y'\vec{\mu}'_y + z'\vec{\mu}'_z\right) \Rightarrow \underline{\vec{v} = \vec{v}_{0'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'}$$

N.B.: Se non ci fosse rotazione saremmo nel caso precedente

TEOREMA DELLE ACCELLERAZIONI RELATIVE

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'$$

DIM:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}' + \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = \vec{a}_{0'} + \frac{d}{dt}\left(v'_x\vec{\mu}'_x + v'_y\vec{\mu}'_y + v'_z\vec{\mu}'_z\right) + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \underbrace{\frac{dv'_x}{dt}\vec{\mu}'_x + \frac{dv'_y}{dt}\vec{\mu}'_y + \frac{dv'_z}{dt}\vec{\mu}'_z}_{\vec{a}' = (a'_x\vec{\mu}'_x + a'_y\vec{\mu}'_y + a'_z\vec{\mu}'_z)} + v'_x\overbrace{\frac{d}{dt}\vec{\mu}'_x}^{\vec{\omega}\wedge\vec{\mu}'_x} + v'_y\overbrace{\frac{d}{dt}\vec{\mu}'_y}^{\vec{\omega}\wedge\vec{\mu}'_y} + v'_z\overbrace{\frac{d\vec{\mu}'_z}{dt}}^{\vec{\omega}\wedge\vec{\mu}'_z} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \left(v'_x\vec{\mu}'_x + v'_y\vec{\mu}'_y + v'_z\vec{\mu}'_z\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}\vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\overset{\vec{v}'}{\vec{v}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'$$

C.V.D.

N.B.:

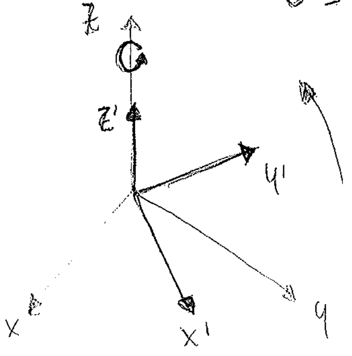
$\vec{a}'$ = ACC. VISTA DA S'

$2\,\omega \wedge \vec{v}'$ = ACC. DI CORIOLIS

$\vec{a}_{0'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'$ = ACC. DI TRASCINAMENTO

ESEMPIO 2:

$O \equiv O'$



$\vec{\omega} = \omega \vec{\mu}_z$

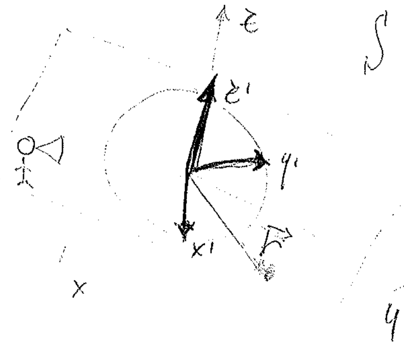
$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \\ \vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \omega^2 \vec{r}' \end{cases}$$

SOLO PER MOTI PIANARI

N.B.: $\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega}^2 \vec{r}'$

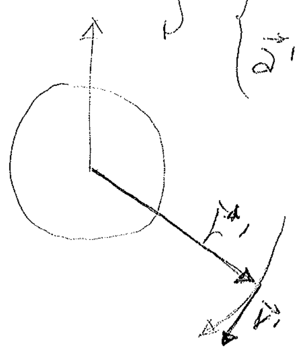
$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = \cancel{\vec{\omega}(\vec{\omega} \circ \vec{r}')} - \vec{r}'(\vec{\omega} \circ \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}'$ C.V.D.

ESEMPIO 3:



$S \begin{cases} \vec{v} = 0 \\ \vec{a} = 0 \end{cases}$

$S' \begin{cases} \vec{v}' = \cancel{\vec{v}} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \\ \vec{a}' = \cancel{\vec{a}} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega}^2 \vec{r}_0 \end{cases}$



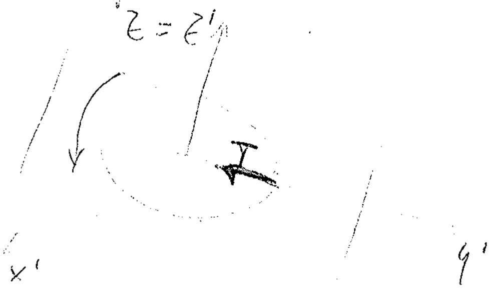
S' : $\vec{a} = -2\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \omega^2 \vec{r} = 2\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \omega^2 \vec{r}$

$\Rightarrow \vec{a} = -2\omega^2 r' + \omega^2 \vec{r}' = \underline{-\omega^2 \vec{r}'}$

↳ ACC. CENTRIPEDA

ESEMPIO 4:

$z = z'$



R = noto ; m = noto , $\vec{\omega}$ = noto

S' : $m\vec{a}_M = \vec{T}$

S' : $\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \omega^2 \vec{r}'$

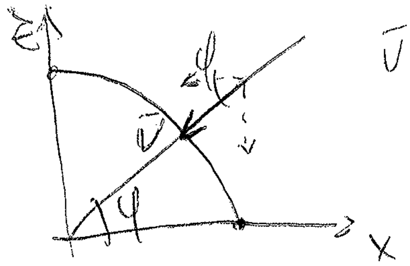
$\Rightarrow \underset{\hookrightarrow 0}{m\vec{a}'} =$ [illegible] $m\vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \underset{\hookrightarrow 0}{\vec{v}'} + \omega^2 \vec{r} m = 0$

$\Rightarrow \underline{\vec{T} + \omega^2 \vec{r} m = 0}$; $\vec{T} = -\omega^2 \vec{r} m$

↳ Forza centrifuga

N.B.:
- Il corpo è fermo sulla piattaforma
- Il sistema S' si riferisce al corpo sulla piattaforma rotante

CADUTA DEI GRAVI VERSO EST
(effetto della rotazione terrestre)



$$\bar v' = v'\sin\varphi(-\bar\mu_z) + \bar v'\cos\varphi(-\bar\mu_x)$$

$$\bar\omega\wedge\bar v' = \bar\omega\wedge\left(\bar v'\sin\varphi(-\bar\mu_z) + \bar v'\cos\varphi(-\bar\mu_x)\right)$$

$$\cancel{\omega v'\sin\varphi\,\bar\mu_z\wedge(-\bar\mu_z)} +$$

$$\omega v'\cos\varphi\,\bar\mu_z\wedge(-\bar\mu_x)$$

$$\bar\omega\wedge\bar v' = \omega v'\cos\varphi(-\bar\mu_y)$$

Allora

$$\bar a = \bar a_0 - 2\bar\omega\wedge\bar v' - \bar\omega\wedge(\bar\omega\wedge\bar r') =$$

$$= \bar g + 2\omega v'\cos\varphi\,\bar\mu_y + \omega^2 r'\cos\varphi\,\bar\mu_x$$

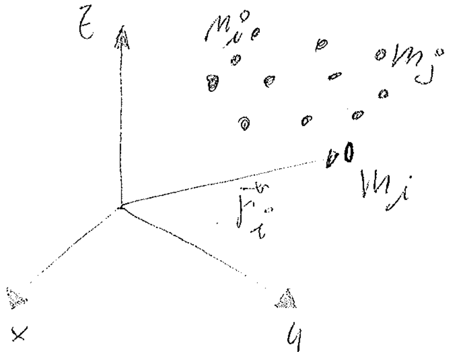
$$2\omega v'\cos\varphi\,\bar\mu_y$$

termine che provoca la caduta dei gravi verso est

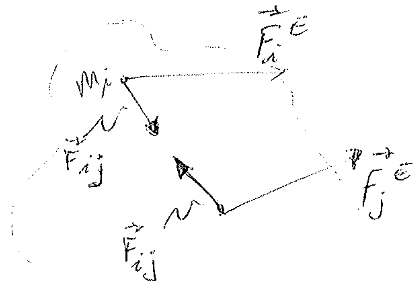
TEO. DEL CENTRO DI MASSA

$M\vec{A}_{cm} = R^E$ ~ Risultante Forze Esterne

Accellerazione del centro di Massa



CONSIDERO UNA COPPIA QUALSIASI DI MASSE



Dim:

Definisco: $\vec{V}_{cm} = \frac{d}{dt}(\vec{R}_{cm}) = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i (m_i \vec{v}_i)$

$$\vec{A}_{cm} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_{cm}) = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i (m_i \vec{a}_i)$$

$$\Rightarrow M\vec{A}_{cm} = \sum_i (m_i \vec{a}_i) = \sum_i \vec{F}_i$$

N.B.: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^E + \boxed{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}$ ~ Forze accoppiate ad una escluso se stesso

$$\Rightarrow M\vec{A}_{cm} = \sum_i \left(\vec{F}_i^E + \cancel{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}\right) = \sum_i \vec{F}_i^E \Rightarrow M\vec{A}_{cm} = \vec{R} \quad \text{C.V.D.}$$

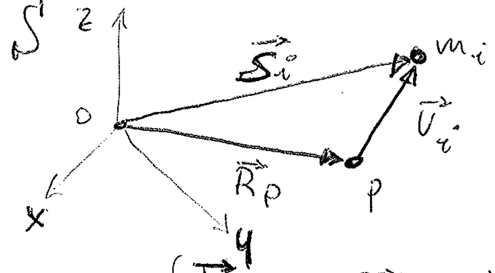
N.B.: Se $R^E = 0$

$$\Rightarrow M\vec{A}_{cm} = 0 \Rightarrow M\vec{V}_{cm} = cost \Rightarrow \underline{\sum_i (m_i \vec{v}_i) = cost.}$$

Quantità di moto del centro di massa
(conservazione della quantità di moto totale)

TEO DEL MOMENTO ANGOLARE PER N CORPI

(I eq. CARDINALE della dinamica)



$$\begin{cases} \vec{S}_i = \vec{R}_p + \vec{r}_i \\ \vec{V}_i = V_p + \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} \end{cases}$$

$$\forall m_i \begin{cases} \vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \\ \vec{M}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \end{cases}$$

$$\vec{L}_{TOT} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i) =$$

$$= \sum_i m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{v}_i + \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right)$$

$$= \sum_i m_i \left[(\cancel{\vec{v}_i} - \vec{V}_p) \wedge \vec{v}_i + \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right] = \sum_i m_i \left(-\vec{V}_p \wedge \vec{v}_i + \vec{r}_i \wedge \vec{a}_i \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(-\vec{V}_p \wedge \vec{v}_i \right) + \sum_i (\vec{r}_i \wedge m_i a_i)$$

$$= \sum_i m_i (-\vec{V}_p) \wedge \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

N.B.: $\vec{F}_i^I = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ particella, sorgente

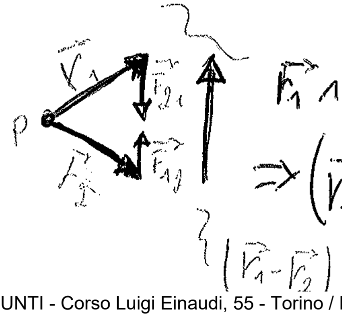
$$= (-\vec{V}_p) \wedge \sum_i m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge \left(\vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I \right)$$

$$= (-\vec{V}_p) \wedge M \vec{V}_{cm} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^E + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^I$$

$$= (-\vec{V}_p) \wedge M \vec{V}_{cm} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^E}_{\text{Momento di } \vec{F}^E} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

$$= (-\vec{V}_p) \wedge M \vec{V}_{cm} + \vec{M}^E + \left(\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \wedge F_{ji} = 0 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = (-\vec{V}_p) \wedge M \vec{V}_{cm} + \vec{M}^E$$

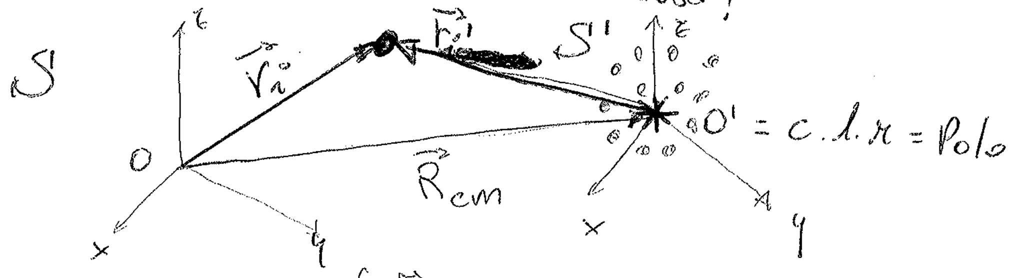


$$\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{12} = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_{21} = 0$$

COROLLARIO

Che forma assume il Teo del Momento Angolare nel ~~sistema~~ sistema del Momento di Massa?



Visti da O $\begin{cases} \vec L = \sum_i m \vec r_i' \wedge \vec v_i' \\ \vec M^E = \sum_i \vec r_i' \wedge \vec F_i^E \end{cases}$

$$\vec L = \sum_i m \vec r_i' \wedge \vec v_i = \sum_i m_i \vec r_i' \wedge (\vec v_{cm} + \vec v_i')$$

$$= \sum_i m_i (\vec r_i' \wedge \vec V_{cm} + \vec r_i' \wedge \vec v_i') = \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec r_i'\right)}_{\sim 0} \wedge \vec V_{cm} + \sum_i m_i \vec r_i' \wedge \vec V_i'$$

$$\Rightarrow \vec L = \sum_i m_i \vec r_i' \wedge \vec v_i' = \vec L'$$

$$\vec M'^{(E)} = \sum_i \vec r' \wedge \vec F_i' \quad , \quad \text{ma} \quad \vec F_i' = \vec F_i^E + \vec F_i^I - m\vec a_{cm}$$

$$\Rightarrow \vec M'^{(E)} = \sum_i \vec r_i' \wedge (\vec F_i^E + \vec F_i^I - m\vec a_{cm})$$

$$= \sum_i \vec r_i' \wedge \vec F_i^E + \overset{\sim 0}{\sum_i \vec r_i' \wedge \vec F_i^I} - \sum_i \vec r_i' \wedge m \vec a_{cm}$$

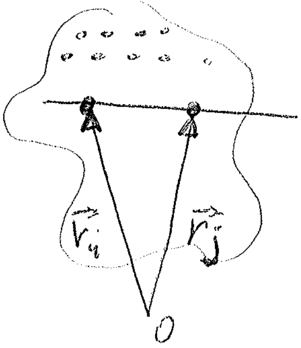
$$= \sum_i \vec r_i' \wedge \vec F_i^E - \sum_i (m_i \vec r_i') \wedge \vec a_{cm} \sim 0$$

$$\Rightarrow \vec M'^{(E)} = \sum_i \vec r_i' \wedge \vec F_i^{(E)}$$

In conclusione, se vale: $\dfrac{d\vec L}{dt} = \vec M^E$

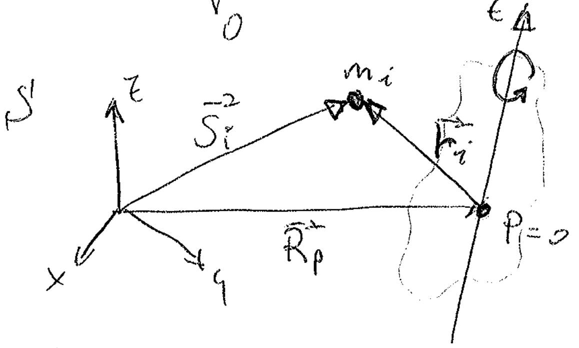
vale anche: $\dfrac{d\vec L'}{dt} = \vec M'^{(E)}$

DINAMICA ROTAZIONALE DEL CORPO RIGIDO



$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = costanti, \forall i,j$

Conseguenza dei legami chimici rappresentati dalle forze interne $\vec{F}_{ij}$



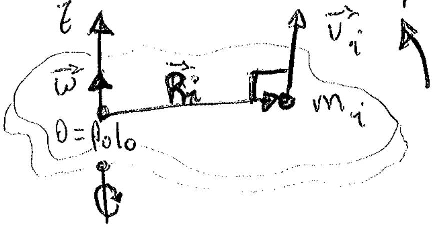
N.B.: l'asse di rotazione è fisso

$\Rightarrow \vec{v}_p = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E - M\vec{v}_p \wedge \vec{v}_{cm} \quad ; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$$

CALCOLO DEL MOMENTO ANGOLARE e DEF. MOMENTO DI INERZIA

• Caso di un corpo piatto:



REGOLA DELL'AVVITAMENTO

• se $\vec{\omega}$ ↑, rotazione ↺

• se $\vec{\omega}$ ↓, rotazione ↻

N.B.: $\vec{R}_i$ e $\vec{v}_i$ giacciono in x,y e sono tali che $\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{R}_i \wedge \vec{v}_i = \cancel{\sum_i m_i r_i v_i \vec{\mu}_z} \sum_i m_i R\vec{\mu}_x \wedge v\vec{\mu}_y$$

$$= \sum_i (m_i R v)\, \vec{\mu}_x \wedge \vec{\mu}_y \sim \vec{\mu}_z \Rightarrow \vec{L} = \sum_i m_i R v\, \vec{\mu}_z$$

So che nel moto circolare $v_i = R_i \omega$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i m_i (R_i \omega) R_i \vec{\mu}_z = \sum_i m_i R_i^2 (\omega \vec{\mu}_z)$$

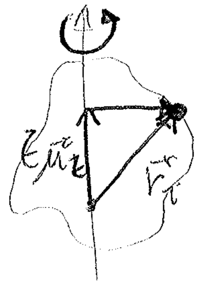
~ def. vel. angolare $\vec{\omega} = \omega \vec{\mu}_z$

Momento di Inerzia (I_z)

$$\Rightarrow \vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

N.B.: • per un corpo piatto $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

• $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{R}_i = \omega \vec{\mu}_z \wedge R_i \vec{\mu}_R = \omega R_i \vec{\mu}_v$



$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \Rightarrow$$

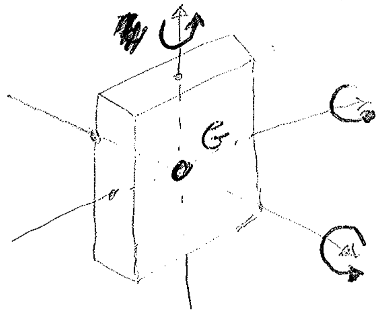
$$\vec{L} = I_z\vec{\omega} - \omega\sum_i m_i z_i R_i = \vec{L}_z + \vec{L}_{xy}$$

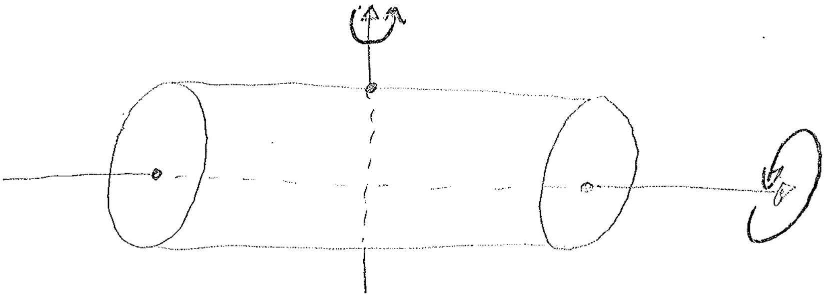
ASSI PRINCIPALI DI INERZIA

Si può dimostrare che, per ogni punto di un corpo generico, si possono definire 3 assi ortogonali, chiamati ASSI PRINCIPALI DI INERZIA, tali che, se l'asse di rotazione coincide con uno di essi, allora:

$$\vec{L} = I_z\vec{\omega} \Rightarrow \vec{L}_{xy} = 0$$

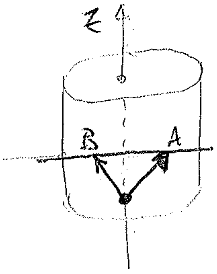
- CASO SEMPLICE:





N.B.: Considero corpi omogenei dotati di simmetria

Per cui, dato un corpo simmetrico, avremo:



$$\forall m_i, \exists m_j = m_i \mid z_j = z_i ; R_j = -R_i$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{xy} = -\omega\sum_i m_i z_i \vec{R}_i$$

$$\Rightarrow L_{xy} = -\omega\sum\left(m_1 z_1 R_1 + m_2 z_2 \vec{R}_2 \dots + m_n z_n \vec{R}_n + - m_1 z_1 R_1 - m_2 z_2 \vec{R}_2 - \dots - m_n z_n \vec{R}_n\right)$$

$$\Rightarrow \vec{L} = L_z + \overset{\sim 0}{\vec{L}_{xy}} = I_z\vec{\omega}$$, che rappresenta :(

CENTRO DI MASSA DI INERZIA

N.B.: Possiamo riscrivere $\vec{L}_{xy}$, per corpi simmetrici, come:

$$\vec{L}_{xy} = -\omega\sum_i m_i z_i (R_i + R_j) = -\omega\sum_i m_i z_i R_i + \omega\sum_i m_i z_i R_i = 0$$

(Riferendoci alla Dim. del CASO 2):

Notiamo che l'asse attorno al quale si ha rotazione, asse z_1 corrisponde all'asse attorno al quale si ha il momento $(\vec{M}^E)$. C'è poi un secondo momento $(\vec{M}_{RV})$ che crea una rotazione che tende a portare il corpo fuori asse, il che è reso impossibile dalle reazioni vincolari (A, B)

Per cui:

$$I\vec{\alpha} = \vec{M}^E + \boxed{\vec{M}_{RV}}$$

~ Momento delle reazioni vincolari, cioè quel movimento atto a portare il corpo fuori asse, il tutto impedito dai vincoli

$$\Rightarrow I\vec{\alpha} = \Sigma_i R_i \wedge F_i^E \quad , \text{con } \vec{M}_{RV} + \vec{\mu}_z \wedge \Sigma_i z_i \vec{F}_i^E = 0$$

- DIMOSTRAZIONE CASO 1:

$$\vec{L} = I_z\vec{\omega} + \vec{L}_{xy} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_z\vec{\omega} + \vec{L}_{xy}\right) = \vec{M}^E_{TOT}$$

$$\Rightarrow \vec{M}^E_{TOT} = I_z\vec{\alpha} + \frac{d}{dt}\vec{L}_{xy} = I_z\vec{\alpha} + \frac{d}{dt}\left(-\omega \Sigma_i m_i z_i \vec{R}_i\right)$$

$$= I_z\vec{\alpha} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\left(\Sigma_i m_i z_i \vec{R}_i\right) - \omega \Sigma_i m_i z_i \boxed{\frac{d\vec{R}_i}{dt}} \sim \vec{\omega} \wedge \vec{R}_i$$

$$= I_z\vec{\alpha} + \frac{\omega'}{\omega}\vec{L}_{xy} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_{xy}$$

~ Vettori planari

$$\Rightarrow \vec{M}^E_{TOT} = I_z\vec{\alpha} + \cancel{\frac{d}{dt}\vec{L}_{xy}} = \Sigma_i R_i \wedge \vec{F}_i^E + \vec{M}_{RV}$$

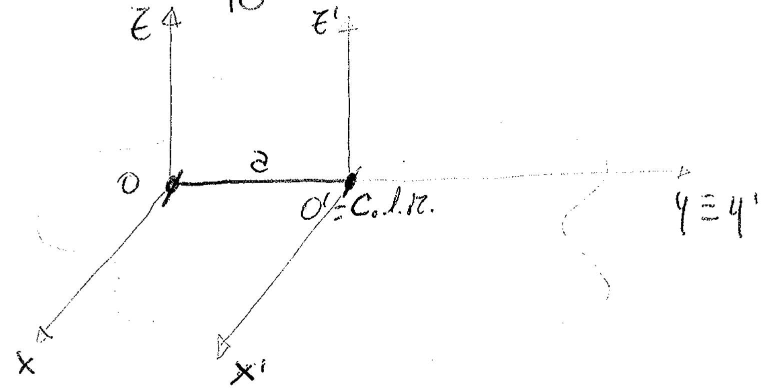
?

$$\Rightarrow \vec{M}^E_{TOT} = I_z\vec{\alpha} = \Sigma_i \vec{R}_i \wedge \vec{F}_i^E$$

$$\Rightarrow I_z\vec{\alpha} = \vec{M}^E // z$$

CALCOLO DEL MOMENTO DI INERZIA

TEO. Huygens Steiner



Se un asse di rotazione è parallelo ad un asse passante per il centro di massa, allora il suo momento inerziale è:

$$I = I_{cm} + Ma^2$$

Dim:

$I_{cm} = \sum_i m_i R^2$, N.B.: $R_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, $y_i = a + y_i'$

$$\Rightarrow I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i \left[x_i'^2 + (a + y_i')^2\right]$$

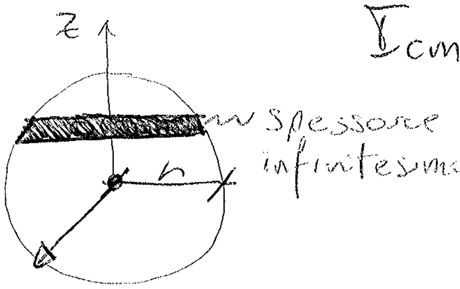
$$= \sum_i m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 + 2a y_i' + a^2\right)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2\right)}_{I_{cm}} + \underbrace{2a \sum_i m_i y_i'}_{0} + a^2 \underbrace{\sum_i m_i}_{M_{tot}}$$

0, perché è la coordinata del c.d.m. rispetto al c.d.m.

$$\Rightarrow I = I_{cm} + ma^2 \quad \text{C.V.D.}$$

- Esempio di:



I_{cm} per una sfera piena

$$R^2 = r^2 + z^2$$

$$\rho = \frac{m_{TOT}}{V_{sfera}} = \frac{m_{TOT}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\Rightarrow dI = \frac{1}{2} r^2 \, dm = \frac{1}{2} r^4 \rho \pi \, dz$$

$$\Rightarrow I_{cm} = \int dI = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} \rho \pi r^4 \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 \, dz$$

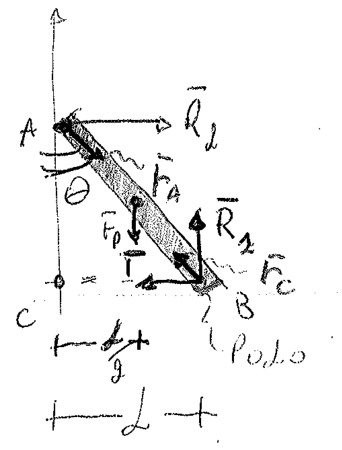
$$= \rho \pi \int_{0}^{R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) \, dz$$

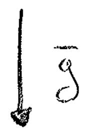
$$= \rho \pi \left(R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5\right)$$

$$\Rightarrow I_{cm} = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{15}_{1}} \frac{m_{TOT}}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cancel{\pi} \cancel{R^3}} \cancel{\pi} R^{\cancel{5}^{2}}$$

$$\Rightarrow I_{cm} = \frac{2}{5} m_{TOT} R^2$$

- Esempio:

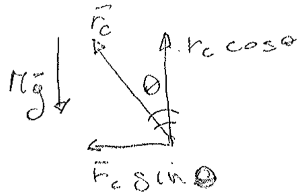




θ, M, L = NOTE

$$\begin{cases} \bar R_1 + \bar R_2 + \bar T + M\bar g = 0 \\ \bar F_C \wedge M\bar g + \bar F_A \wedge \bar R_2 = 0 \end{cases}$$

ANALIZZO $\bar F_C \wedge M\bar g$



perché $M\bar g \,//\, \bar F_C\cos\theta$

$$\bar F_C \wedge M\bar g = F_C\sin\theta \wedge M\bar g + \cancel{\bar F_C\cos\theta \wedge M\bar g}$$

$$= \bar F_C\sin\theta \wedge M\bar g = \text{[illegible]}\, r_C\sin\theta Mg(-\bar\mu_x)\wedge(-\bar\mu_y)$$

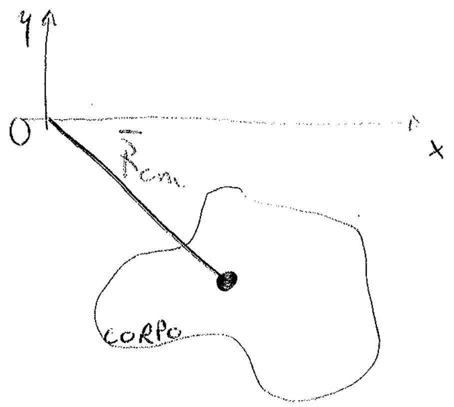
$$= r_C\sin\theta Mg\,\bar\mu_z = \frac{1}{2}L\,Mg\sin\theta\,\bar\mu_z$$

ANALIZZO $\bar F_A \wedge \bar R_2$

Discorso Analogo $\Rightarrow$ $\bar F_A \wedge \bar R_2 = -\bar\mu_z L R_2\cos\theta$

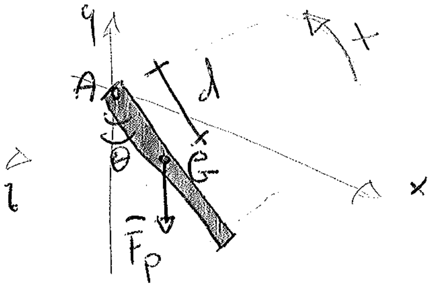
$$\begin{cases} y)\; R_1 - Mg = 0 \;;\; R_1 = Mg \\ x)\; R_2 - T = 0 \;;\; R_2 = T \\ \frac{1}{2}L\,Mg\sin\theta - L R_2\cos\theta = 0 \;;\; R_2 = \frac{1}{2}Mg\,tg\,\theta \end{cases}$$

PENDOLO FISICO



Momento delle forze di gravità (Moto Planare)

$$\bar{M}_g^E = \sum_i r_i \wedge \bar{g} m_i = \left(\sum_i m_i r_i\right) \wedge \bar{g} = M \bar{R}_{cm} \wedge \bar{g}$$



A = C.d.R. = Vincolo

→ Momento Angolare → Momento d'Inerzia

RICORDO: $\bar{L} = I_z \bar{\omega}$; $\bar{I}_z = I_{cm} + Md^2$

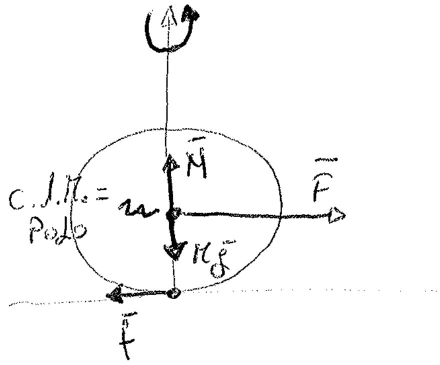
$$\bar{M}^E = \frac{d\bar{L}}{dt} \Rightarrow M \bar{R}_{cm} \wedge \bar{g} = \bar{M}^E \text{ , Allora}$$

$$\bar{M}^E = -Mdg \sin\theta \, \bar{\mu}_z \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \bar{\omega}) = -Mgd \sin\theta \, \bar{\mu}_z$$

$$\Rightarrow I_z \theta'' \cancel{\bar{\mu}_z} = -Mgd \sin\theta \cancel{\bar{\mu}_z} \; ; \; \theta'' = -\frac{Mgd \sin\theta}{I_z}$$

$$\Rightarrow \theta'' + \frac{Mgd}{I_z} \sin\theta = 0$$

N.B: Se G (baricentro) sta sul CENTRO DI MASSA, Allora $d = 0 \Rightarrow \theta'' = 0$ = NO OSCILLAZIONI



$$\begin{cases} \bar F + M\bar g + \bar N + \bar f = M\bar A_{cm} \\ \dfrac{d\bar L}{dt} = \bar M^E = \bar r \wedge \bar f \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\bar\mu_x + f(-\bar\mu_x) = M A_{cm}\bar\mu_x \;;\; \underline{F - f = M A_{cm}} \\ N\bar\mu_y + Mg(-\bar\mu_y) = 0 \;;\; N - Mg = 0 \\ \dfrac{d\bar L}{dt} = \bar M^E \Rightarrow I \underbrace{\dfrac{d\omega}{dt}}_{\alpha} \bar\mu_z = R(-\bar\mu_y) \wedge f(-\bar\mu_x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F - f = M A_{cm} \;;\; F = \dfrac{Ia}{R^2} + M A_{cm} \\ I\alpha = -Rf \;;\; I\left(-\dfrac{a}{R}\right) = -Rf \;;\; f = \dfrac{Ia}{R^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{F}{M + I/R^2} \\ f = \dfrac{Ia}{R^2} \;;\; f = \dfrac{I}{R^2} \cdot \dfrac{F}{M + I/R^2} \end{cases}$$

N.B.: il moto di puro rotolamento "resiste" fino a che:

$$f \le F_a^{max} = \mu_s Mg \Rightarrow f \le \mu_s Mg$$

$$\Rightarrow \frac{IF}{MR^2 + I} \le \mu_s Mg \;;\; F \le \underbrace{\frac{Mg\mu_s}{I}(MR^2 + I)}_{\text{valore max consentito}}$$

Se $F > \dfrac{Mg\mu_s}{I}(MR^2 + I)$, Allora abbiamo un

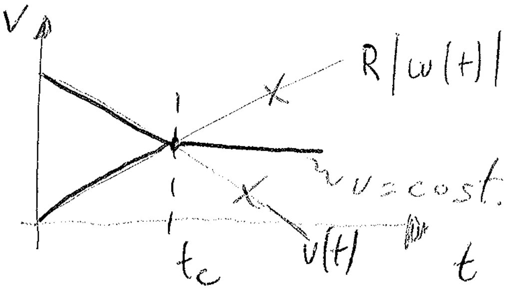
REGIME MISTO: Rotazione + **Strisciamento**

CASO SEMPLICE

Rispetto al caso visto a pag 55, c'è anche un caso più semplice

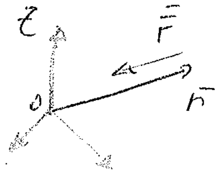
$F = 0$; $a = \frac{F}{m} - \mu_d g \Rightarrow a = -\mu_d g$

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - |a| t \\ \omega(t) = -|\alpha| t \end{cases}$$



N.B.: In questo caso (rispetto a quanto visto nel caso precedente) ho necessariamente moto di puro rotolamento, in quanto v(t) è decrescente mentre ω(t) è crescente, il che implica che ci sarà un punto di incontro (t_c)

CONSIDERIAMO SOLO 2 PARTICELLE



$$\Delta W^I = \int_{A_1}^{B_1} \bar F_{21}\, d\bar r_1 + \int_{A_2}^{B_2} \bar F_{12}\, d\bar r_2$$

N.B.: $\bar F(\bar r) = -\frac{k}{r^2}\,\bar\mu_r = -\frac{k\,\bar r}{r^3}$

$$\bar F_{21} = -\nabla_{\bar r_1} \underbrace{E_p(\bar r_1 - \bar r_2)}_{-\frac{k}{|\bar r_1 - \bar r_2|}}$$

$$\Rightarrow \bar F_{21} = -\bar F_{12} = -\frac{k(\bar r_1 - \bar r_2)}{|\bar r_1 - \bar r_2|^3} \longleftrightarrow \bar F_{12} = -\frac{k\overbrace{(\bar r_2 - \bar r_1)}^{\bar r}}{\underbrace{|\bar r_2 - \bar r_1|^3}_{r^3}} = -\frac{k\,\bar r}{r^3}$$

- Tornando al lavoro ΔW^I:

$$\Delta W^I = \int_{A_1}^{B_1} \bar F_{21}\, d\bar r_1 + \int_{A_2}^{B_2} \bar F_{12}\, d\bar r_2 = \int_{A_1}^{B_1} \bar F_{21}\, d\bar r_1 - \int_{A_2}^{B_2} \bar F_{21}\,(d\bar r_1 + d\bar r)$$

$$= \cancel{\int_{A_1}^{B_1} \bar F_{21}\, d\bar r_1} - \int_{A_2}^{B_2} \bar F_{21}\, d\bar r - \cancel{\int_{A_1}^{B_1} \bar F_{21}\, d\bar r_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta W^I = \int_{A_2}^{B_2} \bar F_{12}\, d\bar r = \int_A^B \bar F_{12}(\bar r)\, d\bar r = -\left(E_p(\bar r_B) - E_p(\bar r_A)\right)$$

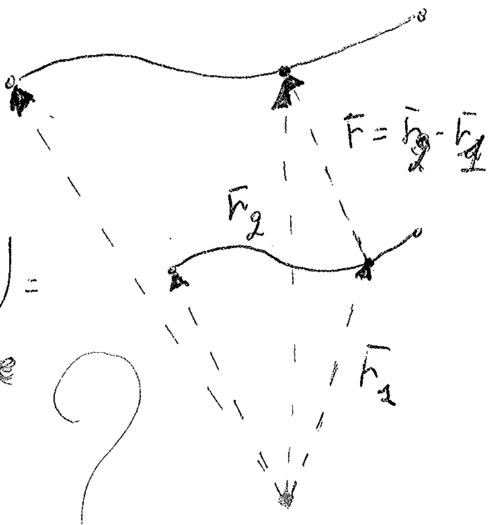
In conclusione:

$$\Delta W^I = -\left(E_p^{(1,2)}(\bar r_B) - E_p^{(1,2)}(\bar r_A)\right) =$$

$$= -\left(E_p(\bar r_{B2} - \bar r_{B1}) - E_p(\bar r_{A2} - \bar r_{A1})\right) =$$

$$= -\left(E^E_{p_B} - E^E_{p_A}\right) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\text{per non considerare delle coppie}} \sum_i \sum_{j \neq i}\left(E_{p_B}^{(ji)} - E_{p_A}^{(ji)}\right) =$$

$$= -\left(E^{TOT}_{p_B} - E^{TOT}_{p_A}\right)$$

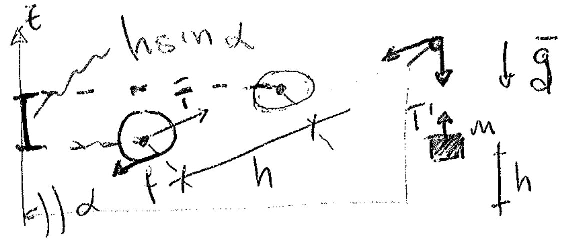


?

N.B.: $E_{p_x} = E^E_{p_x} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j \neq i} E_{p_x}^{(ji)}$

- CORPO CHE ROTOLA

$\bar{v} = V_{cm} = R|\omega|$



- $E_k = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \left(\frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{2} I_z\right)\omega^2 =$

$= \frac{1}{2}\left(M_R + \frac{I}{R^2}\right) V_{cm}^2$

- Metodo "lungo"

$$\begin{cases} MA_{cm} = T - f - Mg\sin\alpha \\ I\alpha = -Rf \\ -ma = T - mg \end{cases}$$

N.B.: • $\alpha = -\frac{a}{R}$
• $a = A_{cm}$

- CONCLUSIONE

Per ogni spostamento di: ○

$\bar{T}' = -\bar{T}$ (Spostamento negativo della massa)

Il lavoro è quindi nullo (uguale ed opposto)

$\Rightarrow E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \left(\frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2\right) + Mg z_{cm} + mgz$

$= \frac{1}{2}\left(m + M + \frac{I}{R^2}\right) v^2 + Mg z_{cm} + mgz$

$\Rightarrow E_k^B - E_k^A = -\left(E_p^B - E_p^A\right)$ N.B.: $v_A = 0 \Rightarrow t = 0$
$\Rightarrow E_k^A = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m + M + \frac{I}{R^2}\right) v_B^2 = -\left(Mg\overbrace{\left(z_{cm_B} - z_{cm_A}\right)}^{\sim h\sin\alpha} - mg\overbrace{\left(z_B - z_A\right)}^{\sim h}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m + M + \frac{I}{R^2}\right) v_B^2 = -Mg\,h\sin\alpha + mgh$

• URTO ANAELASTICO

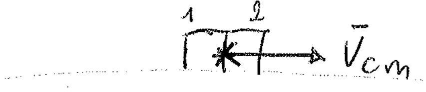
L'urto anaelastico è caratterizzato solo dalla conservazione della quantità di moto perchè l'altra va persa.

$\Rightarrow m_1\bar v_1 + m_2\bar v_2 = m_1\bar v_1' + m_2\bar v_2'$

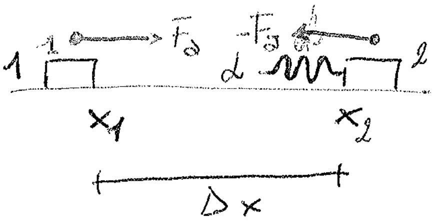
N.B.: Se l'urto è completamente anaelastico, le due masse a contatto formano un'unica massa.

$\Rightarrow \bar v_1' = \bar v_2' \Rightarrow m_1\bar v_1 + m_2\bar v_2 = (m_1+m_2)\bar v'$ ⤳ velocità del centro di massa

$\underline{\underline{= M\bar V_{cm}}}$



Esempio:

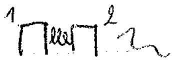


• Nella fase di contatto

$$E = \frac{1}{2}m_1\bar v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}k(\overbrace{x_2-x_1}^{\Delta x}-l)^2$$

• Nella fase iniziale

$$E = E_K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$



⤳ situazione di max avvicinamento $\Rightarrow \bar V_1 = \bar V_2$

$m_1 a_1 = -F_a$; $m_2 a_2 = +F_a$

$m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0 \iff F_a^1 + F_a^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0 \Rightarrow \underline{m_1 v_1 + m_2 v_2 = cost.}$

$\omega_1' = -F_a\Delta s$ avanti

$\omega_2' = F_a(-\Delta s)$ indietro

$\Rightarrow \omega_1' = \omega_2' = \underline{\underline{-2F_a\Delta s \neq 0}}$

Tenendo in considerazione le formule precedenti

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Noto che avrò 3 CASI PARTICOLARI:

1. $m_1 >> m_2 \quad \begin{cases} v_2' = 2v_1 - v_2 \\ v_1' = v_1 \end{cases}$

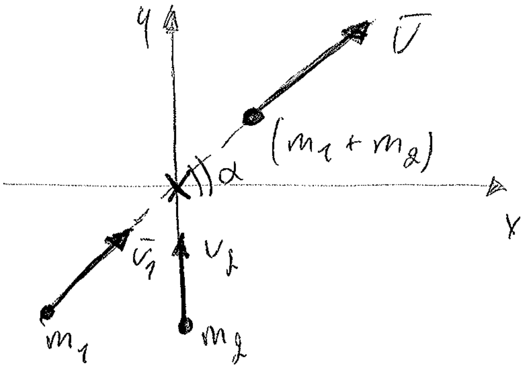
2. $m_1 = m_2 \quad \begin{cases} v_2' = v_1 \\ v_1' = v_2 \end{cases}$

3. $m_2 >> m_1 \quad \begin{cases} v_2' = v_2 \\ v_1' = 2v_2 - v_1 \end{cases}$

- Esempio (Urto Anelastico Bidimensionale)

Dati $\begin{cases} m_1 ; \bar{v}_1 (3,5)\ m/s \\ m_2 ; \bar{v}_2 (0,8)\ m/s \end{cases}$, So inoltre che: $\underline{m_2 = \frac{1}{4} m_1}$

Quale angolo forma la massa emergente dall'urto rispetto all'asse x?



La prima incognita è $\bar{V}$ $\begin{cases} V_y (\mu_y) \\ V_x (\mu_x) \end{cases}$

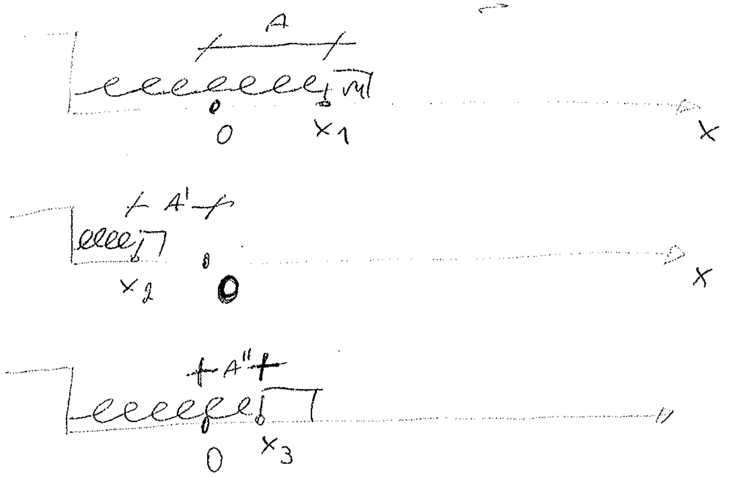
$$\begin{cases} m_1 v_1 (\mu_x) + \cancel{m_2 v_2 (\mu_x)} = (m + \pi) V_x (\mu_x) \\ m_1 v_1 (\mu_y) + m_2 v_2 (\mu_y) = (m + \pi) V_y (\mu_y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x = \cancel{\dfrac{3 m_1}{m_1 + \frac{m_1}{4}}} = \dfrac{12}{5}\ m/s \\ V_y = \dfrac{5 m_1 + 8 \left(\frac{m_1}{4}\right)}{m_1 + \frac{m_1}{4}} = \dfrac{28}{5}\ m/s \end{cases}$$

$$\Rightarrow tg\, \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{7}{3}$$

• Esempio

Oscillatore Armonico Smorzato
Da una forza di attrito costante
(MOTO PSEUDO-PERIODICO)



N.B.: $A^n < A^{n-1}$

$v_{x_1} = 0$

$v_{x_2} = 0$

$v_{x_3} = 0$

1° tratto (x_1 a x_2)

$$\underbrace{E_k^f - E_k^i}_{\hookrightarrow 0} = -(E_p^f - E_p^i) + \int_{x_i}^{x_f} F_a \, dx$$

$$-\left(\frac{1}{2} k \overset{\sim A'}{x_f^2} - \frac{1}{2} k \overset{\sim A}{x_i^2}\right) + \mu_d m g \left(\overset{\sim A'}{x_f} - \overset{\sim A}{x_i}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} k (A'+A)(A'-A) = \mu_d m g (-A'-A) \; ; \quad \frac{1}{2} k (A'-A) = -F_d$$

$$A' = A - 2F_a/k$$

2° tratto (x_2 a x_3)

$$\cancel{E_k^f - E_k^i} = -(E_p^f - E_p^i) - \mu_d m g \int_{x_i}^{x_f} ds \; ; \quad -\frac{1}{2} k \left(\overset{\sim A''}{x_f^2} - \overset{\sim A'}{x_i^2}\right) - F_a \left(\overset{\sim A''}{x_f} - \overset{\sim A'}{x_i}\right) = 0$$

$$+\frac{1}{2} k \left((A'')^2 - (A')^2\right) = -\mu_d m g (A' + A'') \; ;$$

$$\frac{1}{2} k (A'' - A') = -F_d \; ; \quad A'' = A' - 2F_a/k$$

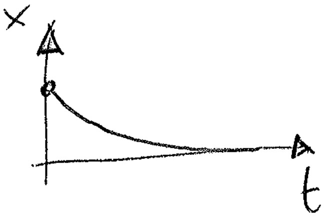
$$\Rightarrow A'' = A - 4F_a/k$$

N.B.: il corpo si ferma quando la Forza elastica non vince la Forza di attrito statico

SMORZAMENTO FORTE

$\gamma >> \omega_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{-Rt} + B e^{Rt}\right]$$



So che $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, per cui $\gamma^2 > \omega_0^2$

implica $\frac{\lambda^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$; $\lambda^2 > 4mk$

SMORZAMENTO CRITICO

$\gamma \longrightarrow \omega_0$

TS: $x(t) = e^{-\gamma t}(at+b)$

$$x(t) = Ae^{-tR} + Be^{tR} \quad \text{(con Taylor)}$$

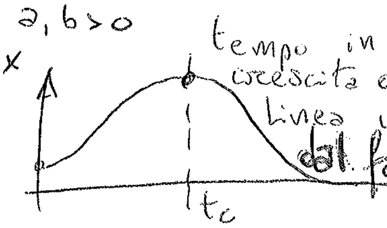
$$x(t) = A(1 - tR + \dots) + B(1 + tR + \dots) =$$

$$x(t) = A + B + (B-A)Rt$$

ma siccome A, B sono quantità arbitrario, posso dire:

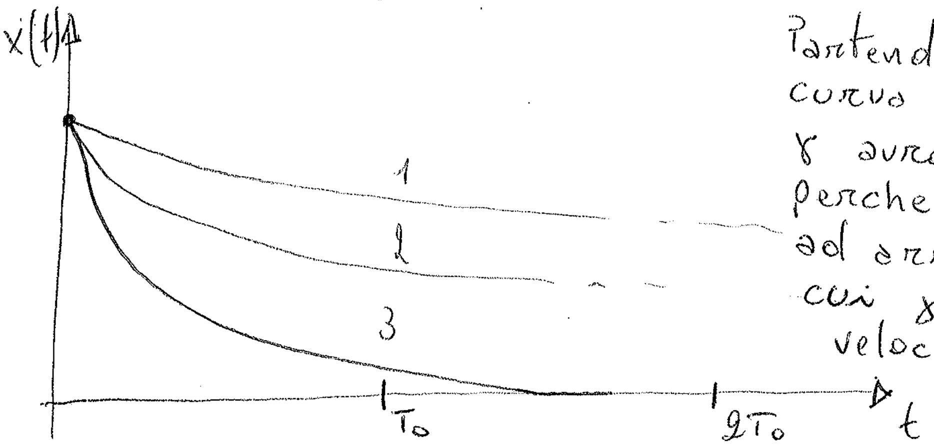
$A + B = b$; $(B-A)R = a$

$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}(at+b)$ c.v.d.



tempo in cui la crescita del fattore di linea viene smorzato dal fattore esponenziale

sapendo che $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (periodo oscillatore non smorzato), concludo:



Partendo da $\gamma > \omega_0$, ho la curva **1**. Facendo decrescere γ avrò smorzamento minore, perche diminuisce γ/ω_0, fino ad arrivare alla curva 3, in cui $\gamma = \omega_0$ e il punto tende velocemente ad $x = 0$ (cond. di equilibrio)

N.B.: Nel caso di smorz. forte o critico, NON ho oscillazioni!!!

OSCILLATORE ARMONICO + TERMINE FORZANTE (Es. Motore)

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

$$\underbrace{X(t)}_{\text{Sol. generale}} = \underbrace{x(t)}_{\text{Sol. omogenea}} + \underbrace{x_{sp}(t)}_{\text{sol. particolare}}$$

ip: $x(t) = \underbrace{A \sin(\omega t + \theta)}_{\text{parametri liberi}}$, $t \to \infty \Rightarrow x(t) = 0$ (No smorzamento)

$$x'(t) = \omega A \sin(\omega t + \theta) \quad ; \quad x''(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta)$$

$$\Rightarrow -\omega_0^2 A \sin(\omega t + \theta) + 2\gamma\omega A \cos(\omega t + \theta) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \theta) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

So che:
- $\sin(\omega t + \theta) = \sin \omega t \cos \theta + \sin \theta \cos \omega t$
- $\cos(\omega t + \theta) = \cos \omega t \sin \theta - \sin \omega t \cos \theta$

$$\Rightarrow A(\omega_0^2 - \omega^2)(\sin \omega t \cos \theta + \sin \theta \cos \omega t) +$$
$$+ 2\gamma\omega A(\cos \theta \cos \omega t - \sin \theta \sin \omega t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \left[A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \theta + 2\gamma A\omega \cos \theta\right] \cos \omega t +$$
$$+ \left[A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \theta - 2\gamma A\omega \sin \theta - \frac{F_0}{m}\right] \sin \omega t = 0$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \theta + 2\gamma\omega \cos \theta = 0 \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \theta - 2\gamma A \sin \theta = \frac{F_0}{m} \end{cases}$$

So che $\begin{cases} 2\gamma\omega = -R \sin \theta \\ \omega_0^2 - \omega^2 = R \cos \theta \end{cases}$ FORMULA ①

$$\Rightarrow \begin{cases} R \cos \theta \sin \theta - R \sin \theta \cos \theta = 0 \quad \surd \\ AR \cos^2 \theta + AR \sin^2 \theta = \frac{F_0}{m} \end{cases}$$ FORMULA ②

$$AR(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{F_0}{m} \; ;$$

$$AR = \frac{F_0}{m}$$

3)

$$\omega = \omega_0 \qquad tg\,\theta = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \pm\infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{F_0}{2m\gamma\omega} \qquad \underline{x(t) = A\sin(\omega t+\theta) = A\cos\omega t}$$

Siamo in quadratura di fase.
Con queste condizioni il parametro dominante è γ, coeff. di smorzamento. Se γ è troppo piccolo, le ampiezze saranno troppo grandi e il materiale viene portato a rottura.
In questi casi, con γ parametro dominante, si parla di RISONANZA.

Data $A(\omega_0) = \dfrac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$ voglio trovare il massimo ($A_{max} = A(\omega_R)$), allora

$$\underline{\frac{dA}{d\omega} = 0} \Rightarrow \underline{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} \Rightarrow \underline{A_M = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2-4\gamma^2}}} \rightarrow A(\omega_0)$$

• Dimostro:

$$\frac{F}{m}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\right) = 0 ,$$

$$\Rightarrow -\left\{\frac{1}{2}\left[2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+8\gamma^2\omega\right]\cdot\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{-1}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow 2\omega(\omega_0^2-\omega^2) - 4\gamma^2\omega = 0, \quad \cancel{\omega}(\omega_0^2-\omega^2) - 2\gamma^2\cancel{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2-\omega^2-2\gamma^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2} \quad \text{C.V.D.}$$

N.B.: questa è una particolarità del caso 3, con $\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_R$ tende a ω_0 e $A_M \rightarrow \infty$

Ricordo che

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T A\omega F_0\left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin 2\omega t - \sin\theta\sin^2\omega t\right)dt$$

e faccio alcune considerazioni:

Modulando su un periodo, • $\sin 2\omega t = 0$

• $\sin^2\omega t = \frac{1}{2}$

per cui rimane:

$$\langle P(t) = +\frac{1}{T}\int_0^T -\frac{1}{2}A\omega F_0\sin\theta\, dt = -\frac{1}{2T}A\omega F_0\sin\theta\int_0^T dt$$

$$= -\frac{1}{2\cancel{T}}A\omega F_0\sin\theta\,\cancel{T}$$, Allora

$$\langle P(t)\rangle = -\frac{A\omega F_0}{2}\sin\theta$$, ricordo inoltre che il seno posso esprimerlo come:

$$\sin\theta = \frac{tg\,\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}}$$, ma, essendo nel III Regime,

$$tg\,\theta = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$, per cui:

$$\sin\theta = -\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}};$$

So anche che: $A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$

$$\Rightarrow \langle P(t)\rangle = -\frac{1}{2}\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\cdot F_0\omega\cdot(-2\gamma\omega)$$

$$\langle P(t)\rangle = \frac{\gamma F_0^2\omega^2}{m\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]} = \gamma m\omega^2 A(\omega)^2$$

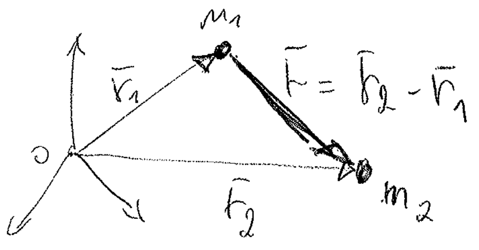
INTERAZIONE GRAVITAZIONALE DEI PIANETI

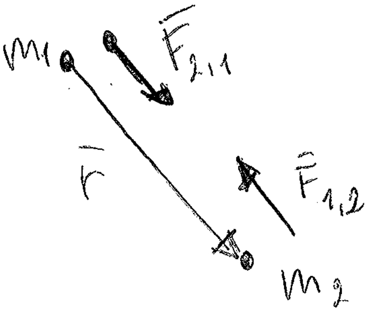
LEGGI DI KEPLERO

- I Legge: Le orbite dei pianeti sono ellissi e il sole è uno dei due fuochi della stessa.
- II Legge: il vettore posizione di ogni pianeta rispetto al sole spazza aree uguali in tempi uguali (vel. areolare = cost.)
- III Legge: $\underline{T^2 = kR^3}$; $R = \frac{r_1 + r_2}{2}$

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$F_{12} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$; γ (cost. gravitazionale) ! $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$





$\bar F_{12} = - \bar F_{21}$

$$\bar F_{12} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}\bar\mu_r \; ; \quad \bar F_{12} = -\frac{\gamma m_1 m_2 \bar r}{r^3}$$

$$\bar F_{12} = -\frac{\gamma m_1 m_2 (\bar r_2 - \bar r_1)}{(r_2 - r_1)} \; ; \quad \bar F_{21} = \frac{\gamma m_1 m_2 (\bar r_2 - \bar r_1)}{(r_2 - r_1)}$$

RELAZIONE TRA EN. POTENZIALE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE E LA FORZA DEL CAMPO GRAVITAZIONALE

$$\bar{F}(\bar{r}) = -\nabla_{\bar{r}} E_p(\bar{r}) = -\nabla_{\bar{r}} \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{E}_p^{(i)}(\bar{r}) \right)$$

$$= -\nabla_{\bar{r}} \sum_i -\frac{\gamma m m_i}{(r-r_i)} = \sum_i \gamma m m_i \nabla_{\bar{r}} \frac{1}{(r-r_i)}$$

$$= \sum_i \gamma m m_i \left(-\frac{(\bar{r}-\bar{r}_i)}{(r-r_i)^3} \right) = m \bar{g}_i(\bar{r}_i)$$

$$\bar{V}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_i(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\gamma m_i}{(r-r_i)}$$

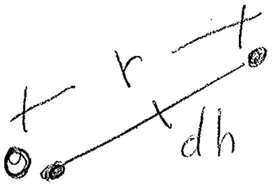
Potenziale

$$g(\bar{r}) = -\nabla_{\bar{r}} \bar{V}(\bar{r}) \quad ; \quad \underline{mV = E_p}$$

Dimostro $g = 9{,}8 \; m/s^2$

$$\bar{F} = F(r) = m g$$

$$= \gamma \frac{mM}{r^2} = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2}$$



M nell'origine

$r_1 = 0 \; ; \; i = 1$

$$\Rightarrow F(r) = \frac{\gamma m M}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

N.B.:
- γ = cost. gravitazionale
- R = raggio terrestre
- M = massa della Terra

$r = R + h$, se $h \ll R$

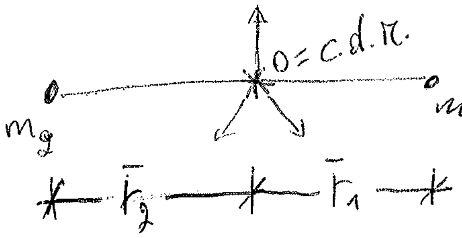
$$F = \frac{\gamma m M}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow F(R+h) \simeq \boxed{\frac{\gamma M}{R^2}} m = mg \qquad \text{C.V.D.}$$

$$\sim g = 9{,}8 \; m/s^2$$

APPROSSIMAZIONE DEL SISTEMA SOLARE COME INTERAZIONE TRA DUE CORPI

Origine = C.d.M.



N.B.: questa è una semplificazione grafica, in quanto, data $m_1 = m_{sole}$, il C.d.M. sarebbe quasi sovrapposto ad esso

$\bar{r} = \bar{r}_2 - r_1$ = vettore posizione relativa di $\bar{r}_2$ rispetto ad $\bar{r}_1$
(scelgo $\bar{r}_2$ perché m_2 si muove rispetto a $m_1 = m_{Sole}$)

$$\begin{cases} \bar{r}_1 = -\dfrac{m_2 \bar{r}}{M} \\ \bar{r}_2 = \dfrac{m_1 \bar{r}}{M} \end{cases}$$

$$\bar{R}_{cm} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{M} = \left[m_1 \left(-\frac{m_2 \bar{r}}{M} \right) + m_2 \left(\frac{m_1 \bar{r}}{M} \right) \right] \cdot \frac{1}{M}$$

$$= \left[\frac{\overset{\nearrow 0}{-m_1 m_2 \bar{r} + m_2 m_1 \bar{r}}}{M} \right] \cdot \frac{1}{M} = 0 \quad \text{C.V.D.}$$

Dal vettore posizione relativa deduco il vettore velocità relativa

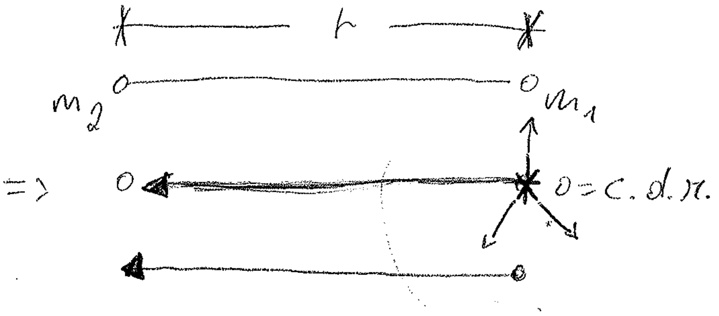
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_2}{dt} - \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$$

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = -\dfrac{m_2 \bar{v}}{M} \\ \bar{v}_2 = \dfrac{m_1 \bar{v}}{M} \end{cases}$$

[redacted] Posso ora definire l'en. cinetica

$m_1 \to \infty$

$$\begin{cases} \bar r_1 = -\frac{m_2}{M}\bar r \simeq 0 \\ \bar r_2 = +\frac{m_1}{M}\bar r \simeq +\bar r \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar v_1 = -\frac{m_2}{M}\bar v \simeq 0 \\ \bar v_2 = \frac{m_1}{M}\bar v \simeq \bar v \end{cases}$$

K_2 = velocità areolare costante

$$\frac{d\bar L}{dt} = \mu \bar r \times \frac{d\bar v}{dt} = \bar r \wedge \mu \bar a = \underbrace{\bar r \wedge \bar F}_{\text{campo di forze centrali}} = 0$$ N.B.: $\bar F // \bar r$

$\Rightarrow \bar L = \text{cost.}$

$L = \mu r^2 \phi$ $\qquad$ $A = \frac{1}{2} r^2 \phi$

$$\begin{cases} v_A = \frac{2\pi ab}{T r_A} \\ v_B = \frac{2\pi ab}{T r_B} \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 r_A^2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} = \frac{1}{2}\mu \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 r_B^2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} ;$$

$$= \frac{2\pi^2 \mu}{T^2} a^2 b^2 \left(\frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{r_B^2}\right) = \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$= \frac{2\pi^2 \mu}{T^2} a^2 b^2 \left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}\right)\cancel{\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)} = \gamma m_1 m_2 \cancel{\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2\pi^2 \mu}{T^2} a^2 b^2 \left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}\right) = \gamma m_1 m_2$$

$$\Rightarrow T^2 = \left[2\pi^2 \mu a^2 b^2 \frac{r_A + r_B}{r_A r_B}\right] \cdot \frac{1}{\gamma m_1 m_2}$$

$$= \left[2\pi^2 \mu \frac{(r_A + r_B)^2}{4} \cancel{r_A r_B} \frac{(r_A + r_B)}{\cancel{r_A r_B}}\right] \cdot \frac{1}{\gamma m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \mu}{\gamma m_1 m_2} (r_A + r_B)^3 ,$$ so che: $R = \frac{r_A + r_B}{2}$

$$\Rightarrow T^2 = \overbrace{\frac{4\pi^2 \mu}{\gamma m_1 m_2}}^{\sim K} R^3$$

$$\Rightarrow T^2 = K R^3$$ III Legge di Keplero C.V.D.

ESEMPIO DELL'ASCENSORE DI EINSTEIN

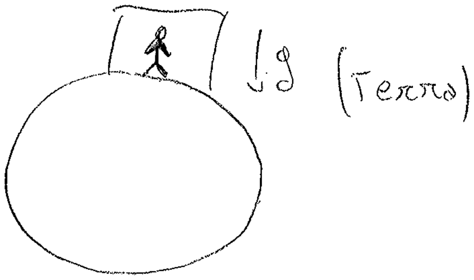
L'esperimento è quello di immaginare un ascensore spaziale che trasporta un osservatore. Se l'ascensore è spinto da una forza esterna, l'osservatore sentirà un'acc., e inizierà a muoversi verso l'alto o verso il basso. Analogalmente, in presenza di un campo gravitazionale fuori dall'ascensore (posto, questa volta, sulla Terra), la sua massa subirà delle spinte in varie direzioni. Ma, dall'interno dell'ascensore, l'osservatore non può stabilire se al di fuori c'è una forza che esercita una pressione o una massa in quiete che li attrae.

SISTEMA NON INERZIALE:

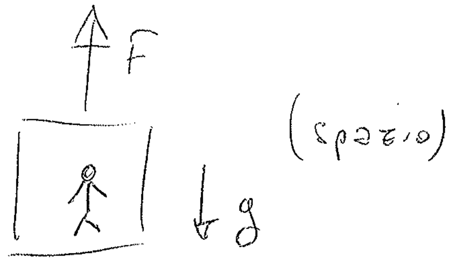
$$ma' = \underbrace{ma}_{=0} - mA$$

$$\Rightarrow ma' = -mA$$

①

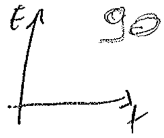


②

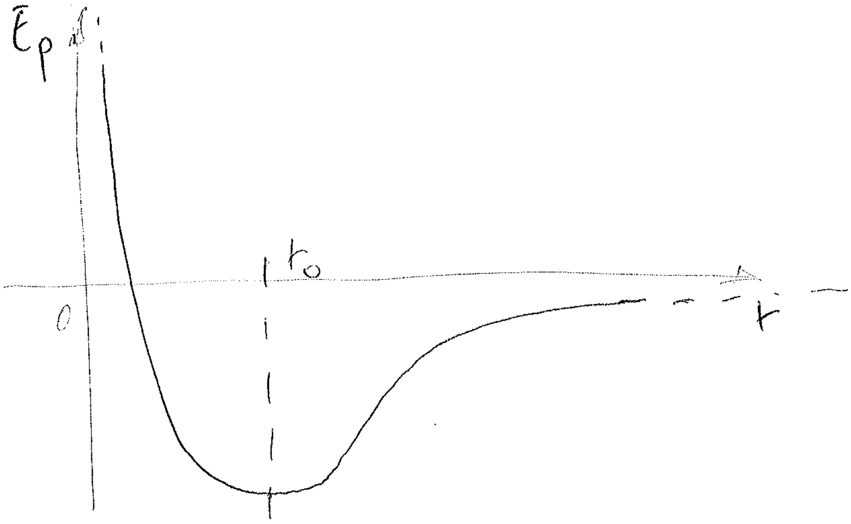


Se $m_2 \neq \tilde{m}_2$, Allora:

$$\bar{a} = -\bar{g}\,\frac{\tilde{m}_2}{m_2}$$



Riportando su grafico l'andamento dell'Energia potenziale efficace, notiamo che, per $r \to 0$ predomina $\frac{L^2}{2\mu r^2}$, mentre per $r \to \infty$, predomina E_p



$$\frac{dE_p^{eff.}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{L_z^2}{2\mu r^2} - \gamma\frac{m_1m_2}{r}\right) = \frac{d}{dr}\frac{L_z^2}{2\mu r^2} - \frac{d}{dr}\gamma\frac{m_1m_2}{r}$$

$$= -\frac{4L_z^2\mu r}{4\mu^2 r^4} + \gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$$

$$= -\frac{L_z^2}{\mu r^3} + \gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$$

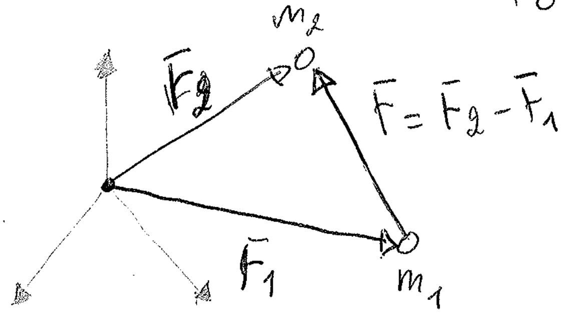
$$= \frac{1}{r^3}\left(-\frac{L_z^2}{\mu} + \gamma m_1m_2 r\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{L_z^2}{\mu} = \gamma m_1m_2 r, \quad r = r_0 = \frac{L_z^2}{\gamma\mu m_1m_2}$$

PROBLEMA (Trovare v | $r \to \infty$)

$$E = \frac{1}{2}\mu \bar{v}^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu \bar{v}^2 \geq \gamma \frac{m_1 m_2}{r_0}$$



Ricordo

- $\bar{F} = -\gamma \dfrac{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{(r_2 - r_1)^3}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$
- $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$

$$\begin{cases} m_2 \ddot{\bar{r}}_2 = \bar{F}_{12} \\ m_1 \ddot{\bar{r}}_1 = \bar{F}_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\bar{r}}_2 = \bar{F}_{12}/m_2 \\ \ddot{\bar{r}}_1 = \bar{F}_{21}/m_1 \end{cases}$$

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}_2 - \ddot{\bar{r}}_1 = \bar{F}_{12}/m_2 - \bar{F}_{21}/m_1$$

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{F}_{12}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) = \bar{F}_{12}\overbrace{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2 m_1}\right)}^{\sim \frac{1}{\mu}}$$

$$\ddot{\bar{r}} = \frac{1}{\mu}\bar{F}_{12} \quad ; \quad \mu \ddot{\bar{r}} = \bar{F}_{12}$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\bar{r}} = -\gamma \frac{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{r^3}\bar{r}$$

So anche che:

- $\dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{\mu}_r + r\dot{\theta}\bar{\mu}_\theta$
- $\ddot{\bar{r}} = \ddot{r}\bar{\mu}_r + \dot{r}\dot{\theta}\bar{\mu}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\bar{\mu}_\theta + r\ddot{\theta}\bar{\mu}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\mu_r$

$$\ddot{\bar{r}} = (r'' - r\dot{\theta}^2)\bar{\mu}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{\mu}_\theta$$

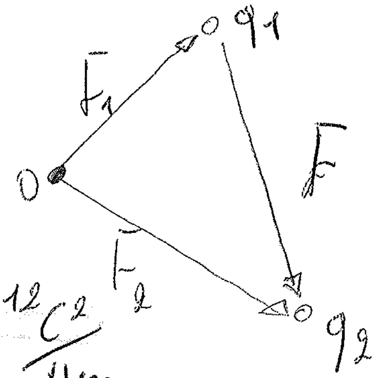
LEGGE DI COULOMB

La forza tra due cariche q_1 e q_2 è direttamente proporzionale al quadrato della distanza tra q_1 e q_2

$$\bar{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \bar{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{q_1 q_2 (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0 (r_2 - r_1)^3}$$

carica sorgente

carica di prova



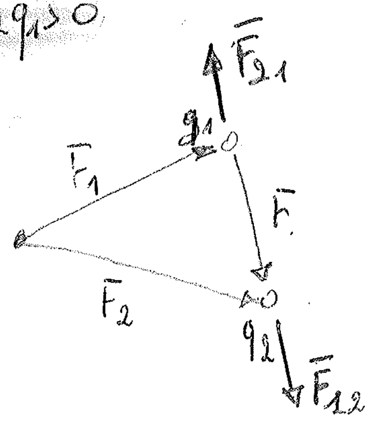
ε_0 = costante dielettrica = $8{,}8542\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm}$

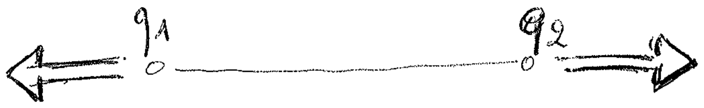
q_1 e q_2, nel S.I. si misurano in Coulomb, che rappresenta la carica trasportata in un secondo da una corrente di 1 Ampere (1A)

Come supponibile, $\bar{F}_{12} \parallel \bar{F}$, e possiamo avere due situazioni a seconda che q_1 e q_2 sono positive o negative

1. q_2, q_1 con segno concorde (Forza Repulsiva)

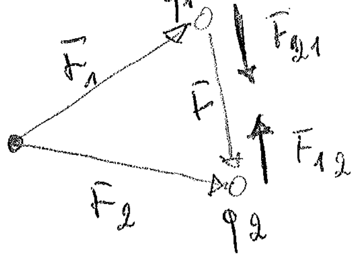
$q_2 q_1 > 0$

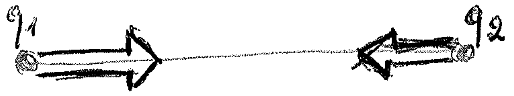




2) q_2, q_1 di segno discorde (Forze Attrattive)

$q_2 q_1 < 0$





Curiosità:

Carica dell'elettrone (-e)

- $-e = -1{,}6022\times10^{-19}\,C = \frac{-1C}{6{,}24\times10^{18}}$
- $1C = 6{,}24\times10^{18}$ elettroni