NUMERO: 1121

DATA: 22/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lingardo

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Pellerey

1ª DEF. DI COMPLETEZZA (ANK. A PAG. SUCCESSIVA)

Dati A, B sottoinsiemi di R e disgiunti tra loro, allora
A, B | $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b \longrightarrow \exists s \in R : a \leq s \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$

PROP. NUMERI REALI

1. Tutte le operazioni def. in Q si estendono al R
2. Q è DENSO in R N.B. Denso = Presi 2 reali distinti, esistono infiniti n. razionali.
3. • $x \leq y \iff (x < y) \lor (x = y)$
• $x \leq y \begin{cases} \varepsilon \geq 0 \longrightarrow x\varepsilon \leq y\varepsilon \\ \varepsilon < 0 \longrightarrow x\varepsilon \leq y\varepsilon \end{cases}$
• $|x| : \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $|x|$ indica una dist.
• Disuguaglianza Triangolare $|x+y| \leq |x| + |y|$
• $|x| \leq a \longrightarrow -a \leq x \leq +a$ • $|x - x_0| \leq a \rightarrow x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$

INTERVALLI:
• $[a, b]$ $\{\forall x \in R : a \leq x \leq b\}$ • (a, b) $\{\forall x \in R : a < x < b\}$
• $[a, b)$ $\{\forall x \in R : a \leq x < b\}$ • $(a, b]$ $\{\forall x \in R : a < x \leq b\}$

INSIEMI LIMITATI

Dato $A \subseteq R$ limitato super. [infer.] se e solo se
$\exists b \in R : a \leq b, \forall a \in A$ $[b \leq a, \forall a \in A]$

• MAGGIORANTE e MINORANTE

b è detto maggiorante [minorante] se e solo se
$b \geq a, \forall a \in A$ $[b \leq a, \forall a \in A]$

• MASSIMO e MINIMO

$b \in R$ è detto MASSIMO di A il maggiorante più piccolo [minorante più grande] e $b \in A$

• INF e SUP (Estremo inferiore e Superiore)

Dato $A \subseteq R$, il sup(A) è il minore tra i maggioranti. 2 PROPRIETÀ:
1. $\forall x \in A, x \leq \sup(A)$
2. $\forall r < \sup(A), \exists x \in A : r < x \leq \sup(A) \iff$
$\forall \varepsilon > 0 : r = \sup(A) - \varepsilon : \exists x \in A : \sup(A) - \varepsilon < x \leq \sup(A)$

Dato $A \subseteq R$, l'inf(A) è il maggiore dei minoranti. 2 PROPRIETÀ:
1. $\forall x \in A, x \geq \inf(A)$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \inf(A) \leq x < (\inf(A) + \varepsilon) \iff \forall r > \inf(A), \exists x \in A : \inf(A) \leq x < r$

(2) SUCCEDE NELL' INSIEME $\mathbb{R}$

(1) SUCCEDE NELL' INSIEME $\mathbb{Q}$ → INSIEME CONTINUATIVO!!!

FATTORIALE

$n!$ = n fattoriale = $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots [n-(n-1)]$

Es. $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \ldots \times 1$ N.B. → $0! = 1$

COEFF. BINOMIALE

Dati $k, n \in \mathbb{N}^{\oplus}$ $k \leq n$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k \cdot (n-k)!}$ oppure $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

↓

COEFF. BINOMIALE

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

n = riga ↓

k = posizione →

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k \cdot (n-k)!}$

RIGA

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

POSIZIONE

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = insieme Numeri Naturali (0, 1, 2 ...)

$\mathbb{Z}$ = insieme dei Numeri Interi Relativi (-1, 0, 1 ...)

$\mathbb{Q}$ = insieme dei Numeri Razionali (finite cifre dopo la virgola)

$\mathbb{Q}$ (periodico) = $0,\overline{9}$, $0,\overline{3}$ etc.

$\mathbb{N}^{\oplus}$ = Numeri Nat. escluso lo 0

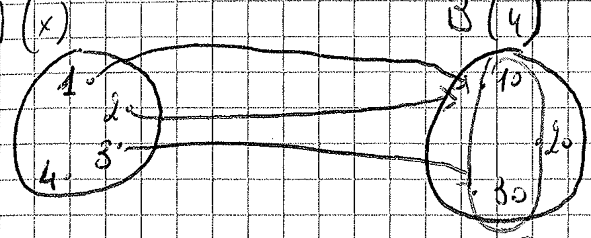
Numeri Irrazionali = infinite cifre dopo la virgola

$\mathbb{R}$ = Insieme dei Numeri Reali ($\mathbb{Q}$ + N. Irrazionali)

CONTRO IMMAGINE

Dato $f: A \mapsto B$

$y \in B$ è detto CONTRO IMM. di y l'insieme $\{x \in A : f(x) = y\}$



$f(x) \; \{1, 2, 3, 4\}$

$f^{-1}(y) = \{10, 30\}$

C $\quad 10 \in C$

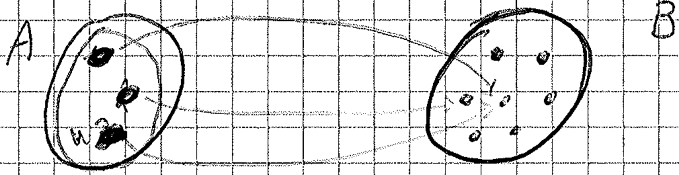
$30 \in C$

Allora Dato $C \subseteq B$ è detto CONTRO IMM di C l'insieme $\{x \in A : f(x) \in C\}$

FUNZIONI SURIETTIVE, INIETTIVE E BIUNIVOCHE (o INVERTIBILI)

SURIETTIVA

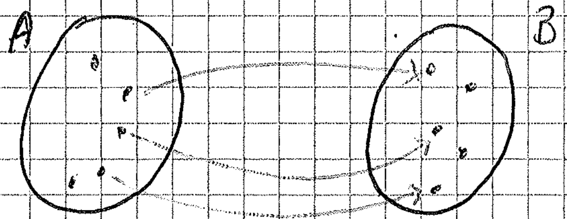
Sia $f: A \mapsto B$ è detta SURIETTIVA se $\forall y \in B \rightarrow \exists x \in A : f(x) = y$



Si SURR. xk a tutti gli $a \in A$ è corrisposto un elemento di B

INIETTIVA

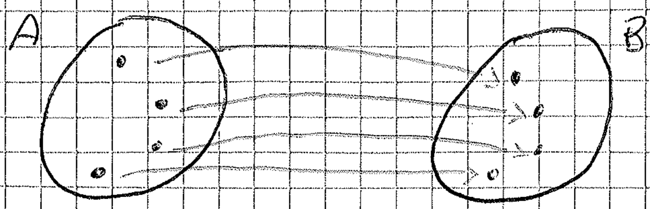
Sia $f: A \mapsto B$ è INIETTIVA se $\forall x_1 \neq x_2$ vale $f(x_1) \neq f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in A$



Si INN. xk ad ogni elemento di A è corrisposto un solo elemento di B

BIUNIVOCA (o INVERTIBILE)

Sia $f: A \mapsto B$ è detta BIUNIVOCA (o INVERTIBILE) se è contemporaneamente SURR. e INN.



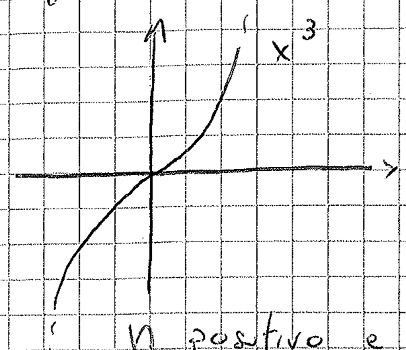
Si SURR xk tutti gli $a \in A$ sono corrisposti

Si INV xk $\forall x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

3. $y = x^n$ (FUNZ. POTENZA)

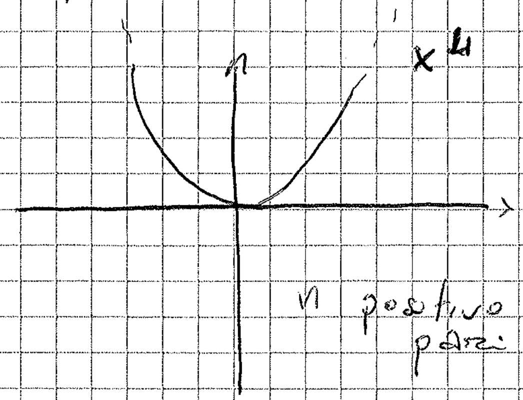
Sia $y = x^n$ con $n \in N$, allora

x^3



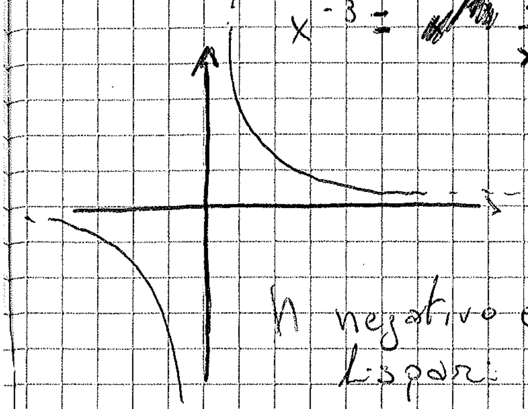
n positivo e dispari

x^4



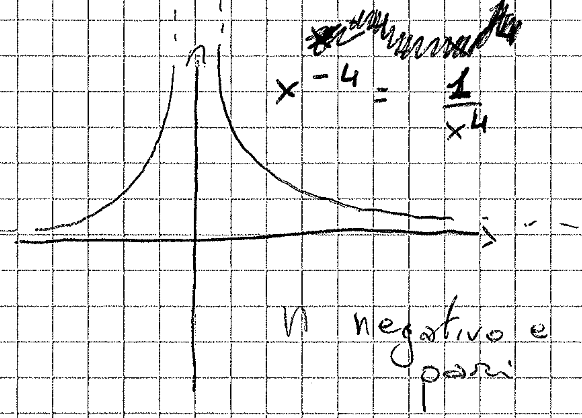
n positivo e pari

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$



n negativo e dispari

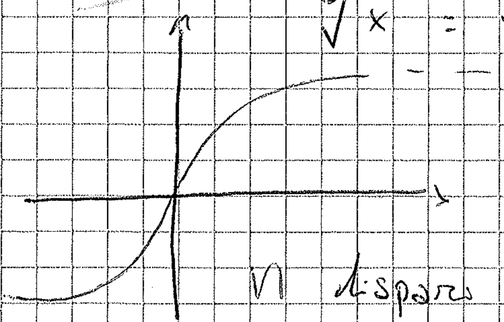
$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$



n negativo e pari

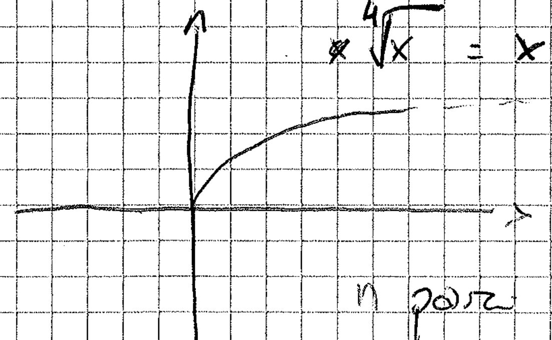
4. $y = \sqrt[n]{x}$ (FUNZ. RADICE)

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$



n dispari

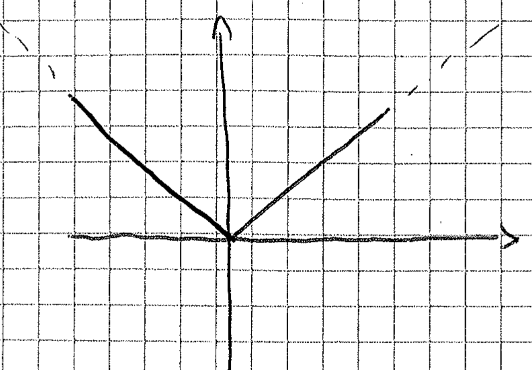
$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$



n pari

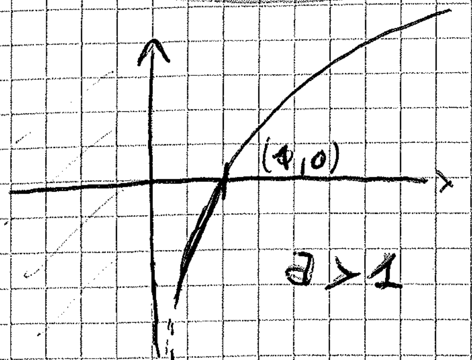
5. $y = |x|$ (FUNZ. VALORE ASSOLUTO)

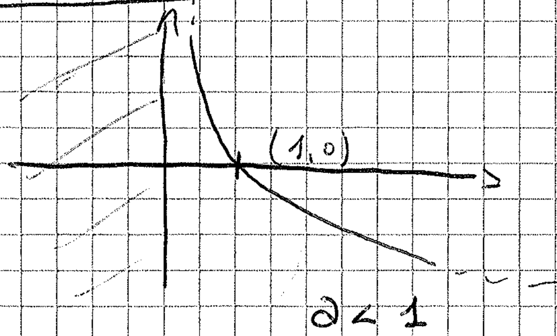
$$|x| \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



8. FUNZ. LOGARITMO

$\boxed{y = \log_a x \iff a^y = x}$





$f : R^{+} \longmapsto R$ $\quad D = (0, +\infty)$ $\quad Imm = R$

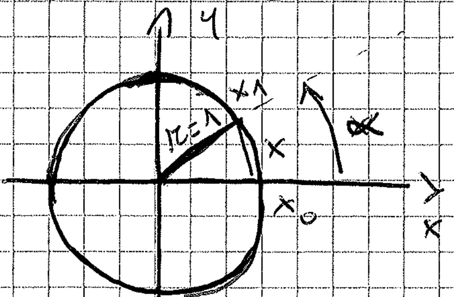
PROPRIETÀ DEI LOG. $\quad a^x = a^{\log_a x}$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a (x^y) = y \log_a x \quad \forall y \in R$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ con $b \neq a$

9. FUNZ. TRIGONOMETRICHE

- SEN e COS

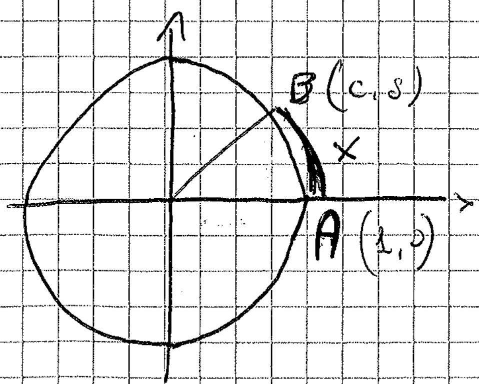


α = ∠ misura dalle ascisse alle ordinate

x = arco di circonferenza

$\alpha : 360 = x : 2\pi$

$$x = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360}$$



B = ~~spostamento~~ punto sulla circ. dopo uno spostamento di lunghezza x, partendo da A

cos = $c(x)$

sen = $s(x)$

cos : $x \longmapsto \cos(x)$

sen : $x \longmapsto \text{sen}(x)$

cos = 1° coordinata di B = $c = x$

sen = 2° coordinata di B = $s = y$

ES.: $A(1,0) \Rightarrow$
$\cos 0 = 1$
$\text{sen}\, 0 = 0$

ALTRI VALORI:

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$tg(\alpha)$
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

PROPRIETÀ FUNZ. TRIG

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 + x) = +\cos x$

C.d.E. $\Rightarrow tg(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\cdot \sin(x) = \mathbb{R} \qquad \cdot \cos(x) = \mathbb{R}$

Imm $\Rightarrow tg(x) = \mathbb{R} \qquad \cdot \sin(x) = [-1, +1] \qquad \cdot \cos(x) = [-1, +1]$

FORMULE DI ADDIZIONE e SOTTRAZIONE

- $\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \sin(y)\cdot\cos(x)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$
- $\sin(x-y) = \sin(x)\cdot\cos(y) - \sin(y)\cdot\cos(x)$
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cdot\cos(y) + \sin(x)\cdot\sin(y)$

$\sin 2x = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

$\cos 2x = 2\cos^2(x) - 1$

FORMULE DI BISEZIONE

$\frac{x}{2} = \frac{\alpha}{2}$

- $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow 2\cdot\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = 1 - \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = 1 + \cos(x)$
- $tg\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = (1+\cos x)\cdot\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = 1 - \cos(x)$

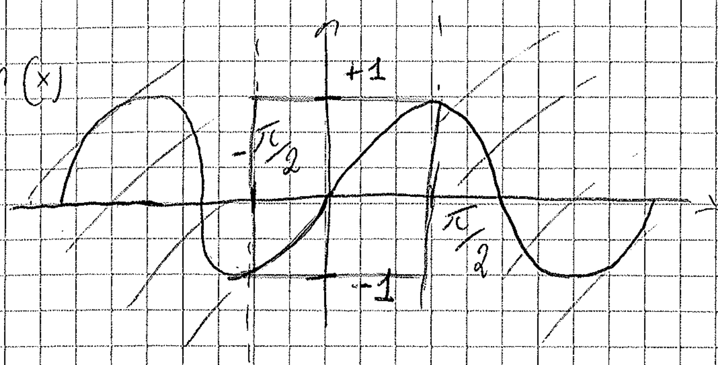
$\Longrightarrow$

FUNZ. TRIGONOMETRICHE INVERSE

ARCO SENO

$f^{-1}(\sin x) = \arcsin(x)$

$\sin(x)$

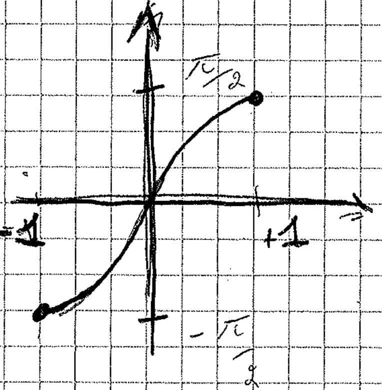


Il seno, essendo una funzione periodica, non ammette l'inversa, ma ragionando nel solo intervallo $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ ammette inversa, quindi:

RAGIONANDO in $\text{sen}: \mathbb{R} \longmapsto [-1, 1]$, per renderla SURIETTIVA, poi:

$\sin: [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \longmapsto [-1, 1]$ per renderla INIETTIVA e conseguenzialmente INVERTIBILE,

avremo quindi una nuova $f: [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, che chiameremo arcsen(x)

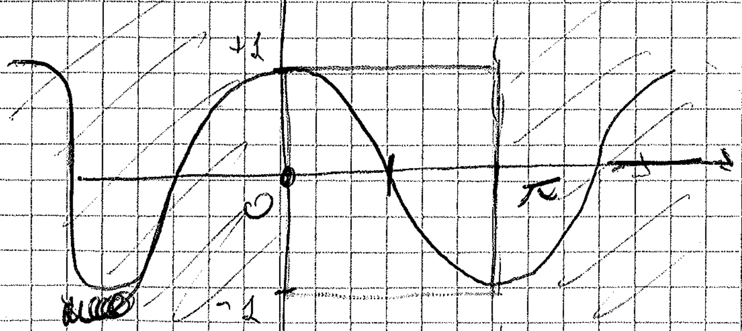


arcsin(x)

ARCO COSENO

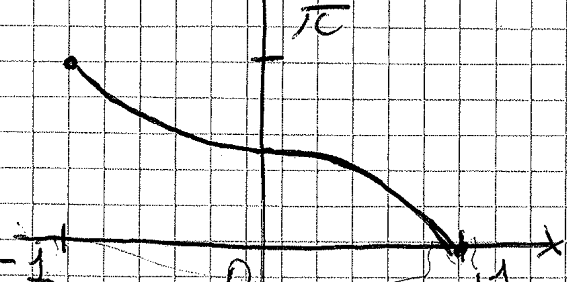
RAGIONAMENTO ANALOGO PER l'arccos(x)

avremo così una nuova $f: [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$



$\Rightarrow$

arccos(x)



FUNZ. POTENZA

. Proprietà tra potenze: - $a^n, n \in \mathbb{N} \rightarrow a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a$

- $a^0 = 1$
- $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

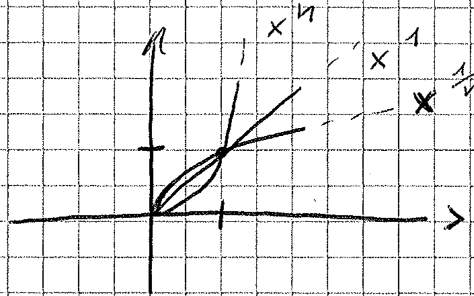
$f: x \longmapsto x^n$

- $a^n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^n, n \in \mathbb{Q} \rightarrow \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Es $\Rightarrow f(x) = x^n$

$f(x) = x^1$

$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

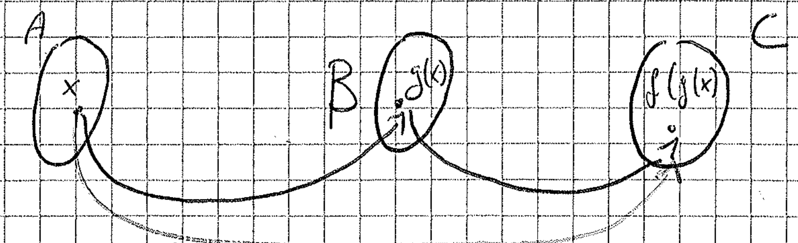


OPERAZIONI TRA FUNZIONI

1. SOMMA $\quad h = f + g \quad h: x \longmapsto h(x) = f(x) + g(x)$
2. DIFF. $\quad h = f - g \quad h: x \longmapsto h(x) = f(x) - g(x)$
3. PRODOTTO $\quad h = f \cdot g \quad h: x \longmapsto h(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. QUOZIENTE $\quad h = f/g \quad h: x \longmapsto h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

N.B. $\Rightarrow$ Il Dom(h) sarà uguale a Dom(f) $\cap$ Dom(g), tranne che nel quoziente in cui si deve anche imporre $g(x) \neq 0$

5. COMPOSIZIONE



$$\left.\begin{array}{l} g: A \longmapsto B \\ f: B \longmapsto C \end{array}\right\} \quad h = f \circ g \quad (f \text{ composto in } g)$$

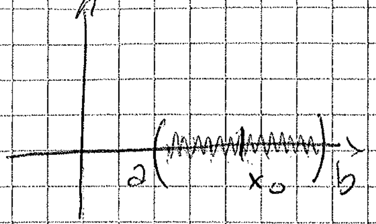
$h: A \longmapsto C \qquad h(x) = f(g(x))$

N.B. $\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$

INTORNO

Sia $x_0 \in A$

è detto intorno di x_0 un aperto $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid x_0 \in (a, b)$

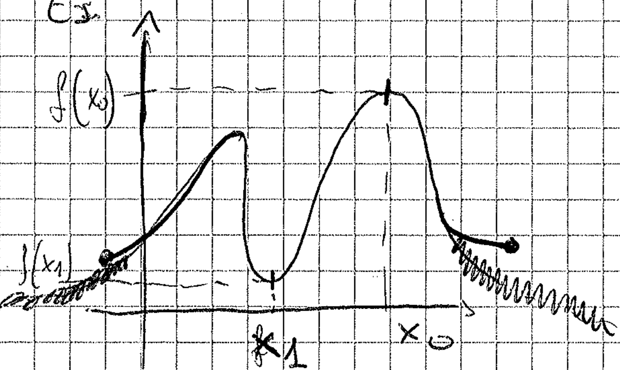


$I(x_0)$ = intorno di x_0

PUNTO DI MAX. E MIN. ASSOLUTO

DEF.: x_0 è un punto di MAX (MIN) assoluto se e solo se $f(x_0) \geq f(x)$ $[f(x_0) \leq f(x)]$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Es.



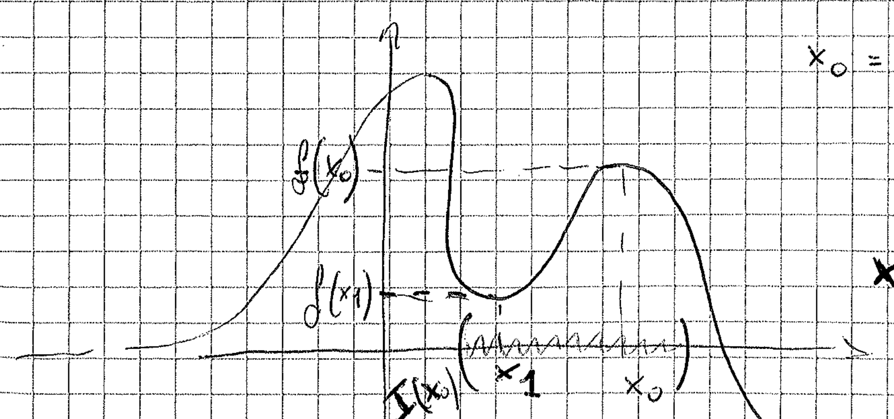
x_0 = PUNTO DI MAX. ASSOLUTO xké, preso un qualsiasi altro punto x sul grafico, $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

x_1 = PUNTO DI MIN ASSOLUTO xké, preso un qualsiasi altro punto x sul grafico, $f(x_1) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

PUNTO DI MAX. E MIN. RELATIVO

DEF.: x_0 è un punto di max [min] relativo se

$$\exists\, I(x_0) \mid f(x_0) \geq f(x)\ [f(x_0) \leq f(x)],\ \forall x \in I(x_0)$$



x_0 = PUNTO DI MAX RELATIVO xké, preso un qualsiasi altro punto x in $I(x_0)$, $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in I(x_0)$

x_1 = PUNTO DI MIN. RELATIVO xké, preso un qualsiasi altro punto x in $I(x_0)$, $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in I(x_0)$

INTERVALLI DI MONOTONIA

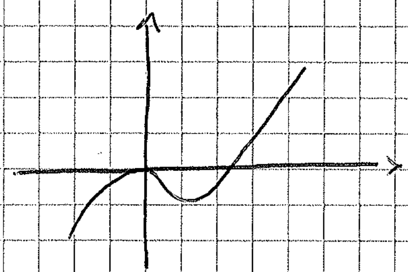
DEF: f è monotona cresc. [decresc.] in un intervallo generico I, se e solo se $\forall x_1, x_2 \in I: x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$[\forall x_1, x_2 \in I: x_1 \geq x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$

TRANSLAZIONI, SIMMETRIE e PROPR. DI FUNZ. ELEMENTARI

TRANSLAZIONI

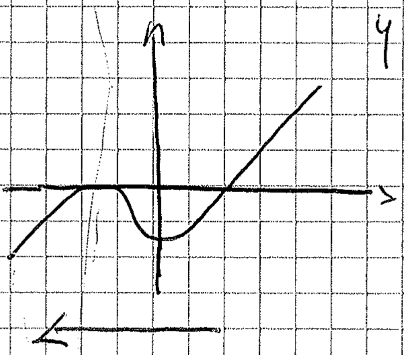
Data $y = f(x)$



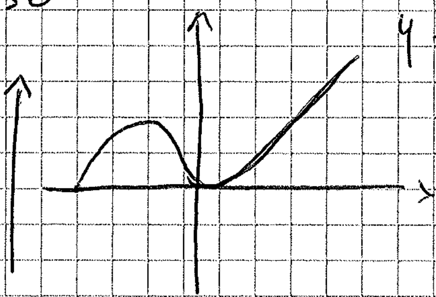
$y = f(x+c),\ c < 0$

TRANS ORIZZONTALE

$y = f(x+c),\ c > 0$



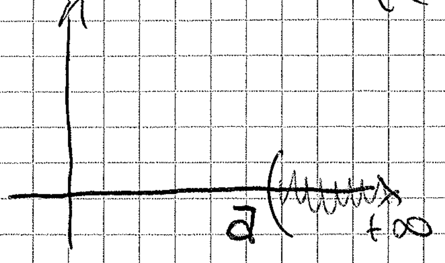
$y = f(x) + c,\ c > 0$



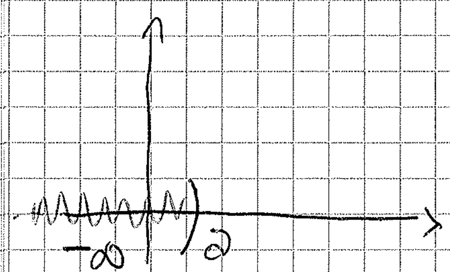
TRANS VERTICALE

$y = f(x) + c,\ c > 0$

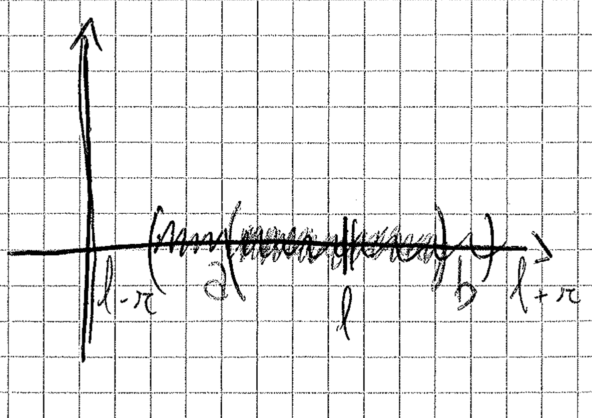
$\underline{I(+\infty)}$ = Dato $I(+\infty)$, questo sarà definito da
$\{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}$



$\underline{I(-\infty)}$ = Dato $I(-\infty)$, questo sarà definito da
$\{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\}$



$\underline{I_r(l)}$ = Dato $I(l)$ di raggio r è definito in
$\{(l-r, l+r), l, r \in \mathbb{R}\}$ con $\{x : |x-l| < r\}$
di conseguenza $\exists\, l \in (a, b)$

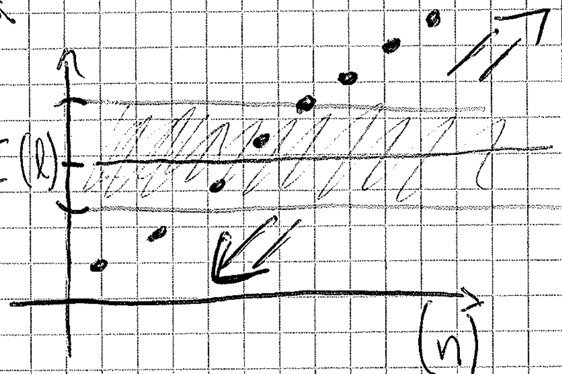


SIGNIFICATO

Allora, preso un $I(l)$ qualsiasi $[\forall I(l)]$ sono in grado di trovare $[\exists]$ un N dopo il quale tutti i punti di $a_n \in I(l)$ $[a_n \in I(l), \forall n > N]$ e si parla di CONVERGENZA (in questo caso il limite esiste)

Nel caso in cui si abbia DIVERGENZA $\rightarrow$ limite $= \pm\infty$

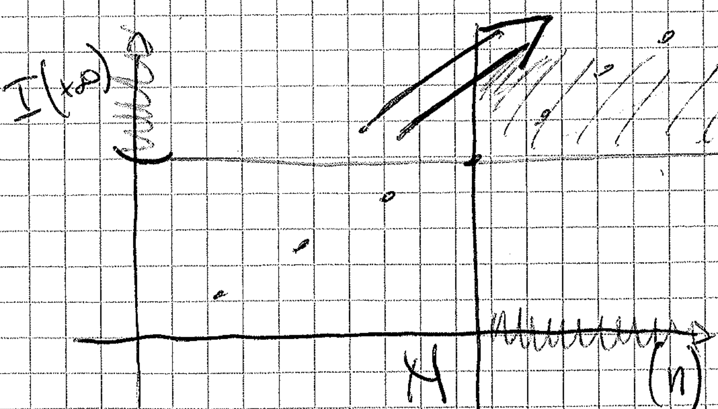
Es.



IN QUESTO CASO NON ESISTE LIMITE

DEF: Diciamo che S DIVERGE a $+\infty$ $[-\infty]$ allora $\lim_{n \to +\infty\,[-\infty]} a_n = +\infty\,[-\infty]$ se

$\forall I(+\infty)\,[-\infty]$ $\exists$ un corrispondente $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in I(+\infty)\,[-\infty]$, $\forall n > N$



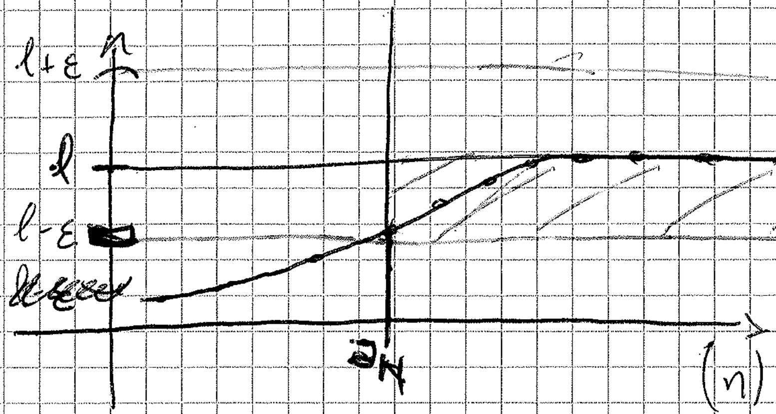
DEF.

Diciamo che S DIVERGE a $\pm\infty$ $\longrightarrow$ $\lim_{n \to \pm\infty} a_n = \pm\infty$, se e solo se $\forall I(\pm\infty)$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$: $a_n \in I(\pm\infty)$, $\forall n > N$

DEF.: Sia δ sup. Lim e sia $l = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, bisogna dimostrare che

$$\lim_{x \to \infty} a_n = l \quad \text{con } l = \sup a_n$$

Allora Dato $I(l)$: $a_N \in (l-\varepsilon, l]$ tale che $l - \varepsilon < a_N \leq a_{n+1} \leq l$, $\forall n > N$



l: limite stesso

Limiti:

DEF.: Sia f definita in $I(x_0) \in \mathbb{R} - \{x_0\}$
Diremo che f ha limite $l \in \mathbb{R}$, per $x \to x_0$, per cui

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

e se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$; $\forall x \in \text{Dom} f(x)$, $0 < |x - x_0| < \delta$
allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

DEF (ESISTENZA DI UN LIMITE)

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad x_0, l \in \mathbb{R}$$

Se $\forall I(l)$ $\exists I(x_0)$; $f(x) \in I(l)$, $\forall x \in \overline{I}(x_0) - \{x_0\}$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

TEO.: Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

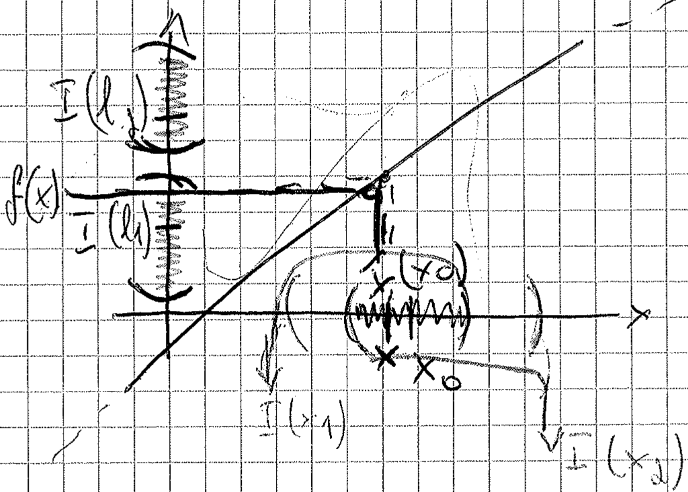
allora $l_1 = l_2$

Dim. (x assurdo): sia $|l_1 \neq l_2|$, sia $\varepsilon < \frac{|l_2 - l_1|}{2}$

allora trovo $I_1(x_0)$ e $I_2(x_0)$

sia ora $I = I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$, $x \in I$

Allora $\underbrace{f(x) \in I(l_1)\ ,\ f(x) \in I\, l_2}_{\text{IMPOSSIBILE!!!}}$



$f(x)$ non potrà mai essere ~~com~~ appartenente ad $I(l_1)$ e $I(l_2)$ contemporaneamente!

INFATTI $f(x) \in I(l_1)$

$f(x) \notin I(l_2)$

TEOREMA ALGEBRICO DEI LIMITI

TEO.: $f: R \longrightarrow R$, $g: R \longrightarrow R$, supponiamo

$x_0 = n$ $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, Allora

1- $\lim_{x \to n} [f(x) + g(x)] = l + m \iff \lim_{x \to n} f(x) + \lim_{x \to n} g(x)$

2- $\lim_{x \to n} [f(x) - g(x)] = l - m \iff \lim_{x \to n} f(x) - \lim_{x \to n} g(x)$

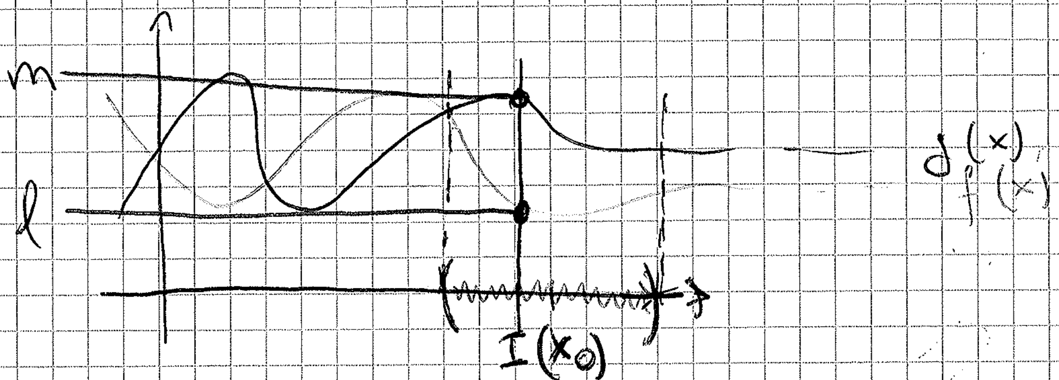
3- $\lim_{x \to n} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m \iff \lim_{x \to n} f(x) \cdot \lim_{x \to n} g(x)$

4- $\lim_{x \to n} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l}{m}$ C.I.E $\Rightarrow g(x) \neq 0$ $\cancel{\frac{\lim_{x \to n} f(x)}{\lim_{x \to n} g(x)}}$

TEOREMI DEL CONFRONTO

$1°$ TEO: Sia $f: R \mapsto R$ e $g: R \mapsto R$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

Supponiamo $\exists I(x_0): f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I(x_0) - \{x_0\} \Rightarrow l \leq m$



DIM: Sia $h(x) = g(x) - f(x)$, $h(x_0) \geq 0$ in $I(x_0) - \{x_0\}$
~~se~~ sappiamo che $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = m - l$

Allora $m - l \geq 0 \Rightarrow m \geq l$

$2°$ TEO (Caso finito):
Siano $f: R \mapsto R$, $g: R \mapsto R$, $h: R \mapsto R$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

Supponiamo $\exists I(x_0): f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$
Allora $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

DIM: Fissato $I(l)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \to \exists I^f(x_0) : \forall x \in I^f(x_0) - \{x_0\}$
vale $f(x) \in I(l)$
$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \to \exists I^h(x_0) : \forall x \in I^h(x_0) - \{x_0\}$
vale $h(x) \in I(l)$

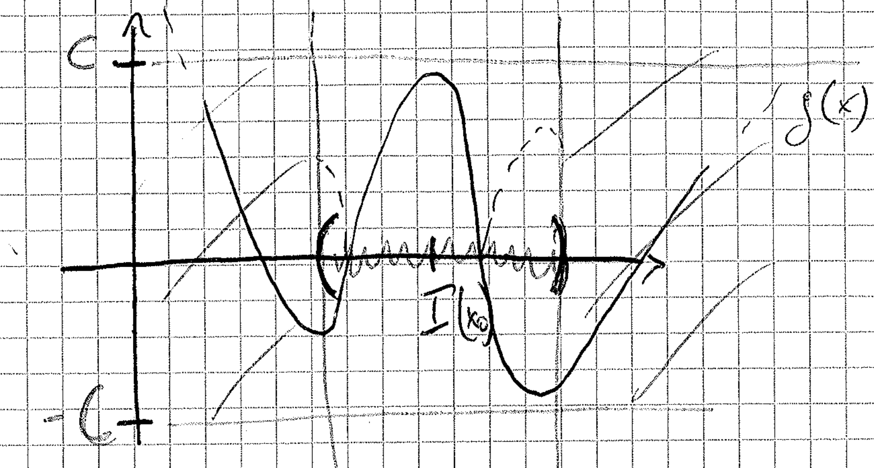
Sia $I = I(x_0) \cap I^f(x_0) \cap I^h(x_0)$, $x \in I$, Allora
$(l - \varepsilon) \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq (l + \varepsilon)$, $\xrightarrow{\cancel{\text{quindi}}}$ $g(x) \in I(l)$

COROLLARIO DEL TEO DEL CONFRONTO

Dato $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

Sia f limitata in $I(x_0) - \{x_0\}$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \longrightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$



Dim:

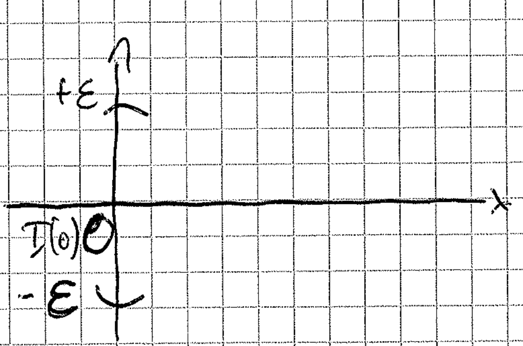
- f limitata in $I(x_0)$

$\exists n > 0 : |f(x)| \leq C$

Nota che il $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |g(x)| = 0$

ESEMPIO

$\lim_{x \to x_0} |f(x) \cdot g(x)| = 0$, Fissiamo $I(0) = (-\varepsilon, +\varepsilon)$



$|f(x) \cdot g(x) - 0| < \varepsilon$

$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$

Allora $f(x) < C \cdot |g(x)| \Rightarrow f(x) < \cancel{C} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{C}} \Rightarrow f(x) < \varepsilon$

Sicuramente $\exists I^g(x_0) : ||g(x)| - 0| < +\frac{\varepsilon}{+C}$

$\Downarrow$

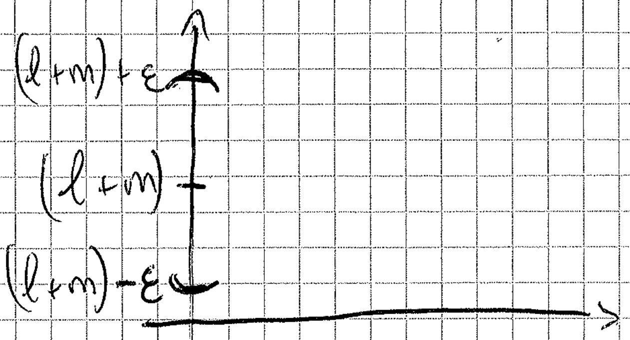
0

PROPRIETÀ DEI LIMITI

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \to \lim_{x \to x_0} |f(x) + g(x)| = l + m$

Dim.- Dato $I(l+m)$ trovare $I(x_0)$ tale che

$\varepsilon > 0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0$



preso $I_{\varepsilon/2}(l) \to \exists I^f(x_0) ; \forall x \in I(x_0), |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

preso $I_{\varepsilon/2}(m) \to \exists I^g(x_0) ; \forall x \in I(x_0), |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

preso $I^{f \cap g}(x_0)$ dato da $I^f(x_0) \cap I^g(x_0)$ sia $x \in I(x_0)$
vale che $|f(x) + g(x) - (l+m)| = |(f(x) - l) + (g(x) - m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m|$

Allora $|f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$|f(x) - l| + |g(x) - m| < \varepsilon$

DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

Sia x_0 un punto in cui f non è continua, x_0 allora sarà un punto di discontinuità eliminabile

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}, \quad \text{con } l \neq f(x)$$

Es. $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$ DISC. ELIMINABILE

Allora posso def. $g(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è cont. in $x = 0$

Allora parliamo di PROLUNGAMENTO PER CONT. DELLA FUNZIONE f

Es. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ = NON CONT. in $x_0 = 1$ e perché $x_0 \notin Dom(f)$

però $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 2$

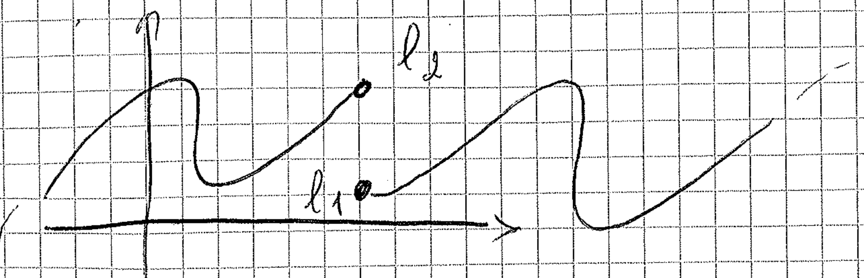
Allora $g(x) \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ = $g(x)$ cont. in $x = 2$

DISC. DI PRIMA SPECIE

(Negli altri casi si parla di DISC. II SPECIE)

Dato f, x_0 è una Disc. di I specie se e solo se $\lim_{x \to x_0^+} f \neq \lim_{x \to x_0^-} f$, se esistono e sono entrambi reali, quindi imponiamo che $\begin{cases} \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \\ \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow l_1 \neq l_2$

Es.



Δl = SALTO

$\Downarrow$

$l_2 - l_1$

Dim.

Chiamiamo $\lim_{y \to l} g(y) = m$, Fissiamo $\lim_{y \to l} g(y) = m$

Fisso $I(m) \longrightarrow \exists\, I(m) : g(y) \in I(m)$, $\forall y \in I(l) - \{\cancel{l_0}\}$

N.B. : Posso omettere l_0

Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \longrightarrow \exists\, I(l) : f(x) \in I(l)$, $\forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

Quindi $y = f(x) \in I(l)$, $g(y) \in I(l) \longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(f(x))$

COROLLARIO

Se $\left.\begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix}\right\}$ cont. $\longrightarrow g(f(x)) = $ cont.

$\lim_{x \to x_0} g(f(x_0)) = g\left[\lim_{x \to x_0} f(x_0)\right] = g\left[f(x_0)\right]$

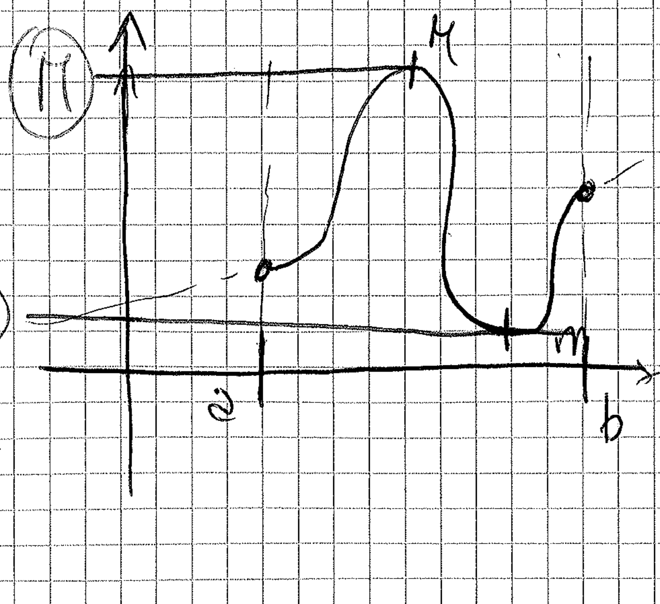
TEO PER f = cont.

TEO => $f : R \longmapsto R$ diciamo che x_0 è uno zero di f se $f(x_0) = 0$

TEO di WEIERSTRASS

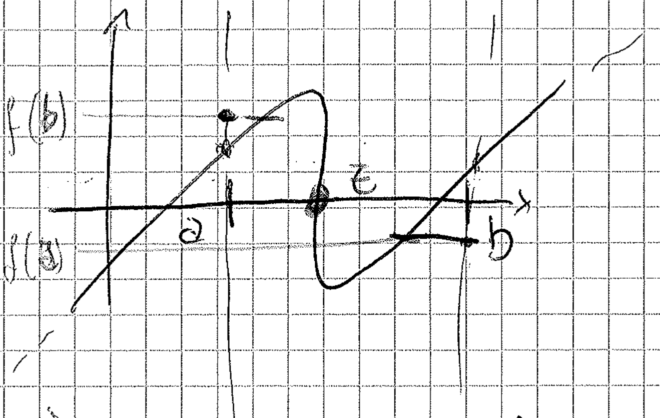
TEO => Se f = cont. in $[a, b] \rightarrow f$ è lim. in $[a, b]$ e questa assume un Max (M) e min (m)

Es.



TEO DEI VALORI INTERMEDI

TEO => sia f = cont. $[a, b]$ → assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$



$\exists z \in f(a)$ e $f(b)$

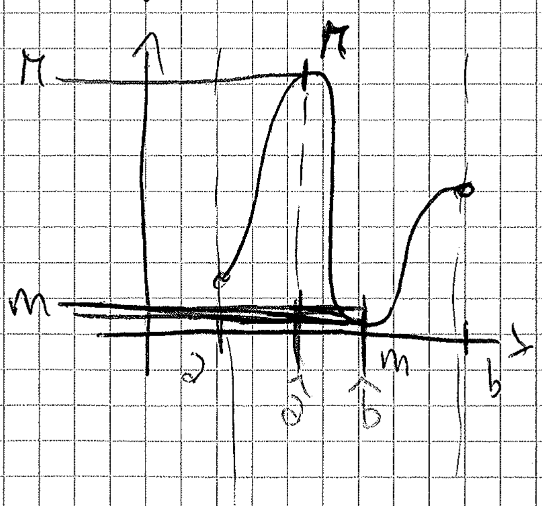
Dim. => $f(b) > f(a)$, sia $z \in f(a)$ e $f(b)$
sia $g(x) = z$

$g(b) < f(b)$, $g(a) > g(b)$ → $\exists c : f(c) = g(c) = z$

g = cont.

CORO**LL**ARIO

se f = cont. in $[a, b]$ → f assume tutti gli $x \in [m, M]$ in $[a, b]$



Dim. => se è cont. in $[a, b]$
allora è cont. in $[\hat{a}, \hat{b}]$

Es

① $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \iff \sin(x) = o(x),\ x \to \infty$

② $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{tg(x)} = 0 \iff \sin(x) = o(tg(x)),\ x \to \frac{\pi}{2}$

PROPRIETÀ

I SIMBOLI DI LANDAU $\asymp, \sim, o$ sono casi particolari di O, nel senso che:

$f \asymp g \Rightarrow f = O(g)$, $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$, $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

PROP.:

1) Dato $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \longrightarrow f \sim g \iff f = g + o(g)$

Dim. $\Rightarrow$ Definiamo $h(x) = f(x) - g(x) \iff f(x) = g(x) + h(x)$

Ora $f \sim g \iff \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0$

$\iff \lim_{x \to c} {}^{*}\frac{h(x)}{g(x)} = 0 \iff h = o(g)$

$^{*} \lim_{x \to c} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \underbrace{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}}_{1} - \underbrace{\lim_{x \to c} \frac{\cancel{g(x)}}{\cancel{g(x)}}}_{1} = 0$

Es

$\lim_{x \to 0} 1 - \cos(x) = \frac{1}{2} x^2$

$\Downarrow$

$1 - \cos(x) \sim \frac{1}{2} x^2 \iff 1 - \cos(x) = \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$

LIMITI FONDAMENTALI

1) $\sin x \sim x, \quad x \to 0$

2) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad x \to 0$

3) $\log(1+x) \sim x, \quad x \to 0 \iff \log(x) \sim x-1, \quad x \to 1$

4) $e^x - 1 \sim x, \quad x \to 0$

5) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad x \to 0$

SCRITTI CON L' "ALGEBRA DEGLI o"

1. $\sin(x) = x + o(x), \quad x \to 0$
2. $1-\cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x), \quad x \to 0 \iff \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0$
3. $\log(1+x) = x + o(x), \quad x \to 0 \iff \log(x) = x - 1 + o(x-1), \quad x \to 0$
4. $e^x - 1 = x + o(x), \quad x \to 0 \iff e^x = 1 + x + o(x), \quad x \to 0$
5. $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x), \quad x \to 0 \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad x \to 0$

ALTRI LIMITI

1. $x^\alpha = o(e^x), \quad x \to +\infty \qquad \forall \alpha \in R$
2. $e^x = o(|x|^\alpha), \quad x \to -\infty \qquad \forall \alpha \in R$
3. $\log(x) = o(x^\alpha), \quad x \to +\infty \qquad \forall \alpha > 0$
4. $\log(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \to 0^+ \qquad \forall \alpha > 0$

Es.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-1}\right) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+2x)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\cancel{x^2}+2x)-(\cancel{x^2}-1)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}_{2}} = 1$$

INFINITO e INFINITESIMO CAMPIONE

DEF.: Data f, fare la stima della rapidità di CONVERGENZA

$\exists \alpha > 0 \longrightarrow \exists \varphi \mid Dom(\varphi) \longmapsto \mathbb{R} \mid f \sim \varphi^{\alpha}, \ x \to c$

dove f può essere sia infinito che infinitesimo, quindi:

Dividiamo per una g infinito o infinitesimo

Es.

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{[\varphi(x)]^{\alpha}} = l \neq 0$$

Allora $f(x) \sim \underbrace{l[\varphi(x)]^{\alpha}}_{\Downarrow}, \ x \to c$

parte principale di $f = p(x) = l[\varphi(x)]^{\alpha}$

Allora: φ è INFINITESIMO CAMPIONE

α è ORDINE DI INFINITESIMO di f
cioè l'esponente (n) con $n \in \mathbb{R} > 0 \mid f \sim l[\varphi(x)]^{\alpha}$
$x \to c$

Es.

$$f(x) = \sin(x) - \tan(x) = \sin(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos(x)}\right)$$

$$f(x) = \sin(x) \cdot \left(\frac{\cos(x) - 1}{\cos(x)}\right) = \underbrace{\sin(x)}_{\substack{\Downarrow \\ x}} \cdot \left[\frac{-(1 - \cos(x))}{\underbrace{\cos(x)}_{\substack{\Downarrow \\ 1}}}\right] \Rightarrow \frac{1}{2} x^2$$

$$f(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{2} x^2\right) = -\frac{1}{2} x^3$$
$x \to 0$

Es. LIMITI CON INFINITESIMI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{7x+20x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{3}\log(1+3x)}-1}{7x}$$

$f \quad g$

$f = o(g)$

$\log(x+1) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$
$x \to 0$

$20x^4$ trascurabile per $x \to 0$!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\cancel{x}}{7\cancel{x}} = \frac{1}{7}$$

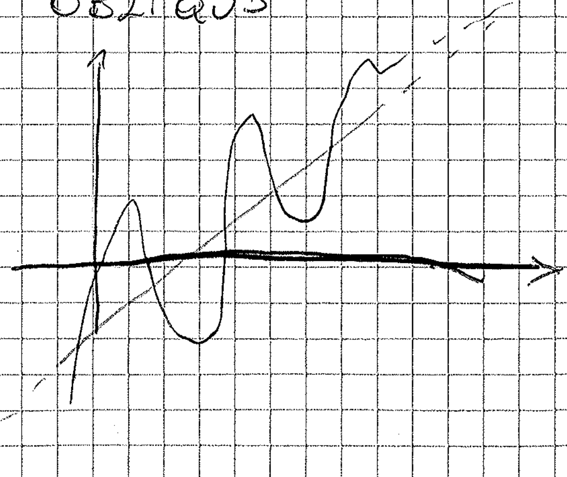
ASINTOTI

Dati $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ studiare il comportamento ASINTOTICO vuol dire studiarla in prossimità di $\pm\infty$ [se definita in un $I(\pm\infty)$]

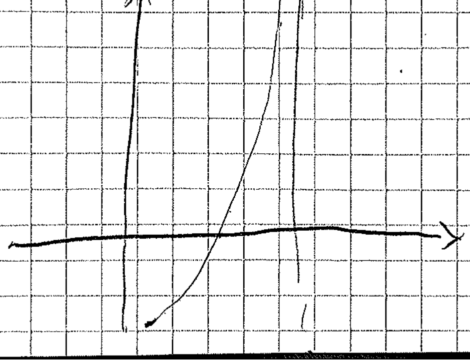
3 TIPI DI ASINTOTI

ORIZZONTALE

OBLIQUO

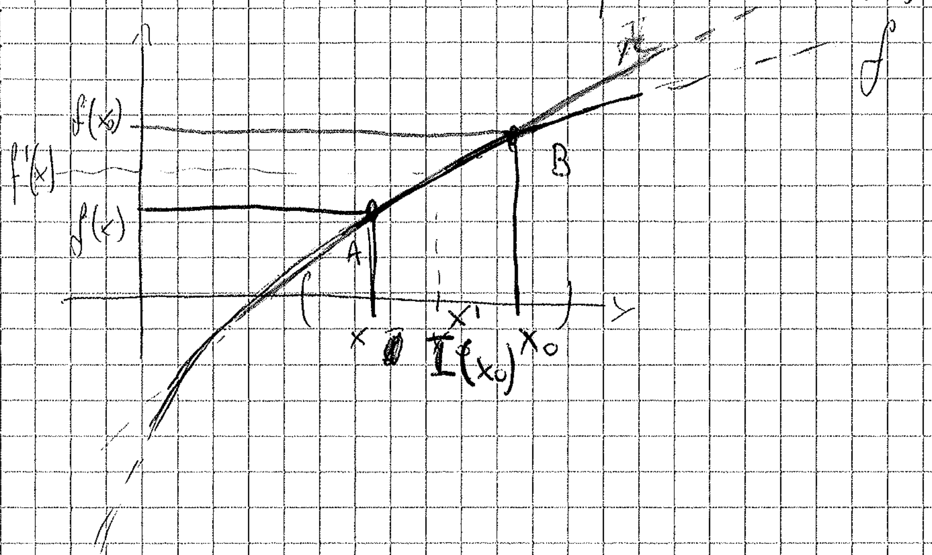


VERTICALE



CALCOLO DIFFERENZIALE (DERIVATE)

Data $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $x_0 \in Dom(f)$ supponendo f definita in $I(x_0)$



Disegnamo la retta (r) secante A e B, Definiamo:

$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow$ INCREMENTO DELLA VARIABILE INDIPENDENTE

$\Delta f = f(x) - f(x_0) \Rightarrow$ INCREMENTO DELLA VARIABILE DIPENDENTE

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ = coeff. angolare retta (r)

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ = RAPP. INCREMENTALE

- Immaginando $x \to x_0$

$\exists$ un punto limite: $x = x_0$ per cui $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$

m = coeff. angolare retta (r), che nel caso limite dove $x = x_0$ sarà tangente alla funzione!

DEF $\Rightarrow$ È detta derivata di (f) in $x_0 \in Dom(f)$, la quantità $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$

N.B. $\Rightarrow$ si suppone l'esistenza del limite e che sia FINITO $\longrightarrow f'(x_0)$ = Derivata di $f(x_0)$

N.B. $\Rightarrow$ $f'_{+}(x_0)$ e $f'_{-}(x_0)$

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se e solo se $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0)$ parliamo di DERIVATA

Se $f'_{+}(x_0) \neq f'_{-}(x_0)$ parliamo di DER. DESTRA e DER. SINISTRA

N.B. $\Rightarrow$ se f è crescente in I allora $f' \geq 0$

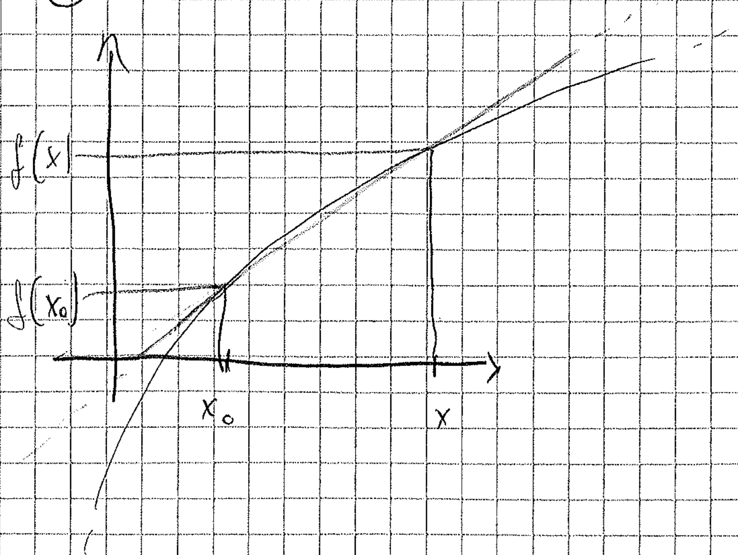
① $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{+}{=} \oplus$ $\quad f(x) > f(x_0)$, $x > x_0$

② $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{-}{=} \oplus$ $\quad f(x) < f(x_0)$, $x < x_0$

Se f è crescente o decrescente $f'(x) = \oplus$

DIM. GRAFICA =

①



$$D\left[\,|x|\,\right] = \begin{cases} x > 0 \longrightarrow f'(x) = 1 \\ x = 0 \quad \text{NON ESISTE} \\ x < 0 \longrightarrow f'(x) = -1 \end{cases}$$

DER. FUNZIONE INVERSA

Sia ~~[illegible]~~ $g = f^{-1} \longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

Es. : $f(x) = x^2 \longrightarrow g(x) = \sqrt{x}$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

INFATTI $\Rightarrow$ $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Es. $\Rightarrow D\left[\arcsin(x)\right]$ $\quad f(x) = \sin(x)$

$g(x) = \arcsin(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin^2(\arcsin(x))}}$$

$\Downarrow$

x^2

N.B.
$\boxed{\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}}$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

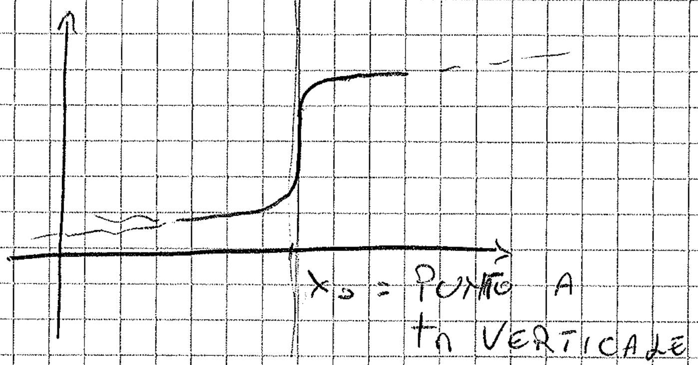
$f(x) = \arccos(x) \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f(x) = \tan(x) \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

PUNTO A tn VERTICALE

x_0 è un Punto a tangente Verticale se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ assumono valore ∞ e sono di segno concorde

Es.

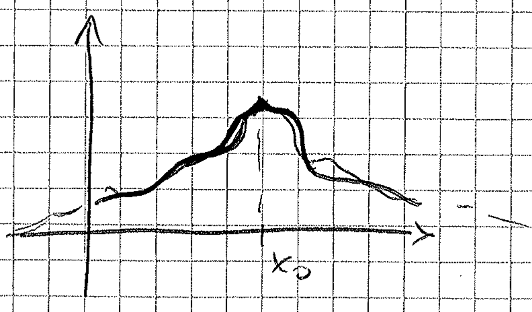


$m = \infty$

PUNTO A CUSPIDE

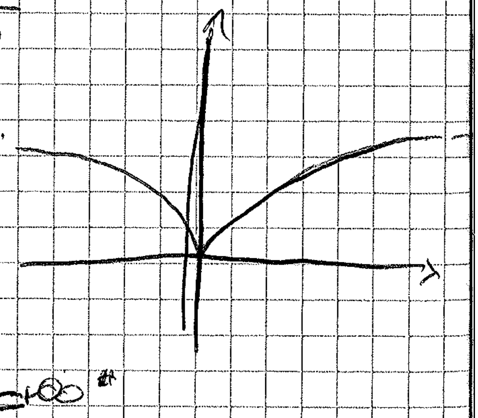
x_0 è un Punto a Cuspide se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ assumono valore ∞ e sono di segno discorde

Es.



$f(x) = \sqrt{|x|}$

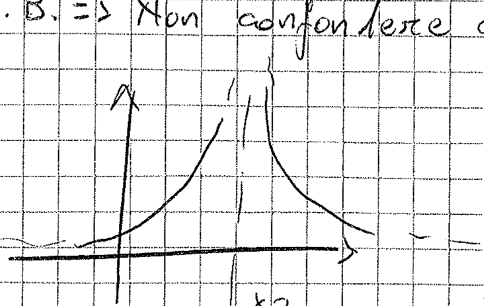
$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}}$



$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\infty$

N.B. => Non confondere con



in questo caso $x_0 \notin Dom(f)$

PUNTI DI NON DER.
- Punto a Cuspide
- " a tn Verticale
- " Angoloso

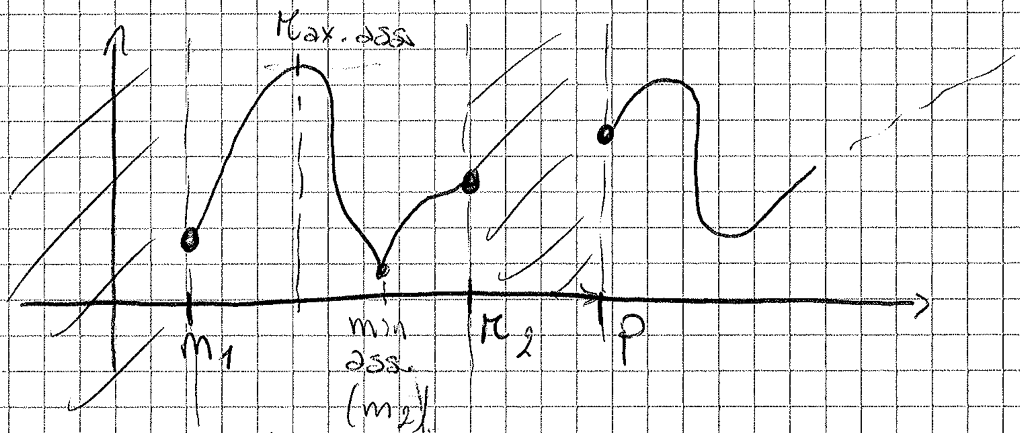
PUNTI CRITICI (O STAZIONARI)

Sia $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in Dom(f)$; $\exists f'(x_0) = 0$

Allora x_0 è detto PUNTO CRITICO di f

N.B. => Spesso (non sempre) i Max e Min assoluti o relativi si trovano in corrispondenza di ~~punti~~ Punti Critici

Es.



P = Punto Critico $\neq$ ~~Max~~ Max $\neq$ Min

m_1 e M_2 = Punti critici => m_1 = min rel. M_1 = max rel

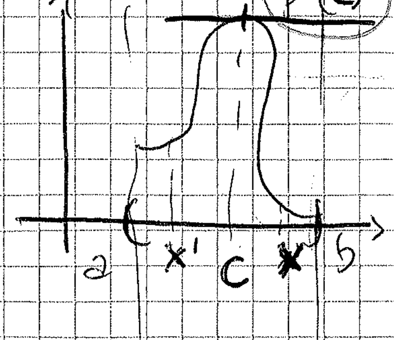
m_2 = punto di non Derivabilità

TEO DI FERMAT

Sia $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ in (a, b) con $b > a$

Sia $c \in (a, b)$; c = Max o Min (ass o rel) e

supponiamo $\exists f'(c) \longrightarrow f'(c) = 0$



$f'(c) = 0 \Rightarrow tn(c)$ = ORIZZONTALE

TEO (CAUCHY)

Siano f e g cont. in $[a,b]$ e derivabili in tutto (a,b)

sia $g : g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \rightarrow \exists c \in (a,b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

DIM => consideriamo $h(x)$

$h(x) = g(x) \cdot [f(b) - f(a)] - f(x) \cdot [g(b) - g(a)]$

Allora $g'(c) \cdot [f(b) - f(a)] - f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] = 0$

PROPRIETÀ:

- h = cont. in $[a,b]$
- h = der. in (a,b)
- $h(a) = h(b) \implies h(a) = \underline{g(a) \cdot f(b)} - \cancel{f(a) \cdot g(a)} - \underline{f(a) \cdot g(b)} + \cancel{f(a) \cdot g(a)}$

$h(b) = \cancel{g(b) \cdot f(b)} - \underline{g(b) \cdot f(a)} - \cancel{f(b) \cdot g(b)} + \underline{f(b) \cdot g(a)}$

h soddisfa le PROPRIETÀ imposte dal TEO di ROLLE

Allora $\exists c \in (a,b) : h'(c) = 0$

$h'(x) = g'(x) \cdot [f(b) - f(a)] - f'(x) [g(b) - g(a)] = 0$

$h'(c) = g'(c) [f(b) - f(a)] - f'(c) [g(b) - g(a)] = 0$

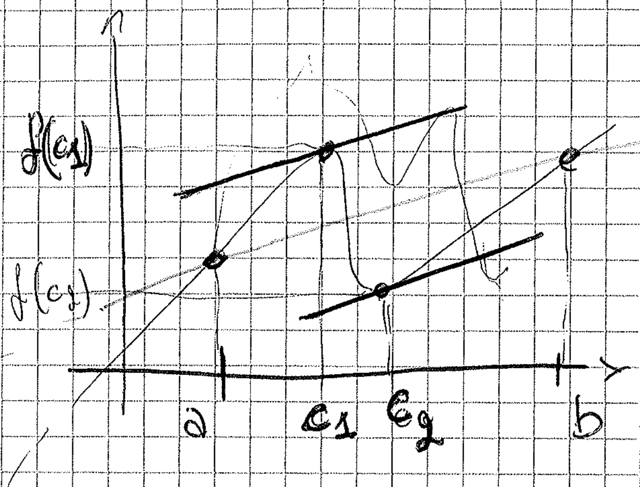
$\rightarrow \dfrac{f(b) - f(c)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ perché

$\left(\cancel{g(b) - g(a)}\right) \dfrac{f(b) - f(c)}{\cancel{g(b) - g(a)}} \cdot g'(c) = \left(g(b) - g(a)\right) \cdot \dfrac{f'(c)}{\cancel{g'(c)}} \cdot \cancel{g'(c)}$

TEO (LAGRANGE o VAL MEDIO)

Sia $f: R \longrightarrow R$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

Allora $\exists\, c \in (a,b) \mid f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = coeff. angolare della retta tangente r



$f'(c) = m_r$

dove m = coeff. angolare r

Dim $\Rightarrow$ Data $h(x) = r(x) - f(x)$

$h(a) - h(b) = 0 \implies h(a) = h(b)$

Quindi $\exists\, c \in (a,b) \mid h'(c) = 0$

Allora $h(x) = r(x) - f(x) = \underbrace{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)}_{r(x)} - f(x)$

$$h'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1 - f'(x)$$

$$h'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c) = 0$$

Per cui $h'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Sia $f: R \longmapsto R$ derivabile in Dom(f)
" $f': R \longmapsto R$ derivabile

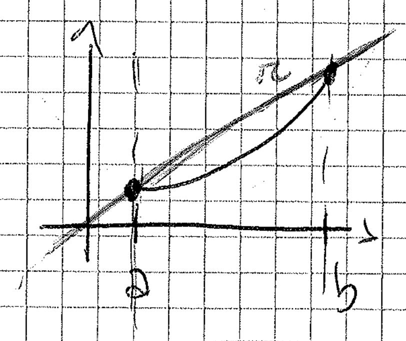
Allora possiamo definire $f'', f''' \dots f^k$, k = ordine di derivata
che chiameremo DER. DI ORDINE SUPERIORE

DEF => - f e' di classe C^k con $k \in N$ in $I \subseteq R$
se e solo se $\exists\ f^k$ e se e' continua in I

- f e' di classe C^∞ se e' di classe C^k $\forall k \in R$

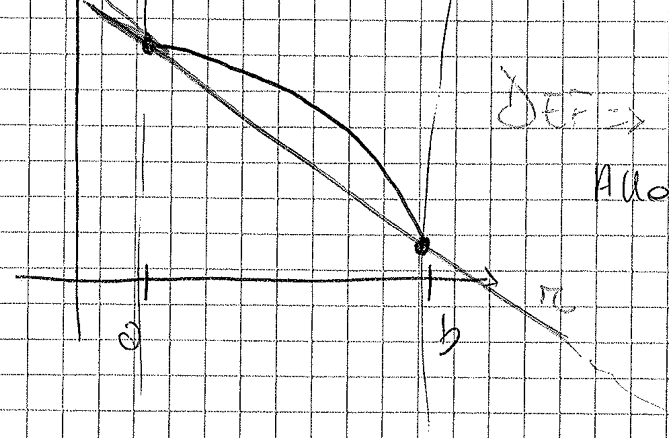
CONCAVITA' e CONVESSITA'

Sia $f: R \longmapsto R$, si dice CONVESSA quando in $[a, b]$, la r si trova sempre sopra la f,
Allora $r > f$, $\forall x \in [a, b]$



DEF => Dato $f: R \longmapsto R$
Allora $\exists\ [a, b]$; $\forall x, x_n \in [a, b]$, $r > f$

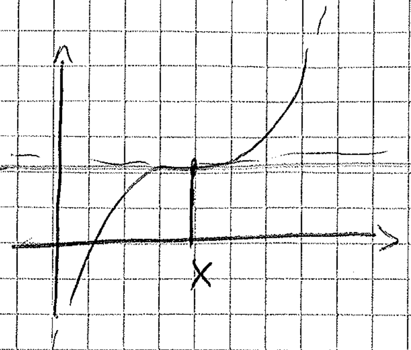
Sia $f: R \longmapsto R$, si dice CONCAVA quando in $[a, b]$
$r < f$, $\forall x \in [a, b]$



DEF => Dato $f: R \longmapsto R$
Allora $\exists\ [a, b]$; $\forall x, x_n \in [a, b]$, $r < f$

PUNTO DI FLESSO ORIZZONTALE

P.F. = Punto di Flesso



$x = 0$

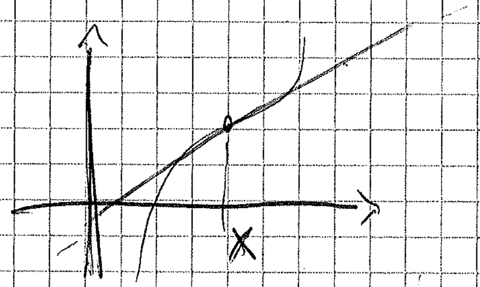
$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

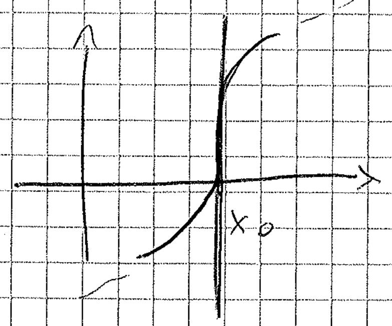
$f''(x) = 6x$

$f''(0) = 0$ P.F. orizzontale

P.F. OBLIQUO



P.F. VERTICALE



$\nexists f'(x)$

$\nexists f''(x)$

$f = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-1+\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{-1}$

$\frac{1}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{2}{3}$

$f''(x) = \nexists$???

~~DO~~ COME DETERMINARE CONT. e DER.

Es.

$$f(x) \begin{cases} f_1(x) = \alpha x^2 + \beta & se\ x < 1 \\ f_2(x) = 2\beta x^2 - \alpha x + 1 & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

CONTINUITÀ

$$\lim_{x \to 1^-} f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} \alpha x^2 + \beta = \lim_{x \to 1^-} 2\beta x^2 - \alpha x + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha + \beta = 2\beta - \alpha + 1$$

$$2\alpha - \beta = 1$$

$$\beta = 2\alpha - 1$$

INTERCETTO $= -1$

$$-\frac{q}{m} = \frac{1}{2}$$

DERIVABILITÀ

$$\lim_{x \to 1^-} f_1'(x) = \lim_{x \to 1^-} f_2'(x)$$

$$f_1'(x) = 2\alpha x$$

$$f_2'(x) = 4\beta x - \alpha$$

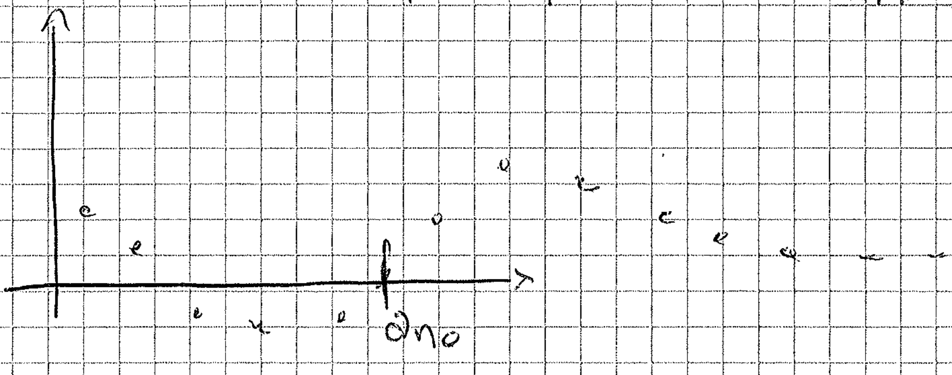
$$\lim_{x \to 1^-} 2\alpha x = \lim_{x \to 1^-} 4\beta x - \alpha$$

$$3\alpha - 4\beta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2\alpha = 4\beta - \alpha \qquad \beta = \frac{3}{4}\alpha$$

DEF $\Rightarrow$ Dato $\int:\{a_n, n\in N\}$ diciamo che questa soddisfa definitivamente una certa prop. se $\exists\, n_0$! la proprietà è soddisfatta da n_0 in poi, quindi : $\forall a_n, n \geq n_0$



La $\int \{a_n, n\in N\}$ da a_{n_0} è def. sempre positiva, quindi per i fini del calcolo di $\lim_{n\to\infty} a_n$ non interessa il comportamento assunto dalla funzione all'inizio del grafico!

$\longrightarrow$ Def. $\oplus$, $\forall a_n ! n \geq n_0$

$\longrightarrow$ Def $\searrow$, $\forall a_n ! n \geq n_0$

TEO (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\int : \{a_n, n\in N\}$ definitivamente positiva ($a_n > 0$)

supponiamo $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (eventualmente $q = +\infty$)

3 CASI POSSIBILI :

$q < 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$q > 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$q = 1 \longrightarrow$ NON ABBIAMO ELEMENTI A SUFFICIENZA PER GIUNGERE A CONCLUSIONI

Es.:

$$a_n = \left\{ \frac{2^n}{n!} \right\} \longrightarrow a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n \cdot 2}{(n+1) \cdot n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} = 0 = q$$

poiché $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $q < 0$

Allora $\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \infty \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(2(n+1)!)}{((n+1)!)^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2} \longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^2}}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^2 \cdot (2n)!} = \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot \cancel{(2n)!}}{(n+1)(n+1) \cdot \cancel{(2n)!}}$$

$$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1) \cdot (2n)!$$

$$(n+1)^2 = (n+1) \cdot (n+1) = n^2 + 2n + 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^2 + 2n + 4n + 2}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{4\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = 4 \rightarrow q > 1$$

$$\rightarrow a_n \left\{ \frac{2n!}{(n!)^2} \right\} = +\infty$$

SUCC. GEOMETRICA

Sia $q \in \mathbb{R}$ è detta succ geometrica $a_n = q^n$

Allora $S = \{q^n, n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} |q| < 1 \Rightarrow 0 \\ q = 1 \Rightarrow 1 \\ q > 1 \Rightarrow \infty \end{cases}$

$\nexists \lim, q \leq -1$ xk ESPONENZIALE RAi $\ominus$

Dim $\Rightarrow$

$q > 1 \Rightarrow q = 1 + x, \quad x > 0$ $\quad x =$ numero

Allora $q^n = (1+x)^n = (1^n + n \cdot 1 \cdot x + x^n)$

$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1 + nx + x^n \ldots) = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ se $q > 1$

$q = 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

$|q| < 1 \longrightarrow b_n = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n, \quad \frac{1}{|q|^n} > 1$

Allora $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|q|^n} = 0$

$\simeq \frac{1}{\infty} = 0$

~~$q < -1 \Rightarrow \nexists \lim$ perché $\Rightarrow q = (-1) q$~~

~~$q > q$~~ ~~$q^n = (-1)^n \cdot q^n$~~

ORDINE DI INFINITO

$\lim_{n \to \infty} \quad h < n^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad q > 1$

$$n^{\alpha} < q^{n} < n! < n^{n}$$

Es. $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^{n}} = 0$

STIRLING

Dato $n!$ $\longrightarrow$ per $n \to \infty$, $n! \sim \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n}$

STUDIO FUNZIONI

$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ $\qquad$ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^{+}$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^{+}$ $\qquad$ $\lim_{x \to +2^{+}} f(x) = +\infty$

$x = 0$ AS. OR. $\qquad$ $\lim_{x \to +2^{-}} f(x) = -\infty$

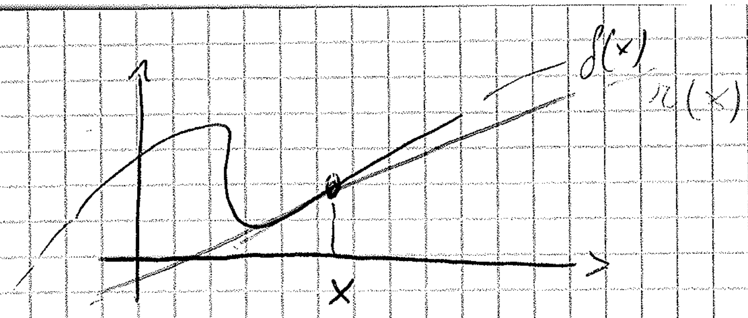
$\lim_{x \to -2^{-}} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -2^{+}} f(x) = -\infty$

$x = \pm 2$ AS. VERTICALE

$f'(x) = \frac{(x^2-4) - (x+3)\cdot(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2-6x}{(Den)^2}$

$f'(x) = \frac{-x^2-6x-4}{(Den)^2}$

$T_1(x) = ?$



$f(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow$ Equazione Retta Tangente

Allora $T_1(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$\longrightarrow R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

$R_1(x) = o(x - x_0)$, per $x \longrightarrow x_0$

$\longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - f'(x_0) \cdot \cancel{\frac{(x - x_0)}{x - x_0}}$

ma $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \longrightarrow \lim_{x \to x_0} f'(x_0) - f'(x_0) = 0$

= Resto nella Forma di Peano

RESTO NELLA FORMA DI LAGRANGE

Dato $\frac{R_1(x)}{(x - x_0)^2}$, $x \longrightarrow x_0 \longrightarrow \frac{R_1(x) - R_1(x_0)}{(x - x_0)^2 - (x - x_0)^2} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

Allora (per CAUCHY) $= \frac{R'(c)}{2(c - x_0)}$, $c \in (x, x_0)$

$R'(c) = f''(\hat{c}) \cdot (c - x_0)$, $\hat{c} \in (x, c)$

$R_1'(x) = D\left[f(x) - \underbrace{f'(\overset{\hat{n}K}{x_0}) \cdot (\overset{\hat{n}1}{x - x_0})}_{\to 0} - f(x_0)\right]$, $f'(x) \sim f(x_0)$

$\longrightarrow R_1'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

$R_{0,f'}(x, x_0) = D[f'(\hat{c}) \cdot (x - x_0)]$ (PER LAGRANGE IN GRADO 0)

$= f''(\hat{c}) \cdot (x - x_0)$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2$$

$$R_2(x) = o(x-x_0)^2 \Rightarrow \text{PER PEANO}$$

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!} \cdot (x-x_0)^3 \Rightarrow \text{PER LAGRANGE}$$

$$T_3(x) = T_2(x) + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3$$

$$R_3(x) = \frac{f'''(c)}{4!} (x-x_0)^4$$

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$R_n(x) = \frac{f^n(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

$$T_2(61) = 8 + \frac{1}{16}\cdot(61-64) - \frac{1}{84}\cdot(61-64)^2$$

$$= 8 + \frac{1}{16}(-3) - \frac{1}{84}\cdot(9) = 8 - \frac{3}{16} - \frac{9}{84} = 7{,}8103$$

$$T_2(61) = 7{,}8103 \sim \sqrt{61}$$

$$\sqrt{61} = 7{,}81024$$

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 \qquad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt[2]{x^5}}$$

$$R_2(61) = \frac{3}{8\sqrt[2]{c^5}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot(-27) =$$

$$3! \; 2$$

$$61 < c < 64 \longrightarrow \frac{1}{64} < \frac{1}{c} < \frac{1}{64} \sim \frac{1}{49}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{8^5} < \frac{1}{(\sqrt{c})^5} < \frac{1}{7^5}$$

$$|R_2(61)| = \frac{27}{16\cdot 8^5} < \frac{27}{16\sqrt[2]{c^5}} < \frac{27}{16\cdot 7^5}$$

COMPOSIZIONE

$h(x) = f(g(x))$, x_0

$T_n g(x) \Rightarrow$ centrato in $I(x_0)$

$T_n f(x) \Rightarrow$ centrato in $g(x_0)$

$T_n h(x) = T_n f(T_n g(x) + o$ ...

Es

$h(x) = e^{1-\sqrt{1+2x}}$

$f(x) = e^x$

$g(x) = 1 - \sqrt{1+2x}$

$T_2 g(x) = \cancel{1} - \left(\cancel{1} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x - \frac{x^2}{2!}\right) + o(x^2) = -x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

$T_2 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

$T_2 h(x) = 1 + \left(-x + \frac{x^2}{2!}\right) + \frac{\left(-x + \frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!} + o(x^2)$

$T_2 h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!}}{2!} + o(x^2)$

$T_2 h(x) = 1 - x + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2!}} + o(x^2) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$

Se si arrivo da sinistra $\longrightarrow f(x) - f(x_0)$ è NEGATIVO
" " " " destra $\longrightarrow f(x) - f(x_0)$ è POSITIVO

Se $a_1 = 0 \longrightarrow a_2$
- POSITIVO $\longrightarrow f(x) > f(x_0) \longrightarrow x_0 = \text{MIN}$
- NEGATIVO $\longrightarrow f(x) < f(x_0) \longrightarrow x_0 = \text{MAX}$
- ZERO $\longrightarrow f(x) = f(x_0) \longrightarrow$ NON SI PUÒ AFFERMARE NIENTE

4. Sviluppando una potenza con Taylor,
Allora: ① se dispari $\longrightarrow$ né Max né Min
② se pari $\longrightarrow$ Max o Min

INTEGRALI DEFINITI

Def. Preliminari:

- SOMMATORIA $= \sum$, Allora:

1. Dati $x_1, x_2 \dots x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

2. Dati $x_1, x_2 \dots x_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$

- PARTIZIONE $\Rightarrow$ Sia Ω un insieme qualunque, Sia $\{A_1, A_2 \dots A_n\}$ un insieme di sottoinsiemi di Ω, formano una PARTIZIONE DI OMEGA, se andando a fare l'unione di questi insiemi trovo l'Ω di partenza e sono tutti disgiunti

$$\bigcup_{i=1} A_i = \Omega \qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Con: ① $\sum_{i=1}^{n} \underline{f}_i \cdot \Delta x_i = \underline{S}(P) = \underline{S} = \sup\{\underline{S}(P) \mid P$ è una partizione $[a,b]\}$

② $\sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i \cdot \Delta x_i = \overline{S}(P) = \underline{S} = \inf\{\overline{S}(P) \mid P$ è una partizione in $[a,b]\}$

Se ~~tutto~~ quadra, Allora $\overline{S} = \underline{S} = A$

In questo caso, possiamo chiamare la funzione come "integrabile" in $[a,b]$ e denotiamo $A = \overline{S} = \underline{S} = \int_a^b f(x)\,dx$

INTEGRALE DEFINITO

① $\sum \sim \int$

② $\underline{f}_i = \overline{f}_i \sim f(x)$

$\Delta x_i \sim d(x) \Rightarrow$ "Differenziale"

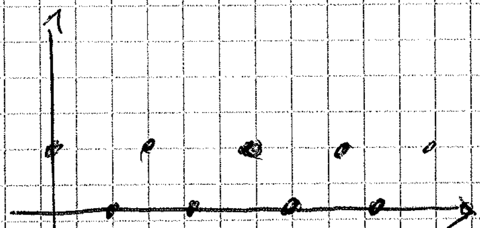
Dove il "Differenziale" è la variabile di integrazione che sta indicare da dove parte il calcolo dell'area

N.B. $\Rightarrow$ Non sempre gli integrali esistono!!!

Es $\Rightarrow f(x) \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Definiamo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\int_0^1 f(x)\,dx$



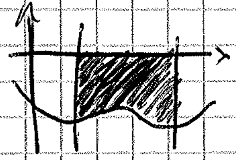
in questo caso $\nexists \int_0^1 f(x)\,dx$

FUNZIONI INTEGRABILI => Sono integrabili tutte le funzioni (continue, monotone, continue a tratti, mon. a tratti)

CONTINUITÀ => INTEGRABILITÀ

PROPRIETÀ

S.a $\int_a^b f(x)dx$ < POSITIVA / ZERO / NEGATIVA



Dire INTEGRALE $\neq$ AREA

SOMMA / DIFFERENZA

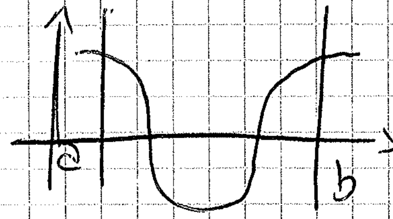
$$\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x)$$

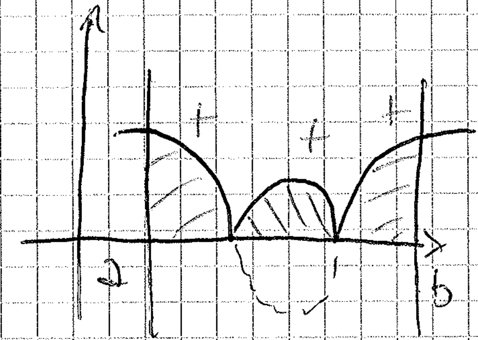
$$\int_a^b \left(\alpha f(x) - \beta g(x)\right)$$

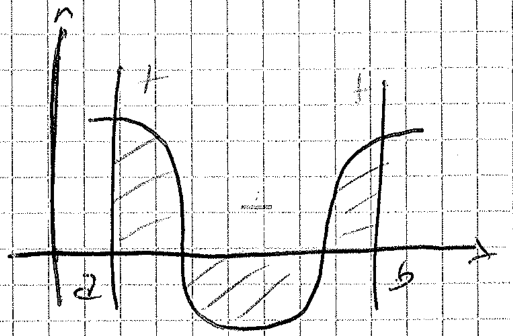
$$\alpha \int_a^b f(x) - \beta \int_a^b g(x)$$

① $\int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ ②, perché

Data $f(x) =$ 

, Allora

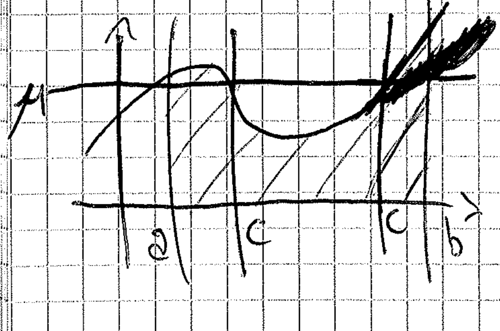
① 

② 

$(+)\,(+)\,(+) \geq |(+)\,(-)\,(+)|$

TEO DELLA MEDIA INTEGRALE

DEF => Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta media integrale in $[a,b]$ la quantità $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$



$\Rightarrow (b-a)\cdot\mu = \int_a^b f(x)\,dx$

Area Sottesa

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= (b-a)\cdot\mu \\ A_2 &= \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}\right\} A_1 = A_2$$

Es.:

$f(x) = \sin(x)$ $\quad F(x) = -\cos(x) + K$

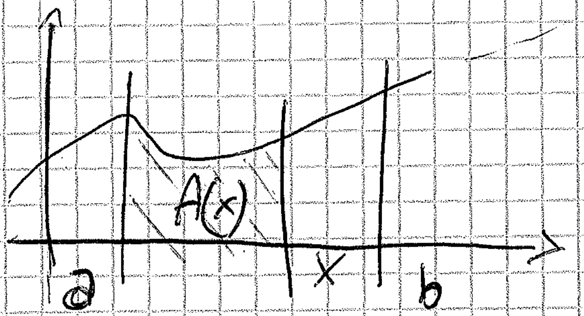
N.B. => Le F differiscono tra loro per K

DEF => Data una $f: R \to R$, è detto integrale indefinito di f, l'insieme delle sue primitive

$$\int f(x)\,dx = \{F(x)+k,\ k \in R : F = F' = f\}$$

TEO FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

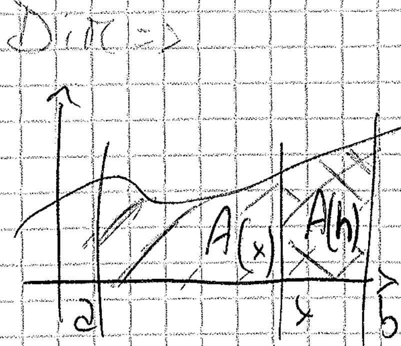
Sia f = cont. in $[a,b]$, Definiamo $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$



Allora $A(x)$ = primitiva di f, cioè

$A'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]$

Dim =>



$$A'(x) = f(x) \to \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{(x+h)-x} \sim \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

$$\lim_{h\to 0} f(c_h) \sim x = \lim_{h\to 0} x = f(x)$$, $c_h \in [x, (x+h)]$, $h \to 0$ $c_h \to 0$

INTEGRAZIONE PER DECOMPOSIZIONE

$$\int f(x) \pm g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)$$

Es. $\Rightarrow$ $\displaystyle\int (x+1)^2 \, dx = \frac{(x+1)^3}{3} + c$

$$\int (x^2 + 2x + 1) \, dx = \int x^2 dx + 2\int x \, dx + \int 1 \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right) + c$$

Es. $\Rightarrow$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx \cdot \int x^2 \, dx = \arctan(x) \cdot \frac{x^3}{3}$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE DIRETTA

$\displaystyle\int f(x) \, dx = F(x) + c$, Definiamo $g(t) = x$
con g = INVERTIBILE

Allora $\displaystyle g'(t) = \frac{dg(t)}{d(t)} = \frac{d(x)}{d(t)} \longrightarrow g'(t)\,dt = d(x)$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(t) \, dt = H(t) + c = H(g^{-1}(x)) + c$$

Dim $\Rightarrow$ $D_x[H(g^{-1}(x))] \longrightarrow D[g^{-1}(x)] \cdot D[H(g^{-1}(x))]$

Allora $D[g^{-1}(x)] \cdot H'(g^{-1}(x)) \Rightarrow$ [illegible]

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{1}{g'(\cancel{g^{-1}(x)})} \cdot f(g(g^{-1}(x))) \cdot g'(\cancel{g^{-1}(x)}) = f(x)$$