



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1116

DATA: 16/09/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Sannipoli

MATERIA: Calcolo Automatico delle Strutture

Prof. Carbone

**ATTENZIONE QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI, NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE. IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



# CALCOLO AUTOMATICO DELLE STRUTTURE

## FRIGIDEZZA

- DEFINIZIONE DI RIGIDEZZA E DI ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE
- + MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA MOLLA (principio di sovrapposizione degli effetti)
  - PROPRIETÀ DELLA MATRICE  $[K]$  (4)
- + MATRICE DI RIGIDEZZA DI UN GRUPPO DI MOLLE
  - TERMINI DIRETTI E INDIRETTI DI RIGIDEZZA, IMPOSIZIONE CONDIZIONI VINCOLARI
- + METODO DEGLI SPOSTAMENTI (5 PASSI)
  - la strada da seguire è così semplice perché siamo in elasticità lineare
- + STRUTTURE RETICOLARI
  - DIFFERENZA TRA ELEMENTO MOLLA E ELEMENTO ASTA DI UNA STRUTTURA RETICOLARE
  - MATRICE DI TRASFORMAZIONE  $[T]$  E SUA PROPRIETÀ
  - $[K]_i$ : è una  $4 \times 4$  (perché?); proprietà sottomatrice  $[K]_{ii}$ ;
  - COSTRUZIONE MATRICE DI RIGIDEZZA  $[K]$  (esempio pag. 165 PARTE 1)
- + ASTA SOGGETTA A VARIAZIONE TERMICA o A STATO DI COAZIONE (limite plastica)
  - CALCOLO DI  $N_{TOT}$
- +  $[K]$  DELL'ASTA NELLO SPAZIO RIFERITA AL SISTEMA GLOBALE
- + CONDIZIONI VINCOLARI (oppure SPOSTAMENTI IMPOSTI)
  - + METODO DEL TERMINE "DOMINANTE" SULLA DIAGONALE
    - 4 o 15 cifre decimali (quanti byte uso per rappresentare il numero reale)
  - + METODO DEL TERMINE UNITARIO SULLA DIAGONALE
    - CONFRONTO CON IL METODO PRECEDENTE
  - + METODO DELLA SOPPRESSIONE DELLE EQUAZIONI
    - OSA SAREBBE PREFERIBILE FARE SIN DALL'INIZIO
- + SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI
  - SISTEMA IN FORMA MATRICIALE
  - + METODI DI SOLUZIONE DEL SISTEMA
    - + METODI DIRETTI
      - + METODO DI GAUSS  $\rightarrow$  si ottiene un sistema triangolarizzato (back substitutions)
        - È POSSIBILE CHE  $k_{ii} = 0$ ? SE SÌ  $\Rightarrow$  PERCHÉ?
        - QUANDO QUESTO METODO È CONSIDERevolmente STABILE
      - + METODO DELLA FATTORIZZAZIONE
    - + METODI INDIRETTI
      - + METODO DI GAUSS-SEIDEL
        - + COME VALUTARE L'ACCURATEZZA DELLA SOLUZIONE
        - USARE LA DOPPIA PRECISIONE UTILIZZANDO 8 BYTE COME FLOAT (per anal. strutt.)



- CONDENSAZIONE STATICA PER I G.D.L. DEL NODO COMUNE
- MEDIA DEI VALORI DI DEFORMAZIONE E TENSIONE DEI SINGOLI TRIANGOLI
- ASPECT RATIO PER ELEMENTI RETTANGOLARI (errori del 15-20% NON sono accettabili!)
- + DEFINIZIONE DEL MODELLO
  - MODALITÀ CORRETTA (ED USUALE) DI COMBINARE GLI ELEMENTI
  - + DISCRETIZZAZIONI "NON CORRETTE"
    - AFFIANCAMENTO SFALSATO DI DUE ELEMENTI RETTANGOLARI QUADRATICI
    - COMBINAZIONE DI ELEMENTI DI ORDINE DIVERSO, RISOLTA IN 2 MODI
    - + ERRORI "GEOMETRICI DI MODELLO" (modi per discretizzare un contorno curvo)
      - PARADOSSO DI BABUSKA (conigliabile usare el. isoparametrici a bordi curvi)
    - + I "CARICHI" SUL MODELLO
      - NON CORRETTA DEFINIZIONE DEL CONTOURNO, CARICO DISTRIBUITO SU UNA REGIONE LIMITATA
      - INFITTIMENTI LOCALI DELLA DISCRETIZZAZIONE (4 nodi/blocco)
      - NUMERAZIONE DEI NODI IN MODO DA AVERE LA MINORE LARGHEZZA DI BANDA
- + ELEMENTI ASSIALSIMMETRICI "BIDIMENSIONALI"
  - + GUSCI ASSIALSIMMETRICI (gusci sottili)
    - + ELEMENTO TRONCO-CONICO: DEFINIZIONE POLINOMI INTERPOLANTI  $u$  E  $w$ 
      - STESSA APPROSSIMAZIONE DI QUELLA DELL'ELEMENTO TRAVE (le  $E$  sono diverse)
      - SCRIVERE LE RELAZIONI NEL S.D.R. LOCALE E GLOBALE
      - MATRICE DELLE "FUNZIONI DI FORMA" (funzione di  $\rho = r/L$ )
        - DEFORMAZIONI E FORZE
        - MATRICE DI RIGIDEZZA ( $dx = 2r dr$ )
    - + GUSCIO CILINDRICO CIRCOLARE; ANGOLO  $\phi = 0^\circ$ 
      - RAGGIO "r" COSTANTE PER TUTTA LA STRUTTURA
      - ESEMPIO: DISCRETIZZAZIONE DI UN CILINDRO SOTTILE
    - + PIASTRA CIRCOLARE: ANGOLO  $\phi = 90^\circ$ 
      - utile per studiare piastre inflesse circolari assialsimmetriche
  - + ELEMENTI TRIDIMENSIONALI (elementi di volume)
    - + TETRAEDRO (estensione al 3D dell'elemento triangolare CST)
      - POLINOMIO APPROSSIMANTE LA FUNZIONE DI CAMPO  $\phi$
      - ESPRESSIONI DELLE COORDINATE NODALI E DELLE FUNZIONI DI FORMA
      - CAMPO DI SPOSTAMENTI  $[u]$  (3 componenti), DEFORMAZIONI  $[E]$  (6 componenti) ( $[B]$  è una matrice di costanti); MATRICE DI RIGIDEZZA  $[k]$
      - PROBLEMA PIÙ IMPORTANTE PER IL TETRAEDRO
    - + ESAEDRO (estensione al 3D dell'elemento rettangolare di Argyris)
      - POLINOMIO INTERPOLATORE
      - SE PREVALENTE COMPORTAMENTO FLESSIONALE se descrivo la trave con elemento brick di quinto tipo



- IMPOSIZIONE CONTINUITÀ DERIVATA NORMALE SUI LATI INTERNI  $\rightarrow$  parso da 15 a 12 g.d.l.
- $W$  maiuscolo (elemento non conforme),  $w$  minuscolo (elemento conforme)
- + ALTRA STRADA PER ARRIVARE ALL' HCT 12
- + SI PARTE DA UN ELEMENTO NON CONFORME (3 nodi - 9 g.d.l. / Myrons)
  - NELLE PIASTRE LE f. di f. VENGONO INDICATE CON  $f, g, h$  ( $w$  maiuscolo)
- + SI ARRIVA A UN ELEMENTO CONFORME (6 nodi)
  - CORREZIONE LEGATA ALLA DERIVATA NORMALE DI TUTTI I NODI
  - IMPOSIZIONE VARIAZIONE LINEARE DELLA DERIVATA NORMALE  $\rightarrow$  stessa  $[k]$  dell' HCT 12
- + ELEMENTO TRIANGOLARE A 4 NODI
  - SCRIVERE IL POLINOMIO APPROSSIMANTE IN TERMINI DI COORDINATE D'AREA
  - L'ELEMENTO NON È CONFORME  $\rightarrow$  COME FACCIO?
- + METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE
  - PRINCIPIO DI MINIMO DELL' ENERGIA POTENZIALE GENERALIZZATA (multiplicatori  $[H]$ )
  - elemento a 4 nodi con compatibilità imposta
- + ANTICIPAZIONE DI CIÒ CHE AFFRONTEREMO
  - DESCRIZIONE GEOMETRIA MEDIANTE  $\hat{N}_3 (f(\xi, \eta))$ ;  $\hat{N}$  DEVONO GENERARE UNA  $\mathcal{X}$  BIETTIVA PER 2 RAGIONI/VANTAGGI; elemento parent (ideale) / elemento real (reale)
- + ELEMENTO BIDIMENSIONALE (RETTANGOLARE)
  - PERCHÉ  $\mathcal{X}$  È DI CERTO BIETTIVA?
  - ELEMENTI DELLA FAMIGLIA DI LAGRANGE IN COORDINATE NATURALI  $\xi, \eta$
- + ELEMENTI DELLA FAMIGLIA DELLA SERENDIPITÀ
  - PRINCIPIO SU CUI SI BASA LA COSTRUZIONE DEGLI ELEMENTI (by inspection)
- + ELEMENTI DELLA FAMIGLIA DELLA SERENDIPITÀ IN COORDINATE NATURALI
  - NELL' ELEMENTO QUARTICO AVREI IL NODO CENTRALE, MA LO ELIMINO CON COND. ST.
- + METODO PER LA DETERMINAZIONE DELLE f. di f. DELL' ELEMENTO QUADRATICO
  - COSTRUZIONE f. di f. NODO 5 (nodo centrale)
  - COSTRUZIONE f. di f. NODO DI VERTICE IN 2 STEP
- + FORMULAZIONE PER ELEMENTI DI STATI PIANI
- + ELEMENTO LINEARE
  - SISTEMA LOCALE NATURALE  $(\xi, \eta)$ ,  $[u] = [N][\bar{u}]$ ,  $[E] = [B][\bar{u}]$  (matrice Jacobiana della trasformazione),  $[k] = abt \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] d\xi d\eta$
  - + NON RAPPRESENTA CORRETTAMENTE IL COMPORTAMENTO FLESSIONALE NEL PIANO
  - + MODIFICA PROPOSTA DA WILSON (aggiunta di "nodi incompatibili")
    - FORMULE DEL CAMPO DI SPOSTAMENTI FINALE
    - 1 G.D.L.  $u_5, u_6, v_5, v_6$  SONO CONSIDERATI COME G.D.L. INTERNI
    - PATCH TEST (quadrilatero irregolare)



- + METODO DI GAUSS-RADAU
  - COME FUNZIONA, NON PRESENTA ISOTROPIA GEOMETRICA, CON QUALI FUNZIONI VIENE UTILIZZATO
- + DEFINIZIONE DELL'ORDINE DI INTEGRAZIONE (numero di punti)
- + INTEGRAZIONE ESATTA
  - ESEMPI DI MAGLIE DI PUNTI PER L'INTEGRAZIONE ESATTA SECONDO GAUSS
  - PUÒ PORTARE A PROBLEMI DI SHEAR LOCKING
- + INTEGRAZIONE RIDOTTA
  - INCONVENIENTE CHE PORTA ("numerous modes")
- + MODO PARASSITA PER UN ELEMENTO RETTANGOLARE A 9 NODI CON INTEGRAZIONE RIDOTTA (2x2)
  - PERCHÉ COMPARE?
  - PERCHÉ VIENE COMUNQUE PREFERITA L'INTEGRAZIONE RIDOTTA?
- + APPLICAZIONI DI INTEGRAZIONE RIDOTTA
  - + TRAVE CON DEFORMABILITÀ A TAGLIO
    - SCRIVERE  $U_f$  e  $U_t$ , COME INTEGRO  $[K_f]$  e  $[K_t]$ , ESEMPIO MENSOLE
    - L'ELEMENTO DI TIMOSHENKO OTTENUTO IN INTEGRAZIONE RIDOTTA RISULTA EQUIVALENTE A...
  - + ELEMENTO QUADRILATERO A 4 NODI (STATI PIANI)
    - 3 MODI RIGIDI E 2 MODI SPURI
    - MODO DI ENERGIA NULLA PER L'INTERO SISTEMA ("a harmonica")
    - EVITARE CHE I MODI SPURI SI PROPAGHINO IN TUTTA LA STRUTTURA
  - + CAPIRE SIN DALL'INIZIO SE, INTEGRANDO IN MODO RIDOTTO, AVREI MODI SPURI
    - PROBLEMA DI AUTOVALORI (quando  $\lambda_i = 0 \rightarrow$  molto rigido o modi spuri)
  - + ESEMPIO ELEMENTO A 4 NODI
    - MODI DI DEFORMAZIONE NEL CASO DI INTEGRAZIONE ESATTA (2x2)
    - "RIDOTTA (1 solo punto)
  - + CONFRONTI TRA FULL E REDUCED INTEGRATION (non fatto)
  - + ELEMENTI PIASTRA QUADRILATERI (presa in conto della deformabilità a taglio)
  - + TABELLA RIASSUNTIVA SULL'INTEGRAZIONE DEGLI ELEMENTI PIASTRA
    - ELEMENTI DI TIPO LINEARE
    - ELEMENTI DI TIPO QUADRATICO (Lagrange, Serendipita, Heterous)

## ELEMENTI GUSCIO

- CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE IN UNA STRUTTURA A GUSCIO
- PROBLEMI NELL'UTILIZZO DI ELEMENTI PIASTRA PIANI



## + CRITERI DI UTILIZZO DELL'ELEMENTO (per avere $\chi$ direttiva)

- ANGOLI INTERNI AI VERTICI  $< 180^\circ$ , DOVE PORRE IL NODO INTERMEDIO (problemi di crack), ASPECT RATIO, DESCRIZIONE DI LATI CURVI, 2 ELEMENTI COMPLETAMENTE INUTILIZZABILI (scobiano triangolare),
- INTEGRAZIONE  $[K]$  (ho un rapporto tra polinomi), FULL INTEGRATION <sup>(shear locking)</sup> E REDUCED INTEGRATION, TEOREMA RISULTATO DEI DUE MATEMATICI/NUMERICI STRANG E FIX
- CALCOLO TENSIONI  $[\sigma]$  NEI 4 PUNTI DI GAUSS (dell'integrazione ridotta), PROCEDURE DURA DI SMOOTHING (N f. di f. BILINEARI in set), MEDIA VALORI NODI DI BORDO
- VALORI DI "a" PER I QUALI L'ELEMENTO NON È PIÙ UTILIZZABILE

## + ELEMENTO TRIANGOLARE (QUADRATICO)

- CRITERI GEOMETRICI PER AVERE  $\det J > 0$ , VALUTAZIONE STATO TENSIONALE

## + ELEMENTI TRIANGOLARI FORMULATI MEDIANTE COLLASSO DI ELEMENTI QUADRANGOLARI

- COLLASSO DI UN NODO

## + DA EL. PARENT RETTANGOLARE A REAL TRIANGOLARE (X e Y funz. solo di $x_2, x_3, x_4$ )

- SI OTTIENE UN CASO DI DEFORMAZ. COSTANTE (ho l'elemento CST)

## + COLLASSO DEI NODI QUANDO L'ELEMENTO DI ORIGINE È DI ORDINE ELEVATO

- MODIFICA DELLE f. di f. per avere ISOTROPIA "SPAZIALE"

## + OTTENIMENTO DI UN ELEMENTO CON COMPORTAMENTO NON ISOTROPO (meccanica della frattura)

- 2 CASI

## + ELEMENTI DI VOLUME

- ESAEDRO A 8 NODI (elemento brick 8): si porta dietro il problema del 2D

- COLLASSO DI UN ELEMENTO ESAEDRO A 8 NODI IN UN ELEMENTO TETRAEDRO

## + ELEMENTI DI VOLUME DEGENERI: ELEMENTI PIASTRA/CUBICO (con noma)

- L'ELEMENTO ISOPARAMETRICO A 20 NODI NON DESCRIVE CORRETTAMENTE I GUSCI SOTTILI

- 2 POSSIBILI SEMPLIFICAZIONI

## + SI CONSIDERI UN ELEMENTO PIASTRA SOGGETTO SOLO A FLESSIONE

- RIDUCCI I G.D.L. DA 60 A 24 / INTEGRAZIONE SELETTIVA

## + ELEMENTI DI TRANSIZIONE

- ESEMPIO DI ELEMENTO DI TRANSIZIONE CHE VOGLIAMO COSTRUIRCI (costruzione f. di f.  $N_1$ )

- LA PROCEDURA PUÒ ESSERE ALGORITMIZZATA (molto più semplice rispetto ai vincoli generali)

- DOVE INSERIRE GLI ELEMENTI DI TRANSIZIONE ALL'INTERNO DELLA MIX MESH

## + 2 PARAMETRI CHE SI CORRELANO ALLA DISTORSIONE DELL'ELEMENTO

- LA FAMIGLIA DI LAGRANGE RISPONDE MEGLIO DI QUELLA DELLA SERENDIPITÀ

## + ELEMENTI TRAVE ISOPARAMETRICI

- COSA È LA TEORIA DI TIPO "DISCRETO" DI KIRCHOFF?

- QUALI VANNO BENE PER STRUTTURE MODERATAMENTE SPESSO?



- INFLUENZA DEL MODELLO (Kirchhoff : Zona di piastra con em. di def. = 0)
- INFLUENZA DEL MODELLO (test flessione / torsione)
- INFLUENZA DEL MODELLO (fare mesh simmetrica affinché  $S_1 = S_2$ )
- INFLUENZA DEL MODELLO (model of clamped plate)
- + PATCH TEST (è un test numerico)
  - MI GARANTISCE CHE UN ELEMENTO NON CONFORME CONVERGE
  - COME SI EFFETTUA
  - ALCUNI ELEMENTI QUADRILATERI POSSONO PASSARE IL PATCH TEST SE USATI COME...
  - NON DICE NULLA SULLA VELOCITÀ DI CONVERGENZA
  - PATCH TEST PER ELEMENTI PIASTRA (cosa significa deformazioni costanti)
- + CRITERI DI VALUTAZIONE DI UN ELEMENTO FINITO PIASTRA
  - AFFIDABILITÀ (4)
  - EFFICACIA (3)
  - SEMPLICITÀ DI UTILIZZO (5/6)
- + ESEMPIO DI PIASTRE NERVATE (2 casi)
  - SE CALCOLO  $e = h/2 - s/2 \Rightarrow$  SOVRASTIMO LA RIGIDEZZA
  - + STESSA COSA ACCADE NEGLI IMPALCATI DA PONTE ( $e = h/2 + s/2$  : corretto)
    - COME PROGETTO LA TRAVE A T (2 metodi)
- + GUSCI (in genere ci sono 2 modi per trattare i gusci)
- + ELEMENTO GUSCIO PIANO: ELEMENTO TRIANGOLARE
  - NON DICIAMO NIENTE RIGUARDO  $Q_z$  (può dare, o meno, problemi)
  - + MATRICE  $[K]$  TOTALE DELL'ELEMENTO TRIANGOLARE (nel sistema locale)
    - PERICOLO DI SINGOLARITÀ DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA NEL SISTEMA GLOBALE
  - + 2 STRADE CHE POSSO SEGUIRE
    - QUANDO POSSO O NON POSSO USARLE
    - ESEMPIO IMPALCATO DA PONTE GIRATO AL CONTRARIO (vincolo generalizzato)
    - PIASTRA IN CUI SI INNESTA UNA TRAVE SOGGETTA A MOMENTO TORCENTE

## TECNICHE DI INTERPOLAZIONE

- COSTRUZIONE DELLE f. di f. UTILIZZANDO LE TECNICHE CLASSICHE DI INTERPOLAZIONE
- POLINOMI DI LAGRANGE, DI HERMITE (oscillatori), PER IPEROSCOLATORI
- + POLINOMI DI LAGRANGE
  - FUNZIONE  $u(x)$  DEFINITA IN  $(m+1)$  PUNTI EQUIDISTANTI (in Lagrange i nodi sono equidistanti tra loro)
  - COME SONO DEFINITI I POLINOMI DI LAGRANGE E PROPRIETÀ  $N_i(x_j) = \delta_{ij}$
  - CAMPO LINEARE (2 PUNTI DI STAZIONE), QUADRATICO (3 PUNTI DI STAZIONE)
- + POLINOMI DI HERMITE



## IL CASO DELLA TRAVE INCASTRATA

- RICAVARE LA  $[K]$  CHE LEGA  $[F^L]$  e  $[U^L]$  NELLE ESTREMITÀ RIGIDE
- + ASTA CON ESTREMI  $\infty$  RIGIDI. (esempio reale)
  - DISEGNARE SOLLECITAZIONI ALLE ESTREMITÀ
  - + ESEMPIO - STRUTTURA REALE
    - IPOTESI E MODELLO DI CALCOLO
- + RILASCIO DEI G.D.L. ALLE ESTREMITÀ DELL'ASTA
  - PASSAGGI PER OTTENERE LA MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE INCASTRO-CERNIERA
  - ESEMPIO TELAIO CON CERNIERA IN MEZZO
- ASTA A RIGIDEZZA VARIABILE
- + IL PROBLEMA DELLE TRAVI CURVE (stiamo parlando di arco (pezzo di cerchio), non di trave curva!!!)
  - 2 PROBLEMI CHE SI PRESENTANO
  - VALORE LIMITE DELL'ANGOLO  $\alpha$

## ELEMENTI IN COORDINATE GENERALIZZATE

- + INTERPOLAZIONE
  - APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE IN 1D, 2D, 3D
  - SCELTA DEL GRADO DEL POLINOMIO
  - SIGNIFICATO DELLE COORDINATE GENERALIZZATE (esse sono parametri incogniti)
  - TRIANGOLO DI TARTAGLIA (2D) E TETRAEDRO DI PASCAL (3D) (rototro geometrico)
- + IL NUM. DI COORD. GENER.  $\alpha$ ; È UGUALE AL NUMERO DI G.D.L. DELL'ELEMENTO
  - ESEMPIO TRIANGOLO SIMPLEX (avvicinare a  $[N] = [X]^T [X]^{-1}$ )
- + ELEMENTO MONODIMENSIONALE: ASTA RETICOLARE (simplex)
  - I TERMINI COSTANTE E DI 1° GRADO SONO SEMPRE NECESSARI ALL'INTERNO DEL POLINOMIO
  - RICAVARE LE FUNZIONI DI FORMA
  - FORZA ASSIALE  $N$  ( $\rightarrow$  matrice  $[B]$ ) ED ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE
  - ESPRESSIONE MATRICE  $[K]$  (ipotesi di area variabile)
- + ELEMENTI MONODIMENSIONALI
- + ELEMENTO MONODIMENSIONALE: TRAVE
  - PROCEDIMENTO PER RICAVARE LE f. di f. (hanno un significato fisico ben preciso)
  - RICAVARE LA MATRICE DI RIGIDEZZA CON IL METODO DELLE f. di f.
  - CARICHI EQUIVALENTI (metodo del lavoro equivalente)
- + TRAVE SU SUOLO ELASTICO (peculiarità della trave su suolo alla Winkler)
  - MATRICE DI RIGIDEZZA  $[K_f]$  AGGIUNTIVA (termini  $k_{f,5}$ )
- + TRAVE AD INERZIA VARIABILE (tapered beam)
- + TRAVE CIRCOLARE
  - DIVERSE APPROSSIMAZIONI PER  $u(s)$  E  $v(s)$
- + ELEMENTI BIDIMENSIONALI



PROF. CARBONE N° 1 05-03-12

CALCOLO AUTOMATICO DELLE STRUTTURE  
I FACOLTA' CIVILE

**LUCIDI DEL CORSO**

**CALCOLO AUTOMATICO  
DELLE STRUTTURE**

**PARTE PRIMA**

**POLITECNICO DI TORINO**



RICI

$[A]$  e  $[B]$  di ordine  
MATRICE  $[C]$  ANCHE DI

$$[A] + [B]$$



$$a_{ij} + b_{ij}$$

$$[B] = [B] + [A]$$

$$[B] + [C] = [A] + ([B])$$

PERCHÉ DATA DUE MATRICI  
NON POSSONO ESSERE SOMME T  
NON CONFORMI ALLA

CE QUADRATA  $[C]$  PUÒ  
SOMMA DI UNA MATRICE  
E DI UNA ANTISIMMETRICA

$$[C] = [S] + [A]$$



$$s_{ij} + a_{ij}$$

$$s_{ji} + a_{ji} = s_{ij} - a_{ij}$$



$$\text{SIMM. } s_{ij} = s_{ji}$$

$$s = (c_{ij} + c_{ji})/2$$

$$r = (c_{ij} - c_{ji})/2$$

MATRICE PER UNO SCALARE

$[A]$  E UNO SCALARE  
"P" PER  $[A]$  LA MAT

$$[A] = [pA]$$

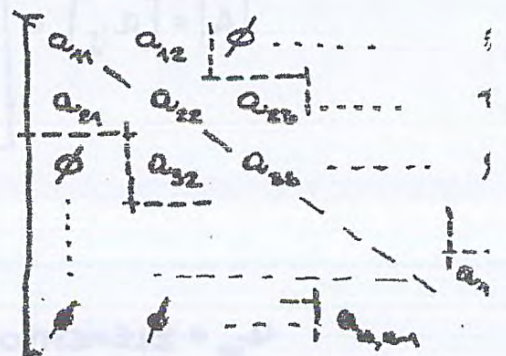
MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

MATRICE DIAGONALE (MATRICE  
TI NON  
DIAGONALE  
CONTEN:  
GOLARE

MATRICE IDENTITÀ (MATRICE  
CUI  
GENERA  
O IL SIF

MATRICE NULLA (TUTTI GLI  
NULLI.

MATRICE A BANDA



MATRICE PARTIZIONATA

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{①} \\ \text{②} \end{bmatrix}$$

## 2) OPERAZIONI SULLE MATRICI

A) UGUAGLIANZA DI DUE MATRICI

$$[A] = [B] \iff \begin{cases} - [A] e [B] son \\ - a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$



$$a'_{ij} = p \cdot a_{ij} \quad \forall i, j$$

PROPRIETA':

$$1 \cdot [A] = [A]$$

$$\phi [A] = [\phi]$$

$$p \cdot [qA] = p \cdot q \cdot [A]$$

$$(p+q) [A] = p \cdot [A] + q \cdot [A]$$

$$p([A] + [B]) = p[A] + p[B]$$

OSS: - NEL CASO IN CUI  $p = -1$  LA MATRICE  $[A']$  E' DETTA MATRICE "OPPOSTA" DI  $[A]$

$$[A] + [A'] = [A'] + [A] = [\phi]$$

- DALLA OSSERVAZIONE PRECEDENTE E DALLA DEFINIZIONE DI SOMMA SEGUE LA POSSIBILITA' DI EFFETTUARE "L'OPERAZIONE DI SOTTRAZIONE" TRA MATRICI

$$[C] = [A] - [B] = [A] + [B']$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \forall i, j$   $\uparrow -1 \cdot [B]$

## 1. PRODOTTO TRA MATRICI

DATE DUE MATRICI  $[A]$  E  $[B]$  RISPETTIVAMENTE DI ORDINE  $(m, n)$  E  $(n, p)$  IN CUI IL NUMERO DELLE COLONNE DELLA PRIMA MATRICE E' UGUALE AL NUMERO DI RIGHE DELLA SECONDA MATRICE, SI DEFINISCE MATRICE PRODOTTO LA MATRICE  $[C]$  DI ORDINE  $(m, p)$

$$[C] = [A] \cdot [B]$$

$(m, p) \quad (m, n) \quad (n, p)$



$$c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj}$$

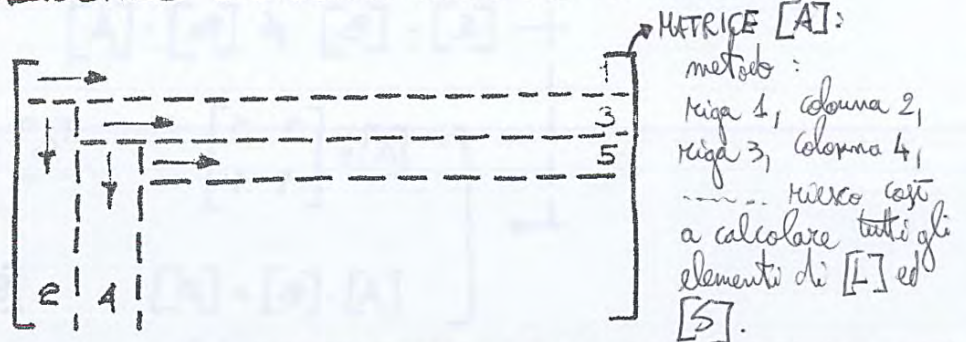
$\uparrow \quad \uparrow \quad \rightarrow$   
 $k=1, n$   
 INDICE DI SOMMATORI

$i=1, m$   
 $j=1, p$   
 $\forall i, j$

$$a_{ik} \cdot b_{kj} \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$



GLI ELEMENTI DELLE MATRICI  $[L]$  E  $[S]$  SI RICAVALO SCRIVENDO IN ORDINE OPPORTUNO L'UGUAGLIANZA FRA IL PRODOTTO DI VETTORI RIGA DI  $[L]$  E I VETTORI COLONNA DI  $[S]$  CON I CORRISPONDENTI TERMINI DI  $[A]$  SEGUENDO L'ORDINE INDICATO IN FIGURA:



LE ESPRESSIONI GENERALI DA APPLICARE PER OGNI  $i=1, m$  RISULTANO

$$\rightarrow s_{ij} = a_{ij} - l_{ik} s_{kj} \quad i \leq j \leq n$$

$$\rightarrow l_{ji} = (a_{ji} - l_{jk} s_{kj}) / s_{ii} \quad i+1 \leq j \leq n$$

+ > IN ENTRAMBE LE RELAZIONI L'INDICE RIPETUTO DI COLONNA "k" VARIA TRA 1 E "i-1"

- NEL CASO DI UNA MATRICE  $[A]$  QUADRATA E SIMMETRICA LA MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE  $[L]$  DELLA SCOMPOSIZIONE

$$[A] = [L] \cdot [S]$$

RISULTA ESSERE LA TRASPOSTA DI  $[S]$

#### D) TRASPOSIZIONE DI UNA MATRICE

DATA UNA MATRICE  $[A]$  DI ORDINE  $(m, n)$  SI DEFINISCE TRA SPOSTA DI  $[A]$  LA MATRICE  $[A]^T$  DI ORDINE  $(n, m)$  OTTE NUTA MESSANTE LO SCAMBIO DI RIGHE CON COLONNE.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



PROPRIETA':  $([A] + [B])^T = [A]^T + [B]^T$   
 $([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T$

OSS: - SE LA MATRICE  $[A]$  E' QUADRATA E SIMMETRICA  
 NE SEGUE:

$$[A]^T = [A]$$

- SE LA MATRICE  $[A]$  E' QUADRATA E ANTISIMMETRICA  
 NE SEGUE:

$$[A]^T = -[A]$$

### 3) DETERMINANTI E MATRICI INVERSE

#### A) DETERMINANTI

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA  $[A]$  DI ORDINE  
 $(n,n)$  INDICATO CON "det[A]" E' FORNITO DALLA SOMMA  
 DEGLI  $n!$  PRODOTTI

$$a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \dots \cdot a_{mq}$$

DOVE "i j k ... q" E' UNA PERMUTAZIONE DI "1 2 ... n"  
 IL SEGNO DI CIASCUN PRODOTTO E' POSITIVO O NEGATIVO  
 RISPETTIVAMENTE SE IL NUMERO DI PERMUTAZIONI DEGLI  
 INDICI E' PARI O DISPARI.

OSS: - SE  $[A] \equiv [B]$  SONO MATRICI DELLO STESSO  
 ORDINE

$$\det([A] \cdot [B]) = \det[A] \cdot \det[B]$$

- SE  $[A]$  E' UNA MATRICE QUADRATA

$$\det[A]^T = \det[A]$$

- SE UNA MATRICE QUADRATA  $[A]$  HA DETERMINANTE  
 NON NULLO QUESTA VIENE DETTA "REGOLARE".  
 IN CASO CONTRARIO LA MATRICE E' DETTA  
 "SINGOLARE".

$$\det[A] = 0 \Rightarrow [A] \text{ SINGOLARE}$$



### C) INVERSIONE DELLA MATRICE PER PARTIZIONE

SIA DATA UNA MATRICE  $[A]$  PARTIZIONATA IN SOTTOMATRICI TALI CHE LE REGOLE DI MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI SIANO ANCORA APPLICABILI ALLE SOTTOMATRICI - SIA  $[B]$  LA MATRICE INVERSA DI  $[A]$

$$[A][B] = [I]$$

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [\phi] \\ [\phi] & [I] \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} [A_{11}][B_{11}] + [A_{12}][B_{21}] = [I] \\ [A_{11}][B_{12}] + [A_{12}][B_{22}] = [\phi] \\ [A_{21}][B_{11}] + [A_{22}][B_{21}] = [\phi] \\ [A_{21}][B_{12}] + [A_{22}][B_{22}] = [I] \end{array} \right. \begin{array}{l} a) \\ b) \\ c) \\ d) \end{array} \end{array}$$

↳ PARTIRE DALLA b) SI RICAVA

$$[B_{12}] = -[A_{11}]^{-1}[A_{12}][B_{22}]$$

CHE SOSTITUITA IN d)

$$([A_{22}] - [A_{21}][A_{11}]^{-1}[A_{12}])[B_{22}] = [I]$$

$$[B_{22}] = ([A_{22}] - [A_{21}][A_{11}]^{-1}[A_{12}])^{-1}$$

ORA SAPENDO CHE  $[B][A] = [I]$  SI HA:

$$[B_{21}][A_{11}] + [B_{22}][A_{21}] = [\phi]$$

$$[B_{21}] = -[B_{22}][A_{21}][A_{11}]^{-1}$$

CHE SOSTITUITA IN a)

$$[B_{11}] = [A_{11}]^{-1} - [A_{11}]^{-1}[A_{12}][B_{21}]$$



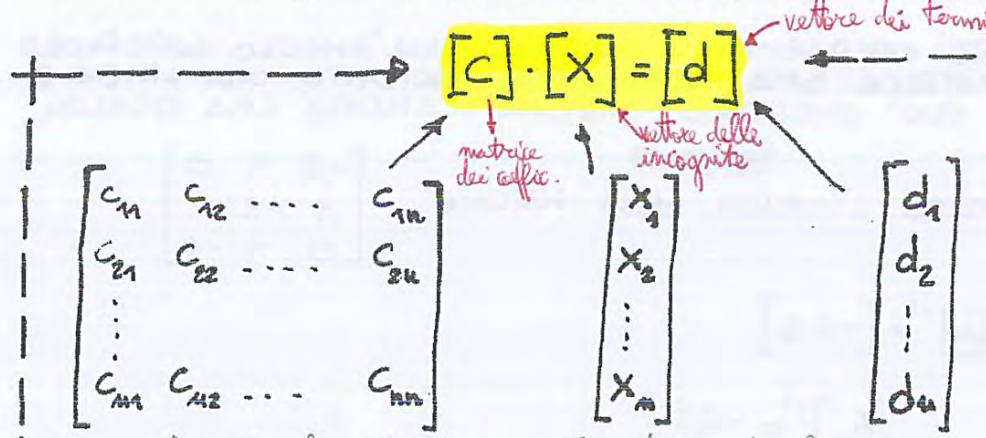
LEZ. 04-03-2014

# SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

DATO UN SISTEMA

$$\begin{aligned}
 c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= d_1 \\
 c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= d_2 \\
 \vdots & \\
 c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n &= d_m
 \end{aligned} \tag{1}$$

QUESTO PUO' ESSERE ESPRESSO IN FORMA MATRICIALE COME:



LA SOLUZIONE DEL SISTEMA (1) ESISTE SE E SOLO SE  $\det[C] \neq 0$ . TALE SOLUZIONE E' UNICA.

Non posso ottenere la soluz. del sistema semplicemente invertendolo, però se i g.d.l. sono tantissimi, l'inversione è complicata, quindi si

**METODI DI SOLUZIONE DEL SISTEMA** → **METODI DIRETTI** / **METODI INDIRETTI O ITERATIVI**

## A) METODI DIRETTI

il numero delle operazioni da fare lo conosco fin dall'inizio

PER OTTENERE LA SOLUZIONE SONO NECESSARIE UN NUMERO BEN DEFINITO DI OPERAZIONI DI CALCOLO ESPRIMIBILE MEDIANTE UNA RELAZIONE MATEMATICA LA CUI SOLA VARIABILE E' IL NUMERO DI EQUAZIONI DEL SISTEMA ("n")

## B) METODI INDIRETTI O ITERATIVI

ITERATIVI

il numero delle operazioni da fare non è noto a priori, ma varia funzione del tipo di convergenza che ci siamo dati.

IN TAL CASO, UN NUMERO PREFISSATO DI OPERAZIONI, LEGATO AL NUMERO DI EQUAZIONI, SI RIPETE CICLICAMENTE PER UN NUMERO DI VOLTE A PRIORI IMPRECISATO DEFINITO SOLO QUANDO DUE CICLI SUCCESSIVI DI OPERAZIONI FORNISCONO RISULTATI CON UNA VARIABILE INFERIORE AD UN MINIMO PRESTABILITO.



CONTINUAZIONE DEL METODO DELLA FATTORIZZAZIONE DI PAG. 4 ~~ERRATA CORRIGE~~  
 LEZ. 04-03-2014

DALLA RELAZIONE (4) E' POSSIBILE DETERMINARE SUBITO IL VETTORE  $[z]$

$$\begin{aligned} z_1 &= d_1 \\ z_2 &= d_2 - l_{21} z_1 \\ &\vdots \\ z_u &= d_u - (l_{u1} z_1 + l_{u2} z_2 + \dots) \end{aligned}$$

NOTO IL VETTORE  $[z]$ , DALLA

$$[S] \cdot [X] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1u} \\ \phi & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2u} \\ \phi & \phi & s_{33} & \dots & s_{3u} \\ \vdots & & & & \\ \phi & \phi & \phi & \dots & s_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_u \end{bmatrix}$$

E' POSSIBILE RICAVARE IL VETTORE  $[X]$  DELLE INCOGNITE DEL SISTEMA:

$$\begin{aligned} x_u &= z_u / s_{uu} \\ x_{u-1} &= (z_{u-1} - s_{u-1,u} \cdot x_u) / s_{u-1,u-1} \end{aligned}$$

In questo metodo abbiamo dato per scontato (siamo partiti con il presupposto) che una qualunque matrice possa essere come prodotto di una matrice triangolare inferiore e di una triangolare superiore. E' vero? SI: VEDI OSS. PAG. 5 ~~ERRATA CORRIGE~~

OSS: - SE SI PENSASSE DI CONDENSARE IN UN'UNICA MATRICE  $[B]$  SIA LA MATRICE  $[L]$  CHE LA MATRICE  $[S]$ :

da qui fino a "METODI  
 INDIRETTI": non vanno

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1u} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2u} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3u} \\ \vdots & & & & \\ b_{u1} & b_{u2} & b_{u3} & \dots & b_{uu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1u} \\ l_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2u} \\ l_{31} & l_{32} & s_{33} & \dots & s_{3u} \\ \vdots & & & & \\ l_{u1} & l_{u2} & l_{u3} & \dots & s_{uu} \end{bmatrix}$$



A TAL PUNTO SI INIZIA IL SECONDO CICLO, ANALOGO AL PRECEDENTE CON L'UNICA DIFFERENZA CHE SI UTILIZZANO COME VALORI APPROSSIMATI DELLE INCOGNITE I VALORI  $x_i^{(1)}$  DEL CICLO PRECEDENTE.

$$1^{\circ} \text{ EQUAZ.} \rightarrow x_1^{(2)} = \left( d_1 - \sum_{i=2}^n c_{1i} x_i^{(1)} \right) / c_{11}$$

$$2^{\circ} \text{ EQUAZ.} \rightarrow x_2^{(2)} = \left( d_2 - c_{21} x_1^{(2)} - \sum_{i=3}^n c_{2i} x_i^{(1)} \right) / c_{22}$$

⋮

$$i \text{ EQUAZ.} \rightarrow x_i^{(2)} = \left( d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(2)} - \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j^{(1)} \right) / c_{ii}$$

SE LA DIFFERENZA TRA LA SOLUZIONE OTTENUTA E QUELLA DEL CICLO PRECEDENTE È MAGGIORE DI UN VALORE A PRIORI PREFISSATO, OCCORRE ATTIVARE UN NUOVO CICLO DI CALCOLO ASSUMENDO COME VALORI APPROSSIMATI QUELLI RELATIVI ALLA SOLUZIONE ATTUALE.

oss: PER UNA RAPIDA VALUTAZIONE DI CONVERGENZA DEL METODO SI PUÒ APPLICARE IL SEGUENTE CRITERIO: SI HA CONVERGENZA SE

non tutto fino a "Quando è che mi fermo?"  $|c_{ii}| > S_i$  DOVE  $S_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n |c_{ik}| \quad \forall i$

PRECISAMENTE PONEENDO

$$f_i = \frac{S_i}{|c_{ii}| - S_i} \quad \equiv \quad \rho = \max f_i$$

IL METODO CONVERGE SE  $f_i > \phi \quad \forall i$   
 ≡ CONVERGE TANTO PIÙ RAPIDAMENTE QUANTO  $\rho$  È PIÙ PICCOLO.

↑ UN VALORE EMPIRICO CHE ASSICURA UNA RAPIDA CONVERGENZA È  $\rho < 2$



- TALE MODO DI OPERARE NON E' SEH2'ALTRO IL PIU' RAZIONALE, MA E' FORSE IL PIU' SEMPLICE COME APPROCCIO INIZIALE AL PROBLEMA. IN GENERALE QUESTO NON E' L'IMPIEGO USUALE DEL METODO.

- VARIABILI UTILIZZATE:

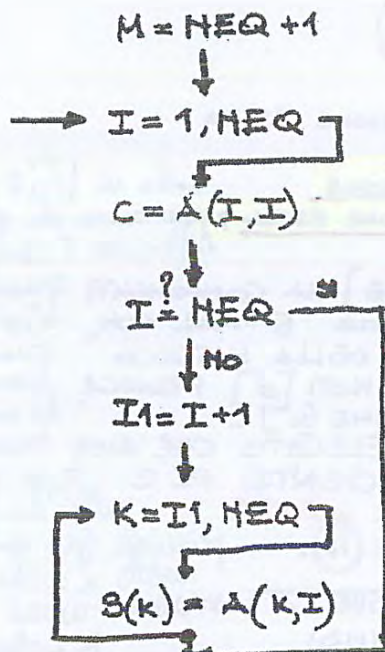
NEQ = NUMERO EQUAZIONI

$A(I,J)$  = MATRICE COEFFICIENTI  
(COMPRESIVA COLONNA TERMINI NOTI POSTI IN COLONNA  $M = NEQ + 1$ )

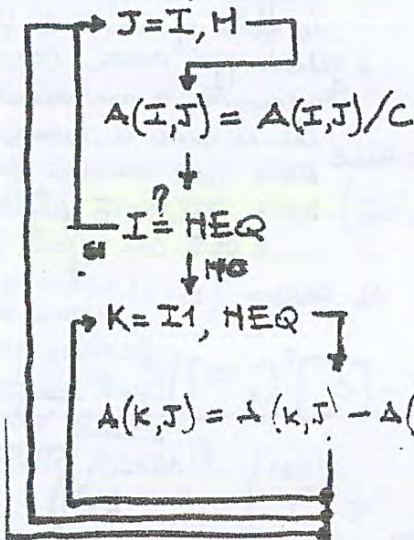
$B(I)$  = VETTORE SALVATAGGIO TERMINI COLONNA DEL CARNINE

$C$  = CARNINE

FASE 1°  
(TRIANGOLARIZZAZIONE SISTEMA)



SALVATAGGIO COLONNA TERMINI CARNINE

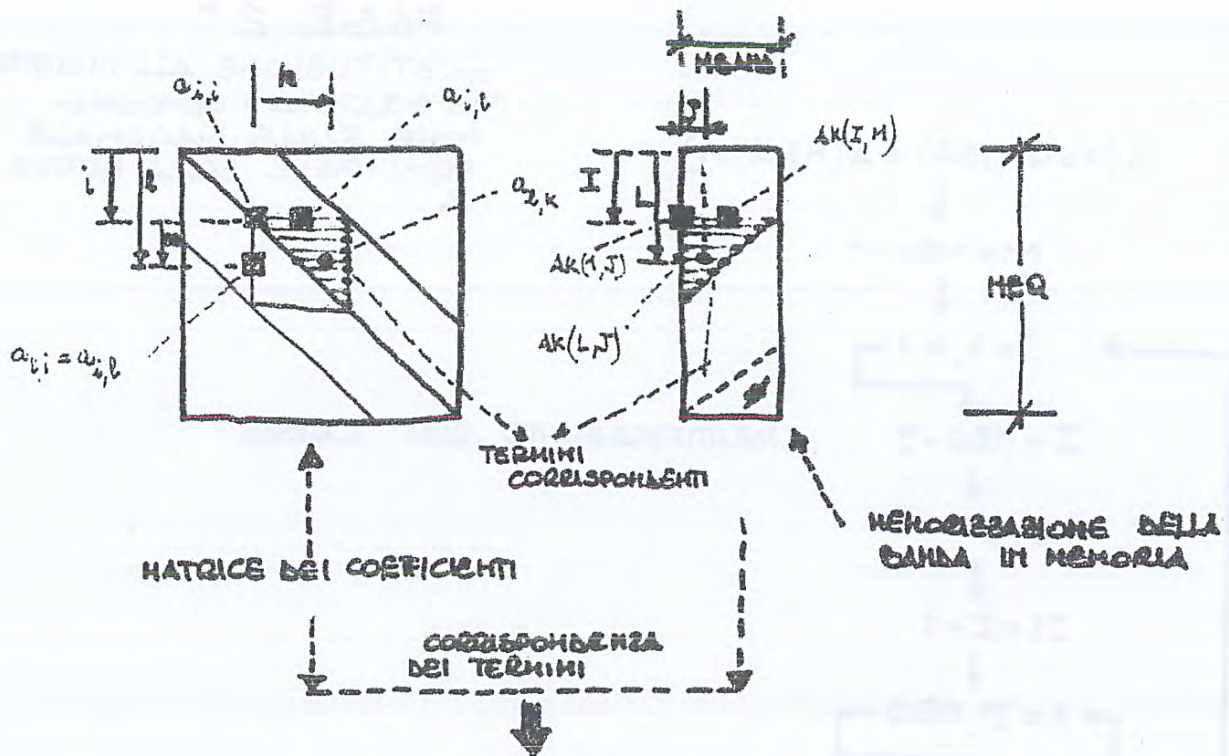


DIVISIONE RIGA I-ESIMA PER IL CARNINE

TRIANGOLARIZZAZIONE DEL SISTEMA

COMBINAZIONE LINEARE RIGA KESIMA ( $K > I$ ) CON RIGA CARNINE DIVISA ALL' COL CARNINE





$$\begin{aligned}
 a_{i,i} &\equiv AK(I,1) \\
 a_{l,i} = a_{i,l} &\equiv AK(I,M) \\
 a_{l,k} &\equiv AK(L,J) \\
 a_{i,k} &\equiv AK(I,k)
 \end{aligned}$$

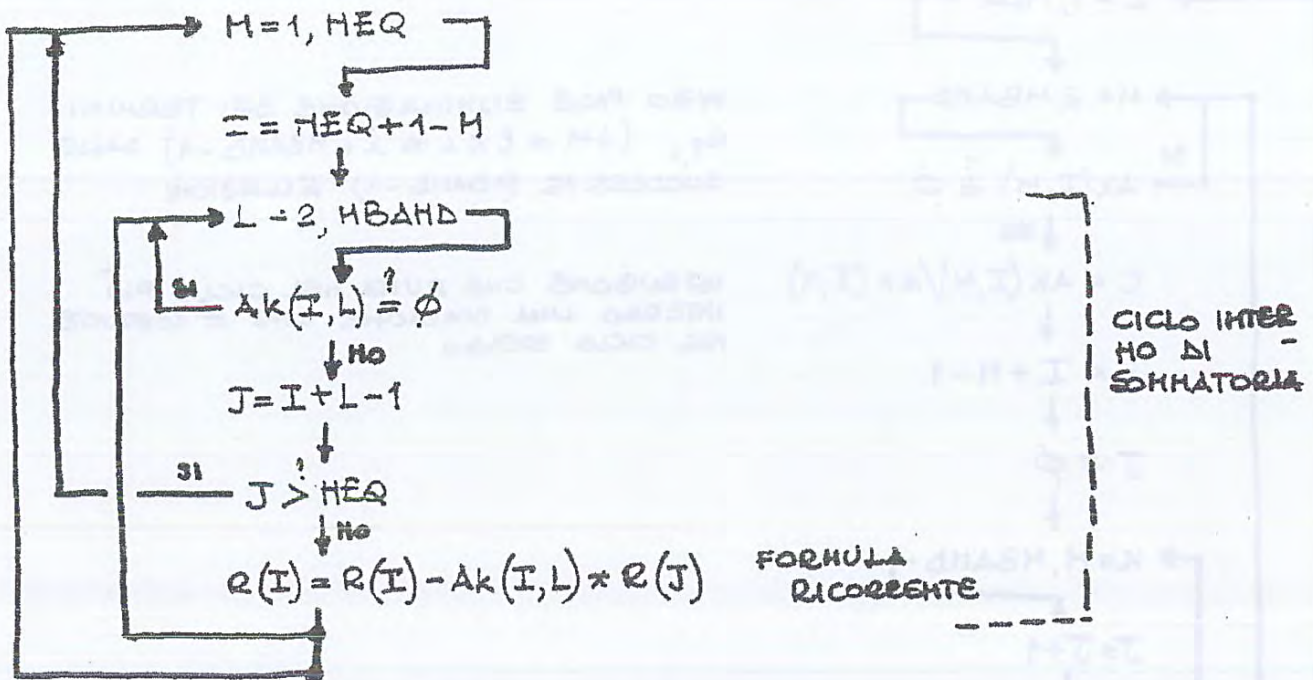
PARTI 1b) : CONSISTE NEGLI "MEQ" PASSI COINCIDENTI CON LE "MEQ" FASI DEL CICLO "IN AVANTI" DEL METODO DI GAUSS. VENGONO MODIFICATI ANCHE I TERMINI NON CHE RISULTANO MEMORIZZATI IN UN VETTORE SEPARATO R

PARTI 2) : RIGUARDA LA SOSTITUZIONE A RITROSO (BACK-SUBSTITUTION). ALLA FINE I RISULTATI RISULTANO MEMORIZZATI IN R

VARIABILI UTILIZZATE : MEQ = NUMERO EQUAZIONI  
 MBAND = AMPIEZZA DI BANCA  
 AK(MEQ, MBAND) = MATRICE DEI COEFFICIENTI  
 R(MEQ) = VETTORI DEI TERMINI NON (ALLA FINE IN QUESTO VETTORE RISULTANO MEMORIZZATE LE RADICI DEL SISTEMA)



FASE 2)



C) METODO DELLA FATTORIZZAZIONE

IPOTIZZANDO LA MATRICE DEI COEFFICIENTI SIMMETRICA, IL SISTEMA

$$[C][x] = [d]$$

PUO' ESSERE RISCritto NELLA SEGUENTE FORMA:

$$[S]^T [S] [X] = [d]$$

$[C] \rightarrow$  IN GENERALE  $[C] = [L][S]$

$$\begin{bmatrix}
 s_{11} & \phi & \phi & \dots & \phi \\
 s_{12} & s_{22} & \phi & \dots & \phi \\
 s_{13} & s_{23} & s_{33} & \dots & \phi \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 s_{1n} & s_{2n} & s_{3n} & \dots & s_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\
 \phi & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2n} \\
 \phi & \phi & s_{33} & \dots & s_{3n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \phi & \phi & \dots & \dots & s_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 \vdots \\
 x_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 d_1 \\
 d_2 \\
 d_3 \\
 \vdots \\
 d_n
 \end{bmatrix}$$



VIENE DI SEGUITO RIPORTATO IL DIAGRAMMA DI FLUSSO IPOTIZZANDO LA SOLUZIONE DEL SISTEMA ATTRAVERSO DUE FASI DISTINTE:

FASE 1) DETERMINAZIONE DELLA MATRICE [S]

FASE 2) DETERMINAZIONE VETTORE [Y] E VETTORE SOLUZIONE [X]

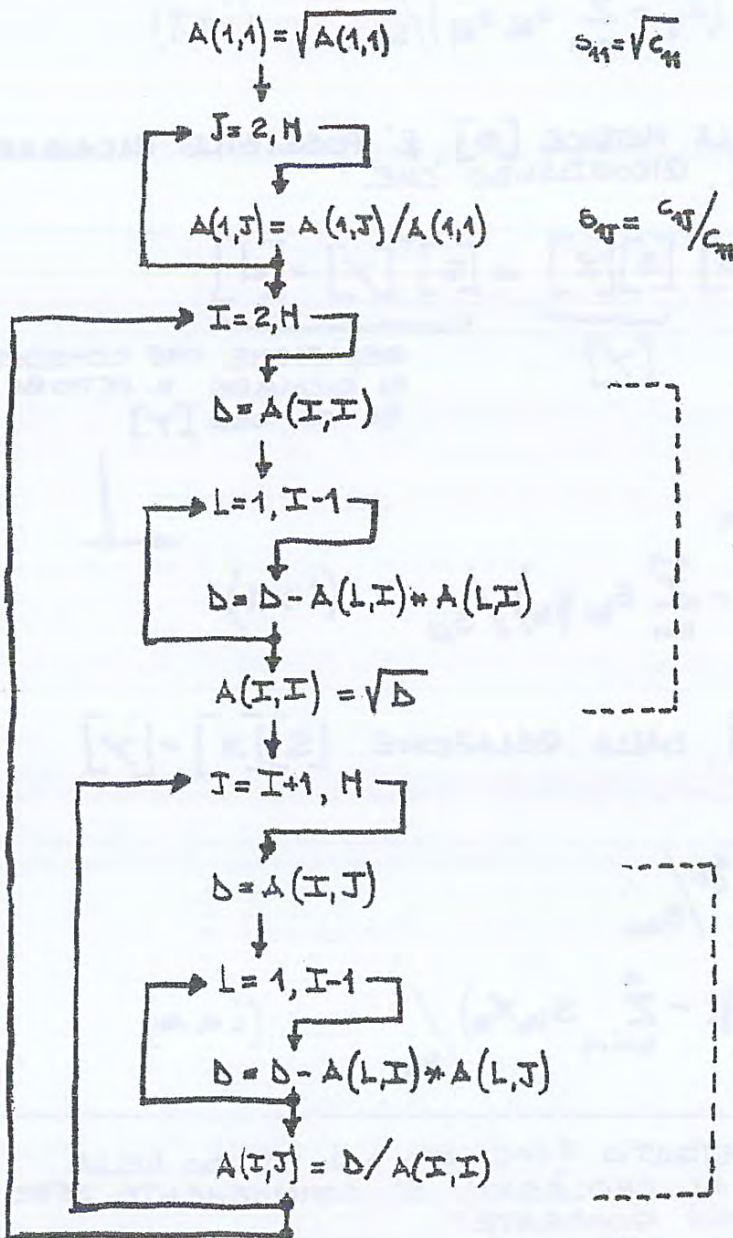
VARIABILI UTILIZZATE:

$A(H, H)$  = MATRICE DEI COEFFICIENTI  
 $B(H)$  = VETTORE DEI TERMINI NOTI  
 VETTORE [Y] È IN FASE DI SOLUZIONE FINALE VETTORE CONTENENTE LE SOLUZIONI [X]

H = NUMERO DI EQUAZIONI

FASE 1)

LA MATRICE [S] VIENE RISCITTA SULLA MATRICE DEI COEFFICIENTI ORIGINARIA [A]



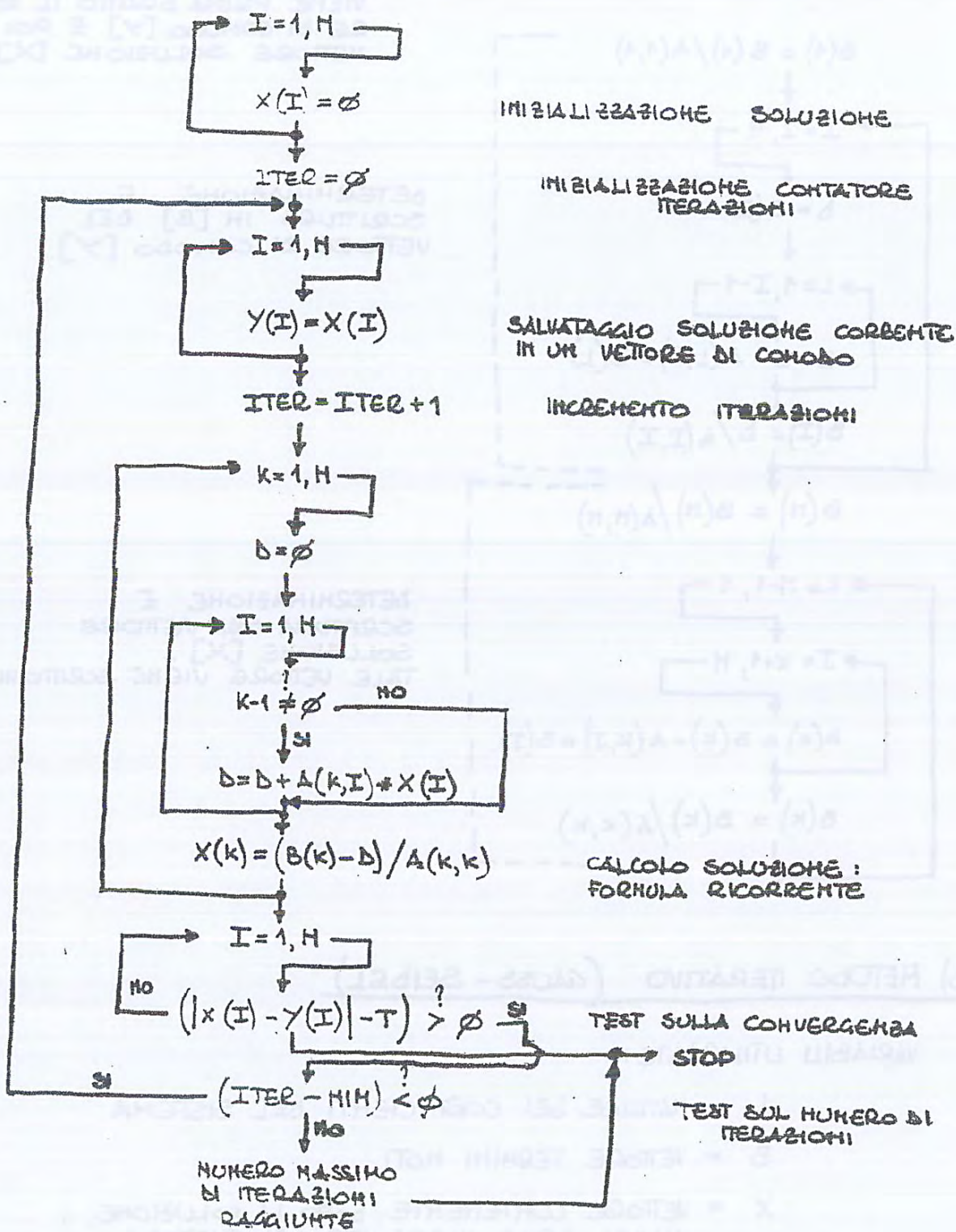
$$s_{11} = \sqrt{c_{11}}$$

$$s_{1j} = c_{1j} / c_{11}$$

$$s_{ii} = \sqrt{c_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^2}$$

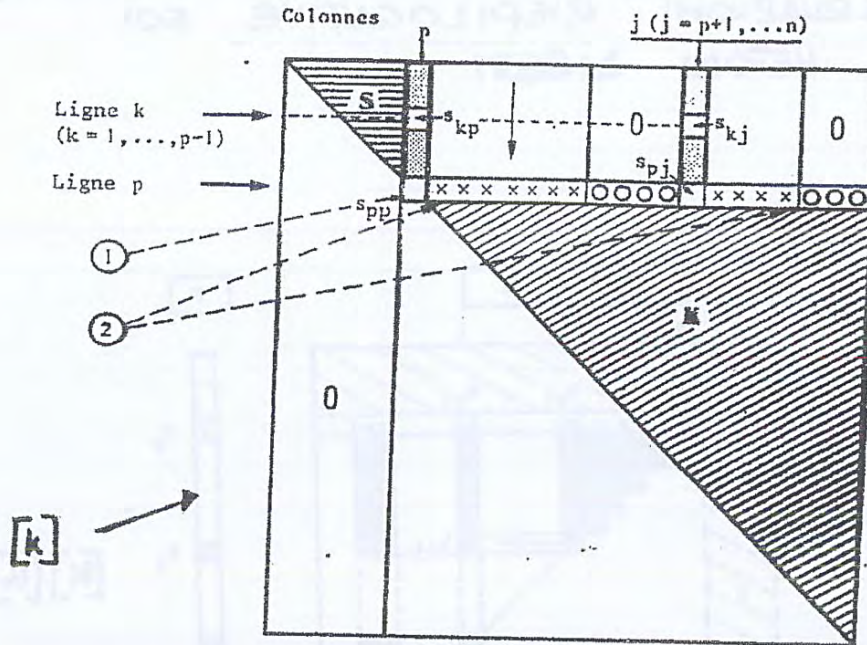
$$s_{ij} = \left( c_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik} s_{kj} \right) / s_{ii}$$







## B) METODO DELLA FATTORIZZAZIONE (CHOLESKY)



$$[K][U] = [F]$$

$$\downarrow$$

$$([S]^T[S])$$

$$\downarrow$$

**[S] MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE**

Opération de décomposition pour la colonne p :

① Calcul de  $s_{pp}$  
$$s_{pp} = \sqrt{k_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} s_{kp}^2}$$

② Calcul de  $s_{pj}$  ( $j = p+1 \dots n$ ) 
$$s_{pj} = \frac{1}{s_{pp}} \left[ k_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} s_{kp} s_{kj} \right]$$



Termes de la matrice K qui ne sont pas encore affectés par la décomposition



Termes de la matrice S n'intervenant pas dans cette phase de décomposition



Termes de la matrice S nécessaires pour cette phase de décomposition



Termes de la matrice S qui sont modifiés

$$s_{pp} = \sqrt{k_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} s_{kp}^2}$$

$$s_{pj} = \frac{1}{s_{pp}} \left[ k_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} s_{kp} s_{kj} \right], \text{ pour } j = p+1 \dots n$$

pour  $p=2 \dots n$

**FORMULE  
RICORRENTE**



```

SUBROUTINE SOL(VKGS,VKGD,VKGI,VFG,KLD,NEQ,MP,IFAC,ISOL,NSYM,ENERG)SOL 1
C-----SOL 2
C RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE SYMETRIQUE OU NON. LA MATRICE ESTSOL 3
C STOCKEE PAR LIGNE DE CIEL, EN MEMOIRE DANS LES TABLES SOL 4
C VKGS,VKGD,VKGI SOL 5
C ENTREES SOL 6
C VKGS,VKGD,VKGI MATRICE DU SYSTEME : PARTIES SUPERIEURE, SOL 7
C DIAGONALE, INFERIEURE SOL 8
C VFG SECOND MEMBRE SOL 9
C KLD POINTEURS VERS LES HAUTS DE COLONNE SOL 10
C NEQ NOMBRE D'EQUATIONS SOL 11
C MP UNITE LOGIQUE D'IMPRESSION SOL 12
C IFAC SI IFAC.EQ.1 TRIANGULARISATION DE SOL 13
C LA MATRICE SOL 14
C ISOL SI ISOL.EQ.1 CALCUL DE LA SOLUTION A SOL 15
C PARTIR DE LA MATRICE TRIANGULARISEE SOL 16
C INDICE DE PROBLEME NON SYMETRIQUE SOL 17
C SORTIES SOL 18
C VKGS,VKGD,VKGI MATRICE TRIANGULARISEE (SI IFAC.EQ.1) SOL 19
C VFG SOLUTION (SI ISOL.EQ.1) SOL 20
C ENERG ENERGIE DU SYSTEME (SI NSYM.EQ.0) SOL 21
C-----SOL 22
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z) SOL 23
DIMENSION VKGS(1),VKGD(1),VKGI(1),VFG(1),KLD(1) SOL 24
DATA ZERO/0.0D0/ SOL 25
C-----SOL 26
IK=1 SOL 27
IF(VKGD(1).NE.ZERO) GO TO 10 SOL 28
WRITE(MP,2000) IK SOL 29
STOP SOL 30
10 ENERG=ZERO SOL 31
C SOL 32
C----- POUR CHAQUE COLONNE IK A MODIFIER SOL 33
C SOL 34
JHK=1 SOL 35
DO 100 IK=2,NEQ SOL 36
C----- POINTEUR DU HAUT DE LA COLONNE SUIVANTE IK+1 SOL 37
JHK1=KLD(IK+1) SOL 38
C----- HAUTEUR DE LA COLONNE IK (HORS TERMES SUPERIEUR ET DIAGONAL) SOL 39
LHK=JHK1-JHK SOL 40
LHK1=LHK-1 SOL 41
C----- LIGNE DU PREMIER TERME A MODIFIER DANS LA COLONNE IK SOL 42
IMIN=IK-LHK1 SOL 43
IMIN1=IMIN-1 SOL 44
C----- LIGNE DU DERNIER TERME A MODIFIER DANS LA COLONNE IK SOL 45
IMAX=IK-1 SOL 46
IF(LHK1.LT.0) GO TO 100 SOL 47
IF(IFAC.NE.1) GO TO 90 SOL 48
IF(NSYM.EQ.1) VKGI(JHK)=VKGI(JHK)/VKGD(IMIN1) SOL 49
IF(LHK1.EQ.0) GO TO 40 SOL 50
C SOL 51
C----- MODIFIER LES TERMES NON DIAGONAUX DE LA COLONNE IK SOL 52
C SOL 53
JCK=JHK+1 SOL 54
JHJ=KLD(IMIN) SOL 55
C----- POUR CHAQUE TERME PLACE EN JCK, CORRESPONDANT A LA COLONNE IJ SOL 56
DO 30 IJ=IMIN,IMAX SOL 57
JHJ1=KLD(IJ+1) SOL 58
C----- NOMBRE DE TERMES MODIFICATIFS DU TERME PLACE EN JCK SOL 59
IC=MIN0(JCK-JHK,JHJ1-JHJ) SOL 60
IF(IC.LE.0.AND.NSYM.EQ.0) GO TO 20 SOL 61
C1=ZERO SOL 62
IF(IC.LE.0) GO TO 17 SOL 63
J1=JHJ1-IC SOL 64
J2=JCK-IC SOL 65

```



ALL'INTERNO DELLA SUBROUTINE "SOL" VIENE UTILIZZATA UNA FUNZIONE ("SCAL") SPECIALIZZATA PER IL CALCOLO DEL PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI (VED. LISTATO SEGUENTE) -

```

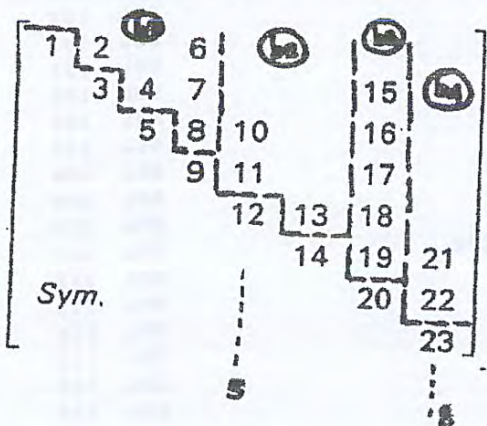
FUNCTION SCAL(X,Y,N)                                SCAL  1
-----SCAL  2
C  PRODUIT SCALAIRE DES VECTEURS X ET Y DE LONGUEUR N  SCAL  3
C  (FONCTION A ECRIRE EVENTUELLEMENT EN ASSEMBLEUR)  SCAL  4
C-----SCAL  5
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)                      SCAL  6
      DIMENSION X(1),Y(1)                            SCAL  7
      DATA ZERO/0.000/                               SCAL  8
C-----SCAL  9
      SCAL=ZERO                                       SCAL 10
      DO 10 I=1,N                                     SCAL 11
10    SCAL=SCAL+X(I)*Y(I)                             SCAL 12
      RETURN                                          SCAL 13
      END                                             SCAL 14
  
```

oss:

NEL CASO DI UNA MEMORIZZAZIONE A BLOCCHI DELLA MATRICE [K] OCCORRE STRUTTURARE I BLOCCHI IN MANIERA TALE CHE:

- CIASCUN BLOCCO CONTENGA UN NUMERO INTERO DI COLONNE (VARIABILE DA BLOCCO A BLOCCO)
- EVITARE, SE POSSIBILE, DI POSIZIONARE IN BLOCCHI DIVERSI COLONNE CORRISPONDENTI A GRADI DI LIBERTA' DELLO STESSO NODO.

NEL CASO DI MEMORIZZAZIONE A BLOCCHI OCCORRE PREPAREDRE UN VETTORE DI INDICATORI ADDIZIONALE (VETTORE "KED") CHE DEFINISCE IL "NUMERO DELLA PRIMA COLONNA DI CIASCUN BLOCCO"



$$[KLD]^T = [1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 6 \ 8 \ 9 \ 14 \ 16]$$

$$[KED]^T = [1 \ 5 \ 7 \ 8 \ 9] \leftarrow \text{VETTORE RELATIVO AI BLOCCHI}$$

↑ blocco 2      ↓ blocco 4

$$[VKGD]^T = [1 \ 3 \ 5 \ 9 \ 12 \ 14 \ 20 \ 23]$$

I BLOCCHI MEMORIZZATI SU DISCO CONTERRAN LA MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE RISULTANTE (IPOTIZZANDO UNA SEGMENTAZIONE IN BLOCCHI DI DIMENSIONE 6):

Blocco (b1)	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$
Blocco (b2)	$\begin{bmatrix} 10 & 11 & 13 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Blocco (b3)	$\begin{bmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 0 \end{bmatrix}$
Blocco (b4)	$\begin{bmatrix} 21 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ATT. IL BLOCCO HA DIMENSIONE FISSA - VIENE COMPLETATO IN CASO DI NECESSITA' CON ELEMENTI NULLI



```

SUBROUTINE SOLD(VKGS,VKGD,VKGI,VFG,KLD,NEQ,MP,IFAC,ISOL,NSYM,ENERG)
1 .KEB,KPB)
C-----SOLD 3
C RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE SYMETRIQUE OU NON. LA MATRICE SOLD 4
C EST STOCKEE PAR LIGNE DE CIEL SUR LE FICHER M4. APRES TRIANGULA. SOLD 5
C RISATION ELLE EST PLACEE SUR LE FICHER M5 SOLD 6
C ENTREES SOLD 7
C VKGS,VKGD,VKGI MATRICE DU SYSTEME : PARTIES SUPERIEURE, SOLD 8
C DIAGONALE, INFERIEURE SOLD 9
C VFG SECOND MEMBRE SOLD 10
C KLD POINTEURS VERS LES HAUTS DE COLONNE SOLD 11
C NEO NOMBRE D'EQUATIONS SOLD 12
C MP UNITE LOGIQUE D'IMPRESSION SOLD 13
C IFAC SI IFAC.EQ.1 TRIANGULARISATION DE SOLD 14
C LA MATRICE SOLD 15
C ISOL SI ISOL.EQ.1 CALCUL DE LA SOLUTION A SOLD 16
C PARTIR DE LA MATRICE TRIANGULARISEE SOLD 17
C NSYM INDICE DE PROBLEME NON SYMETRIQUE SOLD 18
C KEB NUMERO DE LA PREMIERE EQUATION DE CHAQUE SOLD 19
C BLOC SOLD 20
C KPB NUMERO DU PREMIER BLOC CONNECTE A CHAQUE SOLD 21
C BLOC SOLD 22
C SORTIES SOLD 23
C VKGS,VKGD,VKGI MATRICE TRIANGULARISEE (SI IFAC.EQ.1) SOLD 24
C VFG SOLUTION (SI ISOL.EQ.1) SOLD 25
C ENERG ENERGIE DU SYSTEME (SI NSYM.EQ.0) SOLD 26
C-----SOLD 27
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z) SOLD 28
C COMMON/LIND/NLBL,NBLM SOLD 29
C COMMON/ES/M,MR,MPI,M1,M2,M3,M4,M5 SOLD 30
C DIMENSION VKGS(1),VKGD(1),VKGI(1),VFG(1),KLD(1),KEB(1),KPB(1) SOLD 31
C DATA ZERO/0.000/ SOLD 32
C-----SOLD 33
C REWIND M4 SOLD 34
C REWIND M5 SOLD 35
C IK=1 SOLD 36
C IF(VKGD(1).NE.ZERO) GO TO 5 SOLD 37
C WRITE(MP,2000) IK SOLD 38
C STOP SOLD 39
5 ENERG=ZERO SOLD 40
C SOLD 41
C----- POUR CHAQUE BLOC A TRIANGULARISER SOLD 42
C SOLD 43
C JMIN=NLBL+1 SOLD 44
C JMAX=NLBL+NLBL SOLD 45
C DO 105 IB=1,NBLM SOLD 46
C----- LIRE UN BLOC A TRIANGULARISER SOLD 47
C READ(M4) (VKGS(I),I=1,NLBL) SOLD 48
C IF(NSYM.EQ.1) READ(M4) (VKGI(I),I=1,NLBL) SOLD 49
C----- PARAMETRES DU BLOC IB SOLD 50
C IKO=KEB(IB) SOLD 51
C IK1=KEB(IB+1)-1 SOLD 52
C IBO=KPB(IB) SOLD 53
C JO=KLD(IKO)-1 SOLD 54
C IF(IEO.EQ.IB) GO TO 11 SOLD 55
C----- BACKSPACE SUR LES BLOCS CONNECTES SOLD 56
C I1=IF-IEO SOLD 57
C DO 10 I=1,I1 SOLD 58
C BACKSPACE M5 SOLD 59
C IF(NSYM.EQ.1) BACKSPACE M5 SOLD 60
10 CONTINUE SOLD 61
C----- POUR CHAQUE BLOC CONNECTE(INCLUANT LE BLOC IB LUI-MEME) SOLD 62
11 DO 103 IBC=IBO,IB SOLD 63
C IF(IBC.EQ.IB) GO TO 12 SOLD 64
C READ(M5) (VKGS(I),I=JMIN,JMAX) SOLD 65
C IF(NSYM.EQ.1) READ(M5) (VKGI(I),I=JMIN,JMAX) SOLD 66

```



50	C2=VKGI(JCK)	SOLD 135
60	CDIAG=CDIAG+C1*C2	SOLD 136
70	JCK=JCK+1	SOLD 137
	VKGD(IK)=VKGD(IK).CDIAG	SOLD 138
	IF(VKGD(IK)) 90,80,90	SOLD 139
80	WRITE(MP,2000) IK	SOLD 140
2000	FORMAT(' *** ERREUR,PIVOT NUL EQUATION ',I5)	SOLD 141
	STOP	SOLD 142
C		SOLD 143
C.....	RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE INFERIEUR	SOLD 144
C		SOLD 145
	90 IF(ISOL.NE.1) GO TO 100	SOLD 146
	IF(IBC.NE.IB) GO TO 100	SOLD 147
	IF(NSYM.NE.1) VFG(IK)=VFG(IK)-SCAL(VKGS(JHK),VFG(IMIN1),LHK)	SOLD 148
	IF(NSYM.EQ.1) VFG(IK)=VFG(IK)-SCAL(VKGI(JHK),VFG(IMIN1),LHK)	SOLD 149
100	CONTINUE	SOLD 150
C.....	PROCHAIN BLOC CONNECTE	SOLD 151
103	CONTINUE	SOLD 152
C.....	FIN DE L'ELIMINATION DU BLOC	SOLD 153
	IF(IB.EQ.NBLM) GO TO 105	SOLD 154
	WRITE(M5) (VKGS(I),I=1,NLBL)	SOLD 155
	IF(NSYM.EQ.1) WRITE(M5) (VKGI(I),I=1,NLBL)	SOLD 156
105	CONTINUE	SOLD 157
	IF(ISOL.NE.1) RETURN	SOLD 158
C		SOLD 159
C.....	RESOLUTION DU SYSTEME DIAGONAL	SOLD 160
C		SOLD 161
	IF(NSYM.EQ.1) GO TO 120	SOLD 162
	BQ 110 IK=I,NEQ	SOLD 163
	C1=VKGD(IK)	SOLD 164
	C2=VFG(IK)/C1	SOLD 165
	VFG(IK)=C2	SOLD 166
110	EMERG=EMERG+C1*C2*C2	SOLD 167
C		SOLD 168
C.....	RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE SUPERIEUR	SOLD 169
C		SOLD 170
120	IB=NBLM	SOLD 171
	IKO=KEB(IB)-1	SOLD 172
	JO=KLD(IKO+1)-1	SOLD 173
	IK=NEQ+1	SOLD 174
	JHK1=KLD(IK)-JO	SOLD 175
C.....	POUR CHAQUE EQUATION DE NEQ A 1	SOLD 176
130	IK=IK-1	SOLD 177
C.....	LINE UN BLOC SI NECESSAIRE	SOLD 178
	IF(IK.NE.IKO) GO TO 135	SOLD 179
	BACKSPACE M5	SOLD 180
	IF(NSYM.EQ.1) BACKSPACE M5	SOLD 181
	READ(M5) (VKGS(I),I=1,NLBL)	SOLD 182
	IF(NSYM.EQ.1) READ(M5) (VKGI(I),I=1,NLBL)	SOLD 183
	BACKSPACE M5	SOLD 184
	IF(NSYM.EQ.1) BACKSPACE M5	SOLD 185
	IB=IB-1	SOLD 186
	IKO=KEB(IB)-1	SOLD 187
	JO=KLD(IKO+1)-1	SOLD 188
	JHK1=KLD(IK+1)-JO	SOLD 189
C.....	MODIFIER LE VECTEUR DES INCONNUES	SOLD 190
135	IF(NSYM.EQ.1) VFG(IK)=VFG(IK)/VKGD(IK)	SOLD 191
	IF(IK.EQ.1) RETURN	SOLD 192
	C1=VFG(IK)	SOLD 193
	JHK=KLD(IK)-JO	SOLD 194
	JBK=JHK1-1	SOLD 195
	IF(JHK.GT.JBK) GO TO 150	SOLD 196
	IJ=IK-JBK-JHK-1	SOLD 197
	DO 140 JCK=JHK,JBK	SOLD 198
	VFG(IJ)=VFG(IJ).VKGS(JCK)*C1	SOLD 199
140	IJ=IJ+1	SOLD 200
150	JHK1=JHK	SOLD 201
	GO TO 130	SOLD 202
	END	SOLD 203



IN GENERALE GLI AUTOVETTORI SONO "NORMALIZZATI", E CIOE' "LA NORMA O MODULO DELL'AUTOVETTORE" E' DELLA UNITARIA. IN ALTRI TERMINI LE COMPONENTI DELL'AUTOVETTORE SONO TALI PER CUI

$$x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + \dots + x_{ni}^2 = 1 \quad \leftarrow \text{SOMMA DEI QUADRATI DELLE COMPONENTI}$$

GLI AUTOVETTORI POSSONO ESSERE RAGGRUPPATI IN UNA MATRICE QUADRATA, DETTA MATRICE DEI "MODI"

$$[Q] = [ [x_1] \quad [x_2] \quad \dots \quad [x_n] ]$$

COSI' COME GLI AUTOVETTORI POSSONO ESSERE RAGGRUPPATI IN UNA MATRICE QUADRATA DIAGONALE, DETTA MATRICE "SPETRALE"

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = [L]$$

OSS: IL SISTEMA INIZIALE  $[A][x] = \lambda [x]$ , PUO' ESSERE RISCritto COME SISTEMA PER TUTTI I VALORI DI  $\lambda$ , NELLA FORMA

$$[A][Q] = [Q][L]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$[A][x_1] = \lambda_1 [x_1] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

PRIMO AUTOVETTORE

PRIMO AUTOVALORE



## 1) DETERMINAZIONE DEL PRIMO AUTOVALORE

SI CONSIDERI UNA MATRICE  $[A]$  REALE E SIMMETRICA DI ORDINE  $n$   
E SI CONSIDERI IL SISTEMA

$$[A][X] = \lambda [X] \quad (*)$$

DEFINITO UN VETTORE DI PARTENZA  $[X^{(1)}]$ , DALLA (\*) SI HA

$$[A][X^{(1)}] = [Y^{(1)}] \quad [Y^{(1)}] = \lambda [X^{(1)}]$$

SE  $[X^{(1)}]$  È AUTOVETTORE  
DEVE VALERE

PER OGNI COMPONENTE  
DELL'AUTOVETTORE SI  
DEVE AVERE

$$\lambda = \frac{Y_i^{(1)}}{X_i^{(1)}} \quad i=1, n$$

È EVIDENTE CHE TALE RELAZIONE NON  
RISULTA VERIFICATA, ESSENDO  $[X^{(1)}]$  UN  
VETTORE DI PRIMO TENTATIVO.

SI PUÒ ALLORA PENSARE DI PORRE  $[X^{(2)}] = [Y^{(1)}]$   
E PROCEDERE AL CALCOLO DI

$$[Y^{(2)}] = [A][X^{(2)}]$$

SI PROCEDE IN TAL MODO:  $[X^{(r)}] = [Y^{(r-1)}]$

$$[Y^{(r)}] = [A][X^{(r)}]$$

FINO A QUANDO TUTTI I RAPPORTI

$$\frac{Y_i^{(r)}}{X_i^{(r)}} = \lambda \quad i=1, n$$

RISULTANO ESSERE COSTANTI ALL'INTERNO DI UNA PRECISIONE PREFISSATA.  
IL VALORE  $\lambda$  OTTENUTO DAL PROCEDIMENTO DI ITERAZIONE RISULTA ESSERE  
IL PIÙ GRANDE AUTOVALORE, MENTRE  $[X^{(r)}]$  RISULTA ESSERE  
L'AUTOVETTORE CORRISPONDENTE.

OSS: NEL CASO DI VOLER CALCOLARE IL PIÙ PICCOLO AUTOVALORE, SI  
RISCRIVE LA RELAZIONE (\*) NELLA FORMA

$$[A]^{-1}[X] = \frac{1}{\lambda} [X]$$

E SI APPLICA IL PROCEDIMENTO ITERATIVO PRIMA VISTO. IN TAL CASO  
SI HA CONVERGENZA VERSO IL PIÙ GRANDE VALORE  $1/\lambda$  E DUNQUE IL  
PIÙ PICCOLO  $\lambda$ .



## SUBROUTINE EKIS

DA UN PUNTO DI VISTA PRATICO, RISULTA PIU' CONVENIENTE COSTRUIRE IL VETTORE  $[X^{(i)}]$  NON ESATTAMENTE UGUALE A  $[Y^{(i)}]$ , MA NORMALIZZARLO IN MODO TALE DA AVERE IL PRIMO TERMINE UGUALE A 1:

$$X_i^{(i)} = \frac{Y_i^{(i)}}{Y_1^{(i)}} \quad i=1, n$$

```

SUBROUTINE EKIS(A,X,N,NIM,TOL,D)
C
C
C THIS PROGRAM APPLIES THE ITERATIVE
C STODOLLA-VIANELLO METHOD TO COMPUTE
C THE HIGHEST EIGENVALUE
C A : SYSTEM MATRIX
C D : EIGENVECTOR
C   : A * X
C XX : AUXILIARY VECTOR
C N : ORDER OF THE SYSTEM MATRIX
C NIM: MAXIUM NUMBER OF ITERATIONS ALLOWED
C TOL: TOLERANCE
C
C NOTICE THAT X SHOULD ORIGINALLY CONTAIN
C THE FIRST TRIAL EIGENVECTOR. UPON THE
C SOLUTION IS COMPLETED IT WILL CONTAIN
C THE ACTUAL EIGENVECTOR.
C
      DIMENSION A(50,50),X(50),XX(50),Y(50)
      ITER=0
      DO 10 I=1,N
10  X(I)=1.
      1 DO 2 I=1,N
      2  XX(I)=X(I)
      ITER=ITER+1
      DO 3 I=1,N
      Y(I)=0.
      DO 3 J=1,N
      3  Y(I)=Y(I)+A(I,J)*X(J)
      D=Y(1)
      DO 4 I=1,N
      4  X(I)=Y(I)/D
      DO 5 I=1,N
      IF(ABS(XX(I)-X(I))-TOL)5,5,6
      5 CONTINUE
      GO TO 9
      6 IF(ITER-NIM)1,7,7
      7 WRITE(6,8)
      8 FORMAT(' MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS ACHIEVED')
      9 RETURN
      END
  
```



$$[B] = [I] = [Q]^T [A] \rightarrow [Q]^T = [Q]^{-1}$$

PREMULTPLICANDO PER  $[Q]^T$  LA (\*) SI HA

$$\underbrace{[Q]^T [A] [Q]} = \underbrace{[Q]^T [Q]} [A] = [A]$$

TRASFORMAZIONE ORTOGONALE  
CHE PRODUCE LA MATRICE  
DIAGONALE DEGLI AUTIVALORI

IL METODO DI JACOBI CONSISTE IN UNA PROCEDURA OVE SEQUENZIALMENTE VENGONO ELIMINATI I TERMINI AL DI FUORI DELLA DIAGONALE DELLA MATRICE  $[A]$  MEDIANTE UNA SEQUENZA DI TRASFORMAZIONI ORTOGONALI ELEMENTARI.

ESEMPIO: SI CONSIDERI LA MATRICE  $[A]$  DI ORDINE 4, SIMMETRICA.

SI VUOLE ELIMINARE IL TERMINE POSTO AL DI FUORI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE. SI SCEGLIE COME MATRICE ORTOGONALE LA SEGUENTE:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & -S \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & S & 0 & C \end{bmatrix}$$

DOVE  $C = \cos \theta$ ,  $S = \sin \theta$  CON  $\theta$  ANGOLO DI ROTAZIONE INCOGNITO DA DETERMINARSI. SI STUDIA IL PRODOTTO

$$[R_1]^T [A] [R_1]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ca_{12} + sa_{14} & a_{13} & -sa_{12} + ca_{44} \\ ca_{12} + sa_{14} & c^2 a_{22} + s^2 a_{44} + 2sca_{24} & ca_{23} + sa_{34} & -cs(a_{22} - a_{44}) + a_{24}(c^2 - s^2) \\ a_{13} & ca_{32} + sa_{34} & a_{33} & -sa_{32} + ca_{34} \\ -sa_{12} + ca_{14} & -cs(a_{22} - a_{44}) + a_{24}(c^2 - s^2) & -sa_{23} + ca_{34} & s^2 a_{22} + c^2 a_{44} - 2sca_{24} \end{bmatrix}$$

DA CUI RISULTA CHE PER ELIMINARE IL TERMINE POSTO IN SECONDA DA RICCA, QUARTA COLONNA, OCCORRE:

$$-\cos \theta \sin \theta (a_{22} - a_{44}) + a_{24} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$$

$$a_{24} \tan^2 \theta + \tan \theta (a_{22} - a_{44}) - a_{24} = 0$$



## SUBROUTINE JACOBI

LA DIAGONALIZZAZIONE DELLA MATRICE [A] SI OTTIENE DOPO M ITERAZIONI

$$\underbrace{[R_m]^T \dots [R_3]^T [R_2]^T [R_1]^T}_{[Q]^T} [A] \underbrace{[R_1] [R_2] [R_3] \dots [R_m]}_{[Q]} = [Q]^T [A] [Q]$$

$$[Q] = [R_1] [R_2] [R_3] \dots [R_m]$$

TALE METODO E' SEMPRE CONVERGENTE ED E' COMPLETAMENTE STABILE A FRONTE DEGLI ERRORI DI TRONCAMENTO - NELLA MATRICE [A] ALLA FINE DELLA DIAGONALIZZAZIONE RISULTANO POSTI I VALORI DEGLI AUTOVALORI - TUTTI I TERMINI AL DI FUORI DELLA DIAGONALE SONO NULLI (TOLLERANZA  $10^{-6} + 10^{-8}$ ) - GLI AUTOVETTORI SONO MEMORIZZATI NELLA MATRICE V.

SUBROUTINE JACOB(A,V,ERR,N,NX)

```

C
C
C
C COMPUTATION OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS
C BY THE JACOBI'S METHOD
C
C A : SYSTEM MATRIX. AFTER THE COMPUTATIONS
C ARE COMPLETED ITS DIAGONAL TERMS WILL
C BE THE EIGENVALUES
C V : EACH COLUMN OF THIS ARRAY WILL CONTAIN
C A SET OF EIGENVECTORS
C ERR: ERROR ALLOWED
C N : ACTUAL ORDER OF A
C NX: ROW AND COLUMN DIMENSION OF A
C
C
C DIMENSION A(NX,NX),V(NX,NX)
C ITM=200
C IT=0
C
C PUT A UNIT MATRIX IN ARRAY V
C
C DO 10 I=1,N
C DO 10 J=1,N
C IF(I-J)3,1,3
C 3 V(I,J)=0.
C GO TO 10
C 1 V(I,J)=1.
C TO CONTINUE
C
C FIND LARGEST OFF DIAGONAL COEFFICIENT
C
13 T=0
M=N-1
DO 20 I=1,M
J1=I+1
DO 20 J=J1,N
IF(ABS(A(I,J))-T)20,20,2

```



### 3) GENERALIZZAZIONE DEL METODO DI JACOBI

NEL CASO PIU' GENERALE, IL PROBLEMA RISULTA ESSERE ESPRESSO DALLA RELAZIONE

$$[A][X] = \lambda [B][X] \quad (*)$$

DOVE  $[B]$  E' UNA MATRICE SIMMETRICA E DEFINITA POSITIVA. IN TAL CASO LA MATRICE  $[B]$  PUO' ESSERE DECOMPOSTA IN UNA MATRICE  $[S]$  TRIANGOLARE SUPERIORE E UNA MATRICE  $[S]^T$

$$[B] = [S]^T [S]$$

NE SEGUE CHE LA RELAZIONE (\*) PUO' ESSERE RISCRIITA COME

$$[A][X] = \lambda [S]^T [S][X]$$

$$\begin{aligned} [A][I][X] &= \\ &= [A][S]^{-1}[S][X] \end{aligned}$$

$$\downarrow ([S]^T)^{-1} = ([S]^{-1})^T \quad \text{PROPRIETA' (A)}$$



$$[A][S]^{-1}[S][X] = \lambda [S]^T [S][X]$$

$$\downarrow \text{PREMULTIPLICANDO PER } ([S]^T)^{-1}$$

$$([S]^{-1})^T [A][S]^{-1}[S][X] = \lambda [S][X]$$

↑ SI UTILIZZA PROP. (A)

$$\downarrow [X'] = [S][X]$$

$$\downarrow ([S]^{-1})^T [A][S]^{-1}[X'] = \lambda [X']$$

← E' ANCORA UNA MATRICE SIMMETRICA

$$[H]$$

$$(**) [H][X'] = \lambda [X']$$

FORMULAZIONE  
NOTA GIA' TRATTATA



$$\bar{a}_{ii}^{(k)} = a_{ii}^{(k)} b_{ij}^{(k)} - b_{ii}^{(k)} a_{ij}^{(k)}$$

$$\bar{a}_{jj}^{(k)} = a_{jj}^{(k)} b_{ij}^{(k)} - b_{jj}^{(k)} a_{ij}^{(k)}$$

$$Q = \frac{\bar{a}^{(k)}}{2} + \text{Sign}(\bar{a}^{(k)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{a}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{a}_{ii}^{(k)} \bar{a}_{jj}^{(k)}}$$

$$\bar{a}^{(k)} = a_{ii}^{(k)} b_{jj}^{(k)} - a_{jj}^{(k)} b_{ii}^{(k)}$$

LA SOLUZIONE COMPLETA DEL PROCESSO RISULTA ESSERE ANALOGA AL PROCESSO ITERATIVO DI JACOBI VISTO PER L'EQUAZIONE

$$[A][x] = L[x]$$

LA CONVERGENZA È MISURATA CONFRONTANDO DUE APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE DI AUTOVALORI E TESTANDO CHE TUTTI I TERMINI AL DI FUORI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE SIANO MOLTO PICCOLI:

$$\frac{|h_i^{(k+m)} - h_i^{(k)}|}{h_i^{(k+m)}} \leq 10^{-8} \quad i=1, n$$

DOVE

$$h_i^{(k+m)} = \frac{a_{ii}^{(k+m)}}{b_{ii}^{(k+m)}} \quad h_i^{(k)} = \frac{a_{ii}^{(k)}}{b_{ii}^{(k)}}$$

$$\sqrt{\frac{(a_{ij}^{(k+m)})^2}{a_{ii}^{(k+m)} a_{jj}^{(k+m)}}} \leq 10^{-8} \quad \sqrt{\frac{(b_{ij}^{(k+m)})^2}{b_{ii}^{(k+m)} b_{jj}^{(k+m)}}} \leq 10^{-8} \quad \forall i, j \quad i < j$$

TOLLERANZA PER LA CONVERGENZA

IL PASSAGGIO DA UNA ITERAZIONE A QUELLA SUCCESSIVA AVVIENE SECONDO LE SEGUENTI FASI:

ITERAZIONE (k) :- SI CALCOLANO  $d, \gamma$

- SI CALCOLANO  $[A_{k+1}] = [R_k]^T [A_k] [R_k]$

$$[B_{k+1}] = [R_k]^T [B_k] [R_k]$$

- SI CALCOLANO GLI AUTOVETTORI

$$[Q] = [R_1][R_2] \dots [R_k]$$



```

C
C
C
C
IF ZEROING IS REQUIRED, CALCULATE THE ROTATION MATRIX
ELEMENTS CA AND CG
JAC00070
JAC00071
JAC00072
JAC00073
JAC00074
JAC00075
JAC00076
JAC00077
JAC00078
JAC00079
JAC00080
JAC00081
JAC00082
JAC00083
JAC00084
JAC00085
JAC00086
JAC00087
JAC00088
JAC00089
JAC00090
JAC00091
JAC00092
JAC00093
JAC00094
JAC00095
JAC00096
JAC00097
JAC00098
JAC00099
JAC00100
JAC00101
JAC00102
JAC00103
JAC00104
JAC00105
JAC00106
JAC00107
JAC00108
JAC00109
JAC00110
JAC00111
JAC00112
JAC00113
JAC00114
JAC00115
JAC00116
JAC00117
JAC00118
JAC00119
JAC00120
JAC00121
JAC00122
JAC00123
JAC00124
JAC00125
JAC00126
JAC00127
JAC00128
JAC00129
JAC00130
JAC00131
JAC00132
JAC00133
JAC00134
JAC00135
JAC00136
JAC00137
JAC00138
JAC00139
JAC00140
JAC00141
JAC00142
JAC00143
JAC00144
JAC00145
JAC00146
JAC00147
JAC00148
JAC00149
JAC00150

AKK=A(K,K)*B(J,K) - B(K,K)*A(J,K)
AJJ=A(J,J)*B(J,K) - B(J,J)*A(J,K)
AB=A(J,J)*B(K,K) - A(K,K)*B(J,J)
SCALE=A(K,K)*B(K,K)
ABCH=AB/SCALE
AKKCH=AKK/SCALE
AJJCH=AJJ/SCALE
CHECK=(ABCH*ABCH + 4.*AKKCH*AJJCH)/4.
IF (CHECK) 50,60,60
50 WRITE (IOUT,2020)
GO TO 800
60 SQCH=SCALE*SQRT(CHECK)
D1=AB/2. + SQCH
D2=AB/2. - SQCH
DEN=D1
IF (ABS(D2).GT.ABS(D1)) DEN=D2
IF (DEN) 80,70,80
70 CA=0.
CG=-A(J,K)/A(K,K)
GO TO 90
80 CA=AKK/DEN
CG=-AJJ/DEN

C
C
C
PERFORM THE GENERALIZED ROTATION TO ZERO ELEMENTS
90 IF (N-2) 100,190,100
100 JPI=J + 1
JMI=J - 1
KPI=K + 1
KMI=K - 1
IF (JMI-1) 130,110,110
110 DO 120 I=1,JMI
AJ=A(I,J)
BJ=B(I,J)
AK=A(I,K)
BK=B(I,K)
A(I,J)=AJ + CG*AK
B(I,J)=BJ + CG*BK
A(I,K)=AK + CA*AJ
120 B(I,K)=BK + CA*BJ
130 IF (KPI-N) 140,140,160
140 DO 150 I=KPI,N
AJ=A(J,I)
BJ=B(J,I)
AK=A(K,I)
BK=B(K,I)
A(J,I)=AJ + CG*AK
B(J,I)=BJ + CG*BK
A(K,I)=AK + CA*AJ
150 B(K,I)=BK + CA*BJ
160 IF (JPI-KMI) 170,170,190
170 DO 180 I=JPI,KMI
AJ=A(J,I)
BJ=B(J,I)
AK=A(K,I)
BK=B(K,I)
A(J,I)=AJ + CG*AK
B(J,I)=BJ + CG*BK
A(K,I)=AK + CA*AJ
180 B(K,I)=BK + CA*BJ
190 AK=A(K,K)
BK=B(K,K)
A(K,K)=AK + 2.*CA*A(J,K) + CA*CA*A(J,J)
B(K,K)=BK + 2.*CA*B(J,K) + CA*CA*B(J,J)
A(J,J)=A(J,J) + 2.*CG*A(J,K) + CG*CG*AK
B(J,J)=B(J,J) + 2.*CG*B(J,K) + CG*CG*BK
A(J,K)=0.
B(J,K)=0.

C
C
C
UPDATE THE EIGENVECTOR MATRIX AFTER EACH ROTATION
DO 200 I=1,N
XJ=X(I,J)
XK=X(I,K)
X(I,J)=XJ + CG*XK
200 X(I,K)=XK + CA*XJ
210 CONTINUE

```

1  
2



# PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

"CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'EQUILIBRIO DI UN SISTEMA MATERIALE QUALSIASI E' CHE LA SOMMA DEI LAVORI DI TUTTE LE FORZE AGENTI SU DI ESSO SIA NULLA PER QUALUNQUE SISTEMA DI SPOSTAMENTI VIRTUALI PICCOLISSIMI E POSSIBILI"

OBS: LA POSSIBILITA' DEL SISTEMA DI SPOSTAMENTI RICHIESTE LA CONGRUENZA DELLA DEFORMAZIONE CORRISPONDENTE E LA SUA COMPATIBILITA' CON I VINCOLI ESTERNI.

SECONDO HÜLLER - BRESLAU, NELL'AMBITO DEI SISTEMI DEFORMABILI, IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI STABILISCE LA CONCOMITANZA DI:

- 1) EQUILIBRIO DEL SISTEMA DI FORZE
- 2) POSSIBILITA' DEGLI SPOSTAMENTI
- 3) ANNULLARSI DELLA SOMMA DEI LAVORI VIRTUALI



IL FATTO CHE L'ANNULLARSI DELLA SOMMA DEI LAVORI VIRTUALI DEBBA VERIFICARSI PER QUALSIASI SISTEMA DI FORZE EQUILIBRATO E PER QUALSIASI SISTEMA DI SPOSTAMENTI POSSIBILI (CONGRUENTI E COMPATIBILI CON I VINCOLI) E CHE QUESTA CIRCONSTANZA SIA NECESSARIA E SUFFICIENTE, CONSENTE DI SCEGLIERE INDIPENDENTEMENTE I SISTEMI DI FORZE E DI SPOSTAMENTI CHE FIGURANO NELL'EQUAZIONE CHE ESPRIME LA NULLITA' DEL LAVORO VIRTUALE: ..



(A) SE SISTEMA DI FORZE EQUILIBRATE COMPIE LAVORO Nullo PER UN SISTEMA DI SPOSTAMENTI, QUESTO SARA' NECESSARIAMENTE POSSIBILE

(B) SE PER UN SISTEMA DI SPOSTAMENTI POSSIBILI, UN SISTEMA DI FORZE COMPIE LAVORO Nullo, QUESTO SISTEMA DI FORZE SARA' SICURAMENTE EQUILIBRATO.

ES 1: SI SCEGLIE UN SISTEMA DI FORZE FICTIZIE, EQUILIBRATO E SI EGUALIA A ZERO LA SOMMA DEI LAVORI VIRTUALI PER L'INSIEME DEGLI SPOSTAMENTI REALI. IL PRINCIPIO ESATTO E' LA CONGRUENZA DI QUANTE DEFORMAZIONI: SOTTO TALE FORMA SI IDENTIFICA L'UNICA CONFIGURAZIONE POSSIBILE TRA LE INFINITE CONFIGURAZIONI EQUILIBRATE



ASSUNTO COME SISTEMA "a" IL SISTEMA DI FORZE EQUILIBRATO AGENTE SULLA TRAVATURA PRINCIPALE DATO DALLA REAZIONE IPERSTATICA  $X_i = 1$

$$X_i = 1 \rightarrow R_i, M_i, H_i, T_i \quad \text{CALCOLATI SULLA TRAVATURA PRINCIPALE}$$

ASSUNTO COME SISTEMA "b" IL SISTEMA DI SPOSTAMENTI CONGRUENTI DATI DALLA DEFORMAZIONE REALE

$\delta_{x_i}$  SPOSTAMENTO REALE PUNTO APPLICAZIONE REAZIONE  $X_i$  NELLA DIREZIONE DI  $X_i$   
 $\gamma$  CEDIMENTI REALI

$$\left. \begin{aligned} d\delta &= \frac{N ds}{EA} = \frac{(N_0 + H_1 X_1 + H_2 X_2 + \dots) ds}{EA} \\ d\delta &= \frac{M ds}{EJ} = \frac{(M_0 + H_1 X_1 + H_2 X_2 + \dots) ds}{EJ} \\ d\gamma &= t \frac{T ds}{GA} = t \frac{(T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 + \dots) ds}{GA} \end{aligned} \right\} \text{DEFORMAZIONI REALI}$$

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI SI SCRIVE:

$$1 \cdot \delta_{x_i} + \sum_A R_i \gamma = \int_s \frac{H_i N}{EA} ds + \int_s \frac{H_i M}{EJ} ds + \int_s t \frac{T_i T}{GA} ds$$

$\delta_{x_i}, \gamma$  SONO NOTI

$H_i, M_i, T_i$  SONO NOTI PERCHÉ CALCOLATI SULLA TRAVATURA PRINCIPALE

$\delta_{x_i}$  = SPOSTAMENTO REALE DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA  $X_i$  POSITIVO SE CONCORDE CON  $X_i$

$\Rightarrow$  SE  $X_i$  REAZIONE IPERSTATICA INTERNA  $\delta_{x_i}$  SPOSTAMENTO RELATIVO REALE TRA LE DUE FACCE DEL TAGLIO CHE LIBERA  $X_i$ ; PER DEFINIZIONE  $\delta_{x_i} \equiv \delta$ .

$\delta_{x_i} = 0$  SE  $X_i$  REAZIONE IPERSTATICA DI UN VIHCOLO FISSO

$\delta_{x_i} = -k X_i$  SE  $X_i$  REAZIONE DI UN VIHCOLO CENEVOLE ELASTICO (SEGNO - CEDIMENTO NEL VERSO OPPOSTO DELLA FORZA)

$\delta_{x_i} = -J$  SE CEDIMENTO HA VALORE ASSEGNATO (VERSO COME SOPRA)



$i$	$k$	$i_1, i_2$	$k_1, k_2$	$k_m$	$k$	$k$	$k$
$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$
$sik$	$\frac{1}{2} sik$	$\frac{1}{6} s(i_1 + i_2)$	$\frac{1}{6} s(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3} sik_m$	$\frac{2}{3} sik$	$\frac{2}{3} sik$	$\frac{1}{2} sik$
$\frac{1}{2} sik$	$\frac{1}{8} sik$	$\frac{1}{6} s(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3} sik_m$	$\frac{5}{12} sik$	$\frac{5}{12} sik$	$\frac{1}{4} sik$	$\frac{1}{6} s(1+d)ik$
$\frac{1}{2} sik$	$\frac{1}{6} sik$	$\frac{1}{6} s(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3} sik_m$	$\frac{1}{4} sik$	$\frac{1}{4} sik$	$\frac{1}{12} sik$	$\frac{1}{6} s(1+\beta)ik$
$\frac{1}{2} s(i_1 + i_2)k$	$\frac{1}{6} s(i_1 + 2i_2)k$	$\frac{1}{6} s \cdot [2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2]$	$\frac{1}{3} s(i_1 + \frac{1}{2}i_2)k_m$	$\frac{1}{12} s(3i_1 + 5i_2)k$	$\frac{1}{12} s(i_1 + 5i_2)k$	$\frac{1}{6} sk \cdot \{(1+\beta)i_1 + (1+d)i_2\}$	

TABELLA VALORI INTEGRALE

$$\int H_i H_k ds$$



$$S_{11} = \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l (l-z)^2 dz = \frac{l^3}{3EI}$$

$$S_{12} = S_{21} = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l (l-z) dz = \frac{l^2}{2EI}$$

$$S_{22} = \int_0^l \frac{M_2^2}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l dz = \frac{l}{EI}$$

LE REAZIONI SOPRASCritte DIVENGONO

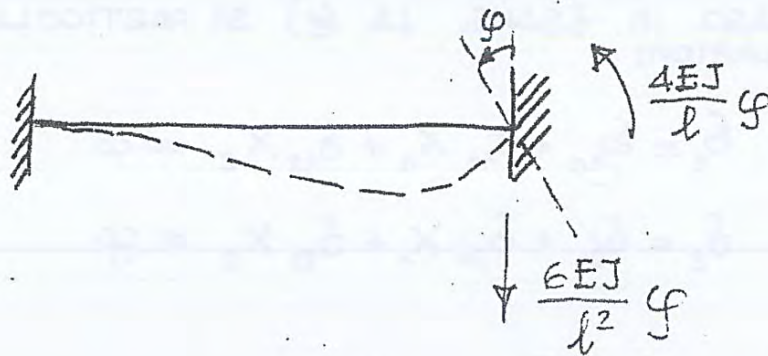
$$\frac{l^3}{3EI} X_1 + \frac{l^2}{2EI} X_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad X_1 = -\frac{3X_2}{2l}$$

$$\frac{l^2}{2EI} X_1 + \frac{l}{EI} X_2 = \varphi$$

$$\frac{l^2}{2EI} \left(-\frac{3X_2}{2l}\right) + \frac{l}{EI} X_2 = \varphi \quad \Rightarrow \quad -\frac{3X_2 l}{4EI} + \frac{X_2 l}{EI} = \varphi$$

$$X_2 = \frac{4EI}{l} \varphi$$

$$X_1 = -\frac{3X_2}{2l} = -\frac{3}{2l} \cdot \frac{4EI}{l} \varphi = -\frac{6EI}{l^2} \varphi$$





# ALCUNI CASI SEMPLICI DI RIGIDEEZZE NOTE



$$P = \frac{3EJ}{l^3} \eta$$

MEMSOLA CON FORZA AD UN ESTREMO



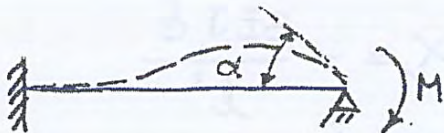
$$P = \frac{EA}{l} \epsilon$$

ASTA SOGGETTA A TRAZIONE



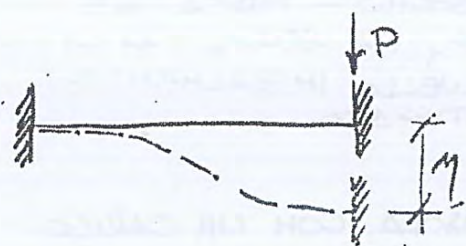
$$M = \frac{3EJ}{l} \alpha$$

TRAVE APPOGGIATA AI DUE ESTREMI



$$M = \frac{4EJ}{l} \alpha$$

TRAVE CON INCASTRO E APPOGGIO



$$P = \frac{12EJ}{l^3} \eta$$

INCASTRO CEEVUD'E SENZA ROTAZIONE



$$M = \frac{EJ}{l} \alpha$$

TRAVE CON INCASTRO E COPPIA





INVERTENDO LE RELAZIONI ORA SCRITTE SI OTTIENE

$$\begin{bmatrix} Y \\ M \end{bmatrix} = \frac{12EJ}{L^3(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} 1 & -L/2 \\ -L/2 & \frac{(4+\phi_y)}{12} L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ \theta \end{bmatrix} \quad (*)$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE CHE LEGA GLI SPOSTAMENTI DI ESTREMITA' ALLE FORZE PRESENTI ALL'ESTREMITA' STESSA.

↓ TRASCURANDO LA DEFORMABILITA' A TAGLIO SI HA:

$$\begin{bmatrix} Y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ \theta \end{bmatrix}$$

SAPENDO CHE LE REAZIONI VINCOLARI VALGONO:

$$Y_i = -Y \quad M_i = -(M + \gamma L)$$

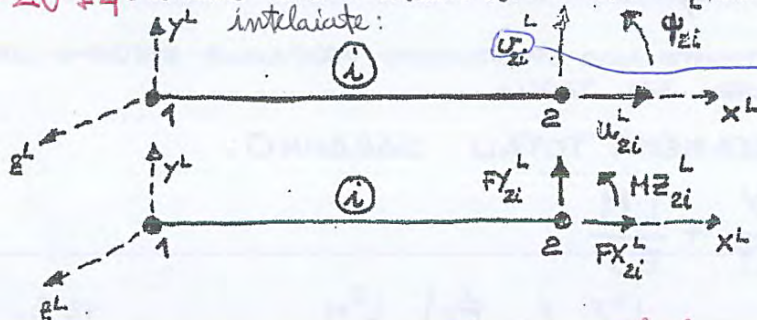
DALLA (\*) SI RICAVALA:

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ M_i \end{bmatrix} = \frac{12EJ}{L^3(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} -1 & L/2 \\ -L/2 & \frac{(2-\phi_y)}{12} L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ \theta \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE CHE FORNISCE IL VALORE DELLE REAZIONI AD UNA ESTREMITA' PER SPOSTAMENTI ALLA ESTREMITA' OPPOSTA.

LEZ. 10-03-2014: vediamo ancora alcune considerazioni relative alle strutture intelaiate:

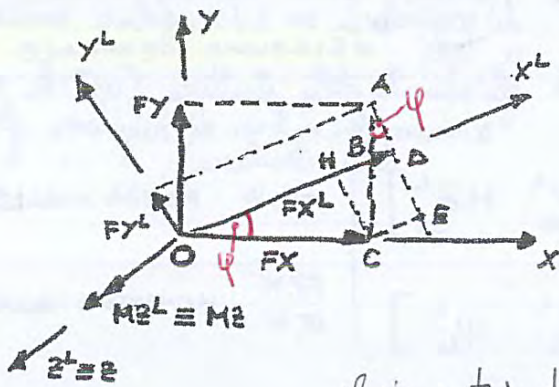
**MATRICE COMPLETA TRAVE**



**DEFINIZIONI**

ASSE  $x^L$ : asse della trave, va dal nodo iniziale a quello finale.  
 ASSI  $y^L$  e  $z^L$ : assi contenuti nel piano della sezione della trave. Sono **ASSI CENTRALI PRINCIPALI DI INERZIA** (è importante che lo siano, perché la matrice di rigidità scritta con come la conosciamo si





segmento

$$\begin{aligned}
 FY^L &= \overline{AD} = \overline{AE} - \overline{DE} = \overline{AE} - \overline{HC} = \\
 &= \overline{AC} \cos \varphi - \overline{OC} \sin \varphi = \\
 &= FY \cos \varphi - FX \sin \varphi \\
 FX^L &= \overline{OD} = \overline{OH} + \overline{HD} = \overline{OH} + \overline{CE} = \\
 &= \overline{OC} \cos \varphi + \overline{AC} \sin \varphi = \\
 &= FX \cos \varphi + FY \sin \varphi
 \end{aligned}$$

classica matrice di rotazione

$$\begin{bmatrix} FX_{1i}^L \\ FY_{1i}^L \\ MZ_{1i}^L \\ FX_{2i}^L \\ FY_{2i}^L \\ MZ_{2i}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & \phi & \phi & \phi & \phi \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & 1 & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & \phi \\ \phi & \phi & \phi & -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FX_{1i} \\ FY_{1i} \\ MZ_{1i} \\ FX_{2i} \\ FY_{2i} \\ MZ_{2i} \end{bmatrix}$$

in forma compatta

perché  $Z \equiv Z^L$

$$[F^L]_i = [T]_i [F^G]_i$$

questa relazione vale anche per gli spostamenti

$$[u^L]_i = [T]_i [u^G]_i$$

$$[F^L]_i = [k]_i [u^L]_i = [k]_i [T]_i [u^G]_i$$

**MATRICE DI TRASFORMAZIONE**  
**PROPRIETA' DELLA [T]\_i**

stessa proprietà vista nel caso di strutture reticolari

$$[T]_i^T [T]_i = [I]$$

PREMULTPLICANDO PER

$$[T]_i^T$$

$$[T]_i^T [F^L]_i = [T]_i^T [k]_i [T]_i [u^G]_i$$

$$[F^G]_i$$

$$[k]_i$$

$$[F^G]_i = [k]_i [u^G]_i$$

**MATRICE DI RIGIDezza**

**ELEMENTO TRAVE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO GLOBALE**

(non cambia di dimensione: continua ad essere  $6 \times 6$ )

prende queste relazioni (una per ognuno degli  $n$  elementi), le sposta nella dimensione strutturale e le somma

equivalente a fare l'equilibrio in semi nodi.



RIFERITO AL SISTEMA LOCALE, QUESTO RIFERITO AL SISTEMA GLOBALE DIVIENE:

reazioni di incastro perfette riferite al s.d.r. globale

$$[R^g]_i = [T]_i^T [R^l]_i$$

FORZE CHE I VINCOLI APPLICANO ALLA TRAVE LA TRAVE AGISCE SUI VINCOLI (QUINDI SUI NODI) CON FORZE EGUALI E CONTRARIE

FORZE SCARICATE DALLA TRAVE SUI NODI

equivalenti

$$[F^e]_i = -[R^g]_i$$

Faccio questo per tutte le aste e a questo punto posso risolvere la mia struttura (e andare a calcolare gli spostamenti)

reaz. di incastro perfette cambiate di segno

CARICHI EQUIVALENTI ASTA (i) (CARICHI DA SOMMARSII AI CARICHI DIRETTAMENTE AGENTI SUI NODI)

e poi le caratteristiche di sollecitazione

IL CALCOLO DELLE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE ALLE ESTREMITA DELLA TRAVE DURA' TEREN CONTO DEL PROCESSO DEFORMATIVO DELLA STRUTTURA E DEI CARICHI DIRETTAMENTE APPLICATI.

Se l'asta non è direttamente caricata,

le [S] sono figlie solo del processo deformativo [S] = [k][u]. Se l'asta è direttamente caricata, se il p.s.e., le [S] sono figlie del processo deformativo + le reaz. di incastro perfette.

asta ha solo carichi nodali

$$[S]_i^T = [N_{1i}, T_{1i}, M_{1i}, N_{2i}, T_{2i}, M_{2i}]$$

↑ VETTORE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

$$[S]_i = [F^l]_i + [R^l]_i = [k]_i [u^l]_i + [R^l]_i$$

CONTRIBUTO SPOSTAMENTI NODALI

REAZIONI DI INCASTRO PERFETTO

$$[u^l]_i = [T]_i [u^g]_i$$

$$[S]_i = [k]_i [T]_i [u^g]_i + [R^l]_i$$

spostamenti nodali liberi: soggetti al processo deformativo

nono fatto il partizionamento della matrice (parte sotto le equaz. vincolate) => le reaz. vincolari che sono solo quelle figlie del processo deformativo ([F] = [K][U]). Ma se sul nodo vincolato nono fatto il partizionamento della matrice, allora il calcolo delle reazioni vincolari avverrà ancora applicando il principio di sovrapposizione degli effetti:

reazioni vincolari indotte dal processo deformativo

$$[R^v] = [F] + \sum_e [R^e]$$





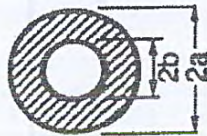
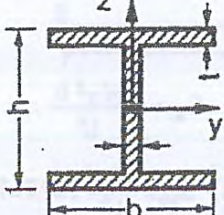
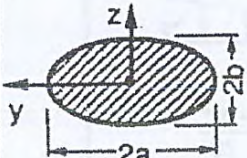
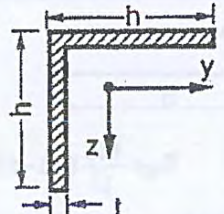
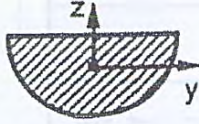
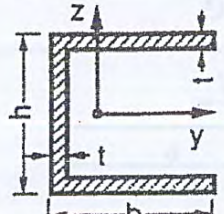
reaz. di incastro perfette riportate nel s.d.r. globale (perché le Rv si calcolano nel s.d.r. globale e le F<sub>i</sub> sono calcolate nel s.d.r. globale) (come noto)

CONTRIBUTO REAZIONI DI INCASTRO PERFETTO TRAVI DIRETTAMENTE CARICATE E CONFLUENTI NEI NODI DI VINCOLO

numero delle aste che convergono nel nodo e nono direttamente caricate



## COEFFICIENTI "K" DEFORMABILITÀ A TAGLIO

Sezioni piene		Sezioni a pareti minces	
	<p style="text-align: center;"><b>Rectangle</b></p> $k = \frac{5}{6} = 0.833$		<p style="text-align: center;"><b>Tube circulaire</b></p> $k = 0.5$
	<p style="text-align: center;"><b>Cercle</b></p> $k = \frac{6}{7} = 0.857$		<p style="text-align: center;"><b>Tube carré</b></p> $k = 0.416$
	<p style="text-align: center;"><b>Tube épais</b></p> $k = \frac{6}{7 + 20 \alpha^2}$ $\alpha = \frac{b/a}{1 + b^2/a^2}$		<p style="text-align: center;"><b>Section I (b = h)</b></p> <p>EF:  <math>k_z = 0.32</math>  <math>k_y = 0.69</math></p>
	<p style="text-align: center;"><b>Ellipse</b></p> $k_z = \frac{12(3a^2 + b^2)}{40a^2 + 16b^2}$		<p style="text-align: center;"><b>Cornière (b = h)</b></p> <p>EF:  <math>k = 0.358</math></p>
	<p style="text-align: center;"><b>Demi-cercle</b></p> $k_z = 0.766$ $k_y = 0.863$		<p style="text-align: center;"><b>Section U (b = h)</b></p> <p>EF:  <math>k_z = 0.235</math>  <math>k_y = 0.618</math></p>

$k_z$  = FLESSIONE ATTORNO ALL'ASSE  $y$

$k_y$  = FLESSIONE ATTORNO ALL'ASSE  $z$

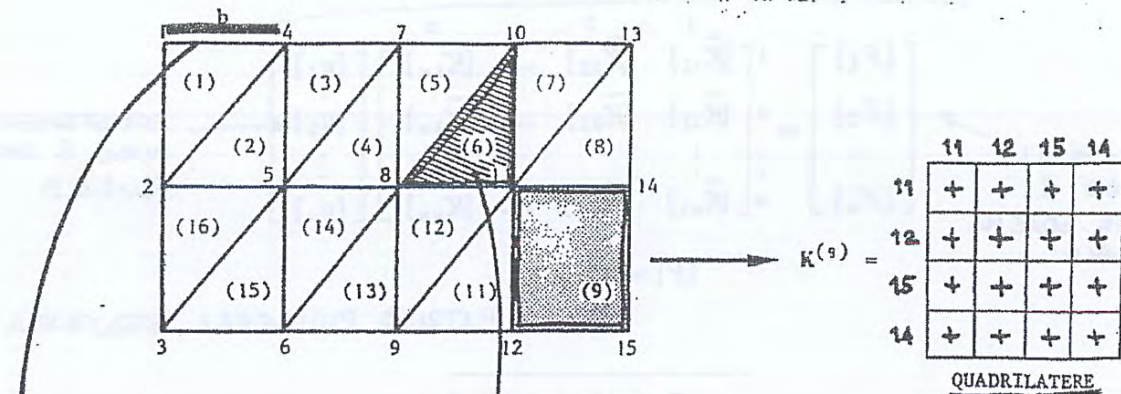
E.F. = VALORI OTTENUTI MEDIANTE ELEMENTI FINITI



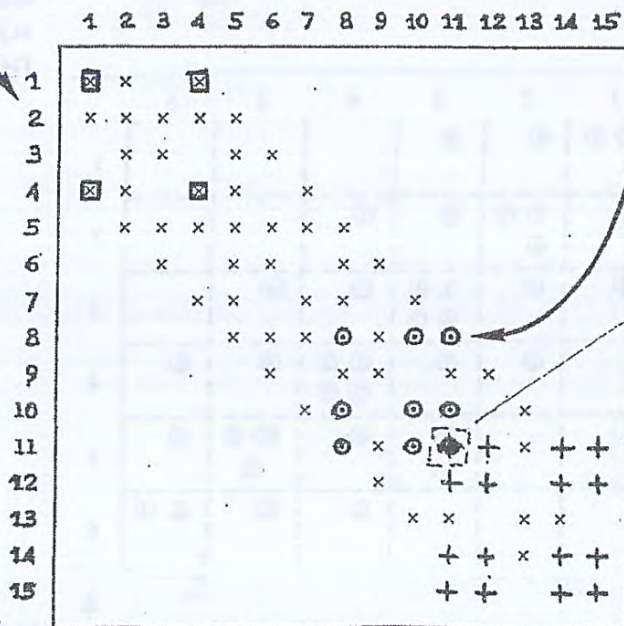
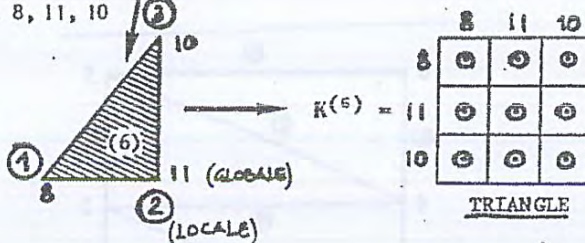
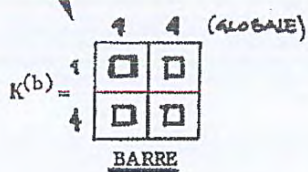




# REGOLA PRATICA D'ASSEMBLAGGIO



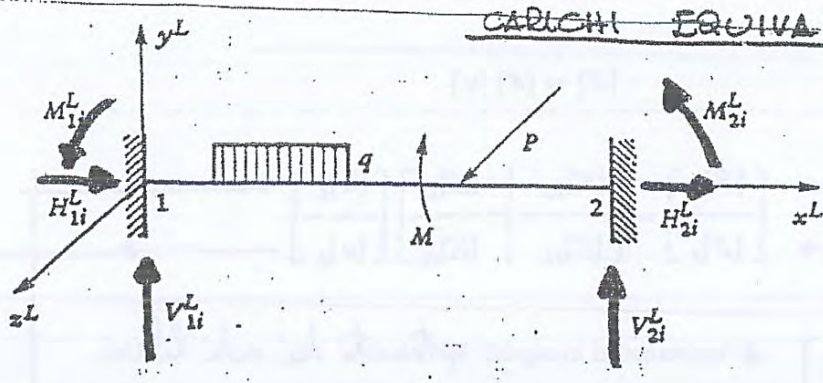
Système d'indicage local ① ② ③  
Système d'indicage général 8, 11, 10



DEGLI ELEMENTI (6) IN TALE TERMINI. VEDIAMO CONTRIB. DEGLI ELEMENTI (7) (8) (11) (12).

NUMERAZIONE NODI GLOBALE





CARICHI EQUIVALENTI

$$[R^L]_i^T = [H_{1i}^L \quad V_{1i}^L \quad M_{1i}^L \quad H_{2i}^L \quad V_{2i}^L \quad M_{2i}^L]$$

REAZIONI IN CASTRO PERFETTO (SISTEMA LOCALE)

REAZIONI NEL SISTEMA GLOBALE

$$[R^G]_i = [T]_i^T [R^L]_i$$

$$[F^E]_i = -[R^G]_i$$

CARICHI EQUIVALENTI SUI NODI INDOTTI DAI CARICHI DISTRIBUITI LUNGO L'ELEMENTO

$$[F] = [F^C] + \sum_i [F^E]_i$$

① CONCENTRATI DIRETTAMENTE APPLICATI AI NODI DELLA STRUTTURA

② CARICHI EQUIVALENTI AI NODI

VECTORI CARICHI NODALI TOTALI (SOMMA DEI SINGOLI CONTRIBUTI) ① + ②

$$[S]_i^T = [N_{1i} \quad T_{1i} \quad M_{1i} \quad N_{2i} \quad T_{2i} \quad M_{2i}]$$

SOLLECITAZIONI ESTREMITA' TRAVE (SOMMA CONTRIBUTI) ① + ②

$$[S]_i = [F^L]_i + [R^L]_i = [k]_i [u^L]_i + [R^L]_i$$

①      ②

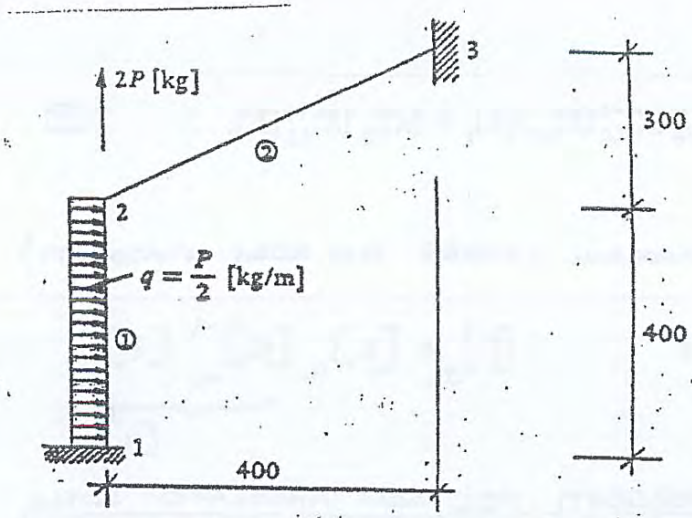
$$[u^L]_i = [T]_i [u^G]_i \quad [S]_i = [k]_i [T]_i [u^G]_i + [R^L]_i$$

Def./spostamenti nodi di estremita' ①

Reazioni vincolari di incastro perfetto ②



LEZ. 10-03-2014



RISOLUZIONE IN UN TELAI

Asta	NI	NF	J cm <sup>4</sup>	A cm <sup>2</sup>	L cm	cos φ	sin φ
1	1	2	1000	100	400	φ	1
2	2	3	1000	100	500	0.8	0.6

TABELLA INCIDENZE

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} 46.875 & \emptyset & -9375. & -46.875 & \emptyset & -9375. \\ \emptyset & 62500. & \emptyset & \emptyset & -62500. & \emptyset \\ -9375. & \emptyset & 2.500.000 & 9375. & \emptyset & 1.250.000 \\ -46.875 & \emptyset & 9375. & 46.875 & \emptyset & 9375. \\ \emptyset & -62500. & \emptyset & \emptyset & 62500. & \emptyset \\ -9375. & \emptyset & 1.250.000 & 9375. & \emptyset & 2.500.000 \end{bmatrix}$$

ASTA ①

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} 32008.64 & 23988.48 & -3600 & -32008.64 & -23988.48 & -3600 \\ 23988.48 & 18015.36 & 4800 & -23988.48 & -18015.36 & 4800 \\ -3600 & 4800 & 2.000.000 & 3600 & -4800 & 1.000.000 \\ -32008.64 & -23988.48 & 3600 & 32008.64 & 23988.48 & 3600 \\ -23988.48 & -18015.36 & -4800 & 23988.48 & 18015.36 & -4800 \\ -3600 & 4800 & 1.000.000 & 3600 & -4800 & 2.000.000 \end{bmatrix}$$

ASTA ②

MATRICI NEL SISTEMA GLOBALE

$$\begin{bmatrix} [F]_1 \\ [F]_2 \\ [F]_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}]_1 & [K_{12}]_1 & [\emptyset] \\ [K_{21}]_1 & [K_{22}]_1 + [K_{11}]_2 & [K_{i2}]_2 \\ [\emptyset] & [K_{21}]_2 & [K_{22}]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [u]_2 \\ [u]_3 \end{bmatrix}$$

ASSEMBLAGGIO INTERA STRUTTURA

$$[F]_2 = ([K_{22}]_1 + [K_{11}]_2) [u]_2$$

FORZE MODI LIBERI      SPOSTAMENTI MODI LIBERI      MATRICE DI RIGIDITÀ  $[K_{LL}]$

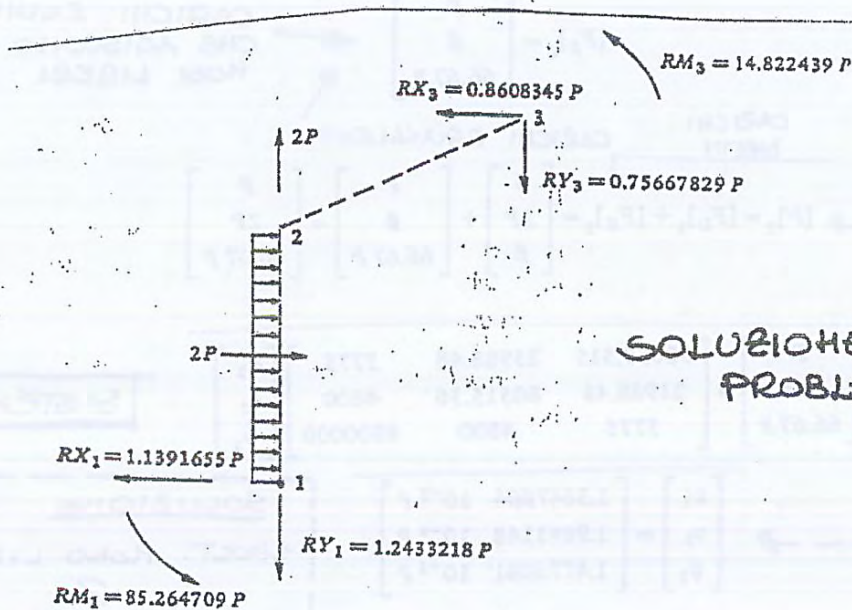


REAZIONI  
VINCOLARI

$$\begin{bmatrix} RX_1 \\ RY_1 \\ RM_1 \\ RX_3 \\ RY_3 \\ RM_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1391655 P \\ -1.2433218 P \\ 18.598042 P \\ -0.8608345 P \\ -0.7566783 P \\ 14.822439 P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P \\ \emptyset \\ 66.67P \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1391655 P \\ -1.2433218 P \\ 85.264709 P \\ -0.8608345 P \\ -0.7566783 P \\ 14.822439 P \end{bmatrix}$$

MODO 1

MODO 3



SOLUZIONE DEL  
PROBLEMA



PROGRAMMA PER IL CALCOLO DEI  
TELAI PIANI

SI PUO' UTILIZZARE, SENZA MODIFICHE DI LOGICA, IL PROGRAMMA PRESENTATO PER IL CALCOLO DELLE STRUTTURE RETICOLARI PIANE - OCCORRE APPORTARE MODIFICHE A LIVELLO DI CODICE, PRINCIPALMENTE NELLE SUBROUTINE "STIF" E "FORCE" - A LIVELLO DI "STRUTTURA DAT" LE MODIFICHE RIGUARDANO ESSENZIALMENTE LE DIMENSIONI DELLE MATRICI E DEI VETTORI.

MODIFICHE VETTORI/MATRICI DA APPORTARE

- CON : NON MODIFICATO
- IB : OCCORRE AUMENTARE LA DIMENSIONE DEL VETTORE (4 POSIZIONI PER CIASCUN NODO VINCOLATO) - INDICATO CON J IL PUNTATORE NELLA POSIZIONE  $IB((NDF+1)*(J-1)+1)$  VIENE MEMORIZZATO IL NUMERO DEL NODO VINCOLATO, E NELLE SUCCESSIVE 3 POSIZIONI  $IB((NDF+1)*(J-1)+I)$ ,  $I=2,3,4$  L'INDICATORE DI VINCOLO - CON RIFERIMENTO ALLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO  $u, \sigma, \psi$  (0 → SPOSTAMENTO IMPOSTO / 1 → SPOSTAMENTO LIBERO)
- X : NON MODIFICATO
- Y : NON MODIFICATO
- PROP : VETTORE AUMENTATO DI DIMENSIONE; PER OGNI ELEMENTO (CON PUNTATORE "L") SI MEMORIZZANO LA SEZIONE TRASVERSALE IN PROP(2\*L-1) ED IL MOMENTO D'INERZIA IN PROP(2\*L) - SI TRASCURA LA DEFORMABILITA' A TAGLIO, E DUNQUE HOI RISULTA NECESSARIA L'AREA A TAGLIO.
- AL : DIMENSIONE MODIFICATA POICHE' OGNI NODO PRESENTA 3 GRADI DI LIBERTA' INVECE CHE 2.  $AL(NDF*(J-1)+I)$ , CON  $I=1,2,3$  CONTIENE, PRIMA DELLA SOLUZIONE, I CARICHI AGENTI SUL NODO J ( $Fx^L, Fy^L, Mz^L$ ) - DOPO LA SOLUZIONE CONTIENE I VALORI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO  $u, \sigma, \psi$  DEL NODO J
- TK : NON MODIFICATO
- ELST : DIMENSIONE MODIFICATA; MATRICE DELL'ELEMENTO RISULTA, PER L'ELEMENTO TRAVE, ESSERE UNA (6\*6) E NON UNA (4\*4)
- V : NON MODIFICATO
- FORC : MEMORIZZA LE SOLLECITAZIONI ALL'ESTREMITA' DELLE ASTE (OGNI ELEMENTO OCCUPA SEI POSIZIONI) - FORC(6\*(L-1)+I) CON  $I=1,2,3$  CONTIENE LE SOLLECITAZIONI  $Fx^L, Fy^L, Mz^L$  DEL PRIMO NODO E FORC(6\*(L-1)+I)  $I=4,5,6$  CONTIENE LE SOLLECITAZIONI DEL SECONDO NODO DELL'ELEMENTO "L".
- REAC : SI MODIFICA IN MANIERA ANALOGA AL VETTORE AL (3 GRADI DI LIBERTA' PER NODO INVECE DI 2)

SUBROUTINE NON MODIFICATE : "ASSEM" - "ELAS" - "BOUN" - "SLBSI"

DIMENSIONI STRUTTURA : NUMERO MASSIMO NODI → 100  
 NUMERO MASSIMO ELEMENTI → 100  
 NUMERO MASSIMO NODI VINCOLATI → 20  
 90



SUBROUTINE INPUT

LA SUBROUTINE VIENE MODIFICATA PER POTER PRENDERE IN CONTO I DATI ADDIZIONALI PROPRI DELL'ELEMENTO "BEAM" -

SK PARAMETRI DI BASE (NON MODIFICATA)

SK COORDINATE NODALI (NON MODIFICATA)

SK DEFINIZIONE ELEMENTI (3I10, 2F10.2)

PROP(I+1) MOMENTO D'INERZIA DELLA SEZIONE DELL'ELEMENTO

SK DEFINIZIONE CARICHI (I10, 3F10.2)

AL(I+1) MOMENTO ESTERNO APPLICATO AL NODO ( $MZ^A$ )

SK DEFINIZIONE VINCOLI (4I10, 3F10.4)

IB(I+4) INDICATORE DI ATTIVAZIONE ROTAZIONE IMPOSTA ATTORNO A  $Z^A$

FORC(NODO/2) COMPONENTE ROTAZIONE IMPOSTA ATTORNO  $Z^A$

```

SUBROUTINE INPUT(X,Y,CON,PROP,AL,IB,REAC)
C
C      INPUT PROGRAM
C
COMMON NRMX,NCHX,NDFEL,NN,NE,NLN,NBN,NDF,NNE,N,MS,IN,IO,E,G
DIMENSION X(1),Y(1),CON(1),PROP(1),AL(1),IB(1),REAC(1),W(3),IC(3)
C
C      ELEMENT PROPERTIES, NODAL LOADS, AND PRESCRIBED
C      UNKNOWN VALUES
C      IC = AUXILIARY ARRAY TO STORE TEMPORARELY THE CONNECTIVITY
C      OF AN ELEMENT, AND THE BOUNDARY UNKNOWN STATUS
C      INDICATORS
C
C      READ BASIC PARAMETERS
C
C      NN = NUMBER OF NODES
C      NE = NUMBER OF ELEMENTS
C      NLN = NUMBER OF LOADED NODES
C      NBN = NUMBER OF BOUNDARY NODES
C      E = MODULUS OF ELASTICITY
C
WRITE(10,20)
20 FORMAT(' ',130(' '))
READ(IN,1) NN,NE,NLN,NBN,E
WRITE(10,21) NN,NE,NLN,NBN,E
21 FORMAT(// ' INTERNAL DATA' // ' NUMBER OF NODES           :',15/' NUMBE
* OF ELEMENTS           :',15/' NUMBER OF LOADED NODES :',15/' NUMBER
* OF SUPPORT NODES :',15/' MODULUS OF ELASTICITY :',F15.0// ' NODAL C
* OORDINATES',7X,'NODE',6X,'X', 9X,'Y')
1 FORMAT(4I10,2F10.0)

```

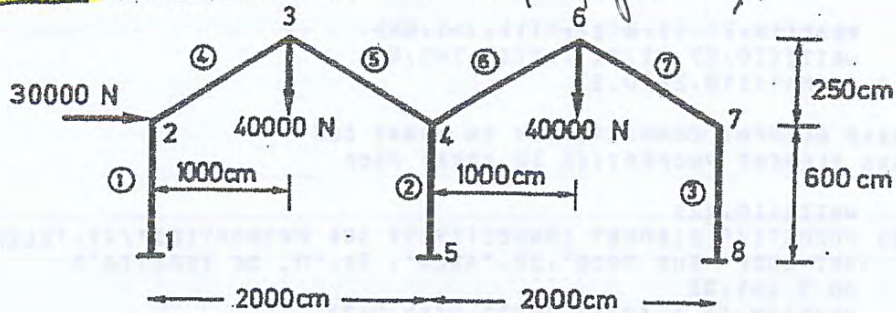
84



LEZ. 10-03-2014

ESEMPIO TEST

usa il <sup>NOCTIS</sup> PROGRAMMA V<sub>IN</sub> FORTRAN (di pag. 82-85)



ASTA	$A_x$	$I_z$
1-3	400 cm <sup>2</sup>	13333 cm <sup>4</sup>
2-4-5-6-7	200 cm <sup>2</sup>	6666 cm <sup>4</sup>

$$E = 21 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$$

				21000000	PROGRAM. GENERIC
8	7	3	3		
2					
3	600.				
4	1000.	850.			DEFINIZIONE
5	2000.	600.			NODI
6	3000.	850.			
7	4000.	600.			
8	4000.				
1	1	2	400.	13333.	
2	5	4	200.	6666.	
3	8	7	400.	13333.	DEFINIZIONE
4	2	3	200.	6666.	ELEMENTI
5	3	4	200.	6666.	
6	4	6	200.	6666.	
7	6	7	200.	6666.	
2	30000.				
3		-40000.			DEFINIZIONE
6		-40000.			CARICHI
1					
5					DEFINIZIONE
8					VINCOLI

(pag. 82-85)

Il programma scritto qui considera solo i carichi nodali  $\Rightarrow$  riscriverlo per tener conto anche delle forze lungo le aste (o meglio, lungo gli elementi).



```

C
C COMPUTE LENGTH OF ELEMENT, AND SINE AND COSINE OF ITS LOCAL
C X AXIS, AND STORE IN D, SI, AND CO, RESPECTIVELY
C
      DX=X(N2)-X(N1)
      DY=Y(N2)-Y(N1)
      D=SQRT(DX**2+DY**2)
      CO=DX/D
      SI=DY/D
      DO 1 I=1,6
      DO 1 J=1,6
      ELST(I,J)=0.

C
C FORM ELEMENT ROTATION MATRIX
C
      1 ROT(I,J)=0.
      ROT(1,1)=CO
      ROT(1,2)=SI
      ROT(2,1)=-SI
      ROT(2,2)=CO
      ROT(3,3)=1.
      DO 2 I=1,3
      DO 2 J=1,3
      2 ROT(I+3,J+3)=ROT(I,J)

C
C COMPUTE ELEMENT LOCAL STIFFNESS MATRIX
C
      ELST(1,1)=E*AX/D
      ELST(1,4)=-ELST(1,1)
      ELST(2,2)=12*E*YZ/(D**3)
      ELST(2,3)=6*E*YZ/(D*D)
      ELST(2,5)=-ELST(2,2)
      ELST(2,6)=ELST(2,3)
      ELST(3,2)=ELST(2,3)
      ELST(3,3)=4*E*YZ/D
      ELST(3,5)=-ELST(2,3)
      ELST(3,6)=2*E*YZ/D
      ELST(4,1)=ELST(1,4)
      ELST(4,4)=ELST(1,1)
      ELST(5,2)=ELST(2,5)
      ELST(5,3)=ELST(3,5)
      ELST(5,5)=ELST(2,2)
      ELST(5,6)=ELST(3,5)
      ELST(6,2)=ELST(2,6)
      ELST(6,3)=ELST(3,6)
      ELST(6,5)=ELST(5,6)
      ELST(6,6)=ELST(3,3)

C
C ROTATE ELEMENT STIFFNESS MATRIX TO GLOBAL COORDINATES
C
      CALL BTAB3(ELST,ROT,V,NDFEL,NDFEL)
      RETURN
      END

```



# SUBROUTINE FORCE

CALCOLA LE SOLLECITAZIONI ALL'ESTREMITA' DELL'ELEMENTO E LE REAZIONI VINCOLARI -

```

SUBROUTINE FORCE(CON,PROP,FORC,REAC,X,Y,AL)
C
C
C COMPUTATION OF ELEMENT FORCES
C
COMMON NRMX,NCHX,NDFEL,NN,NE,NLN,NBN,NDF,NNE,N,MS,IN,IO,E,G
DIMENSION CON(1),PROP(1),FORC(1),REAC(1),X(1),Y(1),AL(1),ROT(3,3),
*U(6),F(6),UL(6),FG(6)
DO 1 I=1,N
1 REAC(I)=0.
DO 100 NEL=1,NE
C
C NEL = CURRENT ELEMENT NUMBER
C N1 = NUMBER OF START NODE
C N2 = NUMBER OF END NODE
C AX = AREA OF ELEMENT CROSS-SECTION
C YZ = MOMENT OF INERTIA OF ELEMENT CROSS-SECTION
C
L=NNE*(NEL-1)
N1=CON(L+1)
N2=CON(L+2)
AX=PROP(L+1)
YZ=PROP(L+2)
C
C COMPUTE LENGTH OF ELEMENT, AND SINE AND COSINE OF ITS LOCAL
C X AXIS, AND STORE IN D, SI, AND CO, RESPECTIVELY
C
DX=X(N2)-X(N1)
DY=Y(N2)-Y(N1)
D=SQRT(DX**2+DY**2)
CO=DX/D
SI=DY/D
C
C FORM ELEMENT ROTATION MATRIX
C
ROT(1,1)=CO
ROT(1,2)=SI
ROT(1,3)=0.
ROT(2,1)=-SI
ROT(2,2)=CO
ROT(2,3)=0.
ROT(3,1)=0.
ROT(3,2)=0.
ROT(3,3)=1.
C
C ROTATE ELEMENT NODAL DISPLACEMENTS TO ELEMENT LOCAL
C REFERENCE FRAME, AND STORE IN ARRAY UL
C
K1=NDF*(N1-1)
K2=NDF*(N2-1)
DO 2 I=1,3
J1=K1+I
J2=K2+I
U(I)=AL(J1)
2 U(I+3)=AL(J2)
DO 3 I=1,3
UL(I)=0.
UL(I+3)=0.
DO 3 J=1,3
UL(I)=UL(I)+ROT(I,J)*U(J)
3 UL(I+3)=UL(I+3)+ROT(I,J)*U(J+3)

```



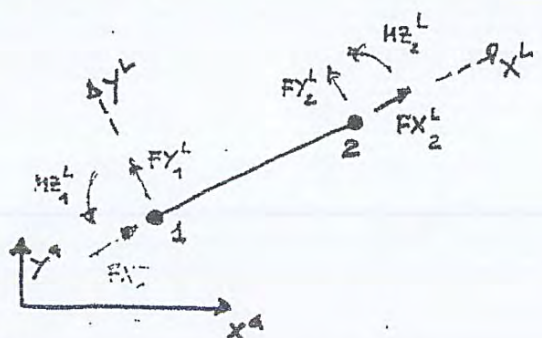
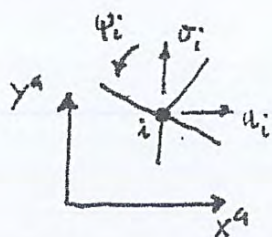
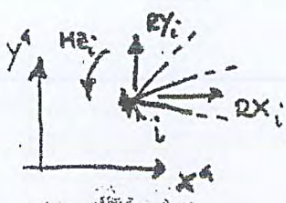
# SUBROUTINE OUTPT

STAMPA GLI SPOSTAMENTI NODALI, LE REAZIONI VINCOLARI, LE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE ALL'ESTREMITA' DELLE ASTE

```

SUBROUTINE OUTPT(CON,AL,FORC,REAC)
C
C           OUTPUT PROGRAM
C
COMMON NRMX,NCMX,NDFEL,NN,NE,NLN,NBN,NDF,NNE,N,MS,IN,IO,E,G
DIMENSION CON(1),AL(1),FORC(1),REAC(1)
C
C WRITE NODAL DISPLACEMENTS
C
WRITE(IO,1)
1 FORMAT(//1X,150(' ')// 'RESULTS'// ' NODAL DISPLACEMENTS'/7X,'NODE
*,11X,'U',14X,'V',13X,'RZ')
DO 10 I=1,NN
K1=NDF*(I-1)+1
K2=K1+NDF-1
10 WRITE(IO,2) I,(AL(J),J=K1,K2)
2 FORMAT(110,6F15.4)
C
C WRITE NODAL REACTIONS
C
WRITE(IO,3)
3 FORMAT(/ ' NODAL REACTIONS'/7X,'NODE',10X,'PX',13X,'PY',13X,'MZ')
DO 20 I=1,NN
K1=NDF*(I-1)+1
K2=K1+NDF-1
20 WRITE(IO,2) I,(REAC(J),J=K1,K2)
C
C WRITE MEMBER END FORCES
C
WRITE(IO,4)
4 FORMAT(/ ' MEMBER FORCES'/6X,'MEMBER',5X,'NODE', 9X,'FX',13X,'FY',
+13X,'MZ')
DO 30 I=1,NE
K1=6*(I-1)+1
K2=K1+2
N1=NNE*(I-1)
WRITE(IO,6) I,CON(N1+1),(FORC(J),J=K1,K2)
K1=K2+1
K2=K1+2
30 WRITE(IO,7) CON(N1+2),(FORC(J),J=K1,K2)
6 FORMAT(2I10,3F15.4)
7 FORMAT(120,3F15.4)
WRITE(IO,5)
5 FORMAT(//1X,150(' '))
RETURN
END

```



82



RESULTS

NODAL DISPLACEMENTS

NODE	U	V	RZ
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.8044	-0.0014	-0.0002
3	0.4364	-5.0122	0.0007
4	1.6762	-0.0055	-0.0026
5	0.0000	0.0000	0.0000
6	3.0591	-5.5776	0.0024
7	4.4428	-0.0016	-0.0070
8	0.0000	0.0000	0.0000

NODAL REACTIONS

NODE	PX	PY	MZ
1	13511.5568	19431.6355	-3953576.9840
2	30000.0000	-0.0000	0.0000
3	0.0000	-40000.0000	0.0000
4	-0.0001	0.0000	-0.0002
5	-7015.7920	38618.3103	2706715.4284
6	-0.0001	-40000.0000	0.0000
7	0.0001	0.0000	-0.0000
8	-36495.7647	21950.0542	14210023.9600

MEMBER FORCES

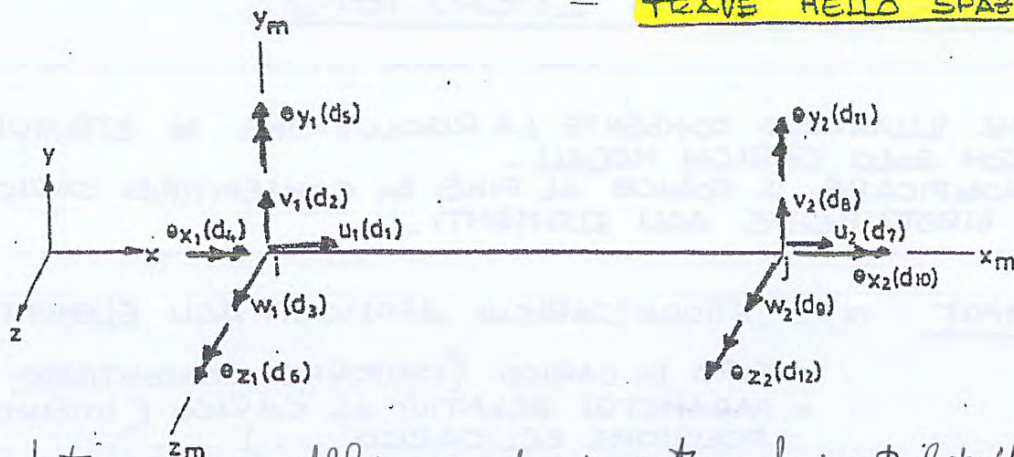
MEMBER	NODE	FX	FY	MZ
1	1	19431.6355	-13511.5568	-3953576.9840
2	2	-19431.6355	13511.5568	-4153357.0949
3	5	38618.3103	7015.7920	2706715.4284
4	4	-38618.3103	-7015.7920	1502759.7990
5	8	21950.0542	36495.7647	14210023.9600
6	7	-21950.0542	-36495.7647	7687434.8505
7	2	46925.2743	8298.3528	4153357.0950
8	3	-46925.2743	-8298.3528	4400389.1686
9	3	47200.9716	-9401.1420	-4400389.1686
10	4	-47200.9716	9401.1420	-5290086.1649
11	4	39783.8473	8659.4964	3787326.3657
12	6	-39783.8473	-8659.4964	5138678.2195
13	6	40729.7624	-12443.1574	-5138678.2195
14	7	-40729.7624	12443.1574	-7687434.8505

STAMPA (B)  
(SUB. OUTPT)



LEZ. 10-03-2014

TRAVE HELLO SPAZIO



Per passare da trave 2D a 3D dobbiamo prendere in conto anche i contributi (deformativi)

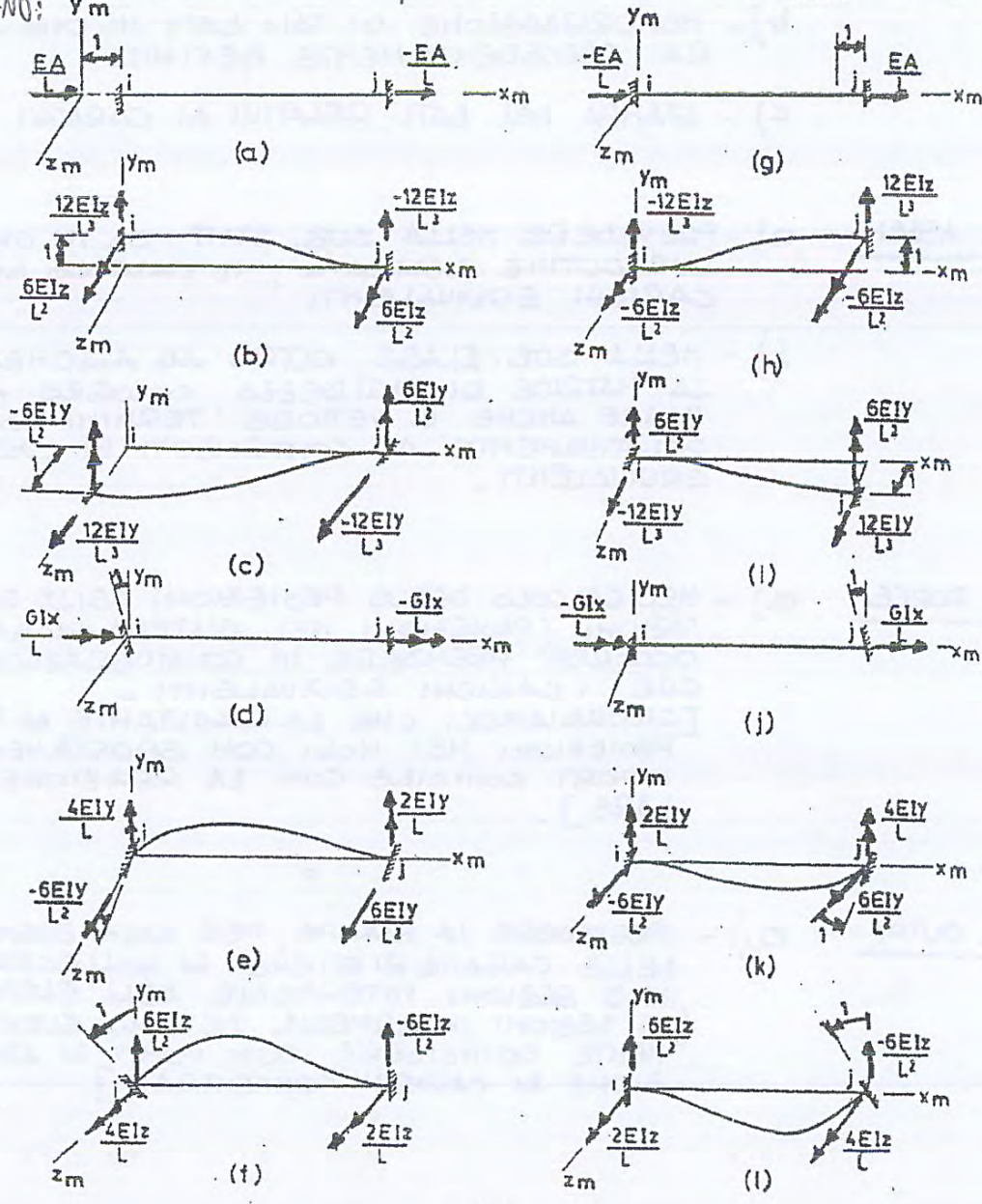
FUORI DAL PIANO:

$(w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2})$

rotaz. torsionali

e l'altro problema di mov. flettente.

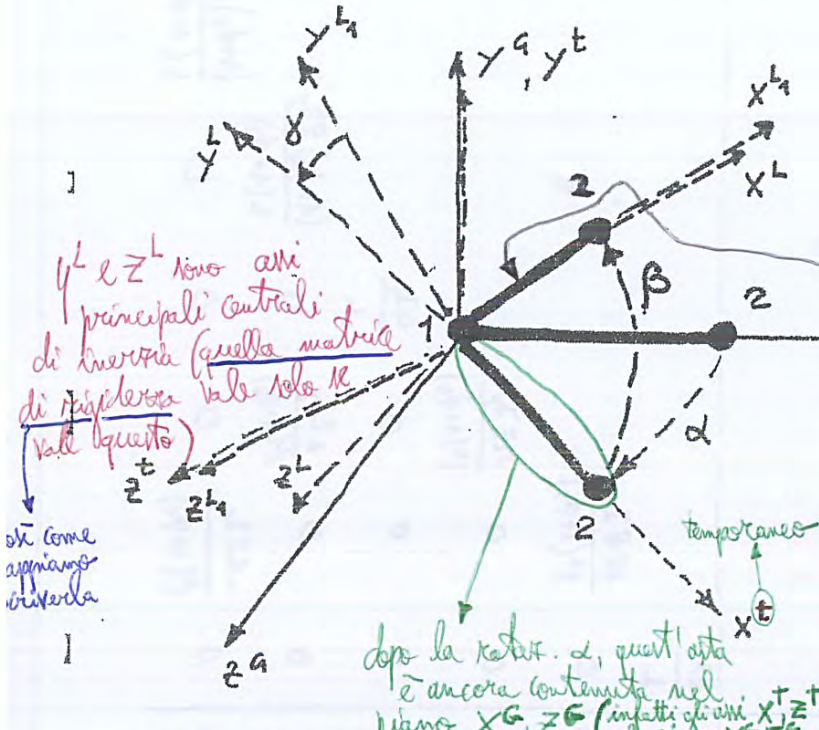
deformata fuori dal piano.





LEZ. 10-03-2014

**MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE HELLO SPAZIO RIFERITA AL SISTEMA GLOBALE**



Supponiamo di avere per ora l'asta 1-2 posizionata secondo  $x^g$ . Nella realtà la sua asta reale  $\bar{x}$ . Immaginiamo all'asta 1-2 diretta lungo  $x^g$  di imporre una rotazione attorno a  $y^g$  così che ottengo l'asta lungo  $x^t$ . Prevedo un piano  $\perp$  contenente l'asta reale. Questo piano interseca il piano  $x^g, z^g$  nella direzione  $x^t$ . Con questo piano  $\perp$  e la rotazione attorno a  $y^g$  con che l'asta sarà diretta lungo  $x^t$ .

$y^t$  e  $z^t$  sono assi principali centrali di inerzia (quella matrice di rigidità vale solo lì).  
 (vale questo)  
 (si come appiamo viceversa)

dopo la rotazione  $\alpha$ , quest'asta è ancora contenuta nel piano  $x^g, z^g$  (infatti gli assi  $x^t, z^t$  sono contenuti nel piano  $x^g, z^g$ )

**SI DEFINISCONO DAPPRIMA I DUE SEGUENTI MOTI RIGIDI:**

a) **ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE  $y^g$  DI UN ANGOLO  $\alpha$**  per passare da  $x^g$  a  $x^t$  (stessa relazione vista per l'asta 2D):

$$\begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \phi & \sin \alpha \\ \phi & 1 & \phi \\ -\sin \alpha & \phi & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^g \\ y^g \\ z^g \end{bmatrix} \quad \text{A}$$

b) **ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE  $z^t$  DI UN ANGOLO  $\beta$** : passo dall'asta orientata lungo  $x^t, y^t$  a quella orientata lungo  $x^l, y^l$ . Chiameremo, essendo la rotazione attorno a  $z^t$  (e  $z^l$ ), il piano  $x^t, y^t$  coinciderà con quello  $x^l, y^l$ .

$$\begin{bmatrix} x^l \\ y^l \\ z^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & \phi \\ -\sin \beta & \cos \beta & \phi \\ \phi & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix} \quad \text{B}$$



DA CUI SEGUE:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \bar{x}/L & \bar{y}/L & \bar{z}/L \\ -\bar{x}\bar{y}/LS & S/L & -\bar{y}\bar{z}/LS \\ -\bar{z}/S & \phi & \bar{x}/S \end{bmatrix}$$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE. IN TERMINI DI COORDINATE NODALI

OSS: 1) NEL CASO IN CUI  $\bar{x}$  E  $\bar{z}$  SIANO EGUALI A ZERO (CASO DELL'ASTA VERTICALE) LA QUANTITA'  $S$  E' UGUALE A ZERO PER CUI LA MATRICE  $[k_1]$  RISULTA NON ESSERE DEFINITA. IN QUESTI CASI LA MATRICE  $[k_1]$  PUO' ESSERE POSTA EGUALE A:

"regole che mi do"

PER  $\bar{y} > 0$  PER  $\bar{y} < 0$

*anta rivolta verso l'alto* *anta rivolta verso il basso*

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [k_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*come  $\alpha$  e  $\beta$  mi do'*

Chi mi dice che il sistema  $x^{L1}, y^{L1}, z^{L1}$  non veramente quello principale centrale di inerzia per l'elemento trave che ho? Non c'è da attraversare un punto neutro? È solo l'utente che, alla fine del processo, se si avvicina ad un n.d.n. principale centrale di inerzia. Se non ci è arrivato → el utilizzatore di una rotazione  $\gamma$  con che il sistema  $L_1$  è centrale principale di inerzia.

2) SE GLI ASSI  $x^{L1}, y^{L1}, z^{L1}$  COINCIDONO CON GLI ASSI  $x^L, y^L, z^L$  (ASSI PRINCIPALI CENTRALI DELLA TRAVE) LA MATRICE  $[k_1]$  SOPRA RIPORTATA DEFINISCE COMPLETAMENTE IL LEGAME TRA SISTEMA LOCALE E SISTEMA GLOBALE

$$[X^L] = [K][X^G] \quad \text{CON } [K] \equiv [k_1]$$

IN CASO CONTRARIO OCCORRE ANCORA CONSIDERARE UNA ROTAZIONE  $\gamma$  ATTORNO ALL'ASSE  $x^{L1}$  ( $x^{L1} \equiv x^L$ ) CHE CONSENTE DI SCRIVERE:

$$\begin{bmatrix} x^L \\ y^L \\ z^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi \\ \phi & \cos \gamma & \sin \gamma \\ \phi & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{L1} \\ y^{L1} \\ z^{L1} \end{bmatrix} \Rightarrow [X^L] = [K_\gamma][X^{L1}]$$

108  
al sistema  $L_1$  per farlo diventare  $L_1$



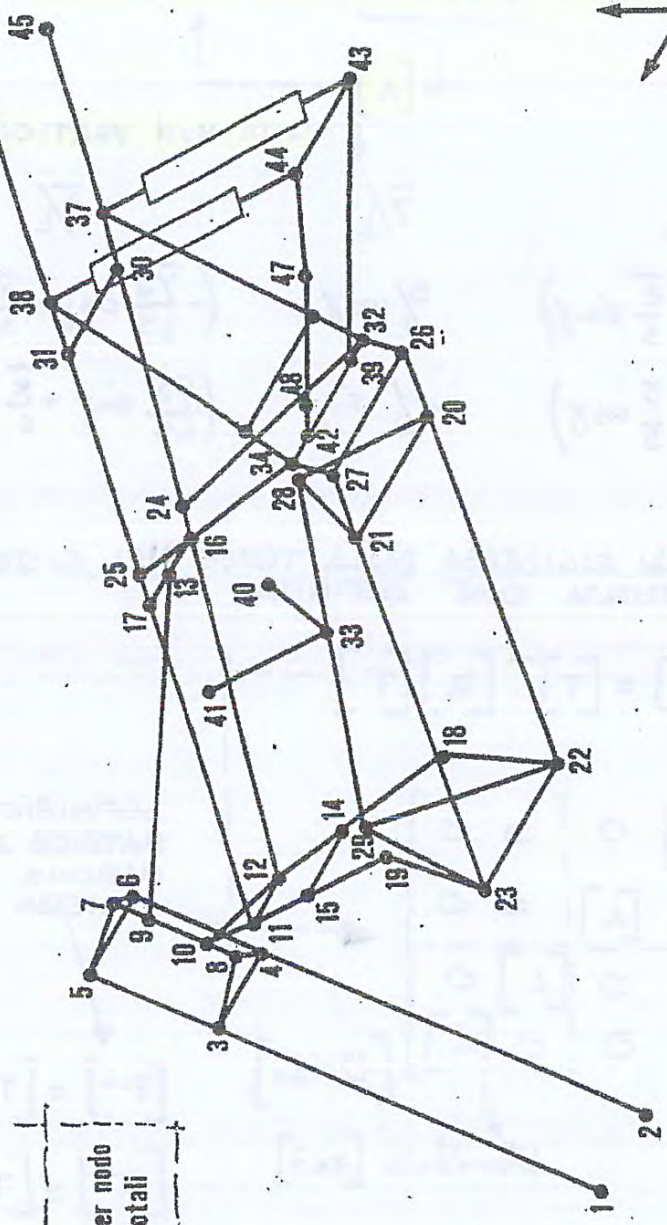
LEZ. 10-03-2014

**MODELLO TRINERZIONALE  
TELAIO MOTOCICLETTA**

Telaio principale  
Elementi trovati nella  
In prima approssimazione studiati come

48	nodi
6	gradi di libertà per nodo
288	totali

Prima approssimazione  
dinamica del  
modello della  
moto Guzzi.



Vista in assonometria della schematizzazione dinamica

della motocicletta **MOTO GUZZI-V7 SPORT**

perché è usata  
modi di vibrazione per i



è la distorsione fisica delle coordinate  $x$  e  $y$  → mi sposta in un punto in un'altra sezione

PER LA (\*), LA RELAZIONE ORA SCRITTA DIVIENE

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} - \gamma_{xy} \right) = - \frac{M(x)}{EJ}$$

ASSUMENDO  $\gamma_{xy}$  COSTANTE LUNGO LA SEZIONE E PARI AL VALORE MEDIO, QUESTO PUO' ESSERE CALCOLATO COME

$$\gamma_{xy} = \frac{T}{KAG}$$

per sez. rettangolare =  $\frac{5}{6}$   
(vedi pag. 140)

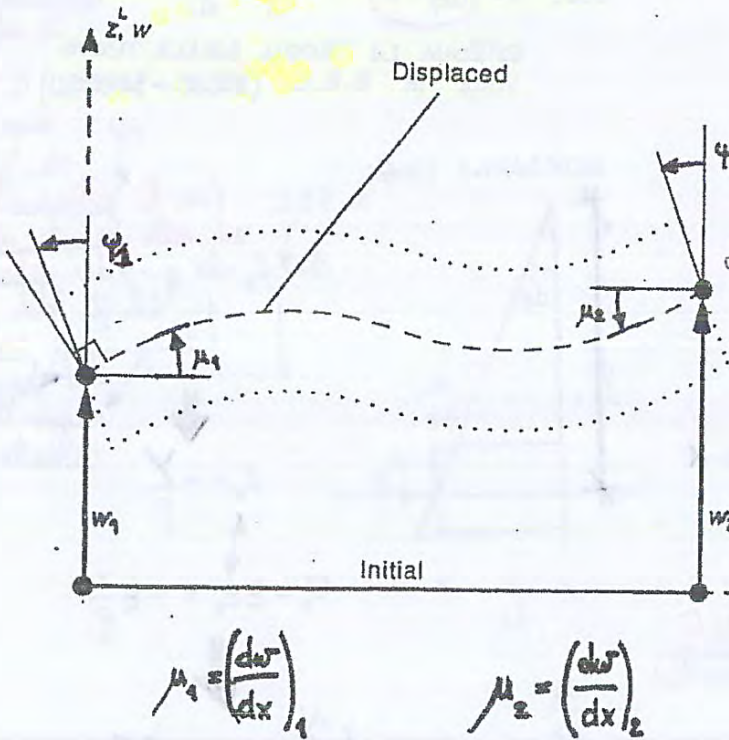
relazione derivata unita a SDC

T = TAGLIO NELLA SEZIONE  
K = COEFFICIENTE DI TAGLIO O COEFFICIENTE DI DEFORMABILITA' A TAGLIO  
G =  $\frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$

ANALIZZANDO L'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE DELL'ELEMENTO TRAVE!

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (M \cdot \frac{d\psi}{dx} + T \cdot \gamma) dx = \frac{1}{2} \int_0^L [EJ \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 + KAG \gamma_{xy}^2] dx \quad \text{dalla (*)}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L [EJ \left( \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\gamma_{xy}}{dx} \right)^2 + KAG \gamma_{xy}^2] dx$$



NELL'IPOTESI DI UTILIZZARE LA STESSA FUNZIONE INTERPOLATRICE NELLA FUNZIONE SPOSTAMENTI  $w$  UTILIZZATA PER LA TRAVE DI EULERO-BERNOULLI

funzione abbreviata  $w(x) = [H][\bar{u}_*^L]$

$$[H] = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4]$$

$$[\bar{u}_*^L]^T = \left[ w_1, \left( \frac{dw}{dx} \right)_1, w_2, \left( \frac{dw}{dx} \right)_2 \right] \quad \text{Eul. + Bern.}$$

parametri a Timoshenko

$$[\bar{u}_*^L] = \begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 + \gamma_{xy1} \\ w_2 \\ \psi_2 + \gamma_{xy2} \end{bmatrix}$$



$(12aL)w_1 + (6aL^2)\psi_1 - (12aL)w_2 + (6aL^2)\psi_2 + (12aL^2 + b)\gamma_0 = 0 \Rightarrow$  relazione lineare  
 in  $\gamma_0 \Rightarrow$  posso ricavare  $\gamma_0$ :  

$$\gamma_0 = \frac{1}{12aL^2 + b} [-(12aL)w_1 - (6aL^2)\psi_1 + (12aL)w_2 - (6aL^2)\psi_2]$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2c & -c & 2c & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{u}_8^L] = [T][\bar{u}^L]$$

$c = 6aL / (12aL^2 + b)$

$[T] \equiv$  MATRICE DI TRASFORMAZIONE  $(\gamma)$

è una matrice di riduzione (mi fa passare dalle spostamenti componenti di  $\gamma$  a quelli non componenti di  $\gamma$ )

L'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE PUO' ESSERE DESCRITTA ALLORA NELLA FORMA

$$U = \frac{1}{2} [\bar{u}^L]^T [T]^T [K_8] [T] [\bar{u}^L] = \frac{1}{2} [\bar{u}^L]^T [k] [\bar{u}^L]$$

$[k]$

$$[k] = \left( \frac{a}{1+\epsilon} \right) \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4+\epsilon)L^2 & -6L & (2-\epsilon)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\epsilon)L^2 & -6L & (4+\epsilon)L^2 \end{bmatrix}$$

$\epsilon = \frac{12FL}{KAAL^2} \rightarrow$  rigidezza flessionale / rigidezza a taglio

questa  $[K]$  è condensata

Ho effettuato l'operazione di condensazione statica della matrice

a partire di  $EJ$

$L^2$  diventa molto grande  $\rightarrow$  trave lunga (metri)

OSS: QUANDO LA TRAVE DIVENTA SOTTILE ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) LA MATRICE TENDE ALLA MATRICE "CONVENZIONALE" della trave di Euler-Bernoulli.

OSSERVAZIONE

NELLA DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA ALLA TIMOSHENKO SI ASSUME CHE FORZE E MOMENTI SIANO APPLICATI SOLO AI NODI. QUINDI NON RISULTA HO FORZE "DISCRETE" ASSOCIATE AL GRADO DI LIBERTA'  $\gamma_0$ . QUESTO NON E' GENERALMENTE IL CASO DI CARICHI DISTRIBUITI APPLICATI ALL'ELEMENTO. SI PUO' FAR VEDERE CHE TALE FORZA E' NULLA ~~MA~~ PER ALCUNI CASI PARTI COLARI DI CARICHI DISTRIBUITI I QUALI POSSONO ESSERE STUDIATI NELLA FORMA "CLASSICA" NELL'ELEMENTO TRAVE, CIOE' RICONDOTTI A FORZE (F, M) APPLICATE NEI NODI.

Qui abbiamo formulato la teoria della trave di Timoshenko a partire da quella di Euler-Bernoulli. ~~Per questo~~  $(F_1, M_1, F_2, M_2) \neq 0$ . Il termine associato a  $\gamma_0$  abbiamo condensato.



Supponiamo di risolvere in modo **ESATTO NUMERICAMENTE** ma la matrice  $[k_b]$  che  $[K_t]$ :

$[k_b] = \frac{EH^3b}{12L}$ 

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 INTEGRAZIONE ESATTA

$[k_t] = \frac{k_h b a}{L}$ 

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$
 INTEGRAZIONE ESATTA

E' POSSIBILE RICAIVARE LA MATRICE DI RIGIDENZA  $[k]$  DELL'ELEMENTO

$[k] = [k_b] + [k_t]$ 
 di membr (incastriati da una parte e libera dall'altra)

ANALIZZANDO ORA IL CASO CON  $[u^L]^T = [u_2 \ \psi_2]$ , LA MATRICE  $[k]$  ASSOCIATA RISULTA

(componenti le condiz. vincolari)

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{KAG}{L} & -\frac{KAG}{2} \\ -\frac{KAG}{2} & \frac{EJ}{L} + \frac{KAGL}{3} \end{bmatrix}$$

necessità di non procedere all'integrazione esatta (c'è un teorema che mi garantisce che anche se non integro esattamente, ma procedo in un certo modo  $\Rightarrow$  ho convergenza) dei risultati.

il bloccaggio a Taylor

DA CUI SEGUE LA MATRICE DI FLESSIBILITA'

$$[\varphi] = [k]^{-1} = \frac{E}{E+1} \begin{bmatrix} \frac{L}{KAG} + \frac{L^3}{3EJ} & \frac{L^2}{2EJ} \\ \frac{L^2}{2EJ} & \frac{L}{EJ} \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{12EJ}{KAGL^2}$$

(ESATTA)

L diventa molto lunga (quindi molto flessibile)

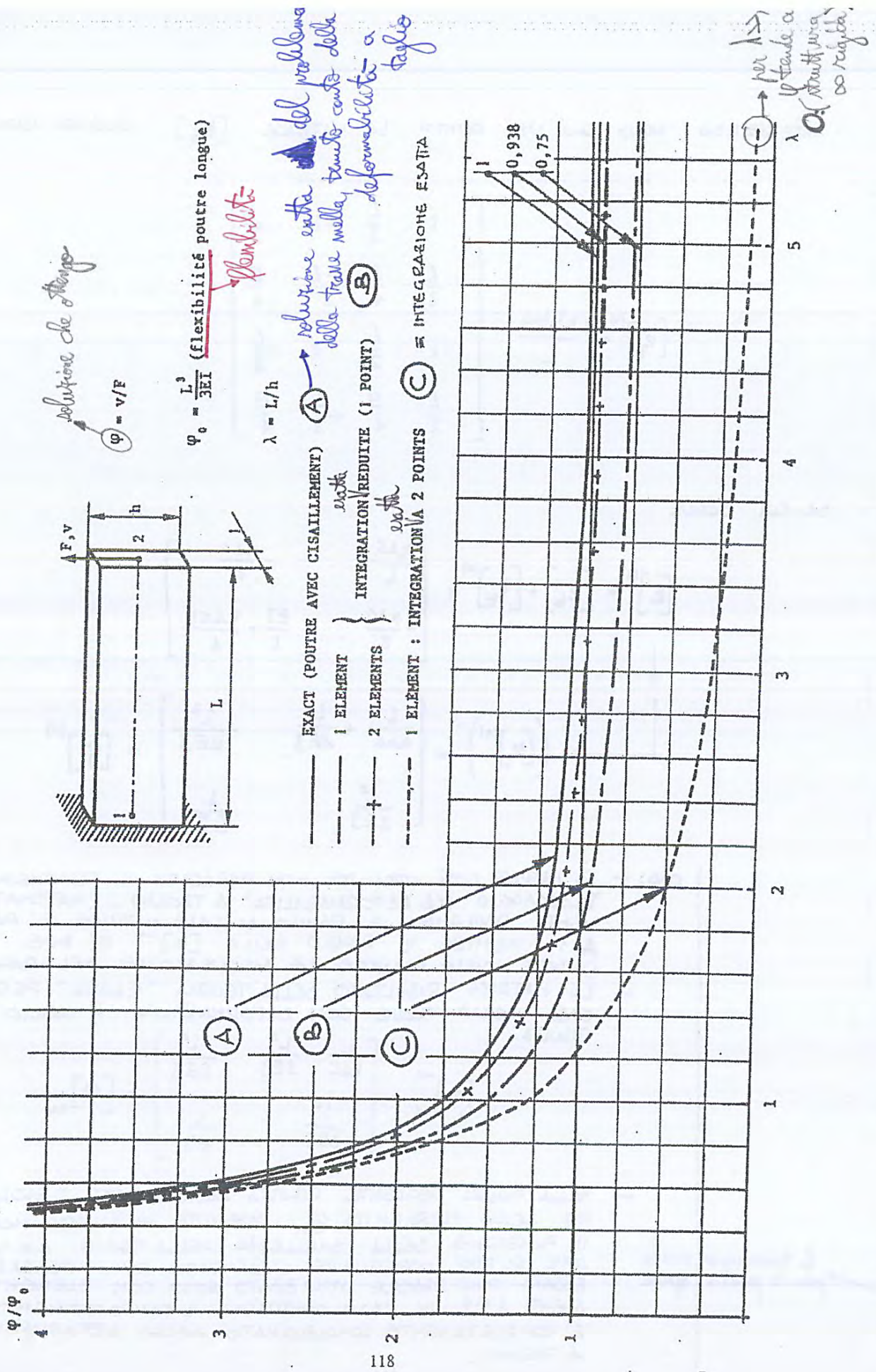
**OSS:** - ATTENDERE DI  $E \rightarrow 0$  (CIOE' LA TRAVE E' UNA TRAVE SVELLA) LA MATRICE DI FLESSIBILITA' TENDE A ZERO. COSA NON CORRETTA: IL COMPORTAMENTO DELL'ELEMENTO CONDIZIONATO DALLA DEFORMABILITA' A TAGLIO E' COMPLETAMENTE OCCORRE INTEGRARE LA  $[k_t]$  IN MODO ESATTO E CIOE' SOLO SU UN PUNTO -

"SHEAR LOCKING"

Decidi quando sei fuori dalla teoria tecnica di Euler-Bernoulli, devi fare alcune attenzioni la strada da uso per derivare quell'elemento. C'è ricorda della strada aveva risultati diversi. Nel primo caso (prima ipotesi) questo vuol dire che nella realtà l'integrazione esatta non funziona.

quanto succede perché abbiamo voluto integrare ESATTAMENTE? Rigidità  $\infty$  (la trave non si deforma più, è un ammasso!) questo vuol dire che nella realtà l'integrazione esatta non funziona (funzione approssimante)







LEZ. 10-03-2024

# VINCOLI GENERALIZZATI

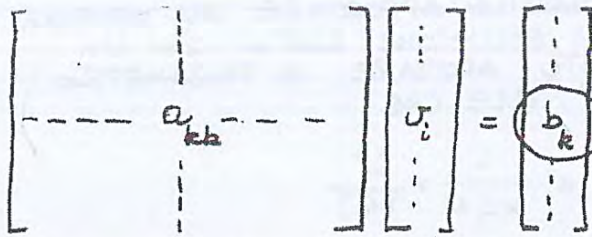
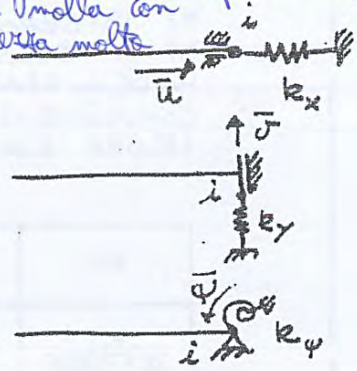
## A) I VINCOLI ELASTICI

Il primo tipo di vincoli generalizzati che vediamo si supponga il nodo  $i$  vincolato mediante un vincolo elastico (molla) come rappresentato in figura.

con riferimento alla equazione di equilibrio nella direzione del vincolo relativa al nodo  $i$  basta considerare che il termine forzante (carichi esterni agenti sul nodo) deve essere incrementato del contributo indotto dal cedimento del vincolo

ipotizzando il caso a fianco, supposta "k" la riga corrispondente allo spostamento  $\bar{u}$  del nodo "i"

Abbiamo visto che per un nodo vincolato mettiamo un termine sulla diagonale principale della matrice di rigidità molto grande. Cio' equivale a pensare di mettere una molla con una rigidità molto grande.



OCCORRE MODIFICARE QUESTO TERMINE  $\bar{F} = b_k - k_y \bar{u}$

NE CONSEGUO CHE IL TUTTO E' EQUIVALENTE AD INCREMENTARE IL TERMINE DI RIGIDITA' DELLA QUANTITA'  $k_y$

$$a_{kk} \rightarrow a_{kk} + k_y$$

E OVVIAMENTE, CONSIDERARE  $\bar{v}_i \text{ NOTO} = \bar{u}$

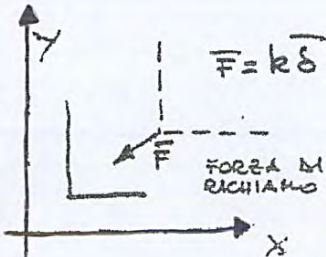
Il vincolo elastico quindi, si tratta aggiungendo sulla diag. principale la rigidità di molla e modificando il termine noto andando a togliere il contributo della forza di molla

questo è il termine che andrà nella matrice di rigidità e che andrà a fare sì che il termine nella diagonale principale diventi molto grande

SE SUL NODO SONO APPLICATI PIU' VINCOLI CEDevoli ELASTICAMENTE, E' SUFFICIENTE OPERARE COME INDICATO IN TUTTE LE EQUAZIONI INTERESSATE -

SPOSTAMENTO  $\bar{\delta}$  CON VINCOLO COME INCLINATO

$$\bar{F}_x = \bar{F} \cos \alpha = k \bar{u}$$

$$\bar{F}_y = \bar{F} \sin \alpha = k \bar{v}$$


Componenti secondo il s.d.r. globale rispetto a prima. Vediamo coinvolte 2 righe (1 per  $\bar{u}$  e l'altra per  $\bar{v}$ ), non più solo



IN ALTRI TERMINI... LE DUE EQUAZIONI DEL PROBLEMA

$$(J/\bar{F}_{x_i}) \dots a_{Ji} u_i + \dots + a_{Jk} \sigma_i + \dots = b_J$$

$$(k/\bar{F}_{y_i}) \dots a_{ki} u_i + \dots + a_{kk} \sigma_i + \dots = b_k$$

Supponiamo che  $J$  e  $k$  siano le righe intermedie delle 2 condizioni di prima:

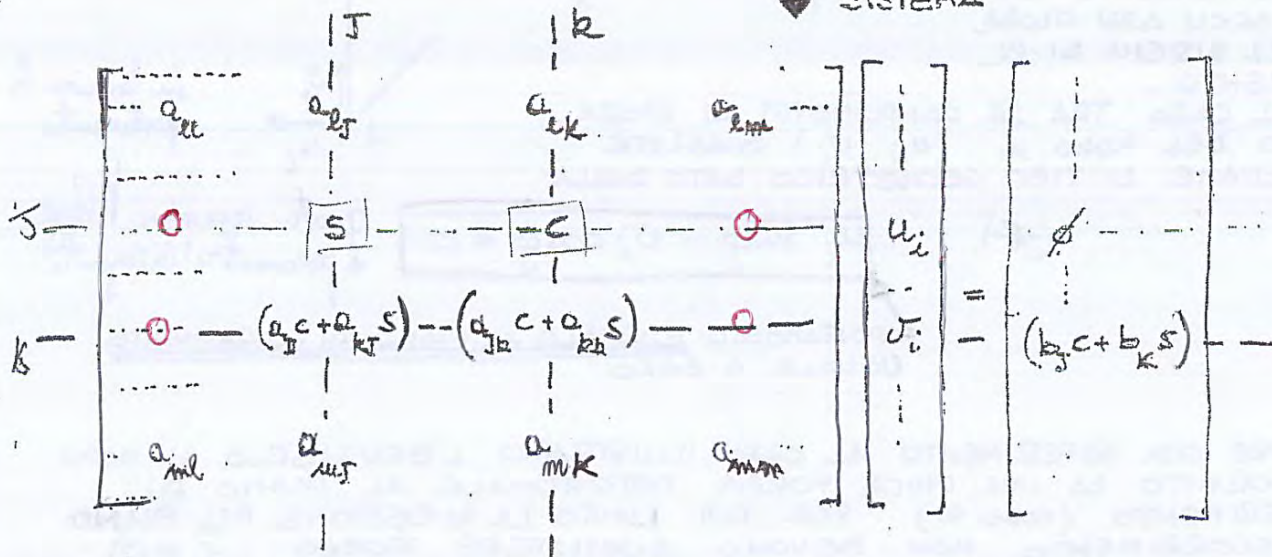
facendo una combinazione lineare di termini noti e parametri incogniti

SI TRASFORMANO NELLE SEGUENTI:

$$(J/\bar{F}_{x_i}) \quad \phi + \text{si}ng u_i + \phi - \text{co}sp \sigma_i + \phi = 0 \quad \begin{matrix} c = \text{co}sp \\ s = \text{si}ng \end{matrix}$$

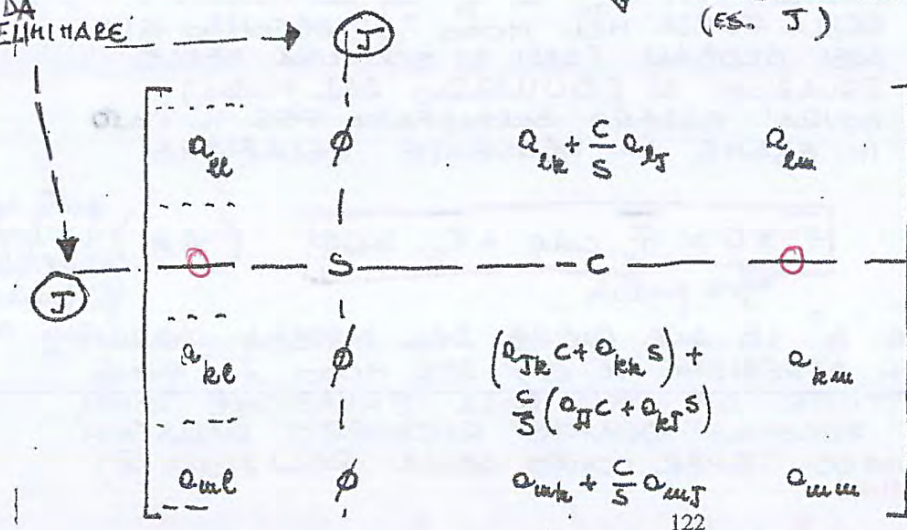
$$(k/\bar{F}_{y_i}) \quad c + 2s \Rightarrow \dots (a_{Ji}c + a_{ki}s) u_i + \dots + (a_{Jk}c + a_{kk}s) \sigma_i + \dots = (b_Jc + b_k s)$$

riordiniamo il SISTEMA



DA ELIMINARE

SAPEMO CHE  $u_i = \frac{\text{co}sp}{\text{si}ng} \sigma_i$  (ES. J)



IL SISTEMA PRECEDENTE SI RIDUCE A QUELLO DI FIG. CO RIPORTATO CHE OCCORRERA' ELIMINARE LA RIGA E LA COLONNA "J" POICHE' L'INCOGNITA RELATIVA E' STATA ESPRESSA IN TERMINI DI  $\sigma_i$





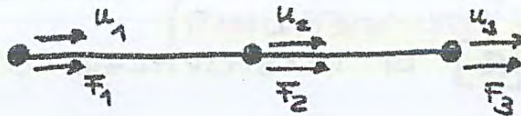


CONTEMPORANEAMENTE IL VETTORE  $[F']^q = [R]^T [F]$  RISULTA:

$$- F'_i = F_i / \alpha_i \quad ; \quad F'_j = F_j - \frac{\alpha_j}{\alpha_i} F_i \quad ; \quad F'_k = F_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} F_i$$

- GLI ALTRI TERMINI DI  $[F']^q$  SONO IDENTICI AI TERMINI CORRISPONDENTI DI  $[F]^q$ .

ESEMPIO:



$$[F]^q = [k] [u]^q$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \phi \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ \phi & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

CONDIZIONE  $u_1 - u_3 = u'_3$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_3 u_3 = u'_3$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_3 = -1$$

UTILIZZANDO QUESTA TRASFORMAZIONE LA MATRICE  $[R]$  RISULTA

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi \\ \phi & 1 & \phi \\ 1 & \phi & -1 \end{bmatrix}$$

RIGA "i"

$$\begin{bmatrix} F_1 + F_3 \\ F_2 \\ -F_3 \end{bmatrix} = [F']^q$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = [u']^q$$

$$[k'] = \begin{bmatrix} k_{11} + k_{33} & k_{12} + k_{32} & -k_{33} \\ k_{21} + k_{23} & k_{22} & -k_{23} \\ -k_{33} & -k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

OSS: LA RELAZIONE TRA LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO:

$$\alpha_i u_i + \alpha_j u_j + \alpha_k u_k + \dots = u'_i \quad (\neq)$$

POO' MODIFICARE LA STRUTTURA DELLA MATRICE  $[k]$  - PER EVITARE DI RISTRUTTURARE  $[k]$ , OCCORRE CONSIDERARE IL LEGAME (X) GIÀ IN FASE DI ASSEMBLAGGIO DELLA MATRICE -



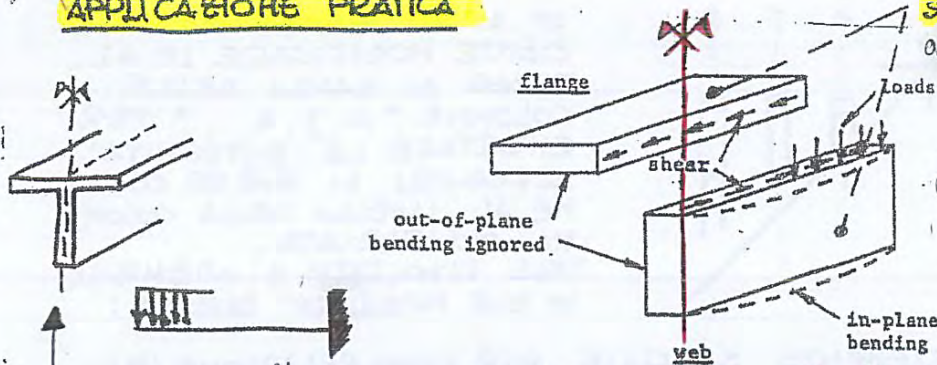
LEZ. 11-03-2014 (vedere cosa scritto negli appunti)

passo da 3D a 2D

**APPLICAZIONE PRATICA**

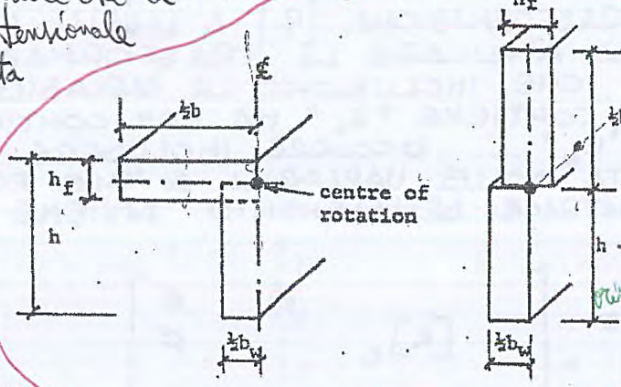
**STATO PIANO DI TENSIONE** (per  $l' \gg$  anima è piatto, per la flangia è dato il modesto spessore)

Cio' che mi lega da un punto di vista tensoriale flangia e anima sono le forze di taglio scambiati tra flangia e anima.



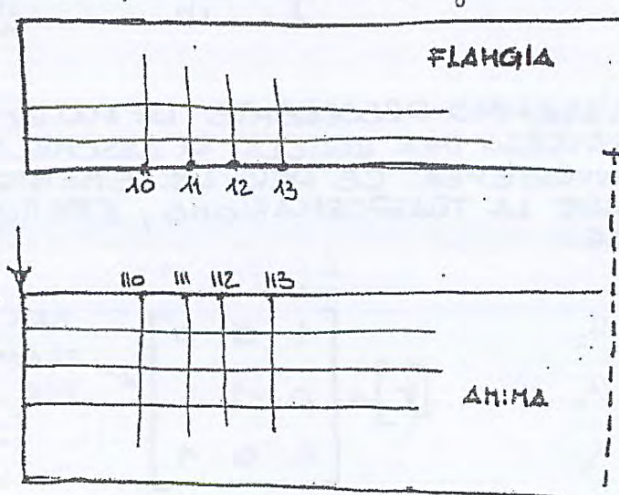
Se gli spessori sono **molto piccoli** (spessore soletta  $\ll$  altezza trave acciaio)  $\Rightarrow$  è ragionevole pensare che la variazione dello stato tensionale nello spessore della soletta sia così piccola da poterlo considerare costante su tutto lo spessore della soletta. Inoltre è certamente costante la tensione nell'anima a ciascun altezza di fibra (cioè presa una fibra, su quella fibra lungo tutta la larghezza della mia anima la tensione è costante; ovviamente varia nell'altezza).

**2) TRAVE DA PONTE:** Nella realtà l'anima è quella che si prende il carico e poi, grazie al sistema di tensioni trasversali, trasferisce le tensioni alla flangia.



lungo la f. bna f la distribuzione delle tensioni non è uniforme sono considerabili distinti, con il cui non posso usare le teorie della trave il cui bordo superiore dell'anima coincide con gli spessori orizzontali del bordo della mia flangia. **impone:** che i NOBI di due strutture diverse abbiano lo stesso spostamento.

**BORDO DI CONTATTO**



La flangia ha una sua mesh, l'anima ha la sua mesh  $\Rightarrow$  ci saranno mesh distinte, ma **CONDIZIONI DI VINCOLO GENERALIZZATO:** che gli ANIMA SONO SEPARATE CON UN VINCOLO GENERALIZZATO LUNGO BORDO DI CONTATTO  $\alpha$ .

nella realtà ci sarò la costruz. di una particolare matrice [R]

questo è un utilizzo del **VINCOLO GENERALIZZATO** (vincolo la due strutture attraverso una condizione cinematica di questo tipo).

**UGUAGLIANZA SPOSTAMENTO ORIZZONTALE**

CHIUDIAMO QUI LA PARTE RELATIVA AI VINCOLI GENERALIZZATI



LEZ. 11-03-2014

Consideriamo un problema 3D (telajo nella parete)

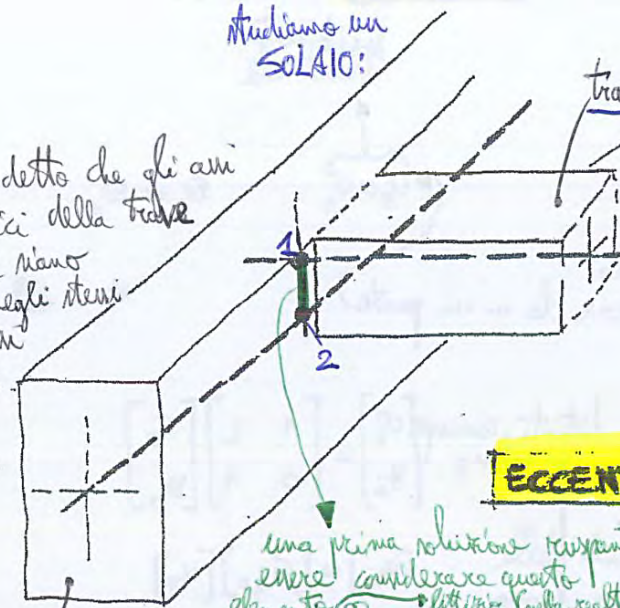
IL PROBLEMA DI ELEMENTI TRA DI LORO NON IN ASSE

Studiamo un SOLAIO:

Non è detto che gli assi baricentrici della trave principale siano contenuti negli stessi piani degli assi baricentrici della trave secondaria.

trave secondaria (dimensioni diverse da quelle della trave principale)

asse longitudinale non posto nello stesso piano di quello dell'asse longitudinale della trave principale

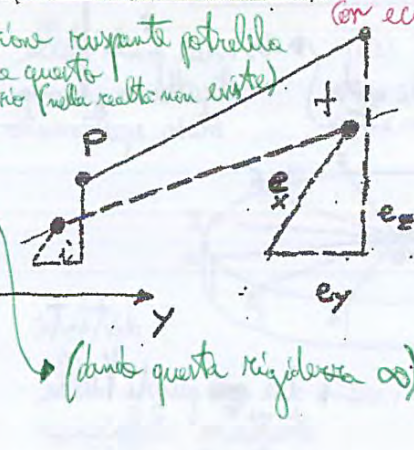


**ECCENTRICITA'**

i 2 modi sono correlati con eccentricità  $e_x, e_y, e_z$ .

perché nella realtà è un link rigido

una prima soluzione risaputa potrebbe essere considerare questo elemento a rigido (flessionale e assiale), ma rischiamo di produrre un malcondizionamento del sistema. Un altro metodo è quello di gestire le eccentricità.

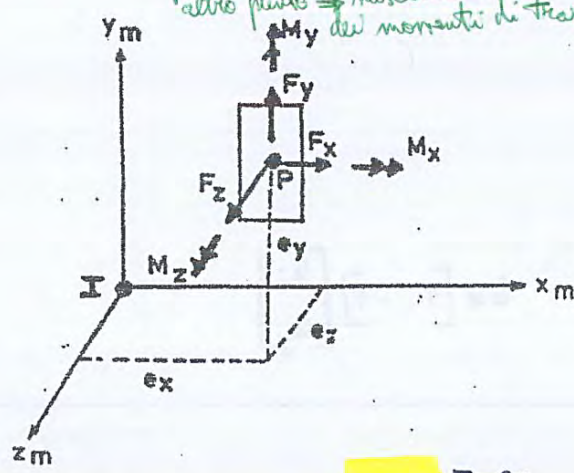


FORZE AL NODO a cui mi voglio riferire (es: 2)

$$\{F\}_I = [e] \{F\}_P$$

- $F_x$
- $F_y$
- $F_z$
- $M_x$
- $M_y$
- $M_z$

non è niente altro che esprimere le forze con riferimento ad un altro punto  $\rightarrow$  necessitano dei momenti di trasposizione



MATRICE DELLE ECCENTRICITA'

FORZE ESTREMITA' DELLA TRAVE

$$[e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_z & e_y & 1 & 0 & 0 \\ e_z & 0 & -e_x & 0 & 1 & 0 \\ -e_y & e_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OSS: FORZE ED ECCENTRICITA' SONO RIFERITE ALLO STESSO SISTEMA







$\frac{EA}{l}$	$\phi$	$-\frac{EA}{l} e_x$	$-\frac{EA}{l}$	$\phi$	$-\frac{EA}{l} e_{x_2}$
	$\frac{12EI}{l^3}$	$\frac{12EI}{l^3} e_x + \frac{6EI}{l^2}$	$\phi$	$-\frac{12EI}{l^3}$	$\frac{12EI}{l^3} e_{x_2} + \frac{6EI}{l^2}$
		$\frac{EA}{l} e_x^2 + \frac{12EI}{l^3} e_x + \frac{6EI}{l^2}$	$\frac{EA}{l} e_{x_1}$	$-\frac{12EI}{l^3} e_{x_1} - \frac{6EI}{l^2}$	$\frac{EA}{l} e_x + \frac{12EI}{l^3} e_x + \frac{6EI}{l^2}$
		$+\frac{12EI}{l^2} e_{x_1} + \frac{6EI}{l}$	$-\frac{EA}{l}$	$\phi$	$\frac{EA}{l} e_{x_2}$
				$-\frac{12EI}{l^3}$	$-\frac{12EI}{l^3} e_{x_2} - \frac{6EI}{l^2}$
					$\frac{EA}{l} e_x^2 + \frac{12EI}{l^3} e_x + \frac{6EI}{l^2}$
					$+\frac{12EI}{l^2} e_{x_2} + \frac{6EI}{l}$

**R**

SIMM.

DI RIGIDITÀ che tiene conto delle eccentricità  $(\int \eta \eta^T dx)$

**MATRICE RIFERITA AL SISTEMA LOCALE**

(SI È TRASCURATA LA DEFORMABILITÀ A TAGLIO)

Questo era il caso di una trave con eccentricità non lungo x che y



esattamente come visto prima, solo ridotto alla sola eccentricità assiale

**SOLLECITAZIONI ALL'ESTREMITA' FLESSIBILE DELLA TRAVE**

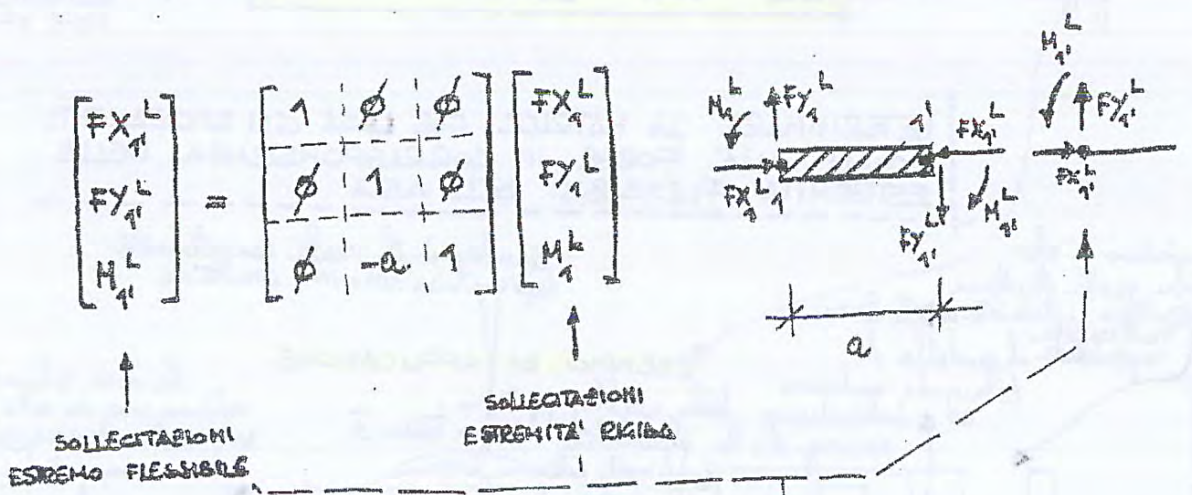


$$[F_1] = \begin{bmatrix} FX_1^L \\ FY_1^L \\ M_1^L \end{bmatrix}$$

SOLLECITAZIONI ESTREMITA' RIGIDA

$$[F_{1'}] = \begin{bmatrix} FX_{1'}^L \\ FY_{1'}^L \\ M_{1'}^L \end{bmatrix}$$

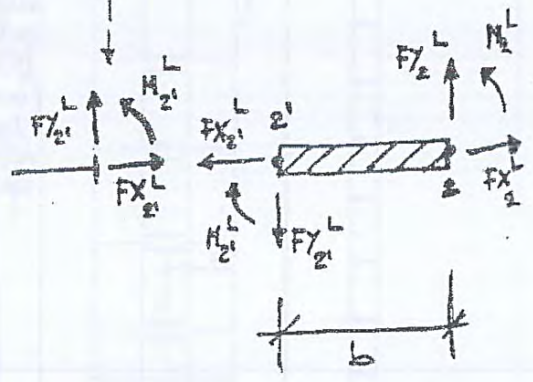
SOLLECITAZIONI ESTREMITA' FLESSIBILE



SOLLECITAZIONI ESTREMO FLESSIBILE

SOLLECITAZIONI ESTREMITA' RIGIDA

$$[F_2] = \begin{bmatrix} FX_2^L \\ FY_2^L \\ M_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi \\ \phi & 1 & \phi \\ \phi & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FX_2^L \\ FY_2^L \\ M_2^L \end{bmatrix}$$





↳ lasciamo perdere questa pagina: solo un po' di bricolage algebrico!  
 IPOTIZZANDO LA TRAVE INDEFORMABILE A TAGLIO ( $kA \rightarrow \infty$ )

$$\beta = \frac{6EJ}{l^2} \frac{1}{G(kA)} = \phi$$



$$\alpha = \frac{1}{2\beta+1} = 1 \quad \lambda_1 = 1 - \beta = 1 \quad \lambda_2 = 1 + \frac{\beta}{2} = 1$$

I TERMINI DELLA MATRICE PRECEDENTE (CONSIDERATA SOLO NELLA PARTE TRIANGOLARE SUPERIORE) RISULTANO:

$$k(2,2) = k(5,5) = -k(2,5) = \frac{12EJ}{l^3} \alpha = \frac{12EJ}{l^3}$$

$$k(2,3) = -k(3,5) = \frac{6EJ}{l^2} \alpha A_1 = \frac{6EJ}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l}\right) = \frac{12EJ}{l^3} a + \frac{6EJ}{l^2}$$

$$k(2,6) = -k(5,6) = \frac{6EJ}{l^2} \alpha B_1 = \frac{6EJ}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l}\right) = \frac{12EJ}{l^3} b + \frac{6EJ}{l^2}$$

$$k(3,3) = \frac{4EJ}{l} \alpha (A_2 + \lambda_2) = \frac{4EJ}{l} \left[ \frac{3a}{l} \left(1 + \frac{a}{l}\right) + 1 \right] = \frac{12EJ}{l^2} a + \frac{12EJ}{l^3} a^2 + \frac{4EJ}{l}$$

$$k(3,6) = \frac{2EJ}{l} \alpha (C + \lambda_1) = \frac{2EJ}{l} \left[ \frac{3a}{l} \left(1 + \frac{b}{l}\right) + \frac{3b}{l} \left(1 + \frac{a}{l}\right) \right] = \frac{6EJ}{l^2} (a+b) + \frac{12EJ}{l^3} ab + \frac{2EJ}{l}$$

$$k(6,6) = \frac{4EJ}{l} \alpha (B_2 + \lambda_2) = \frac{4EJ}{l} \left[ \frac{3b}{l} \left(1 + \frac{b}{l}\right) + 1 \right] = \frac{12EJ}{l^2} b + \frac{12EJ}{l^3} b^2 + \frac{4EJ}{l}$$

OSS!

I COEFFICIENTI COSÌ OTTENUTI RISULTANO COINCIDENTI CON QUELLI DELLA MATRICE RICAVATI CON IL METODO GENERALE IPOTIZZANDO

$$\left[ \begin{array}{cc|c} e_{x_1} = a & e_{x_2} = b & \\ \hline e_{x_1} = \phi & e_{x_2} = \phi & \checkmark \end{array} \right]$$



LEZ. 11-03-2014

prima di leggere questa pagina vedere gli appunti LEZ. 11-03-2014

## RILASCIO DEI GRADI DI LIBERTA' ALLE ESTREMITA' DELL'ASTA

(scambiando righe con righe e colonne con colonne)  
 SI RIORGANIZZA LA RELAZIONE NEL SISTEMA LOCALE (INCAS/INCAS)

$$[F^L] = [K] [u^L]$$

IN MODO DA SEPARARE I GRADI DI LIBERTA' RILASCIATI DA QUELLI LASCIATI VINCOLATI

(\*)

$$\begin{bmatrix} [F^V] \\ [F^R] \end{bmatrix}^L = \begin{bmatrix} [k_{VV}] & [k_{VR}] \\ [k_{RV}] & [k_{RR}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u^V] \\ [u^R] \end{bmatrix}^L$$

← SPOSTAMENTI GRADI DI LIBERTA' VINCOLATI  
 ← SPOSTAMENTI GRADI DI LIBERTA' RILASCIATI (che noi vogliamo rilasciare)  
 ↑ FORZE AGENTI SUI GRADI DI LIBERTA' RILASCIATI  
 ↑ FORZE AGENTI SUI GRADI DI LIBERTA' VINCOLATI  
 $[F^R]^L = [\phi]$  *certo! se metto una cerniera e lascio girare (rilascio la rotazione) → non ho più momento!*

DALLA SECONDA EQUAZIONE DI (\*)

2<sup>a</sup> parte del sistema

$$[F^R]^L = [\phi] = [k_{RV}] [u^V]^L + [k_{RR}] [u^R]^L$$

SI RICAVA  $[u^R]^L$

$$[u^R]^L = -[k_{RR}]^{-1} [k_{RV}] [u^V]^L = -[k_{RR}]^{-1} [k_{VR}]^T [u^V]^L$$

PER SIMM.

$$[k_{RV}] = [k_{VR}]^T$$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE  $[G_0]$

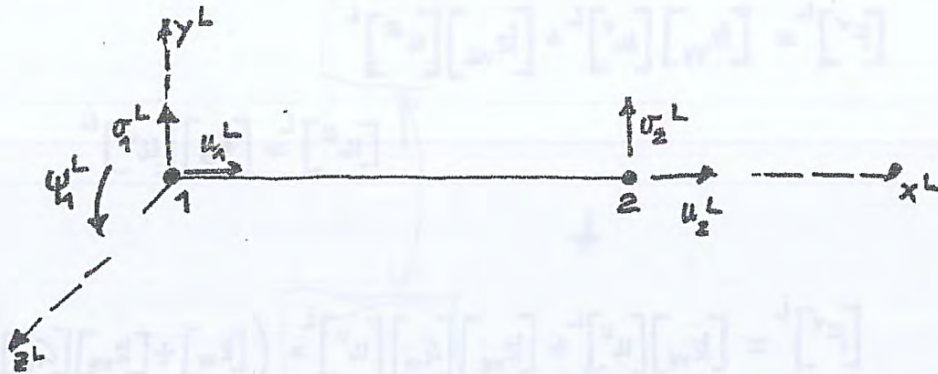
LEGAME TRA GRADI DI LIBERTA' RILASCIATI E GRADI DI LIBERTA' VINCOLATI

$$[u^R]^L = [G_0] [u^V]^L$$



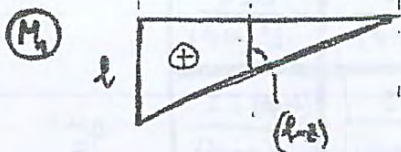
$(\theta = 0)$

TRASCURANDO I CONTRIBUTI DI DEFORMABILITÀ A TAGLIO, LA MATR. DI RIGIDEZZA PRIMA CALCOLATA RISULTA:



$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{L^3} & \frac{3EJ}{L^2} & 0 & -\frac{3EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{L^2} & \frac{3EJ}{L} & 0 & -\frac{3EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{L^3} & -\frac{3EJ}{L^2} & 0 & \frac{3EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DA QUI TORNARE AGLI APPUNTI LEZ. 11-03-2014



SPOSTAMENTO IMPOSTO ( $\delta$ ) DEL VIHCOLO

$$PLV \rightarrow 1 \cdot \delta = \int_0^l H_1 \cdot \frac{M}{EJ} dz = \int_0^l H_1 \frac{(xH_1)}{EJ}$$

$$X = \frac{\delta EJ}{\int_0^l H_1^2 dz} = \frac{\delta \cdot EJ}{\int_0^l (l-z)^2 dz} = \frac{3EJ}{l^3}$$



DALLA RELAZIONE

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = \phi \rightarrow X_1 = - \frac{\delta_{12} X_2}{\delta_{11}} \quad (*)$$

IL VALORE DI  $X_1$  COSI' OTTENUTO, SOSTITUITO NELLA

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = \phi$$

CONSENTE DI RICAVARE  $X_2$  NOTO  $\phi$ :

$$\delta_{21} \left( - \frac{\delta_{12} X_2}{\delta_{11}} \right) + \delta_{22} X_2 = \phi \leftarrow \text{SAPENDO CHE PER TEOREMA DI BETTI } \delta_{21} = \delta_{12}$$

$$X_2 = \phi \cdot \frac{\delta_{11}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2}$$

COEFFICIENTE DI RIGIDENZA ALLA FLESSIONE: MOMENTO NEL NODO PER UNA ROTAZIONE UNITARIA NELLO STESSO NODO -

$k_2$

NOTO  $X_2$ , E' POSSIBILE RICAVARE  $X_1$  DALLA (\*) SOPRA SCRITTA

$$X_1 = - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \left[ \frac{\delta_{11}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} \right] \phi = \phi \cdot \left[ - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} \right]$$

TERMINI DI RIGIDENZA: FORZE (TAGLIANTE) CHE NASCE AL NODO PER UNA ROTAZIONE UNITARIA NELLO STESSO NODO

$k_1$

SCRIVENDO PER LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE VERTICALE ED ALLA ROTAZIONE SI RICAVANO  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$  (termini di rigidezza indiretta: cosa nasce nell'altro nodo quando si applica un'unità al nodo opposto).

$$+ \uparrow \quad \bar{X}_1 + X_1 = 0 \text{ impingendo } \phi \text{ unitario al nodo opposto.}$$

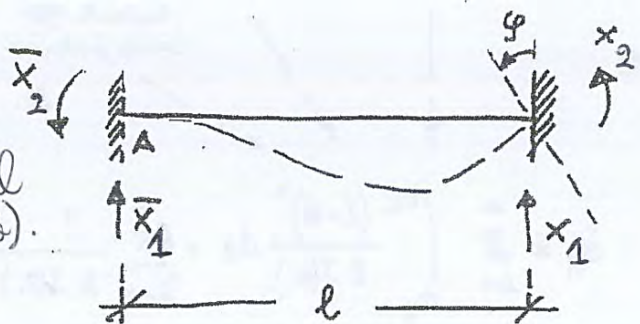
$$\bar{X}_1 = -X_1 = -k_2 \phi$$

$$+ \curvearrowright \quad \bar{X}_2 + X_2 + X_2 \cdot l = 0$$

$$\bar{X}_2 = -k_1 \phi - k_2 \phi l = -(k_1 + k_2 l) \phi$$

146

RELAZIONI CHE LEGANO "FORZE" AD UN NODO PER UNA ROTAZIONE UNITARIA ALL'ALTRO NODO -



E dunque abbiamo calcolato la matrice di rigidità.







I TERMINI DELLA MATRICE DI RIGIDENZA RISULTANO COSÌ DEFINITI :

$$- k_{11} = \frac{f_1 f_6 - f_3^2}{\Delta}$$

$$- k_{2,1} = \frac{-f_1 f_5 + f_2 f_3}{\Delta} \quad k_{22} = \frac{f_1 f_4 - f_2^2}{\Delta}$$

$$- k_{3,2} = \frac{\bar{f}_1 \bar{f}_4 - \bar{f}_2^2}{\bar{\Delta}}$$

$$- k_{4,3} = \frac{\bar{f}_2 \bar{f}_5 - \bar{f}_3 \bar{f}_4}{\bar{\Delta}} \quad k_{44} = \frac{\bar{f}_4 \bar{f}_6 - \bar{f}_5^2}{\bar{\Delta}}$$

$$- k_{5,3} = \frac{-\bar{f}_1 \bar{f}_5 + \bar{f}_2 \bar{f}_3}{\bar{\Delta}} \quad k_{5,4} = \frac{-\bar{f}_2 \bar{f}_6 + \bar{f}_3 \bar{f}_5}{\bar{\Delta}} \quad k_{5,5} = \frac{\bar{f}_1 \bar{f}_6 - \bar{f}_3^2}{\bar{\Delta}}$$

$$- k_{6,1} = \frac{-f_2 f_6 + f_3 f_5}{\Delta} \quad k_{6,2} = \frac{f_2 f_5 - f_3 f_4}{\Delta} \quad k_{6,6} = \frac{f_1 f_6 - f_5^2}{\Delta}$$

$$- k_{7,1} = -k_{1,1} \quad k_{7,2} = -k_{2,1} \quad k_{7,6} = -k_{6,1} \quad k_{77} = -k_{7,1}$$

$$- k_{8,1} = -k_{2,1} \quad k_{8,2} = -k_{2,2} \quad k_{8,6} = -k_{6,2} \quad k_{8,7} = -k_{7,1} \quad k_{88} = -k_{8,2}$$

$$- k_{9,3} = -k_{3,3} - k_{4,3} R \sin \alpha - k_{5,3} R (1 - \cos \alpha) \quad k_{9,4} = -k_{4,3} - k_{4,4} R \sin \alpha - k_{5,4} R (1 - \cos \alpha)$$

$$k_{9,5} = -k_{5,3} - k_{5,4} R \sin \alpha - k_{5,5} R (1 - \cos \alpha) \quad k_{9,9} = -k_{9,3} - k_{9,4} R \sin \alpha - k_{10,5} R (1 - \cos \alpha)$$

$$- k_{10,3} = -k_{4,3} \quad k_{10,4} = -k_{4,4} \quad k_{10,5} = -k_{5,4} \quad k_{10,9} = -k_{10,3} - k_{10,4} R \sin \alpha - k_{10,5} R (1 - \cos \alpha)$$

$$- k_{11,3} = -k_{5,3} \quad k_{11,4} = -k_{5,4} \quad k_{11,5} = -k_{5,5} \quad k_{11,9} = -k_{11,3} - k_{11,4} R \sin \alpha - k_{11,5} R (1 - \cos \alpha)$$

$$k_{11,10} = k_{5,4} \quad k_{11,11} = k_{5,5}$$

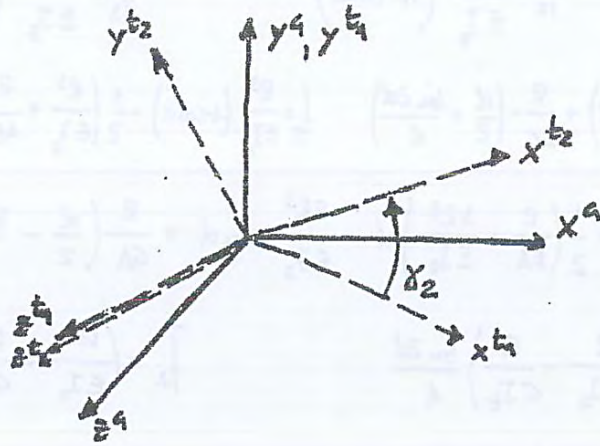
$$- k_{12,1} = -k_{6,1} - k_{1,1} R \sin \alpha - k_{2,1} R (1 - \cos \alpha) \quad k_{12,2} = -k_{6,2} - k_{2,1} R \sin \alpha - k_{7,2} R (1 - \cos \alpha)$$

$$k_{12,6} = -k_{6,6} - k_{6,1} R \sin \alpha - k_{6,2} R (1 - \cos \alpha) \quad k_{12,7} = -k_{7,6} - k_{7,1} R \sin \alpha - k_{7,2} R (1 - \cos \alpha)$$

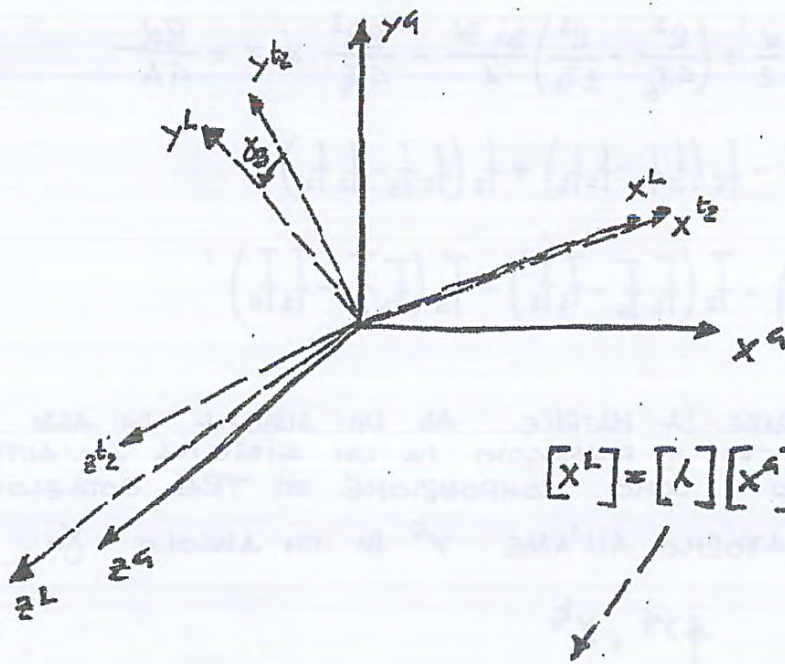
$$k_{12,8} = -k_{8,6} - k_{8,1} R \sin \alpha - k_{8,2} R (1 - \cos \alpha) \quad k_{12,12} = -k_{12,6} - k_{12,7} R \sin \alpha - k_{12,8} R (1 - \cos \alpha)$$



b) ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE  $z^1$  DI UN ANGOLO  $\gamma_2$



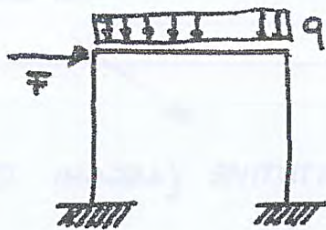
c) ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE  $x^2$  DI UN ANGOLO  $\gamma_3$



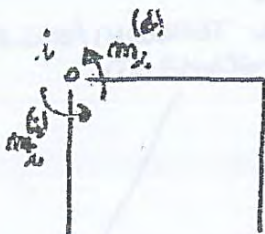
$$[X^1] = [A][X^2]$$

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 & \sin \gamma_2 & \cos \gamma_2 \sin \gamma_1 \\ -(\sin \gamma_1 \sin \gamma_3 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos \gamma_3) & \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 & (\sin \gamma_3 \cos \gamma_1 - \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos \gamma_3) \\ -(\sin \gamma_1 \cos \gamma_3 - \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3) & -\sin \gamma_3 \cos \gamma_2 & (\cos \gamma_1 \cos \gamma_3 + \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3) \end{bmatrix}$$





### METODO DELLE DEFORMAZIONI

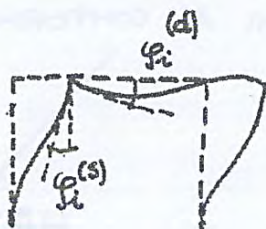


### EQUILIBRIO (IN OGNI NODO)

ES NODO  $i$  - MOMENTO FLETTENTE

$$m_i^{(s)} + m_i^{(d)} = 0$$

### METODO DELLE FORZE



### CONGRUENZA (IN OGNI NODO)

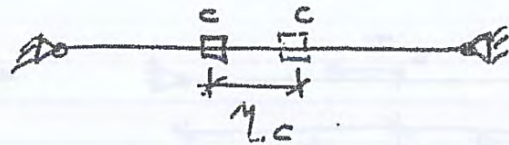
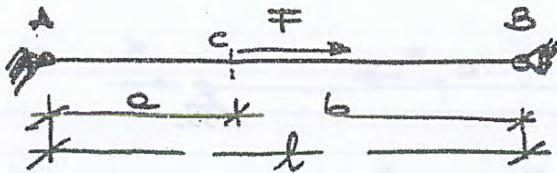
ES NODO  $i$  - ROTAZIONE  $\varphi$

$$\varphi_i^{(d)} = \varphi_i^{(s)} = \varphi_i$$

- METODO DEGLI SPOSTAMENTI :**
- SI ASSUMONO COME INCONGHITE GLI SPOSTAMENTI DI ALCUNI PUNTI DELLA STRUTTURA
  - SI COSTRUISCE UN SISTEMA DI EQUAZIONI DI EQUILIBRIO RIFERITE AI PUNTI STESSI
  - LA SOLUZIONE DEL SISTEMA FORNISCE LA SOLUZIONE CERCATA



## METODO DEGLI SPOSTAMENTI



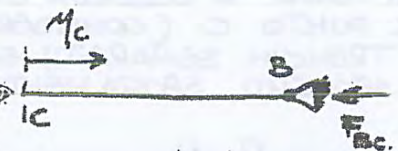
IN QUESTO CASO SI SUPPONE INCOGNITO LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO C ( $\eta_c$ ) - IN SEGUITO ALLO SPOSTAMENTO  $\eta_c$ , SI HA



$$F_{Ac} = \frac{EA}{a} \eta_c$$



MOLO OVE SI STUDIA L'EQUILIBRIO



$$F_{Bc} = \frac{EA}{b} \eta_c$$

$$F - F_{Bc} - F_{Ac} = 0$$

$$F - \frac{EA}{a} \eta_c - \frac{EA}{b} \eta_c = 0$$

$$\eta_c = \frac{F a b}{EA l}$$

$$F_{Ac} = R_A = \frac{EA}{a} \eta_c = \frac{EA}{a} \cdot \frac{F a b}{EA l} = \frac{F b}{l}$$

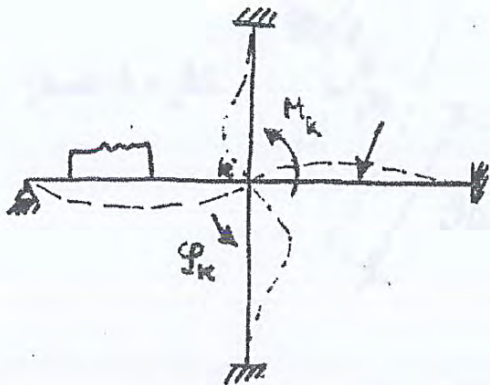
$$F_{Bc} = X = \frac{EA}{b} \eta_c = \frac{EA}{b} \frac{F a b}{EA l} = \frac{F a}{l}$$



RICAVATO LO SPOSTAMENTO INCOGNITO  $S$ , E' POSSIBILE RISALIRE ALLE SOLLECITAZIONI NELLE SINGOLE ASTE

$$N_i = R_i \sin \alpha_i; S = k_i \sin \alpha_i; \frac{F}{\sum k_i \sin^2 \alpha_i} = F \frac{R_i \sin \alpha_i}{\sum R_i \sin^2 \alpha_i}$$

ESEMPIO 2



ANALOGAMENTE A QUANTO STUDIATO IN PRECEDENZA, SI PUO' STUDIARE L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE DI UN GENERICO NODO DI UNA STRUTTURA INTELLIATA OVE CONVERGONO PIU' ASTE COLLEGATE TRA DI LORO RIGIDA MENTE.

INDICATO CON:

$M_k$  = MOMENTO ESTERNO APPLICATO SUL NODO IN ESAME.

$\varphi_{JK}$  = ROTAZIONE CHE SUBISCE IL NODO IN ESAME. SI PUO' OSSERVARE CHE PER LA CONTINUITA' LE ROTAZIONI DI TUTTE LE ESTREMITA' DELLE ASTE CHE CONVERGONO NEL NODO SONO TRA DI LORO UGUALI E VALGONO  $\varphi_k$



$R_{ik}$  = RIGIDezza DELL'ASTA (i) RELATIVAMENTE AL NODO IN ESAME: (MOMENTO NEL NODO PER UNA ROTAZIONE UNITARIA DEL NODO STESSO)



E' POSSIBILE SCRIVERE L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE NEL NOD

$$M_k = \sum_i (\varphi_k R_{ik}) = \varphi_k \sum_i R_{ik} \Rightarrow \varphi_k = \frac{M_k}{\sum_i R_{ik}}$$

SOMMATORIA ESTESA A TUTTE LE ASTE CHE CONVERGONO NEL NODO

MOMENTO NEL NODO RELATIVO ALL'ASTA (i)

E' COSTANTE PER TUTTE LE ASTE

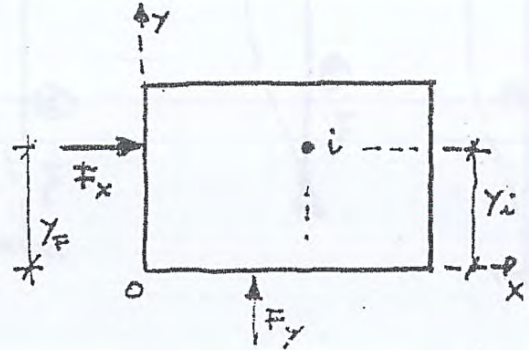
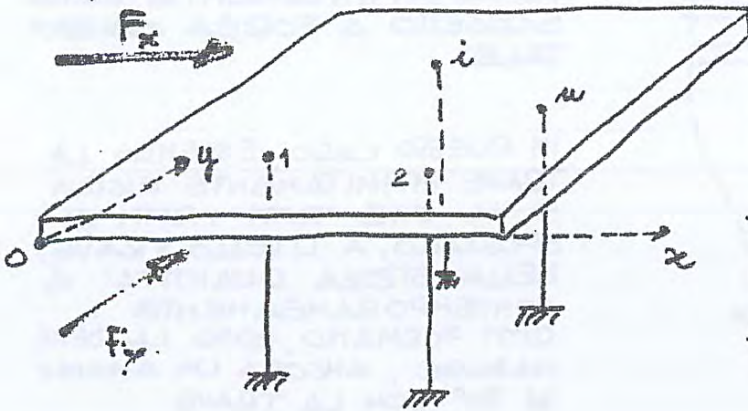
MOMENTO RISULTA PROZIONALE ALLA RIGIDZZA DELL'ASTA

RIGIDZZA TOTALE ALLA ROTAZIONE DEL NODO

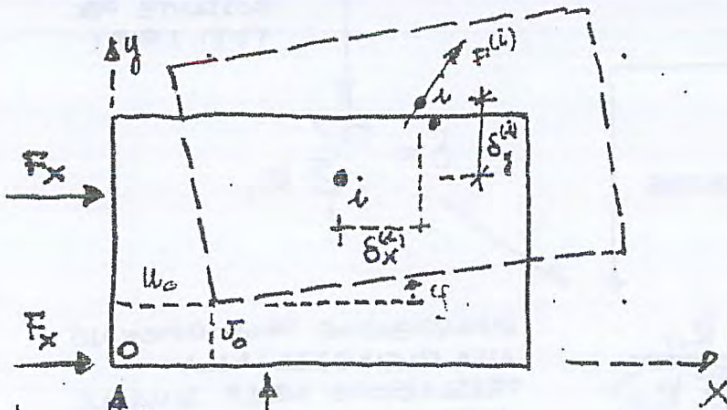
$$M_{ik} = \varphi_k R_{ik} = M_k \frac{R_{ik}}{\sum_{i=1}^n R_{ik}}$$



## ESEMPIO 4



STRUTTURA FORMATA DA UNA COPERTURA INFINITAMENTE RIGIDA (SIA FLESSIONALMENTE CHE ASSIALMENTE) SORRETTA DA  $m$  ELEMENTI VERTICALI - LA COPERTURA E' SOLLECITATA ORIZZONTALMENTE DA  $F_x$  E  $F_y$  - OCCORRE DETERMINARE COME QUESTE FORZE SI DISTRIBUISCONO NEI SINGOLI ELEMENTI VERTICALI -



1) IL SISTEMA DI FORZE

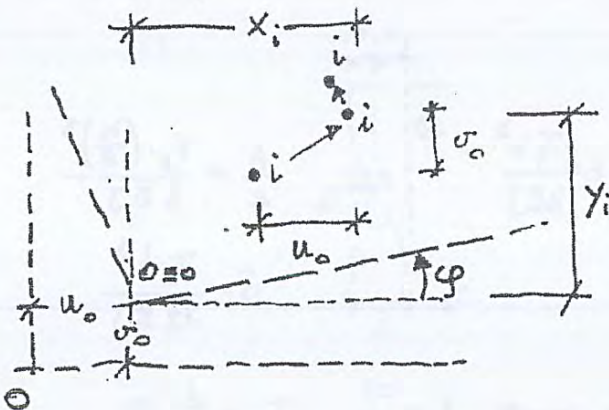
$$F_x \quad F_y$$

PUO' ESSERE PER CONVENIENZA RIPORTATO ALL'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

$$F_x = F_x$$

$$F_y = F_y$$

$$M = F_y \cdot x_F - F_x \cdot y_F$$



2) IN SEGUITO ALLA APPLICAZIONE DEI CARICHI LA COPERTURA SUBISCE UNO SPOSTAMENTO DI TIPO RIGIDO RAPPRESENTABILE MEDIANTE LE SUE 3 COMPONENTI

$u_0$  TRASLAZIONE DI X

$v_0$  TRASLAZIONE DI Y

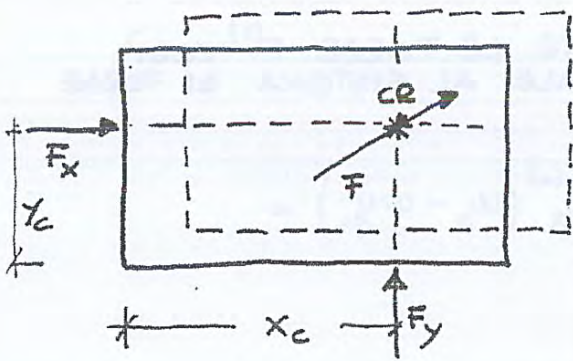
$\varphi$  ROTAZIONE ATTORNO C



$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i R_x^{(i)} & \phi & -\sum_i R_x^{(i)} y_i \\ \phi & \sum_i R_y^{(i)} & \sum_i R_y^{(i)} x_i \\ -\sum_i R_x^{(i)} y_i & \sum_i R_y^{(i)} x_i & \sum_i (R_y^{(i)} x_i^2 + R_x^{(i)} y_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \sigma_0 \\ \varphi \end{bmatrix}$$

MATRICE SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA  
(VIENE DETTA MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA STRUTTURA)

OSS: - ESISTE UN PUNTO DEL PIANO DETTO CENTRO DELLE RIGIDEZZE, CARATTERIZZANTE IL PROCESSO DEFORMATIVO: SE LA RETTA D'AZIONE DELLE FORZE ORIZZONTALI ESTERNE PASSA PER IL CENTRO DELLE RIGIDEZZE, LA STRUTTURA E' SOGGETTA SOLO A TRASLAZIONI E NON A ROTAZIONI -



$$u_0 \neq \phi \quad \sigma_0 \neq \phi \quad \varphi = \phi$$

RISCRITTO IL SISTEMA PRECEDENTE NELLA FORMA

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_y \cdot x_c - F_x \cdot y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \phi & k_{13} \\ \phi & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \sigma_0 \\ \varphi \end{bmatrix}$$

IPOTIZZANDO:

a)  $F_x \neq 0 \quad F_y = 0$

$$\begin{aligned} F_x &= k_{11} u_0 \\ F_y &= k_{22} \sigma_0 = \phi \Rightarrow \sigma_0 = \phi \\ -F_x y_c &= k_{31} u_0 \Rightarrow -k_{11} y_c u_0 = k_{31} u_0 \\ y_c &= -\frac{k_{31}}{k_{11}} = \frac{\sum_i R_x^{(i)} y_i}{\sum_i R_x^{(i)}} \end{aligned}$$

b)  $F_x = 0 \quad F_y \neq 0$

$$\begin{aligned} F_x &= k_{11} u_0 = \phi \Rightarrow u_0 = \phi \\ F_y &= k_{22} \sigma_0 \\ F_y x_c &= k_{32} \sigma_0 \quad x_c = \frac{k_{32}}{k_{22}} = \frac{\sum_i R_y^{(i)} x_i}{\sum_i R_y^{(i)}} \end{aligned}$$



O IN FORMA PIU' COMPATA

$$[\delta_{op}]_i = [T]_i [\delta]_i \quad [F_{op}]_i = [T]_i [F]_i \quad (**)$$

RIFERITO ASSI  
PRINCIPALI ELEMENTO

RIFERITO ASSI  
SISTEMA GLOBALE

NEL SISTEMA  
ASSI PRINCIPALI  
ELEMENTO VALE  
+ --->

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}_i = \alpha_i \begin{bmatrix} J_2 & \phi \\ \phi & J_1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}_i$$

$$[F_{op}]_i = \alpha_i [J]_i [\delta_{op}]_i \quad (**)$$

$$\alpha_i = \frac{12 E_i}{L_i^3}$$

POICHE'  $[T]_i^T [T]_i = [I]$  LA RELAZIONE (\*\*) PUO' ESSERE RISCRTA :

$$[T]_i^T [F_{op}]_i = \alpha_i [T]_i^T [J]_i [T]_i [\delta]_i \Rightarrow [F]_i = [k]_i [\delta]_i \quad (**)$$

$[F]_i$  PER LA (\*\*)

$[k]_i$  MATRICE DI RIGIDENZA DELL'ELEMENTO

IN QUESTO CASO LA (\*\*) EVIDENZIA COME LE FORZE  $F_x^{(i)}$  E  $F_y^{(i)}$  DIPENDONO DA ENTRAMBE LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO; SVILUPPANDO SI OTTIENE:

$$[k]_i = \alpha_i \begin{bmatrix} (J_2 \cos^2 \theta + J_1 \sin^2 \theta) & \cos \theta \sin \theta (J_2 - J_1) \\ \cos \theta \sin \theta (J_2 - J_1) & (J_2 \sin^2 \theta + J_1 \cos^2 \theta) \end{bmatrix}_i$$

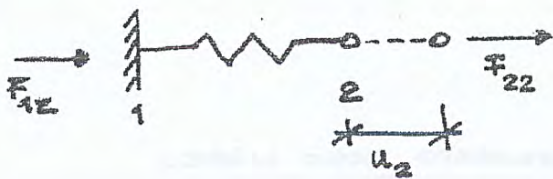
$$[k]_i = \begin{bmatrix} R_{xx}^{(i)} & R_{xy}^{(i)} \\ R_{yx}^{(i)} & R_{yy}^{(i)} \end{bmatrix}$$

↳ ESEMPIO

$$F_x^{(i)} = R_{xx}^{(i)} \delta_x^{(i)} + R_{xy}^{(i)} \delta_y^{(i)}$$



**CASO 2)**



$$F_{22} = k \cdot u_2$$

EQ. MOLLA

$$F_{212} = -F_{22} = -k u_2$$

EQ. EQUILIB.

**SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI 1) + 2)**



$$F_1 = F_{11} + F_{12}$$

FORZA NODO 1 PER SPOST. NODO 1  
FORZA NODO 1 PER SPOST. NODO 2

$$F_2 = F_{21} + F_{22}$$

$$F_1 = k u_1 - k u_2$$

$$F_2 = -k u_1 + k u_2$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[F] = [k][u] \quad (*)$$

**MATRICE DI RIGIDITÀ ELEMENTO MOLLA**

**PROPRIETÀ DELLA MATRICE [k]:**

- LA MATRICE È SIMMETRICA (TEOR. BETTI)
- IL DETERMINANTE È NULLO E QUINDI LA MATRICE NON È INVERTIBILE
- ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE U PER IL CASO IN ESAME VALE:

super ricavare questa formula <sup>con ragionamento</sup>

$$U = \frac{1}{2} k (u_2 - u_1)^2$$

$$U = \frac{1}{2} [u]^T [k] [u]$$

PER 1° TEOR. CASTIGLIANO SI OTTIENE



EQUAZIONI CHE IN TERMINI MATRICIALI DIVENTANO:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & \phi \\ -k_a & k_a+k_b & -k_b \\ \phi & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad [F] = [K][u]$$

MATRICE DELL'INTERA STRUTTURA

OSSERVAZIONI SULLA MATRICE  $[K]$ :

- LA MATRICE DELL'INTERA STRUTTURA E' SIMMETRICA E CON DETERMINANTE NULLO
- SI PUO' PROVARE CHE ANCHE IN QUESTO CASO

$$U = \frac{1}{2} [u]^T [K] [u]$$

- SE SI RISCRIVONO LE (a) E (b) NEL MODO SEGUENTE:

$$\begin{bmatrix} F_1^a \\ F_2^a \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & \phi \\ -k_a & k_a & \phi \\ \phi & \phi & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi \\ F_2^b \\ F_3^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \phi & \phi \\ \phi & k_b & -k_b \\ \phi & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

MATRICE ELEMENTI  
 (a) RIDIMENSIONATA  
 SECONDO LE DIMENSIONI  
 DELLA MATRICE DELLA  
 INTERA STRUTTURA

SOMMANDO  
 SI OTTIENE

$$\begin{bmatrix} F_1^a \\ F_2^a \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi \\ F_2^b \\ F_3^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^a \\ F_2^a + F_2^b \\ F_3^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = [K][u]$$

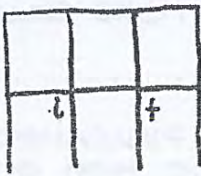
RELAZIONE GIÀ OTTENUTA  
 PER ALTRA VIA

- LA MATRICE  $[K]$  LA SI PUO' OTTENERE SOMMANDO OPPORTUNAMENTE FRA DI LORO LE MATRICI DI RIGIDENZA DEI SINGOLI ELEMENTI: DEFINITI PER UN ELEMENTO CHE COLLEGA IL NODO  $i$  AL NODO  $j$  I TERMINI:



# METODO DEGLI SPOSTAMENTI

1) DOPO AVER DISCRETIZZATO LA STRUTTURA IN ELEMENTI, SI CARATTERIZZA IL COMPORTAMENTO DI CIASCUN ELEMENTO TRAMITE I SUOI SPOSTAMENTI MODALI



$$[u^L]_e$$

E SI CALCOLA PER CIASCUN ELEMENTO LA MATRICE DI RIGIDEZZA ELEMENTARE

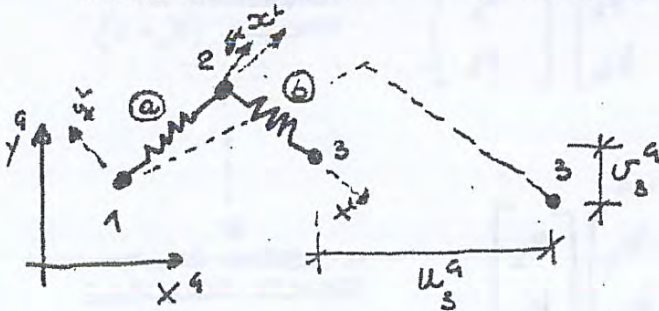
oss:  $[k]_e$

- MATRICE CHE PERMETTE DI SCRIVERE L'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE SOTTO FORMA QUADRATICA NEGLI SPOSTAMENTI

$$U_e = \frac{1}{2} [u^L]_e^T [k]_e [u^L]_e$$

- TALI MATRICE SONO IN GENERE CALCOLATE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE DELL'ELEMENTO

2) SI TRASFORMANO LE MATRICE DI RIGIDEZZA DEGLI ELEMENTI DAL SISTEMA LOCALE AL SISTEMA DI RIFERIMENTO GLOBALE DI TUTTA LA STRUTTURA ( $x^g, y^g$ )



$$[K]_e$$

L'EQUILIBRIO AL NODO  $i$  È DATO DA DUE EQUAZIONI IN DUE DIVERSE QUADRE (IN  $x^g, y^g$ ) DA CUI SI DERIVA IL TRASFERIMENTO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA.

3) LE MATRICE DI RIGIDEZZA ELEMENTARI  $[k]_e$  VENGONO USATE PER COSTRUIRE LA MATRICE DI RIGIDEZZA GLOBALE DELLA STRUTTURA

$$U = \sum_e U_e = \sum_e \left( \frac{1}{2} [u^g]_e^T [k]_e [u^g]_e \right) = \frac{1}{2} [u]^T [K] [u]$$

↑  
APPLICANDO CASTIGLIANO  
LIBERTÀ DELLA STRUTTURA

$$F_i = \frac{\partial U(u_i)}{\partial u_i}$$

A TUTTI I GRADI DI

SI OTTIENE:

$$[F] = [K] [u]$$

← SISTEMA FORMATO DALLE M. EQUAZIONI DI EQUILIBRIO AI NODI.



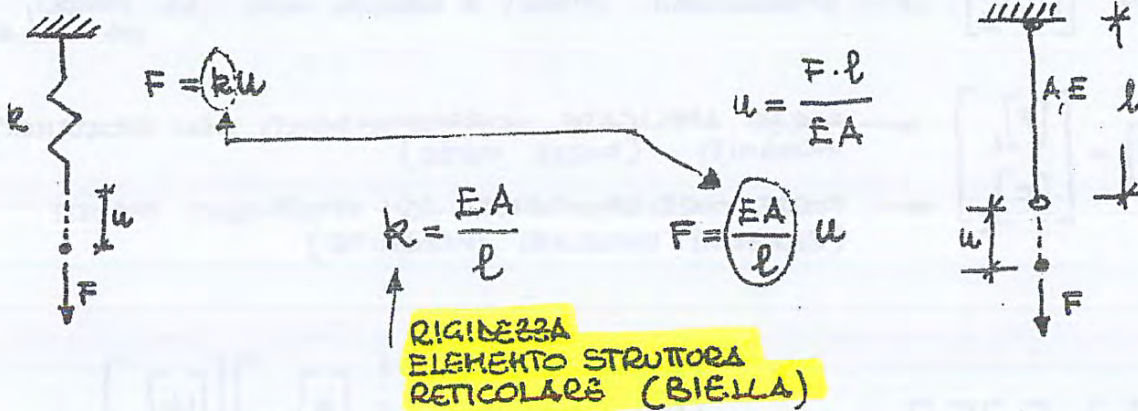
5) RICAVATI  $[u]_L$ , DALLA (\*) E' POSSIBILE RICAVARE  $[F]_I$  E MEDIANTE LA

$$[F^L]_e = [k]_e [u^L]_e$$

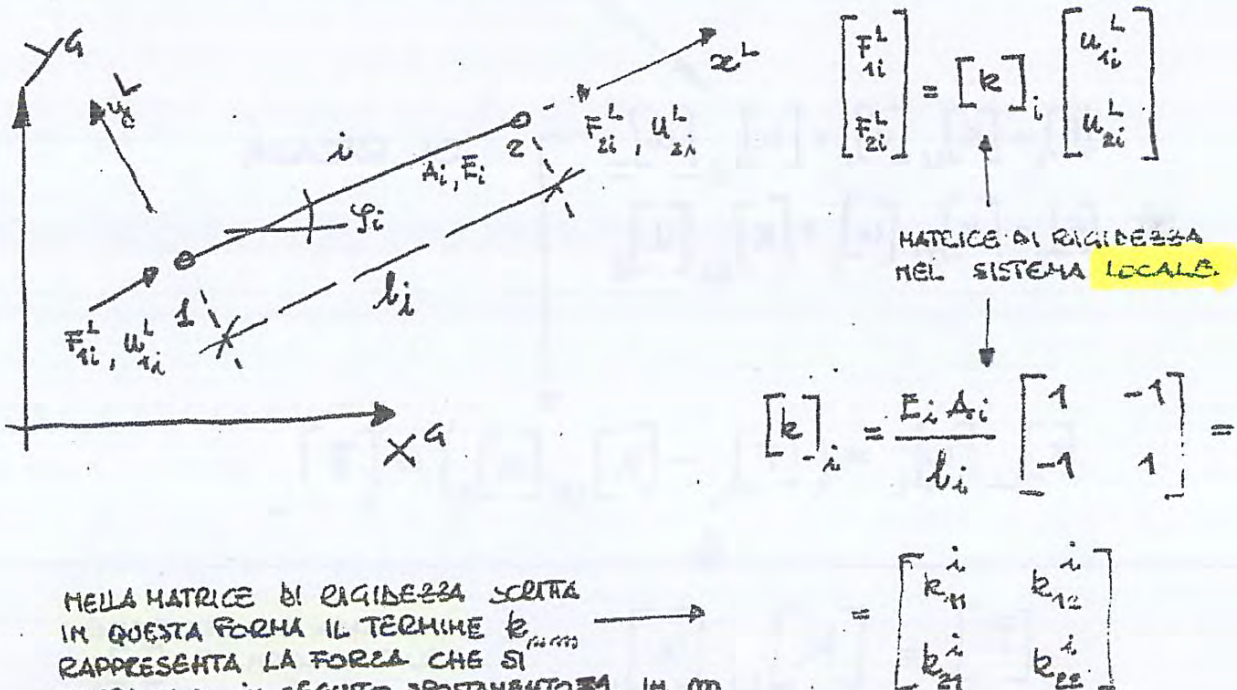
SI POSSONO CALCOLARE LE FORZE MODALI INTERNE DI CIASCUN ELEMENTO. IL VETTORE  $[u^L]_e$  RIFERITO AL SISTEMA LOCALE E' LEGATO AL VETTORE SPOSTAMENTI MODALI NEL SISTEMA GLOBALE MEDIANTE UNA MATRICE ROTAZIONE D'ASSI.

LEZ. 03-03-2014

## STRUTTURE RETICOLARI



PER L'ELEMENTO BIELLA VALGONO TUTTE LE CONSIDERAZIONI EFFETTUATE PER L'ELEMENTO MOLLA PER CUI NEL SISTEMA LOCALE VALE LA RELAZIONE MATRICIALE:



NELLA MATRICE DI RIGIDENZA SCRITTA IN QUESTA FORMA IL TERMINE  $k_{mn}$  RAPPRESENTA LA FORZA CHE SI GENERA IN m IN SEGUITO SPOSTAMENTO IN mm



NELLA RELAZIONE OTTENUTA

$$[F^a]_i = [K]_i [u^a]_i$$

$[K]_i$  È DETTA MATRICE DI RIGIDEZZA RIFERITA AL SISTEMA GLOBALE

$$[K]_i = [T]_i [k]_i [T]_i^T =$$

$$= \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i s_i & -c_i^2 & -c_i s_i \\ c_i s_i & s_i^2 & -c_i s_i & -s_i^2 \\ -c_i^2 & -c_i s_i & c_i^2 & c_i s_i \\ -c_i s_i & -s_i^2 & c_i s_i & s_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}]_i & [k_{12}]_i \\ [k_{21}]_i & [k_{22}]_i \end{bmatrix}$$

$$[k_{11}]_i = \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i s_i \\ c_i s_i & s_i^2 \end{bmatrix} = [k_{22}]_i = -[k_{12}]_i = -[k_{21}]_i$$

SOTTOMATRICI DIRETTE
SOTTOMATRICI INDIRETTE

INDICATE CON  $[F]$  LE FORZE AGENTI SUI NODI DI TUTTA LA STRUTTURA E CON  $[u]$  GLI SPOSTAMENTI CHE SUBISCE LA STRUTTURA (SPOSTAMENTI MODALI) IN SEGUITO ALLA APPLICAZIONE DEI CARICHI, OCCORRE STABILIRE LA RELAZIONE

$$[F] = [K] [u]$$

DOVE  $[K]$  RAPPRESENTA LA MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'INTERA STRUTTURA NEL SISTEMA GLOBALE. SE  $n$  SONO I NODI DELLA STRUTTURA:

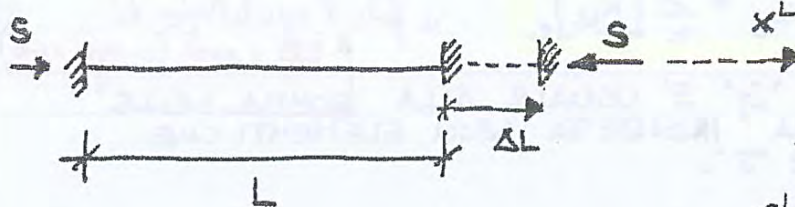
$$\begin{bmatrix} [F_1] \\ [F_2] \\ \vdots \\ [F_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & \dots & [k_{1n}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & \dots & [k_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [k_{n1}] & [k_{n2}] & \dots & [k_{nn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_2] \\ \vdots \\ [u_n] \end{bmatrix}$$

SONO ENTRAMBI RIFERITI AL SISTEMA GLOBALE



LEZ. 03-03-2014

**ASTA SOGGETTA A VARIAZIONE TERMICA O A STATO DI COAZIONE**



$\Delta L =$  ALLUNGAMENTO IMPEDITO

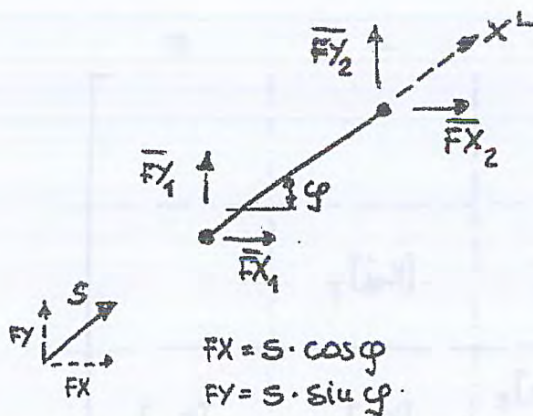
VARIAZIONE TERMICA UNIFORME SULLA SEZIONE.  $\Delta T$

$\alpha \Delta T \cdot L$

$S = EA \frac{\Delta L}{L} = EA \alpha \Delta T$

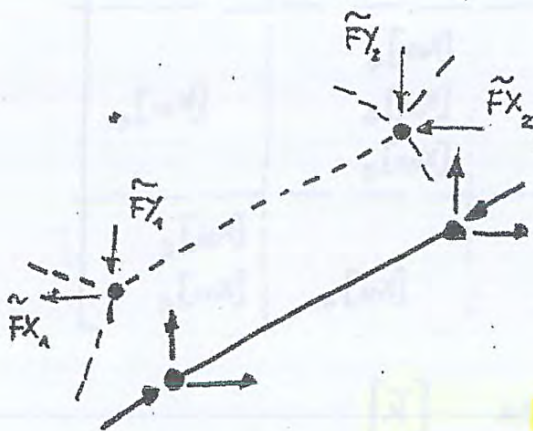
FORZA NELL'ASTA (COMPRESSIONE PER  $\Delta L > 0$ )

I VERSI POSITIVI SONO QUELLI RIPORTATI IN FIGURA ( $\Delta T > 0$  PRODUCE UN  $\Delta L > 0$ )



$$[F] = \begin{bmatrix} FX_1 \\ FY_1 \\ FX_2 \\ FY_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{bmatrix} = EA \alpha \Delta T \begin{bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{bmatrix}$$

COMPONENTI DELLA FORZA ASSIALE INDOTTE DA UNO STATO DI COAZIONE / VARIAZ. TERMICA



$[F-tilde]_i =$  CARICHI EQUIVALENTI RELATIVI ALL'ASTA  $(L)$

$[F-tilde]_{j,i} = -[F]$

OSS: IL VETTORE SOLLECITAZIONE FINALE NELL'ASTA VARDA'

$[k][u^*] + [F]$



LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE  $[T]$  GODE DELLA PROPRIETA' GIA' VISTA IN PRECEDENZA

$$[T]^T [T] = [I]$$

SEGUENDO ORA IL RAGIONAMENTO GIA' FATTO PER IL CASO PIU' SI HA CHE:

$$[K] = [T][k][T]^T =$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & l u & l u & -l^2 & -l u & -l u \\ l u & u^2 & u u & -l u & -u^2 & -u u \\ l u & u u & u^2 & -l u & -u u & -u^2 \\ -l^2 & -l u & -l u & l^2 & l u & l u \\ -l u & -u^2 & -u u & l u & u^2 & u u \\ -l u & -u u & -u^2 & l u & u u & u^2 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA RIFERITA AL SISTEMA GLOBALE  $[6 \times 6]$

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} [\lambda] & [-\lambda] \\ [-\lambda] & [\lambda] \end{bmatrix}$$

DOVE:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l^2 & l u & l u \\ l u & u^2 & u u \\ l u & u u & u^2 \end{bmatrix}$$



di vincolo

IN PARTICOLARE MODO, PER CIASCUNA CONDIZIONE  $u_i = \bar{u}_i$  OCCORRE APPORTARE LE SEGUENTI MODIFICHE:

**• VETTORE TERMINI NOTI:**

$$F_j = F_j - k_{ij} \bar{u}_i \quad \text{PER OGNI } j=1,2,\dots,n \quad j \neq i$$

$$F_i = \bar{u}_i$$

**• MATRICE DI RIGIDITÀ DELLA STRUTTURA:**

$$k_{ij} = k_{ji} = 0 \quad \text{PER OGNI } j=1,2,\dots,n \quad j \neq i$$

$$k_{ii} = 1$$

$$\begin{bmatrix}
 k_{11} & \dots & k_{1,i} & \phi & k_{1,i+1} & \dots & k_{1n} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 k_{i-1,1} & \dots & k_{i-1,i} & \phi & k_{i-1,i+1} & \dots & k_{i-1,n} \\
 \phi & \dots & \phi & 1 & \phi & \dots & \phi \\
 k_{i+1,1} & \dots & k_{i+1,i} & \phi & k_{i+1,i+1} & \dots & k_{i+1,n} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 k_{n1} & \dots & k_{n,i} & \phi & k_{n,i+1} & \dots & k_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 \vdots \\
 u_{i-1} \\
 u_i \\
 u_{i+1} \\
 \vdots \\
 u_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1 - k_{1i} \bar{u}_i \\
 \vdots \\
 F_{i-1} - k_{i-1,i} \bar{u}_i \\
 \bar{u}_i \\
 F_{i+1} - k_{i+1,i} \bar{u}_i \\
 \vdots \\
 F_n - k_{ni} \bar{u}_i
 \end{bmatrix}$$

può (non lo facciano) Si dimostra che questo metodo è del tutto equivalente al sostituire righe con righe e colonne con colonne.

$i \equiv$  INDICE CORRISPONDENTE ALLA CONDIZIONE DI VINCOLO O SPOSTAMENTO IMPOSTO

$$u_i = \bar{u}_i$$

(no problemi di MALCONDIZIONAMENTO)

**OSS:** QUESTO METODO NON FOHE I PROBLEMI NUMERICI DEL PRECEDENTE PER CONTRO E' PIU' COMPLESSO NELLA PROGRAMMAZIONE

(effetto un numero maggiore di operazioni)

LEZ. 04-03-2014

**C) METODO DELLA SOPPRESSIONE DELLE EQUAZIONI**

CONSISTE NEL RICOSTRUIRE LA MATRICE  $[k]$  IN MODO DA ELIMINARE LE EQUAZIONI CORRISPONDENTI AI GRADI DI LIBERTÀ IMPOSTI - (SI ESEGUE IL PARTIZIONAMENTO VISTO IN PRECEDENZA, SAGGRUPPANDO AD ESEMPIO PRIMA I GRADI DI LIBERTÀ CORRISPONDENTI ALLO SPOSTAMENTI LIBERI E POI I GRADI DI LIBERTÀ CORRISPONDENTI AGLI SPOSTAMENTI IMPOSTI).

(scambia ordinatamente <sup>180</sup> righe con righe e colonne con colonne)

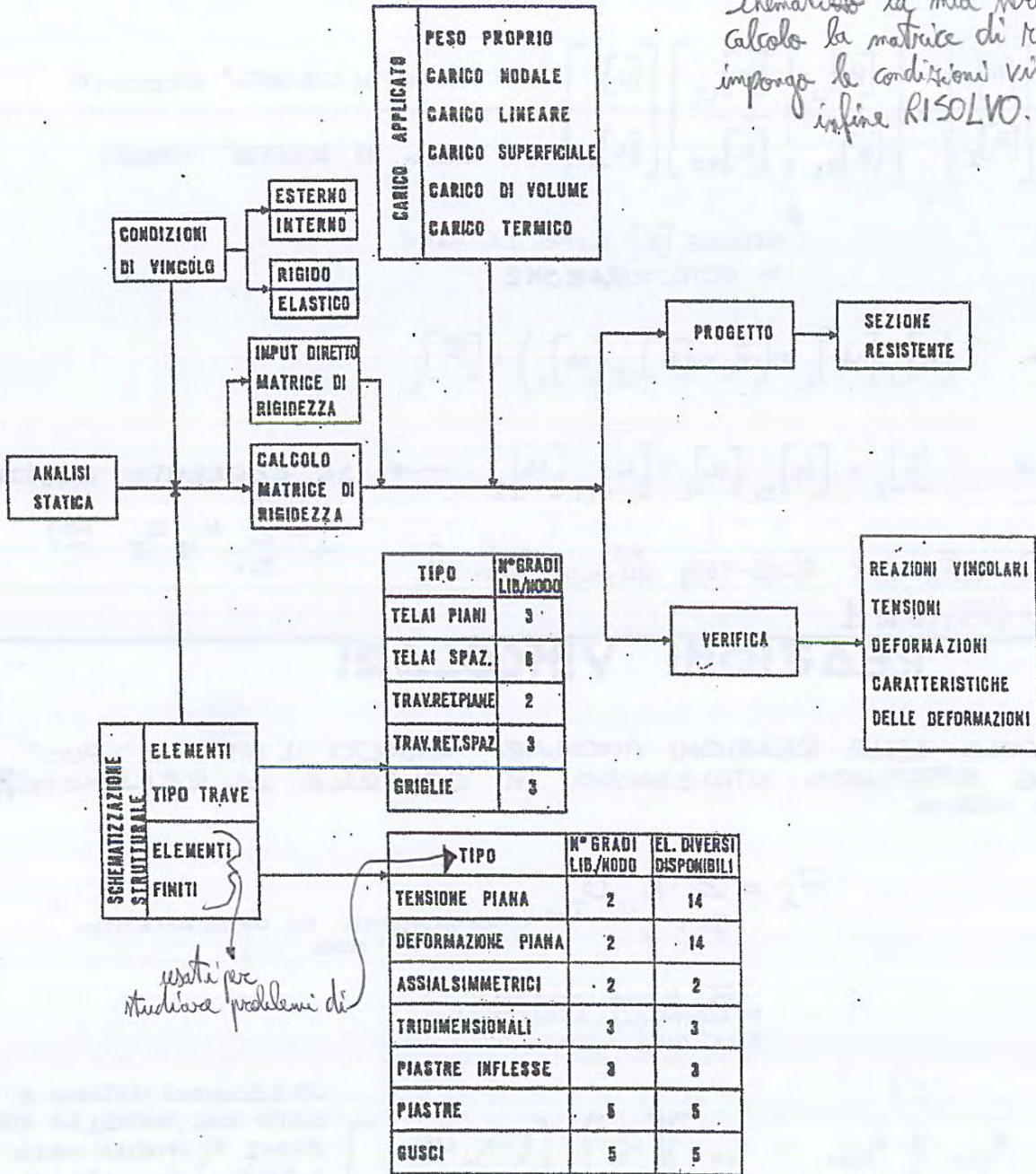
mi tolgo dai piedi le equazioni dei nodi vincolati e risolvo ciò che mi rimane.



In questo programma viene utilizzato il **METODO DEL TERMINE UNITARIO SULLA DIAGONALE.**

**RIASSUNTO DI QUESTO PROGRAMMA:**

Schematizzo la mia struttura, calcolo la matrice di rigidità, impongo le condizioni vincolari ed infine RISOLVO.



**ESEMPIO DI DIAGRAMMA DI FLUSSO PROGRAMMA FEM**



## VARIABILI UTILIZZATE

### VARIABILI INTERE

- MM = NUMERO TOTALE MODI  
ME = NUMERO TOTALE ELEMENTI ASTA  
MLN = NUMERO TOTALE MODI CARICATI  
MBH = NUMERO TOTALE MODI VINCOLATI  
MHE = NUMERO MODI PER ELEMENTO (2)  
MDF = NUMERO GRADI DI LIBERTA' DEL MODO (2)  
MDFEL = NUMERO GRADI DI LIBERTA' PER ELEMENTO  $MDF * MHE$  (4)  
MRMX = NUMERO DI RIGHE MATRICE DI RIGIDEZZA TOTALE (200)  
[AVEENDO DEFINITO 200 → 100 MODI COME MAX MH POSSIBILE]  
MCMX = NUMERO COLONNE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA TOTALE (20)  
[LARGHEZZA MAX SEMIBANDA CONSENTITA]  
N = NUMERO TOTALE DELLE INCOGNITE DEL PROBLEMA  $MDF * MH$  (<200)  
MS = LARGHEZZA SEMIBANDA CORRENTE

DEFINIZIONE STRUTTURA

### VARIABILI REALI

- E = MODULO DI ELASTICITA'

### MATRICI DI INTERI

- CON = VETTORE CONNETTIVITA' / INCIDENZE ELEMENTO - PER L'ELEMENTO L  
CON  $(MHE * (L-1) + 1)$  → CONTIENE PRIMO MODO ELEMENTO L (MAX 100 ELEMENTI)  
CON  $(MHE * (L-1) + 2)$  → CONTIENE SECONDO MODO ELEMENTO L  
IB = VETTORE CONDIZIONI AL CONTORNO - PER IL VINCOLO J-ESIMO  
IB  $((MDF+1) * (J-1) + 1)$  → CONTIENE IL NUMERO DEL MODO VINCOLATO  
IB  $((MDF+1) * (J-1) + 2)$  → CONTIENE LO STATO DELLO SPOSTAMENTO IN DIR. X  
IB  $((MDF+1) * (J-1) + 3)$  → CONTIENE LO STATO DELLO SPOSTAMENTO IN DIR. Y (MAX 20 VINCOLI)

### MATRICI DI REALI

- X = VETTORE COORDINATE X (MAX 100 MODI)  
Y = VETTORE COORDINATE Y  
PROP = VETTORE AREE - PROP(L) → CONTIENE AREA ELEMENTO L (MAX 100 ELEMENTI)  
AL = VETTORE CARICHI MODALI - PER IL MODO J  
AL  $(MDF * (J-1) + 1)$  → CONTIENE COMPONENTE FORZA IN DIREZIONE X  
AL  $(MDF * (J-1) + 2)$  → CONTIENE COMPONENTE FORZA IN DIREZIONE Y  
TK = MATRICE DI RIGIDEZZA (NEORIZZAZIONE A BANDA)  
MRMX → NUMERO DI RIGHE MASSIMO  
MCMX → NUMERO DI COLONNE MASSIMO (MAX SEMIBANDA)  
ELST = MATRICE DI RIGIDEZZA LOCALE DELL'ELEMENTO GENERIC  
V = VETTORE AUXILIARIO UTILIZZATO NELLA SOLUZIONE DEL SISTEMA - DIMENS. MODI  
FORC = VETTORE FORZA ASSIALE NELL'ASTA - FORC(L) → CONTIENE FORZA ASSIALE RELATIVA ALL'ASTA L (DIMENS. 100 → MAX NUMERO ELEMENTI)  
REAC = VETTORE CONTENENTE LE REAZIONI MODALI - ALL'INIZIO CONTIENE GLI SPOSTAMENTI IMPOSTI (EVENTUALI CONDIZIONI VINCOLARI) - PER IL MODO J  
REAC  $(MDF * (J-1) + 1)$  → CONTIENE COMPONENTE SPOSTAMENTO IN X  
REAC  $(MDF * (J-1) + 2)$  → CONTIENE COMPONENTE SPOSTAMENTO IN Y  
SE IL MODO E' LIBERO IL VALORE E' NULLO -  
ALLA FINE CONTIENE LA SOMMA DELLE PROIEZIONI SECONDO X E Y DELLE FORZE SOLLECITANTI LE ASTE CONFLUENTI NEL MODO - PER I MODI VINCOLATI QUESTE SONO LE FORZE "REAZIONI VINCOLARI", PER I MODI LIBERI QUESTE SONO UGUALI ALLE COMPONENTI DELLE FORZE ESTERNE APPLICATE AL MODO



## SUBROUTINE INPUT

TUTTE LE INFORMAZIONI DI DEFINIZIONE DELLA STRUTTURA VENGONO LETTE DALLA SUBROUTINE INPUT - SCHEDE INTRODUBIONE DATI

### SK PARAMETRI DI BASE (4I10, F10.0)

MH	NUMERO MODI	} 1 SOLA SCHEDE
ME	NUMERO ELEMENTI	
MLH	NUMERO MODI CARICATI	
MNH	NUMERO MODI VINCOLATI	
E	MODULO DI ELASTICITA'	

### SK COORDINATE MODALI (I10, 2F10.0)

I	NUMERO DEL MODO	} IN TUTTO MH SCHEDE
X(I)	COORDINATA $X^q$	
Y(I)	COORDINATA $Y^q$	

### SK DEFINIZIONE ELEMENTI (3I10, F10.5)

I	NUMERO DELL'ELEMENTO	} IN TUTTO ME SCHEDE
CON(IHI)	NUMERO MODO INIZIALE	
CON(FIN)	NUMERO MODO FINALE	
PROP(I)	AREA ELEMENTO	

### SK DEFINIZIONE CARICHI (I10, 2F10.0)

J	NUMERO MODO CARICATO	} IN TUTTO MLH SCHEDE
AL(INDX)	COMPONENTE FORZA MODALE DIREZIONE $X^q$	
AL(INDY)	COMPONENTE FORZA MODALE DIREZIONE $Y^q$	

### SK DEFINIZIONE VINCOLI (3I10, 2F10.4)

IB (d+1)	NUMERO MODO VINCOLATO	} IN TUTTO MHN SK
IB (d+2)	INDICATORE DI ATTIVAZIONE SPOSTAMENTO IMPOSTO DIR $X^q$ (0/1 - 0 SPOSTAMENTO IMPOSTO ATTIVATO)	
IB (d+3)	INDICATORE DI ATTIVAZIONE SPOSTAMENTO IMPOSTO DIR. $Y^q$	
FORC (Modo/x)	COMPONENTE SPOSTAMENTO IMPOSTO DIR $X^q$	
FORC (Modo/y)	COMPONENTE SPOSTAMENTO IMPOSTO DIR $Y^q$	

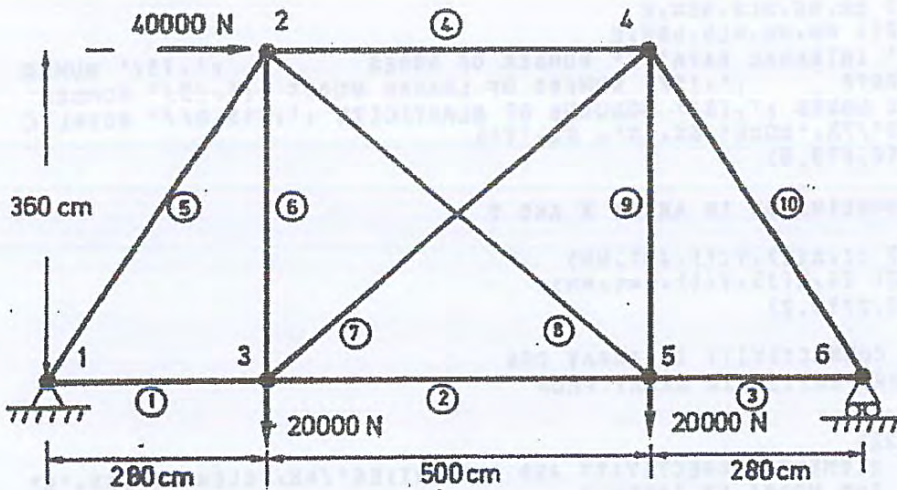
- oss:
- NON ESISTE UNA FILOSOFIA DI CHECK DEI DATI IN INGRESSO CON EVENTUALE RECUPERO E SEGNALAZIONE DI ERRORE
  - I DATI IN INPUT PREVEDONO SK A FORMATO FISSO
  - VIENE ESEGUITA LA STAMPA DEI DATI IN INGRESSO  
[CIASCUNA FASE DI LETTURA VIENE SEGUITA SUBITO DALLA FASE DI STAMPA]



```

C READ BOUNDARY NODES DATA. STORE UNKNOWN STATUS
C INDICATORS IN ARRAY IB, AND PRESCRIBED UNKNOWN
C VALUES IN ARRAY REAC
C
WRITE(10,24)
24 FORMAT(/' BOUNDARY CONDITION DATA'/23X,'STATUS',14X,'PRESCRIBED VA
* LUES'/15X,'(0:PRESCRIBED, 1:FREE)'/7X,'NODE',8X,'U',9X,'V',16X,'U'
*,9X,'V')
DO 7 I=1,NBH
READ(IN,8) J,(IC(K),K=1,NDF),(W(K),K=1,NDF)
WRITE(10,9) J,(IC(K),K=1,NDF),(W(K),K=1,NDF)
L1=(NDF+1)*(I-1)+1
L2=NDF+(J-1)
IB(L1)=J
DO 7 K=1,NDF
M1=L1+K
M2=L2+K
IB(M1)=IC(K)
7 REAC(M2)=W(K)
8 FORMAT(3I10,2F10.4)
9 FORMAT(3I10,10X,2F10.4)
RETURN
END

```



ESEMPIO

$$A_1 = A_2 = A_3 = 25 \text{ cm}^2$$

$$A_4 = A_5 = A_6 = 30 \text{ cm}^2$$

$$A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = 10 \text{ cm}^2$$

$$E = 21 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$$

\*\*\*\*\* INPUT FOR PLANE TRUSS ANALYSIS PROGRAM

6	10	3	2	21000000.	← SK PARAMETRI BASE
1					
2	280.	360.			
3	280.				← SK COORDINATE NODALI
4	780.	360.			
5	780.				
6	1060.				
1		1	3	25.	
2		3	5	25.	
3		5	6	25.	
4		2	4	30.	
5		1	2	30.	← SK DEFINIZIONE ELEMENTI
6		3	2	10.	
7		3	4	10.	
8		5	2	10.	
9		5	4	10.	
10		4	6	30.	
2	40000.				
3		-20000.			← SK DEFINIZIONE CARICHI
5		-20000.			
1					
6		1			← SK DEFINIZIONE VINCOLI



```
SUBROUTINE ASSEM(X,Y,CON,PROP,TK,ELST,AL)
```

```
C  
C  
C
```

```
ASSEMBLING OF THE TOTAL MATRIX FOR THE PROBLEM
```

```
COMMON NRMX,NCHX,HDFEL,HN,HE,HLN,NBN,HDF,NNE,N,MS,IN,IO,E,6  
DIMENSION X(1),Y(1),CON(1),TK(NRMX,NCHX),ELST(HDFEL,HDFEL),  
*PROP(1),AL(1)
```

```
C  
C  
C
```

```
COMPUTE HALF BAND WIDTH AND STORE IN MS
```

```
N1=NNE-1  
MS=0  
DO 7 I=1,NE  
L1=NNE*(I-1)  
DO 7 J=1,N1  
L2=L1+J  
J1=J+1  
DO 7 K=J1,NNE  
L3=L1+K  
L=ABS(CON(L2)-CON(L3))  
IF(MS-L)6,7,7
```

```
6 MS=L  
7 CONTINUE  
MS=NDF*(MS+1)
```

```
C  
C  
C
```

```
CLEAR THE TOTAL STIFFNESS MATRIX
```

```
DO 10 I=1,N  
DO 10 J=1,MS  
10 TK(I,J)=0
```

```
C  
C  
C
```

```
LOOP ON THE ELEMENTS AND ASSEMBLE THE TOTAL STIFFNESS MATRIX
```

```
DO 20 NEL=1,NE
```

```
C  
C  
C
```

```
STIFF COMPUTES THE STIFFNESS MATRIX FOR ELEMENT NEL
```

```
CALL STIFF(NEL,X,Y,PROP,CON,ELST,AL)
```

```
C  
C  
C  
C
```

```
ELASS PLACES THE STIFFNESS MATRIX OF ELEMENT NEL IN THE TOTAL  
STIFFNESS MATRIX
```

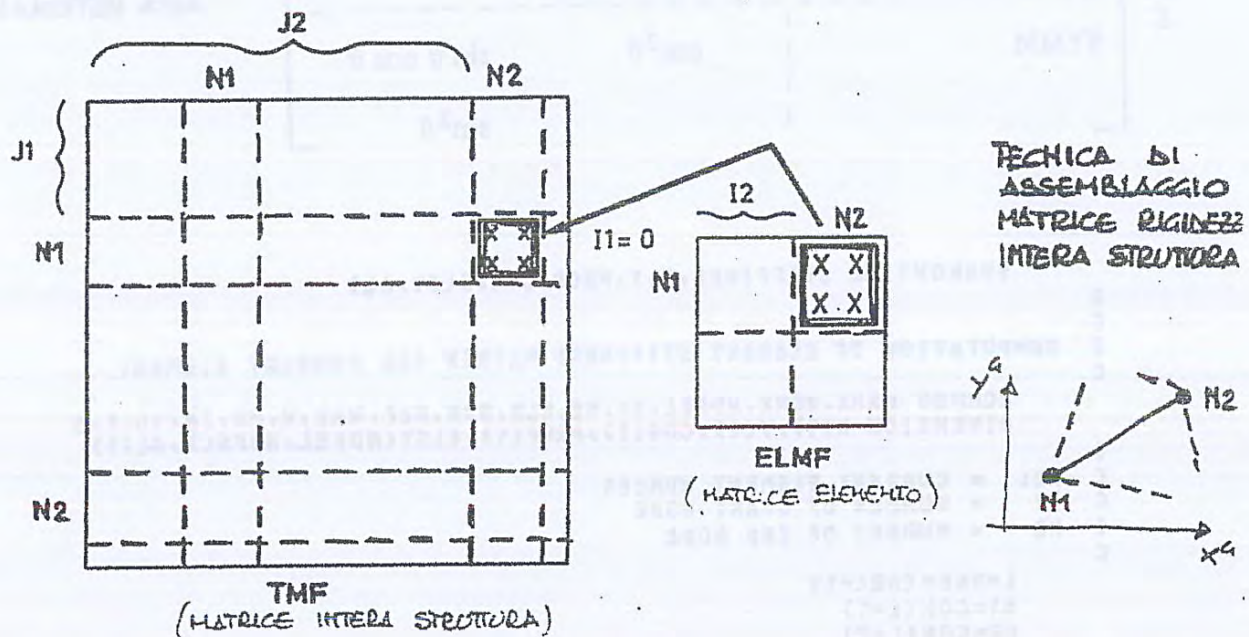
```
20 CALL ELASS(NEL,CON,TK,ELST)  
RETURN  
END
```



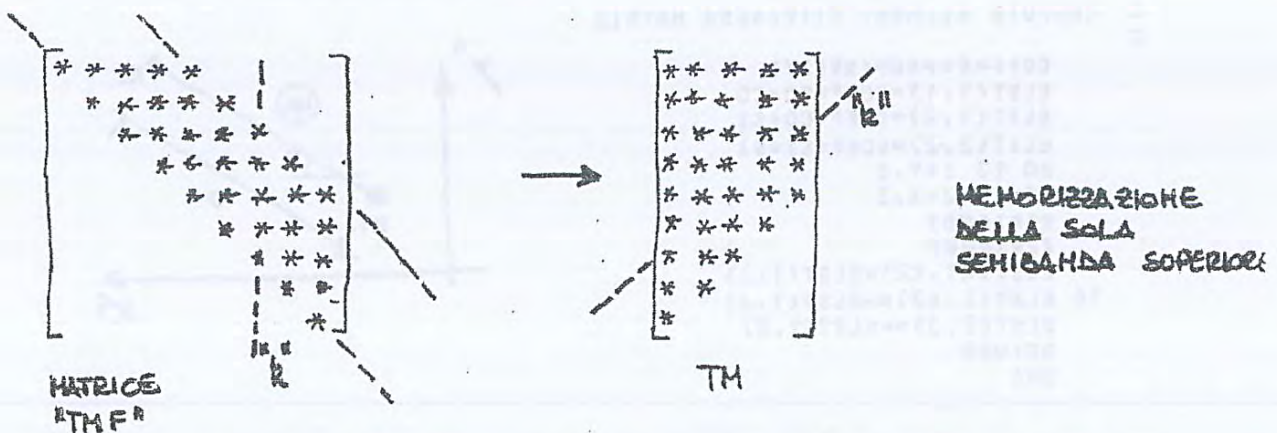
# SUBROUTINE ELASS

LA SUBROUTINE "ELASS" PARTEENDO DALLA MATRICE DI RIGIDITÀ DELL'ELEMENTO CORRENTE "MEI", MEMORIZZATA NELLA MATRICE "ELMAT", ASSEMBLA LA MATRICE DI RIGIDITÀ "TH" DELL'INTERA STRUTTURA.

OSS: IN VIRTU' DI COME SONO DEFINITE LE VARIABILI IN CHIAMATA ESISTE UNA EQUIVALENZA TRA LE MATRICI "ELMAT" E "ELST" E LE MATRICI "TH" E "TK" -



ESSENDO LA MATRICE "TMF" (INTERA STRUTTURA) SIMMETRICA E A BANDA SI MEMORIZZA SOLO LA PARTE TRIANGOLARE SUPERIORE DELLA SEMIBANDA NELLA MATRICE "TH" - LE OPERAZIONI DI ASSEMBLAGGIO SONO RIPORTATE NEL DIAGRAMMA DI FLUSSO. (PAG. SEG.)





```

SUBROUTINE ELASS(NEL,CON,TH,ELMAT)
C
C
C
C THIS PROGRAM STORES THE ELEMENT MATRIX FOR ELEMENT NEL IN
C THE TOTAL MATRIX FOR THE PROBLEM
C
COMMON NRMX,NCMX,NDFEL,NN,NE,NLN,NBN,NDF,NNE,N,MS,IN,IO,E,G
DIMENSION CON(1),TH(NRMX,NCMX),ELMAT(NDFEL,NDFEL)
C
C NEL = CURRENT ELEMENT NUMBER
C N1 = NUMBER OF START NODE
C N2 = NUMBER OF END NODE
C
L1=NNE*(NEL-1)
DO 50 I=1,NNE
L2=L1+I
N1=CON(L2)
I1=NDF*(I-1)
J1=NDF*(N1-1)
DO 50 J=1,NNE
L2=L1+J
N2=CON(L2)
I2=NDF*(J-1)
J2=NDF*(N2-1)
DO 50 K=1,NDF
KI=1
IF(N1-N2)20,10,30
C
C STORE A DIAGONAL SUBMATRIX
C
10 KI=K
C
C STORE AN OFF DIAGONAL SUBMATRIX
C
20 KR=J1+K
IC=J2-KR+1
K1=I1+K
GO TO 40
C
C STORE THE TRANSPOSE OF AN OFF DIAGONAL MATRIX
C
30 KR=J2+K
IC=J1-KR+1
K2=I2+K
40 DO 50 L=KI,NDF
KC=IC+L
IF(N1-N2)45,45,46
45 K2=I2+L
GO TO 50
46 K1=I1+L
50 TH(KR,KC)=TH(KR,KC)+ELMAT(K1,K2)
RETURN
END

```



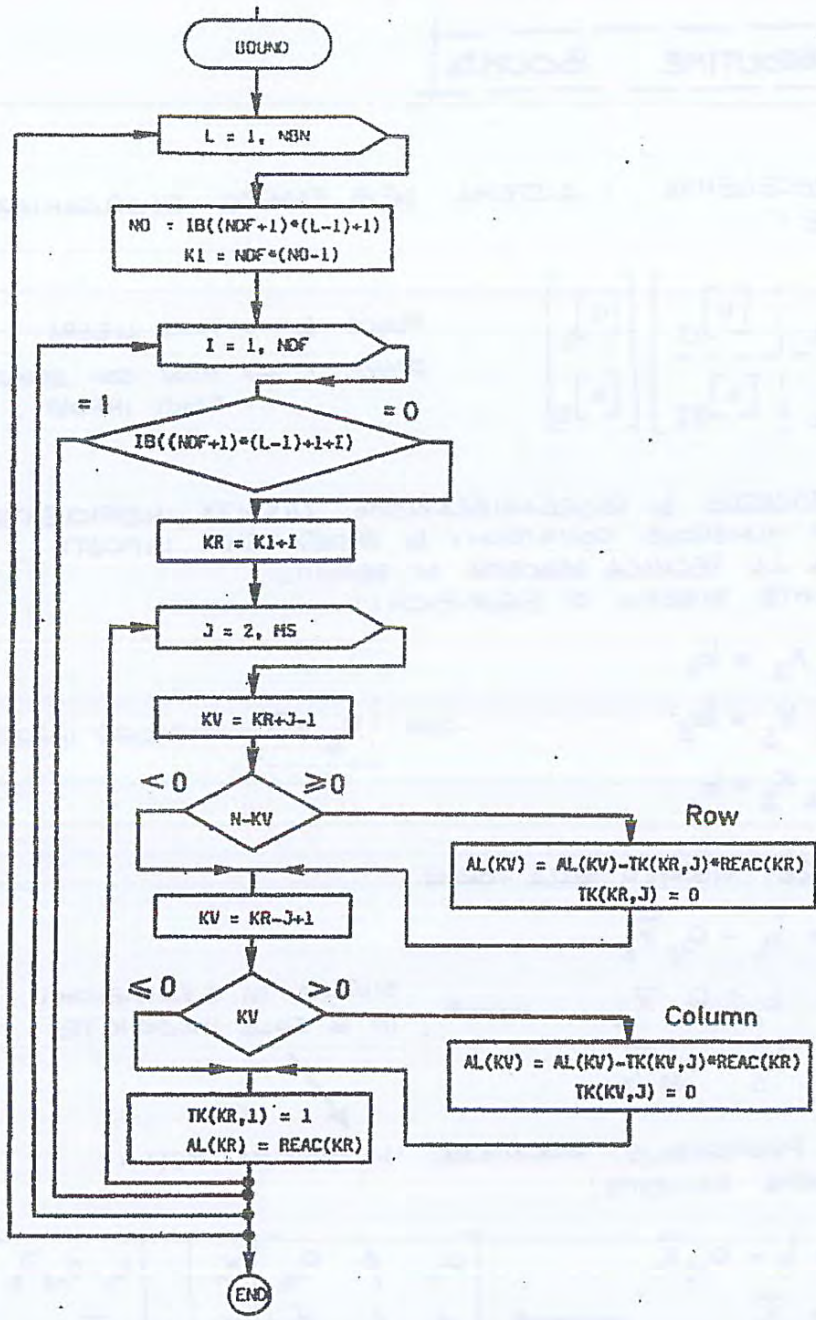
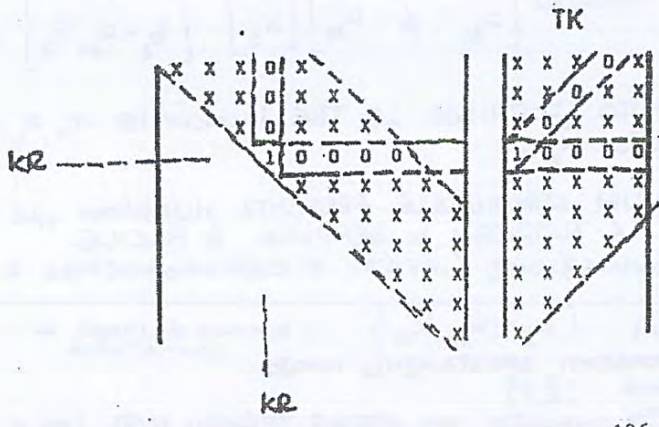


DIAGRAMMA DI FLUSSO  
 RELATIVO ALL'INTRODUZIONE  
 DELLE CONDIZIONI  
 VINCOLARI IN UNA MATRICE  
 SIMMETRICA A BANDE

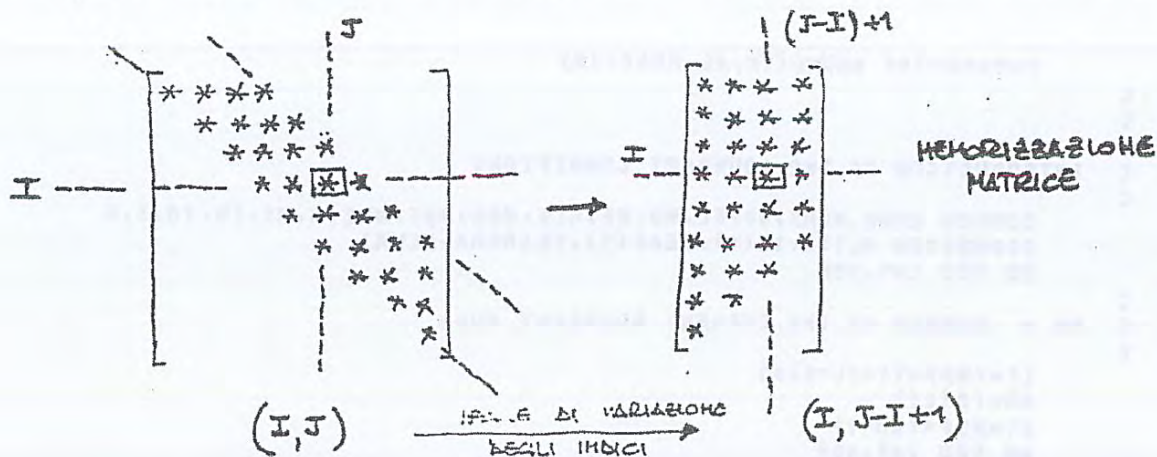


CONDIZIONI VINCOLARI:  
 MODIFICA PER MATRICE  
 MEMORIZZATA CONSIDERANDO  
 SOLO LA SEMIBANDE  
 SUPERIORE



## SUBROUTINE SLBSI

SUBROUTINE PER LA SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI, CON MATRICE DEI COEFFICIENTI SIMMETRICA E A BANDA.



SUBROUTINE SLBSI(A,B,D,N,MS,NX,NX)

```

C
C
C
C SOLUTION OF LINEAR SYSTEM OF EQUATIONS
C BY THE GAUSS ELIMINATION METHOD, FOR
C SYMMETRIC BANDED SYSTEMS
C
C A : ARRAY CONTAINING THE UPPER TRIANGULAR
C PART OF THE SYSTEM MATRIX, STORED
C ACCORDING TO THE SYMMETRIC BANDED
C SCHEME
C B : ORIGINALLY IT CONTAINS THE INDEPENDENT
C COEFFICIENTS. AFTER SOLUTION IT CONTAINS
C THE VALUES OF THE SYSTEM UNKNOWNNS.
C
C N : ACTUAL NUMBER OF UNKNOWNNS
C N : ACTUAL NUMBER OF UNKNOWNNS
C MS: ACTUAL HALF BANDWIDTH
C NX: ROW DIMENSION OF A AND B
C MX: COLUMN DIMENSION OF A
C
C D : AUXILIARY VECTOR
C
C

```

```

DIMENSION A(NX,NX),B(NX),D(MX)
N1=N-1
DO 100 K=1,N1
C=A(K,1)
K1=K+1
IF(ABS(C)-0.000001)1,1,3
1 WRITE(6,2) K
2 FORMAT(' **** SINGULARITY IN ROW',15)
GO TO 300

```



## SUBROUTINE FORCE

LA SUBROUTINE CALCOLA LA FORZA ASSIALE AGENTE IN CIASCUNA ASTA E HOTE LE SOLLECITAZIONI NELLE ASTE, CALCOLA PER CIASCUN MODO L SOMMATORIA DELLE PROIEZIONI SECONDO LE DIREZIONI X E Y DI TALI SOLLECITAZIONI (RISULTANTI MODALI). LA FORZA ASSIALE DELL'ELEMENTO "NEL" E' MEMORIZZATA IN FORC(NEL) MENTRE LE RISULTANTI MODALI RISULTANO MEMORIZZATE IN REAC. CON "N1" E "N2" SI INDICANO IL MODO INIZIALE E IL MODO FINALE DELL'E MENTO IN ESAME; CON "K1" E "K2" SI INDICANO I PUNTATORI AGLI SPOSTAMENTI MODALI NEL VETTORE AL -

```

SUBROUTINE FORCE(CON,PROP,FORC,REAC,X,Y,AL)
C
C
C COMPUTATION OF ELEMENT FORCES
C
COMMON NRMX,NCMX,NDFEL,NN,NE,NLN,NBN,NDF,NNE,N,MS,IN,IO,E,G
DIMENSION CON(1),PROP(1),FORC(1),REAC(1),X(1),Y(1),AL(1)
C
C CLEAR THE REACTIONS ARRAY
C
DO 1 I=1,N
1 REAC(I)=0
C
C NEL= = NUMBER OF CURRENT ELEMENT
C N1 = NUMBER OF START NODE FOR CURRENT ELEMENT
C N2 = NUMBER OF END NODE FOR CURRENT ELEMENT
C
DO 100 NEL=1,NE
L=NNE*(NEL-1)
N1=CON(L+1)
N2=CON(L+2)
K1=NDF*(N1-1)
K2=NDF*(N2-1)
C
C COMPUTE LENGTH OF ELEMENT,AND SIN AND COSINE OF ITS LOCAL
C X AXIS, AND STORE IN D,SI, AND CO RESPECTIVELY.
C
D=SQRT((X(N2)-X(N1))**2+(Y(N2)-Y(N1))**2)
CO=(X(N2)-X(N1))/D
SI=(Y(N2)-Y(N1))/D
COEF=E*PROP(NEL)/D
C
C COMPUTE MEMBER AXIAL FORCE AND STORE IN ARRAY FORC
C
FORC(NEL)=COEF*((AL(K2+1)-AL(K1+1))+CO*(AL(K2+2)-AL(K1+2))+SI)
C
C COMPUTE GLOBAL PROJECTIONS OF MEMBER AXIAL FORCE AND
C ADD TO THE REACTION ARRAY REAC
C
REAC(K1+1)=REAC(K1+1)-FORC(NEL)*CO
REAC(K1+2)=REAC(K1+2)-FORC(NEL)*SI
REAC(K2+1)=REAC(K2+1)+FORC(NEL)*CO
100 REAC(K2+2)=REAC(K2+2)+FORC(NEL)*SI
RETURN
END

```



INTERNAL DATA

NUMBER OF NODES : 6  
 NUMBER OF ELEMENTS : 10  
 NUMBER OF LOADED NODES : 3  
 NUMBER OF SUPPORT NODES : 2  
 MODULUS OF ELASTICITY : 21000000.

STAMPA (A)  
 (SUB. INPUT)

NODAL COORDINATES

NODE	X	Y
1	0.00	0.00
2	280.00	360.00
3	280.00	0.00
4	780.00	360.00
5	780.00	0.00
6	1080.00	0.00

DATI IN INPUT

ELEMENT CONNECTIVITY AND PROPERTIES

ELEMENT	START NODE	END NODE	AREA
1	1	3	25.00000
2	3	5	25.00000
3	5	6	25.00000
4	2	4	30.00000
5	1	2	30.00000
6	3	2	10.00000
7	3	4	10.00000
8	5	2	10.00000
9	5	4	10.00000
10	4	6	30.00000

NODAL LOADS

NODE	PX	PY
2	40000.00	0.00
3	0.00	-20000.00
5	0.00	-20000.00

BOUNDARY CONDITION DATA

STATUS  
 (0: PRESCRIBED, 1: FREE)

NODE	U	V
1	0	0
6	1	0

PRESCRIBED VALUES

U	V
0.0000	0.0000
0.0000	0.0000

RESULTS

NODAL DISPLACEMENTS

NODE	U	V
1	0.0000	0.0000
2	0.0865	-0.0748
3	0.0240	-0.0919
4	0.0548	-0.0490
5	0.0536	-0.0894
6	0.0678	0.0000

STAMPA (B)  
 (SUB. OUTPUT)

RISULTATI DELLA  
 ELABORAZIONE

NODAL REACTIONS

NODE	PX	PY
1	-40000.0000	6415.0943
2	40000.0000	0.0000
3	-0.0000	-20000.0000
4	0.0000	-0.0000
5	-0.0000	-20000.0000
6	-0.0000	33584.9057

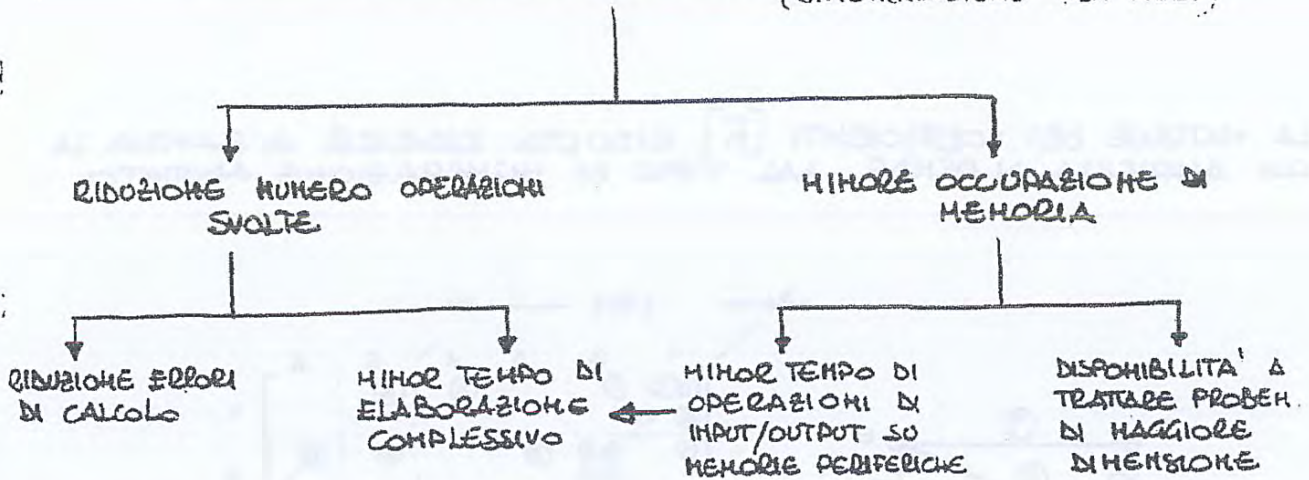
MEMBER FORCES

MEMBER	AXIAL FORCE
1	44989.5178
2	31130.6387
3	26121.5933
4	-39980.4724
5	-8127.0366
6	10021.6071
7	17077.3785
8	-6172.3148
9	23608.5127
10	-42547.4268



# RIDUZIONE DELL'AMPIEZZA DI BANCA

(RINUMERAZIONE DEI NODI)



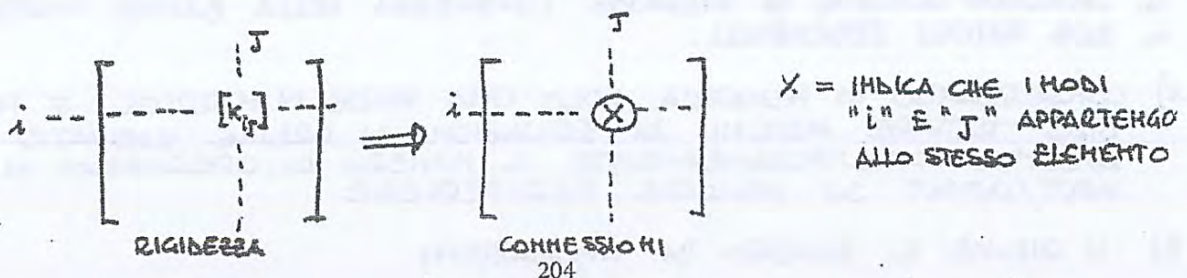
GLI ALGORITMI PER IL RIORDINO DELLA NUMERAZIONE DEI NODI DI UNA STRUTTURA (MATRICI A BANCA) POSSONO RAGGRUPPARI IN DUE GRANDI CATEGORIE:

- ALGORITMI DI TIPO DIRETTO ①
- ALGORITMI DI TIPO ITERATIVO ②
- [ - PROCEDURE "HASTE" ] → SI INIZIA IL PROCESSO UTILIZZANDO ① E POI SI PROSEGUE UTILIZZANDO ②

① OPERAMO ASSOCIANDO ALLA STRUTTURA NUMERATA, PARTICOLARI TIPI DI GRAFI E PROCEDIAMO NUMERANDO I NODI CON UNA SUCCESSIONE CHE E' LEGATA ALLA STRUTTURA DEL GRAFO STESSO E A SCELTE CHE TENDONO A MINIMIZZARE OPPORTUNAMENTE QUANTITA' (METODO DEL "GRAFO AD ALBERO" O DI CUTHILL - MC KEE 1969 / METODO DI COLLINS / ALGORITMO DEL GRADO MINIMO)

② ASSUMIAMO UN DATO ORDINAMENTO INIZIALE E OPERAMO OPPORTUNI SCAMBI DI RIGHE E COLONNE AL FINE DI RIDURRE L'AMPIEZZA DI BANCA DELLA MATRICE (ALGORITMO DI ROSEN 1968 / ALGORITMO DI AKYUZ - UTKU)

OSS: TUTTI QUESTI ALGORITMI OPERANO ANZICHÉ SULLA MATRICE DI RIGIDEZZA, SULLA MATRICE CORRISPONDENTE DELLE INCIDENZE DETTA ANCHE MATRICE DELLE "CONNESSIONI"





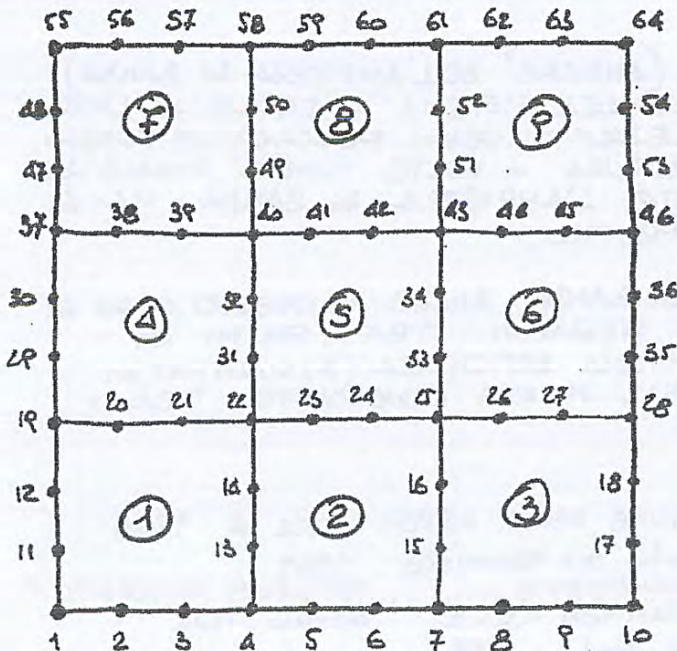
# SOLUZIONE MEDIANTE IL METODO FRONTALE

SVILUPPATA DA IROHS (1970) CONSISTE IN UNA TECNICA PARTICOLARE CHE CONSENTE DI ASSEMBLARE LA MATRICE DI RIGIDITÀ CON RELATIVI VINCOLI E CARICHI, E RISOLVERE IL SISTEMA UTILIZZANDO IL METODO DI GAUSS E LA BACK-SUBSTITUTION.

È EFFICIENTE PER QUANTO CONCERNE LA QUANTITÀ DI MEMORIA CENTRALE E AUSILIARIA NECESSARIA - PRESENTA QUALCHE DIFFICOLTÀ A CAUSA DEL NUMERO DI INFORMAZIONI DA MANTENERE CIRCA LO STATO DELLE VARIABILI ("BOOKKEEPING")

L'IDEA PRINCIPALE DEL METODO CONSISTE NELL'OPERARE CONTEMPORANEAMENTE L'ASSEMBLING E L'ELIMINAZIONE: INFATTI I COEFFICIENTI CHE SONO COMPLETAMENTE CALCOLATI (HANNO RICEVUTO IL CONTRIBUTO DI TUTTI GLI ELEMENTI CONVERGENTI) POSSONO ESSERE SUBITO ELIMINATI. IN MEMORIA IN OGNI ISTANTE È PRESENTE PARTE DELLA MATRICE (ZONA TRIANGOLARE SUPERIORE).

LE EQUAZIONI PRESENTI IN MEMORIA, I MODI ED I GRADI DI LIBERTÀ RELATIVI SONO DETTI "FRONTE" E LA LORO DIMENSIONE È DETTA AMPIEZZA DEL FRONTE. LE VARIABILI APPARTENENTI AL FRONTE SONO DETTE "ATTIVE", QUELLE GIÀ ELIMINATE SONO DETTE "ELIMINATE" LE ALTRE "INATTIVE".



CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA DI FIANCO RIPORTATA PER L'ELEMENTO ① VENGONO ATTIVATE 12 VARIABILI DI CUI 5 VENGONO SUBITO ELIMINATE (1, 2, 3, 11, 12) 7 VARIABILI RIMANGONO ATTIVE. CONSIDERANDO L'ELEMENTO ② VENGONO ATTIVATE ALTRE 8 VARIABILI (5, 6, 7, 15, 16, 23, 24, 25) MENTRE VENGONO ELIMINATE 5 VARIABILI (4, 5, 6, 13, 14). L'AMPIEZZA DEL FRONTE È 10.

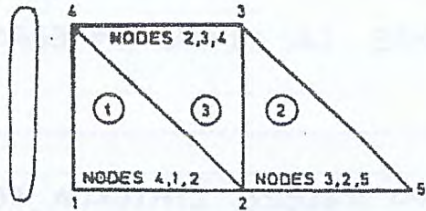
LA NUMERAZIONE DEI MODI È DEL TUTTO INDIFFERENTE NELLA SOLUZIONE MENTRE È CRITICA LA NUMERAZIONE DEGLI ELEMENTI. OCCORRE IN QUESTO CASO PROCEDERE CON UNA NUMERAZIONE DI ELEMENTI

TALE DA MANTENERE MINIMA AD OGNI PASSO, L'AMPIEZZA DEL FRONTE: UN CRITERIO DI NUMERAZIONE POTREBBE SEGUIRE IL SEGUENTE SCHEMA OPERATIVO:

- 1) SCELTA DELL'ELEMENTO INIZIALE (ELEMENTO MELO CONNESSO CON IL PUNTO DELLA STRUTTURA)



FRONT



INITIALLY

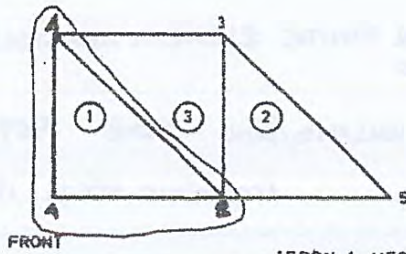
INODE = 1, NNODE  
 IDOFN = 1, NDOFN  
 LOCEL =  
 NDEST =

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

IFRON = 1, MFRON  
 NACVA =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

NFRON = 0



ELEMENT 1 - ASSEMBLY

INODE = 1, NNODE  
 IDOFN = 1, NDOFN  
 LOCEL =  
 NDEST =

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3
10	11	12	-1	-2	-3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9

NUMERAZIONE LOCALE DEI NODI

NO.	1	2	3
GR.	4	1	2

GRADI DI LIBERTA' CHE SI POSSONO ELIMINARE (NODI)

IFRON = 1, MFRON  
 NACVA =

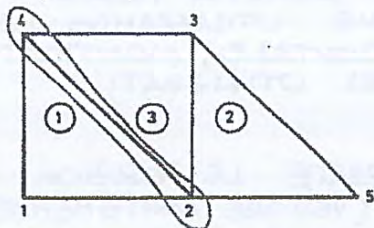
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	1	2	3	4	5	6	0	0	0	0	0	0

NFRON

$$[(\text{NODI} - 1) \times 3] + \text{IGRAD} = \text{LOCEL}$$

N° NODI (NUM. GLOBALE)

N° GRADO DI LIBERTA' (LOCALE DEL NODI)



ELEMENT 1 - ELIMINATION

IFRON = 1, MFRON  
 NACVA =

POSIZIONI DIVENTATE LIBERE

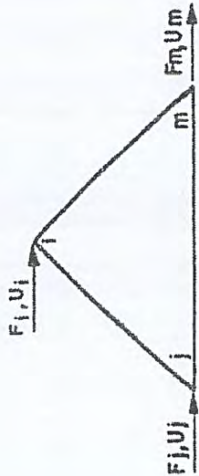
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	0	0	0	4	5	6	0	0	0	0	0	0

NFRON

GRADI DI LIBERTA' ELIMINATI



# ESEMPIO DI SOLUZIONE NUMERICA



ELEMENTO :  
1 GRADO DI  
LIBERTA' PER NODO

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

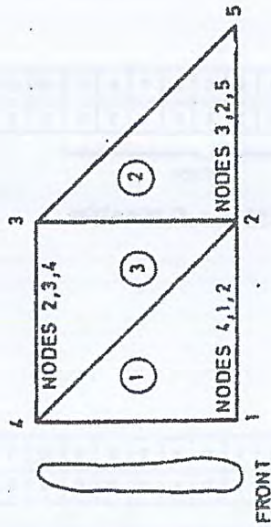
$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

**NOTA:** - TUTTI GLI ELEMENTI HANNO UGUALE MATRICE DI RIGIDERA  
- SI HA UN VALORE IMPOSTO:  $\delta_2 = 2$

## STIFFNESS AND LOADING CHARACTERISTICS OF EACH ELEMENT.

STESSO SIGNIFICATO VISTO PRIMA

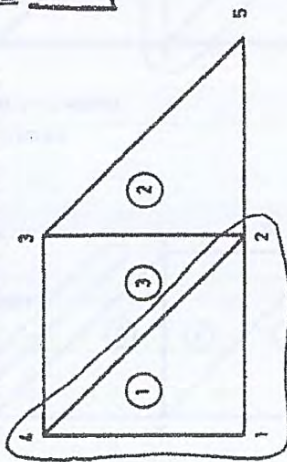
### STAGE 1 - INITIALIZATION



IFRON	1	2	3	4	5
NACVA	0	0	0	0	0

$$\text{GSTIF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{GLOAD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### STAGE 2 - ELEMENT 1 - ASSEMBLY



IFRON	1	2	3	4	5
NACVA	4	1	2	0	0

INNGE GRADO LIBERTA' CALO

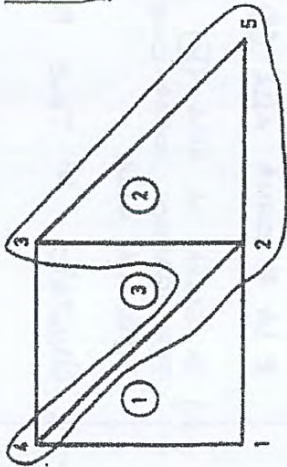
INODE	1	2	3
LOCEL	4	-1	2
NDEST	1	2	3

$$\begin{bmatrix} k_{44} & k_{41} & k_{42} \\ k_{14} & k_{11} & k_{12} \\ k_{24} & k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{Bmatrix}$$



STAGE 4 - ELEMENT 2 - ASSEMBLY



IDENT. GRADA LIBERTA'

LOC. INODE	3	2	5	4
LOCEL	1	-2	3	-5
NDEST	2	3	3	4

DOA QUANTITA LIBERA (DIAF 2)

IFRON	1	2	3	4	5
NACVA	4	3	2	5	0

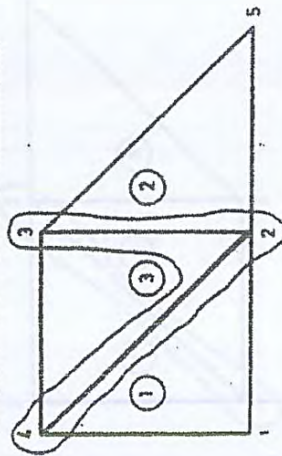
$$\begin{bmatrix}
 K_{44} & 0 & K_{42} & 0 & 0 \\
 0 & K_{33} & K_{32} & K_{35} & 0 \\
 K_{24} & K_{23} & K_{22} & K_{25} & 0 \\
 0 & K_{53} & K_{52} & K_{55} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 3 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 -\frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} & -2 & 0 \\
 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 F_4 \\
 F_3 \\
 F_2 \\
 F_5 \\
 0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \frac{40}{3} \\
 10 \\
 \frac{80}{3} \\
 10 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

SI E' SOTTILATA LA NUOVA MATRICE DELL'ELEMENTO 2 AI COEFFICIENTI PREESISTENTI (MATRICE (A))

EQUAZIONE CHE SI PUO' RISOLVERE (5° EQ. DEL SISTEMA)

L'ELIMINAZIONE DELLA (\*) CON INTELLIGENZA LE RIGHE (1) E (2) (COEFF. COLONNA "k" RELATIVI A  $\delta_1 \equiv 0$ )  
 - SI MOLTIPLICA LA RIGA (\*) PER  $(-k_{25}/k_{55})$  E LA SI SOMMA ALLA (3)  
 - SI Moltiplica LA RIGA (\*) PER  $(-k_{23}/k_{55})$  E LA SI SOMMA ALLA (4)  
 DOPODI CHE SI ATTUOLA LA RIGA (\*)

STAGE 5 - ELEMENT 2 - ELIMINATION



IFRON	1	2	3	4	5
NACVA	4	3	2	0	0

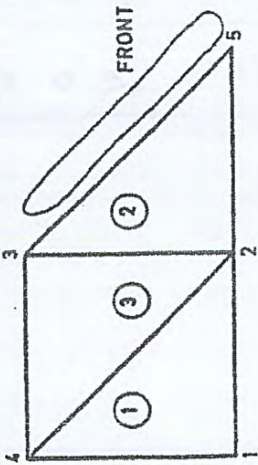
SIMM.

$$\begin{bmatrix}
 K_{44} & 0 & K_{42} & 0 & 0 \\
 0 & K_{33} & K_{32} & 0 & 0 \\
 K_{24} & K_{23} & K_{22} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 -\frac{2}{3} & -1 & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 F_4 \\
 F_3 \\
 F_2 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \frac{40}{3} \\
 10 \\
 \frac{110}{3} \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

(B)



STAGE 7 - ELEMENT 3 - ELIMINATION



RIGA CHE SI ELIMINA

IFRON	1	2	3	4	5
NACVA	0	0	0	0	0

ELIMINAZIONE INCOGNITA  $\delta_2$

$$\begin{bmatrix}
 k_{44} & k_{43} & 0 & 0 & 0 \\
 k_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \frac{3}{2} \\
 -\frac{5}{2} \\
 \frac{5}{2} \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_4 \\
 F_3 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 35 \\
 55 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

MATRICE RIULTANTE DOPO L'ELIMINAZIONE DI  $\delta_2$

SI PARTE DAL SISTEMA SOTTO RIPORTATO [MATRICE C]

$$\begin{bmatrix}
 8/3 & -2 & -2/3 & 0 & 0 \\
 -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\
 -2/3 & -2 & 8/3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \delta_4 \\
 \delta_3 \\
 \delta_2 \\
 \delta_1 \\
 \delta_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 70/3 \\
 60/3 \\
 40/3 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

SI MOLTIPLICA LA RELAZIONE (\*) PER  $(-k_{42}/k_{22})$  E LA SI SOMMA ALLA (1)

MATRICE C

SI MOLTIPLICA LA RELAZIONE (\*) PER  $(-k_{32}/k_{22})$  E LA SI SOMMA ALLA (2)

$$\begin{bmatrix}
 k_{24} \delta_4 + k_{23} \delta_3 + k_{21} \delta_2 = F_2 \\
 \dots \\
 \dots
 \end{bmatrix}$$

SI SALVA IN UN VETTORE AUXILIARIO LA RELAZIONE

COEFFICIENTI RIFERITI ALLA MATRICE C

PARTENDO POI DALLA MATRICE D SI DETERMINA L'INCOGNITA  $\delta_3$  SAPENDO CHE  $\delta_2$  È UN DATO NOTO



(23)

CALCOLO  $\delta_2$

$$\delta_2 = (F_2 - K_{23}\delta_3 - K_{24}\delta_4) / K_{22}$$

TERMINI RELATIVI ALLA  
MATRICE (C)

$$= \left( \frac{140}{3} - (-2) \cdot 2 - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 16 \right) / \frac{8}{3} = \frac{184}{3} \cdot \frac{3}{8} = 23$$

(24)

CALCOLO  $\delta_5$

$$\delta_5 = (F_5 - K_{52}\delta_2) / K_{55}$$

TERMINI RELATIVI ALLA  
MATRICE (A')

$$= \left( -10 - (-2) \cdot 23 \right) / 2 = 56 / 2 = 28$$

(25)

CALCOLO  $\delta_1$

$$\delta_1 = (F_1 - K_{12}\delta_2 - K_{14}\delta_4) / K_{11}$$

TERMINI RELATIVI ALLA  
MATRICE (A<sub>0</sub>)

$$= \left( 10 - (-2) \cdot 23 - (-1) \cdot 16 \right) / 3 = \frac{72}{3} = 24$$

STAGE	SOLUTION
7 and 6 (continued)	$\delta_4 = F_4 / K_{44} = 16$
7 and 6 (continued)	$R_3 = - (F_3 - K_{33}\delta_3 - K_{34}\delta_4) = -90$
7 and 6	$\delta_2 = (F_2 - K_{23}\delta_3 - K_{24}\delta_4) / K_{22} = 23$
5 and 4	$\delta_5 = (F_5 - K_{52}\delta_2) / K_{55} = 28$
3 and 2	$\delta_1 = (F_1 - K_{12}\delta_2 - K_{14}\delta_4) / K_{11} = 24$

TABELLA RIPILOGATIVA  
DELLA SOSTITUZIONE A  
RITORSO



PROF. CARBONE N° 2 05-03-12  
CALCOLO AUTOMATICO DELLE STRUTTURE  
I FACOLTA' CIVILE

**LUCIDI DEL CORSO**  
**CALCOLO AUTOMATICO**  
**DELLE STRUTTURE**

**PARTE SECONDA**

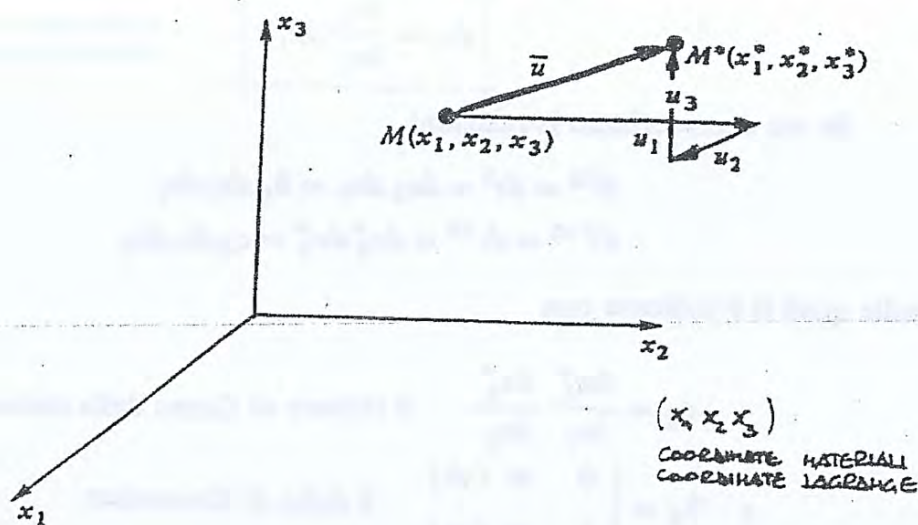
**POLITECNICO DI TORINO**



# STATO DI DEFORMAZIONE (COORDINATE CARTESIANE)

Lo studio dello stato di deformazione di un corpo consiste nel descrivere matematicamente, in senso geometrico, gli spostamenti relativi che i punti del corpo subiscono quando questo è assoggettato ad una azione esterna.

Considerato un continuo  $D$ , ed un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la posizione di un generico punto prima della deformazione è espressa dalle coordinate  $(x_1, x_2, x_3)$  del punto geometrico  $M$  ad esso associato.



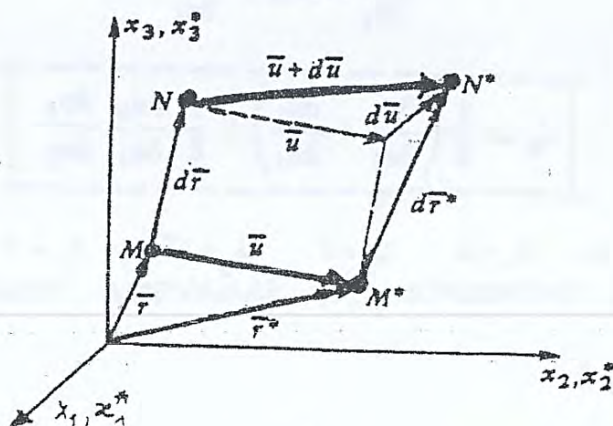
Dopo la deformazione il punto  $M$  avrà subito uno spostamento  $\bar{u}$ , per cui avrà come nuove coordinate  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  dove chiaramente

$$x_i^* = x_i + u_i$$

se  $u_i$  sono le componenti del vettore spostamento  $\bar{u}$ .

Considerando poi un punto  $N$ , prossimo ad  $M$ , di coordinate  $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ , dopo la deformazione questo avrà subito uno spostamento

$$\bar{u} + d\bar{u}$$





$$\begin{aligned}
l_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
l_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
l_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\
l_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
l_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
l_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

Definita poi la deformazione specifica lineare  $\epsilon_n$  nel punto  $M(x_1, x_2, x_3)$  nella direzione  $\bar{n}$  come

$$\epsilon_n = \frac{ds^* - ds}{ds}$$

si ha:

$$ds^* = (1 + \epsilon_n) ds$$

la quale, abbinata alla  $l_{ij} = \frac{1}{2} (c_{ij} - \delta_{ij})$ , fornisce

$$\epsilon_n \left( 1 + \frac{1}{2} \epsilon_n \right) = l_{ij} n_i n_j \quad (2)$$

dove si è indicato con

$$n_i = \cos(n, x_i) = \frac{dx_i}{ds}$$

In generale si potrà allora scrivere che

$$\epsilon_n = \sqrt{1 + 2 l_{ij} n_i n_j} - 1 \quad (3)$$

Consideriamo ora due direzioni generiche di versori  $\bar{n}$  e  $\bar{m}$  tali da formare un angolo  $\omega$  tra di loro prima della deformazione. Definita con  $\gamma_{nm}$  la deformazione specifica angolare, e cioè la variazione che subisce l'angolo  $\omega$  in seguito alla deformazione, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
d\bar{r}^{\bar{n}} \cdot d\bar{r}^{\bar{m}} &= d\bar{r}^{\bar{n}} d\bar{r}^{\bar{m}} \cdot \cos \omega \\
d\bar{r}^{*\bar{n}} \cdot d\bar{r}^{*\bar{m}} &= d\bar{r}^{*\bar{n}} d\bar{r}^{*\bar{m}} \cos(\omega - \gamma_{nm})
\end{aligned}$$

dalle quali, ricordando che

$$d\bar{r}^{*\bar{n}} \cdot d\bar{r}^{*\bar{m}} = dx_k^{\bar{n}*} dx_k^{\bar{m}*} = \frac{\partial x_k^{\bar{n}*}}{\partial x_i} \frac{\partial x_k^{\bar{m}*}}{\partial x_j} dx_i^{\bar{n}} dx_j^{\bar{m}} = (2 l_{ij} + \delta_{ij}) dx_i^{\bar{n}} dx_j^{\bar{m}}$$



$$L_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{ds^{*2}}{ds^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) \longrightarrow \beta = (1 + 2L_{11})^{1/2}$$

SVILUPPANDO IN SERIE:

$$\beta = \frac{ds^*}{ds} = (1 + 2L_{11})^{1/2} = 1 + L_{11} - \frac{1}{2} L_{11}^2 + \dots$$

SE  $L_{11}$  E' PICCOLO  
SI POSSONO TRASCURARE I TERMINI DI  
ORDINE SUPERIORE

$$L_{11} \approx \beta - 1 = \frac{ds^* - ds}{ds} = \epsilon_1 = \frac{du_1}{dx_1} \quad (\epsilon_{11})$$

$-L_{12}$   $\rightarrow$  SI CONSIDERI UNO SPOSTAMENTO CON COMPONENTI LUNGO  
GLI ASSI  $x_1$  E  $x_2$  [ $d\vec{r} = (dx_1^*, dx_2^*, 0)$ ]

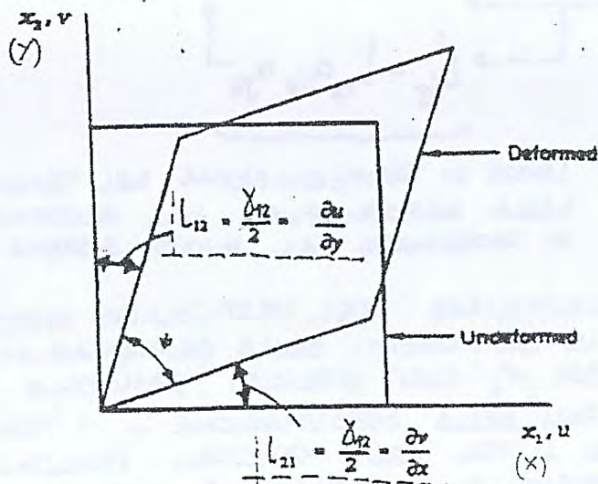
DALLA RELAZIONE (4) E' POSSIBILE SCRIVERE:

$$\sin \gamma_{12} = \frac{2L_{12}}{\sqrt{1+2L_{11}} \sqrt{1+2L_{22}}}$$

SE  $L_{11} \ll 1$  E  $L_{22} \ll 1$  SI OTTIENE

$$\sin \gamma_{12} \approx 2L_{12} \longrightarrow L_{12} = \frac{1}{2} \sin \gamma_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}$$

LE COMPONENTI DEL TENSORE RELATIVE  
ALLA DEFORMAZIONE TANGENZIALE  
SONO META' DELL'ANGOLO DI DEFOR-  
MAZIONE TANGENZIALE.



$$\gamma_{12} = L_{12} + L_{21} = 2L_{12} = 2L_{21}$$



$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$



$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$



LA DETERMINAZIONE DELLE DIREZIONI PRINCIPALI PUO' ESSERE CONDOTTA A PARTIRE DALLA LEGGE DI TRASFORMAZIONE DIRITTA ESAMINATA: L'INDICATO CON  $l(m)$  LO SCALARE ASSOCIATO ALLA DIREZIONE  $m$ . ( $m_i$  NORMALE ALLA SUPERFICIE DEL PIANO PRINCIPALE)

$$l(m) = m_i m_j l_{ij} \quad \text{DOVE } \bar{m} \cdot \bar{m} = m_i m_i = 1$$

SI COSTRUISCE, MEDIANTE LA TECNICA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE LA FUNZIONE SCALARE  $f$

$$f = l_{ij} m_i m_j - \lambda (m_i m_i - 1)$$

↑  
MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

PER QUALE DIREZIONE DEL VETTORE NORMALE  $\bar{m}$  SI HA  $l(m)$  MASSIMO? LA CONDIZIONE DI ESTREMO LA SI OTTIENE STUDIANDO LA STAZIONARIETA' DI  $f$ . (DIFFERENZIANDO  $f$  RISPETTO AI COSENI DIRETTORI E PONEENDO UGUALE A ZERO I RISULTATI)

$$\frac{\partial}{\partial n_k} (l_{ij} n_i n_j) = l_{ij} \left( \frac{\partial n_i}{\partial n_k} n_j + n_i \frac{\partial n_j}{\partial n_k} \right) = l_{ij} (\delta_{ik} n_j + n_i \delta_{jk})$$

$$= l_{kj} n_j + l_{ik} n_i = 2l_{kj} n_j$$

k = INDICE LIBERO

$$\frac{\partial}{\partial n_k} (\lambda n_i n_i) = \lambda \left( \frac{\partial n_i}{\partial n_k} n_i + n_i \frac{\partial n_i}{\partial n_k} \right) = \lambda (\delta_{ik} n_i + n_i \delta_{ik}) = 2\lambda n_k$$

CAMBIANDO  $k$  CON  $i$ , LE RELAZIONI PRECEDENTI FORMISCONO:

$$\frac{\partial f}{\partial n_i} = 2(l_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

$$(l_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (*)$$

ESSENDO  $n_j$  ARBITRARI, PER L'ESISTENZA NON TRIVIALE DELLA (\*), OCCORRE

$$\begin{vmatrix} l_{ij} - \lambda \delta_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 I_1 - \lambda I_2 + I_3 = 0$$

EQ. DI CAYLEY-HAMILTON (CUBICA)

INVARIANTI DELLA DEFORMAZIONE (SONO INDIPENDENTI DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO)

→

$$I_1 = \text{tr } l_{ij} = l_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (l_{ii} l_{jj} - l_{ij} l_{ji})$$

$$I_3 = |l_{ij}| = \frac{1}{6} (l_{ii} l_{jj} l_{kk} - 3l_{ii} l_{jk} l_{jk} + 2l_{ij} l_{jk} l_{ki})$$



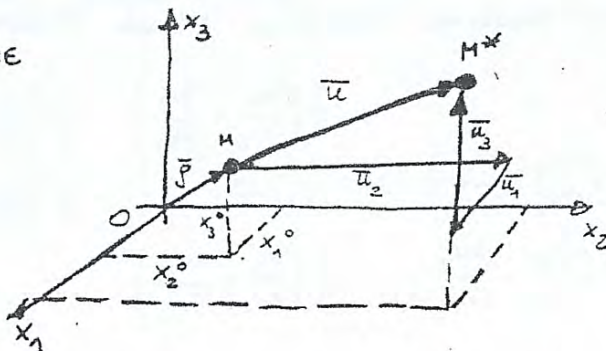
# • ROTAZIONE LOCALE DI CORPO RIGIDO

POTEENDO ESPRIMERE LA POSIZIONE DEFORMATA  $H^*$  TRAMITE LA RELAZIONE

$$\overline{OH^*} = \overline{p} + \overline{u}$$

POSIZIONE INIZIALE DEL PUNTO (H)

VETTORE SPOSTAMENTO



NELL'IPOTESI DI LINEARIZZAZIONE, NEI RIGUARDI DELLE FUNZIONI COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO ( $u_i(x_1, x_2, x_3)$ ) CHE SI TRASCURANO, NELLO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR, I TERMINI DEL SECONDO ORDINE E SUPERIORI RISPETTO A QUELLI DEL PRIMO ORDINE NEGLI INCREMENTI DI COORDINATE ( $x_j - x_j^0$ )

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0 + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 (x_j - x_j^0)$$

i = INDICE LIBERO

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1^0 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)_0 (x_1 - x_1^0) + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_0 (x_2 - x_2^0) + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)_0 (x_3 - x_3^0)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = u_2^0 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)_0 (x_1 - x_1^0) + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)_0 ( \dots )$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \dots$$

LE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO DEL PUNTO  $H^*$ , APPARTENENTE ALL'INTORNO INFIMITESIMO DEL PUNTO H, RIFERENDOCI AD UNA TERZA CARTESIANA PARALLELA AL SISTEMA  $OX_1 X_2 X_3$ , CON ORIGINE IN H ( $H \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$ ) DOVE

$$\overline{x}_i = x_i - x_i^0$$

POSSONO ESSERE ESPRESSE TRAMITE LA RELAZIONE MATRICIALE:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_0 \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} \quad (*)$$

TERMINI CALCOLATI NEL PUNTO H (SONO DELLE COSTANTI)



• CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ

INDICATO CON

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}) \quad (*)$$

IL TENSORE DELLA DEFORMAZIONE NON È INGENERE SEMPRE POSSIBILE, ASSEGNATE LE SEI COMPONENTI DEL TENSORE DI DEFORMAZIONE, RICAVARE LE TRE FUNZIONI SPOSTAMENTO - OCCORRE CHE RISULTINO VERIFICATE ALCUNE RELAZIONI TRA LE FUNZIONI ESPRIMENTI LE COMPONENTI  $\epsilon_{ij}$ , AFFINCHÉ SIA POSSIBILE RICAVARE LE FUNZIONI  $u_i$  ("COMPATIBILITÀ") -

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = \gamma_{12,12} \quad \rightarrow \quad G_{11} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\epsilon_{22,33} + \epsilon_{33,22} = \gamma_{23,23}$$

$$\epsilon_{33,11} + \epsilon_{11,33} = \gamma_{31,31}$$

$$\epsilon_{11,23} = \frac{1}{2} (-\gamma_{23,1} + \gamma_{31,2} + \gamma_{12,3})_{,1} \quad \rightarrow \quad G_{123} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \gamma_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\epsilon_{22,31} = \frac{1}{2} (-\gamma_{31,2} + \gamma_{12,3} + \gamma_{23,1})_{,2}$$

$$\epsilon_{33,12} = \frac{1}{2} (-\gamma_{12,3} + \gamma_{23,1} + \gamma_{31,2})_{,3}$$

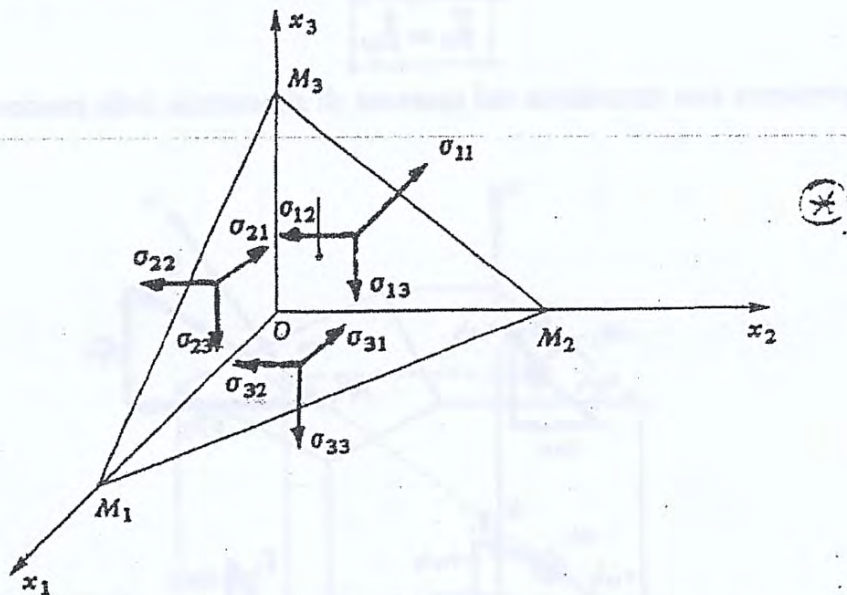
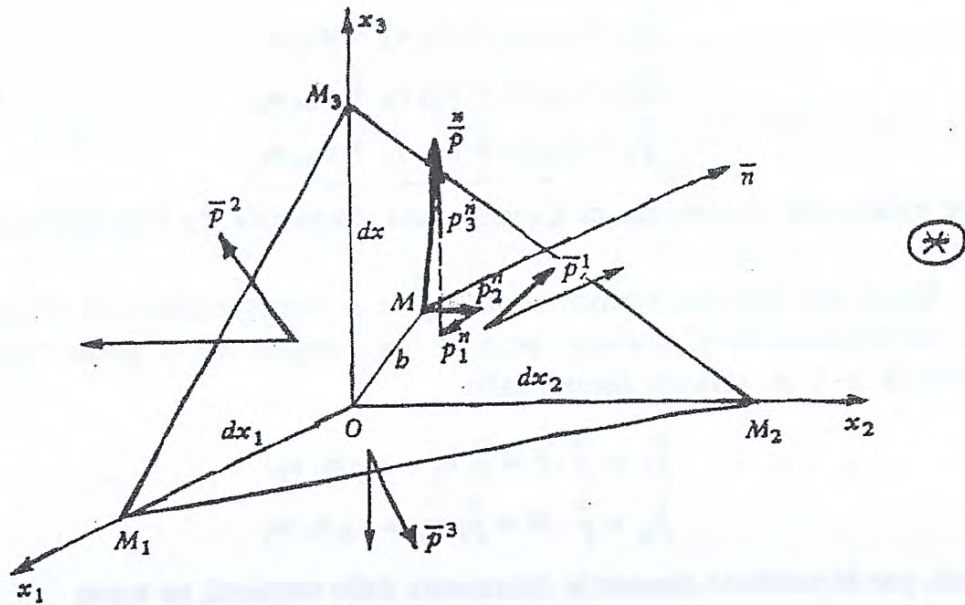
$$G_{ij} = G_{ji}$$

POICHÉ LE SEI RELAZIONI SONO RICAVATE A PARTIRE DALLA (\*) NON SONO OMINDIPENTE TRA DI LORO INDIPENDENTI - LE SEI RELAZIONI SONO DETTE "CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ" E RISULTANO "NECESSARIE" PER L'ESISTENZA DI UNA TERNA DI FUNZIONI  $u_i$ , MONODROME, CONTINUE CON LE DERIVATE PARZIALI FINO AL TERZO ORDINE, CORRELATE ALLE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE SECONDO LE (\*) -  
IL PROCEDIMENTO CORRETTO È DI INCLUDERE LE 6 EQUAZIONI NELLA FORMULAZIONE DEL PROBLEMA, E DI TENER CONTO CHE ESSE SONO LEGATE DA TRE RELAZIONI DI DIPENDENZA:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial G_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial G_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right] \quad \text{IDENTITÀ DI BIANCHI}$$

LE SEI CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ RISULTANO ANCHE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA DI TRE FUNZIONI COMPATIBILI IN UN CORPO SEMPLICEMENTE CONNESSO COME DIMOSTRATO DA CESARO - PER CORPI PLURICONNESSI È NECESSARIO INTRODURRE ALCUNE CONDIZIONI AGGIUNTIVE PER OTTENERE FUNZIONI MONODROME (SOKOLNIKOFF) -





Indicati con  $\bar{p}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $\bar{p}^n$  i vettori tensioni agenti su elementi di area aventi rispettivamente come normale le direzioni degli assi coordinati ed il versore  $\bar{n}$ , questi avranno come componenti secondo i tre assi cartesiani le

$$\bar{p}_j^n = \bar{p}^n \cdot \bar{i}_j \quad \leftarrow \text{---} \quad \textcircled{*}$$

$$\sigma_{ij} = \bar{p}^i \cdot \bar{i}_j \quad \leftarrow \text{---} \quad \textcircled{*}$$

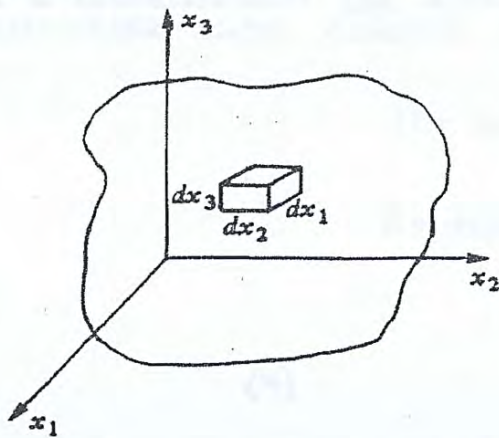
I termini  $\sigma_{ij}$  sono detti tensione normale quando  $i = j$  e tensione tangenziale per  $i \neq j$ .

Dall'equilibrio alle traslazioni secondo i tre assi cartesiani, nelle ipotesi che  $b \rightarrow 0$  (vedi figura) ne seguono le equazioni di equilibrio alla superficie:

$$\bar{p}_i^n = \sigma_{ij} n_j \quad (n_j = \cos(\bar{n}, x_j)) \quad (a)$$



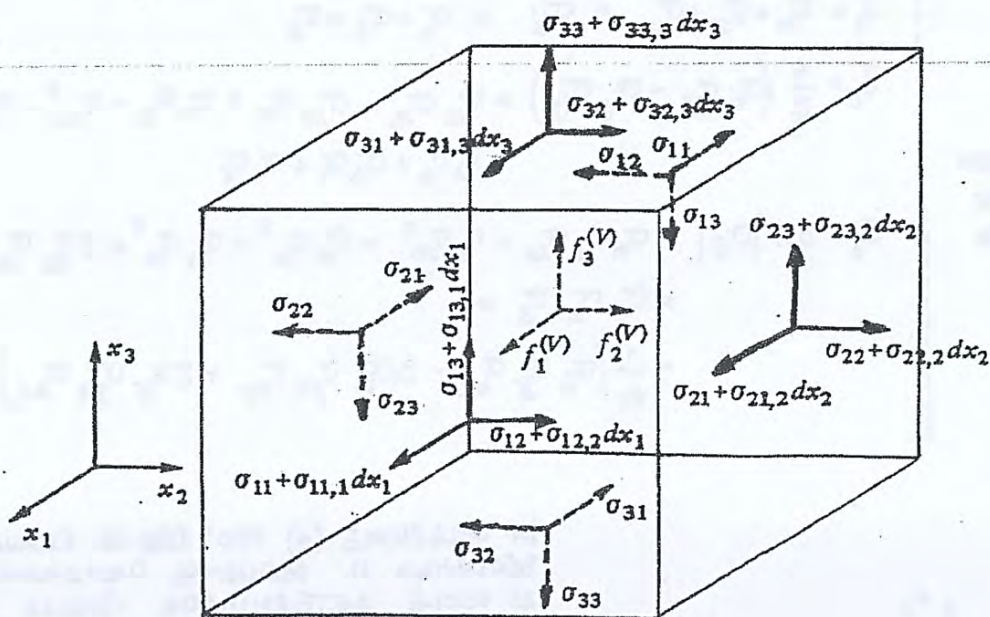
Ritornando ora al concetto di equilibrio, se un corpo è in equilibrio sotto un assegnato sistema di forze, lo è anche ogni sua parte. Quindi se immaginiamo di estrarre da questo un parallelepipedo infinitesimo di lati  $dx_1 dx_2 dx_3$ , anche questo risulterà essere in equilibrio.



Imponendo tale condizione, e scrivendo quindi le tre equazioni di equilibrio alla traslazione secondo i tre assi coordinati si ottengono le equazioni indefinite di eq.:

$$\sigma_{ij,j} + f_i^{(V)} = \vartheta$$

dove si è indicato con la virgola l'operazione di derivazione e con  $f_i^{(V)}$  la forza di volume.



Le relazioni precedenti esplicitate risultano:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1^{(V)} = \vartheta$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2^{(V)} = \vartheta$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3^{(V)} = \vartheta$$

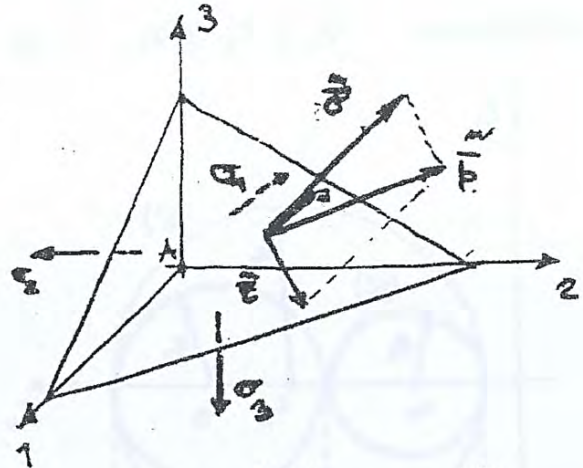


$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_m) m_1 + \sigma_{12} m_2 + \sigma_{13} m_3 &= 0 \\ \sigma_{12} m_1 + (\sigma_{22} - \sigma_m) m_2 + \sigma_{23} m_3 &= 0 \\ \sigma_{13} m_1 + \sigma_{32} m_2 + (\sigma_{33} - \sigma_m) m_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \iff (\sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}) = 0$$

• CERCHI DI MOHR

DEFINITA UNA DIREZIONE GENERALE  $m$ ,  
LA PROIEZIONE SULL'ASSE  $m$  DI UNA  
FORZA  $\vec{F}$  E' DATA DA

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \vec{F} \cdot \vec{m} = \\ &= p_{m1} m_1 + p_{m2} m_2 + p_{m3} m_3 = \\ &= [m_1 \ m_2 \ m_3] \begin{bmatrix} p_{m1} \\ p_{m2} \\ p_{m3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



CONTEMPORANEAMENTE SI PUO' SCRIVERE  
L'EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE SECONDO  
LE TRE DIREZIONI PRINCIPALI

$$\sigma_m = \left| \frac{p_m}{m} \right| \quad \tau_m = \left| \frac{q_m}{m} \right|$$

$$p_{m1} = \sigma_1 m_1 \quad p_{m2} = \sigma_2 m_2 \quad p_{m3} = \sigma_3 m_3$$

HE CONSEGUE CHE

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sigma_1 m_1^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 m_3^2 = \sigma_i m_i^2 \\ \sigma_m^2 + \tau_m^2 &= p_m^2 = p_{m1}^2 + p_{m2}^2 + p_{m3}^2 = \\ &= \sigma_1^2 m_1^2 + \sigma_2^2 m_2^2 + \sigma_3^2 m_3^2 = \sigma_i^2 m_i^2 \end{aligned}$$

TENENDO CONTO CHE  $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$ , INTENDEENDO  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  COME COEFFICIENTI NOTI, ESSE  
DO NOTO IL TENSORE DEGLI SFORZI, E  $\sigma_m, \tau_m^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  COME PARAMETRI, SI RICAVA:

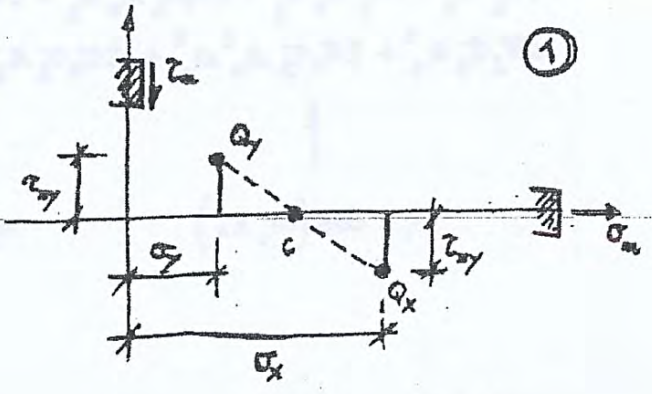
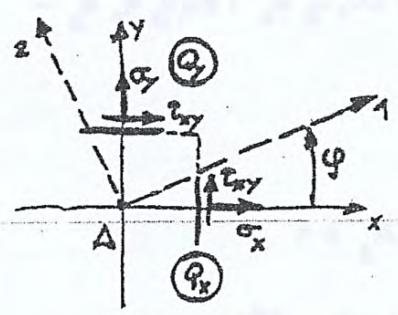
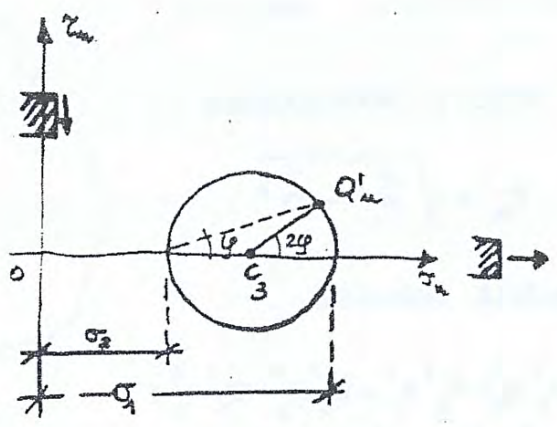
$$m_1^2 = \frac{\left(\sigma_m - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_m^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$m_2^2 = \frac{\left(\sigma_m - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_m^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (*)$$

$$m_3^2 = \frac{\left(\sigma_m - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_m^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

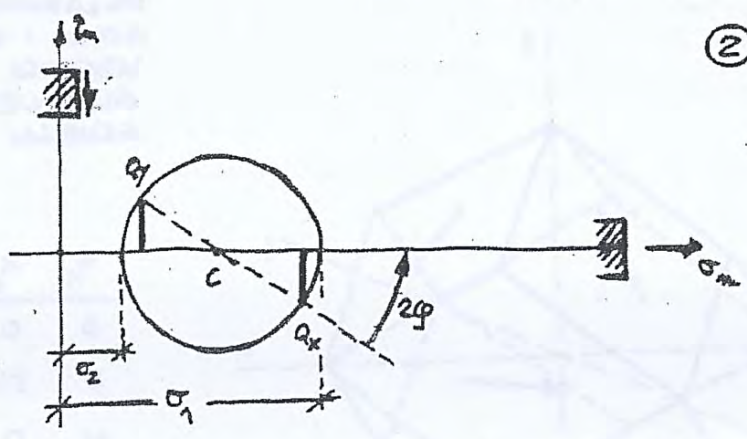


IL PUNTO  $(\sigma_n, z_n)$  RELATIVO ALLA GIACCIATURA  $\pi$ , SI OTTENE COSTRUEENDO IL RAGGIO  $CQ'_n$  RUOTATO RISPETTO ALL'ASSE  $\sigma_n$  NELLO STESSO SENSO DI ROTAZIONE DI  $\pi$  RISPETTO ALL'ASSE 1, DI UN ANGOLO DOPPIO, COE'  $2\varphi$ .

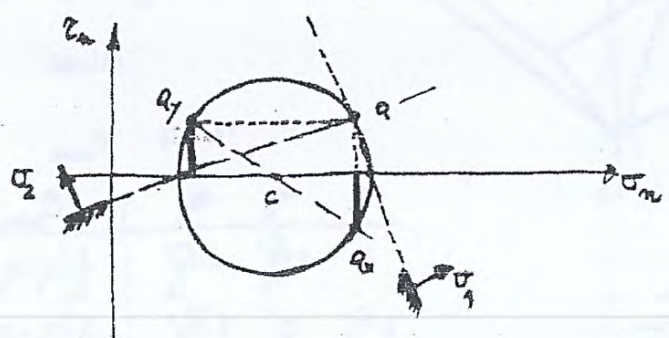


①

CONFEZIONE DEI CERCCHI DI MOHR A PARTIRE DA UNA GIACCIATURA GENERIC



②



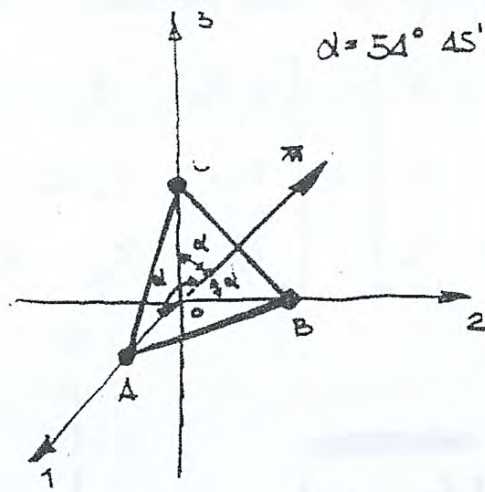
③

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + z_{ny}^2}$$

$$\lg 2\varphi = \frac{2 z_{ny}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$



• TENSIONI OTTAEDRICHE



(0123) SISTEMA ASSI PRIMARI

CON RIFERIMENTO AL PIANO "OTTAEDRICO" LA CUI NORMALE FORMA LO STESSO ANGOLO  $\alpha$  CON LE TRE DIREZIONI PRINCIPALI DI COSENI

$$n_i = 1/\sqrt{3}$$

LE TENSIONI  $\sigma_m$  E  $\tau_m$  (DETTE TENSIONE OTTAEDRICA NORMALE E TENSIONE TANGENZIALE OTTAEDRICA) RISULTANO ESPRESSE DALLE:

$$\sigma_m = \sigma_{OTT} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

OSS: RICORDANDO CHE

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$



$$\sigma_{OTT} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\tau_m^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) \quad (*)$$

OSS: • IN TERMINI DI COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE  $\tau_m$  RISULTA

$$\tau_m = \frac{1}{3} \sqrt{2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 6(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)}$$

• IN TERMINI DI INVARIANTI DELLA TENSIONE

$$\tau_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{J_2^2 + 3J_3}$$

• NELLA TEORIA DELLA "PLASTICITA'" OLTRE ALLA (\*), VIENE COMUNEMENTE UTILIZZATA UN SUO SVILUPPO:

$$\tau_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}$$



# ELASTICITA'

- SI IPOTIZZA UN COMPORTAMENTO DEL MATERIALE DI TIPO:
- OMOGENEO (INDIPENDENTE DAL PUNTO DEL CORPO)
  - ISOTROPO (INDIPENDENTE DALLA DIREZIONE)
  - ELASTICO (RITORNO ALLO STATO INIZIALE)
  - LINEARE (SPOSTAMENTI PROPORZIONALI AI CARICHI)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

LEGGE DI HOOKE

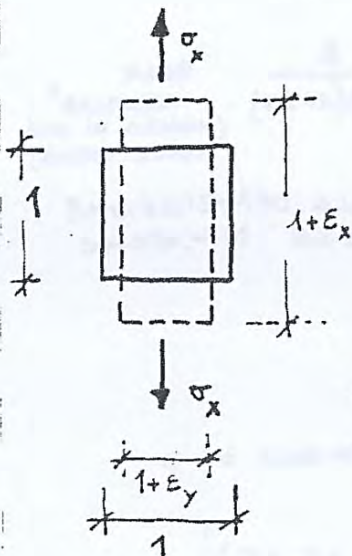
$E$  = MODULO DI ELASTICITA' (O MODULO DI YOUNG)

$\nu$  = MODULO O COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE TRASVERSALE (O MODULO DI POISSON)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

DES: - LE RELAZIONI SOPRA RIPORTATE SONO VALIDE NELL'IPOTESI DI PICCOLE DEFORMAZIONI (PER NECESSARIAMENTE PICCOLI GRADIENTI DI SPOSTAMENTO)

- IN UNO STATO DI TENSIONE UNIDIREZIONALE



$$\epsilon_x > 0$$

$$\epsilon_y < 0$$

$$\sigma_x \neq 0$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\nu \epsilon_x$$

"E" PRENDE IL NOME DI MODULO DI ELASTICITA' LONGITUDINALE

COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE TRASVERSALE

III

RAPPORTO TRA DEFORMAZIONE SPECIFICA ORTOGONALE ALLA DIREZIONE DELLA TENSIONE E DEFORMAZIONE LUNGO LA DIREZIONE DELLA TENSIONE

ESSENDO  $\nu > 0$  SI PUO' DIMOSTRARE CHE DEVE ESSERE (ESCLUDENDO MATERIALI CON  $\nu < 0$ )

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$



$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} J_1^E \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(COSTANTI DI LAURE)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \epsilon_x + \lambda J_1^E & \tau_{xy} &= \mu \gamma_{yx} \\ \sigma_y &= 2\mu \epsilon_y + \lambda J_1^E & \tau_{xz} &= \mu \gamma_{xz} \\ \sigma_z &= 2\mu \epsilon_z + \lambda J_1^E & \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz} \end{aligned} \right\}$$



OSS: - SOMMANDO LE TRE  $J_1^E$  COSI' SCRITTE SI RICAHA

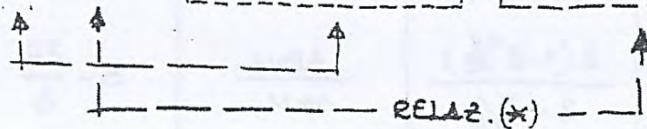
$$J_1^{\sigma} = (3\lambda + 2\mu) J_1^E \quad (*)$$

CHE RIPRODUCHE LA LEGGE DI HOOKE IN FORMA VOLUMETRICA DAL CONFRONTO CON LA RELAZIONE PRESENTE SI TRAE:

$$3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$$

- CON RIFERIMENTO AL TENORE MEDIAZIONALE SI PUO' SCRIVERE CHE:

$$\sigma_x - \frac{J_1^{\sigma}}{3} = \left[ 2\mu \epsilon_x + \lambda J_1^E \right] - \frac{J_1^E}{3} (3\lambda + 2\mu)$$



$$\sigma_x - \frac{J_1^{\sigma}}{3} = 2\mu \left( \epsilon_x - \frac{J_1^E}{3} \right)$$

$\uparrow$   $\sigma_m$   $\uparrow$   $\epsilon_m$

$$\sigma_x - \sigma_m = 2\mu (\epsilon_x - \epsilon_m)$$



# MATERIALE DI TIPO ANISOTROPO

LE LEGGI  $\sigma$ - $\epsilon$  (EQ. COSTITUTIVE) FINO AD ORA ESAMINATE VALGONO PER MATERIALI ISOTROPI: "UNA DATA DEFORMAZIONE, CON SEGUENTE AD UNO STESSO STATO DI TENSIONE, È INDIPENDENTE DALLA DIREZIONE". MOLTI MATERIALI REALI NON SEGUONO QUESTA SEMPLICE LEGGE DI COMPORTAMENTO: "MATERIALI ANISOTROPI".  
 NELL'IPOTESI IN CUI VALGA PER IL MATERIALE UN COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE, LA LEGGE COSTITUTIVA PIÙ GENERALE ASSUME LA FORMA:

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl} \epsilon_{kl} \qquad \sigma_i = d_{ij} \epsilon_j$$

FORMA CONTRATTA

$$\begin{matrix} \sigma_{11} = \sigma_1 & \sigma_{22} = \sigma_2 & \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{12} = \sigma_4 & \sigma_{23} = \sigma_5 & \sigma_{31} = \sigma_6 \end{matrix}$$

OSS: • PER LA SIMMETRIA DEL TENSORE  $\sigma_{ij}$  GLI 81 TERMINI  $d_{ijkl}$  SI RIDUCONO A 36

$$d_{ijkl} = d_{jikl} \qquad d_{ijkl} = d_{ijlk}$$

• ANNETTENDO ELASTICITÀ È DUHQE UN POTENZIALE ELASTICO I TERMINI SI RIDUCONO A 21 ( $d_{ij} \leftrightarrow$  MATRICE SIMMETRICA)

$$d_{ij} = d_{ji}$$

$$\tau_i = d_{ij} \epsilon_j = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_i}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j} = d_{ij} = d_{ji}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ & & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ & & & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ & & & & d_{55} & d_{56} \\ & & & & & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

SIMM.

$$[\sigma] = [D][\epsilon]$$







$$L = \frac{1}{2} \int_S [f^{(s)}]^T [u] ds + \frac{1}{2} \int_V [f^{(v)}]^T [u] dV$$

CLAUPEYRON: IL LAVORO DI DEFORMAZIONE  $L$  E' PARI ALLA META' DEL PRODOTTO SCALARE TRA I VALORI DELLE FORZE ESTERNE ALL'ISTANTE FINALE E I VALORI DEGLI SPOSTAMENTI DEI LORO PUNTI DI APPLICAZIONE ALL'ISTANTE FINALE  $t_f$

OSS: 1) LE FORZE ALL'ISTANTE INIZIALE  $t_i$  SONO CONSIDERATE DI VALORE NULLO - SI IPOTIZZA UNA VARIAZIONE DEL TIPO

$$X(x, y, z, t) = \frac{t - t_i}{t_f - t_i} X(x, y, z, t_f)$$

2) PER IL LAVORO DI DEFORMAZIONE NON VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPORZIONE DEGLI EFFETTI

SUPPOSTO IL SOLO CARICO  $p_x$  A CUI CORRISPONDE UN CAMPO DI SPOSTAMENTI  $u, v, w$ , IL LAVORO VALE

$$L = \frac{1}{2} \int_S p_x \cdot u ds$$

SUPPONIAMO ORA DI AGGIUNGERE A  $p_x$  UN SECONDO CARICO  $\bar{p}_x$  (ANCHE QUESTO VARIABILE DA  $\phi$  a  $\bar{p}_x$ ) A  $\bar{p}_x$  CORRISPONDONO GLI SPOSTAMENTI  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$

PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPORZIONE DEGLI EFFETTI

$$p_x + \bar{p}_x \longrightarrow u + \bar{u} \quad v + \bar{v} \quad w + \bar{w}$$

IL LAVORO DI DEFORMAZIONE VALE

$$L = \frac{1}{2} \int_S (p_x + \bar{p}_x) \cdot (u + \bar{u}) ds =$$

$$\frac{1}{2} \int_S p_x u ds + \frac{1}{2} \int_S \bar{p}_x \bar{u} ds + \frac{1}{2} \int_S (p_x \bar{u} + \bar{p}_x u) ds$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $L(p_x)$   $L(\bar{p}_x)$  ?



NELLA TEORIA DELL'ELASTICITA' LA FUNZIONE

$$\frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \delta_{xy} + \tau_{xz} \delta_{xz} + \tau_{yz} \delta_{yz}) = \varphi$$

VIENE DETTA "POTENZIALE ELASTICO"  
ED HA COME SIGNIFICATO FISICO QUELLO DI  
DENSITA' DI ENERGIA INTERNA.



$$E_{int} = \int_V \varphi dV$$

$$dE_{int} = \varphi dV$$

$$\varphi = \frac{1}{2} [\epsilon]^T [\sigma]$$

$$\varphi = \frac{1}{2} [\epsilon]^T [C] [\epsilon]$$

$$[\sigma] = [C] [\epsilon]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & \phi & \phi & \phi \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \phi & \phi & \phi \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \delta_{xy} \\ \delta_{yz} \\ \delta_{xz} \end{bmatrix}$$

MATRICE DEI COEFFICIENTI ELASTICI (HOOKES)

E: MODULO DI ELASTICITA' O DI YOUNG

ν: RAPPORTO DI POISSON

OSS: 1) SI DIMOSTRA CHE I VALORI DELLA FUNZIONE POTENZIALE ELASTICO NON DIPENDONO DALLA SCELTA DEL RIFERIMENTO

2) IL POTENZIALE ELASTICO φ E' UNA FORMA QUADRATICA (REALE NELLE 6 VARIABILI REALI ε e δ) DEFINITA POSITIVA.



# MINIMO DELL'ENERGIA

DATO UN CORPO LIBERO OPPURE VINCOLATO RIGIDAMENTE (CIOE' VINCOLATO CON VINCOLI RIGIDI) E SOTTOPOSTO A FORZE ESTERNE  $P_x, P_y, P_z$  E FORZE DI VOLUME  $X, Y, Z$ , INDICATO CON:

$$U = \{ \tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\tau}_{xy}, \tilde{\tau}_{xz}, \tilde{\tau}_{yz} \}$$

↑  
INSIEME DELLE SESTUPLE EQUILIBRATE MA NON CONGRUENTI NECESSARIAMENTE (STATI DI TENSIONE CHE SODDISFANO LE EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO E LE CONDIZIONI AL CONTOURNO)

IL FUNZIONALE DELL'ENERGIA  $E_{int}$  (NELLA TEORIA MATEMATICA ELASTICA)

$$E_{int} = \int_V \left\{ \frac{1}{2G} [\tilde{\sigma}_x^2 + \tilde{\sigma}_y^2 + \tilde{\sigma}_z^2 - 2\nu(\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_z + \tilde{\sigma}_y\tilde{\sigma}_z)] + \frac{1}{2G} (\tilde{\tau}_{xy}^2 + \tilde{\tau}_{xz}^2 + \tilde{\tau}_{yz}^2) \right\} dV$$

FUNZIONALE  
ESPRESSO IN TERMINI  
DI STATO DI TENSIONE

IN ASSENZA DI CONDIZIONI VINCOLARI IMPRESSE AMMETTE COME PUNTO DI MINIMO (ASSOLUTO) LA SESTUPLA  $\sigma_x \dots \tau_{yz}$  SOLUZIONE UNICA DEL PROBLEMA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO NELL'INSIEME DI TUTTI GLI STATI TENSIONALI EQUILIBRATI (CONGRUENTI E NON)

OSS: IL PRINCIPIO DELLA MINIMA ENERGIA — ASSICURA CHE TRA TUTTI I POSSIBILI STATI TENSIONALI EQUILIBRATI MA NON NECESSARIAMENTE CONGRUENTI NEL CORPO SI STABILISCE LO STATO TENSIONALE EQUILIBRATO E CONGRUENTE CHE RENDE MINIMO IL FUNZIONALE DELL'ENERGIA INTERNA DEL CORPO  $E_{int}$ : IL CORPO SI DEFORMA IN MODO TALE CHE L'ENERGIA SIA MINIMA

OSS: SI RICORDA CHE NEL PROBLEMA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO L'ENERGIA INTERNA DEL CORPO COINCIDE CON L'ENERGIA TOTALE (OVERO COMPLESSIVA DEL CORPO)



APPLICANDO IL TEOREMA DI GAUSS, LA RELAZIONE PRECEDENTE DIVIENE

$$\int_V [X \delta u + Y \delta v + Z \delta w] dv + \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{xz} \delta w] \right\} dv +$$

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w] \right\} dv +$$

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{xz} \delta u + \tau_{yz} \delta v + \sigma_z \delta w] \right\} dv =$$

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u dv + \int_V \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v dv +$$

$$\int_V \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w dv + \int_V \left[ \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \delta w}{\partial z} + \right. \quad (*)$$

$$\left. + \tau_{xy} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left( \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dv$$

POICHE' IL CORPO E' IN EQUILIBRIO, VALGONO LE EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

ESSENDO POI LEGITO LO SCAMBIO TRA IL SIMBOLO DI VARIAZIONE ED IL SIMBOLO DI DERIVATA:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta u = \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \delta \epsilon_x$$

LA RELAZIONE (\*) DIVIENE

$$\int_V [\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}] dv =$$

$$= \int_V [\delta \epsilon]^T [\sigma] dv$$



$$= \int_V \delta^{(1)} \varphi \, dV = \delta^{(1)} \int_V \varphi \, dV = \delta^{(1)} E_{int}$$

↑  
VARIAZIONE PRIMA  
ENERGIA POTENZIALE  
ELASTICA

DA CUI SEGUE

$$\delta^{(1)} E_{int} = \int_V [\delta u]^T [f^{(1)}] \, dV + \int_S [\delta u]^T [f^{(2)}] \, dS$$

"SE UN CORPO ELASTICO SI TROVA NELLA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO CORRISPONDENTE ALL'AZIONE DI DATE FORZE ESTERNE, LA SOMMA DEI LAVORI DA QUESTE ESEGUITE PER UNA QUALUNQUE DEFORMAZIONE VIRTUALE CONGRUENTE E COMPATIBILE E' UGUALE ALLA VARIAZIONE PRIMA DELLA ENERGIA POTENZIALE ELASTICA (O ENERGIA INTERNA DI DEFORMAZIONE)"

DEFINITA POI COME "ENERGIA POTENZIALE DEI CARICHI APPLICATI" LA RELAZIONE:

$$V = - \int_V [Xu + Yv + Zw] \, dV - \int_S [p_x u + p_y v + p_z w] \, dS$$



DAL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI PRECEDENTEMENTE SCRITTO SI TRAE

$$- \delta^{(1)} V = \delta^{(1)} U \quad \longrightarrow \quad \delta^{(1)} (U + V) = 0$$

↑  
 $\pi = U + V$

VIENE DETTA ENERGIA POTENZIALE TOTALE

RAPPRESENTA IL PRINCIPIO VARIAZIONALE DI STAZIONARIETA' DELL'ENERGIA POTENZIALE TOTALE



IL FUNZIONALE  $\pi([u], [E])$  NELLA CLASSE DELLE FUNZIONI  $[u], [E]$  CONTINUE, DERIVABILI, GEOMETRICAMENTE AMMISSIBILI (CONGRUENTI) E' STAZIONARIO IN CORRISPONDENZA DELLA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO.



## TEOREMA DI GAUSS (APPENDICE)

### A) DIVERGENZA

DATO UN VETTORE

$$\vec{H}(x, y, z) = H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k}$$

FUNZIONI CONTINUE  
CON LE LORO DERIVATE  
PRIME NEL DOMINIO DI ESISTENZA  $V$

VERSORI TERNA CARTESIANA  
ORTOGONALE

LA FUNZIONE ASSOCIATA

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

È DETTA DIVERGENZA DEL VETTORE  $\vec{H}$

### B) TEOREMA DI GAUSS

INDICATA CON  $S$  LA FRONTIERA DI  $V$  E CON  $\vec{n}$  IL VETTORE NORMALE A  $S$ , IL TEOREMA DI GAUSS Afferma CHE:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{H} \cdot dV = \int_S (\vec{H} \cdot \vec{n}) dS$$

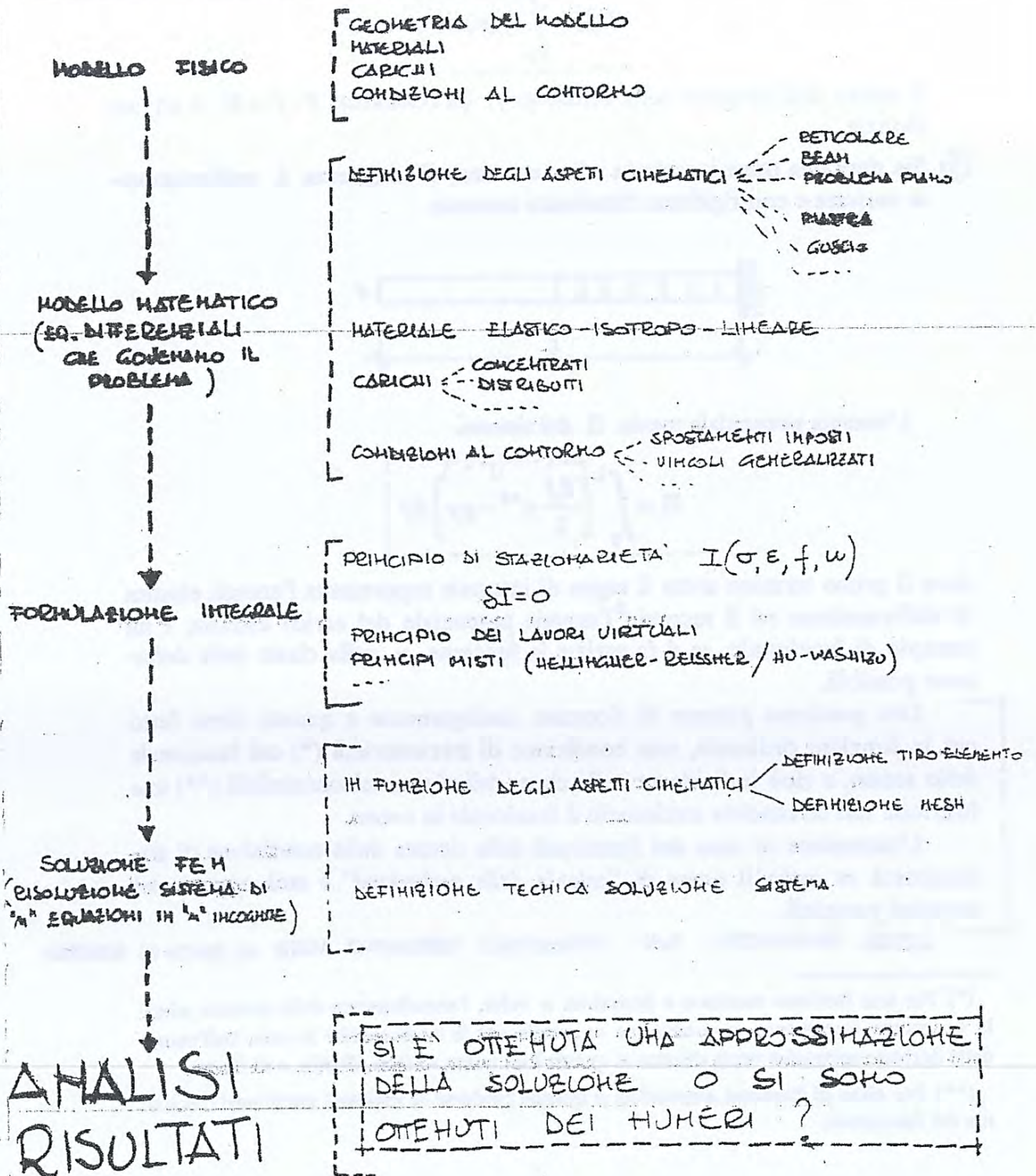
$$\int_V \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) dV = \int_{S^*} (H_x dydz + H_y dzdx + H_z dxdy)$$

$S^*$  SUPERFICIE ORIENTATA CON L'AUTO DELLA NORMALE USCENTE DA  $V$



# IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

IN QUESTA SEDE VIENE APPROCCATO IL FEM ATTRAVERSO QUELLO CHE COMUNEMENTE E' DEFINITO "APPROCCIO INGEGNERISTICO" -  
 SCOPO FONDAMENTALE DEL METODO E' QUELLO DI RISOLVERE NUMERICAMENTE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI RICONDUCENDO IL PROBLEMA ALLA SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI (LINEARI NEL CONTESTO APPROCCATO - ELASTICITA' LINEARE E PICCOLI SPOSTAMENTI)



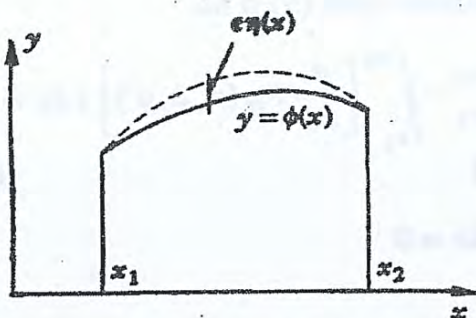


1 - Problema base ed equazione di Eulero-Lagrange.

Si consideri un funzionale del tipo:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (1)$$

dove  $F$  è una funzione nota, dotata di derivata prima e seconda nelle variabili  $x, y, y'$ . Si supponga nel contempo che anche la  $y$  sia dotata di derivata seconda.



Il problema che si pone è di ricercare, tra tutte le funzioni  $y$  che soddisfano le condizioni poste, quella  $y = \phi(x)$  che rende stazionario il funzionale (1).

Scelta allora una funzione arbitraria  $\eta(x)$ , differenziabile e tale che  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , si costruisca una funzione approssimante

$$y(x) = \phi(x) + \epsilon \eta(x) \quad (2)$$

con  $\epsilon$  parametro indipendente da  $x$ .

La  $y$  così ottenuta è una funzione continua, derivabile e tale da soddisfare le condizioni di contorno richieste.

Sostituendo la (2) in (1) si ottiene:

$$I = I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \phi + \epsilon \eta, \phi' + \epsilon \eta') dx \quad (3)$$

da cui segue che  $I$  è ora una funzione ordinaria in  $\epsilon$ . ← ← ← ← **OSB. IMPORTANTE**

Operando in tal modo il problema in esame è ricondotto alla ricerca delle condizioni di stazionarietà di una funzione nella sola variabile  $\epsilon$ .

Di conseguenza, affinché  $I$  sia stazionario per  $\epsilon = 0$  (\*), è necessario che:

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (4)$$

Derivando allora la (1) si ha:

$$I'_\epsilon = \frac{d}{d\epsilon} \left[ \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \right] = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{d\epsilon} \right] dx =$$

(\*) Si noti che la condizione di stazionarietà è ricercata per  $\epsilon = 0$ , situazione in cui si ha  $y(x) \equiv \phi(x)$ .



Sostituendo la  $y$  così costruita nella (8) si ha:

$$I = I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \phi + \epsilon\eta, \phi' + \epsilon\eta', \phi'' + \epsilon\eta'', \phi''' + \epsilon\eta''') dx \quad (9)$$

per cui condizione necessaria per la stazionarietà del funzionale sarà:

$$\left( \frac{dI}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \left[ \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', y''') dx \right]_{\epsilon=0} = 0$$

dalla quale si ottiene

$$\int_{x_1}^{x_2} [F_{\phi}\eta + F_{\phi'}\eta' + F_{\phi''}\eta'' + F_{\phi'''}\eta'''] dx = 0 \quad (10)$$

Integrando poi per parti alcuni termini della (10) si ricava:

$$\begin{aligned} & - \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d^3}{dx^3} F_{\phi'''} - \frac{d^2}{dx^2} F_{\phi''} + \frac{d}{dx} F_{\phi'} - F_{\phi} \right] \eta dx + [F_{\phi'''} \eta']_{x_1}^{x_2} - \\ & - \left[ \frac{d}{dx} F_{\phi'''} - F_{\phi''} \right] \eta' \Big|_{x_1}^{x_2} + \left[ \frac{d^2}{dx^2} F_{\phi''} - \frac{d}{dx} F_{\phi'} + F_{\phi} \right] \eta \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \end{aligned}$$

che per le condizioni di contorno della funzione  $\eta$ , diviene

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d^3}{dx^3} F_{\phi'''} - \frac{d^2}{dx^2} F_{\phi''} + \frac{d}{dx} F_{\phi'} - F_{\phi} \right] \eta dx = 0 \quad (11)$$

Applicando ora il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, la relazione precedente si riduce a:

$$\left[ F_{\phi} - \frac{d}{dx} F_{\phi'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{\phi''} - \frac{d^3}{dx^3} F_{\phi'''} = 0 \right] \quad (12)$$

che è l'equazione di Eulero-Lagrange per il caso studiato.

Più in generale se

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

è la funzione integranda, l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente sarà

$$\left[ F_{\phi} - \frac{d}{dx} F_{\phi'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{\phi''} - \frac{d^3}{dx^3} F_{\phi'''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{\phi^{(n)}} = 0 \right] \quad (13)$$

Si applichi ora la (13) all'esempio b) illustrato nel primo paragrafo.

SEMPRE: Ricordando che l'energia potenziale del sistema è data dalla:

$$\Pi = \int_0^L \left[ \frac{EJ}{2} y''^2 - qy \right] dx \quad (14)$$



La soluzione di tale sistema permette la determinazione dei parametri incogniti  $\alpha_i$  e quindi la definizione completa di  $\phi_n$ .

Tale  $\phi_n$  è detta soluzione approssimata di grado  $n$ . Il grado di approssimazione raggiunto da tale procedimento è strettamente legato alla successione  $\{\varphi_n\}$  scelta.

→ Le condizioni necessarie per la convergenza del metodo sono:

- (a) l'insieme delle  $\varphi_n$  deve essere completo; sia  $F$  una funzione ammissibile, si dovrà avere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} \left( F - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right)^2 dx = 0$$

- (b) le funzioni approssimanti  $\{\varphi_n\}$  devono essere ammissibili e cioè:
- devono essere continue fino all'ordine minore di uno rispetto al più alto ordine di derivazione presente nella funzione integranda
  - devono soddisfare individualmente le condizioni di contorno.

#### 4 - APPENDICE: Operatore variazionale $\delta$

Partendo da quanto già visto nei primi paragrafi di questo capitolo, vediamo di introdurre il concetto di operatore variazionale  $\delta$ .

Definiamo come variazione della funzione  $\phi(x)$  (2) la quantità

$$\delta y(x) = y(x) - \phi(x)$$

e variazione delle derivate prime le quantità

$$\delta y'(x) = y'(x) - \phi'(x)$$

L'equazione (3) può essere espressa nella forma

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \phi + \delta y, \phi' + \delta y') dx$$

Immaginando di sviluppare in serie di Taylor nell'intorno di  $\phi(x)$  e  $\phi'(x)$  la funzione integranda  $F$ , abbiamo:

$$F(x, \phi + \delta y, \phi' + \delta y') = F(x, \phi, \phi') + \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] + O(\delta^2) \quad (a)$$

dove  $O(\delta^2)$  contiene i termini  $(\delta y)^2$ ,  $(\delta y')^2$ , ... ecc.

Indicato ora con

$$\delta F = F(x, \phi + \delta y, \phi' + \delta y') - F(x, \phi, \phi')$$

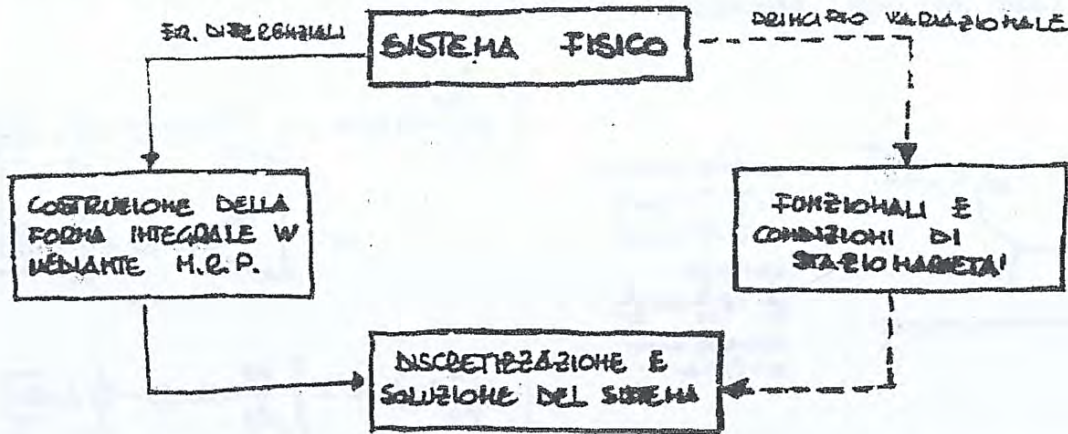
VARIAZIONE  
TOTALE

e



DERIVATE PARZIALI IN UNA ESPRESSIONE INTEGRALE DIPENDENTE DALLE "FUNZIONI PESO UTILIZZATE". IN RELAZIONE A TALI FUNZIONI ED ALLA SOTTIVISIONE DEL DOMINIO DI DEFINIZIONE, SI HANNO VARIE PROCEDURE:

- FORMULAZIONE DI GALERKIN O RITZ
- METODO DELLE COLLOCAZIONI (POINT AND SUB-DOMAIN COLLOCATION)
- METODO DEI MINIMI QUADRATI
- FORMULAZIONE INTEGRALI AL CONTOURNO (GALERKIN O COLLOCAZIONI PESATE)



## DESCRIZIONE DEL METODO

CON RIFERIMENTO AL SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI (\*) DI PAGINA PRECEDENTE, DEFINITA LA FUNZIONE RESIDUA

$$R(u) = L(u) + f$$

↑ FUNZIONE RESIDUA = 0 QUANDO  $u$  E' UNA SOLUZIONE DI (\*)

IL M.R.P. CONSISTE NEL TROVARE LE FUNZIONI  $u$  TALI DA SODDISFARE LA SEGUENTE EQUAZIONE INTEGRALE

$$W(u) = \int_V \langle \psi \rangle \{ R(u) \} dV = \int_V \langle \psi \rangle \{ L(u) + f \} dV = 0 \quad (**)$$

VECTORE RIGA "FUNZIONI PESO":

-  $\psi$  LINEARMENTE INDIPENDENTI TRA DI LORO

-  $\psi$  SUFFICIENTEMENTE REGOLARI ALL'INTERNO DEL DOMINIO IN MODO CHE L'INTEGRALE ESISTA

↑ VECTORE COLONNA FUNZIONE RESIDUA

E TALI DA APPARTENERE ALL'INSIEME AMMISSIBILE  $F_a$  SODDISFACENTE ALLE CONDIZIONI AL CONTOURNO (\*\*\*)

ESSENDO L'INSIEME DELLE FUNZIONI PESO IN GENERE, DI DIMENSIONE FINITA LA FUNZIONE  $u$  SOLUZIONE DI (\*\*) E' UNA SOLUZIONE APPROSSIMATA DI (\*\*\*) - [LA (\*\*\*) NON E' SODDISFATTA IN TUTTI I PUNTI DI  $V$ ]

OSG: SI UTILIZZA L'INTEGRALIZIONE PER PARTI PER DIMINUIRE L'ORDINE DI DERIVAZIONE PIU' ELEVATO PRESENTE IN (\*\*\*) - [  $\int \langle \psi \rangle [L(u)] dV$  ]  
 VENGONO DI SEGUITO RIPORTATI ALCUNI ESEMPLI:



TALE MODO DI PROCEDERE PRODUCE QUELLA CHE VIENE DENOMINATA COME "FORMA DEBOLE"; IN QUESTO MODO:

- SI RIDUCE L'ORDINE PIU' ELEVATO DELLA DERIVATA DI  $u$ ; QUESTE "RILASCIANO" LE CONDIZIONI DI CONTINUITA' RICHIESTE PER LA CONVERGENZA
- SI INTRODUCONO LE DERIVATE DELLE "FUNZIONI PESO" LE CUI CONDIZIONI DI CONTINUITA' RISULTANO PIU' SEVERE RISPETTO A PRIMA DELL'INTEGRAZIONE PER PARTI.

IN ALTRI TERMINI PER UN PROBLEMA DESCRITTO DA UN SISTEMA (\*) DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE  $m$  E PER LA SUA FORMA INTEGRALE, LE FUNZIONI AMMISSIBILI DEVONO ESSERE DIFFERENZIABILI  $m$  VOLTE E SODDISFARRE ALLE CONDIZIONI AL CONTOURNO DOPO L'INTEGRAZIONE PER PARTI, LE CONDIZIONI DI AMMISSIBILITA' DI  $u$  E DI  $\psi$  RISULTANO:

- $u$  DEVE ESSERE " $(m-s)$ " DIFFERENZIABILE
- $\psi$  DEVE ESSERE " $s$ " DIFFERENZIABILE
- $u$  DEVE SODDISFARRE SOLO QUELLE CONDIZIONI AL CONTOURNO CONTENENTI LE DERIVATE FINO ALL'ORDINE " $m-s-1$ "
- $\psi$  DEVE ESSERE NULLA SUI CONTOURNI DOVE  $u$  DEVE SODDISFARRE LE CONDIZIONI AL CONTOURNO BINAMENTI; LE CONDIZIONI AL CONTOURNO CONTENENTI DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE A  $(m-s)$  SONO AUTOMATICAMENTE COSTRUITE DALLA FORMA INTEGRALE, IN MANIERA APPROSSIMATA

ESEMPIO: SI CONSIDERI LA SEGUENTE EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$\int_0^L \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = f(x) \quad \left[ \text{ED. DIFFERENZIALE DELLA TRAVE INFLESA} \right]$$

$0 < x < L$

$C = \text{CONSTANTE}$

MEDEIANTE IL METODO DEI RESIDUI PESATI SI PUO' SCRIVERE

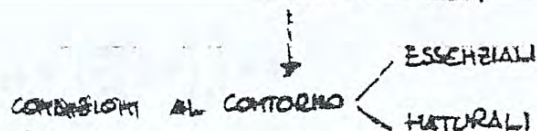
$$W = \int_0^L \psi(x) \left[ C \frac{d^4 y(x)}{dx^4} - f(x) \right] dx = 0$$

DALLA QUALE APPLICANDO DUE VOLTE LA DERIVAZIONE PER PARTI SI OTTIENE

$$\int_0^L \left[ -\frac{d\psi(x)}{dx} C \frac{d^3 y(x)}{dx^3} - \psi(x) f(x) \right] dx + \psi(x) C \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \Big|_0^L = 0$$

$$\textcircled{1} \int_0^L \left[ \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} C \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \psi(x) f(x) \right] dx + \psi(x) C \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \Big|_0^L - \frac{d\psi(x)}{dx} C \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \Big|_0^L = 0$$

DUE TERMINI DI CONTOURNO PRESENTI NELL'INTEGRANDO PER PARTI





ALCUNI FUNZIONALI QUADRATICI POSSONO CONTENERE DEI TERMINI LINEARI. PER FUNZIONALI QUADRATICI CONTENENTI SOLO TERMINI DEL SECONDO ORDINE E' POSSIBILE RAPPRESENTARLI MEDIANTE LA RELAZIONE MATRICIALE

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \left\langle \underline{u} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \dots \right\rangle [D] \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \\ \vdots \end{Bmatrix} dV \quad (*)$$

MATRICE SIMMETRICA INDIPENDENTE DA  $\underline{u}$

3) L'OPERATORE VARIAZIONE  $\delta$  UTILIZZATO NELLO STUDIO DELLA VARIAZIONE PRIMA DI  $\pi$

$$\delta \pi = \frac{\partial \pi}{\partial \underline{u}} \delta \underline{u} + \frac{\partial \pi}{\partial \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \right)} \delta \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \right) + \dots$$

COME DELLE SEGUENTI PROPRIETA' :

$$\delta \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \right) = \frac{\partial (\delta \underline{u})}{\partial x}$$

$$\delta (\delta \underline{u}) = 0$$

$$\delta \left( \int_V u dV \right) = \int_V \delta u dV$$

$$\delta (u + v) = \delta u + \delta v$$

$$\delta (uv) = u \delta v + v \delta u = \delta (vu)$$

$$\delta (cu) = c \delta u (c = \text{constant})$$

4) LO STUDIO DEL SEGNO DELLA VARIAZIONE SECONDA  $\delta^2 \pi$  CONSENTE DI VALUTARE SE IL FUNZIONALE  $\pi$  NEL PUNTO DI STAZIONARITA' ( $\delta \pi = 0$ ) PRESENTA UN MASSIMO O UN MINIMO

$$\delta^2 \pi \left( \underline{u}, \frac{\partial \underline{u}}{\partial x}, \dots \right) = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \underline{u}^2} \delta \underline{u} \delta \underline{u} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \right)^2} \delta \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \right) + \dots \begin{cases} > 0 \text{ (MINIMO)} \\ < 0 \text{ (MASSIMO)} \end{cases}$$

5) SE IL FUNZIONALE E' DEL TIPO (\*) SOPRA RIPORTATO, LA VARIAZIONE PRIMA E SECONDA POSSONO ESSERE ESPRESSE IN FORMA MATRICIALE TRAMITE LE:

$$\delta \pi = \int_V \left\langle \delta \underline{u} \frac{\partial (\delta \underline{u})}{\partial x} \dots \right\rangle [D] \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \\ \vdots \end{Bmatrix} dV \quad (\text{VARIAZIONE PRIMA})$$



- LE FUNZIONI INCOGNITE  $u$  SONO APPROSSIMATE MEDIANTE UNA "RAPPRESENTAZIONE" A "M" PARAMETRI - IL TIPO DI RAPPRESENTAZIONE PUO' ESSERE COSTRUITA IN MANIERE DI VERSE:
  - CONSIDERANDO L'INTERO DOMINIO
  - CONSIDERANDO DEI SOTTODOMINII
  - CONSIDERANDO I VALORI DI  $u$  IN ALCUNI PUNTI (DETTI NODI)
  - CONSIDERANDO  $u$  ESPRESSA TRAMITE "PARAMETRI GENERALIZZATI" IN OGNI CASO E' PENSABILE POTER SCRIVERE

$$u = u(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

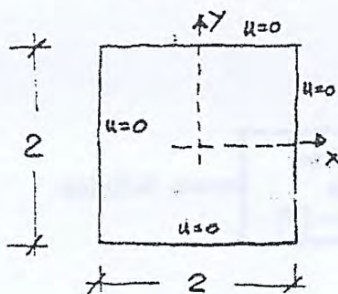
- SI SCEGLIAMO "M" (LO STESSO NUMERO DEI PARAMETRI DI  $u$ ) FUNZIONI PESO ARBITRARIE INDIPENDENTI - (LA SCELTA DELLE FUNZIONI PESO CONDUCCE POI A PROCEDURE DIVERSE: GALERKIN, METODO DELLE COLLOCAZIONI, ECC.) - A QUESTO PUNTO LA FORMA INTEGRALE CONSENTE DI SCRIVERE "M" RELAZIONI:

$$\begin{cases} W_1 = \int_V \psi_1(\mathcal{L}(u(a_1, a_2, \dots, a_m) + f_V)) dV = 0 \\ W_2 = \int_V \psi_2(\mathcal{L}(u(a_1, a_2, \dots, a_m) + f_V)) dV = 0 \\ \dots \\ W_m = \int_V \psi_m(\mathcal{L}(u(a_1, a_2, \dots, a_m) + f_V)) dV = 0 \end{cases} \quad (*)$$

CHE INTEGRATE FORNISCONO UN SISTEMA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE NELLE "M" INCOGNITE  $a_i$  (PARAMETRI DELL'APPROSSIMAZIONE DI  $u$ ).

$$[K][Q] = [F]$$

ESEMPIO: APPROSSIMAZIONE SU TUTTO IL DOMINIO UTILIZZANDO "PARAMETRI GENERALIZZATI"



SI CONSIDERI L'EQUAZIONE DI POISSON DEFINITA SU UNA REGIONE QUADRATA CON  $f_V = 1 = \text{cost.}$

$$\mathcal{L}(u) + f_V = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f = 0 \quad \text{SUL QUADRATO}$$

$$u = 0 \text{ su } S \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

APPROSSIMANDO  $u$  SU TUTTO IL QUADRATO CON (FUNZIONE APPROSSIMANTE SOTTOBISFA ALLE CONDIZIONI AL CONTOURNO E ALLA SIMEETRIA DEL PROBLEMA):

$$u = [P_1 \ P_2] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{con}$$

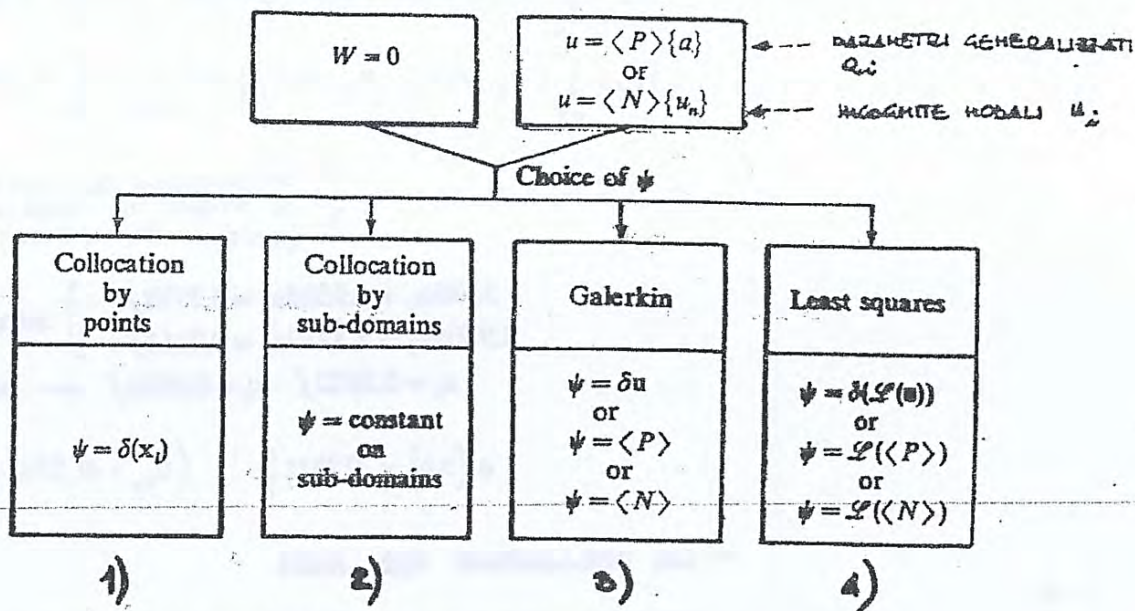
$$P_1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

$$P_2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2) = P_1(x^2 + y^2)$$



## de) SCELTA DELLE FUNZIONI PESO.

OLTRE ALLA DEFINIZIONE DELL'APPROSSIMAZIONE DELLA FUNZIONE INCOGNITA  $u$  COME PRECEDENTEMENTE ACCENNATO, OCCORRE SCEGLIERE LE FUNZIONI PESO. NELLA TABELLA SOTTOCORPORTATA VENGONO ILLUSTRATI ALCUNI DEI CRITERI COMUNEMENTE ADOTTATI.



1) - LE FUNZIONI PESO  $\psi$  SONO SOSTITuite DALLE FUNZIONI DI DIRAC (FUNZIONI  $\delta$ ) IN UN NUMERO DI PUNTI  $x_i$  UGUALE AL NUMERO DI PARAMETRI INCOGNITI NELL'APPROSSIMAZIONE DI  $u$

$$\psi_i(x) = \delta(x - x_i)$$

↑  
 $x_i = \text{COORDINATA DEL "COLLOCATION POINT"}$

LA FORMA INTEGRALE DIVENTA

$$W = \int_V \delta(x_i) R(x, u) dV = R(x_i, u) = 0$$

APPROSSIMANDO  $u$   
 $u = u(x, a_1, \dots, a_n)$   
SI RICAVA

↑  
FUNZIONE RESIDUI CALCOLATA  
NEI "COLLOCATION POINTS"

$$W_i(a) = (L(u(x, a_1, a_2, \dots, a_n)) + f_v)_{x=x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

↑  
AD ESEMPIO  $u = \langle P \rangle \{a\}$

$$\begin{aligned} W_i(a) &= (L(\langle P \rangle \{a\}) + f_v)_{x=x_i} = 0 \\ &= (\langle L(P) \rangle \{a\} + f_v)_{x=x_i} = 0 \end{aligned}$$

LA DECISIONE NELLA SOLUZIONE DIPENDE DAL NUMERO DEI PARA-



LA CONDIZIONE DI STAZIONARIETA' DI  $\pi_m$  CONDUCE A:

$$W = \delta \pi_m(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

$$W_1(a) = \int_V \mathcal{L}(P_1) (\langle \mathcal{L}(P) \rangle \{a\} + f_V) dV = 0$$

$$\vdots$$

$$W_n(a) = \int_V \mathcal{L}(P_n) (\langle \mathcal{L}(P) \rangle \{a\} + f_V) dV = 0$$

$\delta$  RISPETTO AI PARAMETRI INDIPENDENTI  $a_1 - a_n$   
 SISTEMA RISOLVENTE  
 OGGI: TALE METODO CONDUCE A UN SISTEMA LINEARE POSITIVO

ESEMPIO: CON RIFERIMENTO ALLO STESSO ESEMPIO PRECEDENTE SI OTTENE:

$$W_1 = \int_V \langle \mathcal{L}(P_1) \cdot \mathcal{L}(P_1) \mathcal{L}(P_1) \cdot \mathcal{L}(P_2) \rangle dV \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_V \mathcal{L}(P_1) f dV = 0$$

$$W_2 = \int_V \langle \mathcal{L}(P_2) \cdot \mathcal{L}(P_1) \mathcal{L}(P_2) \cdot \mathcal{L}(P_2) \rangle dV \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_V \mathcal{L}(P_2) f dV = 0$$

DA CUI SEGUE IL SISTEMA

$$\begin{cases} 31.2889a_1 + 25.1937a_2 = 10.6667f \\ 25.1937a_1 + 87.4463a_2 = 12.8000f \end{cases} \quad \text{SISTEMA}$$

$$a_1 = 0.2904f \quad a_2 = 0.0627f \quad \leftarrow \text{SOLUZIONI}$$

$$u(0,0) = 0.2904f \quad (u_m = 0.2904f)$$

## e) DISCRETIZZAZIONE DEL FUNZIONALE (METODO DI RITZ)

RIPRENDIAMO QUANTO GIÀ VISTO IN PRECEDENZA (PARTE RELATIVA AL CALCOLO DELLE VARIAZIONI): NEL METODO DI RITZ, IL FUNZIONALE  $\pi$  VIENE PRIMA DISCRETIZZATO CON UNA APPROSSIMAZIONE DELLA FUNZIONE INCOGNITA  $u$ :

$$u = u(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = \langle P_1 \ P_2 \dots P_n \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

FUNZIONI APPROSSIMANTI (FUNZIONI BASE)  $\uparrow$   
 PARAMETRI INCOGNITI

$$\pi(u) = \pi(u(a_1, a_2, \dots, a_n))$$

E POI, DALLA CONDIZIONE DI STAZIONARIETA' DI  $\pi$  RISPETTO AI PARAMETRI  $a_1, a_2, \dots, a_n$  E' POSSIBILE RICAVARE UN SISTEMA DI  $n$  EQUAZIONI NELLE  $n$  INCOGNITE  $(a_1, \dots, a_n)$ .



LE FUNZIONI  $u$  E  $\psi$  DEVONO ESSERE ENTRAMBE DIVERGENTI E SEMBLABILI -

POTIZZANDO DI POTER SCRIVERE SUL CONTORNO  $S_f$ :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_s - \alpha u \quad \rightarrow \quad \int_{S_f} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{S_f} \psi (f_s - \alpha u) dS$$

È DI SCEGLIERE  $\psi$  IN MODO TALE CHE SUL CONTORNO  $S_u$  QUESTA RISULTI NULLA, LA FORMA INTEGRALE DEBE È DIVIENE:

$$(a) \quad W = - \int_V \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \psi f_v \right) dV + \int_{S_f} \psi (f_s - \alpha u) dS = 0$$

$$\text{con } \left. \begin{array}{l} u = u_s \\ \psi = 0 \end{array} \right\} \text{ su } S_u$$

DOPO UNA SECONDA INTEGRAZIONE PER PARTI SI OTTIENE:

$$W = \int_V \left( \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) u + \psi f_v \right) dV + \oint_S \left( \psi \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} u \right) dS = 0$$

OSS: SE SI SCEGLIE UNA FUNZIONE PESO TALE DA SODDISFARRE  $\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$  IN OGNI PUNTO DI  $V$ , E SI SUPPONE  $f_v = 0$  IN TUTTO  $V$ , LA RELAZIONE PRECEDENTE SI RIDUCE

$$(b) \quad W = \oint_S \left( \psi \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} u \right) dS = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{RELAZIONE ALLA BASE} \\ \text{DEL "BOUNDARY INTEGRAL} \\ \text{METHOD"} \end{array}$$

RIEPILOGO  
CONDIZIONI SULLE  
FUNZIONI  $u$  E  $\psi$   
IN RITE

Formulation	Conditions on $u$			Conditions on $\psi$		
	Derivat. order	condition on $S_f$	condition on $S_u$	Derivat. order	condition on $S_f$	condition $S_u$
Partial differential equations	2	$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s$	$u = u_s$	null	null	null
Internal form	2	$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s$	$u = u_s$	null	null	null
Integral form (a)	1	null	$u = u_s$	1	null	$\psi = 0$
If $f_v = 0$ . integral form (b) (no volume integral)	null	$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s$	$u = u_s$	$\psi$ satisfy $\Delta \psi = 0$ (no condition on $S$ )		

CONDIZIONI DI CAUCHY  
(also  $\rightarrow$  CONDIZIONI DI NEUMANN)

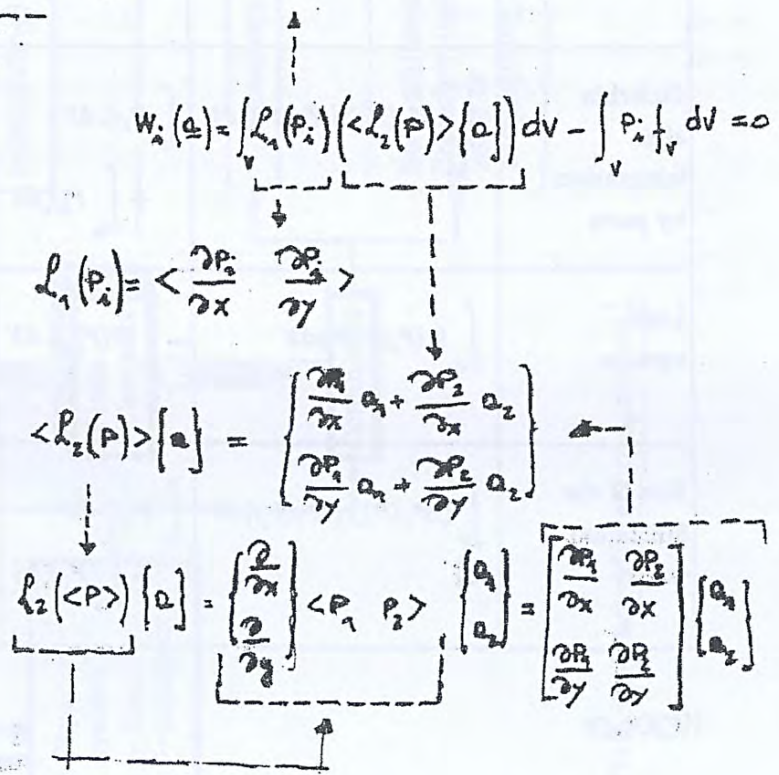
CONDIZIONI DI DIRICHLET



$$\begin{aligned}
 & \int_V \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} \\ \text{Sym.} & \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{array} \right] dV \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \\
 & - \int_V \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} f dV = 0
 \end{aligned}$$

OSS: CON RIFERIMENTO ALLE RELAZIONI (\*\*\*) DEL PUNTO d2) - 3) PRECEDENTE [GALERKIN CON INTEGRAZIONE PER PARTI], ESPLICITE PER IL CASO IN ESAME SI HA:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_V \left\langle \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_1}{\partial y}, \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} \right\rangle dV \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \\
 & - \int_V P_1 f dV = 0 \\
 W_2 &= \int_V \left\langle \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \frac{\partial P_1}{\partial y}, \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} \right\rangle dV \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \\
 & - \int_V P_2 f dV = 0
 \end{aligned}$$



LE RELAZIONI (\*) E (\*\*\*) RISULTANO ESSERE TRA DI LORO EQUIVALENTI -



OSS: - LE FUNZIONI INTERPOLARICI SONO NULLE AL N FUORI DELL'ELEMENTO  $V^e$  E DIPENDONO DAL GRADO DI APPROSSIMAZIONE SCELTO PER  $u_e$  -

A SEGUITO DELL'IPOTESI (\*) EFFETTUATA, CIASEDA TERMI NE  $W^e$  SI CALCOLA A PARTIRE DALLE SOLE VARIABILI LEGATE ALL'ELEMENTO (e) -

$$W^e = \int_{V^e} \delta u_e (\mathcal{L}(u_e) + f_v) dV$$

$$W^e = \langle \delta \bar{u} \rangle \left( \int_{V^e} \{N\} \mathcal{L}(\langle N \rangle) dV [\bar{u}] + \int_{V^e} \{N\} f_v dV \right)$$

INFATTI  $u_e = [H_1 \ H_2 \ H_3] \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = [H] [\bar{u}] = \langle H \rangle [\bar{u}]$  (\*)

$$\delta u_e = \langle H \rangle \{ \delta \bar{u} \}$$

$$W^e = \int_{V^e} \delta u_e (\mathcal{L}(u_e) + f_v) dV =$$

$$\mathcal{L}(\langle H \rangle) [\bar{u}]$$

$$\langle \delta \bar{u} \rangle \left( \int_{V^e} \{ \delta \bar{u} \}^T (\mathcal{L}(\langle H \rangle) [\bar{u}] + f_v) dV \right)$$

$$= \langle \delta \bar{u} \rangle \left( \left( \int_{V^e} \{H\} \mathcal{L}(\langle H \rangle) dV \right) [\bar{u}] + \left( \int_{V^e} \{H\} f_v dV \right) \right)$$

$$\Downarrow$$

$$W^e = [\delta \bar{u}]^T \left( \left( \int_{V^e} [H]^T \mathcal{L}([H]) dV \right) [\bar{u}] + \left( \int_{V^e} [H]^T f_v dV \right) \right)$$

IMMAGINANDO ANCHE IN QUESTO CASO DI INTEGRARE PER PARTI LA (\*) PER DIMINUIRE AL MASSIMO L'ORDINE DELLE DERIVATE CHE INTERVENGONO QUESTA NEL CASO DI UN SISTEMA STAZIONARIO, PUO' ESSERE ESPRESA IN TERMI NI MATRICIALI TRAMITE LA:

$$W^e = \int_{V^e} (\langle \delta(\partial u_e) \rangle [D] \{ \partial u_e \} - \delta u_e f_v) dV - \int_{S_f} \delta u_e f_s dS \quad (***)$$

$$\langle \partial u_e \rangle = \left\langle u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \dots \frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} \dots \right\rangle$$

$$\langle \delta(\partial u_e) \rangle = \left\langle \delta u_e \delta \left( \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) \dots \delta \left( \frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} \right) \dots \right\rangle$$



$$W^e = \langle \delta \bar{u} \rangle \left( \int_{V_e} [B_e]^T [D] [B] dV \{ \bar{u} \} - \int_{V_e} \{ N \} f_r dV - \int_{S_f} \{ N \} f_s dS \right)$$

[k]
[f]

LA WI SI OTTENE

$$W = \sum_{e=1}^{M_e} W^e = \sum_{e=1}^{M_e} \left( \langle \delta \bar{u} \rangle \left( [k] \{ \bar{u} \} - \{ f \} \right) \right) = 0 \dots$$



OPERAZIONE DI  
ASSEMBLAGGIO

$$W = \langle \delta \bar{u} \rangle \left( [k] \{ \bar{u} \} - \{ F \} \right) = 0$$

DOVENDO ESSERE  
NULLO PER TUTTI  
 $\langle \delta \bar{u} \rangle$

TERMINE CHE  
DEVE ANNULLARSI



$$[k] \{ \bar{u} \} = \{ F \}$$

SISTEMA DI EQUAZIONI NELLE INCOGNITE MODALI DI TUTTO IL DOMINIO

MATRICE DI RIGIDEZZA  
GLOBALE RELATIVA  
ALL'INTERO DOMINIO

### CONDIZIONI DI CONVERGENZA DELLA SOLUZIONE

IL METODO (FEM) FORNISCE UNA SOLUZIONE APPROSSIMATA CHE CONVERGE VERSO LA SOLUZIONE ESATA QUANDO SI DIMINUISCE LA DIMENSIONE DEI SOTTODOMINII (ELEMENTI) SE L'APPROSSIMAZIONE DI  $u$  SODDISFA ALLE SEGUENTI CONDIZIONI:

- BASE POLINOMIALE COMPLETA

AVENDO APPROSSIMATO LA SOLUZIONE TRAMITE LA

$$u_e = \langle N \rangle \{ \bar{u} \} \quad (*)$$

AFFINCHÉ L'ERRORE DI  $u_e$  E DI TUTTE LE SUE DERIVATE FINO ALL'ORDINE  $n^o$



• **ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLA DEFINIZIONE DELLA DISCRETIZZAZIONE E DELLE CONDIZIONI AL CONFINO**

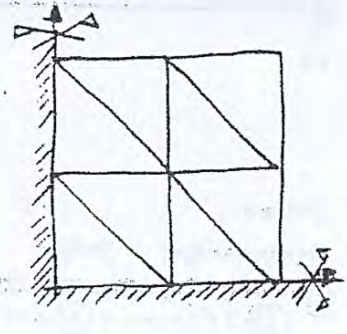
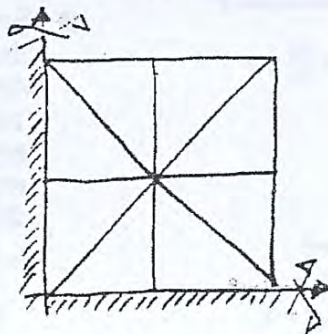
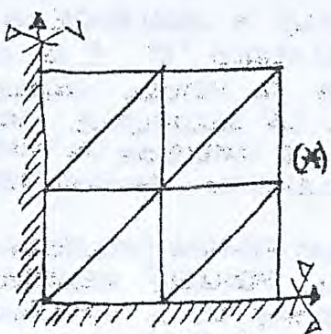
VENGONO DI SEGUITO RIPORTATE ALCUNE CONSIDERAZIONI IN MERITO ALLA DEFINIZIONE DELLA MESH IN TERMINI DI NUMERO DI ELEMENTI, LORO FORMA GEOMETRICA, FUNZIONI APPROSSIMANTI, DIMENSIONI, ECC. -

- LA MESH DEVE RICOPRIRE IL DOMINIO NEL MIGLIOR MODO POSSIBILE E DEVE RAPPRESENTARE ACCURATAMENTE ZONE DI DISCONTINUITA' IN TERMINI DI CARICHI, GEOMETRIA E MATERIALE
- LA DISCRETIZZAZIONE DEVE ESSERE REALIZZATA UTILIZZANDO ELEMENTI DI DIMENSIONI TALI, DA POTER ACCURATAMENTE CALCOLARE EVENTUALI PICCHI DI VARIAZIONI DELLA FUNZIONE DI CAMPO INCOGNITA (INDETERMINAZIONE DELLE EVENTUALI ZONE DI INFIATIMENTO DELLA MESH A SEGUITO DI UNA CORRETTA ANALISI DEL PROBLEMA IN STUDIO) L'INFIATIMENTO DEL MODELLO PUO' AVVENIRE PER FASI SUCCESSIVE IN TAL CASO OCCORRE OSSERVARE LE SEGUENTI CONDIZIONI:
  - TUTTE LE MESH PRECEDENTI DEVONO ESSERE CONTENUTE NELLA MESH (INFIATITA) CORRENTE
  - CIASCUN PUNTO DEL DOMINIO DEVE APPARTENERE AD UN ELEMENTO ARBITRARIAMENTE PICCOLO IN OGNI FASE DEL PROCESSO DI INFIATIMENTO
  - OCCORRE MANTENERE LO STESSO ORDINE DI APPROSSIMAZIONE DELLA SOLUZIONE DURANTE L'INFIATIMENTO DELLA MESH -

OSS: - IN FASE DI INFIATIMENTO OCCORRE EVITARE, IN ZONE DI RACCORDO, ELEMENTI CON RAPPORTI DIMENSIONALI (UN LATO RISPETTO ALL'ALTRO) ELEVATI: GLI ELEMENTI DELLA MATRICE DI RIGIDITA' DIPENDONO DA TALI RAPPORTI - POSSONO CONDURRE AD UNA MATRICE MAL-CONDIZIONATA (NON INVERTIBILE)

- SE I RISULTATI CORRELATI A DUE MESH SUCCESSIVE PRESENTANO DIFFERENZE TRA DI LORO TRASCURABILI, NON RISULTANO NECESSARI ULTERIORI INFIATIMENTI.

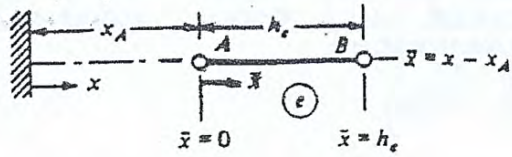
→ PARTICOLARE CURA VA POSTA NELLA DEFINIZIONE DELLA MESH AL FINE DI EVITARE LA VIOLAZIONE DI EVENTUALI CONDIZIONI DI SIMMETRIA DELLA STRUTTURA (PROBLEMA LEGATO PREVALENTEMENTE ALL'UTILIZZO DI ELEMENTI TRIANGOLARI)



LA (a) NON CONTRARIE LA SIMMETRIA MATEM. DEL PROBLEMA

← TORSIONE





OBS. ALLA FIGURA

$\bar{x}$  = COORDINATA LOCALE DELL'ELEMENTO

$$\bar{x} = x - x_A$$

$u$  = VARIABILE PRIMARIA

$(a \frac{du}{dx})$  = VARIABILE SECONDARIA

$$u(x_A) = u_1^{(e)} \quad u(x_B) = u_2^{(e)}$$



ELEMENTO GENERICO

CON RIFERIMENTO ALL'ELEMENTO  $\Omega^e = (x_A, x_B)$ , LA (\*) CONSENTE DI SCRIVERE LA FORMULAZIONE VARIATIONALE SULL'ELEMENTO:

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} v \left[ -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) - f \right] dx$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \left( a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - vf \right) dx + \left[ v \left( -a \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_A}^{x_B}$$

$v$  FUNZIONE ARBITRARIA CONTINUA (FUNZIONE TEST O FUNZIONE PESO)

LA QUALE, TENUTO CONTO DELLE CONDIZIONI AL CONTOURNO DELL'ELEMENTO

$$u(x_A) \equiv u_1^{(e)} \quad u(x_B) \equiv u_2^{(e)}$$

$$\left( -a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_A} \equiv P_1^{(e)} \quad \left( a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_B} \equiv P_2^{(e)}$$

VIENE RISCROTTA NELLA FORMA

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left( a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - vf \right) dx - P_1^{(e)} v(x_A) - P_2^{(e)} v(x_B)$$

(\*\*)

$$0 = B(v, u) - I(v)$$

$$B(v, u) = \int_{x_A}^{x_B} a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx$$

(FORMA BILINEARE)

$$I(v) = \int_{x_A}^{x_B} vf dx + v(x_A) P_1^{(e)} + v(x_B) P_2^{(e)}$$

(FORMA LINEARE)



DEFINIZIONE DELLE FUNZIONI APPROSSIMANTI  $\psi_i^{(e)}$  - CON DIFFERENZE  
 AQUALTO DETTO IN PRECEDENZA (ORDINE DI DERIVAZIONE RICHIESTO  
 CONDIZIONI AL CONTORNO ESSENZIALI, INSIEME COMPLETO, LINEARMENTE  
 INDIPENDENTE) SI PUO' SCEGLIERE COME FUNZIONE APPROSSIMAN  
 TE LA FUNZIONE LINEARE (METODO DI RITE)

$$u(x) = c_1 + c_2 x = \sum \phi_i c_i \quad \{\phi_i\} = \{1, x\}$$

PARAMETRI INCOSANTI DETERMINATI  
 DALLA RICHIESTA CHE LA FUNZIONE  
 U SODDISFI ALLE CONDIZIONI ESSENZIALI  
 AL CONTORNO DELL'ELEMENTO

FUNZIONI CONTINUE  
 LINEARMENTE INDIPEN  
 DENTI / INSIEME  
 COMPLETO

$$\begin{aligned} u(x_e) \equiv u_1^{(e)} &= c_1 + c_2 x_e \\ u(x_{e+1}) \equiv u_2^{(e)} &= c_1 + c_2 x_{e+1} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= \frac{u_1^{(e)} x_{e+1} - u_2^{(e)} x_e}{x_{e+1} - x_e} & c_2 &= \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{x_{e+1} - x_e} \end{aligned}$$

LA FUNZIONE  $u(x)$ , PUO' ESSERE RISCRTA NELLA FORMA:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{u_1^{(e)} x_{e+1} - u_2^{(e)} x_e}{x_{e+1} - x_e} + \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{x_{e+1} - x_e} x \\ &= \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} u_1^{(e)} + \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} u_2^{(e)} \\ &= \sum_{i=1}^2 u_i^{(e)} \psi_i^{(e)} \quad (***) \end{aligned}$$

$$\psi_1^{(e)} = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} \quad \psi_2^{(e)} = \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} \quad x_e \leq x \leq x_{e+1}$$

- $u(x) \rightarrow$  :
- SODDISFA ALLE CONDIZIONI AL CONTORNO ESSENZIALI DELL'ELEMENTO
  - $\{\psi_i\}$  SONO CONTINUE, LINEARMENTE INDIPENDENTI E COMPLETE
  - DAL CONFRONTO DELLA (\*\*\*) CON LA (\*) SI OSSERVA:
    - 1)  $n=2$
    - 2)  $\alpha_i^{(e)} \equiv u_i^{(e)}$

- $\psi_i^{(e)}(x) \rightarrow$  :
- $\psi_i^{(e)} = 0$  AL DI FUORI DELL'ELEMENTO  $\Omega^e$
  - $\psi_i^{(e)}(x_j) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases} \quad x_1 = x_e \quad x_2 = x_{e+1}$
  - $\sum_{i=1}^2 \psi_i^{(e)}(x) = 1 \quad \rightarrow$  DETERMINE U COSTANTE SULL'ELEMENTO
- $\rightarrow$  (\*\*\*) SODDISFA CONDIZIONI ESSENZIALI  
 $\psi_i$  LINEARMENTE INDIPENDENTI

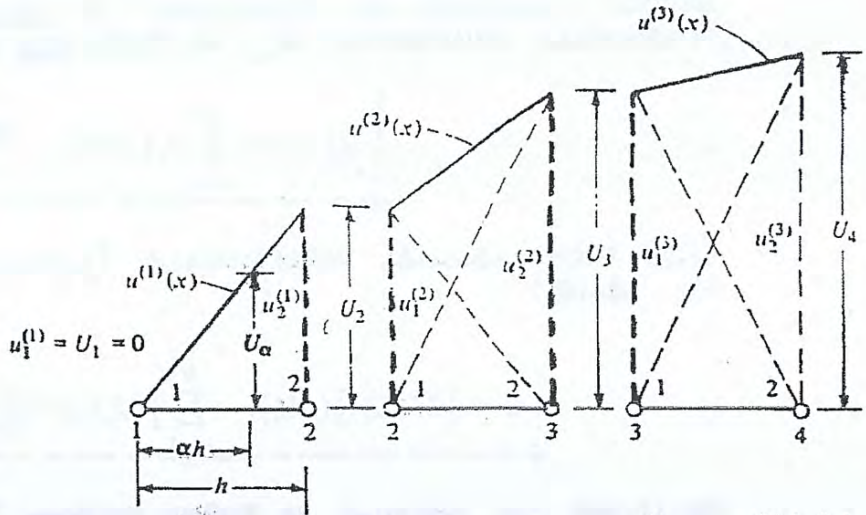


# ● ASSEMBLAGGIO

CON RIFERIMENTO AL DOMINIO  $\Omega$  SI PUO' OSSERVARE CHE DOVENDO  $u$  ESSERE CONTINUA NE CONSEGUO CHE

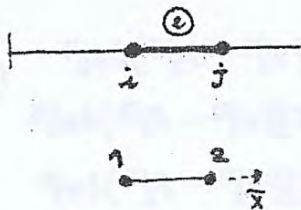
$$u_2^{e-1} = u_1^e$$

DEFINITO PER CONDIZIONI CON  $U_i$  IL VALORE CHE LA FUNZIONE  $u$  ASSUME NEL NODO GENERALE "i", VALGONO LE SEGUENTI "RELAZIONI DI CONTINUITA' TRA ELEMENTI ADIACENTI":



$$u_1^{(1)} = U_1 \quad u_2^{(1)} = U_2 = u_1^{(2)} \quad u_2^{(2)} = U_3 = u_1^{(3)} \quad u_2^{(3)} = U_4 = \dots$$

LA CORRE SPONDERENZA TRA NODI LOCALI E NODI GLOBALI PUO' ESSERE ESPRESSA MEDIANTE UNA MATRICE, DETTA "MATRICE DELLE CONNETTIVITA'":



$$[B] = \begin{bmatrix} \vdots \\ i & j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

OGNI RIGA RELATIVA ALL'ELEMENTO (e) CONTIENE GLI INDICI DEI NODI INIZIALE E FINALE NEL SISTEMA GLOBALE

1 2 ← (NODI NEL RIFERIMENTO LOCALE)

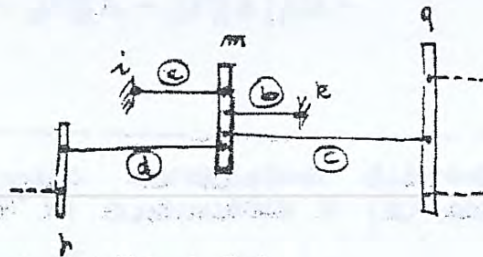
QUESTA MATRICE CONSENTE LA CREAZIONE, IN MODO RAPIDO, DELLA MATRICE DI RIGIDENZA GLOBALE

$$[B] = \begin{bmatrix} \vdots \\ i & m \\ m & k \\ m & q \\ r & n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

← EL. (a)  
← EL. (b)  
← EL. (c)  
← EL. (d)

1 2 ← NODI SISTEMA LOCALE

$$k_{mm} = k_{22}^{(a)} + k_{11}^{(b)} + k_{11}^{(c)} + k_{22}^{(d)}$$





POICHE' LE VARIAZIONI DELLE  $U_i$  SONO ARBITRARIE I COEFFICIENTI DELLE EQUAZIONI PRECEDENTI RELATIVI A CIASCUN  $U_i$  DEVONO ESSERE SINGOLARMENTE NULLI. QUESTO RISULTA ESPRESO IN FORMA MATRICIALE DALLE:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} + F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

MATRICE DI RIGIDENZA

VECTORE FORSE MODALI

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1}{h_1} & -\frac{a_1}{h_1} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{h_1} & \frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} & -\frac{a_2}{h_2} & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{h_2} & \frac{a_2}{h_2} + \frac{a_3}{h_3} & -\frac{a_3}{h_3} \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{h_3} & \frac{a_3}{h_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_1 h_1 \\ f_1 h_1 + f_2 h_2 \\ f_2 h_2 + f_3 h_3 \\ f_3 h_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} + P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

OSS:

LE RELAZIONI SOPRARIPORTATE NON SONO UTILIZZABILI PER LA DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI INCOGNITI  $U_i$ . POICHE' LA MATRICE DEI COEFFICIENTI  $[K]$  RISULTA SINGOLARE, OCCORRE IMPORRE LE CONDIZIONI AL CONTORNO ESSENZIALI.

### ● CONDIZIONI AL CONTORNO E RISOLUZIONE SISTEMA



CON RIFERIMENTO ALLO SCHEMA DI FIANCO RIPORTATO SI HA CHE

$$\begin{pmatrix} P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} + P_1^{(3)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} P_2^{(2)} + P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

POSSONO ESSERE INTERPRETATE COME CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DELLE SOLI.

CITAZIONI INTERNE (MATEMATICAMENTE RAPPRESENTANO LA DIFFERENZA DI  $(a \frac{du}{dx})$  TRA L'ELEMENTO  $(i)$  E L'ELEMENTO  $(i+1)$  NEL MONO EN) E RISULTANO NULLE NON AVENDO I MONI, CARICHI PUNTUALI DISTINTAMENTE APPLICATI.

$$\begin{bmatrix} U_1 = 0 \\ P_2^{(1)} + P_1^{(2)} = 0 \\ P_2^{(2)} + P_1^{(3)} = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle \Delta \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \quad \langle P \rangle = \begin{pmatrix} \left( -a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} \equiv P_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}$$



OSS: IL RISULTATO APPENA TROVATO È IN DIETRO CONTRASTO  
 CON QUANTO PRECEDENTEMENTE SUPPOSTO: INFATTI LE  
 CONDIZIONI DI "EQUILIBRIO" DETTATE DALLE  $p_i^{(e)}$  (VARIABLE  
 DUALI) NEI MODI INTERELEMENTO

$$p_2^{(1)} + p_1^{(2)} = 0$$

$$p_2^{(2)} + p_1^{(3)} = 0$$

IMPOSTIAMO LA CONDIZIONE CHE LA VARIABILE SECONDARIA  
 ( $a \frac{du}{dx}$ ) SIA CONTINUA AI MODI -

QUESTO DERIVA FONDAMENTALMENTE DALL' AVER CONSIDERATO

$$I(u_i) \stackrel{v}{=} \sum_{e=1}^n I_e(u_i^{(e)})$$

E NELL' AVERE CHESSO LA SOMMA DEI CONTRIBUTI INTERE  
 MENTO

$$\sum_{e=1}^n \left( \sum_{i=1}^e p_i^{(e)} u_i^{(e)} \right)$$

NELLA DEFINIZIONE DELLA FORMA QUADRATICA DEL PROBLEMA



È più tranquillamente estendere il problema al campo 2D e 3D:

**APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE IN 2D**

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \dots + \alpha_m y^m$$

in il polinomio  $\phi \Rightarrow$  approssimiamo il campo di spostamento (e dalla meccanica rat.  $m = \sum_{j=1}^n J$ ) del continuo,  $\phi$   $\Rightarrow$  approssimazione che diamo deve essere indipendente dal s.d.r.

**APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE IN 3D**

$$\phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 +$$

risultato, cioè la nostra funzione approssimante deve rispettare il triangolo di Pascal (in 2D) e il tetraedro di Pascal (in 3D)

Non è sempre detto che aumentando il grado del polinomio migliori il risultato perché: 1. può bastare un grado inferiore per il problema che trattiamo, 2. aumentando il grado del polinomio, aumentano i costi da fare (e i costi costano!).

$$m = \sum_{j=1}^n J \cdot (n+2-j)$$

OSSERVAZ.

DOVE IL GRADO DEL POLINOMIO È SUGGERITO DAL PROBLEMA DA ANALIZZARE È DALL'APPROSSIMAZIONE DESIDERATA - IN PRIMA ANALISI SEMBREREBBE CONSIGLIABILE RICORRERE AD ORDINI DI TRONCAMENTO DEL POLINOMIO MOLTO ELEVATI, PER OTTENERE UNA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE DELLA SOLUZIONE; QUESTA SCELTA IN TERMINI PRATICI NON È OPPORTUNA SIA PERCHÉ IN GENERE NON NECESSARIA, SIA PER LE DIFFICOLTÀ DI CALCOLO CHE NE DERIVANO. IN OGNI CASO LA SCELTA DEVE TENER CONTO DELLE CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ DI COMPLETEZZA E NON ULTIMA DELLA COMBINAZIONE DI ISOTROPIA GEOMETRICA E CIOÈ IL RISULTATO DELL'APPROSSIMAZIONE DEVE ESSERE INDIPENDENTE DAL SISTEMA DI COORDINATE LOCALI SCELTO. (VED. TRIANGOLO DI TARTAGLIA PAG. SEG.)

I COEFFICIENTI  $\alpha_i$  DELL'ESPRESSIONE POLINOMIALE SONO LE "COORDINATE GENERALIZZATE" E AD ESSI È DIFFICILE ATRIBUIRE UN PRECISO SIGNIFICATO FISICO - IL GRADO DEL POLINOMIO FORNISCE LA FORMA DELLA FUNZIONE APPROSSIMANTE NELL'AMBITO DELLA REGIONE DISCRETIZZATA MENTRE LE "COORDINATE GENERALIZZATE" NE DEFINISCONO L'AMPIEZZA E FORNISCONO IL MINIMO NUMERO DI PARAMETRI NECESSARI A DESCRIVERE LA FUNZIONE SCELTA.

RISULTA OVVIO CHE LE "COORDINATE GENERALIZZATE" SONO PARAMETRI INCOGNITI DA DETERMINARSI IMPOSTANDO CHE LA FUNZIONE  $\phi$  ASSUMA VALORI NOTI IN ALCUNI PUNTI POSTI SUL CONTOURNO DEL SOTTODOMINIO DI SOLUZIONE

NEGLI MAGGIOR PARTE DEI CASI L'ORDINE DEL POLINOMIO È INFERIORE O AL MASSIMO UGUALE A TRE:

For  $n=1$  (linear model)

One-dimensional case:

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Two-dimensional case:

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

Three-dimensional case:

$$\phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$$



### For $n = 2$ (quadratic model)

One-dimensional case:

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

Two-dimensional case:

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy$$

Three-dimensional case:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 \\ & + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz \end{aligned}$$

### For $n = 3$ (cubic model)

One-dimensional case:

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

Two-dimensional case:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy \\ & + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 y^3 + \alpha_9 x^2 y + \alpha_{10} xy^2 \end{aligned}$$

Three-dimensional case:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 \\ & + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz + \alpha_{11} x^3 + \alpha_{12} y^3 \\ & + \alpha_{13} z^3 + \alpha_{14} x^2 y + \alpha_{15} x^2 z + \alpha_{16} y^2 z \\ & + \alpha_{17} xy^2 + \alpha_{18} xz^2 + \alpha_{19} yz^2 + \alpha_{20} xyz \end{aligned}$$

## 2) DEFINIZIONE DELL'ELEMENTO

**A) ELEMENTO SEMPLICE:** NELL'ELEMENTO SEMPLICE, L'APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE ADOTTATA CONTIENE I TERMINI COSTANTI E LINEARI. GLI ANGOLI DEGLI ELEMENTI (NODI) SONO I PUNTI DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE INCOGNITA  $\phi$  (NODI DELL'ELEMENTO - UN ELEMENTO SEMPLICE E' UNA FIGURA GEOMETRICA OTTENUTA UNENDO  $M+1$  NODI IN UNO SPAZIO  $M$  DIMENSIONALE).

**B) ELEMENTO COMPLESSO:** ELEMENTO PER IL QUALE L'APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE ADOTTATA CONTIENE TERMINI QUADRATICI, CUBICI O PIU' ELEVATI, IN AGGIUNTA AI TERMINI COSTANTE E LINEARE. L'ELEMENTO COMPLESSO HA LA STESSA FORMA DELL'ELEMENTO SEMPLICE, CON NODI AGGIUNTIVI DISPOSTI LUNGO IL CONTORNO ED ALL'INTERNO DELL'ELEMENTO STESSO.

**C) ELEMENTO "MULTIPLEX":** SONO ELEMENTI AVENTI I LATI DEL CONTORNO PARALLELI AGLI ASSI COORDINATI E I POLINOMI APPROSSIMANTI CONTIENENTI TERMINI DI ORDINE ELEVATO.



$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \gamma_1 & \dots \\ 1 & x_2 & \gamma_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & \gamma_m & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \rightarrow [\phi] = [\bar{x}] [\alpha]$$

↑  
MATRICE QUADRATA (m,m)

DALLA SOLUZIONE DEL SISTEMA SI OTTIENE IL VETTORE  $[\alpha]$

$$[\alpha] = [\bar{x}]^{-1} [\phi]$$

CHE CONSENTE DI ESPRIMERE LA FUNZIONE  $\phi$  IN TERMINI DI VALORI MODALI  $\bar{\phi}$  (ATT: NELLA REALTA'  $\bar{\phi}$  SONO VALORI INCOGNITI)

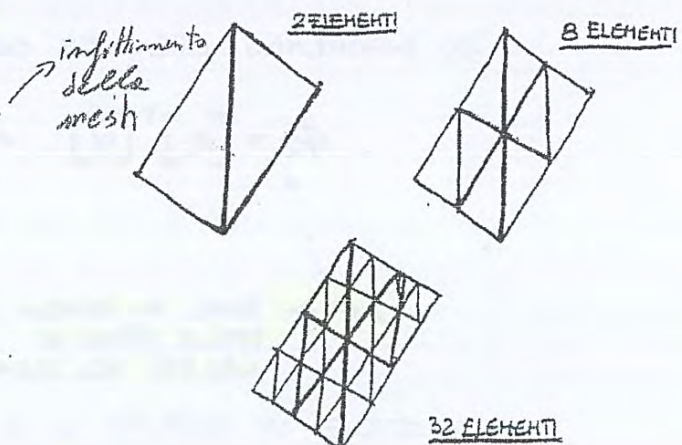
$$\phi(x) = [x]^T [\alpha] = [x]^T [\bar{x}]^{-1} [\bar{\phi}] = [H] [\bar{\phi}]$$

$H(\cdot)$  SONO DETTE FUNZIONI DI FORMA

OSSE: IN QUESTO CONTESTO GIOVA OSSERVARE CHE IL TIPO DI POLINOMIO INTERPOLANTE CONDIZIONA LA MATRICE  $[X]$  CHE IN ALCUNI CASI PUO' DIVENTARE SINGOLARE E DUNQUE NON INVERTIBILE - PER OVVIARE A QUESTO POSSIBILE INCONVENIENTE SI PUO' PENSARE DI ESPRIMERE LA MATRICE  $[H]$  IN FUNZIONE DI QUANTITA' ADIMENSIONALI (DETTE "COORDINATE NATURALI") E VERIFICARE A POSTERIORI CHE LE APPROSSIMAZIONI COSI' OTTENUTE SODDISFANO LE CONDIZIONI DI CONVERGENZA.

### 3) CONDIZIONI DI CONVERGENZA

RIDUCENDO SUCCESSIVAMENTE LA DIMENSIONE DELL'ELEMENTO, SI OTTIENE UNA SEQUENZA DI SOLUZIONI APPROSSIMATE. (ATT: OGNI INFINITAMENTE DEVE CONTENERE LE SOLUZIONI PRECEDENTI) - TALE SEQUENZA CONVERGE ALLA SOLUZIONE ESATTA SE SONO SODDISFATTE LE SEGUENTI "CONDIZIONI":





LEZ. 14-03-2014



**ELEMENTI IH**

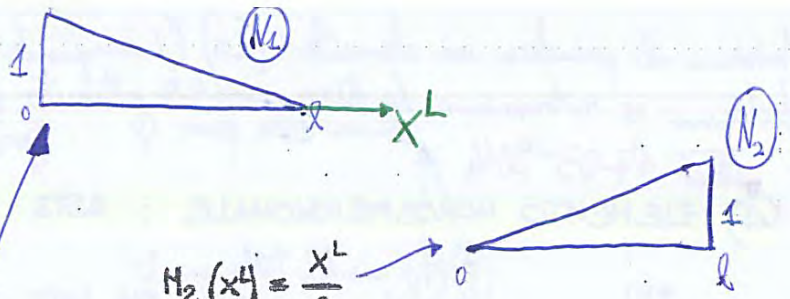
**"COORDINATE GENERALIZZATE"**

**ELEMENTI MONODIMENSIONALI**

**STUDIO ELEMENTI ASTA RETICOLARE**

**STUDIO ELEMENTI TRAVE (ARCO)**





SI MODIFICANO IH

$$H_1(x^L) = 1 - \frac{x^L}{l}$$

$$H_2(x^L) = \frac{x^L}{l}$$

E LA FUNZIONE SPOSTAMENTO RISULTA APPROSSIMATA DALLA

$$u(x^L) = \left(1 - \frac{x^L}{l}\right) u_1^L + \frac{x^L}{l} u_2^L$$

$\left. \begin{matrix} u_1^L \\ u_2^L \end{matrix} \right\}$  SPOSTAMENTI AI MODI NEL SISTEMA LOCALE.

RIPERCORRENDO LA TRATTAZIONE GIÀ EFFETTUATA IN PRECEDENZA DALLA S.d.C. SI HA

① **ATTENZIONE:** rappresenta la forza annata (non i funz. di forma)

$$N = \sigma A = (E \epsilon) A = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] EA = \left[ \frac{du(x^L)}{dx^L} \right] EA \Rightarrow$$

nel caso del problema della bilba, coincide con la derivata totale

[B] → miscela delle derivate delle funz. di forma  
 $\Rightarrow N = EA [B] [u^L]$

$$\frac{d}{dx^L} [u(x^L)] = \frac{d}{dx^L} [H_1(x^L) u_1^L + H_2(x^L) u_2^L] = \begin{bmatrix} \frac{dH_1(x^L)}{dx^L} & \frac{dH_2(x^L)}{dx^L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^L \\ u_2^L \end{bmatrix} = [B] [u^L]$$

② en. elastica di deformazione  $\rightarrow U = \int_0^l \frac{N^2 dx^L}{2EA}$

SBC:

$$L = \frac{1}{2} N dw = \frac{1}{2} N \epsilon dz = \frac{1}{2} N \cdot \frac{N}{EA} dz = \frac{N^2}{2EA} dz$$

APPLICANDO IL CASTIGLIANO (non vanno a osservare!)  
 questa relat. può essere riscritta in termini matriciali con  $\begin{bmatrix} F_1^L \\ F_2^L \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} u_1^L \\ u_2^L \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial U}{\partial u_1^L} = F_1^L = EA \int_0^l \left[ \frac{dH_1}{dx^L} u_1^L + \frac{dH_2}{dx^L} u_2^L \right] \frac{dH_1}{dx^L} dx^L = \underbrace{\left( EA \int_0^l \frac{dH_1}{dx^L} \frac{dH_1}{dx^L} dx^L \right)}_{k_{11}} u_1^L + \underbrace{\left( EA \int_0^l \frac{dH_1}{dx^L} \frac{dH_2}{dx^L} dx^L \right)}_{k_{12}} u_2^L$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_2^L} = F_2^L = \underbrace{\left( EA \int_0^l \frac{dH_2}{dx^L} \frac{dH_1}{dx^L} dx^L \right)}_{k_{21}} u_1^L + \underbrace{\left( EA \int_0^l \frac{dH_2}{dx^L} \frac{dH_2}{dx^L} dx^L \right)}_{k_{22}} u_2^L$$



LEZ. 14-03-2014

5) **ELEMENTO MONODIMENSIONALE: TRAVE**: ha come parametri nodali 2 spostam. verticali e le 2 rotazioni.  $\Rightarrow$  4 parametri nodali  $\Rightarrow$  ha 4 CC.  $\Rightarrow$  il polinomio che posso utilizzare sarà al max. di tipo cubico.



SI SUPPONE DI APPROSSIMARE LA FUNZIONE SPOSTAMENTO  $u^L(x)$  MEDIANTE UN POLINOMIO DEL TIPO:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (**)$$

DAVE LE "COORDINATE GENERALIZZATE"  $\alpha_i$  SI DETERMINANO SAPPENDO CHE:

CONDIZIONI AL CONFINTO

$$\left[ \begin{array}{l} u(0) = u_1^L \\ u(l) = u_2^L \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{du(0)}{dx^L} = \psi_1^L \\ \frac{du(l)}{dx^L} = \psi_2^L \end{array} \right] \quad (*)$$

IN TERMINI MATRICIALI LE (\*) FORNISCONO

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^L \\ \psi_1^L \\ u_2^L \\ \psi_2^L \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{[X]} [\alpha] = [u^L]$$

*matrice dei parametri nodali (contiene le coord. gli nodi)*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^3 & 0 & 0 \\ l^3 & -3l & -2l^2 & 3l \\ 2 & l & -2 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^L \\ \psi_1^L \\ u_2^L \\ \psi_2^L \end{bmatrix} \quad \leftarrow [a] = [X]^{-1} [u^L]$$

LA (\*\*\*) DIVIENE:

$$v(x^L) = u_1^L + x^L \psi_1^L - \frac{3x^{L2}}{l^2} u_1^L - \frac{2x^{L2}}{l} \psi_1^L + \frac{3x^{L2}}{l^2} u_2^L - \frac{x^{L2}}{l} \psi_2^L + \frac{2x^{L3}}{l^3} u_1^L + \frac{x^{L3}}{l^2} \psi_1^L - \frac{2x^{L3}}{l^3} u_2^L + \frac{x^{L3}}{l^2} \psi_2^L, \text{ oppure}$$

in forma matriciale



Anche qui vediamo come determinare la matrice di rigidezza:

SAPENDO DALLA S.d.C. che  $M = -ES \frac{d^2v}{dx^2}$

$$\frac{d^2\sigma(x^L)}{dx^L} = -\frac{H}{EJ}$$

dalla S.d.C.:

$$dL = \frac{1}{2} H_x dx = \frac{1}{2} H_x \gamma_x dz = \frac{1}{2} H_x \frac{\gamma_x}{EI} dz = \frac{1}{2EI} H_x \gamma_x dz$$

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx^L}{2EI} = \frac{ES}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2\sigma}{dx^L} \right)^2 dx^L = \frac{ES}{2EI} \int_0^l \left( \frac{d^2\sigma}{dx^L} \right)^2 dx^L$$

dalla (A)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{EI} \left[ H_1^L \sigma_1^L + H_2^L \varphi_1^L + H_3^L \sigma_2^L + H_4^L \varphi_2^L \right]^2 dx^L$$

$$U = \frac{1}{2} [u^L]^T [k] [u^L]$$

$$U = \frac{1}{2} [u^L]^T [B]^T (EJ) [B] [u^L]$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [B]^T (EJ) [B] dx^L$$

$$[k] = EJ \int_0^l [B]^T [B] dx^L = EJ \int_0^l \begin{bmatrix} H_1^L \\ H_2^L \\ H_3^L \\ H_4^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^L & H_2^L & H_3^L & H_4^L \end{bmatrix} dx^L$$

**MATRICE DI RIGIDENZA**

$$k_{ij} = EJ \int_0^l (H_i^L H_j^L) dx^L$$

SAPENDO CHE le derivate delle funz. di forma sono

$$H_1''(x^L) = -\frac{6}{l^2} + 12 \frac{x^L}{l^3}$$

$$H_3''(x^L) = \frac{6}{l^2} - 12 \frac{x^L}{l^3}$$

$$H_2''(x^L) = -\frac{4}{l} + 6 \frac{x^L}{l^2}$$

$$H_4''(x^L) = -\frac{2}{l} + 6 \frac{x^L}{l^2}$$

SI RICAVALO I COEFFICIENTI NELLA MATRICE (IP. J=cost)

$$k_{11} = EJ \int_0^l (H_1'')^2 dx^L = EJ \int_0^l \left( -\frac{6}{l^2} + 12 \frac{x^L}{l^3} \right)^2 dx^L = \frac{EJ}{l^4} \left( 36x^L - \frac{72x^L^2}{l} + \frac{48x^L^3}{l^2} \right) \Big|_0^l = \frac{12EJ}{l^3}$$

$$k_{12} = EJ \int_0^l H_1'' H_2'' dx^L = EJ \int_0^l \left( -\frac{6}{l^2} + 12 \frac{x^L}{l^3} \right) \left( -\frac{4}{l} + 6 \frac{x^L}{l^2} \right) dx^L = \frac{6EJ}{l^3} \left( 4x^L - \frac{7x^L^2}{l} + \frac{4x^L^3}{l^2} \right) \Big|_0^l = \frac{6EJ}{l^2}$$

SI OTTIENGO I VALORI GIÀ VISTI IN PRECEDENZA QUANDO SI ERAHO TRATTATI I TELAI: LA [K] COST OTTENUTA NON HA I CONTRIBUTI LEGATI ALLO SPOSTAMENTO  $u^L$

partic. di  $U = [0]^T [E]$  e poi l'albramo particolarizzata per il problema in questione

(funz. di forma)

Questa strada vista te del tutto generica (la vedremo anche nel caso 2D e 3D). Qui abbiamo calcolato due di determinati valori...



**OSSERVAZIONE:** UNA TRAVE AD INERZIA VARIABILE PUO' ESSERE SCHEMATIZZATA MEDIANTE UNA SUCCESSIONE DI ELEMENTI DI UGUAL LUNGHEZZA AD INERZIA COSTANTE A TRATTI. (AD ESEMPIO ASSUMENDO PER OGNI ELEMENTO IL MOMENTO A META' LUNGHEZZA). TALE SCHEMATIZZAZIONE, CON UN BASSO NUMERO DI ELEMENTI DI SUDDIVISIONE PUO' COMPORTARE ERRORI ANCHE CONSIDEREVOLI (ORDINE ANCHE DEL 30%). DA QUESTA CONSIDERAZIONE LA NECESSITA' DI SUDDIVIDERE IN UN NUMERO ELEVATO DI ELEMENTI LA TRAVE CON CONSEGUENTE INCREMENTO DEL TEMPO DI ELABORAZIONE (SPECIE IN ANALISI DINAMICA). IN TALI CASI E' FORTEMENTE CONSIGLIATO L'USO DELLE TRAVE AD INERZIA VARIABILE.

LEZ. 14-03-2014

**6) TRAVE CIRCOLARE**

per le trave curva (non solo circolari) è un capitolo a parte (ci metteremo un intero corso per trattarle)

LA DIFFERENZA FONDAMENTALE TRA TRAVE CURVA E TRAVE RETTILINEA E' CHE, NELLA TEORIA DEI PICCOLI SPOSTAMENTI, IL **COMPORTAMENTO ASSIALE E FLESSIONALE** RISULTANO ACCOPPIATI NELLA TRAVE CURVA E NON. NELLA TRAVE RETTA (→ OPPORTUNA DEFINIZIONE FUNZ. SPOSTAMENTI. LE FUNZIONI SPOSTAMENTO PER GLI ELEMENTI TRAVI CURVE DEVONO POTER RAPPRESENTARE TRE SPOSTAMENTI RIGIDI: DUE TRASLAZIONI ORTOGONALI E UNA ROTAZIONE, TUTTE NEL PIANO DI CURVATURA DELL'ELEMENTO - DALLA LORO DEFINIZIONE DERIVA LA COMPLETA CARATTERIZZAZIONE DELL'ELEMENTO) INDICATA CON  $u(s)$  LA FUNZIONE SPOSTAMENTO TANGENZIALE,  $v(s)$  LA FUNZIONE SPOSTAMENTO RADIALE, "s" COORDINATA CURVILINEA. MISURATI A PARTIRE DAL NODO 1. VENGONO DI SEGUITO RIPRODOTTE ALCUNE TRA LE **APPROSSIMAZIONI** CORRENTEMENTE USATE:

**1) ELEMENTO LINEARE IN  $u$  E CUBICO IN  $v$**

si differenziano a seconda di come vengono rappresentate le funzioni spostamento radiale e tangenziale.

$$u(s) = \alpha_1 + \alpha_2 s$$

$$v(s) = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3$$

GRADI DI LIBERTA' PER NODO

$$u_i, v_i, \left(\frac{dv(s)}{ds}\right)_i$$

**2) ELEMENTO LINEARE IN  $u$ , CUBICO IN  $v$  E COSTRINTI DI SPOSTAMENTO RIGIDO**

$$u(s) = \alpha_1 \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi + \alpha_3 R (\cos \varphi \cos \varphi - 1) + \alpha_4 s$$

$$v(s) = \alpha_1 \sin \varphi + \alpha_2 \cos \varphi + \alpha_3 R \cos \varphi \sin \varphi + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3$$

GRADI DI LIBERTA' PER NODO

$$u_i, v_i, \left(\frac{dv(s)}{ds} - \frac{u(s)}{R}\right)_i$$

DOVE:  $R$  = RAGGIO DI CURVATURA DELL'ELEMENTO  
 $\beta$  = SEMIANGOLO SOTTESO  
 $\varphi$  = VARIABILE ANGOLARE MISURATA A PARTIRE DALLA BISEZIONE DELL'ANGOLO SOTTESO

$$\left(\frac{dv(s)}{ds} - \frac{u(s)}{R}\right) = \text{ROTAZIONE DELLA TANGENTE}$$



ELEMENTO TIPO 3

ELEMENTO RETTILINEO

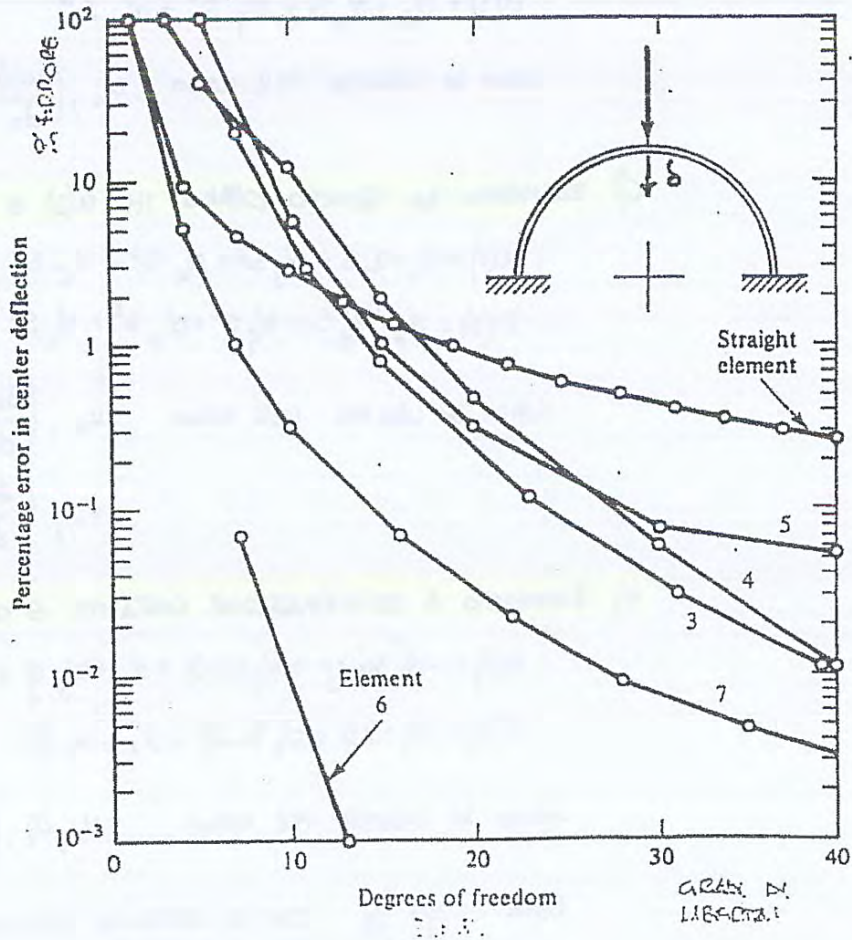
8-D.O.F. Curved Element				6-D.O.F. Straight Element			
Number of Elements	Number of D.O.F.	Center Deflection (in.)	Error (%)	Number of Elements	Number of D.O.F.	Center Deflection (in.)	Error (%)
1	3	0.004299	97.0	1	1	0.004800	96.6
2	7	0.114635	19.0	2	4	0.127804	9.69
3	11	0.137156	3.09	3	7	0.134743	4.79
4	15	0.140381	0.81	4	10	0.137483	2.86
5	19	0.141123	0.28	6	16	0.139643	1.33
6	23	0.141353	0.12	7	19	0.140127	0.99
7	27	0.141440	0.059	8	22	0.140447	0.76
8	31	0.141478	0.032	10	28	0.140829	0.49
9	35	0.141497	0.019	11	31	0.140948	0.41
10	39	0.141507	0.012	12	34	0.141039	0.34
11	43	0.141513	0.0076	14	40	0.141167	0.25
12	47	0.141516	0.0055	15	43	0.141213	0.22
				16	46	0.141250	0.19

Exact center deflection = 0.1415238 in.

NEL GRAFICO A FIANCO RIPOARTATO SONO DISEGNATE LE CURVE RELATIVE ALLE % DI ERRORE DELLO SPOSTAMENTO DEL PUNTO CENTRALE PER GLI ELEMENTI 3÷7 E L'ELEMENTO TRAVE RETTILINEO, IN FUNZIONE DEL NUMERO DI G.D.L. (DISCRETIZZAZIONE DEL MODELLO)

L'ARCO, DA CONSIDERARSI SPESSE ED ALTO, PRESENTA I SEGUENTI DATI GEOMETRICI:

- $R = 17 \text{ in.}$
- $A = (1 \times 1) \text{ in.}^2$
- $I = \frac{1}{12} \text{ in.}^4$
- $P = 1000 \text{ lb.}$





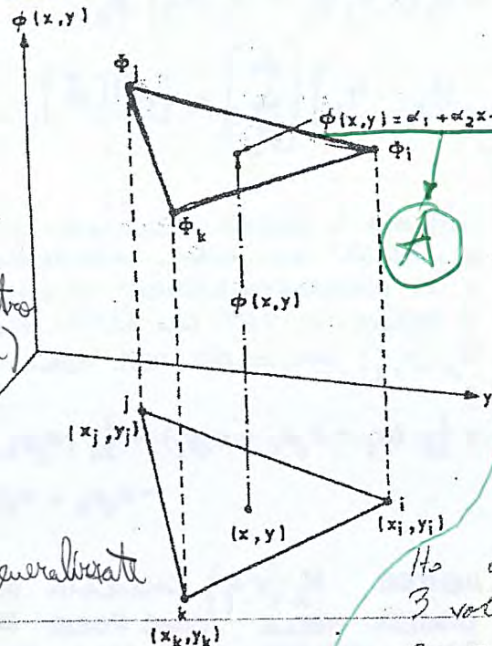
LEZ. 17-03-2014

7) ELEMENTO BIDIMENSIONALE: ELEMENTO TIPO "SIMPLEX"

$\phi(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$  ← POLINOMIO INTERPOLATORE

Triangolo interpolato  
con polinomio di  
1° grado

Abbiamo una  
funzione di campo  
 $\phi$  e riusciamo di  
valerla approssimare  
con un triangolo  
(per ciascun nodo  
conosciamo il parametro  
modale corrispondente)  
Se ha 3 parametri →  
devo avere un  
polinomio che  
ha al  
più tre coordinate generalizzate



è l'equazione  
di un piano.

ATT. - LA NUMERAZIONE  
DEI NODI È PRESA  
IN SENSO ANTIORE  
RIO

-  $\phi_i, \phi_j, \phi_k$  sono  
I VALORI DELLA VARIA-  
BILE DI CAMPO  
 $\phi(x,y)$  NEI NODI  
i, j, k

- LA VARIAZIONE DI  
 $\phi(x,y)$  ALL'INTERNO  
DELL' ELEMENTO È  
ASSUNTA LINEARE

Ho come cond. al contorno solo  
3 valori, l'elemento è bidimensionale  
e, potendo avere al max 3

coordinate generalizzate,  
IMPONENDO LE CONDIZIONI MODALI

→ i termini lineari devono essere, poi devo rispettare  
il te. di Tartaglia → mettendo  $x_i$ , devo mettere  
anche  $x_j$ .

$\phi(x,y) = \phi_i$  at  $(x = x_i, y = y_i)$   
 $\phi(x,y) = \phi_j$  at  $(x = x_j, y = y_j)$   
 $\phi(x,y) = \phi_k$  at  $(x = x_k, y = y_k)$

$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i$   
 $\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j$   
 $\phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k$

(x) →  $\alpha_1$  e  $\alpha_2 x_i$

RESOLUZIONE DEL SISTEMA (invertiamo  
il sistema)

$\alpha_1 = \frac{1}{2A} (\alpha_i \phi_i + \alpha_j \phi_j + \alpha_k \phi_k)$   
 $\alpha_2 = \frac{1}{2A} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k)$   
 $\alpha_3 = \frac{1}{2A} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k)$

COORDINATE  
GENERALIZZATE  
A: area triangolo

DOVE:

$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - x_i y_k - x_j y_i - x_k y_j)$

si ottengono dalla  
1° colonna

AREA DEL TRIANGOLO ijk

$a_i = x_j y_k - x_k y_j$   
 $a_j = x_k y_i - x_i y_k$   
 $a_k = x_i y_j - x_j y_i$

2° colonna

$b_i = y_j - y_k$   
 $b_j = y_k - y_i$   
 $b_k = y_i - y_j$

3° colonna

$c_i = x_k - x_j$   
 $c_j = x_i - x_k$   
 $c_k = x_j - x_i$

COSTANTI

che dipendono solo dalle coordinate nodali (coord. geometriche)

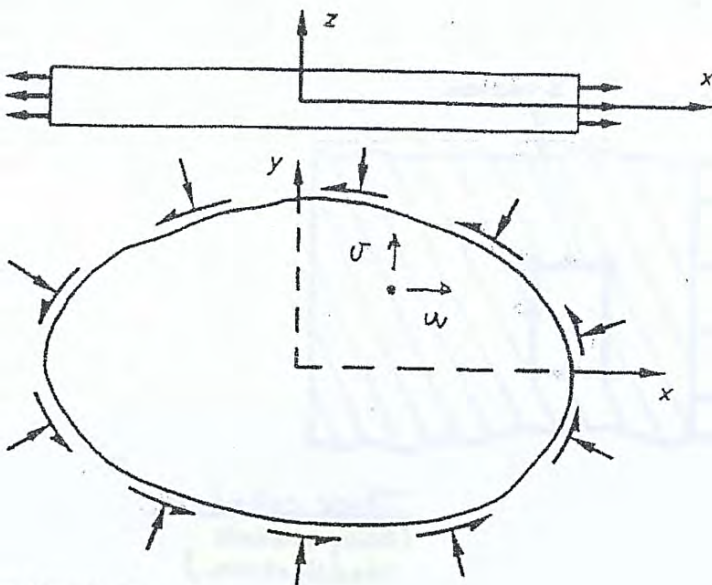


Vediamo di applicare quelle note formalmente (alle precedenti 2 pag.) nel campo strutturale:

LEZ. 14-03-2014

CONSTANT STRAIN TRIANGULA

**A) STATO PIANO DI TENSIONE / DEFORMAZIONE (ELEMENTO (CST) [TOURNER])**



**STATO DI TENSIONE PIANO**

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(\sigma_z = 0)$$

IL CAMPO DI SPOSTAMENTI  $u$  E  $v$  SONO FUNZIONE SOLO DI  $x$  E  $y$ .  
[ $w$  RISULTA NULO]

**STATO DI DEFORMAZIONE PIANO**

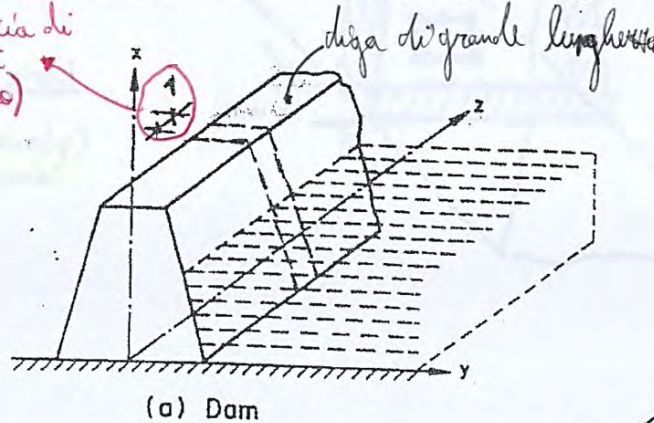
struttura molto lunga  $\rightarrow$  nell'asse di simmetria ( $z$ )  $\epsilon_z = 0$

VALGONO LE STESSA CONSIDERAZIONI FATE PRIMA, CON LA DIFFERENZA CHE IN QUESTO CASO E'  $\epsilon_z = 0$

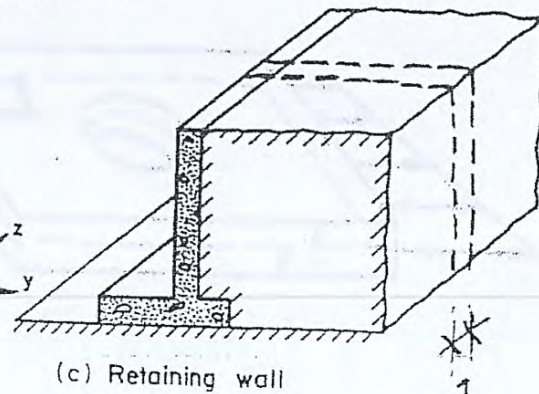
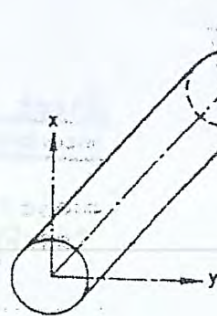
studieremo questa striscia di larghezza unitaria (che sarà soggetta a stato di def. piano)

VIENE ANALIZZATA UNA "FETTA" DI SPESORE UNITARIO

IL CORPO E' INDEFINITAMENTE LUNGO IN DIREZIONE  $z$ : VIENE STUDIATA LA SEZIONE DI MEZZERIA

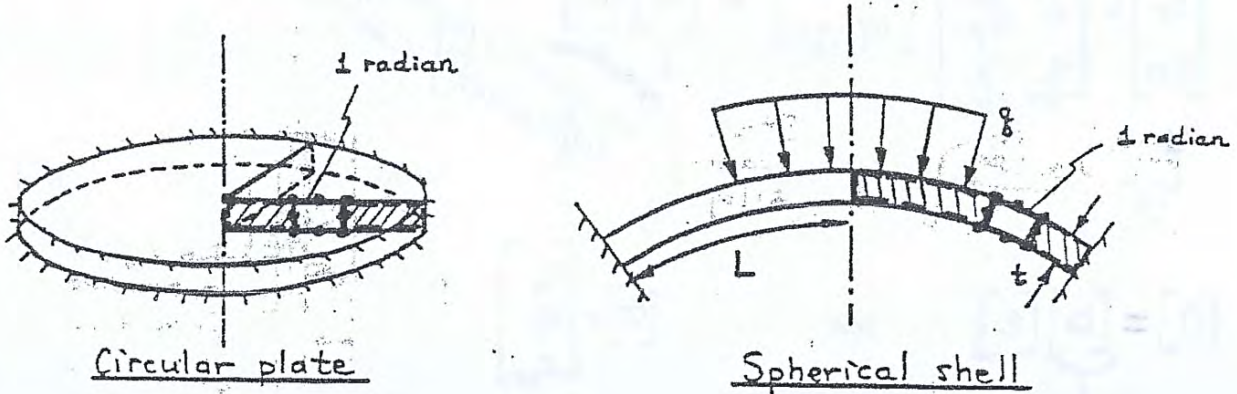


$\epsilon_z = 0$   
 $\downarrow$  ma  $\sigma_z \neq 0$  perché dipende anche da  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$





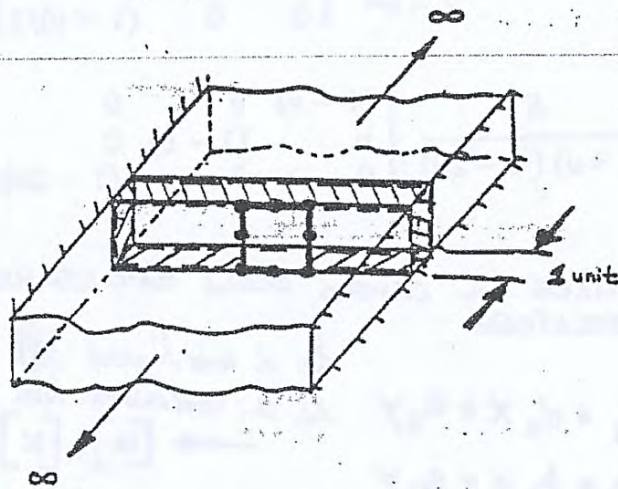
# CASI DI UTILIZZO ELEMENTI 2D (STATI PIAHI O AXI)



Circular plate

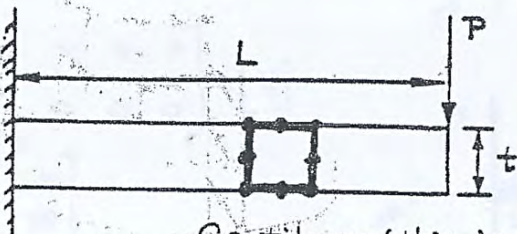
Spherical shell

(Axisymmetric idealizations)



Long plate

(Plane strain idealization)



Cantilever (thin in out-of-plane direction)

(Plane stress idealization)



DALLE CONDIZIONI MODALI  $Y$  SI RICAVA:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

vettore degli spostamenti dei nodi (li conosciamo)

vettore delle coordinate dei nodi (le conosciamo)

vettore dei coefficienti (incognite del nostro problema)

$$[\bar{u}] = [X][\alpha]$$

RISOLVENDO IL SISTEMA

$$[\alpha] = [X]^{-1}[\bar{u}]$$

$$[X]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & e_2 & 0 & e_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

PAG. 121 IN BASSO

I COEFFICIENTI  $a, b, c$  SONO QUELLI VISTI IN PRECEDENZA NELLA

TRATTAZIONE TEORICA DELL'ELEMENTO. OVE SUSAISTE LA CORRISPONDENZA TRA GLI INDICI DEL TIPO  $1, 2, 3 \leftrightarrow i, j, k$

$$[X]^{-1} = \frac{1}{2A}$$

PER CUI NE CONSEGUE CHE:

$$[u] = [X][\alpha] = [X][X]^{-1}[\bar{u}] = [H][\bar{u}]$$

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

FUNZIONI DI FORMA GIÀ VISTE NELLA TRATTAZIONE TEORICA ELEMENTO

le  $N$  sono dei polinomi  $\Rightarrow$  anche  $u$  e  $v$  saranno dei polinomi.

oss:

LE FUNZIONI SPOSTAMENTO SONO TALI PER CUI LO SPOSTAMENTO LUNGO OGNI LATO VARIA LINEARMENTE E DIPENDE SOLO DAGLI SPOSTAMENTI DEI DUE NODI POSTI SUL LATO ESAMINATO. IN TAL MODO E' ASSICURATA LA COMPATIBILITA' DEGLI SPOSTAMENTI TRA DUE ELEMENTI TRIANGOLARI ADIACENTI. LE COMPONENTI DELLA DEFORMAZIONE ESSENDO DERIVATE PRIME DELLE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO, SONO COSTANTI SU TUTTO L'ELEMENTO.



elementi in coord generalizate II. 9B →

38 → i

103 → I

121 → 1

128 → 2



LEZ. 14-03-2014

SI OTTIENE LA MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ELEMENTO:

$$[K] = t \int [B]^T [D] [B] dA =$$

$[D]$  è funzione del materiale.

In questo caso, la matrice  $[B]$  è una matrice di costanti, ma se l'elemento avesse a 3 nodi, forse un elemento di tipo quadratico, allora la matrice  $[B]$  sarebbe funzione di  $x$  e  $y \Rightarrow$  calcolare la matrice di rigidezza potrebbe essere più o meno semplice, in funzione della forma del mio triangolo, perché noi stiamo integrando la matrice di rigidezza in  $x$  e  $y$ , dove il dominio è tutti i punti all'interno e sul bordo del triangolo.  $[B]$  in caso può diventare piuttosto noiosa e complicata  $\Rightarrow$  dalle coord. generalizzate, attualmente, gli elem. finiti vengono usati nella loro formulazione isoparametrica, dove ci si riferisce ad un s.d.f.  $\xi$  ed  $\eta$  che è ottenuto mediante una legge di trasformazione dalle coord. reali dei nodi del triangolo alle coord.  $\xi$  ed  $\eta$ .

$[B]$  È UNA MATRICE DI COSTANTI

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial x} &= \frac{b_1}{2A} & \frac{\partial H_2}{\partial x} &= \frac{b_2}{2A} & \frac{\partial H_3}{\partial x} &= \frac{b_3}{2A} \\ \frac{\partial H_1}{\partial y} &= \frac{c_1}{2A} & \frac{\partial H_2}{\partial y} &= \frac{c_2}{2A} & \frac{\partial H_3}{\partial y} &= \frac{c_3}{2A} \end{aligned}$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = t \cdot A \cdot [B]^T [D] [B] =$$

$d_{1111} \Rightarrow$  elementi di  $[D]$

$d_{11} b_1^2 + d_{33} c_1^2$	$d_{12} c_1 b_1 + d_{33} c_1 b_1$	$d_{11} b_1 b_2 + d_{33} c_1 c_2$	$d_{12} c_2 b_1 + d_{33} c_1 b_2$	$d_{11} b_3 b_1 + d_{33} c_3 c_1$	$d_{12} c_3 b_1 + d_{33} c_1 b_3$
	$d_{22} c_1^2 + d_{33} b_1^2$	$d_{12} b_2 c_1 + d_{33} c_2 b_1$	$d_{22} c_1 c_2 + d_{33} b_1 b_2$	$d_{21} c_1 b_3 + d_{33} c_3 b_1$	$d_{22} c_3 c_1 + d_{33} b_3 b_1$
		$d_{11} b_2^2 + d_{33} c_2^2$	$d_{12} c_2 b_2 + d_{33} c_2 b_2$	$d_{11} b_3 b_2 + d_{33} c_2 c_3$	$d_{12} c_3 b_2 + d_{33} c_2 b_3$
			$d_{22} c_2^2 + d_{33} b_2^2$	$d_{21} c_2 b_3 + d_{33} c_1 b_2$	$d_{22} c_2 c_3 + d_{33} b_3 b_2$
				$d_{11} b_3^2 + d_{33} c_3^2$	$d_{12} c_3 b_3 + d_{33} c_3 b_3$
					$d_{22} c_2^2 + d_{33} b_3^2$

MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ELEMENTO TRIANGOLARI

$\frac{t}{4A}$

sono 2x2, perché ogni nodo ha 2 g.d.l.

$$= \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & [k_{23}] \\ [k_{31}] & [k_{32}] & [k_{33}] \end{bmatrix}$$

ESPRESSIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA IN TERMINI DI SOTTOMATRICI

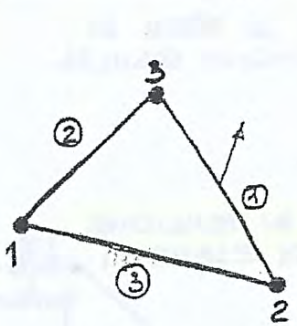


**b) FORZE DI SUPERFICIE**

$$[F^s] = \int_S [H]^T [p] ds$$

IPOTIZZANDO I CARICHI DI SUPERFICIE COSTANTI LUNGO IL LATO GENERICO

$$[F^s] = \begin{bmatrix} \int_S H_1 ds & 0 \\ 0 & \int_S H_1 ds \\ \int_S H_2 ds & 0 \\ 0 & \int_S H_2 ds \\ \int_S H_3 ds & 0 \\ 0 & \int_S H_3 ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$



$$\int_S H_i ds = \int H_i (t \cdot dl_i) = t \frac{l_i}{2} (1 - \delta_{ii})$$

LATO  $i$  CARICATO

LUNGHEZZA INFINITESIMA LATO  $i$

IL LATO  $i$  E' COMPRESO TRA I NODI J E K

LUNGHEZZA LATO  $i$

$$l_i = [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2]^{1/2}$$

- ① → (2, 3)
- ② → (3, 1)
- ③ → (1, 2)

LATO NODI

Anche qui ho una ripartizione isostatica: con riferimento al lato → metà nel nodo iniziale e metà nel quello finale.

$$\begin{bmatrix} F_{x_1}^s \\ F_{y_1}^s \\ F_{x_2}^s \\ F_{y_2}^s \\ F_{x_3}^s \\ F_{y_3}^s \end{bmatrix} = \frac{t l_i}{2} \begin{bmatrix} (1 - \delta_{1i}) & 0 \\ 0 & (1 - \delta_{1i}) \\ (1 - \delta_{2i}) & 0 \\ 0 & (1 - \delta_{2i}) \\ (1 - \delta_{3i}) & 0 \\ 0 & (1 - \delta_{3i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \end{bmatrix}$$

CARICO LATO  $i$

CARICO LATO  $i$



## d) PROGRAMMA DI CALCOLO *(scritto in Fortran, a consente di risolvere strutture con l'elemento CST)*

VIENE PROPOSTO UN PROGRAMMA PER IL CALCOLO DEGLI STATI PIANI DI TENSIONE - GLI STATI PIANI DI DEFORMAZIONE POSSONO ESSERE STUDIATI CON LO STESSO CODICE, SEMPLICEMENTE OSSERVANDO CHE SOSTITUENDO NELLA MATRICE  $[D]$ , I TERMINI  $(E, \nu)$  CON I SEGUENTI

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$$

QUESTA SI TRASFORMA NELLA MATRICE  $[D]$  DEGLI STATI PIANI DI DEFORMAZIONE.

NON VENGONO PROPOSTE LE SUBROUTINE "ASSEM", "ELASS", "BOUND" E "SLBST" POICHE' RISULTANO IDENTICHE A QUELLE UTILIZZATE NEI PROGRAMMI DI CALCOLO RELATIVI ALLE STRUTTURE RETICOLARI E AI TELAI.

RISULTANO MODIFICATE LE DIMENSIONI DELLE MATRICI PER TRATTARE PROBLEMI CON UN MASSIMO DI 100 NODI, 100 ELEMENTI E 30 NODI VINCOLATI. LA MASSIMA LARGHEZZA DI BANDA ANNESSA RISULTA = 40.

MODIFICA DELLE VARIABILI:

- G = COEFFICIENTE DI POISSON  $\nu$
- CON = COME PRIMA, SOLO CHE L'ELEMENTO PRESENTA 3 NODI
- IB = NON MODIFICATO
- X = NON MODIFICATO
- Y = NON MODIFICATO
- PROP = PROP(L) CONTIENE LO SPESORE DELL'ELEMENTO "L"
- AL = NON MODIFICATO
- TK = NON MODIFICATO
- ELST = NON MODIFICATO
- V = NON MODIFICATO
- FORC = CONTIENE LE TENSIONI AL BARICENTRO DELL'ELEMENTO - FORC  $(3*(L-1)+I)$  CON  $I=1,2,3$  CONTIENE LE TENSIONI  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  ELEMENTO "L"
- REAC = COME IN PRECEDENZA VIENE DAPPIMA UTILIZZATO PER MEMORIZZARE I VALORI DEGLI SPOSTAMENTI IMPOSTI - DOPO CONTIENE IL VALORE MEDIO DELLA TENSIONE NEI PUNTI NODALI.
- NODES = NUOVO VETTORE: IN NODES(J) CONTIENE IL NUMERO DI ELEMENTI INCLUSI IN "J" - TALE VETTORE VIENE UTILIZZATO DALLA SUBROUTINE "FORCE"

RISULTA EVIDENTE CHE L'ELEMENTO IMPLEMENTATO E' L'ELEMENTO TRIANGOLARE ADESSA ESAMINATO.

OSS: IL PROGRAMMA OPERA SOLO CON CARICHI CONCENTRATI APPLICATI AI NODI - VIENE LASCIATA ALL'ALIEVO LA MODIFICA DEL SOURCE PER PRENDERE IN CONTO SIA LE FORZE DI VOLUME CHE LE FORZE DI SUPERFICIE



## SUBROUTINE "INPUT"

SUBROUTINE INPUT(X,Y,CON,PROP,AL,IB,REAC)

### INPUT PROGRAM

COMMON NRMX,NCMX,NDFEL,NN,NE,NLN,NBN,NDF,NNE,N,MS,IN,IO,E,G  
 DIMENSION X(1),Y(1),CON(1),PROP(1),AL(1),IB(1),REAC(1),W(3),IC(3)

W = AN AUXILIARY VECTOR TO TEMPORARELY STORE A SET OF  
 NODAL LOADS AND PRESCRIBED UNKNOWN VALUES  
 IC = AUXILIARY ARRAY TO STORE TEMPORARELY THE CONNECTIVITY  
 OF AN ELEMENT, AND THE BOUNDARY UNKNOWNNS STATUS  
 INDICATORS

READ BASIC PARAMETERS

NN = NUMBER OF NODES  
 NE = NUMBER OF ELEMENTS  
 NLN = NUMBER OF LOADED NODES  
 NBN = NUMBER OF BOUNDARY NODES  
 E = MODULUS OF ELASTICITY

WRITE(10,20)

20 FORMAT(' ',130(' '))

READ (IN,1) NN,NE,NLN,NBN,E,G

WRITE(10,21) NN,NE,NLN,NBN,E,G

21 FORMAT(// ' INTERNAL DATA' // ' NUMBER OF NODES :',15/' NUMBER  
 \*R OF ELEMENTS :',15/' NUMBER OF LOADED NODES :',15/' NUMBER  
 \*OF SUPPORT NODES :',15/' MODULUS OF ELASTICITY :',F15.0/' POISSON  
 \*COEFFICIENT :',F15.4// ' NODAL COORDINATES' /7X,'NODE',6X,'X',9X,  
 \*'Y')

1 FORMAT(4I10,2F10.2)

READ NODAL COORDINATES IN ARRAY X AND Y

READ(IN,2) (I,X(I),Y(I),J=1,NN)

WRITE(10,2) (I,X(I),Y(I),I=1,NN)

2 FORMAT(I10,2F10.2)

READ ELEMENT CONNECTIVITY IN ARRAY CON  
 AND ELEMENT THICKNESS IN ARRAY PROP

WRITE(10,22)

22 FORMAT('/' ELEMENT CONNECTIVITY AND PROPERTIES' /4X,'ELEMENT',14X,  
 \*'NODES',16X,'THICKNESS')

DO 3 J=1,NE

READ(IN,4) I,IC(1),IC(2),IC(3),PROP(I)

WRITE(10,34) I,IC(1),IC(2),IC(3),PROP(I)

N1=NNE+(I-1)

CON(N1+1)=IC(1)

CON(N1+2)=IC(2)

3 CON(N1+3)=IC(3)

4 FORMAT(4I10,F10.3)

34 FORMAT(4I10,F15.5)

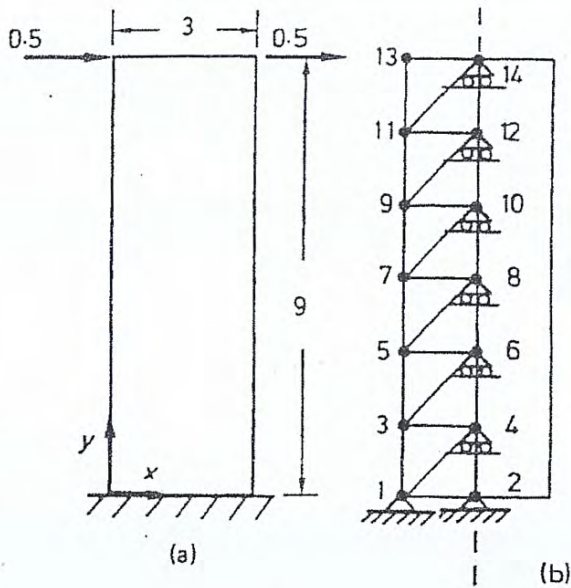
COMPUTE N, ACTUAL NUMBER OF UNKNOWNNS, AND CLEAR THE LOAD  
 VECTOR

N=NN\*NDF

DO 5 I=1,N

5 AL(I)=0.





SPESSORE  $t=1$

$E=1$   $\nu=0$

STRUTTURA CARICATA IN MODO ANTIMETRICO (META' CARICO IN CIASCUN MODO DI ESTREMITA')



ESSENDO IL PROBLEMA ANTIMETRICO E' POSSIBILE STUDIARE SOLO META' DELLA STRUTTURA COME RIPORTATO IN FIGURA A FIANCO

\*\*\*\*\* INPUT FOR PLANE STRESS ANALYSIS PROGRAM

14	12	1	8	1.	SK. PARAMETRI GENER.
1					
2	1.5				
3		1.5			
4	1.5	1.5			
5		3.			
6	1.5	3.			
7		4.5			SK. MODI
8	1.5	4.5			
9		6.			
10	1.5	6.			
11		7.5			
12	1.5	7.5			
13		9.			
14	1.5	9.			
1	1	2	4	1.	
2	1	4	3	1.	
3	3	4	6	1.	
4	3	6	5	1.	
5	5	6	8	1.	
6	5	8	7	1.	SK. ELEMENTI
7	7	8	10	1.	
8	7	10	9	1.	
9	9	10	12	1.	
10	9	12	11	1.	
11	11	12	14	1.	
12	11	14	13	1.	
13	0.5				SK. CARICHI MODALI
1					
2					
4		1			
6		1			
8		1			
10		1			SK. MODI VINCOLATI
12		1			
14		1			



## SUBROUTINE "STIFF"

SUBROUTINE PER IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA [R]. TALI COEFFICIENTI RISULTANO MEMORIZZATI IN ELST.

```

SUBROUTINE STIFF(NEL,X,Y,PROP,CON,ELST,AL)
C
C
C COMPUTATION OF THE ELEMENT CHARACTERISTIC MATRIX
C
COMMON NRMX,NCMX,NDFEL,NN,NE,NLN,NBN,NDF,NNE,N,MS,IN,IO,E,G,C,ALA
DIMENSION X(1),Y(1),CON(1),PROP(1),ELST(NDFEL,NDFEL),B(3),D(3),
+AL(1)
C
C NEL = NUMBER OF CURRENT ELEMENT
C N1,N2,N3 = NUMBERS OF FIRST, SECOND, AND THIRD ELEMENT NODE
C D1,D2,D3 = LENGTH OF FIRST, SECOND, AND THIRD ELEMENT SIDES
C
L=NNE*(NEL-1)+1
N1=CON(L)
N2=CON(L+1)
N3=CON(L+2)
C
C DEFINE TRIANGULAR COORDINATES
C ARRAYS B AND D CONTAIN SECOND AND THIRD COLUMN OF MATRIX
C A = AREA OF ELEMENT
C
B(1)=Y(N2)-Y(N3)
B(2)=Y(N3)-Y(N1)
B(3)=Y(N1)-Y(N2)
D(1)=X(N3)-X(N2)
D(2)=X(N1)-X(N3)
D(3)=X(N2)-X(N1)
A=(B(1)*D(2)-B(2)*D(1))/2.
DO 1 I=1,3
B(I)=B(I)/(2.*A)
1 D(I)=D(I)/(2.*A)
ALA=E*PROP(NEL)*A/(1-G**2.)
AX=(1.-G)/2
C
C COMPUTE ELEMENT MATRIX
C
DO 2 I=1,6
DO 2 J=1,6
2 ELST(I,J)=0.
DO 3 I=1,3
IX=(I-1)*2+1
IZ=(I-1)*2+2
DO 3 J=1,3
JX=(J-1)*2+1
JZ=(J-1)*2+2
ELST(IX,JX)=(B(I)*B(J)+AX*D(I)*D(J))*ALA
ELST(IX,JZ)=(G*B(I)*D(J)+AX*D(I)*B(J))*ALA
ELST(IZ,JZ)=(D(I)*D(J)+AX*B(I)*B(J))*ALA
3 ELST(IZ,JX)=(G*D(I)*B(J)+AX*B(I)*D(J))*ALA
RETURN
END

```



```

K3=NDF*(N3-1)
C=E/(1-ANU*ANU)
L=3*(NEL-1)
FORC(L+1)=C*( B(1)*AL(K1+1)+B(2)*AL(K2+1)+B(3)*AL(K3+1)+
*ANU*(D(1)*AL(K1+2)+D(2)*AL(K2+2)+D(3)*AL(K3+2)))
FORC(L+2)=C*(ANU*(B(1)*AL(K1+1)+B(2)*AL(K2+1)+B(3)*AL(K3+1))
*D(1)*AL(K1+2)+D(2)*AL(K2+2)+D(3)*AL(K3+2))
FORC(L+3)=C*(1-ANU)*(D(1)*AL(K1+1)+D(2)*AL(K2+1)+D(3)*
*AL(K3+1)+B(1)*AL(K1+2)+D(2)*AL(K2+2)+B(3)*AL(K3+2))/2.
C
C COMPUTE THE STRESSES NODAL AVERAGES, IN ARRAY REAC
C
K1=3*(N1-1)
K2=3*(N2-1)
K3=3*(N3-1)
DO 50 I=1,3
L1=K1+1
L2=K2+1
L3=K3+1
L4=L+1
REAC(L1)=REAC(L1)+FORC(L4)
REAC(L2)=REAC(L2)+FORC(L4)
50 REAC(L3)=REAC(L3)+FORC(L4)
C
C ARRAY NODES CONTAINS THE NUMBER OF ELEMENTS CONNECTED TO EACH NODE
C
NODES(N1)=NODES(N1)+1
NODES(N2)=NODES(N2)+1
100 NODES(N3)=NODES(N3)+1
DO 150 I=1,NN
K1=3*I-2
K2=K1+2
DO 150 J=K1,K2
150 REAC (J)=REAC(J)/NODES(I)
RETURN
END

```



RESULTS

SUB. OUTPUT

NODAL DISPLACEMENTS

NODE	U	V
1	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000
3	3.2550	4.4183
4	3.1634	0.0000
5	10.4779	8.0199
5	10.3786	0.0000
7	20.8983	10.8200
8	20.7981	0.0000
9	33.7200	12.8206
10	33.6170	0.0000
11	48.1601	14.0271
12	48.0246	0.0000
13	63.6195	14.5045
14	63.0969	0.0000

ELEMENT STRESSES

ELEMENT	S11	S22	S12
1	0.0000	0.0000	1.0545
2	-0.0611	2.9455	-0.3878
3	-0.0611	0.0000	0.9323
4	-0.0662	2.4010	-0.2656
5	-0.0662	0.0000	0.7999
6	-0.0668	1.8668	-0.1332
7	-0.0668	0.0000	0.6663
8	-0.0686	1.3337	0.0004
9	-0.0686	0.0000	0.5290
10	-0.0903	0.8043	0.1377
11	-0.0903	0.0000	0.3484
12	-0.3484	0.3183	0.3183

NODAL AVERAGE STRESSES

NODE	S11	S22	S12
1	-0.0305	1.4728	0.3333
2	0.0000	0.0000	1.0545
3	-0.0628	1.7822	0.0930
4	-0.0407	0.9818	0.5330
5	-0.0664	1.4226	0.1337
6	-0.0645	0.8003	0.4889
7	-0.0674	1.0668	0.1778
8	-0.0666	0.6223	0.4443
9	-0.0759	0.7127	0.2223
10	-0.0680	0.4446	0.3986
11	-0.1763	0.3742	0.2681
12	-0.0831	0.2681	0.3384
13	-0.3484	0.3183	0.3183
14	-0.2193	0.1591	0.3333

\*\*\*\*\*

OSS: LA SOLUZIONE TEORICA DEL PROBLEMA FORNISCHE  $u = 117$   
 GLI SPOSTAMENTI OTTENUTI PER I NODI 13/14 NON FORMI-  
 SCANO UNA BUONA APPROSSIMAZIONE - QUESTO E' DOVUTO  
 AL FATTO CHE L'ELEMENTO TRIANGOLARE NON E' SUFFICIE-  
 NTEMENTE ADEGUATO QUANDO E' UTILIZZATO IN DISCRETI-  
 ZIONI "GROSSOLANE" PER MODELLI DI STRUTTURE AD ELEVA-  
 TO GRADIENTE PER GLI SPOSTAMENTI

MILITARE V



OSS: -  $|J|$  RAPPRESENTA FISICAMENTE IL RAPPORTO DELLE AREE DELL'ELEMENTO NEI DUE SISTEMI DI COORDINATE

$$\left( \frac{A_{xy}}{A_{\bar{x}\bar{y}}} \right)$$

NEL CASO IN ESAME VALE 1 POICHE' ENTRAMBI I SISTEMI DI COORDINATE SONO RETTANGOLARI

-  $R = \bar{R}$  POICHE' LA FORMA DELL'ELEMENTO RIMANE INMUTATA

NE CONSEGUE

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_{\bar{R}} f(x[\bar{x},\bar{y}], y[\bar{x},\bar{y}]) d\bar{x} d\bar{y}$$

↑  
ⓐ

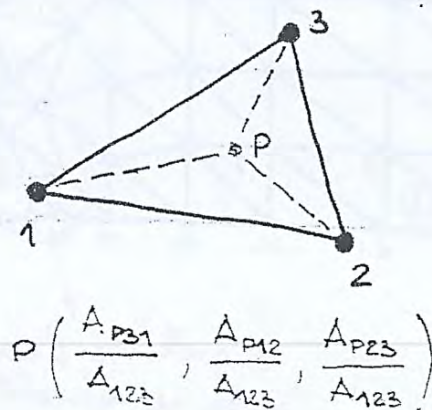
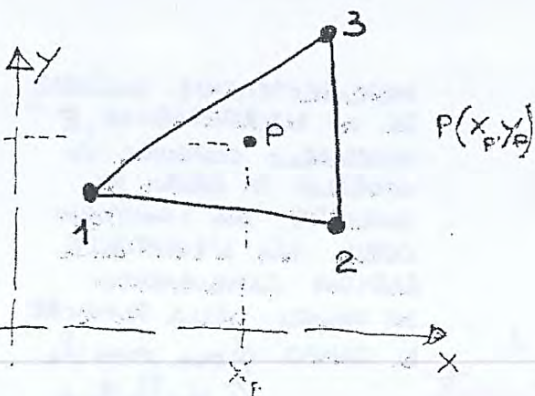
↑  
ⓑ

SE SI IMMAGINA LA FUNZIONE DI FORMA ESPRESSA:  
 ⓐ SISTEMA GLOBALE  
 ⓑ SISTEMA LOCALE



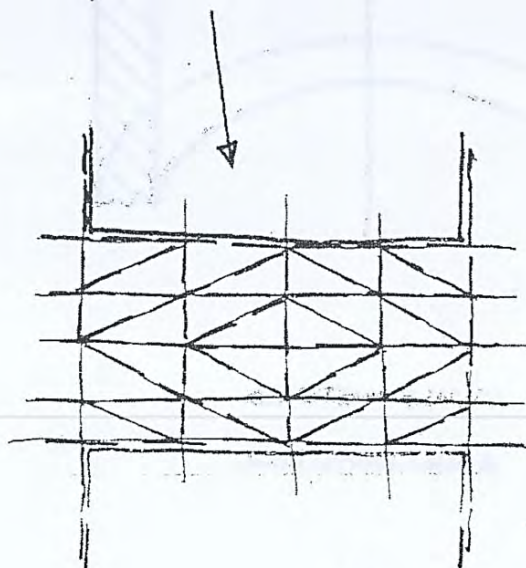
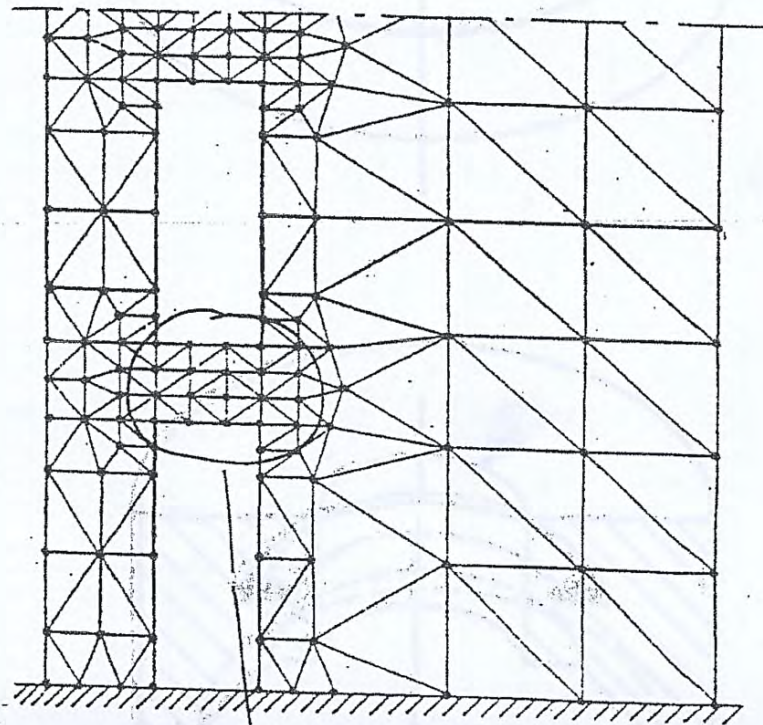
L'INTEGRALE NEL SISTEMA GLOBALE DI UNA FUNZIONE DI FORMA NEL SISTEMA GLOBALE COINCIDE CON L'INTEGRALE NEL SISTEMA LOCALE DELLA STESSA FUNZIONE DI FORMA DEFINITA NEL SISTEMA LOCALE. (CALCOLO DELLA MATRICE DI RIGIDITÀ)

IL RICORSO A SISTEMI DI RIFERIMENTO LOCALI VERBA' AMPIAMENTE UTILIZZATO NEL SEGUITO DEL CORSO. CON RIGUARDO ALL'ELEMENTO TRIANGOLARE LA TECNICA ILLUSTRATA VERBA' IMPIEGATA ADOTTANDO COME SISTEMA LOCALE, NON QUELLO SOPRA RIPORTATO, BEHSI' IL SISTEMA INDIVIDUATO DALLE COORDINATE D'AREA





MODELLO DI UNA PARETE DI CONTROVENTO  
(STATO DI TENSIONE PIANO)

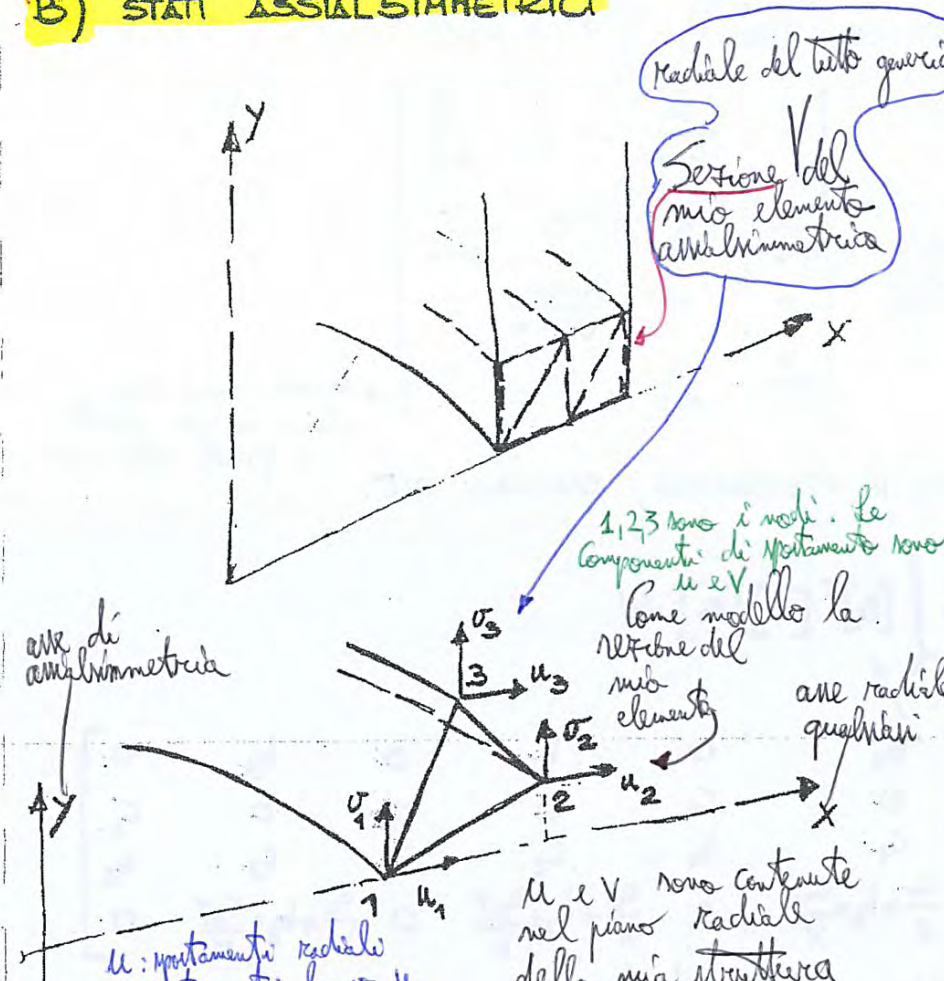


sempre, se  
compatibile con  
le dimensioni,  
creare strutture con  
simmetria di mesh



LEZ. 10-03-2014

**B) STATI ASSIALSIMMETRICI**



anche in questo caso possiamo pensare di utilizzare la stessa formulazione usata per l'elemento CST per rappresentare le deformazioni nel campo di spostamenti  $u$  e  $v$ .  
 APPROSSIMANTI IL CAMPO DI SPOSTAMENTI:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$

DA CUI DERIVA  
 con come ieri, le  $N$  rappresentano dei piani

$$[u] = [H][\bar{u}]$$

alla fine possiamo determinare  $\alpha, \beta$  come fatto ieri, stesso significato dei simboli visto prima

CON RIFERIMENTO ALLE DEFORMAZIONI, PER IL CASO ASSIALSIMMETRICO OCCORRE PRENDERE IN CONSIDERAZIONE ANCHE  $E_\theta$  (DEFORMAZIONE TANGENTE AL CERCHIO DI CENTRO O E RAGGIO  $x$ ), OLTRE ALLE  $E_x, E_y, \gamma_{xy}$

$E_x, E_y, \gamma_{xy}$  sono esattamente uguali a quella di un stato piano, poiché c'è assial simmetria  $\Rightarrow$  compare anche  $E_\theta$ .

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \\ E_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 1/x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \rightarrow [E] = [D][u]$$

VENGONO ANALIZZATI SOLIDI DI EVOLUZIONE SOGGETTI A CARICHI DI TIPO ASSIALSIMMETRICO - IN TAL CASO ESISTONO SOLO DUE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO INDI PENDENTI

$$u, v$$

ENTRAMBE CONTENUTE NELLA SEZIONE MERIDIANA DELLA STRUTTURA OXY-

NE SEGUE CHE GLI ELEMENTI TOROIDALI ASSIALSIMMETRICI POSSONO ESSERE GENERATI CON LE OPPORTUNE MODIFICHE PARTENDO DAI VARI ELEMENTI RELATIVI AGLI STATI PIANI.

CON RIFERIMENTO ALL'ELEMENTO TRIANGOLARE APPENA STUDIATO SI POSSONO ANCORA RITENERE VALIDE LE FUNZIONI POLINOMIALI

discorso esattamente uguale a quello del CST.



PER CUI DEFINITA COME

$$[\tilde{B}] = [B(x_i, y_i)]$$

LA MATRICE  $[K]$  PUO' ESSERE CALCOLATA TRAMITE LA RELAZIONE

Questo metodo funziona bene quando ha una mesh molto fitta e raggi di curvatura molto grandi  $\Rightarrow$  piccoli errori

$$[K] = 2\pi A [\tilde{B}]^T [D] [\tilde{B}] \quad \left( \begin{array}{l} \text{messo tutto di} \\ \text{meno gli integrali} \end{array} \right)$$

TALE METODO COMPORTA DEGLI ERRORI, TANTO PIU' IMPORTANTI QUANTO PIU' FITTA E' LA DISCRETIZZAZIONE E QUANTO PIU' ELEVATO E' IL RAGGIO DI CURVATURA.  $\Rightarrow$  meglio non utilizzare questo metodo nella realta', ma altri metodi di integrazione della matrice di rigidezza.

COME GIA' PER I CASI PRECEDENTE MENTE ANALIZZATI, I CARICHI EQUIVALENTI IDOTTI DA FORZE DI VOLUME E FORZE DI SUPERFICIE SI OTTEGONO DALLE RELAZIONI

per quanto riguarda i carichi equivalenti, vale esattamente quanto detto ieri ( $\Rightarrow$  parliamo all'esempio della pag. seguente)

$$[F^V] = \int_V [H]^T [f^V] dV$$

$$[F^S] = \int_S [H]^T [p] dS$$

← OSS: COME DETTO IN PRECEDENZA I CARICHI SI INTENDONO ASSIAL-SIMMETRICI

NELL'IPOTESI DI CARICHI COSTANTI E' PENSABILE DI CALCOLARE I CARICHI EQUIVALENTI, MEDIANTE LA TECNICA APPROSSIMATA VISTA IN PRECEDENZA PER IL CALCOLO DELLA MATRICE DI RIGIDITA'. PER ESEMPIO, PER LE FORZE DI VOLUME COSTANTI SI OTTIENE

$$[F^V] = \frac{2\pi x_g A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^V \\ f_y^V \end{bmatrix}$$

LE FORZE DI VOLUME VENGONO RIPARTITE IN EGUAL MISURA NEI TRE NODI

(IL VOLUME RISULTA APPROSSIMATO MEDIANTE LA

$$V = 2\pi x_g A$$

RAGGIO A LIVELLO BARICENTRO SEZIONE TRIANGOLARE

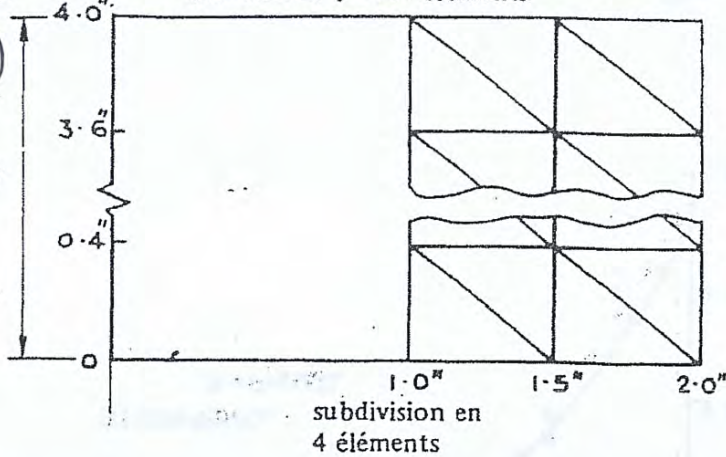


Vediamo diversi tipi di discretizzazione. La struttura viene *ing* affettata da 10 fette,  $\Rightarrow 4/10 = 0,4$  : spessore di ogni fetta

(in tutte e 3 le discretizzazioni)

Axe du cylindre di equal spessore  
33 nœuds, 40 éléments

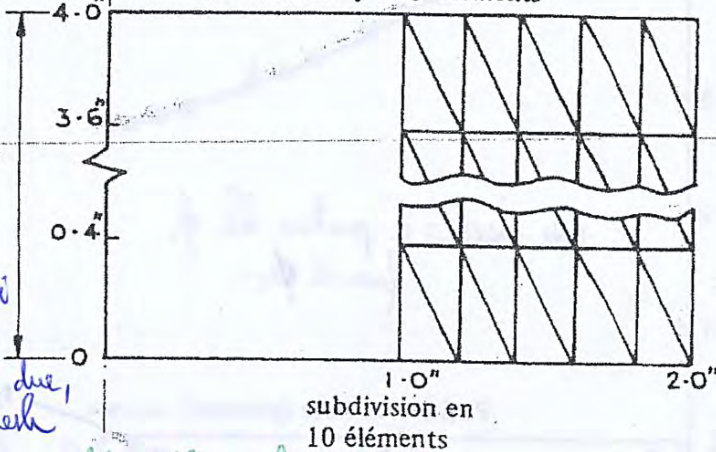
10 éléments de hauteur 0.4"



Nello spessore dell'elemento abbiamo 3 tipi di discretizzazione.

66 nœuds, 100 éléments

10 éléments de hauteur 0.4"

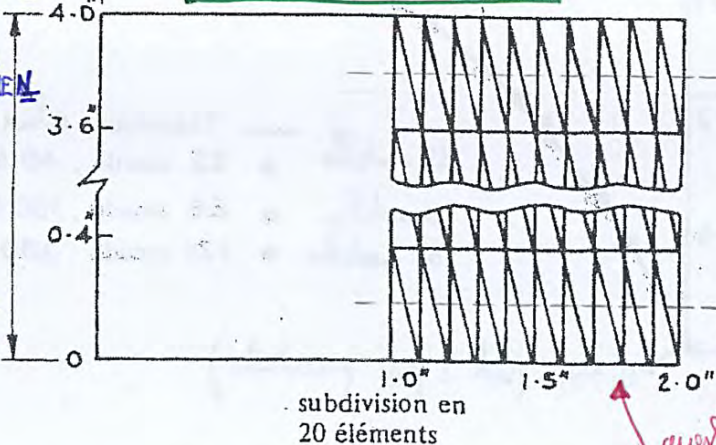


Se vuoi effettuare un'analisi di convergenza  $\Rightarrow$  la puoi effettuare solo nelle ultime due, perché devo avere in una mesh tutti i dati della mesh precedente. La 1° mesh non è contemplata all'interno delle altre 2.

il doppio della mesh precedente

121 nœuds, 200 éléments

10 éléments de hauteur 0.4"



Se negli ultimi due puoi effettuare un'analisi di convergenza all'interno della mesh (tutte le mesh più fitte devono contenere le precedenti)

Quando si parla di verificare la CONVERGENZA ALL'INFINITO DELLA MESH, tutte le mesh più fitte devono contenere quelle precedenti. Se non le contengono, non possono essere usate per la valutazione della convergenza.

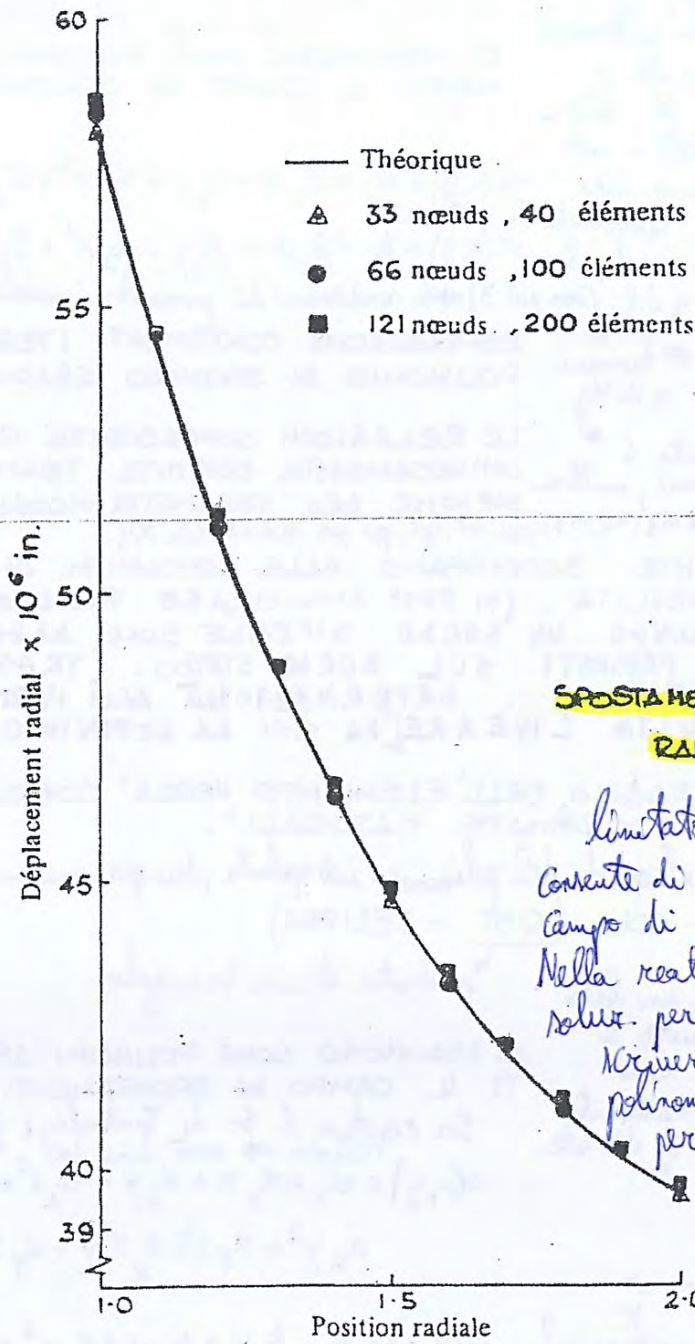
questi elementi non sono così "brillanti" sono troppo stretti rispetto all'altezza  $\Rightarrow$  presentano una certa distorsione (in genere si cerca di avere il più possibile regolarità  $\Rightarrow$  avere dovuto raffinare a metà ogni fetta per avere regolarità)

MODELLI DI DISCRETIZZAZIONE

(1) INATTENTI CHE CONSERVANO LE DISCRETIZZAZIONI PRECEDENTI

155  
linea tratteggiata a metà





**SPOSTAMENTI RADIALI**

limitato dei g.d.l. nodali che ha, si  
 consente di ricevere equazioni approssimate di  
 campo di spostamenti estremamente limitate  
 Nella realtà potremmo pensare a qualche  
 soluz. per aumentare la possibilità per  
 ricevere più termini del nostro  
 polinomio! Fondamentalmente le strade  
 perseguite sono 2:  
 - aumento il numero di nodi,  
 - aumentare i g.d.l. nel nodo.

Dunque abbiamo visto come l'elemento CST può essere usato per affrontare  
 problemi ASSIMMETRICI (strutture assibimetriche, non quasi sottili)  
 Ritorniamo al CST: è un elemento <sup>157</sup> povero, perché, in vista del numero  
 nostro elemento estremamente

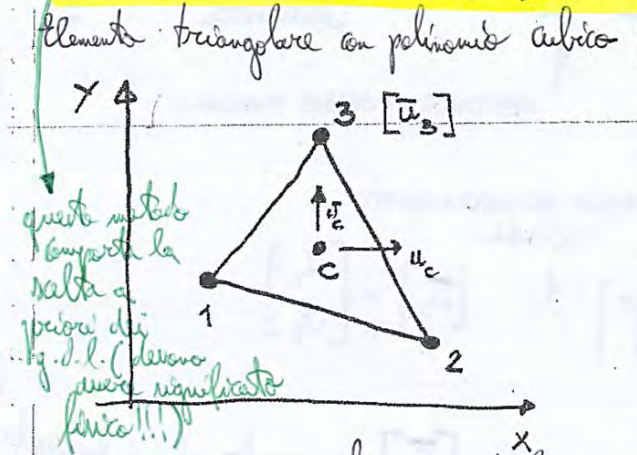


IN TERMINI DI COMPATIBILITA' DEGLI SPOSTAMENTI TRA ELEMENTI ADIACENTI, DOVENDO QUESTA DIPENDERE SOLO DAGLI SPOSTAMENTI NODALI, ED ESSENDO LA FUNZIONE CUBICA, SONO NECESSARI QUATTRO "QUANTITA' NODALI PER DEFINIRE LA DISTRIBUZIONE LUNGO IL LATO. (IN ALTRI TERMINI RISULTANO NECESSARI QUATTRO MODI PER LATO - I MODI INTERMEDI VENGONO POSIZIONATI SODDIVIDENDO IL LATO IN TRE PARTI EGUALI). UN MODO ADDIZIONALE INTERNO E' NECESSARIO PER MANTENERE LA COMPLETEZZA DEL POLINOMIO: E' CONVENIENTE SCEGLIERE TALE MODO COINCIDENTE CON IL BARICENTRO (SE IL POLINOMIO NON E' COMPLETO, LA RICADENZA DELL'ELEMENTO PUO' AVERE DIREZIONI PREFERENZIALI NON DESIDERATE) - LO STATO DI DEFORMAZIONE ALL'INTERNO DELL'ELEMENTO HA ANDAMENTO QUADRATICO -

L'ELEMENTO VERRA' RIPRESO QUANDO SI TRATTERANNO GLI ELEMENTI IN "COORDINATE NATURALI"

Quando si ha aumentato il num. dei modi mantenendo però sempre le stesse componenti di spostamento in e.v. Un'altra strada potrebbe essere quella di aumentare il g.d.l. nel modo (non vedo a prendere solo le componenti di spostamento, ma anche le derivate ad esempio)

**C) ELEMENTO A 3/(4) NODI CON POLINOMIO CUBICO**



questo metodo comporta la scelta a priori dei g.d.l. (devo essere significativo finito!!!)

(HOLAND - BERGAN) FELIPPA (che è in più quello centrale dei vertici). Per ogni modo ho 6 parametri (esempio)

NELLA FILOSOFIA GENERALE DI LIMITARE LA "BANDA DELLA MATRICE" RISULTA EVIDENTE LA NECESSITA' DI LAVORARE SOLO CON ELEMENTI AUCHI NODI AI VERTICI DELL'ELEMENTO - ADOTTANDO ANCORA UN POLINOMIO CUBICO, RISULTA NECESSARIO INCORPORARE LE DERIVATE DEGLI SPOSTAMENTI

per ogni nodo ho 6 parametri:

$$[u_i]^T = [u_i, u_{i,x}, u_{i,y}, \sigma_{i,x}, \sigma_{i,y}]$$

Se prendo un polinomio cubico ho 40 termini (generalmente da definire) deve avere a disposizione 40 c.c. (per ogni modo ne ho 3 (u, u\_x, u\_y) → m) ASSUMI COME PARAMETRI NODALI INCOGNITI QUELLI SOPRA RIFERITI. RISULTA NECESSARIO ANCORA DEFINIRE DUE ULTERIORI QUANTITA' NODALI INCOGNITE (3x6=18 CONTRO LE 20 INCOGNITE α/β DEI POLINOMI INTERPOLANTI). E' CONVENIENTE ASSUMERE COME INCOGNITE GLI SPOSTAMENTI u\_c, σ\_c DEL BARICENTRO DELL'ELEMENTO.

IN ALTERNATIVA ALLA SCELTA (\*) SI PUO' ADOTTARE COME VETTORE DI INCOGNITE NODALI:

$$[u_i]^T = [u_i, \sigma_i, \epsilon_x^i, \epsilon_y^i, \epsilon_{xy}^i/3, \omega_{xy}^i]$$

IN ALTERNATIVA

TENSORE DELLA DEFORMAZIONE

ROTAZIONE

è la distribuzione γ di vita propria che ho nodi interni, essi non sono collegati con i nodi periferici di un elemento → definireli dai nodi periferici di un elemento → prima di procedere all'analisi statica della matrice (ci togliamo questo modo se dai nodi). Tutte le volte che per aumentare il grado del polinomio si deve prendere la derivata 25!!

Ad ogni modo una volta che si ha il modo centrale si può lavorare in alternativa...



$$[k_v^*] [\bar{u}_v] = [F_v^*]$$

← RISULTATO DEL  
PROCESSO DI  
"CONDENSAZIONE  
STATICA"

MATRICE "CONDENSATA"  
DELL'ELEMENTO

FORZE NODALI  
CONDENSATE

OSS: IL PROCESSO DI "CONDENSAZIONE STATICA" EFFETTUARE L'ASSEMBLAGGIO DELLA MATRICE DI RIGIDENZA DELL'ELEMENTO NELLA MATRICE DI RIGIDENZA GLOBALE DELLA STRUTTURA.

*mi tengo di meno i nodi sparsi che non avrebbero interconnessione con gli altri nodi della struttura*

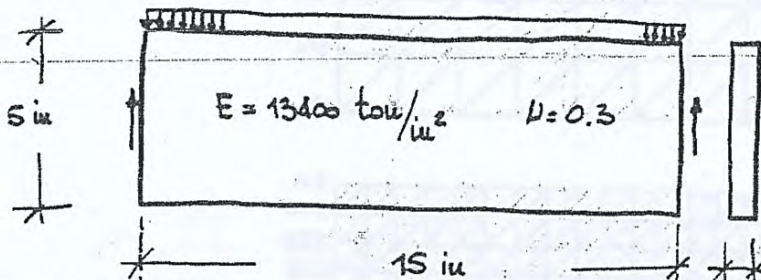
AVVIENE PRIMA DI

LEZ. 18-03-2014

9) CONFRONTO DI SOLUZIONI / ESEMPI PRATICI

A) DISCRETIZZAZIONI DIVERSE UTILIZZANTI L'ELEMENTO "CST"

CARICO UNIFORME  $q = 0.8 \text{ ton/iu}$

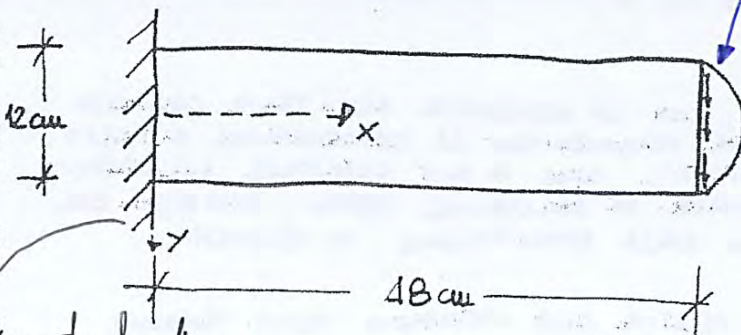


La soluzione teorica è data da:  
(ROCKY/GRIFITHS/  
EVANS/HETHERCOT)

TRAVE SEMPLICEMENTE  
APPOGGIATA SOGGETTA  
A CARICO DISTRIBUITO  
IN MODO UNIFORME.  
NEL MODELLO L'APPOGGIO  
SEMPLICE È OTTENUTO  
ANNULLANDO GLI SPOSTAMEN  
TI VERTICALI DI  
TUTTI I NODI DI ESTREMITÀ  
DELLA TRAVE.

Problema di trave piana (trave spessa) ( $\frac{l}{h} = \frac{3}{1}$ )

B) DISCRETIZZAZIONI UTILIZZANTI ELEMENTI DIVERSI



nell'estremo libero la distribuzione di tensioni è di tipo parabolico, perché la mensola è caricata da un carico concentrato all'estremità → distribuzione delle è parabolica in sez. rettangolare

la sol. teorica è data da (CARR)

$P = 40 \text{ kN}$   
VARIAZIONE  
DI TIPO  
PARABOLICO

MENSOLOLA SOGGETTA  
AD UNA FORZA TAGLIANTE  
ALLI ESTREMITÀ LIBERA

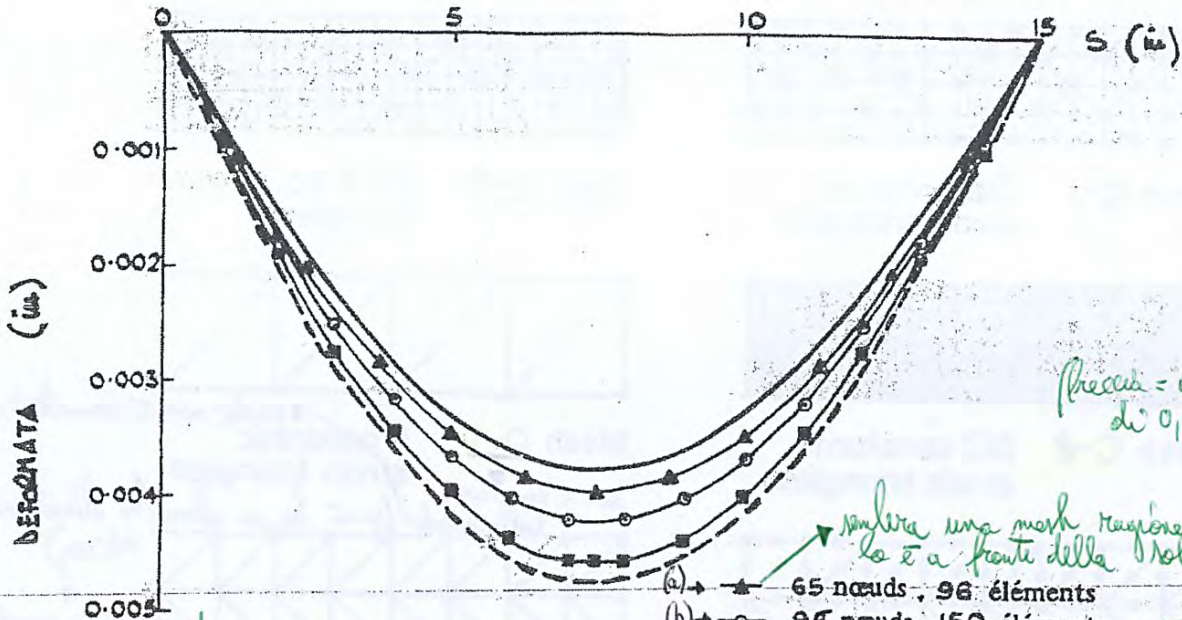
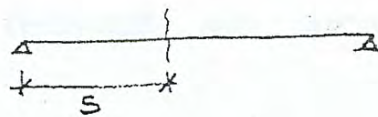
Rapporto  $\frac{l}{h} = \frac{4}{1}$   
 $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$   $\nu = 0.25$

SPESORE = 1 cm

Qui discretizziamo la struttura non solo con elementi CST, ma anche con elementi diversi (quindi con eventualmente più nodi, elementi quadratici, cubici e così via)



Consideriamo la deformata:



(massa = 0,036 a fronte di 0,044)

sembra una mesh ragionevole, ma non lo è a fronte della soluz. esatta.

(a) 65 nœuds, 96 éléments

(b) 96 nœuds, 150 éléments

(c) 341 nœuds, 600 éléments

Théorie de la flexion (presa a taglio) mesh "gagliarda"

Théorie de l'élasticité

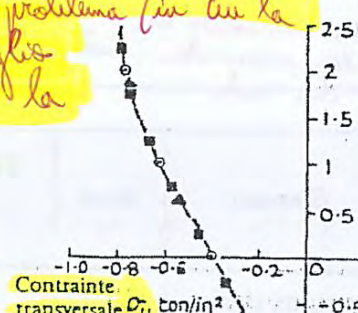
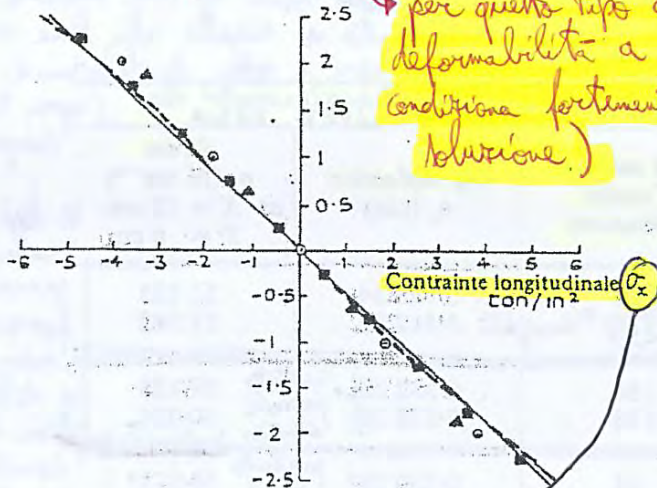
ottenuta da Evans & Co!

si sono in un rapporto  $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$  non prendere in conto la deformabilità a taglio è sbagliato

la teoria delle travi rispetto indietro un bell'errore rispetto alla teoria esatta (vedi grafico qui sopra) se non prendo in conto la deformabilità a taglio

⇒ con l'elemento CST non posso fare mesh troppo grandi (per ottenere una soluzione quanto più vicina a quella reale).

per questo tipo di problema (in cui la deformabilità a taglio condiziona fortemente la soluzione.)



N.B. con la struttura studiata nasce anche  $\sigma_y$  tale  $\sigma_y$  non è colta con la teoria di Eul-Bernoulli (teoria delle travi) ma è colta dalla teor. esatta e dalle nostre mesh.

sono le classiche  $\sigma_z$  (Eul-Bern. dice che sono un piano. La teoria dell'elasticità dice che sono leggermente ondeggianti rispetto a quel piano, ma possiamo tranquillamente vederle un piano)

▲ 65 nœuds, 96 éléments  
○ 96 nœuds, 150 éléments  
■ 341 nœuds, 600 éléments  
— Théorie de la flexion  
- - - Théorie de l'élasticité

può succedere esattamente l'opposto.

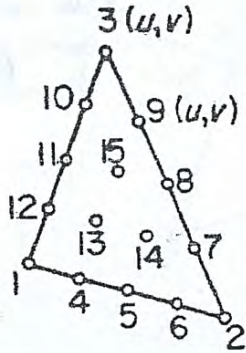
In termini funzionali, lo scostamento dei risultati è modesto rispetto a quello dei risultati in termini di spostamenti



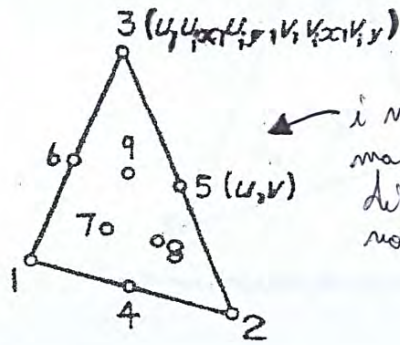
I vari autori si sono poi d'accordo nell'averci nel generare elementi triangolari con polinomi di ordini superiori:

10) **INTERIORI ELEMENTI TRIANGOLARI DI ORDINE "ELEVATO"**

**- SPOSTAMENTI CON POLINOMI DEL "QUARTO" ORDINE**



(a)

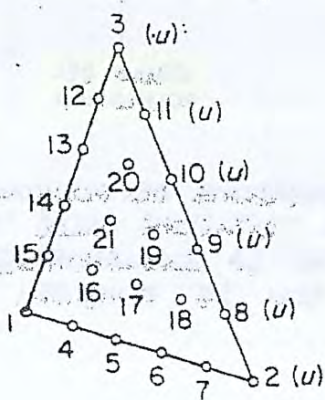


(b)

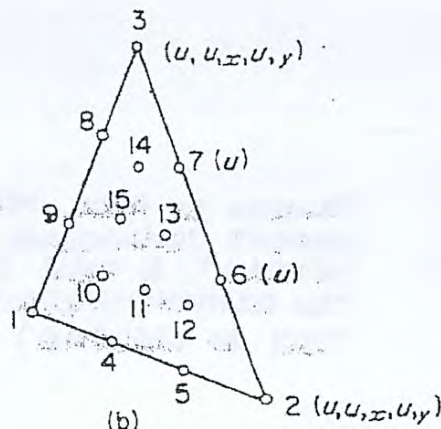
← i nodi si riducono, ma ho più componenti di spostamento nei nodi di vertice.

- oss:
- 15 "COORDINATE GENERALIZZATE" DEL CIASCUN COMPONENTE DI SPOSTAMENTO (POLINOMIO COMPLETO DI QUARTO GRADO)
  - DEFORMAZIONE CUBICA ALL'INTERNO DELL'ELEMENTO
  - CONTINUITA' DELLO SPOSTAMENTO LUNGO IL CONTOURNO RICHIEDE CINQUE CONDIZIONI SU CIASCUN LATO
  - PUO' OPERARE CON SOLO SPOSTAMENTI (a) O CON COMBINAZIONI DI SPOSTAMENTI E DERIVATE PRIME DEI MODI POSTI AI VERTICI (b)
  - SIA (a) CHE (b) RICHIEDONO TRE MODI INTERNI DA ELIMINARE TRAMITE LA TECNICA DI CONDENSAZIONE STATICA
  - IL MODELLO (b) RISULTA PIU' EFFICIENTE A FRONTE DELLA DIMENSIONE DI BANCA DELLA MATRICE DI RIGIDITA'

**- SPOSTAMENTI CON POLINOMI DEL "QUINTO" ORDINE**



(a)



(b)



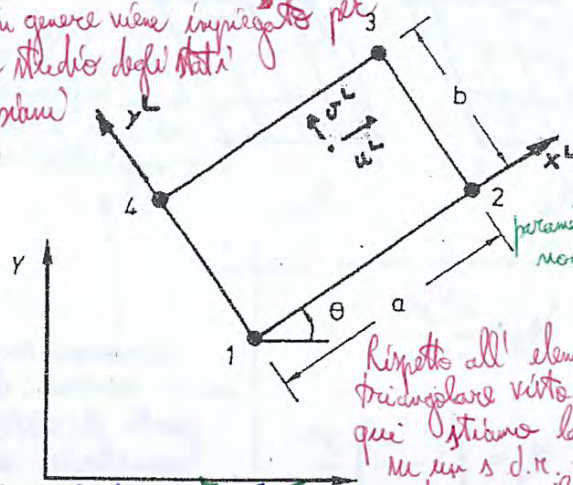
LEZ. 18-05-2014 / 24-05-2014

Si può anche pensare di lavorare con:

**11) ELEMENTO RETTANGOLARE**

Abb. un rettangolo: angoli retti (con lati rettilinei) (ARAYRIS)  $\rightarrow$  "argubus"<sup>u</sup>

in genere viene impiegato per lo studio degli stati piani



SI ASSUMONO COME FUNZIONI APPROSSIMANTI IL CAMPO DI SPOSTAMENTI I SEGUENTI POLINOMI:

Diamo un' approssimazione, con riferimento al sistema locale del campo di spostamenti:

$$u^L(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x^L + \alpha_3 y^L + \alpha_4 x^L y^L$$

$$v^L(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x^L + \beta_3 y^L + \beta_4 x^L y^L$$

AA

Rispetto all' elemento triangolare visto prima, qui stiamo lavorando in un s.d.r. locale, mentre per il CST ci riferiamo ad un s.d.r. globale.

I QUALI FORNISCONO UNA VARIAZIONE LINEARE DEGLI SPOSTAMENTI LUNGO I BORDI DELL' ELEMENTO E "NON LINEARE" ALL' INTERNO DELL' ELEMENTO (PRESENZA DEL TERMINE  $x^L y^L$ ).

Il sistema locale potrebbe anche essere baricentrico

GLI OTTO PARAMETRI INCOGNITI  $\alpha_i$  SI DETERMINANO IMPOSTANDO LE CONDIZIONI MODALI

coord. generalizzate  $\rightarrow$  coord. dai nodi (1, 2, 3, 4) nel s.d.r. locale =

Noi abbiamo a disposizione per  $u$  (o  $v$ ) 4 C.C.  $\rightarrow$  il nostro campo di spostamenti può avere al più 4 coord. generalizzate. Noi dobbiamo avere i termini lineari ( $\alpha_1, \alpha_2 x, \alpha_3 y$ ). Ci dobbiamo mettere

$$[\bar{u}^L] = [X^L] [\alpha] \rightarrow [\alpha] = [X^L]^{-1} [\bar{u}^L]$$

$$[\bar{u}^L]^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_4 \quad v_4]$$

spostamenti locali (non gli spostamenti nodali)

1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
1	a	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	a	0	0
1	a	b	ab	0	0	0	0
0	0	0	0	1	a	b	ab
1	0	b	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	b	0

un 4 termine rispettando il tr. di compatibilità  $\rightarrow$  dobbiamo prendere un termine che è nell' asse di simmetria ( $\alpha_4 x^L y^L$ )

NOTI I QUALI E' POSSIBILE RICAVARE:

ricorrendo la  $\rightarrow$  in termini matriciali

$$[u^L] = [X^L] [\alpha] = [X^L] [X^L]^{-1} [\bar{u}^L] = [H] [\bar{u}^L]$$

FUNZIONI DI FORMA  $H_i(x^L, y^L)$

$$\begin{bmatrix} u^L(x^L, y^L) \\ v^L(x^L, y^L) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 & H_4 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 & H_4 \end{bmatrix}$$

Stesso procedimento di quello visto per l' elemento triangolare, con la sola differenza che le  $N$  ammono forme differenti



con semplice sovrapposizione numerica si arriva a

$4\beta + 2(1 - \nu)/\beta$	$\frac{3}{2}(1 + \beta)$	$2\beta - 2(1 - \nu)/\beta$	$\frac{3}{2}(1 - 3\nu)$	$-2\beta - (1 - \nu)/\beta$	$-3(1 + \nu)/2$	$-4\beta + (1 - \nu)/\beta$	$-3(1 - 3\nu)/2$
$4/\beta + 2(1 + \nu)\beta$	$-4/\beta + (1 - \nu)\beta$	$-\frac{3}{2}(1 - 3\nu)$	$-4/\beta + (1 - \nu)\beta$	$-3(1 + \nu)/2$	$-2/\beta - (1 - \nu)\beta$	$3(1 - 3\nu)/2$	$2/\beta - 2(1 - \nu)\beta$
$4\beta + 2(1 - \nu)/\beta$	$-\frac{3}{2}(1 + \nu)$	$4\beta + 2(1 - \nu)\beta$	$-\frac{3}{2}(1 + \nu)$	$-4\beta + (1 - \nu)/\beta$	$3(1 - 3\nu)/2$	$-2\beta - (1 - \nu)/\beta$	$3(1 + \nu)/2$
				$-3(1 - 3\nu)/2$	$2/\beta - 2(1 - \nu)\beta$	$3(1 + \nu)/2$	$-2/\beta - (1 - \nu)\beta$
				$4\beta + 2(1 + \nu)\beta$	$3(1 + \nu)/2$	$2\beta - 2(1 - \nu)/\beta$	$3(1 - 3\nu)/2$
				$4/\beta + 2(1 - \nu)\beta$	$-3(1 - 3\nu)/2$	$-4\beta + 2(1 - \nu)\beta$	$-3(1 + \nu)/2$
						$4\beta + 2(1 - \nu)\beta$	$-3(1 + \nu)/2$
							$4/\beta + 2(1 - \nu)\beta$

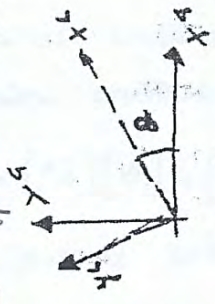
Symm.

con  $\beta = \frac{b}{a}$

$\frac{E t}{12(1 - \nu^2)}$

**MATRICE DI RIGIDEZZA NEL SISTEMA LOCALE**

le precedenti formule di Anagnini  
vanno scritte nel S.d.N. globale  
(qui sono nel S.d.N. locale)



$x^L = x \cos \theta + y \sin \theta$   
 $y^L = -x \sin \theta + y \cos \theta$   
 $[x^L] = [T][x]$

OCORRE POI PASSARE DA SISTEMA LOCALE A SISTEMA GLOBALE - SAREMO PER QUANTO GIÀ VISTO IN PRECEDENZA (STRUTTURE INTEGRATE), CHE

$$\begin{bmatrix} F_{x_1}^L \\ F_{y_1}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_1}^G \\ F_{y_1}^G \end{bmatrix} \rightarrow [F_1^L] = [T][F_1^G]$$

LEGAME NODO I-SINO

= DUHQE PER TUTTO L'ELEMENTO

$$\begin{bmatrix} F_1^L \\ F_2^L \\ F_3^L \\ F_4^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^G \\ F_2^G \\ F_3^G \\ F_4^G \end{bmatrix}$$

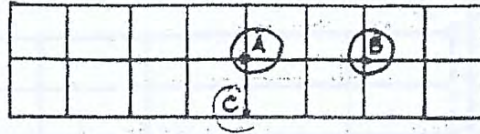
$[F] = [T][F^G]$

MATRICE DI RIGIDEZZA RIFERITA AL SISTEMA GLOBALE

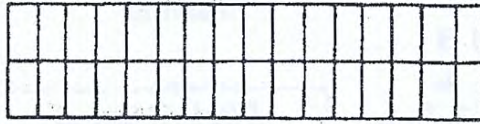


La trave viene risolta attraverso queste 3 discretizzazioni. La 3° contiene la 1°

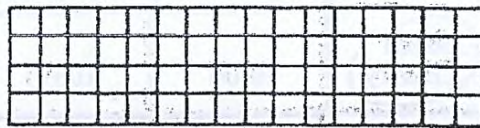
(b) 16 éléments



(c) 32 éléments



(d) 64 éléments



Nombre d'éléments	Flèche verticale		Contrainte longitudinale
	Point A (in $\times 10^{-6}$ )	Point B (in $\times 10^{-6}$ )	Point C (lb/in <sup>2</sup> )
(b) 16	782	560	10.8
(c) 32	844	605	11.9
(d) 64	861	616	12.0
Solution exacte	898	645	12.2

abbassamento verticale di A e B

stato di tensione in C

lo stato tensionale ha un' approssimazione superiore

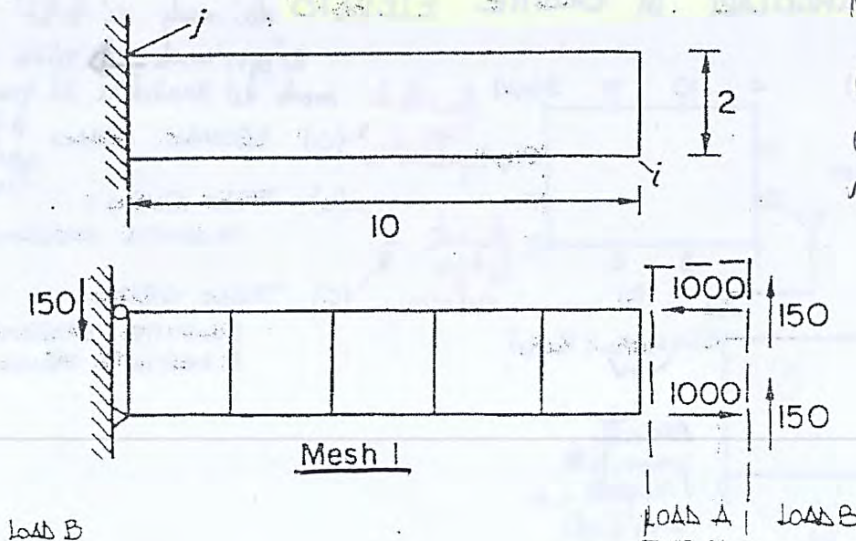
differenza di 30/600. (→ 5%)

dei risultati, si vede come questi mesh non si in grado di capire il vero comportamento strutturale.

NELL'ESEMPPIO SUCCESSIVO VIENE STUDIATA UNA TRAVE A HEKSO LA DI TIPO SHELLA SOGGETTA A MOMENTO E TAGLIO ALL'ESTREMITA' LIBERA RISOLTA CON L'ELEMENTO RETTANGOLARE DEL PRIMO ORDINE E CON L'ELEMENTO "A TAGLIO MODIFICATO" (WILSON, ...)

elemento canonico di Argyris

Rapporto luce/altezza = 5  
Coppia e forza applicate all'estremita' (→ taglio e momento)

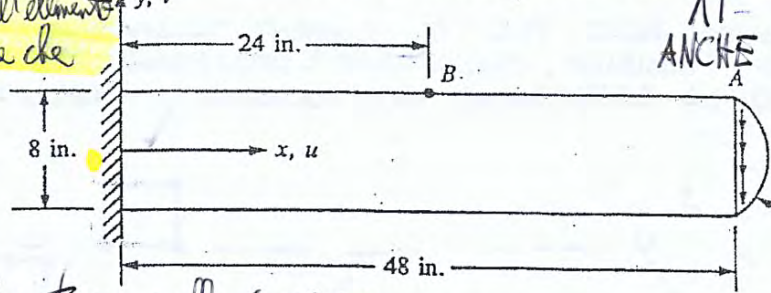




Vedere questa pag. dopo pag. 176

Consideriamo l'elemento rettangolare. Abbiamo visto che esso mal si presta a risolvere il problema flessionale, dunque dobbiamo ricorrere ad un altro modo di discretizzare la rete, discretizzando l'intera struttura, nel dire prendere in considerazione le dimensioni

stare dell'elemento rettangolare che



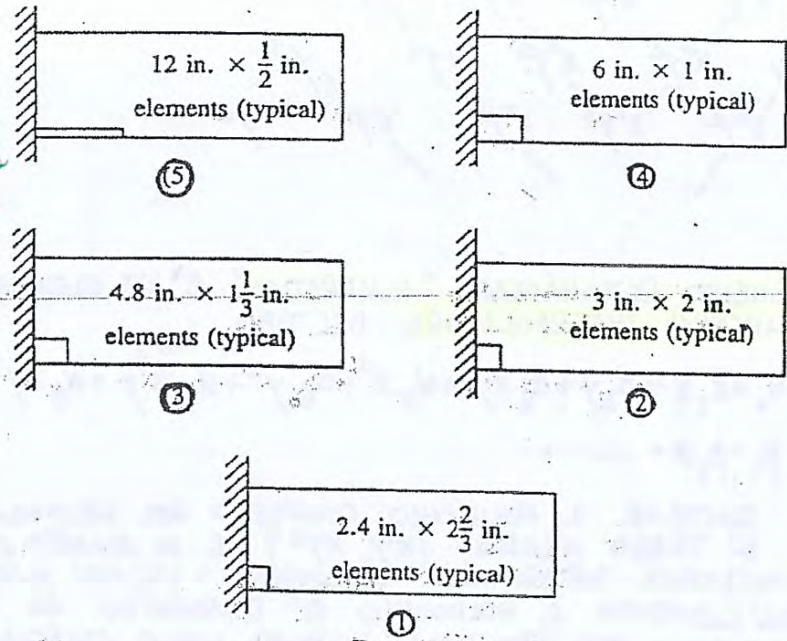
40,000 lb total shear load

Mensola con forza concentrata all'estremità curva parabolica

Parabolic load distribution

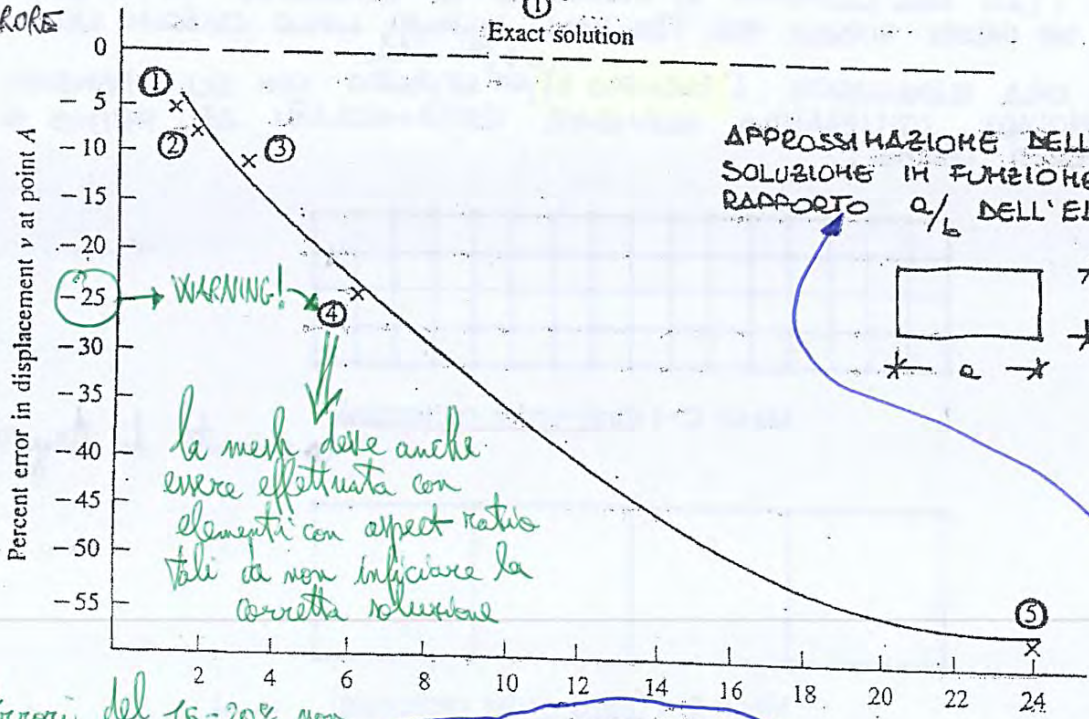
$l/h = 6 \Rightarrow$  trave snella ( $\Rightarrow$  val con un beam theory)  
 $E = 30 \times 10^6$  psi  
 $\nu = 0.3$   
 $t = 1.0$  in.

Con questi 5 elementi definisco la mia mesh.



(Noi vediamo un esempio in realtà si può dimostrare tutto matematicamente)

% errore



la mesh deve anche essere effettuata con elementi con aspect ratio tali da non iniziare la corretta soluzione

Errori del 15-20% non sono accettabili!  $\Rightarrow$  l'elemento deve essere il più possibile regolare!

Aspect ratio = longest dimension / shortest dimension

dell'elemento (non è sempre giusto, come in questo caso infatti!) 16

DA QUI PAG. 177



Deflection and normal stress

Element	Number of degrees of freedom	Tip deflection $v_c$ (cm)	$\sigma_z$ (N cm <sup>-2</sup> ) at $X = 12$ cm $Y = 6$ cm
C-1) First-order rectangle (strip/s)	160	0.516 79	58.266
(CST) Constant strain triangle	160	0.458 34	51.225
(Q-1) <del>Third-order</del> rectangle (six variables per node)	52	0.528 07	60.631
(QST) Quadratic strain triangle	68	0.530 59	58.973
<u>BEAM THEORY</u>		0.533 74	60.000

LEZ. 24-03-2014

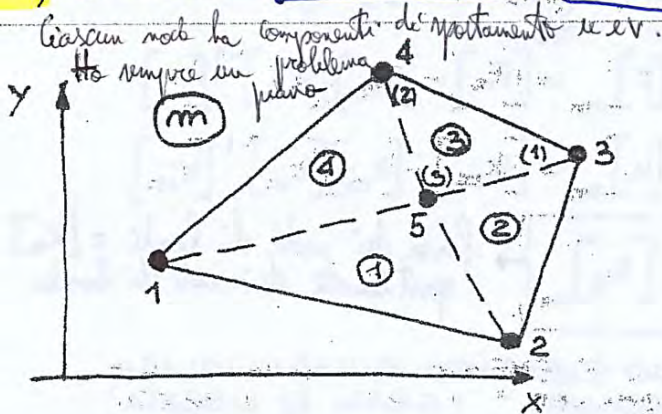
elemento quadratico (QST) in deformax. → del 3° ordine in spostam.

In termini di spostamenti e il migliore

In termini funzionali è il migliore

alla luce del problema che studiamo, sta a noi decidere quale elemento usare

13) ELEMENTO QUADRANGOLARE OTTENUTO DA ELEMENTI "CST"



Come l'hanno risolto? Con riferimenti al modo baricentrico → hanno costruito 4 triangoli. Poiché ogni nodo ha 2 g. d. l. → L'ELEMENTO È OTTENUTO DALLA "UNIONE" DI QUATTRO ELEMENTI TRIANGOLARI CST AVENTI UN NODO (NODO 5) COMUNE SITUATO NEL BARICENTRO DEL QUADRILATERO. I GRADI DI LIBERTÀ DEL NODO COMUNE NON INTERVENGONO IN MODI ESPlicitI NELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DELLA STRUTTURA (VIENE ESEGUITA LA CONDENSAZIONE STATICA).

PARTENDO DALLA MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ISOBARICO ELEMENTO TRIANGOLARE (3x3 IN TERMINI DI SOTTOMATRICI) È POSSIBILE SCRIVERE L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO PER L'ELEMENTO (m)

MATRICE DI RIGIDEZZA dell'elemento quadrangolare ottenuto dall'assemblaggio delle matrici di rigidezza dei 4 elementi CST:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}]^1 [k_{22}]^4 & [k_{12}]^1 & [k_{21}]^4 & [k_{22}]^4 & [k_{13}]^1 [k_{23}]^4 \\ [k_{21}]^1 & [k_{22}]^1 [k_{11}]^2 & [k_{12}]^2 & [k_{23}]^1 [k_{13}]^2 & [k_{23}]^1 [k_{13}]^2 \\ [k_{12}]^2 & [k_{21}]^2 & [k_{22}]^2 [k_{11}]^3 & [k_{12}]^3 & [k_{23}]^2 [k_{13}]^3 \\ [k_{12}]^4 & [k_{21}]^3 & [k_{22}]^3 [k_{11}]^4 & [k_{12}]^4 & [k_{23}]^3 [k_{13}]^4 \\ [k_{21}]^1 [k_{32}]^4 & [k_{32}]^1 [k_{31}]^2 & [k_{32}]^2 [k_{31}]^3 & [k_{32}]^3 [k_{31}]^4 & [k_{33}]^1 [k_{33}]^2 \\ [k_{32}]^3 [k_{31}]^4 & [k_{33}]^3 [k_{33}]^4 & [k_{33}]^3 [k_{33}]^4 & [k_{33}]^3 [k_{33}]^4 & [k_{33}]^3 [k_{33}]^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

Il problema è che il nodo 5 non è collegato a nessun altro nodo della struttura → aumento inutile della banda della nostra matrice → condensazione statica.

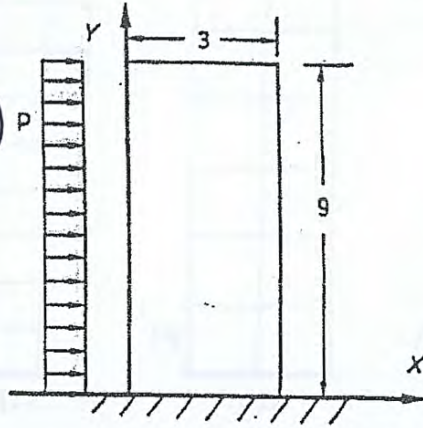


DOPO PAG. 143  
VISTO

183.24-03-2014

**CONFRONTO TRA ELEMENTI DEL PRIMO E SECONDO ORDINE TRIANGOLARI E QUADRANGOLARI**

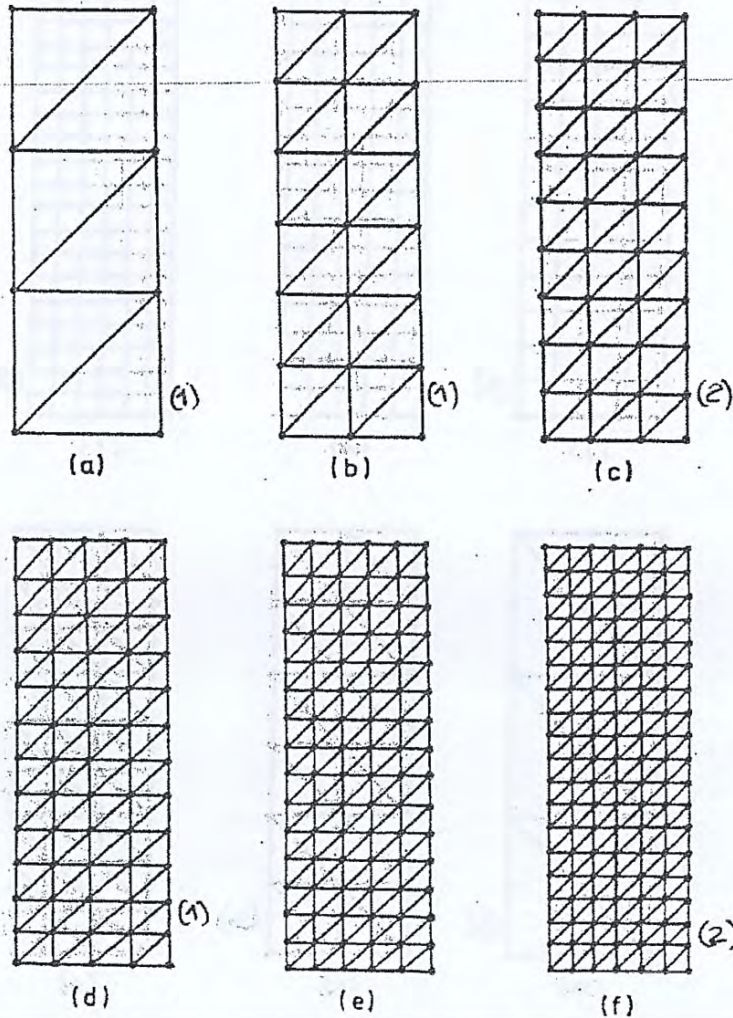
Struttura di controvento soggetta a carico p (es. vento)



$t = 1$   
 $E = 1$      $\nu = 0$   
 $p = 1$

Figure 6.21 Cantilever

ELEMENTI TRIANGOLARI CST  
(PRIMO ORDINE)

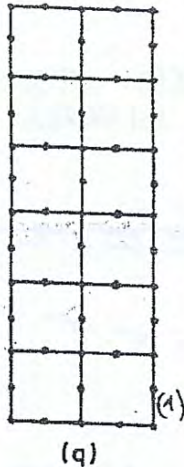
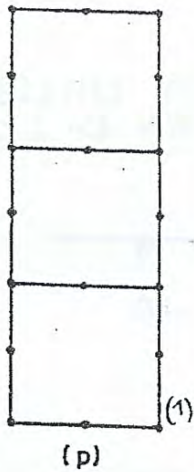


(1) } INFINITI CHE CONSERVANO LA DISCRETIZZAZIONE  
(2) } PRECEDENTE.



ELEMENTI QUADRANGOLARI

(SECONDO ORDINE)



(1) INFITTIMENTO CHE CONSERVA LA DISCRETIZZAZIONE PRECEDENTE

**CONFRONTO DEI RISULTATI**

I RISULTATI OTTENUTI CON LE VARIE DISCRETIZZAZIONI SONO CONFRONTATI CON LA SOLUZIONE ESATA PRESENTATA DA TIMOSHENKO AND GOODIER

*tempo di calcolo (considerando tutto)*

Element	Mesh	Nodes	Elements	Analysis time (s)	Total time (s)	v Displacement for $x = 1.5, y = 9$
Triangle 3 nodes	a	8	6	2	4	186.84
	b	21	24	4	10	223.65
	c	40	54	11	22	292.29
	d	65	96	22	43	329.73
	e	96	150	40	79	351.02
	f	133	216	67	119	363.94
Rectangle 4 nodes	g	8	3	2	4	270.76
	h	21	12	5	10	351.94
	i	40	27	12	23	375.48
	j	65	48	26	44	384.76
	k	96	75	51	83	386.28
l	133	108	80	129	389.67	
Triangle 6 nodes	m	21	6	4	9	387.14
	n	65	24	28	43	396.14
	o	133	54	92	131	396.31
Rectangle 8 nodes	p	18	3	7	11	391.28
	q	53	12	41	54	396.22
	r	106	27	116	146	396.48
Exact solution (Timoshenko and Goodier)						396.8

*la troviamo sul libro "theory of elasticity" di Timoshenko.*

*tempi relativi all'iterazione del programma "forany"*

*non grande differenza come tempistiche, ma si come spostamenti*

*Per strutture complicate le differenze di tempo sono di ore !!! (1-2 ore!!!)*

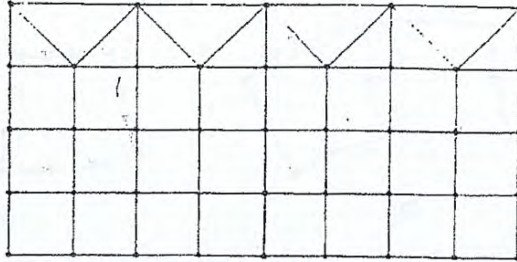


# VEDERE DOPO PAG 190

Se uso un codice di calcolo, esistono già implementate all'interno di tale codice delle tecniche che ~~stimolano~~ il tutto: data una mesh  $\rightarrow$  il problema è numerare i nodi in modo da avere la minore

## DEFINIZIONE DEL MODELLO

ATTENZIONE: SE NON SI USAO TECNICHE DI SOLUZIONE FRONTALE, OCCORRE PRESTARE PARTICOLARE ATTENZIONE ALLA NUMERAZIONE DEI NODI DEL MODELLO.

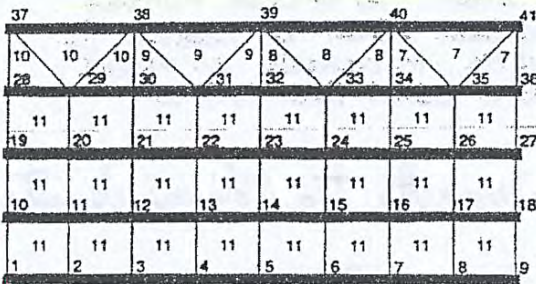


(a)

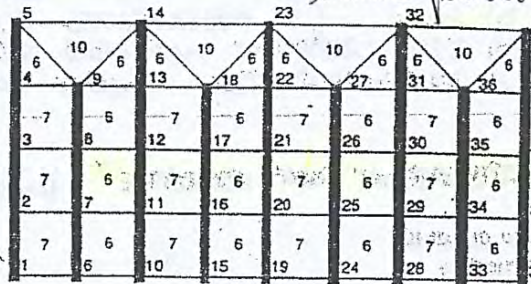
larghezza di banda possibile della mia matrice di righe. Il programma di calcolo fa in automatico l'organizzazione della numerazione in modo da avere la minor larghezza di banda possibile. Se, però,

mi ricordo che un programma deve risolvere una parte di codice per tale ottimizzazione

Oriento la numeraz. in orizzontale



(b)  $hB = 11$   
 $\rightarrow$  larghezza di banda = 11

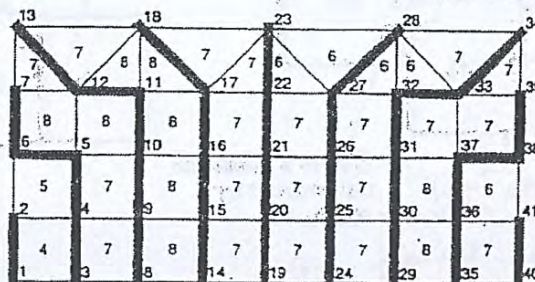


(c)  $hB = 10$

Oriento la numeraz. in verticale



(d)  $hB = 9$   
 $\rightarrow$  soluz. casuale



(e)  $hB = 8$   $\rightarrow$  è quella che mi dà la banda minore con tecniche simmetriche

**OSS:** - IL NUMERO ALL'INTERNO DI CIASCUN ELEMENTO INDICA LA SEMIBANDA RELATIVA ALL'ELEMENTO

-  $hB \equiv$  SEMIBANDA TOTALE RELATIVA ALLA STRUTTURA

- (e) NUMERAZIONE MIGLIORE PER LA MINIMIZZAZIONE DI BANDA (?)  
[IN GENERALE SI UTILIZZA PER PROBLEMI DI COMODITA' DELL'INPUT DEI DATI LE NUMERAZIONI (a), (b) - IN QUESTI CASI, SE DISPONIBILE, PUO' ESSERE UTILE (ATTENZIONE AI TEMPI TOTALI DI ELABORAZIONE / QUANTITA' DI DATI DA TRATTARE / MODALITA' DI TRATTAMENTO) IMPIEGARE UN MINIMIZZATORE DI BANDA]

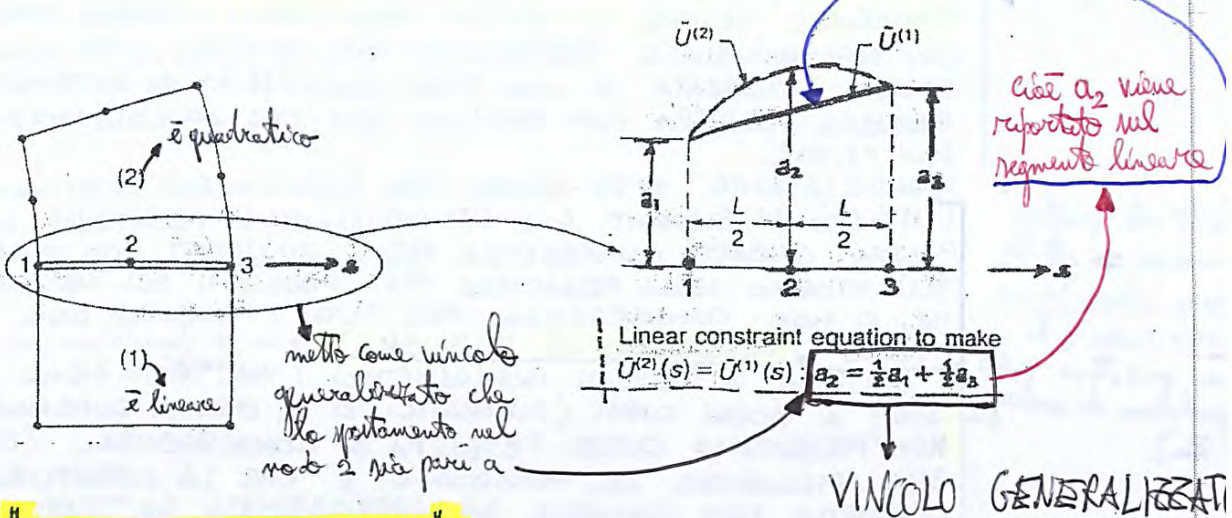
Un codice commerciale ha già incorporato all'interno un'ottimizz. di banda.



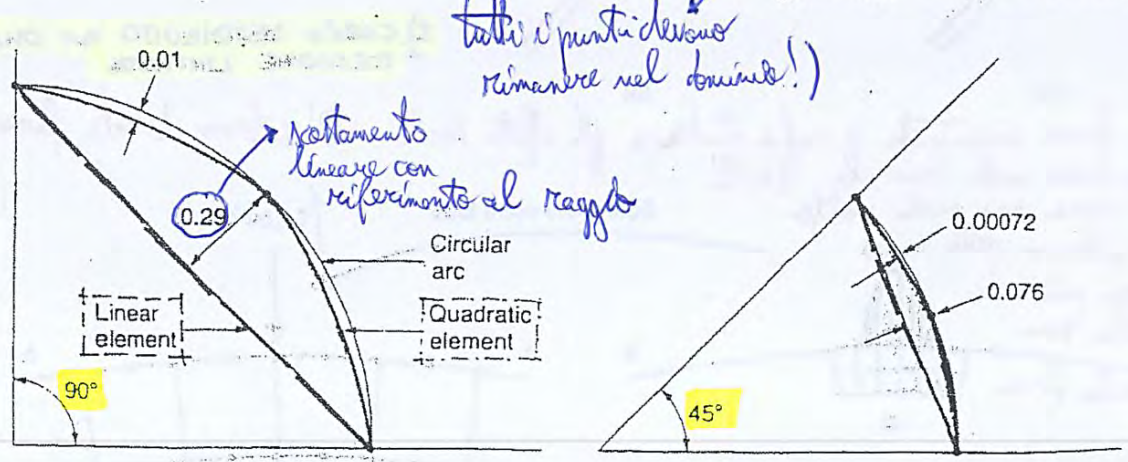
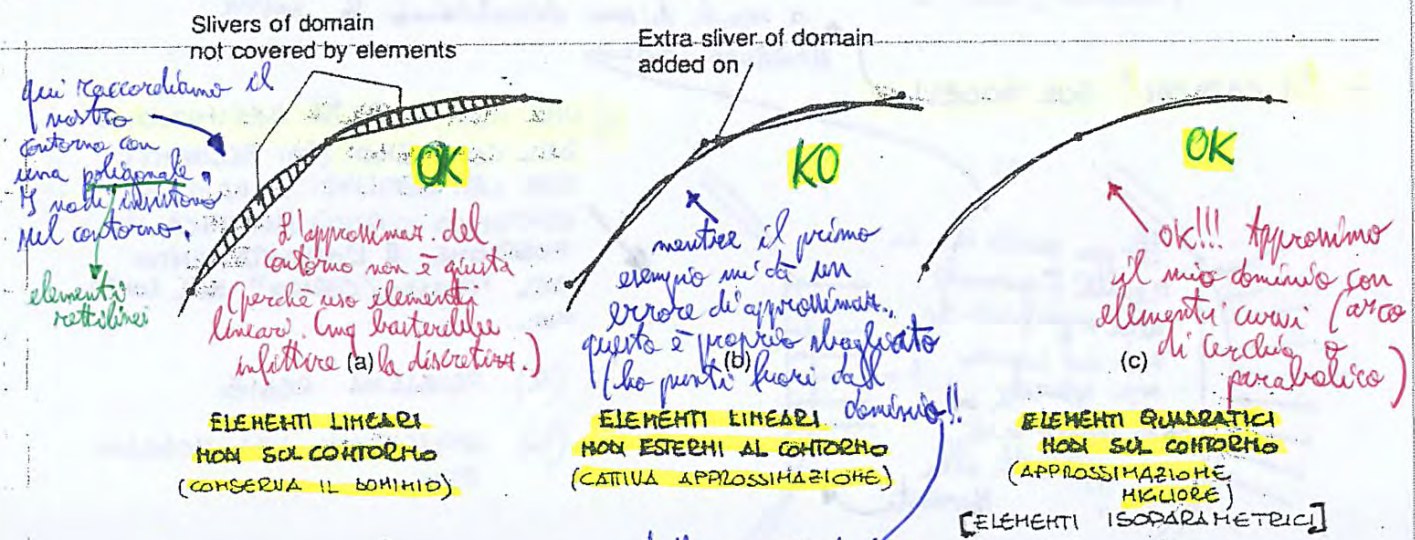
noi li avremo visto come vincoli esterni ma

uno dei loro impieghi è anche quello di riportare la continuità di spostamento su elementi adiacenti che hanno approssimazioni diverse della funt. di campo (COMBINAZIONI LINEARI)

**6) IMPOSTAZIONE DEI VINCOLI GENERALIZZATI TRA GLI SPOSTAMENTI DEI NODI**



**- ERRORI GEOMETRICI DI MODELLO**



ERRORI NELLA VALUTAZIONE APPROSSIMATA DEL RAGGIO PER IL CASO DI UN BORDO CIRCOLARE : APPROSSIMAZIONE LINEARE / APPROSSIMAZIONE QUADRATICA -

parabolica

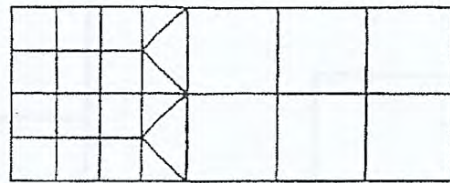


I CARICHI LOCALIZZATI PRODUCONO SOLUZIONI COMPLESSE NELL'INTORNO DELL'APPLICAZIONE DEL CARICO: DA QUI LA NECESSITA' DI GENERARE NELL'INTORNO DEL CARICO STESSO INFITTIMENTO DI MESH (FG. (a)). SE NELLO STUDIO NON INTERESSA IL COMPORTAMENTO LOCALE, ALLORA IL CARICO PUO' ESSERE CONSIDERATO CONCENTRATO (INTENSITA' PARI ALLA RISULTANTE DEL DISTRIBUITO) APPLICATO NEL BARICENTRO DELLA DISTRIBUZIONE, LA MESH PUO' ESSERE REALIZZATA SENZA PARTICOLARI INFITTIMENTI LOCALI E COME PUNTO DI APPLICAZIONE DEL CARICO E' BUONA FORMA SCEGLIERE UN VERTICE DEGLI ELEMENTI (E NON UN PUNTO INTERMEDIO SUL LATO DELL'ELEMENTO)

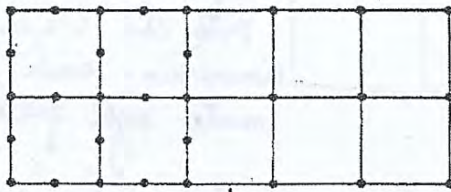
## - INFITTIMENTI LOCALI DELLA DISCRETIZZAZIONE



(a)

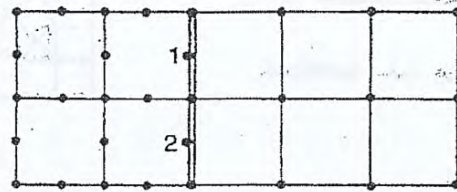


(b)



Transition elements

(c)



Constraint equations for nodes 1 and 2

(d)

ESISTONO QUATTRO METODOLOGIE IN GENERE UTILIZZATE PER L'INFITTIMENTO LOCALE DI MESH (NELLA FIGURA VENGONO RAPPRESENTATE IPOTIZZANDO L'INFITTIMENTO IN UNA SOLA DIREZIONE):

- (a) ELEMENTI CHE GRADUALMENTE MODIFICANO LA LORO DIMENSIONE
- (b) UTILIZZO DI ELEMENTI TRIANGOLARI PER COSTRUIRE LA ZONA DI RACCORDO (E' UNA SOLUZIONE, IN QUESTO CASO, MENO REGOLARE RISPETTO ALLA PRECEDENTE)
- (c) UTILIZZO DI ELEMENTI DI TRANSIZIONE
- (d) UTILIZZO DI VINCOLI GENERALIZZATI

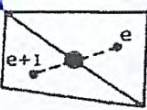
**OSS:** • IN (a) E (b) SI MODIFICANO LE DIMENSIONI DEGLI ELEMENTI MA NON IL GRADO DELL'ELEMENTO

• IN (c) E (d) SI CAMBIA IL GRADO DELL'ELEMENTO SENZA CAMBIARNE LE DIMENSIONI

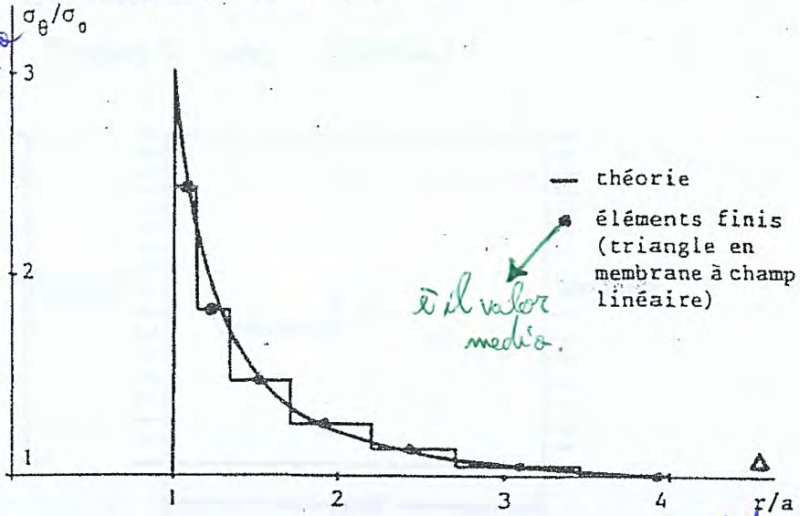


Attorno alla linea "diagonale" vale a valutare il mio stato tensionale. Ho 2 elementi  $\Rightarrow$  assumo come  $\sigma$  il valor medio delle 2  $\sigma$  delle 2 linee.

CALCOLO TENSIONE MEDIA

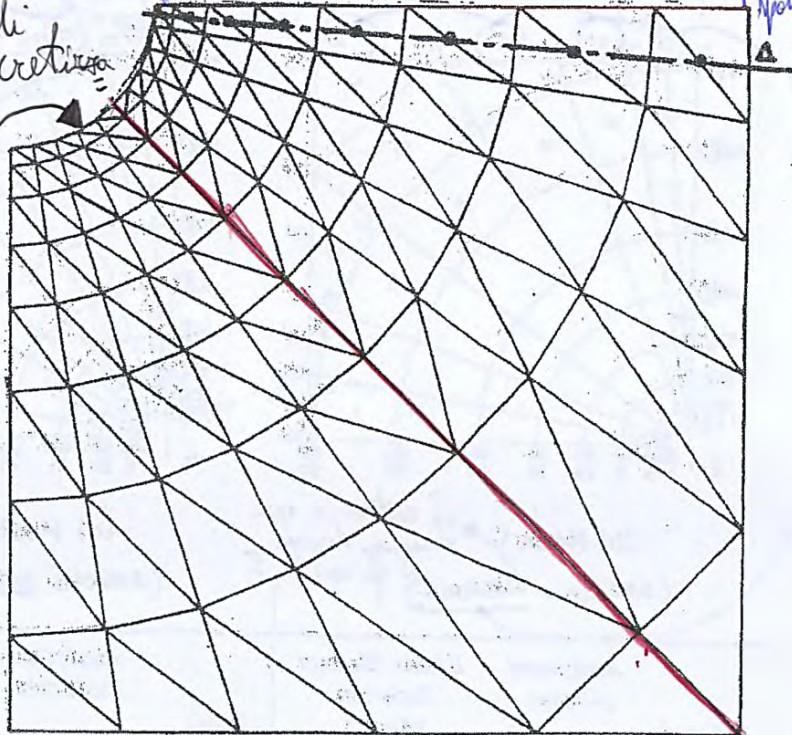
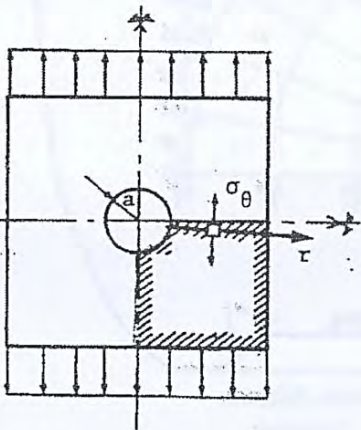


$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}[\sigma^e + \sigma^{e+1}]$$



Valutazione dello stato di tensione nell'interno di un foro  $\Rightarrow$  devo discretizzare in modo abb. fatto il contorno.

Gli elementi CST partono da dimensioni limitate e via via si espandono (inoltre vicino al foro ho un forte gradiente  $\Rightarrow$  devo affittare la mesh) (ricordiamo che il CST risponde con spostamenti COSTANTI)



ESEMPIO D'APPLICAZIONE DELL'ELEMENTO TRIANGOLARE A CAMPO LINEARE: ANALISI DELLO STATO DI TENSIONE ATTORNO FORO CIRCOLARE

il problema presenta una certa simmetria

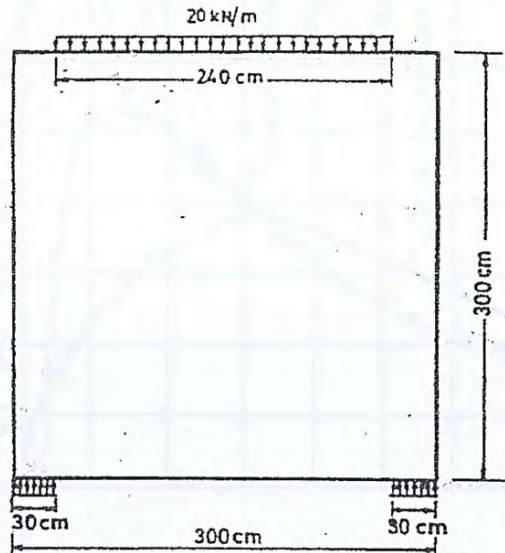
mesh simmetrica in modo da non creare delle dissimmetrie nello rappresent. del mio problema



LEZ. 24-03-2024

ESEMPIO STATO PIANO DI TENSIONE:

"TRAVE PARETE"



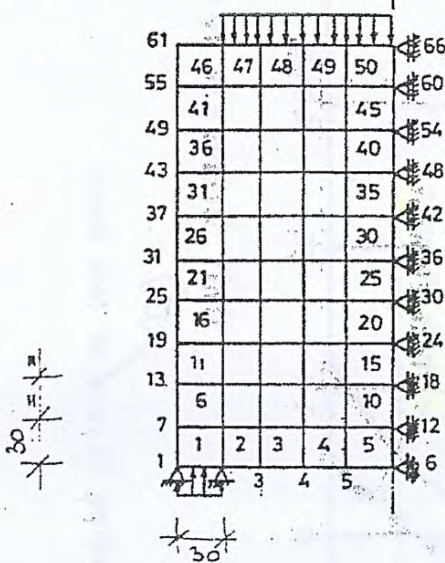
$E = 2 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$   
 $\nu = 0.2$   
 Thickness = 20 cm } CLS

Struttura simmetrica  
 caricata simmetricamente  
 → ne studia solo metà

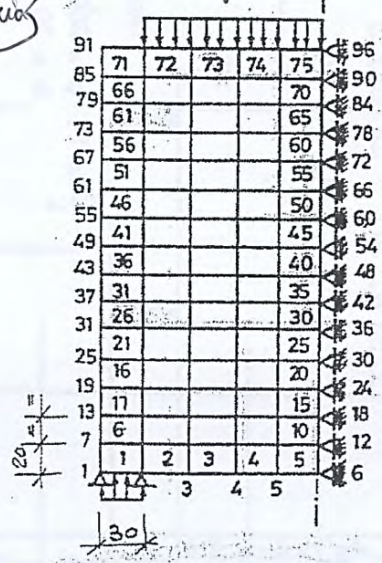
(a) Deep beam - Example 2

→ piano di simmetria

(consenti gli spostam. verticali, impedendo quelli orizzontali)



(b) Mesh 1



(c) Mesh 2

OSS: - PER RAGIONI DI SIMMETRIA SI STUDIA SOLO 1/2 STRUTTURA  
 - LE DUE MESH NON SONO OMA L'INFIATTIMENTO DELL'ALTRA



LEZ. 25-03-2014

## ELEMENTI IN

### "COORDINATE GENERALIZZATE"

Rimaniamo nell'ambito delle coord. generalizzate e iniziamo a vedere i GUSCI  
ASSIALSIMMETRICI → ma in termini di struttura che di calcolo. Per "gusci" intendiamo dei "gusci" SOTTILI.

### ELEMENTI ASSIALSIMMETRICI "BIDIMENSIONALI"

#### - ELEMENTO A TRONCO DI CONO

- GUSCIO CILINDRICO
- PIASTRA CIRCOLARE



funzione approssimata  
del mio campo di spostam.

che al mio elemento  
un' approssimazione di questo  
tipo cosa vuol dire? Dove avevamo  
usato una rappresentazione analoga  
a questa? Nell' elemento trave di Euler - Bernoulli (quando l'abbiamo  
studata in coord. generalizzate: ovvero allungamento e  
rotazione (derivata dell'allungamento): ho 4 parametri,  
prendi al più  
però risolvere  
un' equazione  
a tipo cubico.  
in questo  
rispetto la  
sua assiale ho due spostamenti ( $u_1, u_2$ )  $\Rightarrow$  al max. ho  
una funzione lineare  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 s \\ w = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3 \end{cases}$$

IN TERMINI LOCALI

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

pag. 194 in  
alto per  
i grad.

SPOSTAMENTI  
LOCALE

$$[\bar{u}] = [\bar{X}] [d]$$

COORDINATE  
SISTEMA LOCALE

questo elemento è  
la trasposizione in  
un problema approssimato  
dato del problema  
dell' elemento trave.  
l' approssim. è  
analoga, però chiaramente  
che  $\epsilon$  sono totalmente  
diverse perché il legame  $\epsilon =$   
- spostamenti è del tutto diverso  
nei 2 casi)

\* vuol dire rispetto  
al S.L.K. locale

IMPONENDO ORA LE CONDIZIONI AI NODI:

( $s=0$ : nodo 1,  $s=L$ : nodo 2 (vedi  
fig. pag. precedente).

$$\begin{matrix} \text{Nodo 1} \\ \text{Nodo 2} \end{matrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{u}^*] = [\bar{X}^*] [d]$$

$$[d] = [\bar{X}^*]^{-1} [\bar{u}^*]$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_2 \end{Bmatrix}$$



Qui c'è il prodotto per avere di quello che abbiamo visto prima, in termini matriciali:

$$\begin{matrix}
 [u] \\
 \downarrow \\
 [x] \\
 \downarrow \\
 [x^*]^{-1} \\
 \downarrow \\
 [T] \\
 \downarrow \\
 [\bar{u}]
 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\
 0 & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bar{u}_1 \\
 \bar{w}_1 \\
 \beta_1 \\
 \bar{u}_2 \\
 \bar{w}_2 \\
 \beta_2
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}
 1^{\circ} \text{ riga} \\
 = \\
 2^{\circ} \text{ riga}
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 (1-p) \cos \phi & (1-p) \sin \phi & 0 & p \cos \phi & p \sin \phi & 0 \\
 -(1-3p^2+2p^3) \times \sin \phi & -(1-3p^2+2p^3) \times \cos \phi & -L(p-2p^2+p^3) \times \sin \phi & -(3p^2-2p^3) \times \cos \phi & -L(-p^2+p^3) & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 [u] \\
 \downarrow \\
 [x^*]^{-1} \\
 \downarrow \\
 [T] \\
 \downarrow \\
 [\bar{u}]
 \end{matrix}$$

DOVE  $p = S/L$

PARAMETRO ADIMENSIONALE  
 $0 \leq p \leq 1$

qui entrano in gioco  $\cos \phi$  e  $\sin \phi$ , cioè l'inclinazione del mio trave di cune.

$$[u] = [H][x^*]^{-1}[T]$$

abbiamo [u] espresso in termini di parametri mobili nel r.d.r. globale

$$[H] = [x^*]^{-1}[T]$$

MATRICE DELLE "FUNZIONI DI FORMA"



Se  $\phi = 0 \Rightarrow$  el tronco di cono diventa un tronco di cilindro e

**A) GUSCIO CILINDRICO CIRCOLARE: ANGOLO  $\phi = 0^\circ$**



IN QUESTO CASO IL RAGGIO "r" E' COSTANTE PER TUTTA LA STRUTTURA (E DUHQE TUTTO L'ELEMENTO)

1° oss: Questo guscio è proprio nella nostra filosofia di gusci (cioè piccolo spessore).

INIZIAMO CON LO STUDIARE LA FUNZIONE INTEGRALE

$[B]^T [D] [B]$

Da qui fino a "ESEMPIO" sono solo passaggi di bricolage numerico (vedere se nella pagina!)

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-3p^2+2p^3)}{r} & -\frac{L}{r}(p-2p^2+p^3) & 0 & \frac{(3p^2-2p^3)}{r} & -\frac{L}{r}(-p^2+p^3) \\ 0 & \frac{(-6+12p)}{L^2} & -\frac{1}{L}(-4+6p) & 0 & \frac{1}{L^2}(6-12p) & -\frac{1}{L}(-2+6p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CON  $p = \frac{s}{L}$  ← PARAMETRO ADIMENSIONALE

$$[D][B] = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{\nu}{r}(1-3p^2+2p^3) & -\frac{\nu L}{r}(p-2p^2+p^3) & \frac{1}{L} & \frac{\nu}{r}(3p^2-2p^3) & -\frac{\nu L}{r}(-p^2+p^3) \\ -\frac{\nu}{L} & \frac{1}{r}(1-3p^2+2p^3) & -\frac{L}{r}(p-2p^2+p^3) & \frac{\nu}{L} & \frac{1}{r}(3p^2-2p^3) & -\frac{L}{r}(-p^2+p^3) \\ 0 & \frac{r^2(-6+12p)}{12L^2} & \frac{r^2(-4+6p)}{12L} & 0 & \frac{r^2(6-12p)}{12L^2} & \frac{r^2(-2+6p)}{12L} \\ 0 & \frac{\nu r^2(-6+12p)}{12L^2} & \frac{\nu r^2(-4+6p)}{12L} & 0 & \frac{\nu r^2(6-12p)}{12L^2} & \frac{\nu r^2(-2+6p)}{12L} \end{bmatrix}$$

$$[B]^T [D] [B] = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix}$$



HE CONSEQUE CHE LA MATRICE DI RIGIDITÀ:

$$[k] = 2\pi L \int_0^1 [B]^T [D] [B] r dp$$

RISULTA:

$$[k] = 2\pi \left( \frac{E I}{1 - \nu^2} \right) \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

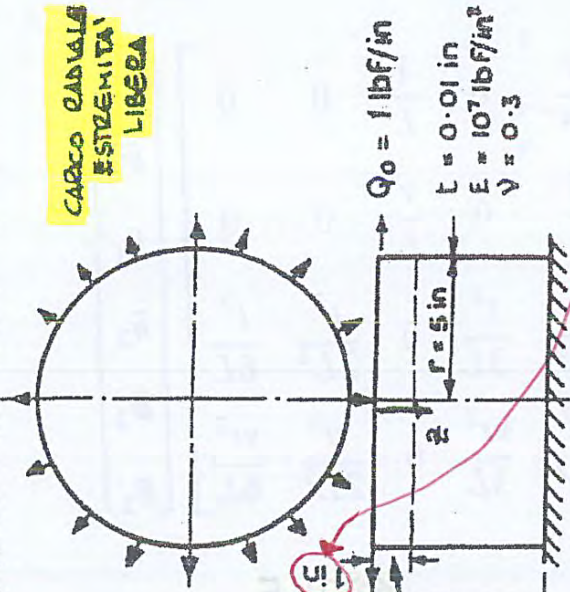
$$k_{ij} = 2\pi L \int_0^1 b_{ij} r dp$$

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{r}{L} & k_{12} = -\frac{\nu}{2} & k_{13} = \frac{\nu L}{12} & k_{14} = -\frac{r}{L} = -k_{11} \\ k_{15} = -\frac{\nu}{2} = k_{12} & k_{16} = -\frac{\nu L}{12} = -k_{13} \\ k_{22} = \frac{13 L}{35 r} + \frac{r t^2}{L^3} & k_{23} = -\frac{11 L^2}{210 r} - \frac{r t^2}{2 L^2} & k_{24} = \frac{\nu}{2} = -k_{12} \\ k_{25} = \frac{9 L}{70 r} - \frac{r t^2}{L^3} & k_{26} = \frac{13 L^2}{420 r} - \frac{1 r t^2}{2 L^2} \\ k_{33} = \frac{1}{105} \frac{L^3}{r} + \frac{1}{3} \frac{r t^2}{L} & k_{34} = -\frac{\nu L}{12} = -k_{13} \\ k_{35} = -\frac{13 L^2}{420 r} + \frac{1 r t^2}{2 L^2} = -k_{26} & k_{36} = -\frac{1}{140} \frac{L^3}{r} + \frac{1}{6} \frac{r t^2}{L} \\ k_{44} = \frac{r}{L} = k_{11} & k_{45} = \frac{\nu}{2} = -k_{12} & k_{46} = \frac{\nu L}{12} = k_{13} \\ k_{55} = \frac{13 L}{35 r} + \frac{r t^2}{L^3} = k_{22} & k_{56} = \frac{11 L^2}{210 r} + \frac{r t^2}{2 L^2} = -k_{23} \\ k_{66} = \frac{1}{105} \frac{L^3}{r} + \frac{1}{3} \frac{r t^2}{L} = k_{33} \end{cases}$$



All'estremità libera del tubo  
distribuzione di Carico Radiale:

CARICO RADIALE  
ESTREMITÀ  
LIBERA

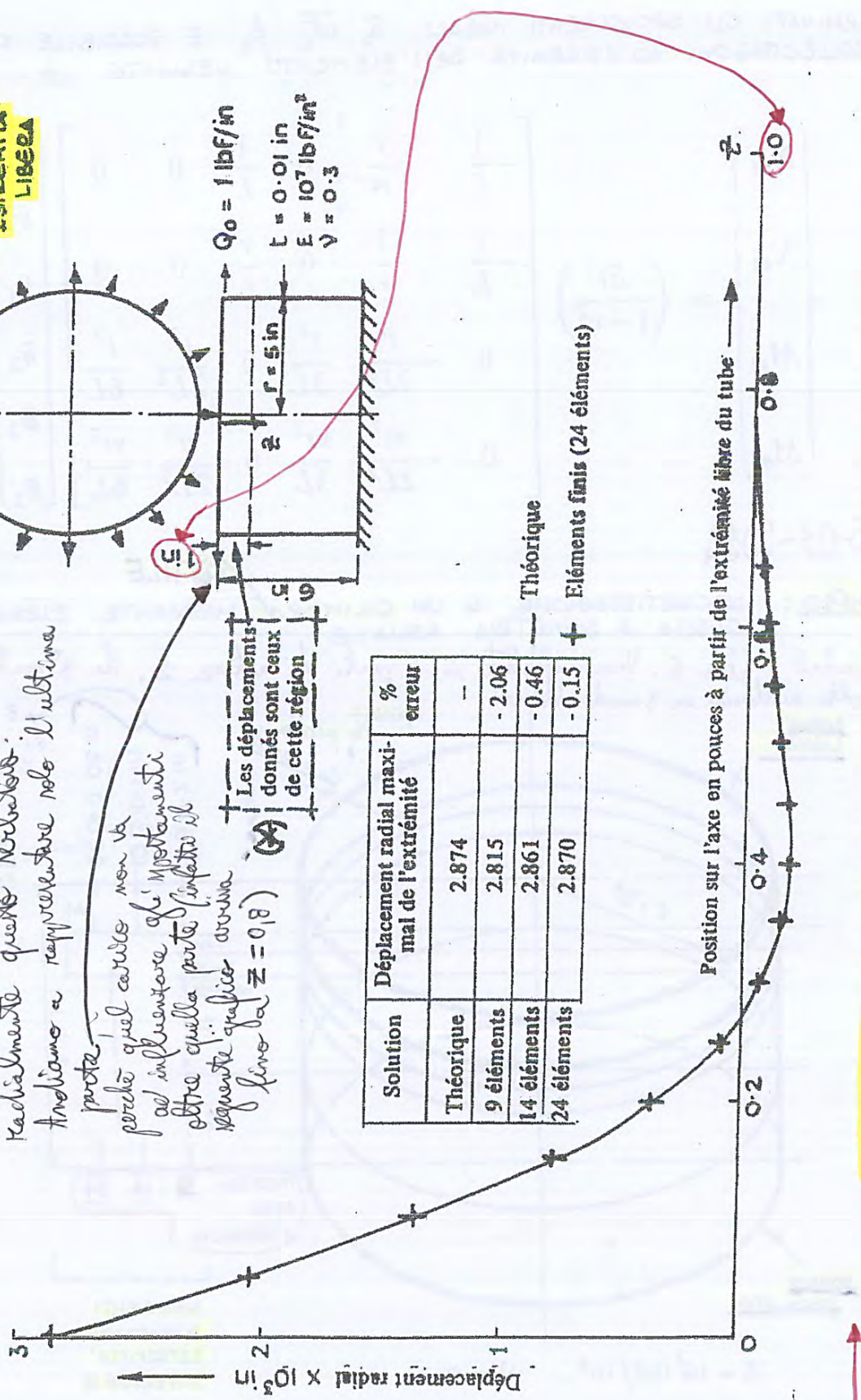


Studiamo come si deforma  
radialmente questo elemento.  
Analizziamo e rappresentiamo solo l'ultima  
parte, perché quel carico non va  
ad influenzare gli spostamenti  
oltre quella parte (infatti il  
segnale grafico arriva  
fino a  $z = 0,8$ )

Les déplacements  
donnés sont ceux  
de cette région

Solution	Déplacement radial maxi- mal de l'extrémité	% erreur
Théorique	2.874	-
9 éléments	2.815	-2.06
14 éléments	2.861	-0.46
24 éléments	2.870	-0.15

— Théorique  
+ Éléments finis (24 éléments)



VARIAZIONE NELLO SPOSTAMENTO RADIALE LUNGO L'ALTEZZA  
DEL CILINDRO PER CARICO RADIALE (TRATTO N)

leggera con foglio  
mezz'ora



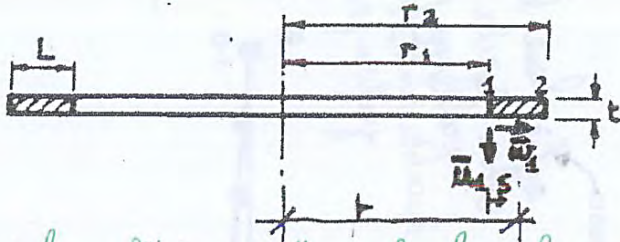
LEZ: 25-03-2014

B) PIASTRA CIRCOLARE : ANGOLO  $\phi = 90^\circ$

il fronte di cuneo diventa un anello circolare  $\Rightarrow$  elemento utile per lo studio di piastre inflessi circolari asimmetriche, caricate in modo asimmetrico.

RAGGIO GENERALE INTERNO ALL'ELEMENTO VALE

$$r = r_1 + Lp \quad (0 \leq p \leq 1)$$



Anche qui, fino all' "ESEMPIO" è solo lavoro numerico. PER IL CASO III ESAME LA MATRICE [B] VALE.

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1-p}{r} & 0 & 0 & \frac{p}{r} & 0 \\ -\frac{1}{L^2}(-6+12p) & 0 & -\frac{1}{L}(-4+6p) & -\frac{1}{L^2}(6-12p) & 0 & -\frac{1}{L}(-2+6p) \\ \frac{1}{rL}(-6p+6p^2) & 0 & \frac{1}{r}(1-4p+3p^2) & \frac{1}{rL}(6p-6p^2) & 0 & \frac{1}{r}(-2p+3p^2) \end{bmatrix}$$

HEITRE I COEFFICIENTI  $b_{ij}$  DEL PRODOTTO  $[B]^T [D] [B]$  :

$$b_{11} = \frac{t^2}{12L^4} (36 - 12p + 12p^2) - \frac{vt^2}{6rL^3} (36p - 108p^2 + 72p^3) + \frac{t^2}{12r^2L^2} (36p^2 - 72p^3 + 36p^4)$$

$$b_{12} = 0$$

$$b_{13} = \frac{t^2}{12L^3} (24 - 84p + 72p^2) - \frac{vt^2}{12rL^2} (-6 + 60p - 126p^2 + 72p^3) + \frac{t^2}{12r^2L} (-6p + 30p^2 - 42p^3 + 18p^4)$$

$$b_{14} = -b_{11} \quad b_{15} = 0$$

$$b_{16} = -\frac{t^2}{12L^3} (12 - 60p + 72p^2) - \frac{vt^2}{12rL^2} (24p - 90p^2 + 72p^3) + \frac{t^2}{12r^2L} (12p^2 - 30p^3 + 18p^4)$$



$$\begin{aligned}
k_{11} = \frac{t^2}{12L^2} & \left[ 6 - 60 \frac{r_1}{L} - 216 \left( \frac{r_1}{L} \right)^2 - 144 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 \right. \\
& + \left\{ 18 \left( \frac{r_1}{L} \right)^2 + 108 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 + 108 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \right\} \left\{ \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \right\} \\
& - \left\{ 24 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 + 48 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \right\} \left\{ \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_1^3} \right\} + 9 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \\
& \times \left( \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_1^4} \right) \\
& \left. + \left\{ 36 \left( \frac{r_1}{L} \right)^2 + 72 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 + 36 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \right\} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$k_{12} = 0$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = \frac{t^2}{12L} & \left[ 4 + 54 \left( \frac{r_1}{L} \right) + 126 \left( \frac{r_1}{L} \right)^2 + 72 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 \right. \\
& - \left\{ 15 \left( \frac{r_1}{L} \right)^2 + 63 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 + 54 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \right\} \left\{ \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \right\} \\
& + \left\{ 14 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 + 24 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \right\} \left\{ \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_1^3} \right\} - 4.5 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \\
& \times \left( \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_1^4} \right) \\
& \left. - \left\{ 6 \left( \frac{r_1}{L} \right) + 30 \left( \frac{r_1}{L} \right)^2 + 42 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 + 18 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \right\} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]
\end{aligned}$$

$$k_{14} = -k_{11} \quad k_{15} = 0$$

$$\begin{aligned}
k_{16} = \frac{t^2}{12L} & \left[ 4 - 18 \left( \frac{r_1}{L} \right) - 90 \left( \frac{r_1}{L} \right)^2 - 72 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 \right. \\
& + \left\{ 6 \left( \frac{r_1}{L} \right)^2 + 45 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 + 54 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \right\} \left\{ \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \right\} \\
& - \left\{ 10 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 + 24 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \right\} \left\{ \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_1^3} \right\} + 4.5 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \\
& \times \left( \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_1^4} \right) \\
& \left. + \left\{ 12 \left( \frac{r_1}{L} \right)^2 + 30 \left( \frac{r_1}{L} \right)^3 + 18 \left( \frac{r_1}{L} \right)^4 \right\} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right]
\end{aligned}$$



$$k_{55} = 0.5 + \nu - \left(\frac{r_1}{L}\right) + 0.5 \left(\frac{r_1}{L}\right)^2 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2}\right) + \left(\frac{r_1}{L}\right)^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$k_{56} = 0$$

$$k_{66} = \frac{t^2}{12} \left[ 3 + \nu - 4 \left(\frac{r_1}{L}\right) - 36 \left(\frac{r_1}{L}\right)^2 - 36 \left(\frac{r_1}{L}\right)^3 \right. \\ + \left\{ 2 \left(\frac{r_1}{L}\right)^2 + 18 \left(\frac{r_1}{L}\right)^3 + 27 \left(\frac{r_1}{L}\right)^4 \right\} \left\{ \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \right\} \\ - \left\{ 4 \left(\frac{r_1}{L}\right)^3 + 12 \left(\frac{r_1}{L}\right)^4 \right\} \left\{ \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_1^3} \right\} + 2.25 \left(\frac{r_1}{L}\right)^4 \\ \times \left( \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_1^4} \right) \\ \left. + \left\{ 4 \left(\frac{r_1}{L}\right)^2 + 12 \left(\frac{r_1}{L}\right)^3 + 9 \left(\frac{r_1}{L}\right)^4 \right\} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

NOTI POI GLI SPOSTAMENTI MODALI È POSSIBILE RISALIRE ALLE SOLLECITAZIONI MODALI MEDIANTE LE:

$$\begin{Bmatrix} N_{s1} \\ N_{\theta 1} \\ M_{s1} \\ M_{\theta 1} \end{Bmatrix} = \left( \frac{Et}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} + \frac{\nu}{r_1} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{L} + \frac{1}{r_1} & 0 & 0 & \frac{\nu}{L} & 0 \\ \frac{t^2}{2L^2} & 0 & \frac{t}{3L} + \frac{\nu t^2}{12r_1} & -\frac{t^2}{2L^2} & 0 & \frac{t^2}{6L} \\ \frac{\nu t^2}{2L^2} & 0 & \frac{\nu t^2}{3L} + \frac{t^2}{12r_1} & -\frac{\nu t^2}{2L^2} & 0 & \frac{\nu t^2}{6L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \beta_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{s2} \\ N_{\theta 2} \\ M_{s2} \\ M_{\theta 2} \end{Bmatrix} = \left( \frac{Et}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} + \frac{\nu}{r_2} & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{L} & 0 & 0 & \frac{\nu}{L} + \frac{1}{r_2} & 0 \\ -\frac{t^2}{2L^2} & 0 & -\frac{t^2}{6L} & \frac{t^2}{2L^2} & 0 & -\frac{t}{3L} + \frac{\nu t^2}{12r_2} \\ -\frac{\nu t^2}{2L^2} & 0 & -\frac{\nu t^2}{6L} & \frac{\nu t^2}{2L^2} & 0 & -\frac{\nu t^2}{3L} + \frac{t^2}{12r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \beta_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$$



Casi di carico

freccia

Cas de charge	Flèche maximale (in)				
	Théorique	5 éléments	10 éléments	20 éléments	20 éléments maillage graduel
1	0.1232	0.1179 - 4.3 %	0.1217 - 1.2 %	0.1227 - 0.4 %	0.1223 - 0.7 %
2	0.02888	0.02833 - 1.9 %	0.02874 - 0.5 %	0.02885 - 0.1 %	0.02883 - 0.2 %
3	0.005020	0.004712 - 6.1 %	0.004936 - 1.7 %	0.005001 - 0.4 %	0.005002 - 0.4 %
4	0.03509	0.03324 - 5.3 %	0.03466 - 1.3 %	0.03505 - 0.1 %	0.03510 0 %
5	0.00455	0.004425 - 2.7 %	0.004519 - 0.7 %	0.004544 - 0.14 %	0.004547 - 0.07 %
6	0.01040	0.009604 - 7.7 %	0.01020 - 2 %	0.01036 - 0.4 %	0.01038 - 0.2 %

percentuali di errore rispetto alla soluz. teorica

sollecitazioni massime

Cas de charge	Contraintes maximales (ton/in <sup>2</sup> )					Contraintes
	Théorique	5 éléments	10 éléments	20 éléments	20 éléments maillage graduel	
1	18.8	14.99 - 20.2 %	16.72 - 11 %	17.65 - 6.1 %	18.02 - 4.1 %	$\sigma_\theta$ intérieure
2	6.73	5.12 - 23.8 %	5.861 - 12.7 %	6.276 - 6.7 %	6.478 - 3.6 %	$\sigma_\sigma$ intérieure
3	1.9097	1.167 - 38.9 %	1.5406 - 19.2 %	1.735 - 9.1 %	1.826 - 4.4 %	$\sigma_r$ intérieure
4	12.05	8.731 - 27.5 %	10.294 - 14.6 %	11.16 - 7.3 %	11.62 - 3.5 %	$\sigma_r$ intérieure
5	0.924	0.8000 - 13.4 %	0.8586 - 7 %	0.8912 - 3.4 %	0.9088 - 1.6 %	$\sigma_r$ intérieure
6	7.027	4.459 - 36.5 %	5.642 - 19.7 %	6.315 - 10 %	6.677 - 5 %	$\sigma_r$ intérieure

I risultati in termini di def. sono buoni, in termini di tensioni NO!!!  
 dobbiamo fare attenzione al problema / risultato che abbiamo.  
 Le sollecitazioni sono grandezze derivate dagli spostamenti → non è detto che ad una buona risposta in termini di spost. corrisponda un altrettanto buona risposta in termini di sollecitazioni (max stress).

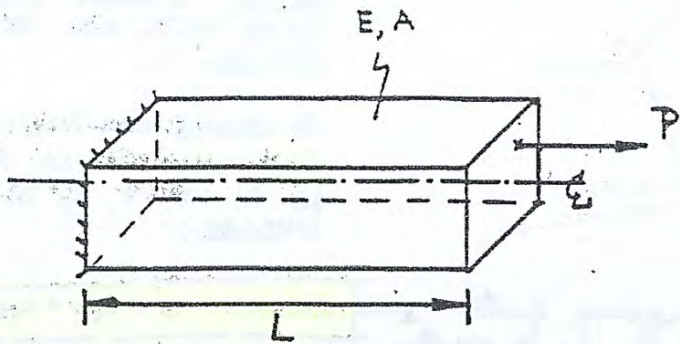


VEDERE DOPO PAG. 219 (in cima)

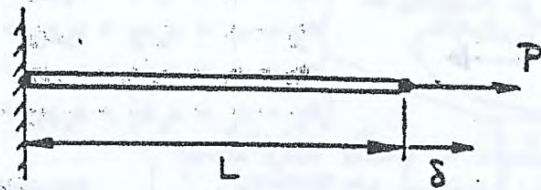
1D ?

3D ?

LEZ. 26-03-2014



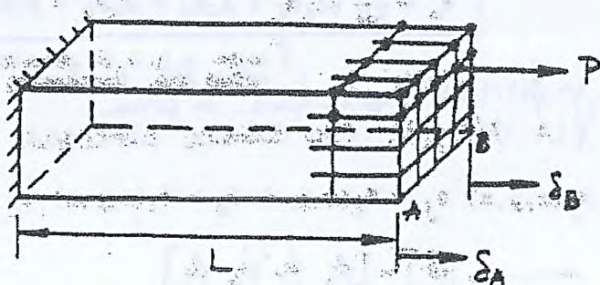
(a) Physical problem considered



(b) 1-D model

Plane sections remain plane  
 $\delta$  is constant for entire section

1D:  $H, H_x, H_y$  2° soluz.



(c) 3-D model

Plane sections do not remain plane, e questo in particolare modo quando lo elemento è così (lunga L diventa piccola rispetto alle dimensioni trasversali).

$\delta_A \neq \delta_B$

entrando in gioco problemi flessionali,

fatto di ESABERI (vedi pag. 219)

intrinseca

⇒ V dobbiamo ricorrere alla mancanza dell'elemento esatto facendo una buona mesh.

Gli elementi di volume non sono usati solo per strutture massive (diga), ma anche ad es. per travi sottili (per cui non può essere la teoria di Eul-Bern.) e nemmeno



DOVE:

$$\begin{aligned}
 N_i(x,y,z) &= \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \\
 N_j(x,y,z) &= \frac{1}{6V} (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) \\
 N_k(x,y,z) &= \frac{1}{6V} (a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \\
 N_l(x,y,z) &= \frac{1}{6V} (a_l + b_l x + c_l y + d_l z)
 \end{aligned}$$

**FUNZIONI DI FORMA**

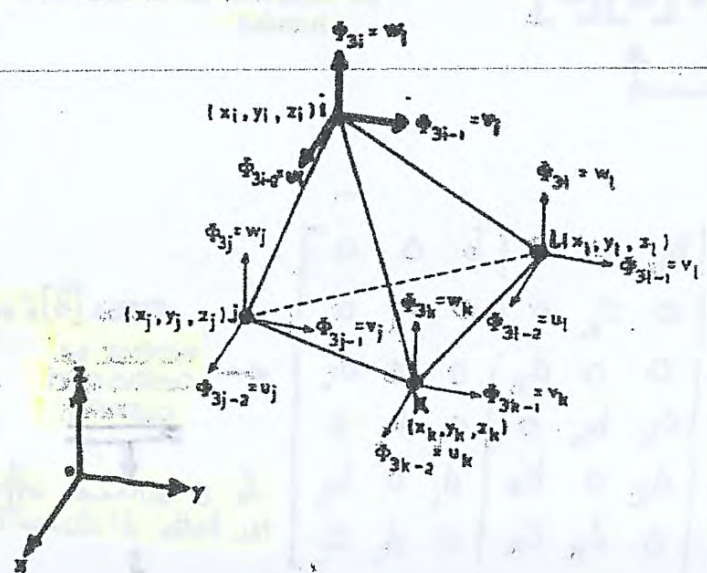
$a_i, b_i, c_i, d_i$ : sono  
 COSTANTI e  
 dipendono solo  
 dai parametri  
 nodali.

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = - \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix}$$

$$d_i = - \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$



CON RIFERIMENTO AL CAMPO DI  
 SPOSTAMENTI  $[u]$

$$[u] = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

per il triangolo avevamo solo  $u$  e  $v$  nel piano. Qui abbiamo anche  $w$ .

E' POSSIBILE, MERCIANTO LA (\*),  
 ESPRIMERE 'LE COMPONENTI'  
 DELLO SPOSTAMENTO IN TERMINI  
 DI SPOSTAMENTI MODALI  $[u]$

$$[u]^T = [u_i \ v_i \ w_i \ u_j \ \dots \ u_l \ v_l \ w_l]$$

ELEMENTO DI VOLUME  $\Delta$  QUATTRO  
 NODI LINEARE

LA (\*) PARTICOLARIZZATA PER IL CASO  
 IN ESAME DIVENTA:

$$[u] = [H] [u]$$

MATRICE DELLE FUNZIONI  
 DI FORMA TENUTO CONTO  
 DELLE TRE COMPONENTI  
 DI SPOSTAMENTO  $u, v, w$

$$[H] = [H_i] [H_j] [H_k] [H_l]$$

$$[H_a] = \begin{bmatrix} N_a(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & N_a(x,y,z) & 0 \\ 0 & 0 & N_a(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$a = i, j, k, l$



L'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE DELL'ELEMENTO RISULTA:

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\epsilon]^T [\sigma] dV = \frac{1}{2} \int_V ([\bar{u}]^T [B]^T) ([E] [B] [\bar{u}]) dV =$$



oss: LE MATRICI CONTENGONO SOLO TERMINI COSTANTI.

$$= \frac{1}{2} [\bar{u}]^T \underbrace{([B]^T [E] [B])}_K [\bar{u}]$$

non che l'integrale, ma c'è direttamente il volume, perché ho tutte le matrici di costanti.

Stanno chiaramente mettendo ulteriori  $[k]$  ←  
 nodi lungo i lati per aumentare l'approximazione. Il  
 problema reale per il tetraedro è quello della  
 realizzazione della mesh, perché c'è sempre il pericolo di perdersi dei pezzi: quanti tetraedri ci sono  
 in un parallelepipedo???

MATRICE DI RIGIDEZZA  
 DELL'ELEMENTO (ESPRIME  
 L'ENERGIA ELASTICA DI DEFOR-  
 MAZIONE IN TERMINI QUADRA-  
 TICI DEGLI SPOSTAMENTI)

POTIZZATE PER FORZE DI VOLUME E FORZE DI SUPERFICIE COSTANTI

$$[f^v]^T = [f_x^v \quad f_y^v \quad f_z^v]$$

↑ FORZE DI VOLUME

$$[f^s]^T = [f_x^s \quad f_y^s \quad f_z^s]_\alpha$$

↑ FORZE DI SUPERFICIE AGENTI SULLA  
 FACCE "α"

ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO IN PRECEDENZA SI RICAVANO LE FORZE EQUIVA-  
 LENTI AI NODI INDOTTE DA DEI CARICHI DISTRIBUITI:

$$[F]^v = \begin{bmatrix} F_x^v \\ F_y^v \\ F_z^v \\ \vdots \\ F_x^L \\ F_y^L \\ F_z^L \end{bmatrix} = \frac{V}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^v \\ f_y^v \\ f_z^v \end{bmatrix}$$

FORZE EQUIVALENTI DI VOLUME

oss: SE SONO COSTANTI SI RIPARTISCONO  
 IN UGUAL MISURA SUI QUATTRO  
 NODI

$$[F]^s = \begin{bmatrix} F_x^s \\ F_y^s \\ F_z^s \\ \vdots \\ F_x^L \\ F_y^L \\ F_z^L \end{bmatrix} = \frac{S_\alpha}{3} \begin{bmatrix} f_x^s (1-\delta_{1\alpha}) \\ f_y^s (1-\delta_{1\alpha}) \\ f_z^s (1-\delta_{1\alpha}) \\ f_x^s (1-\delta_{2\alpha}) \\ f_y^s (1-\delta_{2\alpha}) \\ f_z^s (1-\delta_{2\alpha}) \\ \vdots \\ f_x^s (1-\delta_{i\alpha}) \\ f_y^s (1-\delta_{i\alpha}) \\ f_z^s (1-\delta_{i\alpha}) \end{bmatrix}$$

FORZE EQUIVALENTI DI SUPERFICIE

(NOT: LE FORZE ESTERNE AGISCONO  
 SULLA SUPERFICIE DI UNA SOLA  
 FACCE - TALE FACCE NON  
 CONTIENE IL NODO α)



# DA QUI VEDERE PAG. 213

Da qui fino a pag. 224 non visto  
SAREMO CHE

$$[E] = [D][u] = [D][H][\bar{u}] = [B][\bar{u}]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} [H^*] & [0] & [0] \\ [0] & \frac{\partial}{\partial y} [H^*] & [0] \\ [0] & [0] & \frac{\partial}{\partial z} [H^*] \\ \frac{\partial}{\partial y} [H^*] & \frac{\partial}{\partial x} [H^*] & [0] \\ \frac{\partial}{\partial z} [H^*] & [0] & \frac{\partial}{\partial x} [H^*] \\ [0] & \frac{\partial}{\partial x} [H^*] & \frac{\partial}{\partial y} [H^*] \end{bmatrix}$$

E' POSSIBILE DETERMINARE LA MATRICE DI RIGIDEZZA

$$[k] = \int_V [B]^T [D] [B] dV =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{bc}{a} d_{11} [a_{xx}] + \frac{ac}{b} d_{44} [a_{yy}] + \frac{ab}{c} d_{55} [a_{zz}] & c (d_{11} [a_{xy}] + d_{44} [a_{xy}]^T) & b (d_{13} [a_{xz}] + d_{55} [a_{xz}]^T) \\ \frac{bc}{a} d_{44} [a_{xx}] + \frac{ac}{b} d_{22} [a_{yy}] + \frac{ab}{c} d_{66} [a_{zz}] & a (d_{23} [a_{yz}] + d_{66} [a_{yz}]^T) & \\ \text{SOTTOMATRICE} & & \\ \text{8x8} & & \frac{bc}{a} d_{55} [a_{xx}] + \frac{ac}{b} d_{66} [a_{yy}] + \frac{ab}{c} d_{33} [a_{zz}] \end{bmatrix}$$

DOVE:  $d_{ij}$  = TERMINE GENERALE DELLA MATRICE DI ELASTICITA'  $[D]$

$$[a_{xx}] = \frac{a}{bc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \frac{\partial}{\partial x} [H^*] \frac{\partial}{\partial x} [H^*]^T dx dy dz = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} [A_{xx}] & \frac{1}{6} [A_{xx}] \\ \frac{1}{6} [A_{xx}] & \frac{1}{3} [A_{xx}] \end{bmatrix}$$

▲ x, ad es., volemmo discretizzare una trave non con un elemento beam, ma con un elemento "brick" tipo questo.







# SSE



IPOTESI:

$-q_y$

- SPOSTAMENTO NELLA DIREZIONE FRONTE DELLO PIASTRA
- TUTTE LE DEFORMAZIONI MEDIA I TRASCURABILI

$w$

- UNA RETTA PER SUPERFICIE NE TALE ANCHE I NE (IP. KIRCH)
- LA TENSIONE I

$-q_y z$

FORMALMENTE LE EQUIVALENTE  $\Delta$ :

$x$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\tilde{u} = -q_y \cdot z = q_y z$$

DELLA PIASTRA RISULTA PER LE  $w(x, y)$ ; IN PARTICOLARE

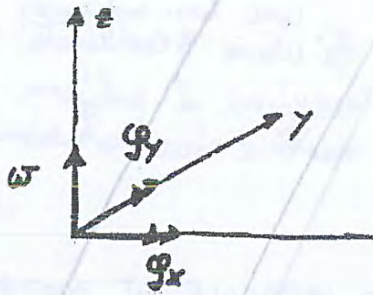
$$= z \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_y \\ -q_x \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -q_y \\ -q_x \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= z [\sigma_w]$$



OSS: NEL CASO PIU' GENERALE ALLA SUPERFICIE NECESSARIA PER LA DEFORMAZIONE (C.P. MI

CON RIFERIMENTO ALLO STATO DI TENSIONE, QU

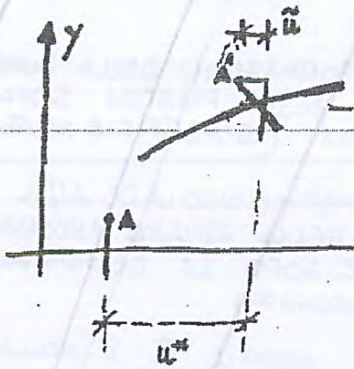


$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

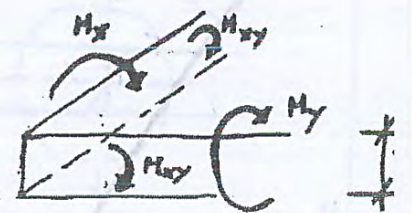
$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} [\Delta w] =$$



DALLO STATO TENSIONALE E' POSSIBILE RICAVARE I



TALE IPOTESI IMPLICA C

$$\epsilon_x = \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v^*(x,y)}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \varphi_y(x,y)$$

$$\gamma_{yz} = -\varphi_x(x,y)$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \, dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot z \, dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

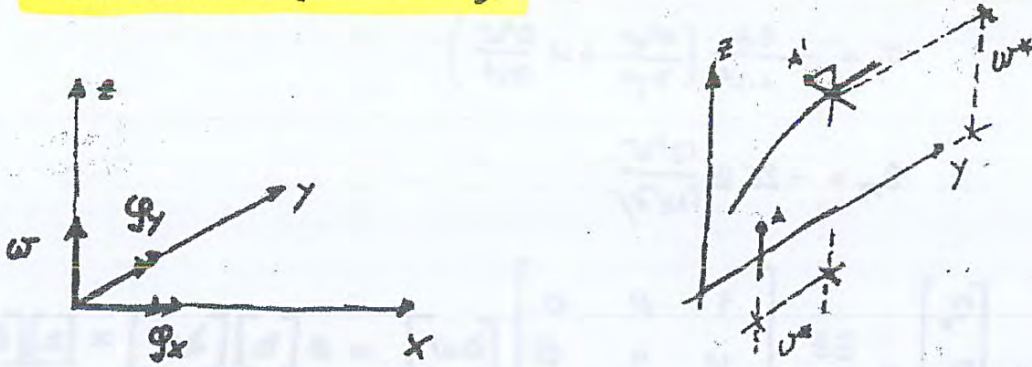
$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \cdot (1-\nu)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{t^3}{12} [\Delta] [\Delta w]$$

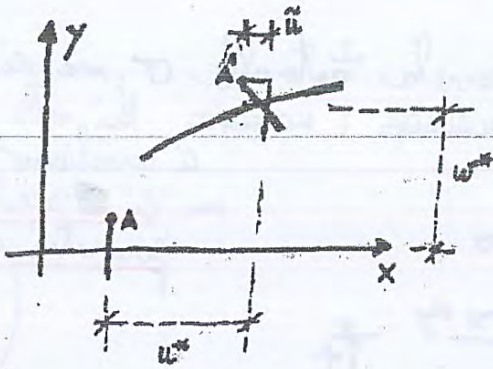


Nella piastra, l'estensione è quella di Kirchhoff-Hindlin (come Timoshenko per la trave) della teoria di Kirchhoff

**OSS:** NEL CASO PIU' GENERALE SI SUPPONE CHE UNA RETTA PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE MEDIA RIMANGA ANCORA UNA RETTA MA NON NECESSARIAMENTE PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE MEDIA DOPO LA DEFORMAZIONE (P. HINDLIN)



SPOSTAMENTI



$$\textcircled{A} \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^*(x,y) \\ v^*(x,y) \\ w^*(x,y) \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\varphi_y(x,y) \\ \varphi_x(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

indica  $\varphi$   
\* : SPOSTAMENTO LINEA MEDIA

ROTAZIONI SEZIONE: queste rotazioni non sono le derivate di  $w$ , ma sono le rotazioni.

TALE IPOTESI IMPLICA CHE

$$\epsilon_x = \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_y(x,y)}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v^*(x,y)}{\partial y} - z \frac{\partial \varphi_x(x,y)}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v^*(x,y)}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \varphi_y(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x(x,y)}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \varphi_y(x,y) + \frac{\partial w^*(x,y)}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = -\varphi_x(x,y) + \frac{\partial w^*(x,y)}{\partial y}$$

non sono niente altro che l'applicazione della teoria dell'elasticità alle relazioni  $\textcircled{A}$

in Kirchhoff  $\Rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$   
le rotazioni sono uguali alla derivata della funz. spostamento, cioè allungamento

distorsione angolare: relazione fra la rotazione e la sua derivata

NEL CASO DI SEZIONE I ALLA SUPERFICIE DEFORMATA

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y}$$

teoria di Kirchhoff



Quando si deve prendere in considerazione la deformabilità a taglio della piastra, per piastre OMOGENEE e ISOTROPE  $\Rightarrow$  possiamo basarci su due parametri geometrici,  $L/t$  e  $L_3$

LEZ. 31-03-2014

## B) LA MODELLIZZAZIONE FEM

NEL FORMULARE MODELLI AD ELEMENTI FINITI OCCORRE VALUTARE LA NECESSITA' DI PRESA IN CONTO DELLA DEFORMABILITA' A TAGLIO (UTILIZZARE CIOE' LA TEORIA DI MINDLIN/REISSNER) - QUESTO, NEL CASO DI PIASTRE OMOGENEE ED ISOTROPE PUO' ESSERE VALUTATO CONSIDERANDO IL RAPPORTO TRA  $L$  (DIMENSIONE CARATTERISTICA DELLA PIASTRA) E  $t$  (SPESORE):

Se  $L/t < 4 \Rightarrow$  ho un elemento di volume (aspetto 3D vero e proprio).

IPOTESI DI KIRCHOFF

$L/t > 20 \Rightarrow$  piastra sottile

IPOTESI DI MINDLIN

$4 \leq L/t \leq 20 \Rightarrow$  bisogna prendere in considerazione la def. a taglio

NEL CASO DI PIASTRE COMPOSITE, LA DEFORMABILITA' A TAGLIO NON DIPENDE SOLO DA UN FATTORE DI SCELLEZZA ( $L/t$ ) MA UGUALMENTE DA CARATTERISTICHE MECCANICHE RAPPRESENTATE DAL RAPPORTO ( $E/KG$ ) - SI PUO' UTILIZZARE COME INDICATORE IL RAPPORTO:

$$\phi = \left(\frac{t}{L}\right)^2 \cdot \frac{E}{KG}$$

$E/KG \backslash L/t$	4	20	100
2	0.125	0.005	0.0002
50	3.125	0.125	0.005

$\leftarrow$  ES: PIASTRA OMOGENEA

$\leftarrow$  ES: PIASTRA COMPOSITA

**OBS:** LA TEORIA DI KIRCHOFF PUO' ESSERE INTERPRETATA COME UN CASO PARTICOLARE DELLA TEORIA DI REISSNER/MINDLIN: UN "BUON" MODELLO FEM BASATO SULLA TEORIA DI R/M DOVRA' FORNIRE DEI RISULTATI IN ACCORDO CON LA TEORIA DI K. SE L'INFLUENZA DELLA DEFORMABILITA' A TAGLIO E' TRASCURABILE.

IMPO:

la realtà, studio della formalità, teoria R-H, approssimazioni, rispetto a, alle delle, simulazioni, etc (dove abbiamo un approssimazione lineare del campo di spostamenti)  $\Rightarrow$   $\phi$   $\Rightarrow$   $\rho$   $\Rightarrow$   $\rho$

NEL CASO DI PRESA IN CONTO DELLA DEFORMABILITA' A TAGLIO, RISULTA IMPORTANTE LA DETERMINAZIONE DELLA "LEGGI DI COMPORTAMENTO A TAGLIO" (RELAZIONE TRA TAGLIO E TENSIONE MEDIA) - LA PRECISIONE DEI RISULTATI, NELLA TEORIA DEL 1° ORDINE, DIPENDE MOLTO DAL FATTORE DI CORREZIONE  $K$  (FATTORE DETERMINATO DALL'UGUAGLIANZA DELL'ENERGIA INTERNA TRA DISTRIBUZIONE DI  $\gamma$  ESATA E MODELLO SEMPLIFICATO [REISSNER] DA CONSIDERAZIONI DINAMICHE [MINDLIN], DA SOLUZIONI DI EQUAZIONI DI ELASTICITA' [COMPER]) - NEL CASO DI TEORIE DI ORDINE SUPERIORE BASATE SULLA DISTRIBUZIONE PIU' GENERALE DEL CAMPO DI SPOSTAMENTI (E DELLE TENSIONI  $\sigma_{x2}$ ,  $\sigma_{y2}$ ,  $\sigma_z$ ) IN TERMINI DI  $1, 2, 2^2, 2^3$   $\rightarrow$  polinomi  $\rightarrow$  non solo lineare

0. TRIGONOMETRIC [OWEN, ZIENKIEWICZ, REISSNER, ...] NON VIENE PRESO IN CONSIDERAZIONE IL COEFFICIENTE  $K$ , MA RISULTA NECESSARIO CONSIDERARE DELLE VARIABILI ULTERIORI RISPETTO ALLE CINQUE VARIABILI CINEMATICHE CLASSICHE ( $u, v, w, \phi_x, \phi_y$ ) - (UNO DEI PRIMI CONTRIBUTI A QUESTE TEORIE E' DATO DA LEVY NEL 1887)

GLI ELEMENTI PRESENTATI DA 15) A 18) SONO SVILUPPATI SECONDO KIRCHOFF.

$\Rightarrow$  in alcuni codici di calcolo sono riportati  $\Rightarrow$  degli elementi piastra alla Mindlin  $\Rightarrow$  questi vari tipi dipendono da come e' rappresentata la distribuzione del campo di spostamenti



DOVE:

$$[\bar{x}] = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}$$

$$[X_i] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 & 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & -3x_i^2 & -2x_i y_i & -y_i^2 & 0 & -3x_i^2 y_i & -y_i^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w) \\ (u) \\ (v) \end{matrix}$$

$(x_i, y_i)$  COORDINATE NODO GENERALE "i"

SAPENDO CHE:

$$[E] = z [D] = z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} [d]$$

$[w] = [x][\alpha]$  GIUSTO???

$$[E] = -z [C][\alpha] = -z [C][\bar{x}]^{-1} [\bar{u}] = [B][\bar{u}]$$

$$[\alpha] = [\bar{x}]^{-1} [\bar{u}]$$

quella che analizzo identificata come derivata delle funz. di forma

$$[\sigma] = [D][E] = [D][B][\bar{u}]$$

NELL'ANALISI DELL'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE SI RICAVA:

$$U = \frac{1}{2} \int_V [E]^T [\sigma] dV = \frac{1}{2} [\bar{u}]^T \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) [\bar{u}]$$

$[K]$  MATRICE DI RIGIDITÀ DELL'ELEMENTO

$$[k] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_V z^2 ([\bar{x}]^{-1})^T [C]^T [D] [C] [\bar{x}]^{-1} dV =$$

$$= ([\bar{x}]^{-1})^T [K] [\bar{x}]^{-1}$$

È UNA MATRICE DI COSTRINTI (perché la  $[\bar{x}]$  è la matrice che contiene le coord. dei nodi)

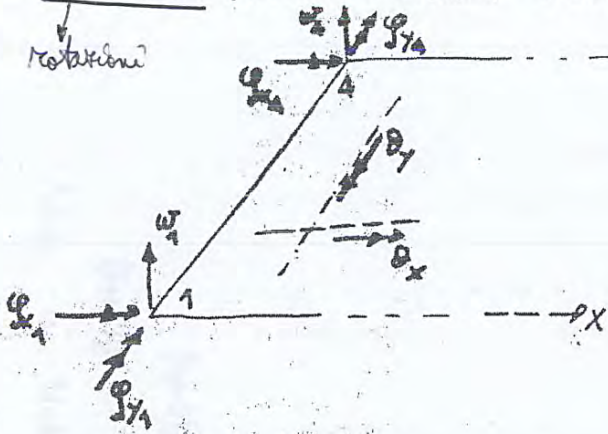
$$[K] = \int_V z^2 [C]^T [D] [C] dV$$

231 matrice "kernel"



lungo una retta (che  
siamo paralleli al lato  $x=0$ )

- OSS:**
- QUANDO  $x$  ( $o y$ ) E' COSTANTE LA FUNZIONE APPROSSIMANTE SI RIDUCE AL POLINOMIO CUBICO UTILIZZATO COME FUNZIONE APPROSSIMANTE NELLO STUDIO DELL'ELEMENTO TRAVE
  - OCCORRE VERIFICARE CHE LA FUNZIONE PRESCELTA ASSICURI LA CONTINUITA' DELLO SPOSTAMENTO VERTICALE E DELLE TANGENTI (LUNGO I BORDI DELL'ELEMENTO):



$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_x \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_y \end{aligned}$$

ESAMINIAMO PER ESEMPIO IL LATO 1-4 (in cui  $x=0$ ) OVE VALGONO:

prendiamo la  $M$  di pag. 230 ed otteniamo:

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3 & \leftarrow x=0 \\ \theta_x &= \alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2 & \leftarrow \frac{\partial w}{\partial y}; x=0 \\ \theta_y &= \alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3 & \leftarrow \frac{\partial w}{\partial x}; x=0 \end{aligned}$$

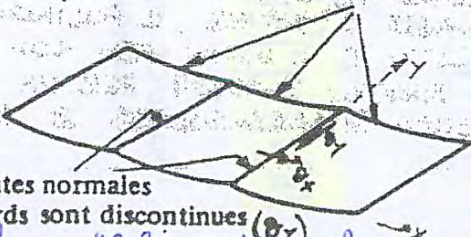
EQUAZIONI CON OTTO COEFFICIENTI INCOGNITI ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}$ ) E SOLO SEI CONDIZIONI AL CONTORNO (3 COMPONENTI AL NODO 1 + 3 COMPONENTI AL NODO 4).

ANALIZZANDO LE RELAZIONI (\*) SI VEDE CHE  $w$   $\theta_x$  CONTENGONO GLI STESSI QUATTRO COEFFICIENTI ( $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10}$ ) ED ESSENDO QUATTRO LE CONDIZIONI MODALI A DISPOSIZIONE PER ( $w_1, \phi_x, w_4, \phi_x$ ) SI POSSONO CALCOLARE I COEFFICIENTI  $\alpha$  ED ESPRIMERE  $w$   $\theta_x$  SOLO IN FUNZIONE DEGLI SPOSTAMENTI MODALI. LE ALTRE DUE CONDIZIONI ( $\phi_y, \phi_y$ ) NON SONO SUFFICIENTI PER CALCOLARE GLI ALTRI QUATTRO COEFFICIENTI INCOGNITI.

il lato 1-4 considerato e questo vale sia per l'elemento di destra che di sinistra che hanno in comune il lato 1-4.

NE CONSEGUE CHE: LA FUNZIONE APPROSSIMANTE PRESCELTA E' TALE DA GARANTIRE LA CONTINUITA' LUNGO IL BORDO DELLO SPOSTAMENTO  $w$  E DELLA SUA DERIVATA LUNGO IL BORDO ( $\theta_x$ ). PER LA DERIVATA IN DIREZIONE NORMALE AL BORDO HANNO INVECE DELLE DISCONTINUITA'. TALE RISULTATO E' SEMPRE VERO, QUALUNQUE SIA IL BORDO DELL'ELEMENTO CONSIDERATO. IN QUESTO CASO LA FUNZIONE APPROSSIMANTE  $w$  E' DETTA "FUNZIONE NON CONFORME".

Elements déformés:



normale che

Les pentes normales ux bords sont discontinues ( $\theta_y$ )

che cosa  $\theta_x$  funziona? Se ci mettiamo lungo uno dei 2 lati, i deformata è una cubica: è quella di una trave  $\Rightarrow$   $\alpha_{10}$   $\alpha_{12}$   $\alpha_9$   $\alpha_5$  parametri nodali, la rotazione della trave è sempre definita

per la  $\theta_y$ , invece, i due elementi vanno a finire con una cupola  $\Rightarrow$  scandole: andiamo a vedere la continuità delle rotazioni



# NON FATTA

DOVENDO DEFINIRE I CARICHI EQUIVALENTI PRODOTTI DA UN CARICO DISTRIBUITO AGENTE SULLA PIASTRA, SI ANALIZZA L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE DELL'ELEMENTO

$$\pi = U - \int_A p w \, da$$

$\swarrow$   $\uparrow$   $\nwarrow$   
 $\frac{1}{2} [\bar{u}]^T [k] [\bar{u}]$       CARICO DISTRIBUITO       $w = [x] [\alpha] = [x] [\bar{x}]^{-1} [\bar{u}]$

$$\pi = \frac{1}{2} [\bar{u}]^T [k] [\bar{u}] - \left( \int_A p \cdot [x] [\bar{x}]^{-1} \, da \right) [\bar{u}] =$$

$[F]^T$  VETTORE TRASPOSTO DELLE FORSE NORMALI

$$= \frac{1}{2} [\bar{u}]^T [k] [\bar{u}] - [\bar{u}]^T [F]$$

DA CUI SI RICAVA

$$[F] = ([\bar{x}]^{-1})^T \int_A p \cdot [x]^T \, da$$

IPOTIZZANDO  $p = \text{cost}$  CON RIFERIMENTO ALL'ELEMENTO PER IL QUALE E' STATO CALCOLATA LA MATRICE DI RIGIDENZA SI OTTIENE

$$\begin{bmatrix} FZ_1 \\ MX_1 \\ MY_1 \\ FZ_2 \\ MX_2 \\ MY_2 \\ FZ_3 \\ MX_3 \\ MY_3 \\ FZ_4 \\ MX_4 \\ MY_4 \end{bmatrix} = 4pb \begin{bmatrix} 1/4 \\ -b/12 \\ 0/12 \\ 1/4 \\ -b/12 \\ 0/12 \\ 1/4 \\ b/12 \\ -0/12 \\ 1/4 \\ b/12 \\ 0/12 \end{bmatrix}$$



Nombre d'éléments	Déplacement latéral (w) au point A	Moments de flexion ( $M_x = M_y$ ) au point A	Moments de flexion ( $M_{yB} = M_{xB}$ ) sur le bord
4	0.00148	0.0462	-0.0355
8	0.00144	0.0363	-0.0418
16	0.00140	0.0278	-0.0476
64	0.00130	0.0240	-0.0503
Solution exacte	0.00126	0.0231	-0.0513
Coeff. multiplicateur	$q a^4 / D$	$q a^2$	$q a^2$

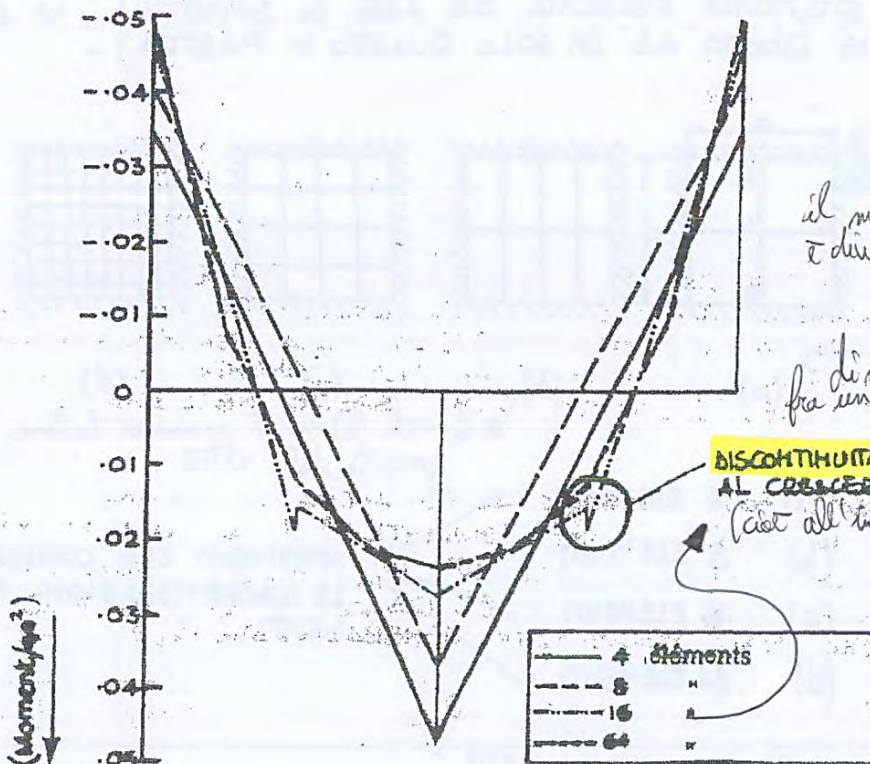
momento di incastro

$$D = \frac{Et^3}{12(1+\nu^2)}$$

RIGIDEZZA FLESSIONALE DELLA PIASTRA



DIAGRAMMA DEL MOMENTO FLETTENTE LUNGO LA SEZIONE TRASVERSALE CENTRALE A-A RIPORTATA IN FIGURA



in uno stesso nodo, il momento di un elemento è diverso da quello dell'altro

di momenti che passano fra un elemento e l'altro

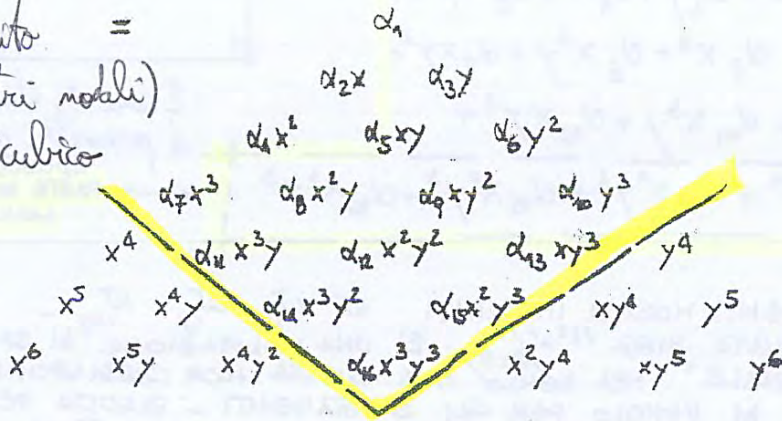
**DISCONTINUITA'** CHE SPARISCONO AL CRESCERE DEGLI ELEMENTI (cioè all'infittimento della mesh)



**OSS:** - CON RIFERIMENTO ALL'ELEMENTO BICUBICO LA FUNZIONE APPROSSIMANTE PUO' ESSERE VISTA COME PRODOTTO DI DUE POLINOMI CUBICI, uno in direzione x e uno in direzione y:

$$w(x,y) = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3) (b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3) =$$

Questo BES  $\pi$  definito =  
 BES 16 (16 parametri nodali)  
 o anche elemento bicubico  
 (che il prodotto di 2  
 polinomi cubici)



DOVE LE COORDINATE GENERALIZZATE  $\alpha_i$  VENGONO DETERMINATE IMPOSTANDO LE CONDIZIONI AL CONTOURNO, INDICATO CON "a" E "b" LE DIMENSIONI DELL'ELEMENTO IN DIREZIONE X E Y, LA  $w(x,y)$  RISULTA:

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{16} H_i(x,y) \bar{u}_i = [H][\bar{u}] =$$

I CONTI NON LI VEDIAMO:  
 (andare direttamente alle figure)

$$= \frac{1}{a^3 b^3} \left[ (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2) w_1 \right. \\
 + (3ax^2 - 2x^3)(b^3 + 2y^3 - 3by^2) w_2 \\
 + (3ax^2 - 2x^3)(3by^2 - 2y^3) w_3 \\
 + (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(3by^2 - 2y^3) w_4 \\
 + ax(x-a)^2(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \\
 + a(x^3 - ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \\
 + a(x^3 - ax^2)(3by^2 - 2y^3) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \\
 \left. + ax(x-a)^2(3by^2 - 2y^3) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 \right]$$

→  
 segue

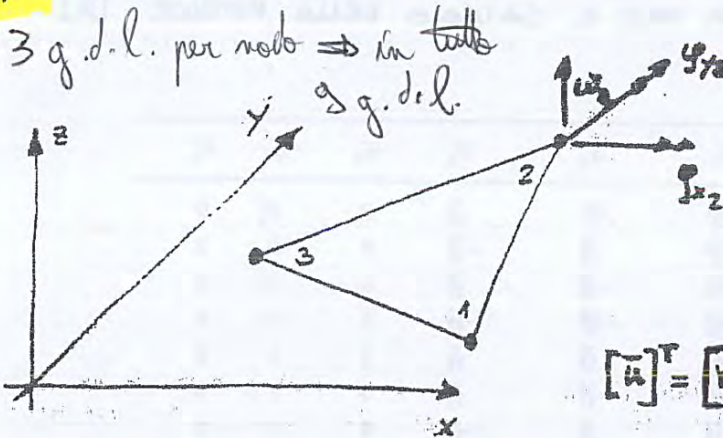






## LATI RETTILINEI

### 17) PIASTRE INFLESSE: ELEMENTO TRIANGOLARE



verifica <sup>(memoria)</sup>  $\frac{1}{2}$  in termini di continuità (proprietà con riferimento alle derivate). Si può fare vedere che un elemento triangolare necessita di 18 g.d.l. per assicurare la  $C^0$  continuità (un elemento si ASSUNDE COME <sup>quadrangolare</sup> INCOGNITE MODALI ne necessita LO SPOSTAMENTO VERTICALE  $w_3$  DEL NODO E LE DUE ROTAZIONI ATTORNO AGLI ASSI

$$[\bar{u}]^T = [w_1 \ \varphi_x \ \varphi_y \ w_2 \ \varphi_x \ \varphi_y \ w_3 \ \varphi_x \ \varphi_y]$$

DEFINITE LE INCOGNITE MODALI, QUESTE RISULTANO INSUFFICIENTI PER POTER DESCRIVERE IL COMPORTAMENTO COSTITUTO DELLA PIASTRA (SI ERA VISTO NELLE OSSERVAZIONI EFFETTUATE A CONFINTO DELL'ELEMENTO TRIANGOLARE CHE PER UN TRIANGOLO TERMINO TRIANGOLARE BEN 18 GRADI DI LIBERTA' E QUINDI LA NECESSITA' DI INTERPOLARE UN POLINOMIO APPROSSIMANTE (ALMENO DEL QUINTO ORDINE) -

OSSERVAZIONI

LA TECNICA DI INTERPOLAZIONE CON CURVATURE DISCONTINUE AGLI ANGOLI AMMETTE UN AMPLIAMENTO DELLE APPROSSIMAZIONI DELLO SPOSTAMENTO  $w$  E RELATIVA GENERAZIONE DI ELEMENTI COMPATIBILI E COMPLETI CON SOLI TRE GRADI DI LIBERTA' PER ANGOLO - TRA QUESTE SI RICORRE:

- RICORSO ALLA TECNICA DI "SPINE FIT" DI PIU' POLINOMI DI INTERPOLAZIONE SU SOTTOELEMENTI TRIANGOLARI
- CORREZIONE DEL POLINOMIO CON FUNZIONI RAZIONALI ESPRIMENTI NELL'ANGOLO SINGOLARITA' DELLE CURVATURE -

IN QUESTO CONTESTO SI ANALIZZERANNO FUNZIONI APPROSSIMANTI DEL TERZO ORDINE FORMULATE DA AUTORI DIVERSI:

a) ELEMENTO DI ANIHI; <sup>il polinomio cubico</sup> non è completo (un polin. cubico completo ha 10 elementi): <sup>manca d'elemento xy.</sup>

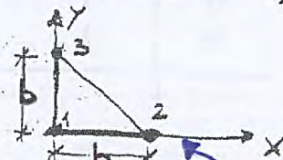
$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 x y^2 + \alpha_9 y^3$$

POLINOMIO DI TERZO GRADO PRIVATO DEL TERMINE MISTO XY

### b) ELEMENTO DI TOCHER (TOCHER 1)

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + x y^2) + \alpha_9 y^3$$

PER QUESTO ELEMENTO LA MATRICE DELLE COORDINATE MODALI  $[\bar{X}]$  PUO' PER ALCUNE GEOMETRIE DELL'ELEMENTO PARTICOLARI, DIVENTARE SINGOLARE - -  
CON RIFERIMENTO ALL'ELEMENTO INDICATO IN FIGURA, LA MATRICE  $[\bar{X}]$  RISULTA INFATTI NON INVERTIBILE



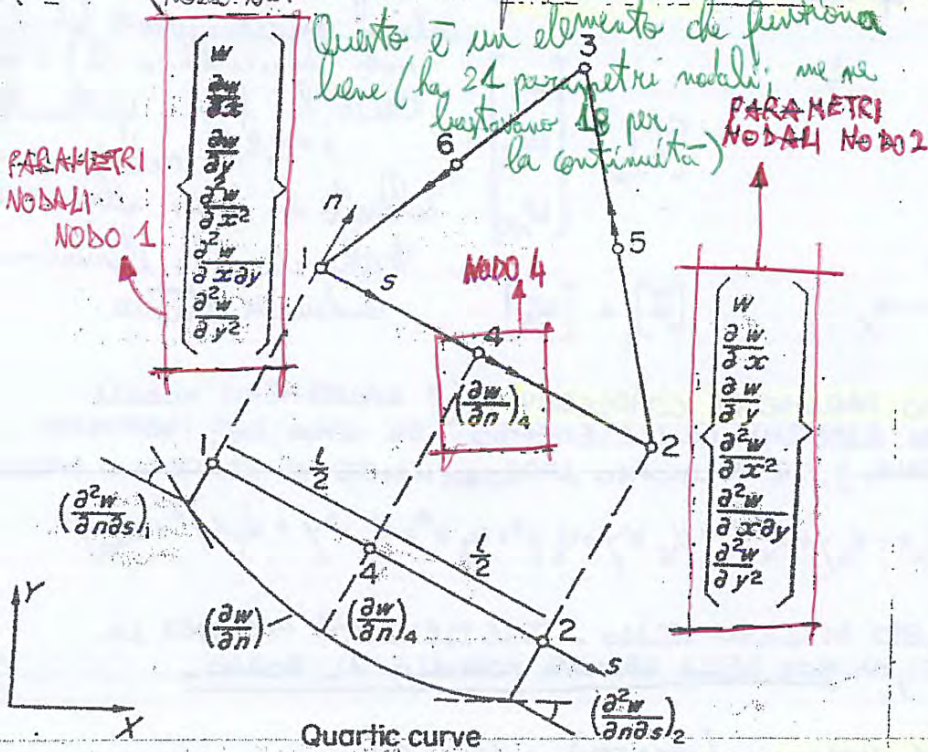
elemento metà di un quadrato

devo fare attenzione a come costruisco la mesh (non mettere nella mesh elementi di

verso fuori



3 vertice: ciascun vertice ha 6 parametri nodali.  
 Nodi intermedi: M prende la derivata normale.



TALE DA GARANTIRE LA CONTINUITA' DELLA FUNZIONE  $w$  LUNGO I LATI E DELLE DERIVATE PRIME  $w_x, w_y$

INFATTI LA DEFINIZIONE DI  $w$  LUNGO UN LATO RICHIEDE (POLINOMIO DEL QUINTO GRADO) SEI CONDIZIONI AL CANTORNO - AVENDO DEFINITO COME PARAMETRI MODALI AI VERTICI QUELLI RIPORTATI IN FIGURA A FIANCO LE SEI CONDIZIONI SONO COMPLETAMENTE DEFINITE (ES. LATO 1-2:  $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  IN ENTRAMBE I MODI) -

PARALLELAMENTE LA FUNZIONE PENDENZA (DERIVATA NORMALE)

RISULTA ESSERE UN POLINOMIO DEL QUARTO ORDINE (Dunque cinque condizioni per la completa definizione). Essendo definite alle estremita' del lato  $w_{14}, w_{15}$ , risulta necessaria la definizione del parametro  $w_{14}$  in un punto interno al lato in esame.

Degrees of freedom per quarter	Uniform load		Central load
	$\alpha \times 10^3$	$(M_{max}/pa^2) \times 10^2$	$\beta \times 10^3$
29	4.057 48	4.955 63	11.384 7
70	4.062 30	4.794 67	11.548 6
129	4.062 31	4.789 86	11.577 6
206	4.062 14	4.788 76	11.587 3
Series solution	4.062 35	4.788 64	11.600 4

VENGONO DI FIANCO RIPORTATI I RISULTATI DI ANALISI FEM EFFETTUATE CON TALE ELEMENTO PER UNA PIASTRA QUADRATA SEMPLICEMENTE APPOGGIATA NEI CASI DI CARICO CONCENTRATO E DI CARICO DISTRIBUITO.

OSS: - LA PENDENZA NEI NODI INTERMEDI AI LATI PUO' ESSERE ELIMINATA ASSUMENDO LA VARIAZIONE DELLA PENDENZA NORMALE... CUBICA PIUTOSTO CHE DI QUARTO GRADO. IN TAL CASO SEMPRE CON DIFFERIMENTO AL LATO 1-2, SI PUO' (BELL)

Differenze finite per ridurre i g.d.l. dell'elemento (ridurre la larghezza di banda finale) => ho una perdita di precisione, anche se accettabile.

$$\left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_4 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_1 + \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_2 \right] + \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \right)_2 \right]$$

- TALE ASSUNZIONE OLTRAE A RIDURRE I GRADI DI LIBERTA' E LA LARGHEZZA DI BANDA, PRODUCE UNA PICCOLA PERDITA IN TERMINI DI ACCURATEZZA DELLA SOLUZIONE.



DEFINITA LA DERIVATA NORMALE  $w_{,n}$  - SI IMPONE LA CONTINUITA' NELLA DERIVATA NORMALE UGUAGLIANDO A "DESTRA" E A "SINISTRA" I VALORI DELLE DERIVATE NORMALI AI NODI 7, 8 E 9. (SONO LE STESSIE RELAZIONI GIA' UTILIZZATE NEI SOTTOTRIANGOLI PER EFFETTUARE LA "CONDENSAZIONE DELLE DEGREE OF FREEDOM") - TALE IMPOSIZIONE CONDUCE AD UNA RESTRIZIONE SU  $[u]_c$ :

$$[u]_c = [E][u]_B$$

↑ LEGAME TRA "SPOSTAMENTI" NODI SUL CONTERNO E NODO CENTRALE (DEGRANDI DALL'AVER IMPOSTO LA CONTINUITA'  $w_{,n}$  NEI NODI 7, 8, 9)

a definire la posizione del nodo C e quindi, ne volete, i suoi spostamenti in funzione degli spostamenti dei nodi sul contorno.

PARTEENDO ALLORA DALLA RELAZIONE DELL'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE DELL'ELEMENTO, SI RICAHA

$$[u]^T [k] [u] \rightarrow [u]_B^T [u]_C^T \begin{bmatrix} [k_{BB}] & [k_{BC}] \\ [k_{CB}] & [k_{CC}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]_B \\ [u]_C \end{bmatrix}$$

*facile via implicita*

*calcolo  $[u]_B^T$  e  $[u]_B$*

semplice  
bricolage  
algebraico

$$[u]_B^T \left( \begin{bmatrix} [I] & [E]^T \\ [I] & [E]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k_{BB}] & [k_{BC}] \\ [k_{CB}] & [k_{CC}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] \\ [E] \end{bmatrix} \right) [u]_B =$$

$$[k^*] = [k_{BB}] + [k_{BC}][E] + ([k_{CB}][E])^T + [E]^T[k_{CC}][E]$$

$$= [u]_B^T [k^*] [u]_B$$

**MATRICE DI RIGIDITA' DELL'ELEMENTO ACT 12**

**OSS:** HENNING - CLOUGH - TOCHER HANNO FORMULATO L'ELEMENTO ACT 9 ELIMINANDO LE ROTAZIONI (DERIVATE NORMALI) NEI NODI INTERMEDI DEI LATI IPOTIZZANDO UNA VARIAZIONE DELLE DERIVATE NORMALI DI TIPO LINEARE LUNGO I LATI STESSI:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_i = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_1 + \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_2 \right]$$

QUESTO ELEMENTO RISULTA "PIU' RIGIDO" NEI CONFRONTI DEL MODELLO A 12 GRADI DI LIBERTA' COME CONSEGUENZA DEI VINCOLI ADDIZIONALI INTRODOTTI -



$$\left( \begin{bmatrix} \bar{u}^L \end{bmatrix}_i \right)^T = \left[ w_i^a \left( \frac{\partial w^a}{\partial x} \right)_i \left( \frac{\partial w^a}{\partial y} \right)_i \right]$$

ETTORE SPOSTAMENTI MODALI MODO  $i$  SOTTO TRIANGOLO (C) RIFERITI AL SISTEMA LOCALE

LE CONDIZIONI AL CONTOURNO NECESSARIE RISULTANO COSI' DEFINITE:

24 EQUAZIONI

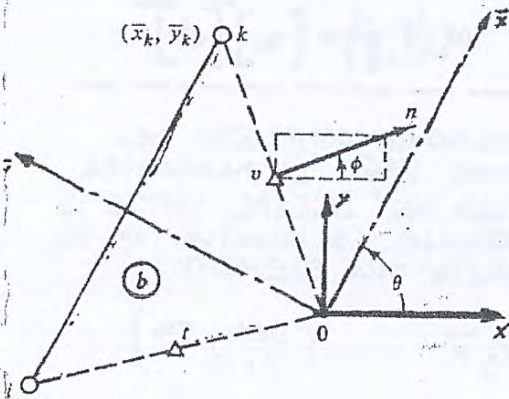
$$\begin{bmatrix} \left[ \bar{u}^L \right]_i \\ \left[ \bar{u}^L \right]_J \\ \left[ \bar{u}^L \right]_k \\ \left[ \bar{u}^L \right]_i^c \\ \left[ \bar{u}^L \right]_J^a \\ \left[ \bar{u}^L \right]_k^b \\ \left[ \bar{u}^L \right]_o^a \\ \left[ \bar{u}^L \right]_o^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \bar{u}^L \right]_i^c \\ \left[ \bar{u}^L \right]_J^a \\ \left[ \bar{u}^L \right]_k^b \\ \left[ \bar{u}^L \right]_i^b \\ \left[ \bar{u}^L \right]_J^c \\ \left[ \bar{u}^L \right]_k^a \\ \left[ \bar{u}^L \right]_o^b \\ \left[ \bar{u}^L \right]_o^c \end{bmatrix}$$

9 EQUAZIONI TRA I GRADI DI LIBERTA' ESTERNI (VERTICI TRIANGOLO) E I CORRISPONDENTI RIFERITI AI SOTTOTRIANGOLI

9 EQUAZIONI TRA I GRADI DI LIBERTA' DEI NODI  $i, J, K$  VISTI COME APPARTENENTI A SOTTOTRIANGOLI ADIACENTI

6 EQUAZIONI TRA I GRADI DI LIBERTA' DEL NODO CENTRALE "O" VISTO COME APPARTENENTE AI SOTTOTRIANGOLI

3 EQUAZIONI DATE DALL'IMPORRE LA COMPATIBILITA' DELLA DERIVATA TANGENZIALE DELLO SPOSTAMENTO LUNGO I LATI INTERNO DEI SOTTOTRIANGOLI - ES. PER IL NODO "O" DEL SOTTOTRIANGOLO (C) SI SCRIVE:



$$\left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_o^b = (w_n)_o^b = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \cos \phi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \phi \right)_o^b$$

$$\left( \frac{\partial w_c}{\partial n} \right)_t = \left( \frac{\partial w_b}{\partial n} \right)_t$$

$$\left( \frac{\partial w_a}{\partial n} \right)_u = \left( \frac{\partial w_c}{\partial n} \right)_u$$

$$\left( \frac{\partial w_b}{\partial n} \right)_v = \left( \frac{\partial w_a}{\partial n} \right)_v$$

VOLENDO ESPlicitARE LE EQUAZIONI SOPRA RIPORTATE IN TERMINI DI COORDINATE GENERALIZZATE BASTA OSSERVARE CHE I GRADI DI LIBERTA' DI UN NODO DI UN SOTTOTRIANGOLO INTERINI DI COORDINATE LOCALI SI ESPRIMONO TRAMITE RELAZIONI DEL TIPO (ES. NODO "u", SOTTOTRIANG. (C))



NON FATTA

CON RIFERIMENTO POI ALLA DERIVATA NORMALE È POSSIBILE SCRIVERE (ES. HODO "σ" SOTTOTRIANGOLO (b))

$$\left(\frac{\partial w_b}{\partial m}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \cos \phi + \frac{\partial w_b}{\partial y} \sin \phi\right)_\sigma =$$

$$= [0 : e : f : 2e\bar{x} : f\bar{x} + e\bar{y} : 2f\bar{y} : 3e\bar{x}^2 : 2f\bar{x}\bar{y} + e\bar{y}^2 : 3f\bar{y}^2]_\sigma \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_9 \end{Bmatrix}^b$$

COORDINATE DEL HODO "σ" NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE SOTTOTRIANGOLO (b)

$$e = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

$$f = \cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi$$

COORDINATE GENERALIZZATE SOTTOTRIANGOLO (b)

$$\left(\frac{\partial w_b}{\partial m}\right)_\sigma = [\bar{A}]_\sigma^b [d]^b$$

VOLENDO RIPORTARE TUTTE LE EQUAZIONI IN UN UNICO SISTEMA SI OTTENE

9 EQUAZIONI	3 EQUAZIONI →	$\begin{bmatrix} [\bar{u}]_i \\ [\bar{u}]_j \\ [\bar{u}]_k \end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & [A]_i^e \\ [A]_j^a & 0 & 0 \\ 0 & [A]_k^b & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} [d]_i^e \\ [d]_j^a \\ [d]_k^b \end{bmatrix}$						
						15 EQUAZIONI	3 EQUAZIONI →	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} 0 & -[A]_i^b & [A]_i^c \\ [A]_j^e & 0 & -[A]_j^c \\ -[A]_k^e & [A]_k^b & 0 \\ 0 & [A]_l^b & -[A]_l^c \\ [A]_o^a & -[A]_o^b & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} [d]_i^e \\ [d]_j^a \\ [d]_k^b \\ [d]_l^c \\ [d]_o^c \end{bmatrix}$

$$9 \text{ EQUAZIONI} \rightarrow \begin{bmatrix} [\bar{u}] \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{aa}] & [A_{aa}] \\ [A_{aa}] & [A_{aa}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [d_a] \\ [d_a] \end{bmatrix}$$

$$18 \text{ EQUAZIONI} \rightarrow$$



NON FATTA

ESEMPIO: DETERMINARE IL COEFFICIENTE  $\bar{k}_{13-13}$  DELLA MATRICE "KERHEL"

- LA COORDINATA GENERALIZZATA CORRISPONDENTE ALLA TREDECIMA COSTANTE RISULTA ESSERE  $\alpha_4^b$  ( $\alpha_4$  DEL SOTTOTRIANGOLO (b))
- LA FUNZIONE DI SPOSTAMENTO IN TERMINI DI COORDINATE LOCALI VALE:

$$w_b(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{x} + \alpha_3 \bar{y} + \alpha_4 \bar{x}^2 + \alpha_5 \bar{x}\bar{y} + \alpha_6 \bar{y}^2 + \alpha_7 \bar{x}^3 + \alpha_8 \bar{x}\bar{y}^2 + \alpha_9 \bar{y}^3$$

- NELLA VALUTAZIONE DI  $U$  IN TERMINI DI " $\alpha$ ", E' SUFFICIENTE CALCOLARE IL CONTRIBUTO DEL SOLO SOTTOTRIANGOLO (b) (I CONTRIBUTI DI (a) e (c) NON CONTERGONO  $\alpha_4^b$ )

$$\frac{\partial^2 w_b}{\partial \bar{x}^2} = 2\alpha_4^b + 6\alpha_7^b \bar{x}$$

$$\frac{\partial^2 w_b}{\partial \bar{y}^2} = 2\alpha_6^b + 2\alpha_8^b \bar{x} + 6\alpha_9^b \bar{y}$$

$$\frac{\partial^2 w_b}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = \alpha_5^b + 2\alpha_8^b \bar{y}$$

- SOSTITUENDO I CONTRIBUTI COSI' CALCOLATI IN  $U$ , DALLA DERIVAZIONE SI OTTIENE

$$\bar{k}_{13-13} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_4 \partial \alpha_4}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \alpha_4^2} \iint D/2 [(2\alpha_4 + 6\alpha_7 \bar{x})^2 + (2\alpha_6 + 2\alpha_8 \bar{x} + 6\alpha_9 \bar{y})^2$$

$$+ 2\nu(2\alpha_4 + 6\alpha_7 \bar{x})(2\alpha_6 + 2\alpha_8 \bar{x} + 6\alpha_9 \bar{y})$$

$$+ 2(1-\nu)(\alpha_5 + 2\alpha_8 \bar{y})^2] d\bar{x} d\bar{y} =$$

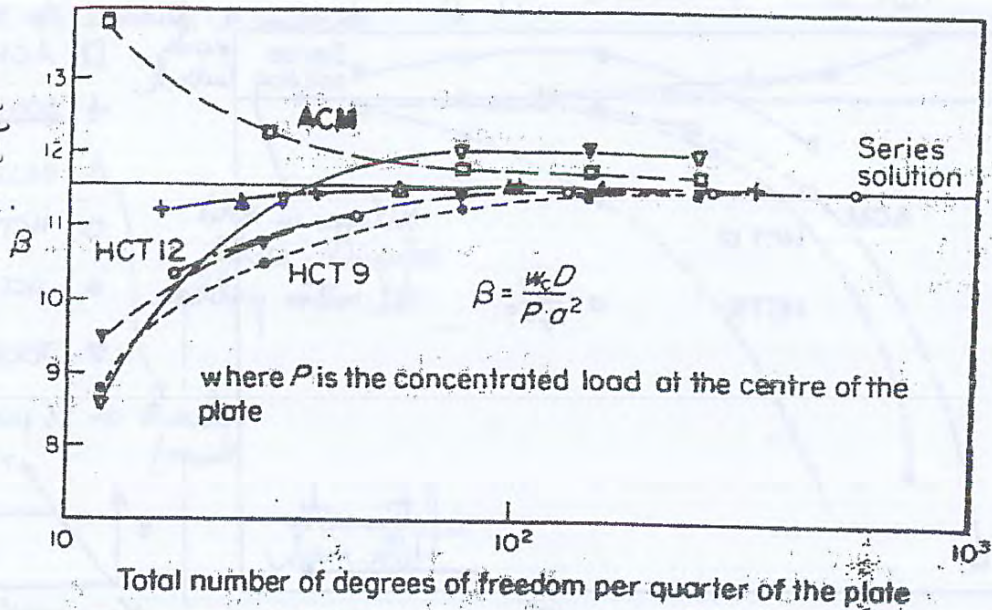
$$= 4D (\text{AREA SOTTOTRIANGOLO (b)})$$

UTILIZZANDO LA STESSA PROCEDURA E' POSSIBILE RICAVARE TUTTI I TERMINI DELLA MATRICE [K] "KERHEL" -

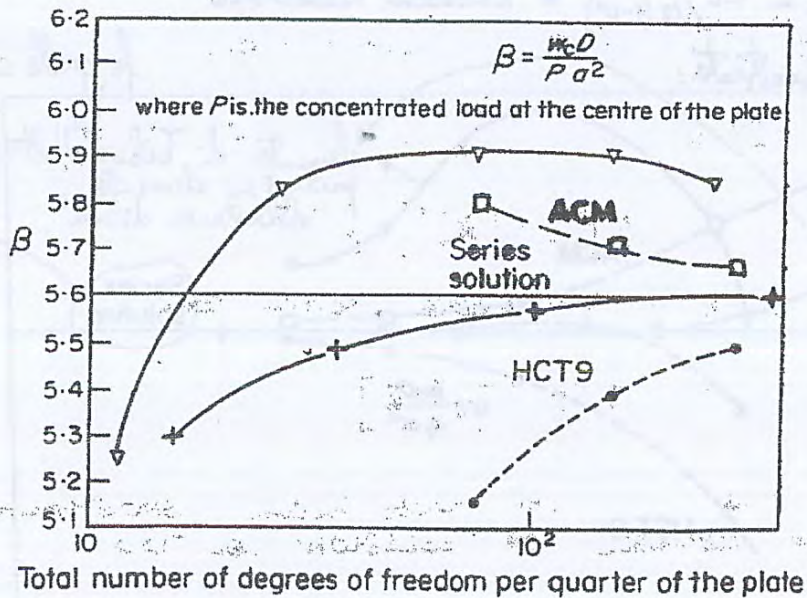


Stessa piastra con carico concentrato.

l'unico elemento che non converge è quello di Tocher.



PIASTRA QUADRATA SEMPLICEMENTE APPROCCIATA / CARICO CONCENTRATO HEZGERIA



PIASTRA QUADRATA INCASTRATA / CARICO CONCENTRATO HEZGERIA

Dunque possiamo concludere che nelle piastre bisogna stare attenti, perché rischiamo con elementi molto poveri (vedi Tocher) di avere risultati che non convergono, anche se raffittiamo la mesh.



Praticamente, come è che posso controllare se il problema delle mesh locking esiste o no con l'elemento che sto studiando? C'è un indice (coeff. di bloccaggio a taglio): vedi nel seguito.

$$[U] \approx \frac{1}{k_{eff} L^2} [k_e]^{-1} [F]$$

E COSÌ L'ELEMENTO CONDUCE AD UNA SOLUZIONE INFLUENZATA DAL TAGLIO INVECE D'ESSERE ASSOCIATA ALLA FLESSIONE. QUESTA RIGIDEZZA ARTIFICIALE O PARASSITA È DEFINITA "BLOCCAGGIO PER TAGLIO" O "SHEAR LOCKING". PER OVVIARE A TALE "BLOCCO NUMERICO" È POSSIBILE UTILIZZARE TECNICHE DI INTEGRAZIONE DELLA MATRICE  $[k_e]$  TALI DA RIDURRE IL CONTRIBUTO PARASSITA DEL TAGLIO A FROENTE DEL CONTRIBUTO FLESSIONALE (VED. "COORDINATE NATURALI", ELEMENTI DI "TIPO MISTO"). SI PUÒ PENSARE DI INTRODURRE UN "INDICATORE DI BLOCCAGGIO"  $C_b$  DEFINITO DA:

è un rapporto di numero di equazioni

$$C_b = \frac{N_{eq}}{\text{Rango}[k_e]}$$

$$C_b = \frac{N_{eq}}{N_{rit}}$$

coefficiente di bloccaggio a taglio.

$N_{eq}$  = NUMERO DI EQUAZIONI DELLA MATRICE GLOBALE  $[k]$  DEL PROBLEMA IN ESAME

$N_{rit}$  = NUMERO RELAZIONI INDEPENDENTI RAPPRESENTANTI LA DEFORMABILITÀ A TAGLIO (PER ELEMENTI "MISTI" È IL NUMERO DI PARAMETRI RAPPRESENTANTI LA FORZA DI TAGLIO)

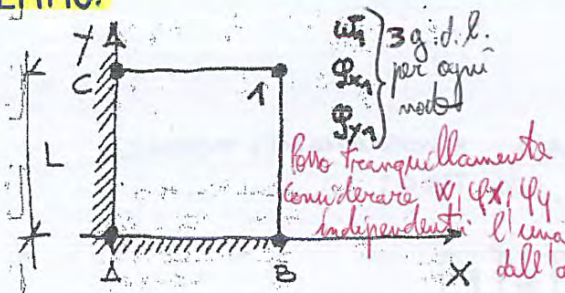
è come noi diciamo che il calore va dal corpo più caldo al più freddo perché ancora non c'è stata nessuna dimostrazione contraria!

cioè, finora non ho nessuna dimostrazione contraria

lasciamo perdere la spiegazione

DOVE SE  $C_b = 3/2$  SEMBRA NON ESISTERE IL RINGHIO DI BLOCCAGGIO IN MODELLI CON DEFORMABILITÀ A TAGLIO (UNA SPIEGAZIONE "EURISTICA" È DATA DALLA CONSIDERAZIONE CHE IN CIASCUN PUNTO CI SONO TRE VARIABILI CINEMATICHE CHE  $w, \varphi_x, \varphi_y$  CONTRO DUE VARIABILI DI DEFORMAZIONE A TAGLIO  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ . È POSSIBILE ANCHE VALUTARE L'INDICATORE  $C_b$  CON RIFERIMENTO A UN SOLO ELEMENTO INCASTRATO SU DUE LATI (ELEMENTO SUPPOSTO APPARTENENTE A UN DOMINIO DISCRETIZZATO CON UN NUMERO ELEVATO DI ELEMENTI); IN QUESTO CASO  $N_{eq}$  E  $\text{Rango}[k_e]$  SONO CALCOLATI DOPO LA PRESA IN CONTO DELLE CONDIZIONI VINCOLARI - SE  $C_b = 1$  SI HA BLOCCAGGIO PER TAGLIO, PER VALORI SUPERIORI (INFERIORI A  $3/2$ ) OCCORRE STUDIARE L'ELEMENTO; *è certi (fino adesso) che si vediamo di affrontare l'elemento rettangolare riportato in figura!*

ESEMPIO:

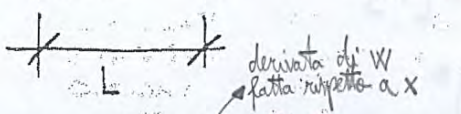


$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$\varphi_x(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

$$\varphi_y(x,y) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy$$

imponendo le c.c. trovate!



$$\begin{bmatrix} \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} + \varphi_y \\ w_{,y} - \varphi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{L^2} w_1 + \frac{xy}{L^2} \varphi_{x1} \\ \frac{x}{L^2} w_1 - \frac{xy}{L^2} \varphi_{x1} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} y & 0 & xy \\ x & -xy & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \end{bmatrix} = [B_e] [E]_1$$

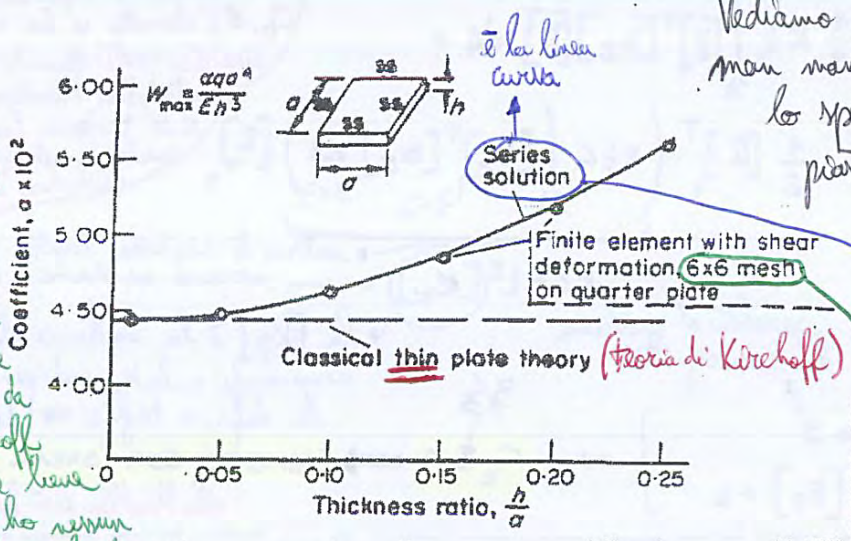
$$[B_e]$$



OSS:

1: la soluz. agli elem. finiti non ha la soluz. esatta

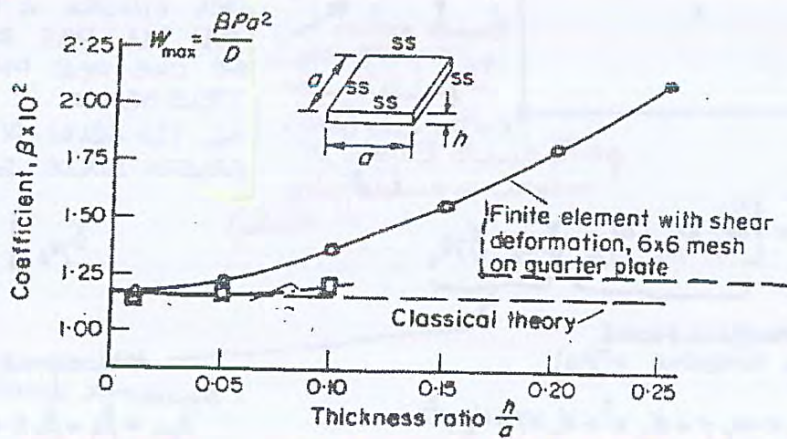
2: man mano che si mi avvicina da Mindlin, a Kirchhoff si riesce a risolvere bene la soluzione: non ho nessun problema di shear locking.



Vediamo cosa succede man mano che diminuisce lo spessore della piastra:

soluzione esatta teorica ottenuta tramite sviluppi in serie.

**CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO**



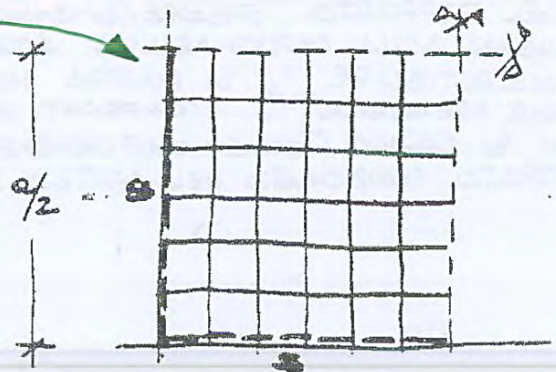
nella realtà l'elemento di mesh è un elemento per piastra sottile (alla Kirchhoff)

□ (SHIT)

per piastra spessa non è in grado di rappresentare nulla (non è in grado di def. a taglio). rappresentare la

**CARICO CONCENTRATO IN MEZZERIA**

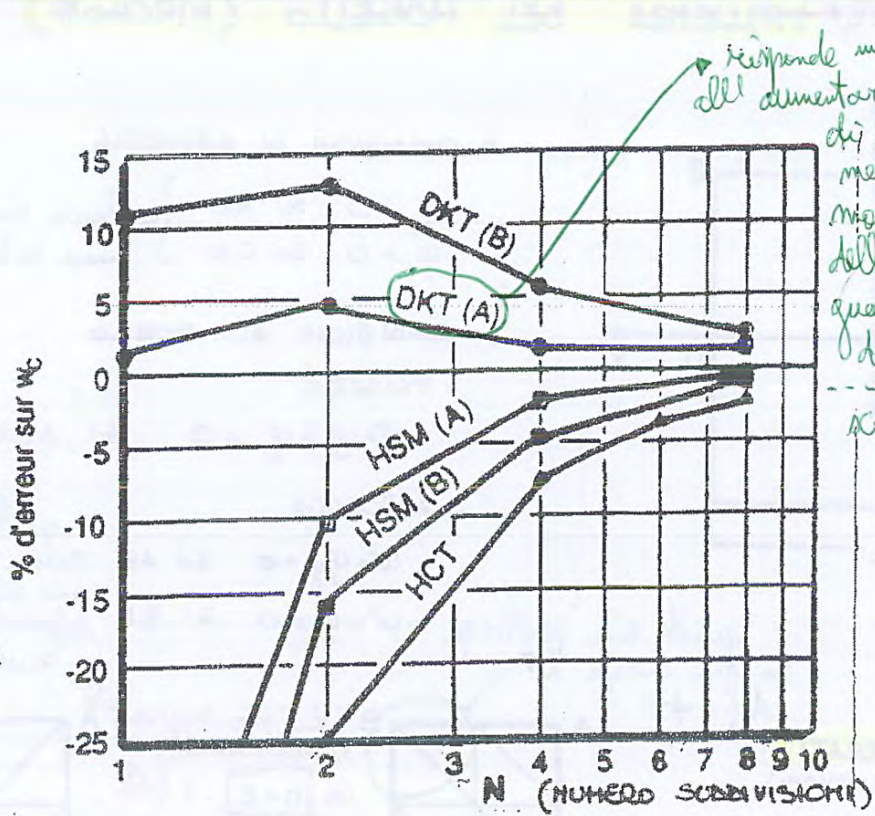
SS = LATO SEMPLICEMENTE APOGGIATO



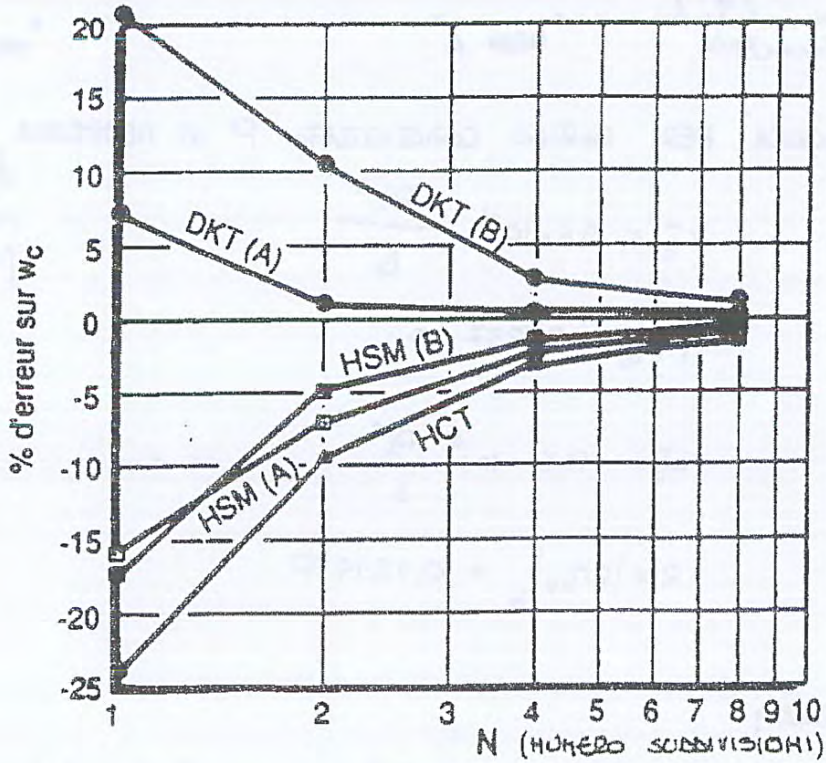
MESH UTILIZZATA (mesh 6x6 come discretizzazione)



7% ERRORE SULLA DEFORMATA NASO C



PIASTRA INCISTRATA



PIASTRA APPOGGIATA

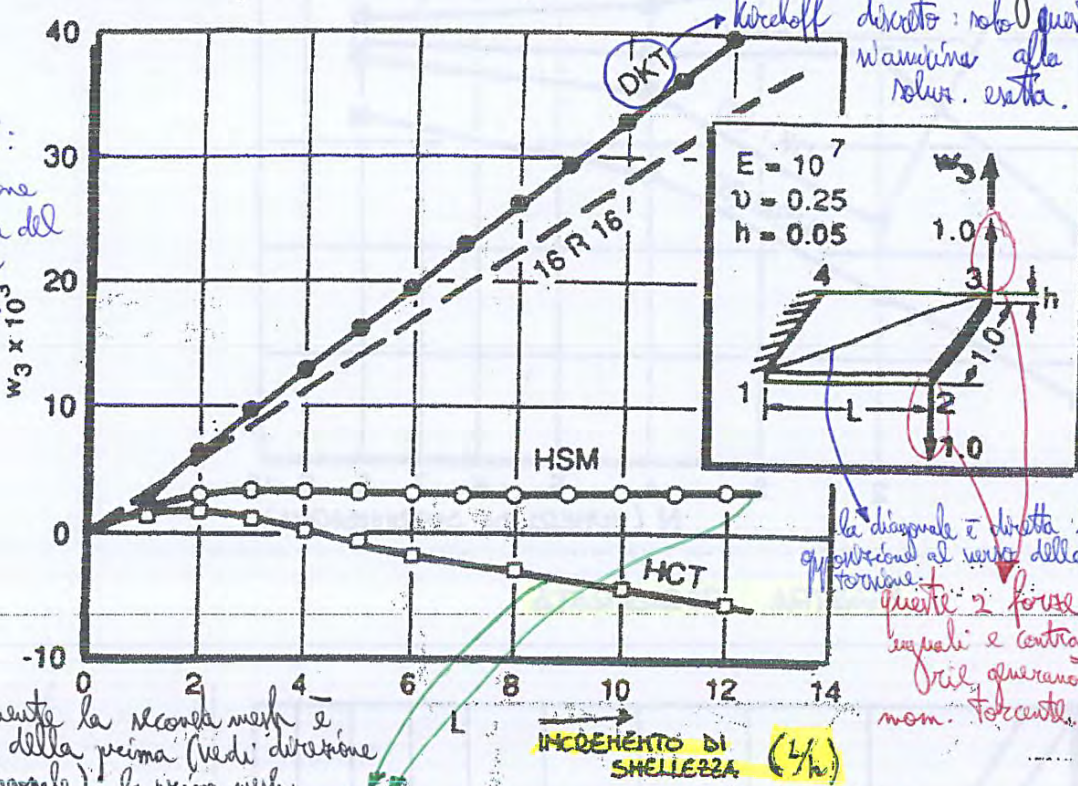


LEZ. 31-03-2014

**INFLUENZA DEL MODELLO  
(TEST FLESSIONE / TORSIONE)**

Problemi di flessione-torsione affrontati con elementi triangolari;

16 R/16:  
soluzione  
ovetta del  
motivo  
problema.



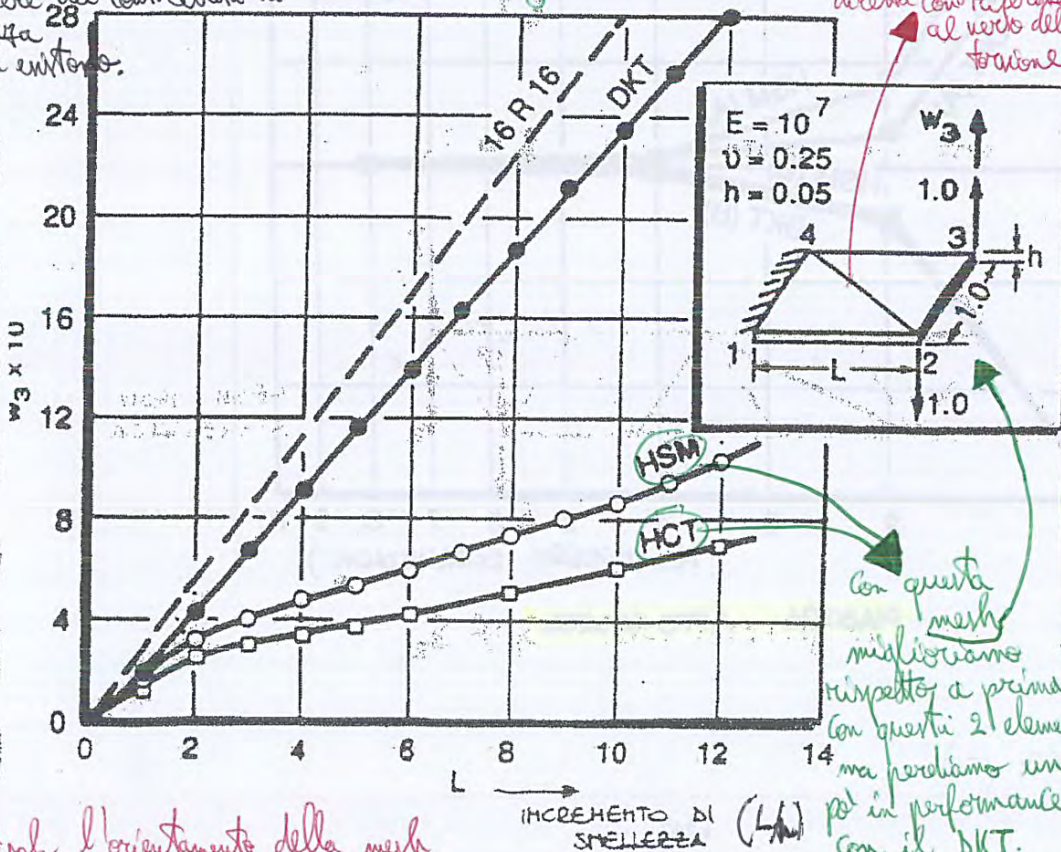
ricreando la seconda mesh e  
influenza della prima (vedi direzione  
della diagonale): la prima mesh,  
specialmente nei certi elementi,  
a nascono dei centri d'rotazione di  
rigidità  
che non esistono.

soluzioni "degenerate"

la diagonale è diretta in  
quadrante 2: forze  
uguali e centra-  
le nel generano  
mom. torcenti.

TEST COMPLETO  
SU SOLO DUE  
ELEMENTI  
TRIANGOLARI.  
PIASTRA SOTTILE  
DI LUNGHEZZA  
L VARIABILE  
INCASTRATA AD  
UNA ESTREMITA'  
E SOTTOPOSTA  
ALL'ALTRA ESTRE-  
MITA' A DUE  
FORZE CONGENE-  
TE IN UNO E  
OPPOSITE SE-  
CONDE E ED  
A DUE MOMENTI  
TORCENTI AL X.

LA SOLUZIONE  
DI CONFRONTO  
(16 R/16) E'  
CITUHITA MISCE-  
TIZZANDO LA  
PIASTRA CON  
16 ELEMENTI  
TRIANGOLARI  
(SCHMIDT USI  
IN PRECEDENZA)



SI OSSERVA CHE  
 $w_2 \neq w_3$  E CHE  
PER GLI ELEME-  
NTI HSM, HCT LA  
SOLUZIONE DEVE  
ESSERE RAPIDAME-  
NTE CON LA  
SCELTA DELLA  
SCELTA.

PER L'ELEMENTO  
"DKT" IL VALORE  
MEDIO  $(w_2 + w_3)/2$   
COINCIDE PRA-  
TICAMENTE CON  
I RISULTATI DI  
RIFERIMENTO

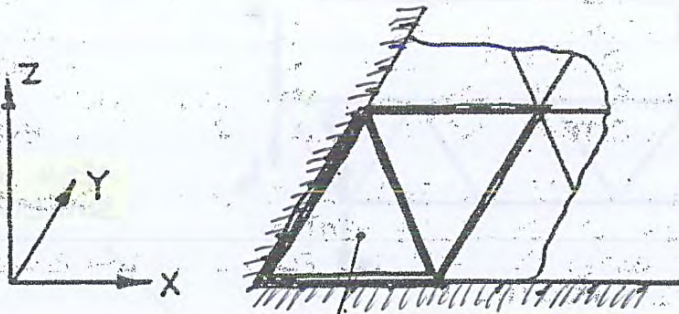
con questa  
mesh  
miglioriamo  
rispetto a prima  
con questi 2 elementi,  
ma perdiamo un  
po' in performance  
con il DKT.

perché ho  
dimmensità di  
mesh

SS:  
1) già solo l'orientamento della mesh  
provoca differenze notevoli,  
2) la simmetria di mesh provoca errori.



## INFLUENZA DEL MODELLO SUI RISULTATI

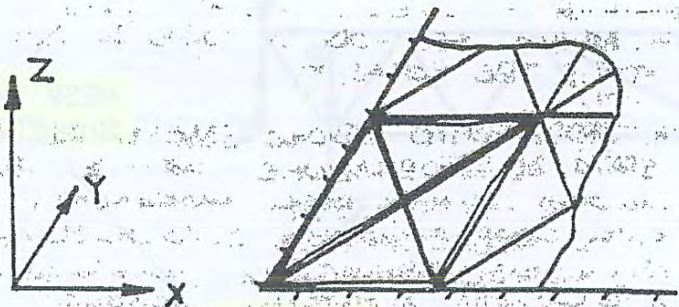


ELEMENTO A RISPOSTA NULLA (se lo inc. - inc.)

(a) Model of <sup>bloccata</sup> clamped plate. Corner triangular element shows zero response



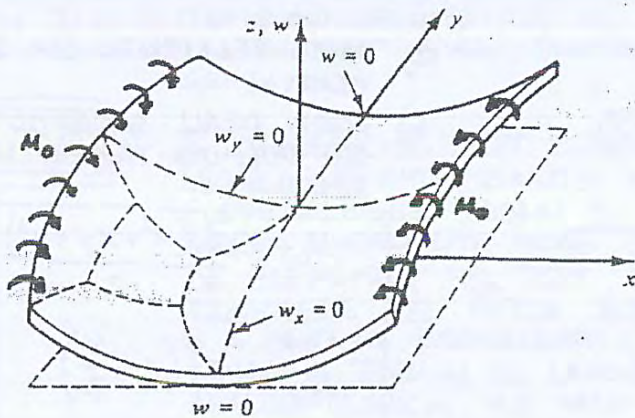
(b) Model of clamped plate. Corner region shows non-zero response



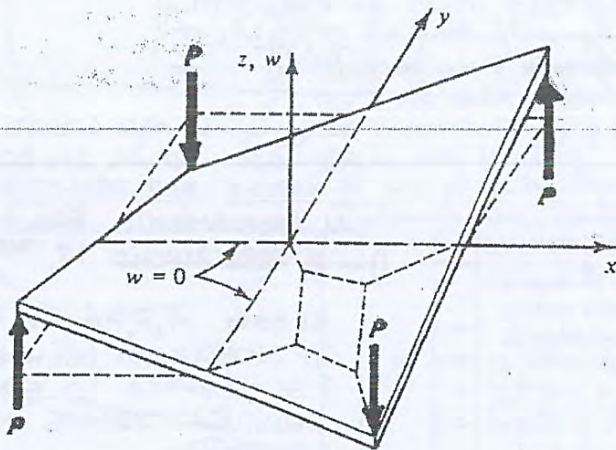
MESH ISOTROPA per  
rispettare esattamente  
le condiz. di simmetria

(c) Spatially isotropic mesh for analysis of clamped plate





(A) PATCH TEST PER CURVATURA COSTANTE



(B) PATCH TEST PER TORSIONE COSTANTE

RICORDANDO CHE

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = \dots \quad M_{xy} = \dots$$

TENUTO CONTO DELLE CONDIZIONI (\*) DI PAGINA PRECEDENTE, SI RICAVA

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{12\nu M_0}{E t^3} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

B) PER IL TEST DI TORSIONE COSTANTE CONSIDERATA LA DOPPIA ASIMMETRIA RISPETTO AGLI ASSI X E Y IL CENTRO E I PUNTI POSTI SUGLI ASSI DI SIMMETRIA NON SUBISCONO ABBASSAMENTI (VED. FIG. B). SI DIMOSTRA CHE LA CONDIZIONE DI CARICO COMPOSTA DA QUATTRO FORZE CONCENTRATE APPLICATE COME RIPORTATO IN FIGURA NEI QUATTRO VERTICI DELLA PIASTRA



Node Number	Lateral Nodal Loads ( $10^{-7}$ lb)	Nodal Moment, $M_x$ ( $10^{-8}$ in.-lb)	Nodal Moment, $M_y$ ( $10^{-8}$ in.-lb)
1	0.666666	-0.333333	-0.222222
2	"	-0.555555	b
3	"	-0.333333	b
4	-0.666666	-0.111111	0.222222
5	"	b	-0.666666
6	"	b	b
7	"	b	b
8	"	b	b
9	"	b	0.666666
10	"	b	-1.111111
11	"	b	b
12	"	b	b
13	-0.666666	0.333333	1.111111
14	"	0.555555	-0.666666
15	"	0.333333	b
16	0.666666	0.111111	0.666666

" <  $10^{-11}$  lb.

b <  $10^{-13}$  in.-lb.

### RESULTATI PATCH TEST A SPOSTAMENTO IMPOSTO

#### 2) CARICHI IMPOSTI

- MOMENTI UNIFORMI APPLICATI AI DUE LATI OPPOSTI ( $M_x = 0.00001$  in.-lb/in.) CON CONDIZIONI AL CONTOURNO DEL PATCH COME DESCRITTE IN FIGURA (A) PRECEDENTE. LO STATO DI CURVATURA COSTANTE VALE:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{12 M_x}{Et^3} = 1.2 \left( \frac{1}{in} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -0.3 \left( \frac{1}{in} \right) \end{aligned} \right\} (*)$$

IN QUESTO CASO, IMPOSTI I CARICHI, SI CALCOLANO  $w$  E  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$  E SI CONFRONTANO CON I VALORI OTTENUTI INTEGRANDO LE (\*\*)

- QUATTRO FORZE APPLICATE AI VERTICI ( $P = 10^{-6}$  lb) - TALI FORZE PRODUCONO UNA TORSIONE COSTANTE

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{6P(1+\nu)}{Et^3} = 0.0075 \left( \frac{1}{in} \right)$$

INTEGRANDO LA QUALE, SI RICAVALA

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0.0075 y \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.0075 x \quad w = 0.0075 xy \quad (**)$$

IL TEST E' SUPERATO SE GLI SPOSTAMENTI E LE DERIVATE SONO CONFRONTABILI CON (\*\*)

- IN OGNI CASO, NOTI GLI SPOSTAMENTI MODALI  $[E]$ , SI CALCOLA IL VETTORE  $[E]$  E SI CONFRONTA CON LE CURVATURE TEORICHE.



VEDERE SE SI HA VOGLIA (poi pag. 289)  
**PROGRAMMA PER IL CALCOLO DELLE PIATTE:**

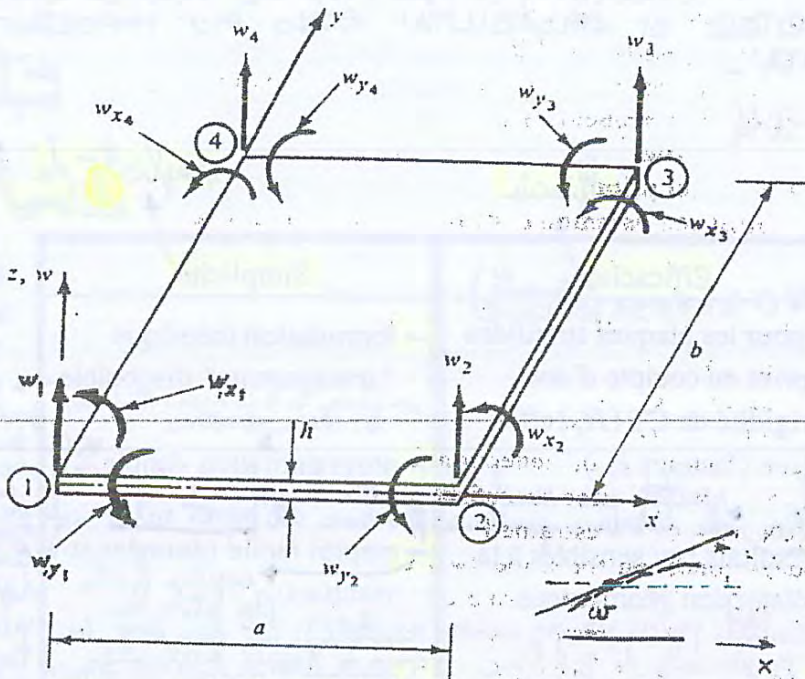
**BFS 16**

**ELEMENTO RETTANGOLARE A 4 NOBI (ELEM. CONFORME)**

ELEMENTO CON QUATTRO GRADI DI LIBERTA' PER NOBO

16 g.d.l.  
 $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

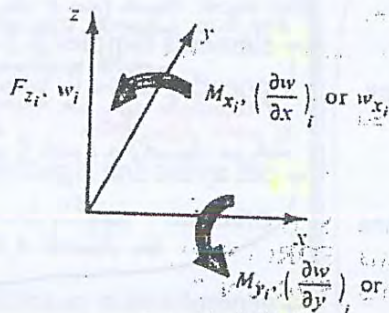
I CUI VERSI POSITIVI SONO RIPORTATI NELLA FIGURA A FIANCO.



PER QUANTO CONCERNE I CARICHI E' POSSIBILE FORNIRE CARICHI LOCALI CONCENTRATI O CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO SUL SINGOLO ELEMENTO.

LA MATRICE DI RIGIDITA' E' ASSEMBLATA NELLA FORMA A BANDE; IL SISTEMA VIENE RISOLTO UTILIZZANDO IL METODO DI GAUSS RICHIAMANDO UNA SUBROUTINE DELLA LIBRERIA MATEMATICA IHSL: "LBR16B" (L'ALIEVO SOSTITUISCA LA CHIAMATA ALLA LBR16B CON UNA CHIAMATA AD UNA PROCEDURA PRECEDENTEMENTE ANALIZZATA).

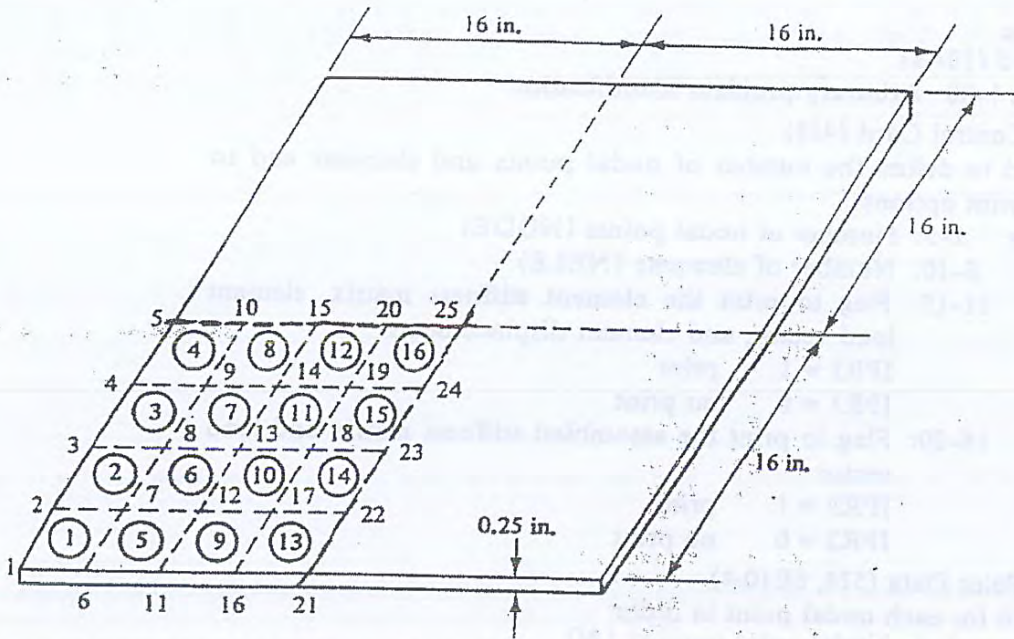
IL PROGRAMMA RISULTA DIMENSIONATO PER POTER RISOLVERE PROBLEMI FINO A 200 ELEMENTI, 200 NOBI E 100 GRADI DI LIBERTA'.



OSS: - IL PROGRAMMA NON E' STRUTTURATO IN SUBROUTINE (COME PER I PRECEDENTI) - VIENE LASCIATO ALL'ALIEVO IL COMPITO DI ORGANIZZARE A SUBROUTINE IL CONCETTO, MODIFICANDO EVENTUALMENTE LA TECNICA DI DEFINIZIONE DELLE VARIABILI (INMIEGO DI ISTRUZIONI COMMON, ECC...) -  
 - COME GIU' DETTO IN PRECEDENZA E' COMPITO DELL'ALIEVO SOSTITUIRE LA SUBROUTINE DI LIBRERIA LBR16B CON UNA DELLE SUBROUTINE VISTE IN PRECEDENZA DEDICATE ALLA SOLUZIONE DI SISTEMI A BANDE MEDIANTE IL METODO DI GAUSS.



# - ESEMPIO TEST



PIASTRA QUADRATA SEMPLICEMENTE APPOGGIATA SOTTOGGETTA AD UN CARICO UNIFORME EREMENTE DISTEBUITO  $p_0$

$$E = 10^7 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.3$$

$$p_0 = 0.4 \text{ psi}$$

A SEGUITO DELLA DOPPIA SIMMETRIA SOLO UN QUADRANTE VELE DISCRETIZZATO

## • SOLUZIONE TEORICA

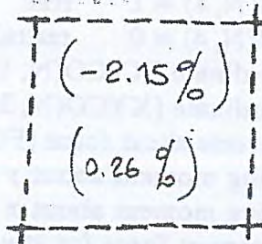
$$w_{\text{MAX}} = 0.00406 \frac{p_0 l^4}{D} = 0.119 \text{ in}$$

$$M_{x(\text{MAX})} = M_{y(\text{MAX})} = 0.0479 p_0 l^2 = 19.62 \frac{\text{in-lb}}{\text{in}}$$

## • SOLUZIONE FEM

$$w^{\text{FEM}} = 0.1164 \text{ in}$$

$$M_x^{\text{FEM}} = 19.67 \frac{\text{in-lb}}{\text{in}}$$



↑ % DI ERRORE



# PROGRAMMA

```

PROGRAM MAIN
C
C
C *****
C * PROGRAM FOR STATIC ANALYSIS OF PLATES BY 16 D.O.F *
C * RECTANGULAR FINITE ELEMENTS *
C *****
C DIMENSION TITLE(10),S(16,16),JCON(6),ITAB(16),DISN(4)
C I,EDIS(16),EFOR(16),ELOD(16)
C DIMENSION IBOU(200,4),XYCO(200,2),FORC(200,4),ICOR(200,4)
C DIMENSION NODN(200,4),THKN(200),ELAS(200),POIS(200),UDIS(200)
C DIMENSION SYTF(100,100),SLOD(100,1)
C
C FORMULATION OF ELEMENT STIFFNESS MATRIX
C
C   REWIND 1
C
C   READING AND WRITING OF INPUT DATA
C
C   WRITE(6,1)
C   1 FORMAT(1H1)
C   READ(5,2)(TITLE(I),I=1,10)
C   2 FORMAT(10A8)
C   WRITE(6,2)(TITLE(I),I=1,10)
C   READ(5,11)NODE,NELE,IPR1,IPR2
C   11 FORMAT(4I5)
C   WRITE(6,12)NODE
C   12 FORMAT(/5X,16HNUMBER OF NODES=,I5)
C   WRITE(6,13)NELE
C   13 FORMAT(/5X,19HNUMBER OF ELEMENTS=,I5)
C   IF(IPR1.EQ.1)WRITE(6,14)
C   14 FORMAT(/5X,30HELEMENT STIFFNESS MATRICES ARE PRINTED)
C   IF(IPR2.EQ.1)WRITE(6,16)
C   16 FORMAT(/5X,51HGLOBAL STIFFNESS MATRIX AND LOAD VECTOR ARE PRINTED)
C
C   READING AND WRITING OF NODAL DATA
C
C   WRITE(6,21)
C   21 FORMAT(/5X,10HNODAL DATA)
C   WRITE(6,22)
C   22 FORMAT(/5X,4HNODE,10X,19HBOUNDARY CONDITIONS,15X,11HCOORDINATES,
C   135X,6HFORCES)
C   WRITE(6,23)
C   23 FORMAT(19X,1H1,4X,1H2,4X,1H3,4X,1H4,20X,1HX,10X,1HY,20X,4HVERT,5X
C   1,5HX-MOM,5X5HY-MOM,5X,5HTWIST)
C   DO 30 I=1,NODE
C   READ(5,31)N,(IBOU(I,J),J=1,4),(XYCO(I,J),J=1,2),(FORC(I,J),J=1,4)
C   WRITE(6,32)N,(IBOU(I,J),J=1,4),(XYCO(I,J),J=1,2),(FORC(I,J),J=1,4)
C   30 CONTINUE
C   31 FORMAT(5I4,6E10,4)
C   32 FORMAT(/5X,1I5,5X,4I5,10X,2E12,4,10X,4E12,4)
C
C   READING AND WRITING OF ELEMENT DATA
C
C   WRITE(6,41)
C   41 FORMAT(/5X,12HELEMENT DATA)
C   WRITE(6,42)
C   42 FORMAT(/5X,7HELEMENT,10X,12HNODAL NUMBER,10X,9HTHICKNESS,
C   1 10X,10HMODULUS OF,10X,8HPOISSONS,10X,11HDISTRIBUTED)
C   WRITE(6,43)
C   43 FORMAT(5X,6HNUMBER,9X,16H1 2 3 4,
C   127X,10HELASTICITY,10X,5HRATIO,13X,4HLOAD)
C   DO 50 I=1,NELE
C   READ(5,51)N,(NODN(I,J),J=1,4),THKN(I),ELAS(I),POIS(I),UDIS(I)
C   50 WRITE(6,52)N,(NODN(I,J),J=1,4),THKN(I),ELAS(I),POIS(I),UDIS(I)
C   51 FORMAT(5I4,4E10,4)
C   52 FORMAT(/5X,1I5,5X,4I5,4X,1E12,4,9X,1E12,4,5X,1E12,4,5X,E12,4)
C
C   GENERATION OF NUMBERS FOR ASSEMBLING STIFFNESS MATRIX
C
C   ICON=0
C   DO 60 I=1,NODE
C   DO 60 J=1,4
C   ICOR(I,J)=0
C   K=IBOU(I,J)
C   IF(K.EQ.0) GO TO 60
C   ICON=ICON+1
C   ICOR(I,J)=ICON
C   60 CONTINUE

```

FASE DI LETTURA/SCRITTURA DATI  
 DI INPUT



$C74=C1*B*7./4\theta.$   
 $C34=C1*B*3./4\theta.$   
 $C32=\theta.5*C3/B$   
 $C42=\theta.5*C4/B$   
 $C75=7.*A*C5/4\theta.$   
 $C35=3.*A*C5/4\theta.$   
 $C72=\theta.5*C7/A$   
 $C82=\theta.5*C8/A$   
 $C724=7.*C1*A*B/24\theta.$   
 $C324=C1*A*B/8\theta.$   
 $C72=\theta.35*C2*B/A$   
 $C32=.15*C2*BA$   
 $C121=AB*(C3+C4)/12.$   
 $C54=C5*A*A/4\theta.$   
 $C56=C5*A*A/6\theta.$   
 $C72=C7/2.$   
 $A14=C1*B*B/4\theta.$   
 $A16=C1*B*B/6\theta.$   
 $A32=C3/2.$   
 $A7=7.*C5*A*B/24\theta.-7.*C6*AB/2\theta.$   
 $A3=3.*C5*A*B/24\theta.-3.*C6*AB/2\theta.$   
 $A12=8A*(C7+C8)/12.$   
 $A2=C1*A*B*B/24\theta.-C2*B*BA/2\theta.$   
 $A3=C1*A*B*B/36\theta.-C2*B*BA/3\theta.$   
 $A12=C3*A/12.$   
 $A3=C5*A*A*B/36\theta.-C6*A*AB/3\theta.$   
 $A2=C5*A*A*B/24\theta.-C6*A*AB/2\theta.$   
 $A12=C7*B/12.$   
 $S(1,1)=156.*C15/35.+156.*C16/35.+72.*C17/25.+169.*C9$   
 $S(2,1)=-156.*C15/35.+54.*C16/35.-72.*C17/25.+117.*C9/2.$   
 $S(2,2)=S(1,1)$   
 $S(3,1)=-54.*C15/35.-54.*C16/35.+72.*C17/25.+81.*C9/4.$   
 $S(3,2)=54.*C15/35.-156.*C16/35.-72.*C17/25.+117.*C9/2.$   
 $S(3,3)=S(1,1)$   
 $S(4,1)=S(3,2)$   
 $S(4,2)=S(3,1)$   
 $S(4,3)=S(2,1)$   
 $S(4,4)=S(1,1)$   
 $S(5,1)=78.*C15/35.+22.*C16/35.+6.*C17/25.+6.*UM*C17/5.+143.*C9/6.$   
 $S(5,2)=-78.*C15/35.+13.*C16/35.+169.*C9/12.-6.*C17/25.$   
 $S(5,3)=-27.*C15/35.-13.*C16/35.+6.*C17/25.+39.*C9/8.$   
 $S(5,4)=27.*C15/35.-22.*C16/35.-6.*C17/25.-6.*UM*C17/5.+33.*C9/4.$   
 $S(5,1)=S(5,1)*A$   
 $S(5,2)=S(5,2)*A$   
 $S(5,3)=S(5,3)*A$   
 $S(5,4)=S(5,4)*A$   
 $S(6,1)=-S(5,2)$   
 $S(6,2)=-S(5,1)$   
 $S(6,3)=-S(5,4)$   
 $S(6,4)=-S(5,3)$   
 $S(7,1)=S(6,4)$   
 $S(7,2)=S(6,3)$   
 $S(7,3)=S(6,2)$   
 $S(7,4)=S(6,1)$   
 $S(8,1)=S(5,4)$   
 $S(8,2)=S(5,3)$   
 $S(8,3)=S(5,2)$   
 $S(8,4)=S(5,1)$   
 $S(9,1)=22.*C15/35.+78.*C16/35.+6.*C17/25.+6.*UM*C17/5.+143.*C9/6.$   
 $S(9,2)=27.*C16/35.-22.*C15/35.-6.*C17/25.-6.*UM*C17/5.+33.*C9/4.$   
 $S(9,3)=-13.*C15/35.-27.*C16/35.+6.*C17/25.+39.*C9/8.$   
 $S(9,4)=13.*C15/35.-78.*C16/35.-6.*C17/25.+169.*C9/12.$   
 $S(9,1)=S(9,1)*B$   
 $S(9,2)=S(9,2)*B$   
 $S(9,3)=S(9,3)*B$   
 $S(9,4)=S(9,4)*B$   
 $S(10,1)=S(9,2)$   
 $S(10,2)=S(9,1)$   
 $S(10,3)=S(9,4)$   
 $S(10,4)=S(9,3)$   
 $S(11,1)=-S(10,4)$   
 $S(11,2)=-S(10,3)$   
 $S(11,3)=-S(10,2)$   
 $S(11,4)=-S(10,1)$   
 $S(12,1)=S(11,2)$   
 $S(12,2)=S(11,1)$   
 $S(12,3)=S(11,4)$   
 $S(12,4)=S(11,3)$   
 $S(13,1)=(11./35.*(C15+C16)+C17/5\theta.+UM*C17/5.+121.*C9/36.)*A*B$   
 $S(13,2)=(-11.*C15/35.+13.*C16/7\theta.-C17/5\theta.-UM*C17/1\theta.)*A*B$   
 $S(13,2)=S(13,2)+143.*C9/72.*A*B$   
 $S(13,3)=(-13.*C15/7\theta.-1.3*C16/7.+C17/5\theta.+169.*C9/144.)*A*B$



```

S(16,9)=S(13,12)
S(16,10)=S(13,11)
S(16,11)=S(13,10)
S(16,12)=S(13,9)
S(13,13)=(4./185.*(C15+C16)+8.*C17/225.+C9/9.)*A*A*B*B
S(14,13)=(C15/52.5-C16/35.-C17/112.5-C9/12.)*A*A*B*B
S(14,14)=S(13,13)
S(15,13)=(-C15/78.-C16/78.+C17/458.+C9/16.)*A*A*B*B
S(15,14)=(-C15/35.+C16/52.5-C17/112.5-C9/12.)*A*A*B*B
S(15,15)=S(13,13)
S(16,13)=S(15,14)
S(16,14)=S(15,13)
S(16,15)=S(14,13)
S(16,16)=S(13,13)
DO 300 IX=1,16
DO 300 JX=IX,16
300 S(IX,JX)=S(JX,IX)
IF(IPR1.EQ.1) WRITE(6,201)IE
201 FORMAT(/5X,13HFOR ELEMENT =,I5)
IF(IPR1.EQ.1)WRITE(6,202)((ITAB(I),I=1,16)
202 FORMAT(/5X,30HGLOBAL DEGREES OF FREEDOM OF ELEMENT =,I6I5)
IF(IPR1.EQ.1)WRITE(6,203)((S(I,J),J=1,16),I=1,16)
203 FORMAT(/5X,24HELEMENT STIFFNESS MATRIX/32(5X,8E12.4/))

```

C  
C  
C

ASSEMBLING GLOBAL STIFFNESS MATRIX

```

DO 400 I=1,16
DO 400 J=1,16
K=ITAB(I)
L=ITAB(J)
IF(K*L.EQ.0)GO TO 400
IF(K.LT.L) GO TO 400
M=NBND-K+L
IF(M.LE.0) GO TO 400
SYTF(K,M)=SYTF(K,M)+S(I,J)
400 CONTINUE
WRITE(1,401)((ITAB(I),I=1,16)
401 FORMAT(16I5)
WRITE(1,402)((S(I,J),J=1,16),I=1,16)
402 FORMAT(5E20.10)

```

ASSEMBL. MATRICE  
ELEMENTO

C  
C  
C

COMPUTATION OF CONSISTANT LOAD VECTOR

```

ELOD(1)=(A*B*UDIS(IE))/4.0
ELOD(5)=(A*A*B*UDIS(IE))/24.0
ELOD(9)=(B*B*A*UDIS(IE))/24.0
ELOD(13)=(A*A*B*B*UDIS(IE))/144.0
ELOD(2)=ELOD(1)
ELOD(3)=ELOD(1)
ELOD(4)=ELOD(1)
ELOD(6)=-ELOD(5)
ELOD(7)=-ELOD(5)
ELOD(8)=ELOD(5)
ELOD(10)=ELOD(9)
ELOD(11)=-ELOD(9)
ELOD(12)=-ELOD(9)
ELOD(14)=ELOD(13)
ELOD(15)=ELOD(13)
ELOD(16)=ELOD(13)
IF(IPR1.EQ.1)WRITE(6,403)
403 FORMAT(/5X,19HELEMENT LOAD VECTOR)
IF(IPR1.EQ.1)WRITE(6,404)(ELOD(I),I=1,16)
404 FORMAT(2(5X,8E12.4/))

```

C  
C  
C

ASSEMBLING OF THE GLOBAL LOAD VECTOR

```

DO 450 I=1,16
K=ITAB(I)
IF(K.EQ.0) GO TO 450
SLOD(K,1)=SLOD(K,1)+ELOD(I)
450 CONTINUE
500 CONTINUE
IF(IPR2.NE.1) GO TO 550
WRITE(6,501)
DO 540 I=1,NDOF
540 WRITE(6,502)I,(SYTF(I,J),J=1,NBND)
502 FORMAT(/5X,5HROW =,I5/10(5X,8E12.4/))
550 CONTINUE
501 FORMAT(/5X,30HBANDED GLOBAL STIFFNESS MATRIX)

```

ASSEMBL. CARICHI  
EQUIVALENTI

FINE





SIMPLY SUPPORTED SQUARE PLATE SUBJECTED TO UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

NUMBER OF NODES= 25

NUMBER OF ELEMENTS= 16

MODAL DATA

NODE	BOUNDARY CONDITIONS				COORDINATES	
	1	2	3	4	X	Y
1	0	1	1	0	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0	1	0	0	0.0000E+00	0.4000E+01
3	0	1	0	0	0.0000E+00	0.8000E+01
4	0	1	0	0	0.0000E+00	0.1200E+02
5	0	1	0	0	0.0000E+00	0.1600E+02
6	0	0	1	0	0.4000E+01	0.0000E+00
7	1	1	1	1	0.4000E+01	0.4000E+01
8	1	1	1	1	0.4000E+01	0.8000E+01
9	1	1	1	1	0.4000E+01	0.1200E+02
10	1	1	0	0	0.4000E+01	0.1600E+02
11	0	0	1	0	0.0000E+01	0.0000E+00
12	1	1	1	1	0.0000E+01	0.4000E+01
13	1	1	1	1	0.0000E+01	0.8000E+01
14	1	1	1	1	0.0000E+01	0.1200E+02
15	1	1	0	0	0.0000E+01	0.1600E+02
16	0	0	1	0	0.1200E+02	0.0000E+00
17	1	1	1	1	0.1200E+02	0.4000E+01
18	1	1	1	1	0.1200E+02	0.8000E+01
19	1	1	1	1	0.1200E+02	0.1200E+02

PARAMETRI  
GENERARA

CARICHI BIPERMANENTE  
APPLICATI AL NODO

NODE	FORCES			TWIST
	VERT	X-MOM	Y-MOM	
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
4	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
7	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
13	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
16	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00



NODAL DISPLACEMENTS

NODE	VERT	DISPLACEMENTS			TWIST
		X-ROT	Y-ROT		
1	0.000000E+00	-0.635746E-03	-0.635746E-03	0.000000E+00	
2	0.000000E+00	-0.515947E-02	0.000000E+00	0.000000E+00	
3	0.000000E+00	-0.802821E-02	0.000000E+00	0.000000E+00	
4	0.000000E+00	-0.111939E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	
5	0.000000E+00	-0.119987E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	
6	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.515947E-02	0.000000E+00	
7	-0.191095E-01	-0.433516E-02	-0.433516E-02	-0.722589E-03	
8	-0.337766E-01	-0.705489E-02	-0.312454E-02	-0.573694E-03	
9	-0.430388E-01	-0.100693E-01	-0.161909E-02	-0.313927E-03	
10	-0.461917E-01	-0.100203E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	
11	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.882821E-02	0.000000E+00	
12	-0.337766E-01	-0.312454E-02	-0.705489E-02	-0.573694E-03	
13	-0.609509E-01	-0.564266E-02	-0.564266E-02	-0.553129E-03	
14	-0.781403E-01	-0.731014E-02	-0.291972E-02	-0.315863E-03	
15	-0.839950E-01	-0.708165E-02	0.000000E+00	0.000000E+00	
16	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.111939E-01	0.000000E+00	
17	-0.430388E-01	-0.161909E-02	-0.100693E-01	-0.313927E-03	
18	-0.781403E-01	-0.291972E-02	-0.731014E-02	-0.315863E-03	
19	-0.100526E+00	-0.379934E-02	-0.379934E-02	-0.189744E-03	
20	-0.100175E+00	-0.410460E-02	0.000000E+00	0.000000E+00	
21	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.119987E-01	0.000000E+00	
22	-0.461917E-01	0.000000E+00	-0.100203E-01	0.000000E+00	
23	-0.839950E-01	0.000000E+00	-0.708165E-02	0.000000E+00	
24	-0.100175E+00	0.000000E+00	-0.410460E-02	0.000000E+00	
25	-0.116449E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	

ELEMENT END FORCES

FOR ELEMENT 1

NODE	VERT	FORCES			TWIST
		X-MOM	Y-MOM		
1	-0.197031E+02	-0.106667E+01	-0.106667E+01	-0.272693E+01	
6	0.199229E+02	0.128853E+02	-0.165534E+02	0.200566E+02	
7	-0.201427E+02	0.561414E+01	0.561414E+01	-0.119907E+02	
2	0.199229E+02	-0.165534E+02	0.128853E+02	0.200566E+02	



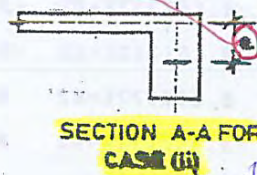
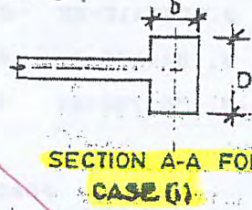
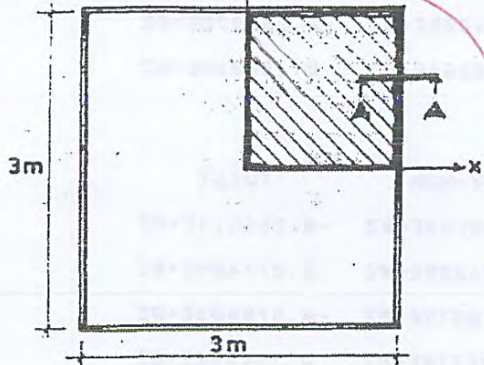
LEZ. 01-04-2014

vedi anche appunti  
LEZ. 01-04-2014

**ESEMPIO DI PIASTRE HERMATE**

A parte la mesh (possono essere elem. rett., triang., ...) concentrica  
moio M come trattare la presenza dell'eccentricita' e.

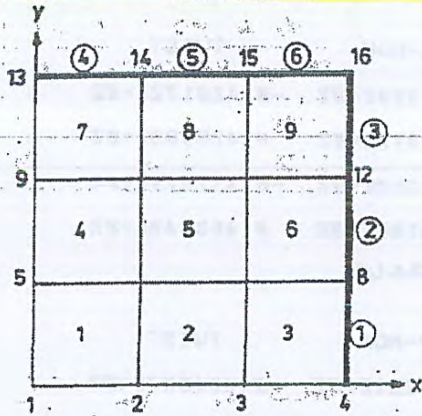
quanto vale e?



nel bordo c'è una trave  $\Rightarrow$  combinazione di un elemento piastra con un elemento trave.

con riferimenti ai nodi strutturali (che sono i nodi di PLATE)

**(a) PLATE SUPPORTED ON EDGE BEAMS**



No of PLATE 4 elements = 9  
No of BEAM elements = 6

trave ribaltata rispetto alla nostra piastra  $\Rightarrow$  usare elementi beam che hanno eccentricita' altrimenti la soluzione è quella del caso (i) (la trave viene posta con riferimento al piano medio della piastra).

MESH A

**(b) 3 x 3 MESH**



No of PLATE 4 elements = 16  
No of BEAM elements = 8

MESH B

**(c) 4 x 4 MESH**

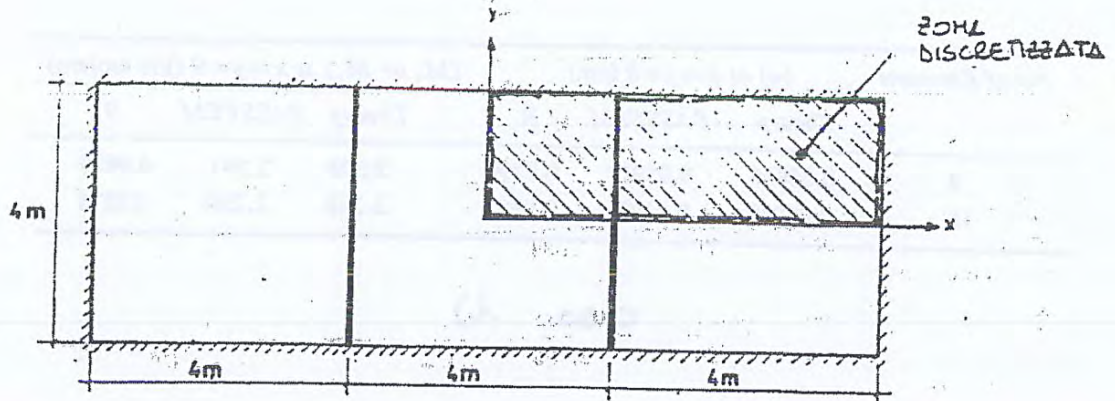
CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO  
CARATTERISTICHE CLS

$$\begin{cases} q = 5 \text{ kN/m}^2 \\ \nu = 0.25 \\ E = 2.6 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2 \end{cases}$$



NO

# PIASTRE CONTINUE

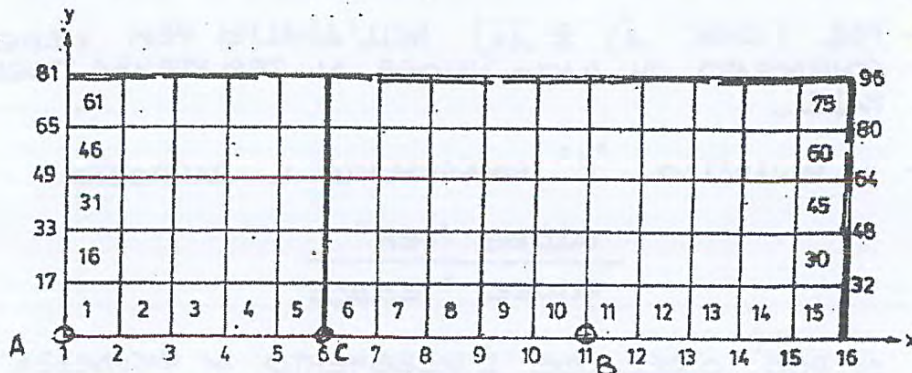


(a) THREESPAN CONTINUOUS PLATE  
(LASTRA APPOGGIATA LUNGO IL CONTORNO)



(b) MESH 1 - 48 ELEMENTS

ATTENZIONE:  
LE DUE MESH  
NON SONO TRA  
DI LORO CORRE  
LATE



(c) MESH 2 - 75 ELEMENTS

SPESORE DELLA PIASTRA 12 cm

CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO 5 kN/m<sup>2</sup>

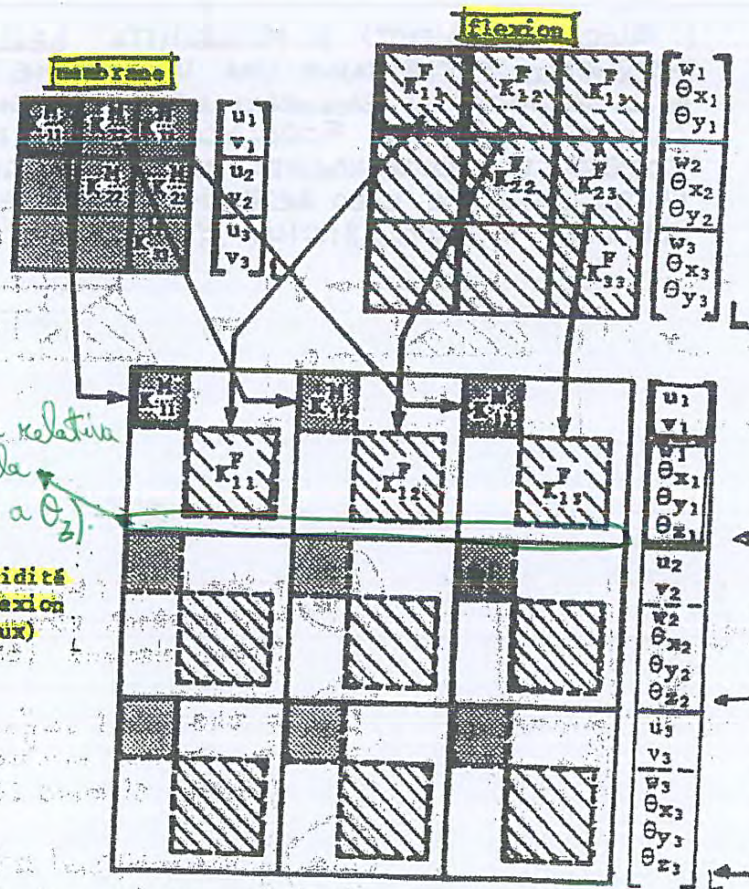
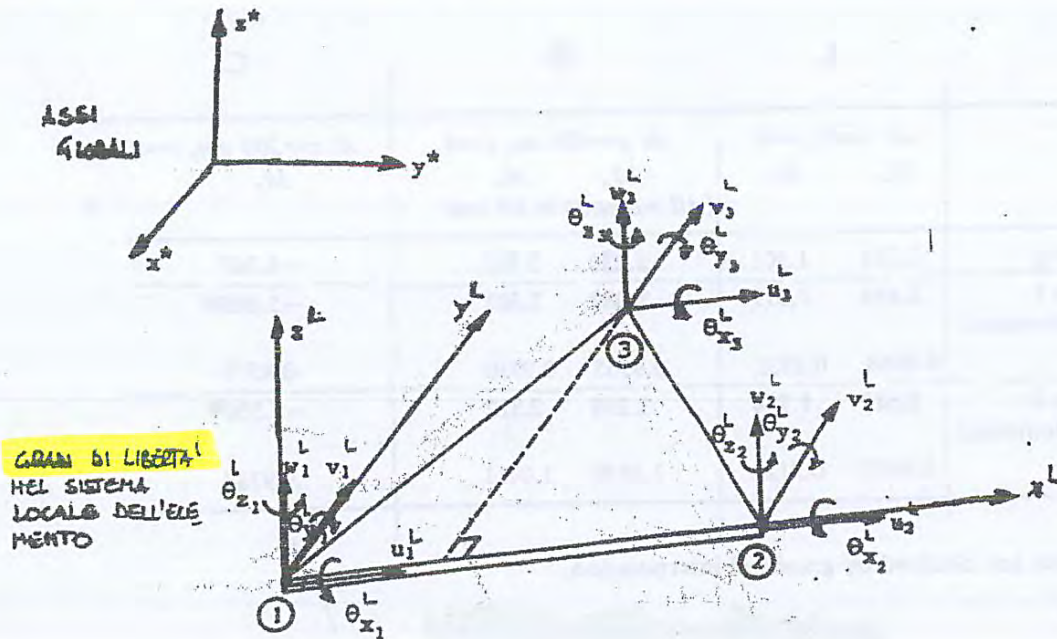
CARATTERISTICHE CLS

$\nu = 0.20$   
 $E = 2.6 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$



LEZ. 01-04-2014 (vedi anche ultima pag. appunto lez. 01-04-2014)

**20) ELEMENTO GUSCIO PIANO: ELEM. TRIANGOLARE**



questa riga è quella relativa a  $\theta_{z1}$  (nei punti dove nulla nel s.d.r. locale riguarda a  $\theta_{z1}$ )

Matrice di rigidità (membrane + flexion) en axes locaux

COEFFICIENTI MATRICE RIGIDITÀ NULLI (ROTAZIONE ATTORNO ASSI  $z^L$  NON DEFINITA)

**CONSTRUZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDITÀ DI UN ELEMENTO "GUSCIO PIANO" CON ESPERIMENTO AL SISTEMA LOCALE**

che "esplosa" nei nodi.



DEFINIZIONE DEL SISTEMA DI QUADRO LOCALI: ASSE  $x^L$  E' NELLA DIREZIONE DEL LATO 1-2, IL PIANO  $x^L o y^L$  E' IL PIANO DELL'ELEMENTO E GLI ASSI  $o y^L$  E  $o z^L$  SONO DEFINITI IN MODO TALE DA FORMARE UN TRIANGOLO DESTRO. LA MATRICE DI RIGIDezza NEL SISTEMA LOCALE ( $18 \times 18$ ) E' OTTENUTA PER ASSEMBLAGGIO DELLA MATRICE DI MEMBRANA ( $6 \times 6$ ) E DELLA MATRICE DI FLESSIONE ( $9 \times 9$ ): SI SOTTOLINEA CHE IN QUESTO MODO HANNO 3 SINGOLARITA' CORRISPONDENTI ALLA ASSENZA DI RIGIDezza RELATIVE ALLE TRE ROTAZIONI ATTORNO A  $z^L$ .

DEFINITA CON  $[T]$  LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE DA GLOBALE A LOCALE:

$$[u] = [T][\bar{u}]_g$$

LA MATRICE DI RIGIDezza NEL SISTEMA GLOBALE DIVENTA

$$[K] = [T]^T [k] [T]$$

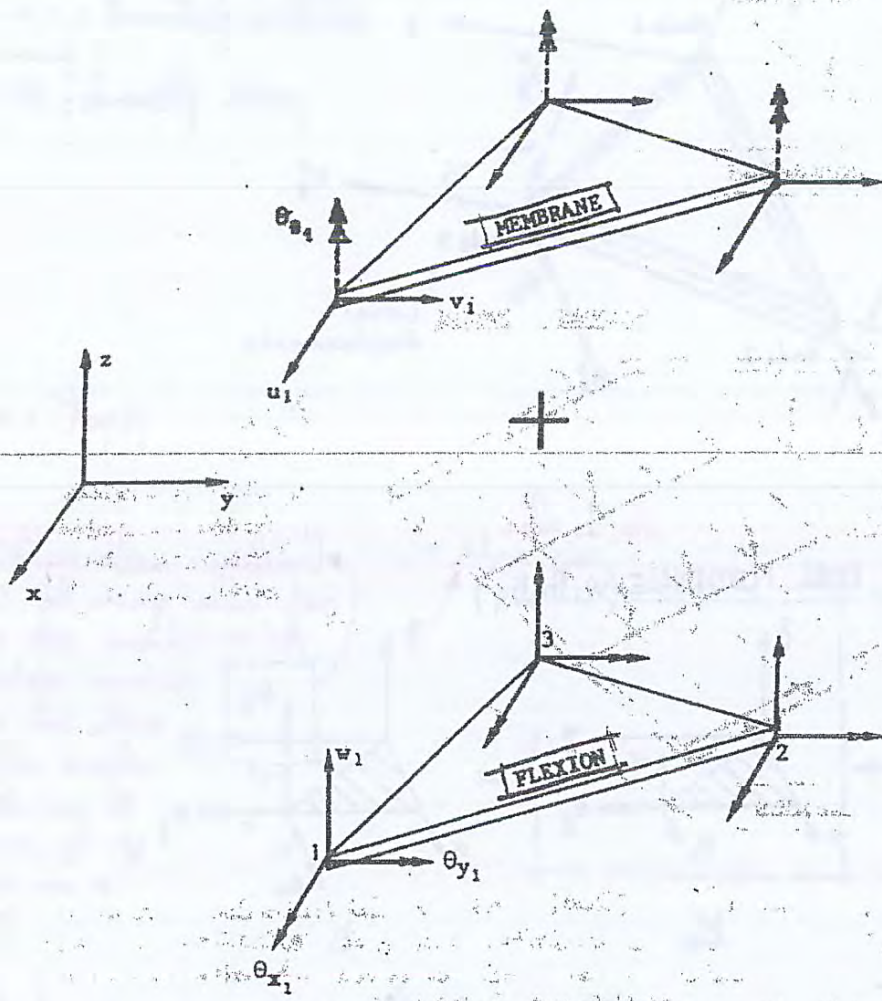
DOVE:

$$\begin{bmatrix} u_i^L \\ v_i^L \\ w_i^L \\ \theta_{x_i}^L \\ \theta_{y_i}^L \\ \theta_{z_i}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} l_{x_i} & m_{x_i} & n_{x_i} \\ l_{y_i} & m_{y_i} & n_{y_i} \\ l_{z_i} & m_{z_i} & n_{z_i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_d \\ m_d \\ n_d \end{bmatrix}$$

COSEMI DIRETTORI NELLA DIREZIONE  $d$  RISPETTO ALLA TERZA GLOBALE



**ELEMENTO NEL SISTEMA GLOBALE**

ATTENZIONE: ESISTE IL PERICOLO DI SINGOLARITA' DELLA MATRICE DI RIGIDezza DELLA STRUTTURA CAUSATA DALL'ASSENZA DI RIGIDezza ATTORNO ASSE  $z^L$  (ANALOGAMENTE NEL CASO DI MODELLI MEMBRANALI CON SOLO  $u, v, w$  COME COMPONENTI MODALI ED ELEMENTI TRA DI LORO COMPLANARI: MANCANZA DI RIGIDezza PER LO SPOSTAMENTO  $w$ )



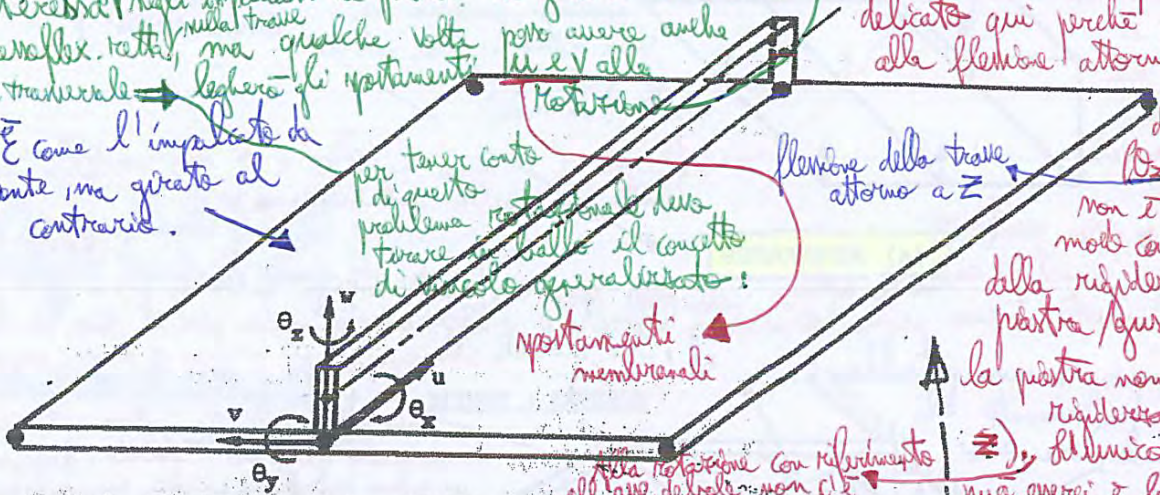
Se avessimo il quesito per il fatto noi  $\rightarrow$  lo potremmo risolvere come vedremo. Invece

DEFINENDO DEI VINCOLI GENERALIZZATI (RELAZIONI TRA SPOSTAMENTI IN TIPO LINEARE) TRA  $\theta_z^L$  E  $u^L, v^L$  [ELEMENTO MEMBRANA A 3 GRADI DI LIBERTÀ]

La flessione lungo l'asse debole della nostra trave (flessione trasversale) mi interessa negli impalcati da ponte? In genere abbiamo solo travetti, ma qualche volta possono avere anche flessione trasversale  $\rightarrow$  leggera flessione. È come l'impalcato da ponte, ma girato al contrario.

$$\theta_z^L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^L}{\partial y} - \frac{\partial v^L}{\partial x} \right)$$

Il problema  $\theta_z$  come lo risolviamo? È un problema delicato qui perché, pensando alla flessione attorno all'asse debole della trave ( $\theta_z$ )  $\rightarrow$  essa non è in nessun modo controllata dalla rigidità della piastra (giacché la piastra non ha rigidità attorno a  $\bar{z}$ ), il unico vincolo che può avere è la curvatura più o meno forte di questa trave lungo la piastra.



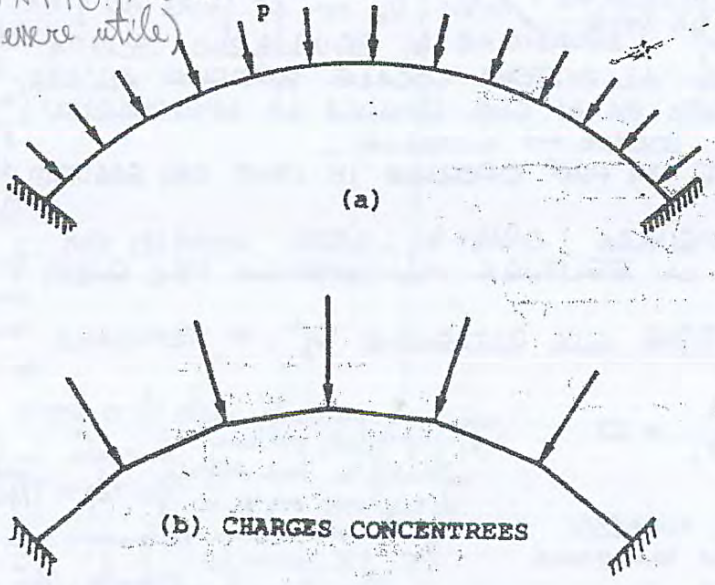
per tener conto di questo problema trasversale della trave in ballo il concetto di vincolo generalizzato: spostamenti membranali

Atta rotazione con riferimento all'asse debole non c'è nessuno vincolo.

non è in nessun modo controllata dalla rigidità della piastra (giacché la piastra non ha rigidità attorno a  $\bar{z}$ ), il unico vincolo che può avere è la curvatura più o meno forte di questa trave lungo la piastra.

ULTERIORI PROBLEMI POSSONO NASCERE DALL'UTILIZZO CONTEMPORANEO DELLO STESSO MODELLO DI ELEMENTI DIVERSI: ESEMPPIO INTERAZIONE PIASTRA/TRAVE NELLE PIASTRE MEMBRANE. IN QUESTO CASO NON È SEMPRE FACILE ASSICURARE LA COMPATIBILITÀ DEGLI SPOSTAMENTI TRA LA DEFORMATA DEL TERZO ORDINE IN  $v$  DELLA TRAVE ED IL CORRISPONDENTE SPOSTAMENTO DI MEMBRANA DELLA PIASTRA. CONTEMPORANEAMENTE OCCORRE OSSERVARE CHE NEL CASO DI ELIMINAZIONE DEL GRADO DI LIBERTÀ IN  $\theta_z^L$  DELLA PIASTRA NON ESISTE NESSUNA TRASMISSIONE DEL MOMENTO  $M_z$  NELLA TRAVE ALLA PIASTRA. È NECESSARIO IN QUESTO CASO CONSIDERARE L'ECCENTRICITÀ TRA IL BARICENTRO DELLA TRAVE E LA SUPERFICIE MEDIA DELLA PIASTRA.

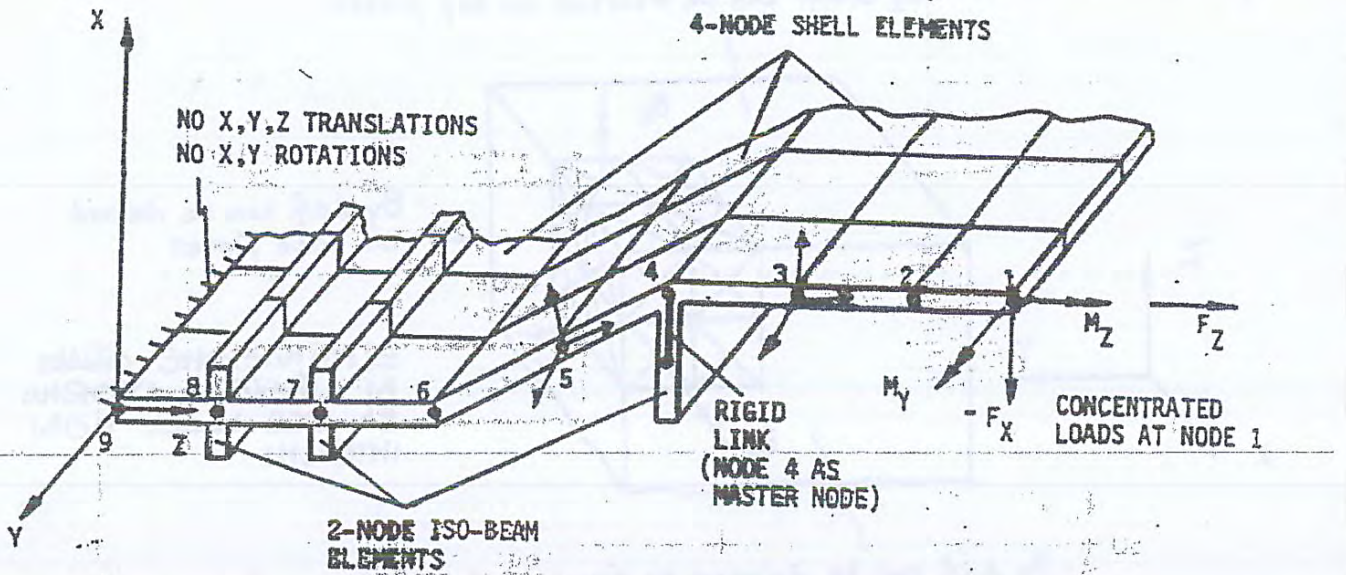
NON FATTO (ma non so se può essere utile)



LA MODELLIZZAZIONE DI GUSCI CON ELEMENTI PIANI PRESENTA DEI PROBLEMI NEL CONSIDERARE FORZE RIAPPLICATE AGENTI SULLA STRUTTURA - (PROBLEMA KIA' NOTO PER IL CASO DELL'ARCO). LA MODELLIZZAZIONE DEI CARICHI FORNISCE RISULTATI MIGLIORI QUANDO LE FORZE DISTRIBUITE VENGONO DIRETTAMENTE RIPORTATE AI NODI COME FORZE CONCENTRATE (b) E NON COME FORZE DISTRIBUITE SUGLI ELEMENTI PIANI (IN QUESTO ULTIMO CASO I CARICHI NON SONO "COERENTI" CON LA GEOMETRIA REALE).



# ESEMPIO ACCOPPIAMENTO " TRAVE - GUSCIO PIATTO "



IGL =

Node	Number of dof
1	6
2	5
3	5
4	6
5	5
6	6
7	6
8	6
9	6

ID =

Degree of freedom					
1	2	3	4	5	6
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1*
0	0	0	0	0	1*
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1*
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0

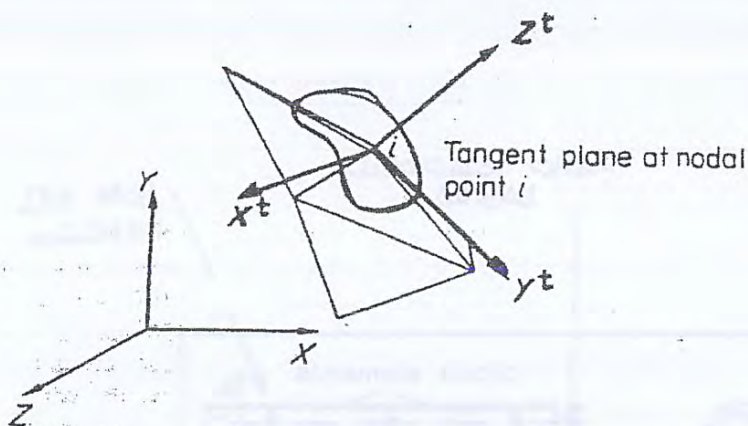


LA ROTAZIONE  
ATTORNO A 3  
VIENE ELIMINATA  
DALLA RIGIDITÀ  
FLESSIONALE DELLA TRAVE





## a) ELEMENTO TRIANGOLARE DI JOHNSON/CARR



JOHNSON HA PROPOSTO LA COMBINAZIONE DI UN ELEMENTO TRIANGOLARE A DEFORMAZIONE COSTANTE (STATO PIANO) CON UN ELEMENTO "HCT" (CUBICO IN  $w$ , LINEARE IN  $u, v$ )

LE ROTAZIONI NODALI SONO RIFERITE AL PIANO TANGENTE ALLA SUPERFICIE DEL GUSCIO - SI TRASCURA LA ROTAZIONE ATTORNO ALLA NORMALE -

IL VETTORE SPOSTAMENTI MODALI IN QUESTO CASO RISULTA:

$$[\bar{u}]_i^T = [\bar{u}^i \quad \bar{v}^i \quad \bar{w}^i \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial x^t} \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial y^t}]$$

QUESTO MODELLO VIOLA LA COMPATIBILITA' DEGLI SPOSTAMENTI TRA GLI ELEMENTI. CARR HA ESTESO LA FORMULAZIONE DI JOHNSON COMBINANDO ELEMENTI QUADRATICI (STATI PIANI) CON ELEMENTO "HCT". QUESTO ELEMENTO SODDISFA LA COMPATIBILITA' DEGLI SPOSTAMENTI TRA ELEMENTI - SONO RICHIESTI NOVE GRADI DI LIBERTA' PER OGNI VERTICE: TRE SPOSTAMENTI, TRE ROTAZIONI E TRE DEFORMAZIONI TUTTI RIFERITI AL SISTEMA LOCALE TANGENTE:

$$[\bar{u}^t]_i = [\bar{u}^t \quad \bar{v}^t \quad \bar{w}^t \quad \frac{\partial \bar{w}^t}{\partial x^t} \quad \frac{\partial \bar{w}^t}{\partial y^t} \quad \frac{\partial \bar{w}^t}{\partial z^t} \quad \epsilon_x^t \quad \epsilon_y^t \quad \gamma_{xy}^t]$$

IN ENTRAMBE I CASI SI OTTEGGONO SEI GRADI DI LIBERTA' PER NODO

$$[\bar{u}^e]_i^T = [\bar{u}^e \quad \bar{v}^e \quad \bar{w}^e \quad \frac{\partial \bar{w}^e}{\partial x^t} \quad \frac{\partial \bar{w}^e}{\partial y^t} \quad \frac{\partial \bar{w}^e}{\partial z^t}]$$

MA LA COMPATIBILITA' DEGLI SPOSTAMENTI TRA ELEMENTI RISULTA VIOLATA.

oss:

- A) OPERATIVAMENTE LE DEFORMAZIONI PRESENTANO LEGGI DI TRASFORMAZIONE DIVERSE DALLE ALTRE COMPONENTI  
 B) POSSONO ESSERE APPROSSIMATE CON DELLE APPROSSIMAZIONI IN TERMINI DI DIFFERENZE FINITE O ELIMINATE RICHIEDENDO CHE L'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE ABBA UN MINIMO RISPETTO ALLE DEFORMAZIONI MODALI

## b) OSSERVAZIONI IN MERITO AGLI ELEMENTI PIANI

- LA RAPPRESENTAZIONE DI NODI DI CORPO RIGIDO E IL SODDISFACIMENTO DELLA COMPATIBILITA' DEGLI SPOSTAMENTI LUNGO I BORDI DI ELEMENTI ADIACENTI E' ESTREMAMENTE DIFFICOLTOSA POICHE' NEI "CASI CURVI" SPOSTAMENTI NEL PIANO E SPOSTAMENTO TRASVERSALE RISULTANO "ACCOPIATI"
- UN GUSCIO GENERICO PRESENTA PROBLEMI NELLA DESCRIZIONE GEOMETRICA (CURVATURA) -



LEZ. 04-04-2014

leggere introduzione scritta negli appunti

# TECNICHE DI INTERPOLAZIONE

LA COSTRUZIONE DELLE FUNZIONI DI FORMA ATRAVVERSO LA DEFINIZIONE DI POLINOMI APPROSSIMANTI PUO' PROVOCARE DELLE DIFFICOLTA' NUMERICHE PER IL CALCOLO DELLE "COORDINATE GENERALIZZATE". E' DOHQUE SPESSE PREFERIBILE COSTRUIRE DIRETTAMENTE LE FUNZIONI INTERPOLANTI UTILIZZANDO LE **TECNICHE CLASSICHE DI INTERPOLAZIONE.**

OSSERVAZIONI

NELLA COSTRUZIONE DELLE FUNZIONI INTERPOLANTI OCCORRE CONSIDERARE, A VOLTE, LA NECESSITA' DI APPROSSIMARE NON SOLO LA FUNZIONE MA ANCHE LE DERIVATE FINO ALL'ORDINE  $n$ . SE  $n=0$  (NON SONO RICHIESTE DERIVATE) LA TECNICA "CLASSICA" E' QUELLA LEGATA ALL'UTILIZZO DEI **POLINOMI DI LAGRANGE**. SE  $n=1$  E CIOE' LA FUNZIONE E LA DERIVATA PRIMA PRESENTANO VALORI DEFINITI NEI PUNTI DI INTERPOLAZIONE (STAZIONI) LA TECNICA "CLASSICA" E' QUELLA LEGATA AI **POLINOMI DI HERMITE** (OSCILLATORY INTERPOLATION FORMULA). SE OCCORRE TRATTARE ANCHE DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE,  $n > 1$ , SI UTILIZZA LA "HYPEROSCILLATORY INTERPOLATION FORMULA".

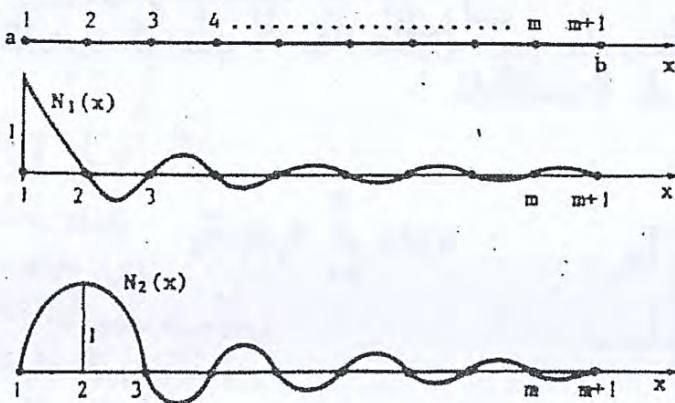
LEZ. 04-04-2014

## 1) POLINOMI DI LAGRANGE

approssimano solo la funzione (non le sue derivate)

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE  $u(x)$  DEFINITA IN  $(m+1)$  **PUNTI EQUIDISTANTI** DI UN SEGMENTO  $a-b$ . SIANO  $\bar{u}_i$  I VALORI DEFINITI DELLA FUNZIONE NEI PUNTI (NODI)

$$\bar{u}_i = u(x_i) \quad i=1, 2, \dots, m+1$$



CERCHIAMO DI INTERPOLARE LA FUNZIONE  $u(x)$  MENANTE LA

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m+1} H_i(x) \bar{u}_i = [H_i] [\bar{u}_i]$$

$[H_1(x) \ H_2(x) \ \dots \ H_{m+1}(x)]$  VETTORE RIGA DEI POLINOMI DI LAGRANGE

DOVE i polinomi di Lagrange sono così definiti:

$$N_i(x) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{m+1} (x - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{m+1} (x_i - x_j)}$$

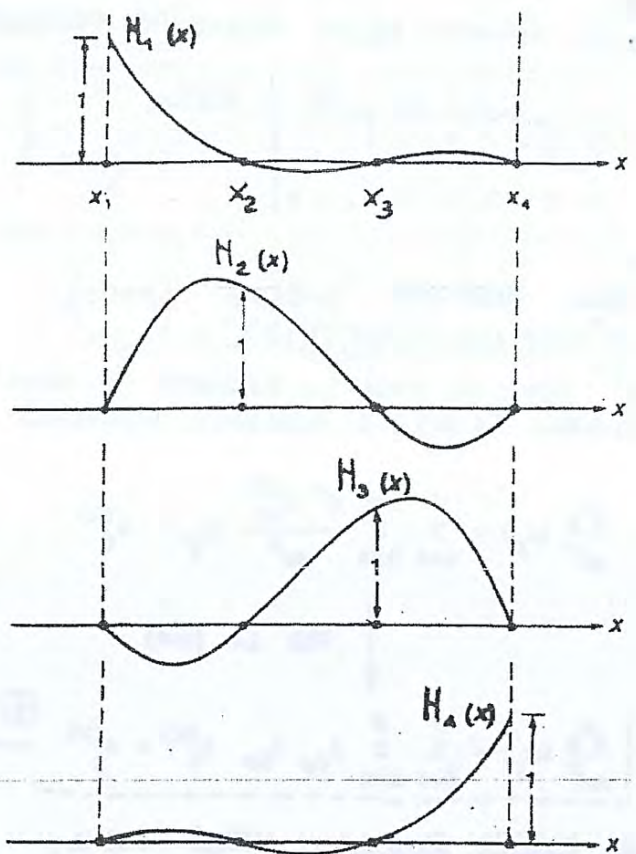
PROPRIETA' della  $N_i$ :

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}$$

delta di Kronecker  $\Rightarrow$  le  $N_i$  assumono valore 1 per il nodo  $i$  e 0 per tutti gli altri nodi.

$\bar{u}$  in rapporto tra i produttori (nell'  $N_i$  marca a num. e a dex, l'  $i$ -esimo





POTIZZANDO  $x_1 = 0$   
 $x_2 = L/3$   
 $x_3 = 2L/3$   
 $x_4 = L$

$$H_1(x) = -\frac{9}{16} \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

$$H_2(x) = \frac{27}{16} \left(\frac{x}{L} + 1\right) \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

$$H_3(x) = -\frac{27}{16} \left(\frac{x}{L} + 1\right) \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

$$H_4(x) = \frac{9}{16} \left(\frac{x}{L} + 1\right) \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{3}\right)$$

Finora non ci siamo preoccupati di studiare l'approssim. delle funz. derivate della funz. di campo. Ora, invece, lo facciamo:

**2) POLINOMI DI HERMITE**

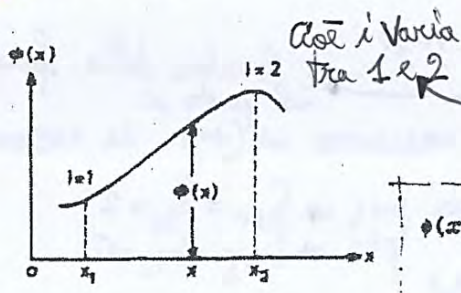
LEZ. 04-04-2014

*H: indica Hermite*

*Se N=0 → voglio studiare l'approssimazione della funz. di campo. Se N=1 → anche la sua derivata. Se N=2 → ...*

SI HANNO IL **GENERICO POLINOMIO INTERPOLATORE** CON  $H_{k,i}^{(N)}(x)$  DOVE "N" È IL NUMERO DI DERIVATE DA INTERPOLARE (GRADO DI DERIVAZIONE), "k" È UN INDICE CHE VARIA TRA 0 E N ED "i" È L'INDICE DEL PUNTO DI STAZIONE (NODO)  $x_i$ , OVE LA FUNZIONE DA INTERPOLARE  $\phi(x)$  RISULTA DEFINITA -

*→ cioè scendiamo i gradi di derivazione*



*con i varia tra 1 e 2*

PER SEMPLICITA' SI CONSIDERI IL CASO MONO-DIMENSIONALE CON SOLI DUE PUNTI DI INTERPOLAZIONE. UNA FUNZIONE  $\phi(x)$  PUO' ESSERE APPROSSIMATA TRAMITE LE FUNZIONI DI HERMITE SEGUENTI:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N H_{k,i}^{(N)}(x) \phi_i^{(k)}$$

*si dimostra essere la derivata k-esima della mia funz. di campo valutata nel punto i.*

$$= \sum_{i=1}^2 \left[ H_{0,i}^{(N)}(x) \phi_i^{(0)} + H_{1,i}^{(N)}(x) \phi_i^{(1)} + H_{2,i}^{(N)}(x) \phi_i^{(2)} + \dots + H_{N,i}^{(N)}(x) \phi_i^{(N)} \right]$$

$\phi_i^{(k)}$  = VALORE DELLA DERIVATA "k-ESIMA" NEL PUNTO "i" (DIMOSTRAZIONE: OSS. PAGINA SUCCESSIVA)

$k=0 \Rightarrow$  VALORE DELLA FUNZIONE IN  $x_i$



$$\phi(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^2 H_{ki}^{(N)} \phi_i^{(k)}$$

$N=3$

$$\sum_{i=1}^2 H_{0i} \phi_i^0 + H_{1i} \phi_i^1$$

$$\phi(x) = [N] [\bar{\phi}]$$

①  $H_{01} \phi_1^0 + H_{11} \phi_1^1 + H_{02} \phi_2^0 + H_{12} \phi_2^1$



②  $H_{0i} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$

③  $\frac{\partial^k H_{ki}}{\partial x^k}(x_i) = \begin{cases} 1 & (k=i) \\ 0 & (k \neq i) \end{cases}$

④  $H_{01}(x_1) = 1 \quad H_{01}(x_2) = 0$

$\frac{\partial H}{\partial x}(x_1) = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x_2) = 0$

⑤  $\alpha_0 = 1$   
 $\alpha_1 = 0$

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3x\alpha_4 = 0$$

$$H_{01} = \frac{1}{l^3} ( \dots )$$

$M \quad K = ak$



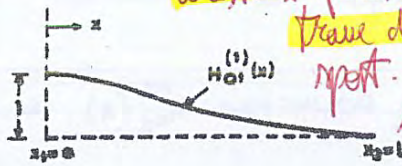


NELL'IPOTESI DI  $x_1=0$  E  $x_2=L$  SI HA

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{3}{L^2} \quad a_4 = \frac{2}{L^3}$$

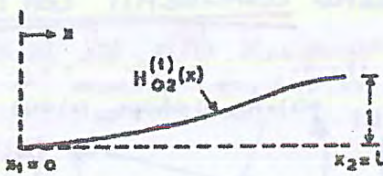
OPERANDO IN MODO ANALOGO E' POSSIBILE RICAVARE GLI ALTRI POLINOMI DI HERMITE

Queste 4 funz. sono le funz. di forma dell'elemento trave di Bernoulli. Se volete, sono le deformate per spost. e rotaz. unitari.



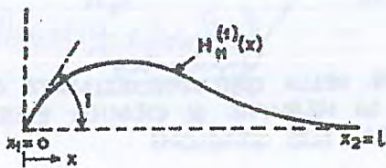
$$H_{01}^{(1)}(x) = \frac{1}{L^2} (2x^2 - 3Lx + L^2)$$

la teoria della trave di Eul-Bern e semplicemente l'approximaz. con Hermite di una funz. con continuita della

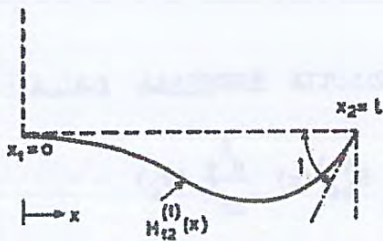


$$H_{02}^{(1)}(x) = -\frac{1}{L^2} (2x^2 - 3Lx^2)$$

derivata prima  
interpolaz.



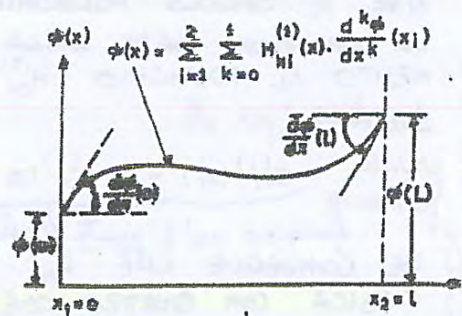
$$H_{11}^{(1)}(x) = \frac{1}{L^2} (x^2 - 2Lx^2 + L^2x)$$



$$H_{12}^{(1)}(x) = \frac{1}{L^2} (x^3 - Lx^2)$$

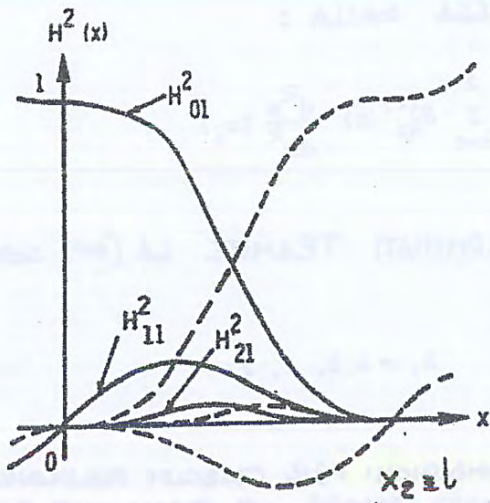
LA FUNZIONE  $\phi(x)$  RISULTA APPROSSIMATA MEDIANTE LA:

$$\phi(x) = H_{01}^{(1)}(x) \phi(0) + H_{02}^{(1)}(x) \phi(L) + H_{11}^{(1)}(x) \frac{d\phi}{dx}(0) + H_{12}^{(1)}(x) \frac{d\phi}{dx}(L)$$



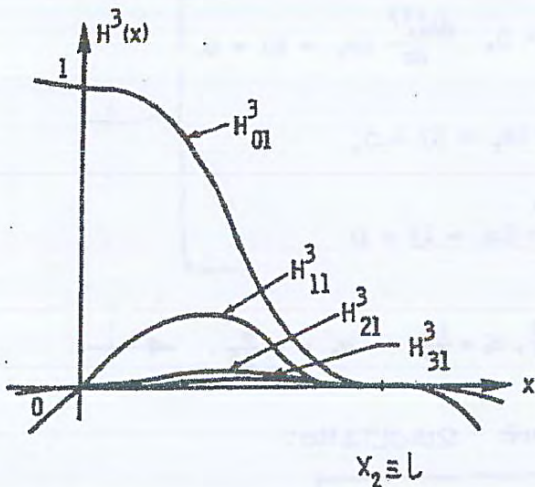
SONO LE FORME DI FORMA VISTE NELLE STAGIONI DELL'ELABORAZIONE TRAVE





ANDAMENTO DEI POLINOMI DI HERMITE NEL SECONDO ORDINE

**d) FUNZIONI DEL TERZO ORDINE (CONTINUA' FINO ALLA DERIVATA TERZA)**



$$\phi(x) = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=0}^3 H_{ki}^{(3)}(x) \bar{\phi}_i(k)$$

POLINOMIO DI HERMITE DEL TERZO ORDINE

COME GIÀ VISTO IN PRECEDENZA, TALI POLINOMI SI DETERMINANO SAPEENDO CHE:

$$\frac{d^r H_{ki}^{(n)}(x_p)}{dx^r} = \delta_{ip} \delta_{kr}$$

$$i, p = 1, 2$$

$$k, r = 0, 1, 2, 3$$



**C2) ELEMENTO CUBICO** (figlia dell'approximaz. di Hermite) (▲ DOG NODI:  $x_1, x_2$ )

IN QUESTO CASO LA COSTRUZIONE DELLA FUNZIONE APPROSSIMANTE LA  $\phi(x)$  AVVIENE UTILIZZANDO I VALORI MODALI DELLA FUNZIONE E DELLA SUA DERIVATA PRIMA:

$$\phi(x) = [H][\bar{\phi}]$$

$$[\bar{\phi}] = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ (\frac{d\phi}{dx})_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ (\frac{d\phi}{dx})_2 \end{bmatrix} \quad \text{(HERMITE)}$$

Se funz. di forma sono i 4 polinomi cubici di Hermite appena trovati. (versione relativa a Hermite)

$$[H_{01}^{(3)}(x) \quad H_{11}^{(3)}(x) \quad H_{02}^{(3)}(x) \quad H_{12}^{(3)}(x)]$$

FUNZIONI DI HERMITE DI PRIMO GRADO

oss: - TALE TECNICA DI APPROSSIMAZIONE VIENE UTILIZZATA QUANDO E' NECESSARIO SODDISFARE LA CONTINUITA' C' DELLA FUNZIONE DI CAMPO  $\phi(x)$  -

- IN ANALISI FEM L'ELEMENTO RAPPRESENTA IL PROBLEMA FLESSIONALE DELLA TRAVE:  $\Rightarrow$  COME  $\phi(x)$  SI ASSUME LA DEFORMATA  $w(x)$  DELLA TRAVE -

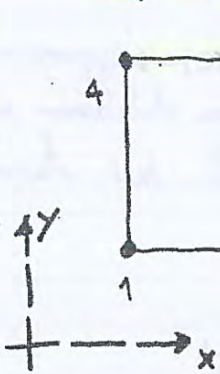
Quindi per l'el. monodimens. abbiamo trovato le funz. di forma partendo dalle funz. interpolanti

**4) ELEMENTI BIDIMENSIONALI: ELEMENTO RETANGOLARE**

LEZ. 07-04-2014

**a) UTILIZZO DEI POLINOMI DI LAGRANGE**

**a1) ELEMENTO BILINEARE: 4 nodi**



cioè lineare in x e lineare in y

LA FUNZIONE DI CAMPO APPROSSIMATA TRAMITE LA:

$$\phi(x,y) = [H][\bar{\phi}]$$

La funzione di campo è 2 di tipo (x,y)  $\Rightarrow$  lo saranno anche le funz. di forma.

$$[H_1(x,y) \quad H_2(x,y) \quad H_3(x,y) \quad H_4(x,y)]$$

$$[\bar{\phi}] = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 = \phi(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \bar{\phi}_4 = \phi(x_4, y_4) \end{bmatrix}$$

parametri nodali

queste sono le mie funz. di forma.

non calcoliamo i coeff. come nelle coord. generalizzate.

DOVE

$$N_i(x,y) = N_i(x) \cdot N_i(y)$$

(BILINEARE = PRODOTTO DI DUE FUNZIONI LINEARI)

Nella figura N1 ha che:  $x_1 = x_4$  e  $x_2 = x_3$   $\Rightarrow N_1 = N_4$  e  $N_2 = N_3$   
 $N_1(x) = \frac{x-x_3}{x_1-x_3}$  e  $N_4(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$   
 $N_2(y) = \frac{y-y_3}{y_2-y_3}$  e  $N_3(y) = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$$N_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$$

$$N_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$N_3(x) = \frac{x-x_4}{x_3-x_4}$$

$$N_4(x) = \frac{x-x_3}{x_1-x_3}$$

$$N_1(y) = \frac{y-y_4}{y_1-y_4}$$

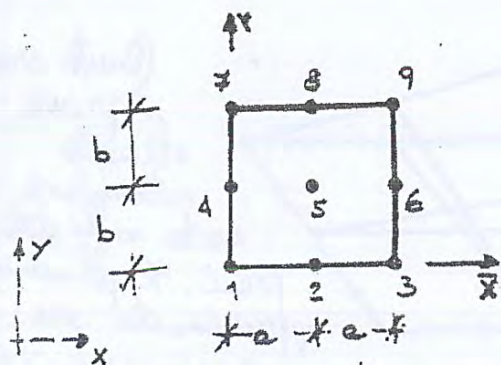
$$N_2(y) = \frac{y-y_3}{y_2-y_3}$$

$$N_3(y) = \frac{y-y_2}{y_3-y_2}$$

$$N_4(y) = \frac{y-y_1}{y_4-y_1}$$

Questa è una scrittura puramente formale, perché ad es. se faccio  $N_1(x)$  per  $N_4(y)$ , non c'è una vera e propria  $N_4(x) \cdot N_4(y) = N_4$ , ma c'è  $N_\alpha(x) \cdot N_\beta(y)$  (vedi pag. dopo in alto).





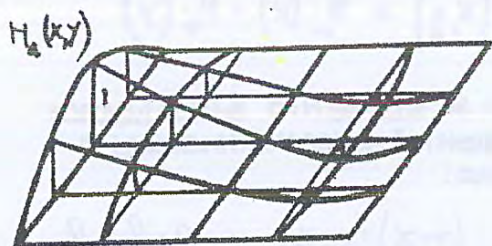
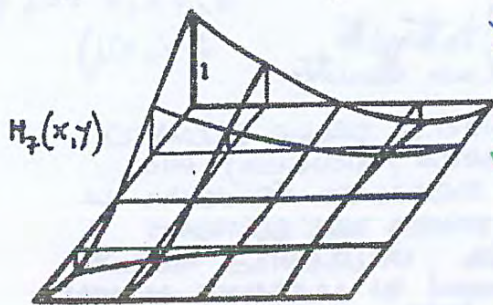
IPOTIZZANDO I NODI INTERMEDI POSTI A META' LATO, VENGOHO DI SEGUITO RIPRESENTATE A TITOLO ESEMPLIFICATIVO ALCUNE FUNZIONI DI FORMA PER L'ELEMENTO BIQUADRATICO.

$$H_7(x, y) = H_7(x) \cdot H_7(y) =$$

espressione in  
termini di coord.  
globali: 
$$= \frac{(x-x_8)(x-x_9)}{(x_7-x_8)(x_7-x_9)} \cdot \frac{(y-y_4)(y-y_1)}{(y_7-y_4)(y_7-y_1)} =$$

espressione in  
termini di coord.  
locali: 
$$= \frac{(\bar{x}-a)(\bar{x}-2a)}{2a^2} \cdot \frac{(\bar{y}-b)\bar{y}}{2b^2} =$$

$$= \left( \frac{\bar{x}^2}{2a^2} - \frac{\bar{x}}{a} + 1 \right) \left( \frac{\bar{y}^2}{2b^2} - \frac{\bar{y}}{2b} \right)$$

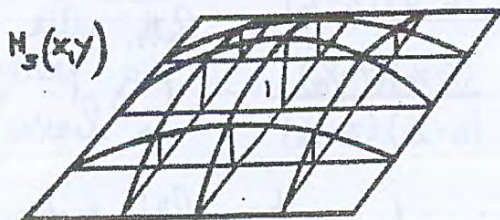


$$H_6(x, y) = H_6(x) \cdot H_6(y) =$$

$$= \frac{(x-x_8)(x-x_4)}{(x_5-x_8)(x_5-x_4)} \cdot \frac{(y-y_2)(y-y_6)}{(y_5-y_2)(y_5-y_6)} =$$

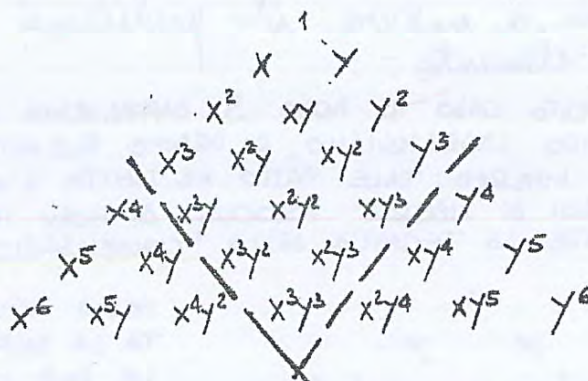
$$= \frac{\bar{x}(\bar{x}-2a)}{(-a^2)} \cdot \frac{\bar{y}(\bar{y}-2b)}{(-b^2)} =$$

$$= \left( \frac{\bar{x}^2}{a^2} - 2\frac{\bar{x}}{a} \right) \left( \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 2\frac{\bar{y}}{b} \right)$$



ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO IN PRECEDENZA, E' POSSIBILE PENSARE L'ELEMENTO BICUBICO LAGRANGIANO IN TERMINI DI COORDINATE GENERALIZZATE COME

$$\phi(x, y) = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3) \cdot (b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3)$$



BASE POLINOMIALE PER L'ELEMENTO BICUBICO



$$\phi(x, y) = [H][\bar{\phi}]$$

↑ VETTORE REALE FUNZIONI DI FORMA

$$[H] = [H_1(x, y) \quad H_2(x, y) \quad \dots \quad H_{16}(x, y)]$$

$$\left[ \begin{array}{l} N_1(x, y) = H_{01}^{(1)}(x) H_{01}^{(1)}(y) \\ N_2(x, y) = H_{11}^{(1)}(x) H_{01}^{(1)}(y) \\ N_3(x, y) = H_{01}^{(1)}(x) H_{11}^{(1)}(y) \\ N_4(x, y) = H_{11}^{(1)}(x) H_{11}^{(1)}(y) \\ N_5(x, y) = H_{02}^{(1)}(x) H_{01}^{(1)}(y) \\ \vdots \\ N_{16}(x, y) = H_{11}^{(1)}(x) H_{12}^{(1)}(y) \end{array} \right]$$



**OSS:** - L'ELEMENTO COSÌ OTTENUTO È L'ELEMENTO DIASTRA - CONFORME - DI "BOYNER-FOX-SCHMIT" VISTO IN PRECEDENZA (COORDINATE GENERALIZZATE [BFS-16])

- UN ELEMENTO CONFORME PIÙ ACCURATO DEL PRECEDENTE È L'ELEMENTO BFS-24 (SEMPRE DI BOYNER-FOX-SCHMIT) BASATO SUI POLINOMI DI HERMITE DEL SECONDO ORDINE: (dat con la derivata seconda (sempre 2 potenze di base))

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ H_{0i}^{(2)}(x) \cdot H_{0j}^{(2)}(y) \bar{\omega}_{ij} + H_{1i}^{(2)}(x) \cdot H_{0j}^{(2)}(y) \left( \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)_{ij} + \right. \\ & + H_{0i}^{(2)}(x) \cdot H_{1j}^{(2)}(y) \left( \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)_{ij} + H_{1i}^{(2)}(x) \cdot H_{1j}^{(2)}(y) \left( \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} \right)_{ij} + \\ & \left. + H_{0i}^{(2)}(x) \cdot H_{2j}^{(2)}(y) \left( \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} \right)_{ij} + H_{1i}^{(2)}(x) \cdot H_{1j}^{(2)}(y) \left( \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x \partial y} \right)_{ij} \right] \end{aligned}$$

L'ELEMENTO CONTINUA AD ESSERE RETTANGOLARE E PRESENTA SEI GRADI DI LIBERTÀ DI NONO (VERTICI RETTANGOLO)

$$\bar{\omega}_{ij} \quad \left( \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)_{ij} \quad \left( \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)_{ij} \quad \left( \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} \right)_{ij} \quad \left( \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} \right)_{ij} \quad \left( \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x \partial y} \right)_{ij}$$

PER L'ELEMENTO [BFS-16] IL TERMINE GENERICICO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA È DATO DALLA:

Non ci interessa ←

$$k_{ij} = \frac{D}{ab} \left[ \delta_{ij}^{(1)} \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \gamma_{ij}^{(2)} \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \gamma_{ij}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(4)} \right] a^{\bar{\mu}_{ij}} b^{\bar{\mu}_{ij}}$$



No

$i$	$j$	$\tilde{\gamma}_U^{(1)}$	$\tilde{\gamma}_U^{(2)}$	$\tilde{\gamma}_U^{(3)}$	$\tilde{\gamma}_U^{(4)}$	$\tilde{\gamma}_U^{(5)}$	$\tilde{\lambda}_U$	$\tilde{\mu}_U$	$\tilde{\gamma}_U^{(1)}$	$\tilde{\gamma}_U^{(2)}$	$\tilde{\gamma}_U^{(3)}$	$\tilde{\gamma}_U^{(4)}$	$\tilde{\gamma}_U^{(5)}$	$\tilde{\lambda}_U$	$\tilde{\mu}_U$
12	3	-3/70	-13/210	-1/150	-0/1	13/48	1	2	-13/105	2/35	2/75	-0/1	-13/36	2	1
12	4	-1/70	-1/70	1/450	-0/1	1/16	2	2	-78/35	-22/35	-6/25	-0/1	-143/6	1	0
12	5	-11/35	13/70	-1/50	-1/10	143/72	1	1	52/35	4/35	8/25	-0/1	13/3	2	0
12	6	-11/105	3/70	1/150	1/30	11/24	2	1	-22/35	27/35	-6/25	-6/5	33/4	0	1
12	7	2/35	-13/105	2/75	-0/1	-13/36	1	2	-11/35	13/70	-1/50	-1/10	143/72	1	1
12	8	2/105	-1/35	-2/225	-0/1	-1/12	2	2	-4/35	18/35	-8/25	-0/1	3/2	0	2
12	9	11/35	11/35	1/50	1/5	121/36	1	1	-2/35	13/105	-2/75	-0/1	13/36	1	2
12	10	-22/105	-2/35	-2/75	-2/15	-11/18	2	1	-13/35	-27/35	-2/25	-0/1	39/8	0	2
12	11	-2/35	-22/105	-2/75	-2/15	-11/18	1	2	-13/70	-13/70	1/50	-0/1	169/144	1	1
12	12	4/105	4/105	8/225	-0/1	1/9	2	2	3/35	9/35	2/25	-0/1	-9/8	0	2
13	1	-156/35	54/35	-72/25	-0/1	117/2	0	0	3/70	13/210	1/150	-0/1	-13/48	1	2
13	2	-78/35	13/35	-6/25	-0/1	169/12	1	0	13/35	-78/35	-6/25	-0/1	169/12	0	1
13	3	-22/35	27/35	-6/25	-6/5	33/4	0	15	-13/70	11/35	1/50	-0/1	143/72	1	1
13	4	-11/35	13/70	-1/50	-1/10	143/72	1	1	-3/35	26/35	-2/25	-0/1	-13/4	0	2
13	5	-54/35	-54/35	72/25	-0/1	81/4	0	0	3/70	-11/105	1/150	-0/1	11/24	1	2
13	6	-27/35	-13/35	6/25	-0/1	39/8	1	0	22/35	78/35	6/25	-0/1	143/6	0	1
13	7	13/35	27/35	-6/25	-0/1	-39/8	0	1	-11/35	-11/35	-1/50	-6/5	-121/36	1	1
13	8	13/70	13/70	-1/50	-0/1	-169/144	1	1	4/35	52/35	8/25	-0/1	13/3	0	2
13	9	54/35	-156/35	-72/25	-0/1	117/2	0	0	11/35	-13/70	1/50	1/10	-143/72	1	1
13	10	-27/35	22/35	6/25	6/5	-33/4	1	0	11/105	-3/70	-1/150	-1/30	-11/24	2	1
13	11	-13/35	78/35	6/25	-0/1	-169/12	0	1	2/35	-13/105	2/75	-0/1	-13/36	1	2
13	12	13/70	-11/35	-1/50	-1/10	143/72	1	1	2/105	-1/35	-2/225	-0/1	-1/12	2	2
13	13	156/35	156/35	72/25	-0/1	169/1	0	0	13/70	13/70	-1/50	-0/1	169/144	1	1
14	1	78/35	-13/35	6/25	-0/1	-169/12	1	0	13/210	3/70	1/150	-0/1	-13/48	2	1
14	2	26/35	-3/35	-2/25	-0/1	-13/4	2	0	-3/70	-13/210	-1/150	-0/1	13/48	1	2
14	3	11/35	-13/70	1/50	1/10	-143/72	1	1	-1/70	-1/70	-1/450	-0/1	1/16	2	2
14	4	11/105	-3/70	-1/150	-1/30	-11/24	2	1	-13/70	11/35	1/50	-0/1	-143/72	1	1
14	5	27/35	13/35	-6/25	-0/1	-39/8	1	0	13/105	-2/35	-2/75	-0/1	13/36	2	1
14	6	9/35	3/35	2/25	-0/1	9/8	2	0	3/70	-11/105	1/150	-0/1	11/24	1	2
14	7	-13/70	-13/70	1/50	-0/1	169/144	1	1	-1/35	2/105	-2/225	-0/1	-1/12	2	2
14	8	-13/210	-3/70	-1/150	-0/1	13/48	2	1	-11/35	-11/35	-1/50	-0/1	121/36	1	1
14	9	-27/35	22/35	6/25	6/5	-33/4	1	0	22/105	2/35	-1/50	-0/1	-11/18	2	1
14	10	18/35	-4/35	-8/25	-0/1	3/2	2	0	-2/35	-22/105	-2/75	-0/1	11/18	1	2
14	11	13/70	-11/35	-1/50	-1/10	143/72	1	1	-2/35	4/105	8/225	-0/1	-1/9	2	2



NON FATTO (ma forse può essere utile)

## 5) CONTINUITA' DI CLASSE $C^1$

COSTRUIRE ELEMENTI BIDIREZIONALI PER I QUALI E' RICHIESTA LA CONTINUITA' DELLA FUNZIONE DI CAMPO  $\phi(x)$  E DELLA DERIVATA NORMALE  $\partial\phi/\partial n$  LUNGO IL CONTORNO DELL'ELEMENTO RISULTA ESTREMAMENTE COLPLICATO - OCCORRE ASSICURARE CHE  $\phi$  E  $\partial\phi/\partial n$  SIANO DEFINITE IN MANIERA UNIVUCA LUNGO IL CONTORNO DELL'ELEMENTO DA GRADI DI LIBERTA' ASSEGNATI AI NODI APPARTENENTI AL TRATTO DI CONTORNO IN ESAME: IN ALTRI TERMINI LUNGO IL LATO COMPRESO TRA I NODI "i" E "j" LA  $\phi$  E LA  $\partial\phi/\partial n$  DEVONO ESSERE DEFINITE SOLO DAI PARAMETRI MODALI DEI NODI APPARTENENTI A TALE LATO.

SECONDO FELIPA-CLOUGH, TALI DIFFICOLTA' VENGONO SUPERATE SE SONO SODDISFATTI I SEGUENTI PRINCIPI:

- 1) LE FUNZIONI DI INTERPOLAZIONE DEVONO CONTENERE TERMINI CUBICI POICHE' OCCORRE SPECIFICARE PER OGNI NODO DELL'ELEMENTO TRE VALORI:  $\phi, \partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y$
- 2) PER UN ELEMENTO NON RETTANGOLARE, LA CONTINUITA'  $C^1$  RICHIEDE LA DEFINIZIONE DI ALMENO SEI VALORI MODALI NEI VERTICI

$$\phi \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

SE L'ELEMENTO E' RETTANGOLARE CON ASSI PARALLELI AGLI ASSI GLOBALI, OCCORRE DEFINIRE NEI VERTICI SOLO

$$\phi \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

IL PROBLEMA DELLA RICHIESTA DI ELEMENTI  $C^1$  E' PARTICOLARMENTE SENTITA NELLE APPLICAZIONI FEM RELATIVE ALLE PIASTRE: IN QUESTO CASO LA RICHIESTA DI CONTINUITA' TRA ELEMENTI DELLA FUNZIONE DI CAMPO E DELLA SUA DERIVATA NORMALE SONO RICHIESTE DI TIPO "FRICO" - PER CONTRO, DA UN PUNTO DI VISTA "MATEMATICO" TALE RICHIESTA, CON RIFERIMENTO AL FUNZIONALE CHE GOVERNA IL PROBLEMA DELLA PIASTRA INFLESSA, ASSICURA LA CONVERGENZA QUANDO SI RIDUCE LA DIMENSIONE DELL'ELEMENTO.

IN OGNI CASO, SPECIE NELLA SOLUZIONE DI TALI PROBLEMI, VENGONO COMUNEMENTE UTILIZZATI ELEMENTI NON DI CLASSE  $C^1$  (ELEMENTI NON CONFORMI, PER I QUALI NON E' GARANTITA LA CONTINUITA' DELLA DERIVATA NORMALE LUNGO IL CONTORNO). L'ESPERIENZA HA MOSTRATO CHE LA CONVERGENZA DEI RISULTATI SIA FORTEMENTE DIPENDENTE DALLA CONDIZIONE DI COMPLETEZZA DEL POLINOMIO INTERPOLATORE PIU' CHE DALLA CONDIZIONE DI COMPATIBILITA' (O CONFORMITA').

QUALE ELEMENTO DEVO UTILIZZARE PER RISOLVERE IL MIO PROBLEMA?

$C^1$ ?    COMPLETO?    COMPATIBILE?    INCOMPATIBILE?



LEZ. 04-04-2014

**SISTEMA RIFERIMENTO**

**"INTERNO"**

A questo punto leggere quanto scritto negli appunti  
della lez. 04-04-2014



molto chiaro questa relazione (forma chiusa) si può fare vedere che l'integraz. può essere risolta in  
 - L'INTEGRAZIONE DI TERMINI DI POLINOMI IN COORDINATE INTERNE PUO' ESSERE EFFETTUATA IN MODO SEMPLICE UTILIZZANDO LA RELAZIONE:

$$\int_{z_1}^{z_2} L_1^a L_2^b dz = \frac{a! b!}{(a+b+1)!} z^l$$

$d! = \text{FACTORIALE DI } d = d \cdot (d-1) \cdot (d-2) \cdot \dots \cdot 1$

VEDI TABELLA SEGUENTE

ho un rapporto tra dei fattoriali

Value of $\alpha$	Value of $\beta$	Value of the integral/L
0	0	1
1	0	1/2
1	1	1/6
2	0	1/3
1	2	1/12
3	0	1/4
4	0	1/5
2	2	1/30
3	1	1/20
1	4	1/30
3	2	1/60
5	0	1/6

- E' POSSIBILE PROCEDERE ALLA DETERMINAZIONE DELLE FUNZIONI DI FORMA, IN ALTERNATIVA A QUANTO SOPRA RIPORTATO, MEDIANTE IL SEGUENTE PROCEDIMENTO:
- DEFINITA LA FUNZIONE INTERPOLANTE LA FUNZIONE DI CAMPO  $\phi(x)$  TRAMITE LA

$$\phi(x) = [H][\phi]$$

- SAPENDO CHE L'INTERPOLAZIONE E' DI TIPO LINEARE
- SI GENERA LA FUNZIONE DI FORMA  $H_i$  IN TERMINI DI "COORDINATE INTERNE" MEDIANTE LA

$$N_i = a_1^{(i)} L_1 + a_2^{(i)} L_2, \quad i = 1, 2$$

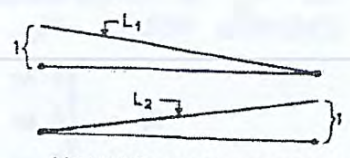
DOVE  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$  SONO DELLE COSTANTI ("COORDINATE GENERALIZZATE") INCOGNITE DA DETERMINARSI IMPOSTANDO LE SEGUENTI CONDIZIONI AL CONTORNO:

$$N_1 = \begin{cases} 1 & \text{at node 1 } (L_1 = 1, L_2 = 0) \\ 0 & \text{at node 2 } (L_1 = 0, L_2 = 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1^{(1)} = 1 \\ a_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} 0 & \text{at node 1 } (L_1 = 1, L_2 = 0) \\ 1 & \text{at node 2 } (L_1 = 0, L_2 = 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1^{(2)} = 0 \\ a_2^{(2)} = 1 \end{cases}$$

NE CONSEGUENTE

$$\begin{cases} N_1 = L_1 \\ N_2 = L_2 \end{cases}$$



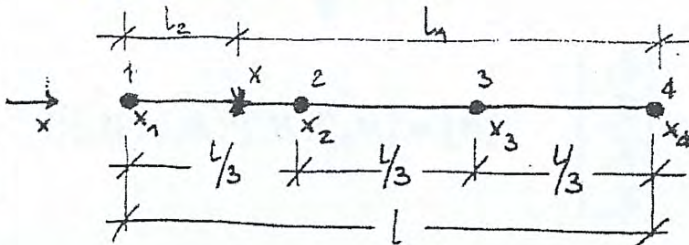
Linear interpolation functions (two nodes)



SI RICAVALA

$$H_1 = L_1 - 2L_1L_2 = L_1(2L_1 - 1)$$

03) CAMPO CUBICO



SI IPOTIZZAMO I NODI INTEGERI POSTI AD  $\frac{1}{3}$ - $\frac{2}{3}$  DELLA LUNGHEZZA DELL'ELEMENTO

$$x_2 = x_1 + \frac{(x_4 - x_1)}{3}$$

$$x_3 = x_1 + \frac{2(x_4 - x_1)}{3}$$

SUPPOSTA LA FUNZIONE DI CAMPO  $\phi(x)$  APPROSSIMATA CON

$$\phi(x) = [H][\phi]$$

SI DUO' FAR VEDERE CHE PER LE FUNZIONI DI FORMA  $H_i$  VALE LA RELAZIONE:

$$H_i = a_1^{(i)}L_1 + a_2^{(i)}L_2 + a_3^{(i)}L_1L_2 + a_4^{(i)}L_1^2L_2$$

CON  $a_j^{(i)}$  COSTANTI IMCOGNITE DA DETERMINARSI IMPOSTANDO CHE LA  $H_i$  VALGA 1 NEL NODO "i" E ZERO IN TUTTI GLI ALTRI

IN GENERALE, ALL'INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE, SI HA:

$$H_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = L_1 \left(1 - \frac{9}{2}L_1L_2\right)$$

$$H_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = -\frac{9}{2}L_1L_2(1-3L_1)$$

$$H_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = 9L_1L_2\left(1 - \frac{3}{2}L_1\right)$$

$$H_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = -\frac{9}{2}L_1L_2(1-L_1)$$

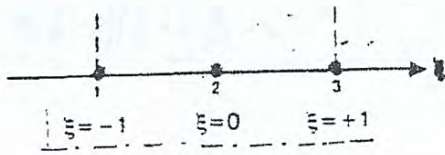
in genere

$L_1$  e  $L_2$  sono le coord. interne, ma non sono le coord. che si usano quando studiamo l'elemento finito. Quelle usate sono le **COORD. NATURALI**, cioè quelle che, dato l'estremo destr. e finestr., variano fra  $-1$  e  $+1$ .



LEZ. 04-04-2014

2.5) DA "COORDINATE INTERNE" A "COORDINATE NATURALI"



NELLO STUDIO DELLE FUNZIONI DI FORMA IN TERMINI ADIMENSIONALI RISULTA IMPORTANTE RIFERIRE QUESTE AD UN SISTEMA DI COORDINATE ADIMENSIONALI DETTO "COORDINATE NATURALI". TALE SISTEMA DOV' ESSERE VISTO COME UNA GENERALIZZAZIONE DEL

SISTEMA DI COORDINATE INTERNE: IN QUESTO CASO L'ADIMENSIONALIZZAZIONE E' TALE PER CUI LA "COORDINATA NATURALE" RISULTA COMPRESA TRA IL VALORE -1 ED IL VALORE +1. (VED. FIGURA) (\*)

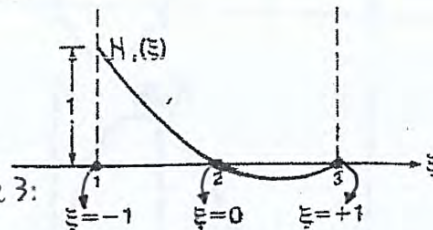
1 - CAMPO QUADRATICO (LAGRANGE)

- SI ASSUME CHE IL PUNTO 2 SIA POSTO A META' TRA 1 E 3:

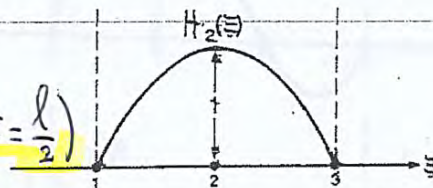
$$x_2 = x_1 + \frac{x_3 - x_1}{2}$$

⇓

$$(x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \text{cost} = a \quad (\text{cost} = \frac{l}{2})$$



$$H_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)$$

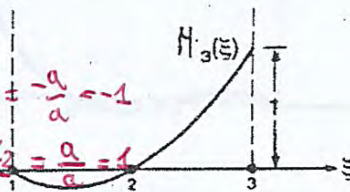


$$H_2(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi)$$

- SI DEFINISCE COORDINATA NATURALE LA QUANTITA'

$$\xi = \frac{x - x_2}{a}$$

per  $x = x_1 \Rightarrow \xi = \frac{x_1 - x_2}{a} = \frac{-a}{a} = -1$   
 per  $x = x_2 \Rightarrow \xi = 0$   
 per  $x = x_3 \Rightarrow \xi = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{a}{a} = 1$   
 (bricolage algebrico)



$$H_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1)$$

- NE CONSEGUENZA CHE LE FUNZIONI DI FORMA SONO ESPRESSE DALLE RELAZIONI:

Le funz. di forma, nella realtà, sono sempre espresse non in coord. globali ( $x_1, x_2, \dots$ ), ma in coord. naturali:

$$H_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - x_2)[x - (x_2 + a)]}{(-a)(-2a)} = \frac{x - x_2}{a} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{x - x_2}{a} - \frac{a}{a} \right] = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)$$

$$H_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{[x - (x_2 - a)][x - (x_2 + a)]}{a \cdot (-a)} = - \left[ \frac{x - x_2}{a} + \frac{a}{a} \right] \left[ \frac{x - x_2}{a} - \frac{a}{a} \right] = -(1 + \xi)(1 - \xi)$$

$$H_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{[x - (x_2 - a)](x - x_2)}{2a \cdot a} = \frac{1}{2} \left[ \frac{x - x_2}{a} + \frac{a}{a} \right] \cdot \left( \frac{x - x_2}{a} \right) = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1)$$

(\*) OSS: TALE TIPO DI RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI IN FORMA VERBA' IMPIEGATO PIU' AVANTI NELLO STUDIO DEGLI ELEMENTI DI TIPO ISOPARAMETRICO.



### 3) POLINOMI DI HERMITE

#### - INTERPOLAZIONE DI ORDINE ZERO

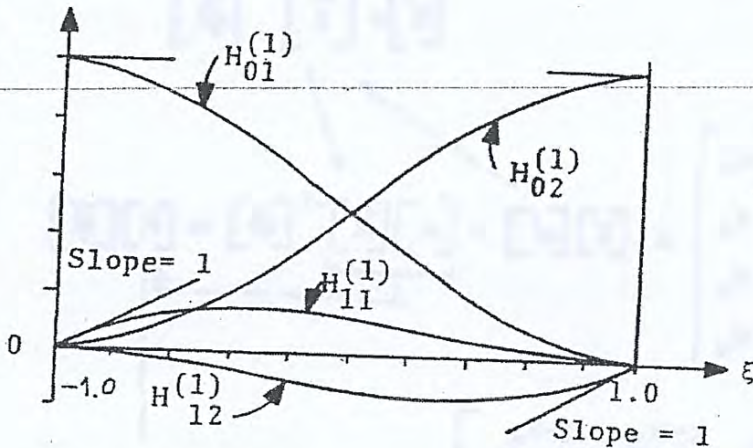
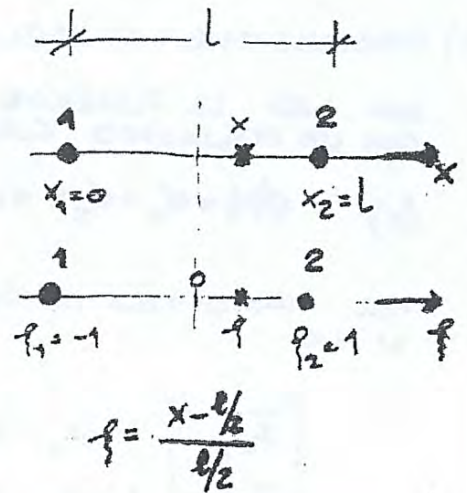
$$H_{01}^{(0)}(x) = 1 - \frac{x}{l} = 1 - \left[ \frac{x + \frac{l}{2} - \frac{l}{2}}{l} \right] \frac{2}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{x - \frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} + \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} \right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} (\eta + 1) = \frac{1}{2} (1 - \eta)$$

$$H_{02}^{(0)}(x) = \frac{x}{l} = \frac{2}{2} \frac{x + \frac{l}{2} - \frac{l}{2}}{l} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{x - \frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} + \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} \right] = \frac{1}{2} (\eta + 1)$$



#### - INTERPOLAZIONE DEL PRIMO ORDINE

$$H_{01}^{(1)}(\xi) = (2 + \xi)(1 - \xi)^2/4,$$

$$H_{02}^{(1)}(\xi) = (2 - \xi)(1 + \xi)^2/4,$$

$$H_{11}^{(1)}(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi)^2/4,$$

$$H_{12}^{(1)}(\xi) = -(1 - \xi)(1 + \xi)^2/4.$$

queste sono le

in termini di coord. naturali delle funz. di forma della trave di Eul-Bern.

#### - INTERPOLAZIONE DEL SECONDO ORDINE

$$H_{01}^{(2)}(\xi) = [1 + \frac{3}{2}(1 + \xi) + \frac{3}{2}(1 + \xi)^2](1 - \xi)^3/8,$$

$$H_{02}^{(2)}(\xi) = [1 + \frac{3}{2}(1 - \xi) + \frac{3}{2}(1 - \xi)^2](1 + \xi)^3/8,$$

$$H_{11}^{(2)}(\xi) = [1 + \frac{3}{2}(1 + \xi)](1 + \xi)(1 - \xi)^3/8,$$

$$H_{12}^{(2)}(\xi) = -[1 + \frac{3}{2}(1 - \xi)](1 - \xi)(1 + \xi)^3/8,$$

$$H_{21}^{(2)}(\xi) = (1 + \xi)^2(1 - \xi)^3/16,$$

$$H_{22}^{(2)}(\xi) = (1 - \xi)^2(1 + \xi)^3/16.$$

si utilizzano queste funz. di forma in termini adimensionali, per pensare di approssimare non solo la mia funz. di campo, ma anche la geometria del mio elemento. questo mi rinvoca all'ipotesi fatta finora di geometria "rigida", ma avevo sicuramente un maggior essere con

#### - OSSERVAZIONE GENERALE SUI POLINOMI DI HERMITE IN COORD. NATURALI

A PARTE L'ORDINE ZERO I POLINOMI DI HERMITE IN COORDINATE NATURALI VENGONO CALCOLATI UTILIZZANDO IL PROCEDIMENTO GENERALE ED ASSUMENDO COME  $x_1 = \xi_1 = -1$  E COME  $x_2 = \xi_2 = 1$

Rimane per ora nell'approssimazione delle funz. di campo, vengono



NON VISTO (non so se può servire)

QUESTA CONSENTE DI DISCRIVERE LA (\*) IN TERMINI DI  $q$

$$\phi(q) = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 q + \bar{\alpha}_3 q^2 + \bar{\alpha}_4 q^3$$

DOVE I COEFFICIENTI  $\bar{\alpha}_i$  OTTENUTI DALLA SOSTITUZIONE, SONO FUNZIONI DI  $\alpha_i$  E DELLE COORDINATE  $x_1$  E  $x_2$  - ( $\alpha_i$  SONO A LORO VOLTA FUNZIONI DELLE COORDINATE MODALI E DI  $\bar{\phi}_i$ )

UN ALTRO MODO PER OTTENERE LE COORDINATE GENERALIZZATE  $\bar{\alpha}_i$  E' QUELLO DI IMPORRE LE CONDIZIONI MODALI IN TERMINI DI  $q$ :

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \bar{\phi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_4 \end{bmatrix} = [\bar{\phi}] [\bar{\alpha}]$$

LA SOLUZIONE DEL SISTEMA CONDUCE A SCRIVERE

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 \\ 1/16 & -27/16 & 27/16 & -1/16 \\ 9/16 & -9/16 & -9/16 & 9/16 \\ -9/16 & 27/16 & -27/16 & 9/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \bar{\phi}_4 \end{bmatrix} = [\bar{\alpha}]^{-1} [\bar{\phi}]$$

DA CUI SI RICAUA

$$\phi(x) = [1 \quad q \quad q^2 \quad q^3] \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_4 \end{bmatrix} = [q] [\bar{\alpha}] = [q] [\bar{\alpha}]^{-1} [\bar{\phi}] = [H] [\bar{\phi}]$$

$$\begin{aligned} H_1(q) &= -1/16 + 1/16 q + 9/16 q^2 - 9/16 q^3 = -\frac{9}{16} \left( \frac{1}{9} - \frac{q}{9} - q^2 + q^3 \right) = \\ &= -\frac{9}{16} \left( q^2 - \frac{1}{9} \right) (q-1) = -\frac{9}{16} \left( q + \frac{1}{3} \right) \left( q - \frac{1}{3} \right) (q-1) \end{aligned}$$

oss: LO STESSO POLINOMIO IN  $q$  LO SI OTTENE A PARTIRE DAL POLINOMIO "GENERALE" CUBICO DI LAGRANGE

$$H_i(q) = \frac{q - q_2}{q_1 - q_2} \cdot \frac{q - q_3}{q_1 - q_3} \cdot \frac{q - q_4}{q_1 - q_4}$$

$$\text{SOSTITUENDO } q_2 = -1/3 \quad q_3 = 1/3 \quad q_4 = 1$$

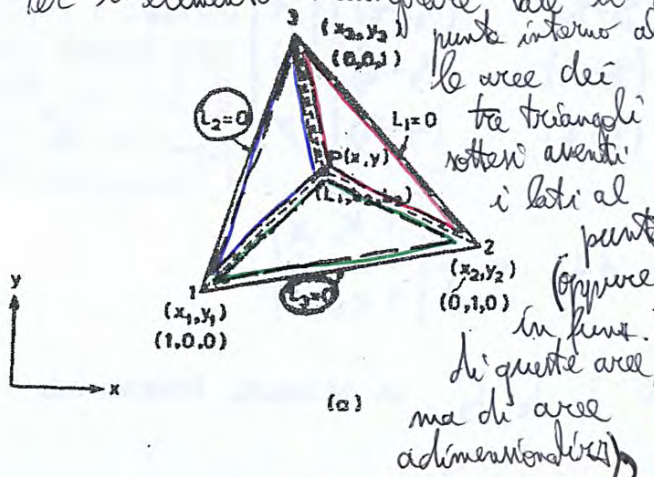


↳ posso avere domini non solo rettangolari, ma anche triangolari.

LEZ. 04-04-2014

**B) ELEMENTO BIDIMENSIONALE (TRIANGOLARE)**

Per l'elemento triangolare, vale il discorso delle **COORDINATE D'AREA**: un punto interno al mio triangolo può essere identificato come il sistema di **COORDINATE LOCALI** PER UN ELEMENTO TRIANGOLARE E' RIPORTATO NELLA FIGURA DI FIANCO - SI UTILIZZANO TRE COORDINATE



Le aree dei tre triangoli ottenuti sottraendo i lati al punto (oppure non in funz. di queste aree, ma di aree adimensionali)

**L<sub>1</sub> L<sub>2</sub> L<sub>3</sub>**

PER DEFINIRE IL PUNTO GENERICO P DEL TRIANGOLO (SOLO DUE SONO TRA DI LORO INDIPENDENTI) - TALI COORDINATE RISULTANO A LORO VOLTA COSI' DEFINITE:

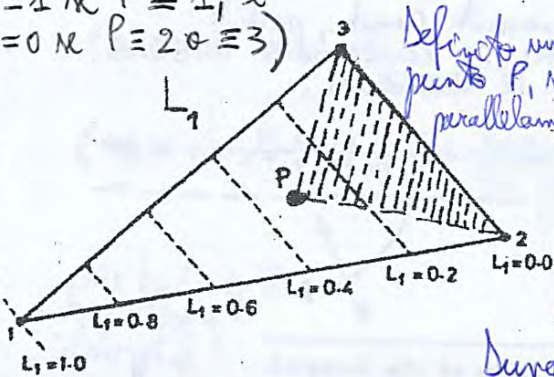
**DEFINIZIONE:**

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (A_1 + A_2 + A_3 = A)$$

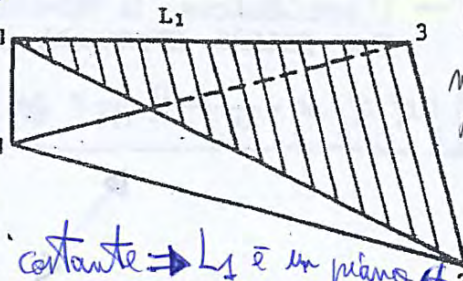
L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub> variano chiaramente tra 0 e 1 (es. L<sub>1</sub> = 1 ⇔ P ≡ 1, x̄ = 1, ȳ = 0; L<sub>1</sub> = 0 ⇔ P ≡ 2 o 3)

- A<sub>1</sub> = AREA TRIANGOLO P23
- A<sub>2</sub> = AREA TRIANGOLO P13
- A<sub>3</sub> = AREA TRIANGOLO P12

**A = AREA TRIANGOLO 123**



Seleziona un qualunque punto P, ne ho molto parallelamente al lato 2-3



L<sub>1</sub> vale 1 nel nodo 1 e vale 0 nel nodo 2 e 3

L<sub>1</sub> è una costante ⇒ L<sub>1</sub> è un piano (stesso ragionamento per L<sub>2</sub> e L<sub>3</sub>)  
 Dunque L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub> sono PIANI.

**ANDAMENTO DELLA COORDINATA INTERNA L<sub>1</sub>**  
 (VEGGIAMO DALLE COORDINATE D'AREA)

IN PARTICOLARE NODO TRA LE COORDINATE (x, y) DEL PUNTO P E LE COORDINATE SPONDENTI COORDINATE D'AREA (L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub>) ESISTE IL SEGUENTE LEGAME

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

«Se volete, un punto generico può essere espresso in funzione di L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub> a partire dalle coordinate dei vertici, attraverso la relazione matriciale a sinistra»  
 ← (VED. OSSERVAZIONI SEGUENTI)

CHE INVERTITO CONSENTE DI ESPRIMERE L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub> IN FUNZIONE DI x, y E DELLE COORDINATE DEI NODI 1, 2, 3 DEL TRIANGOLO

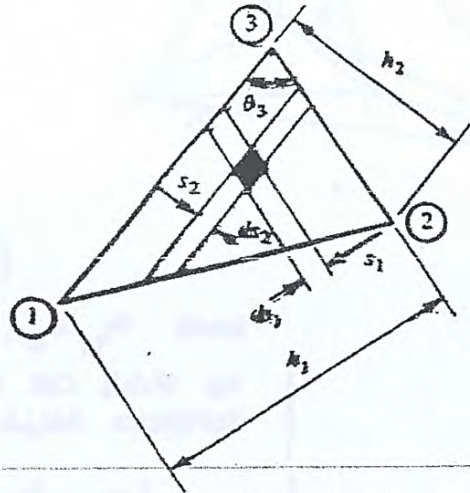
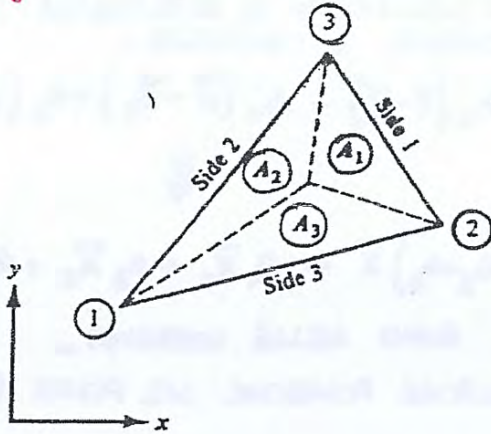


CHI DI VOI SI VUOL DIVERTIRE?

LA DIMOSTRAZIONE DEL SECONDO INTEGRALE LA SI OTTENE NEL SEGUENTE MODO:

si parte attraverso la definizione di funzioni  $\gamma$  (sono dei fattoriali)

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A}$$



$$\int_A \xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c dA = 2A \int_0^1 \left[ \int_0^{1-\xi_1} \xi_1^a \xi_2^b (1-\xi_1-\xi_2)^c d\xi_2 \right] d\xi_1$$

$$dA = ds_1 \cdot ds_2 \cdot \csc \theta_3 = (h_1 d\xi_1) (h_2 d\xi_2) \csc \theta_3 = 2A d\xi_1 d\xi_2$$

POSTENDO POI:

$$\xi_2 = t(1-\xi_1) \rightarrow d\xi_2 = (1-\xi_1) dt$$

[RICORDIAMOCI CHE AL MAX  $\xi_1 + \xi_2 = 1$ ]

L'INTEGRALE DIVENTA

$$\int_A \xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c dA = 2A \int_0^1 \xi_1^a (1-\xi_1)^{b+c+1} d\xi_1 \int_0^1 t^b (1-t)^c dt$$

$$\text{FUNZIONE BETA} \quad B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

$$\int_A \xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c dA = 2A \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(a+b+c+3)}$$

le funzioni  $\Gamma$  sono niente altro che fattoriali  
 FUNZIONE GAMMA  $\Gamma(n+1) = n!$  con  $n \geq 0$

$$\int_A \xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A$$



NON VISTO

$$(\bar{x}_1 \wedge \bar{v}) \cdot \bar{x} = 0$$

LA DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE  $L_1$  AVREMO SECONDO LA SEGUENTE PROCEDURA:

- SI MOLTIPLICA VETTORIALMENTE LA (\*) PER  $\bar{v}$  IN MODO DA OTTENERE

$$\begin{aligned}(\bar{x} \wedge \bar{v}) &= (L_1 \bar{x}_1 + \bar{v}) \wedge \bar{v} = \\ &= L_1 (\bar{x}_1 \wedge \bar{v}) + \underbrace{(\bar{v} \wedge \bar{v})}_{=0}\end{aligned}$$

- SI MOLTIPLICA SCALARMENTE LA RELAZIONE COSÌ OTTENUTA PER UN VETTORE QUALUNQUE NON COMPLANARE CON  $\bar{x}_1, \bar{v}$  (ES. VETTORE  $\bar{k} \perp$  AL PIANO  $x, y$ )

$$(\bar{x} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{k} = L_1 (\bar{x}_1 \wedge \bar{v}) \cdot \bar{k}$$

$$L_1 = \frac{(\bar{x} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{k}}{(\bar{x}_1 \wedge \bar{v}) \cdot \bar{k}}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \\ L_2 x_2 + L_3 x_3 & L_2 y_2 + L_3 y_3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 0 \\ L_2 x_2 + L_3 x_3 & L_2 y_2 + L_3 y_3 & 0 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(L_2 y_2 + L_3 y_3) x - (L_2 x_2 + L_3 x_3) y}{(L_2 y_2 + L_3 y_3) x_1 - (L_2 x_2 + L_3 x_3) y_1}\end{aligned}$$

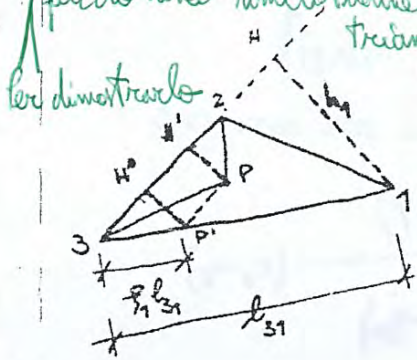
IN MANIERA ANALOGA SI DETERMINANO  $L_2, L_3$  OTTENENDO IN TAL MODO UN SISTEMA DI TRE EQUAZIONI IN TRE INCOGNITE ( $L_1, L_2, L_3$ ) - I VALORI RICHIESTI DALLA SOLUZIONE RISULTANO

$$L_1 = \frac{A_{p23}}{A_{123}} \quad L_2 = \frac{A_{p13}}{A_{123}} \quad L_3 = \frac{A_{p12}}{A_{123}}$$



Le coordinate  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono strettamente imparentate con le coord.  $L_1$  e  $L_2$ .

facile una similitudine tra triangoli;



LE COORDINATE OBLIQUE ADIMENSIONALI  $\xi_1, \xi_2$  POSSONO ANCHE ESSERE INTERPRETATE COME RAPPORTI DI AREE - CON RIFERIMENTO SEMPRE ALLA FIGURA PRECEDENTE, INDICATA CON  $h_1$  L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO RIFERITA AL LATO 1 (DISTANZA DEL PUNTO 1 DAL LATO 1), L'ALTEZZA DEL PUNTO P DAL LATO 1 VALE  $\xi_1 h_1$ .

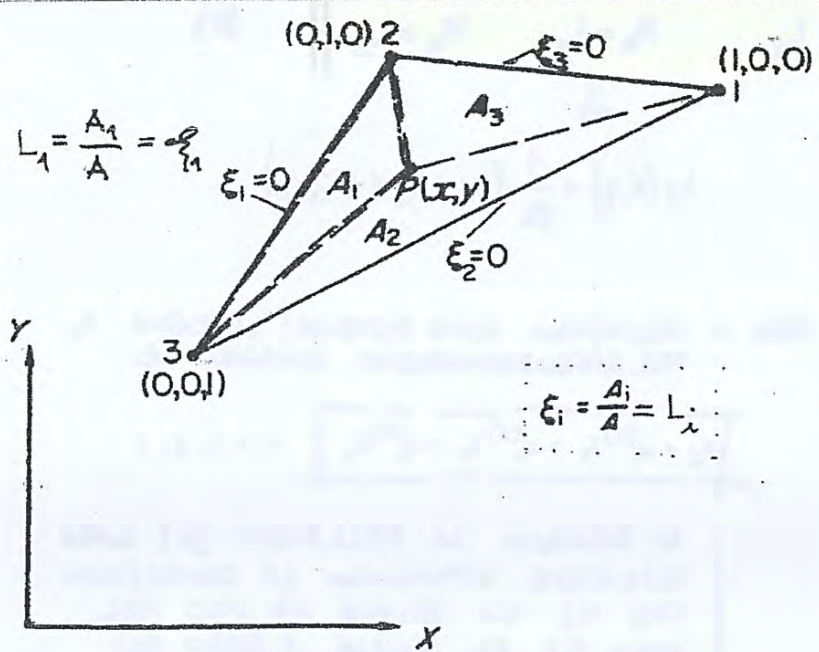
• TRIANGOLO (H31) SIMILE TRIANGOLO (H'3P')

$$\downarrow$$

$$P'H' = \xi_1 h_1$$

•  $P'H' = P'H = \xi_1 h_1$   
ALTEZZA TRIANGOLO P23

$$\Rightarrow \frac{\text{AREA P23}}{\text{AREA A23}} = \frac{\frac{1}{2} l_{23} \xi_1 h_1}{\frac{1}{2} l_{23} h_1} = \xi_1 \equiv L_1$$



$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \xi_1$$

$$\xi_i = \frac{A_i}{A} = L_i$$

IN MANIERA DEL TUTTO ANALOGA SI RICAVA

$$\xi_2 \equiv L_2$$

SAPENDO POI CHE LA SOMMA DELLE AREE DEI TRE SOTTO TRIANGOLI E' UGUALE ALL'AREA DELL'INTERO TRIANGOLO, SI RICAVA

$$L_3 = 1 - \xi_2 - \xi_1 = 1 - L_2 - L_1$$



$$L_3 = \frac{1}{2A} (2A_3^0 + b_3x + a_3y)$$

$$A_3^0 = A - A_1^0 - A_2^0$$

$$a_3 = -a_1 - a_2$$

$$b_3 = -b_1 - b_2$$



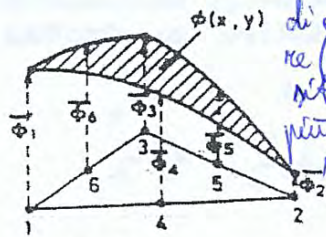
**b2) CAMPO QUADRATICO (LAGRANGE)**

in elemento con forma triangolare

Per migliorare l'approssimazione, se non voglio ingrossare la mesh, uso un polinomio di ordine superiore (2° grado)  $\Rightarrow$  non la funzione di campo  $\phi(x,y)$  viene approssimata mediante  $L_i$  più medi all'interno dello stesso elemento (da 3 a 6).

$\phi(x,y) = [H] [\Phi]$

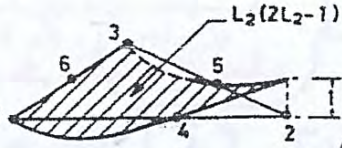
Devo usare le funz. interpolanti di Lagrange in un campo quadratico



$L_1(2L_1-1)$



$L_2$

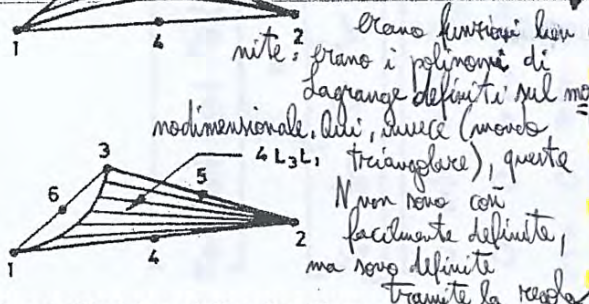


qui dico che:  
 $N_i = N(L_1) \cdot N(L_2) \cdot N(L_3)$   
 (per l'elemento rettangolare  $\Rightarrow N(x,y) = N(x) \cdot N(y)$  abbiamo visto che)

$N_i = f^{(i)}(L_1) \cdot f^{(i)}(L_2) \cdot f^{(i)}(L_3)$

$f(L_1), f(L_2), f(L_3)$  sono niente altro che:

$f^{(i)}(L_j) = \begin{cases} \frac{L}{2L} \frac{1}{R} (mL_j - k + 1) & L \geq 1 \\ 1 & L = 0 \end{cases}$



Quadratic interpolation functions (6 nodes)

$m =$  GRADO DI APPROSSIMAZIONE (2 QUADRATICA / 3 CUBICA / ...)

$i =$  INDICE DEL NODO  $i = 1, 2, \dots, m$

$L = m \cdot L_j^{(i)}$

$L_j^{(i)}$  = VALORE DELLA COORDINATA INTERNA O D'AREA "J" NEL NODO "i"  $\Rightarrow L_j^{(i)}$  può essere 0 o 1.

PER IL NODO 1 SI HA: CALCOLATA

ESEMPLO DI DETERMINAZIONE DELLA FUNZIONE DI FORMA PER IL NODO 1

$f^{(1)}(L_1) : J=1, L = m \cdot L_1^{(1)} = 2 \cdot 1 = 2$

$\Rightarrow \frac{\pi}{k=1} \frac{1}{k} (2 \cdot L_1 - k + 1) = \left[ \frac{1}{1} (2 \cdot L_1 - 1 + 1) \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} (2L_1 - 2 + 1) \right] =$   
 $= 2L_1 \cdot \left[ \frac{1}{2} (2L_1 - 1) \right] = L_1 (2L_1 - 1)$

$f^{(1)}(L_2) : J=2, L = m \cdot L_2^{(1)} = 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f^{(1)}(L_2) = 1$

$f^{(1)}(L_3) : J=3, L = m \cdot L_3^{(1)} = 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f^{(1)}(L_3) = 1$

$\Rightarrow N_1 = f^{(1)}(L_1) \cdot f^{(1)}(L_2) \cdot f^{(1)}(L_3) = [L_1 \cdot (2L_1 - 1)] \cdot 1 \cdot 1 = L_1 (2L_1 - 1) \Rightarrow N_1$

quella rappresentata in alto a sinistra.



OPERANDO IN MANIERA ANALOGA<sup>(\*)</sup> PER TUTTI I PUNTI SI OTTENGONO LE SEI FUNZIONI DI FORMA

$$\begin{cases} N_i = L_i (2L_i - 1), & i = 1, 2, 3 \\ N_4 = 4L_1 L_2 \\ N_5 = 4L_2 L_3 \\ N_6 = 4L_1 L_3 \end{cases}$$

$$N_i = f^{(i)}(L_1) \cdot f^{(ii)}(L_2) \cdot f^{(i)}(L_3)$$

OSS: LE FUNZIONI DI FORMA POSSONO ESSERE COSTRUITE ANCHE A PARTIRE DA:

$$N_i = a_1^{(i)} L_1 + a_2^{(i)} L_2 + a_3^{(i)} L_3 + a_4^{(i)} L_1 L_2 + a_5^{(i)} L_2 L_3 + a_6^{(i)} L_1 L_3$$

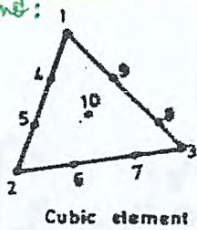
← RELAZIONE EQUIVALENTE A QUELLA DIFFERENZIALE OSS. PRECEDENTE

DOVE LE "COORDINATE GENERALIZZATE"  $a_j^{(i)}$  SI OTTENGONO PONEENDO LE CONDIZIONI

$$N_i(\text{nod } j) = \delta_{ij}$$

**b3) CAMPO CUBICO (LAGRANGE)**  $(m=3) \rightarrow$  2 pag. precedenti

Qui compare anche un nodo interno:



VALGONO CONSIDERAZIONI DEL TUTTO ANALOGHE A QUELLE EFFETTUATE PER L'ELEMENTO QUADRATICO - IN QUESTO CASO LE FUNZIONI DI FORMA  $N_i$  RISULTANO:

$$N_i = \frac{1}{2} L_i (3L_i - 1)(3L_i - 2), \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_4 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1)$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1)$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_2 - 1)$$

$$N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1)$$

$$N_8 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_3 - 1)$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_1 - 1)$$

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3$$

$$N_i = f^{(i)}(L_1) \cdot f^{(ii)}(L_2) \cdot f^{(i)}(L_3)$$

usate per la teoria dell'interpolazione

NB: parlare di  $L_1, L_2, \dots, \bar{x}$  uguale a parlare di  $E_1, E_2$  vedi quanto relat. a sinistra e quelle in base per i nodi

usate per gli elementi perché nel metodo FEM lavoriamo con le coord. naturali (che sono chiamate  $E$ ).

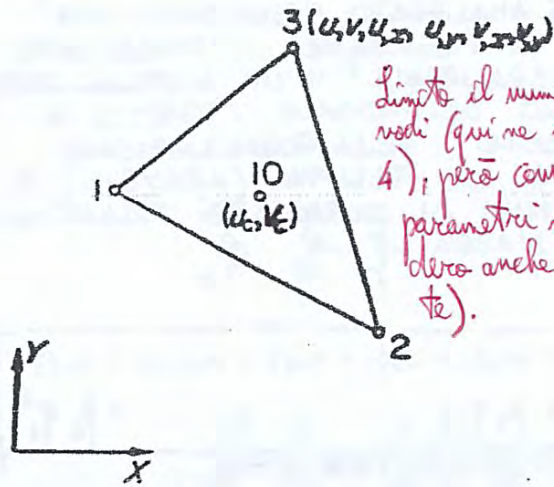
OSS: LE STESSIE FUNZIONI DI FORMA POSSONO ESSERE RICAVATE INDICANDO LA

$$\begin{aligned} N_i = & a_1^{(i)} L_1 + a_2^{(i)} L_2 + a_3^{(i)} L_3 + a_4^{(i)} L_1 L_2 + a_5^{(i)} L_2 L_3 + a_6^{(i)} L_1 L_3 \\ & + a_7^{(i)} L_1^2 L_2 + a_8^{(i)} L_2^2 L_3 + a_9^{(i)} L_3^2 L_1 + a_{10}^{(i)} L_1 L_2 L_3 \end{aligned}$$



### 3) ELEMENTO CUBICO (DEFORMAZIONE QUADRATICA - FLEM. 4 NODI)

nella rappresent. canonica delle funz. di Lagrange.



Limite il numero di nodi (qui ne ho solo 4), però considero più parametri nodali (comp. dico anche le derivate).

SI ASSUMONO COME INCOGNITE MODALI AI VERTICI DEL TRIANGOLO LE SEGUENTI SEI QUANTITÀ (per ogni  $i, j$  ed entr. no in grado anche le derivate)

$$[\bar{u}]_i^T = [\bar{u} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}] = [\bar{v} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}]$$

E AL BACIENTRO C, LE QUANTITÀ

$$[\bar{u}]_c^T = [\bar{u}_c \quad \bar{v}_c]$$

IN TALI CONDIZIONI FELIPPA HA SVILUPPATO I POLINOMI INTERPOLATORI  $H_i$  IN FUNZIONE DELLE COORDINATE D'AREA  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$

$$[u] = [H][\bar{u}]$$

$$[H]_3 = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & 0 & 0 & 0 & H_4 & H_5 & H_6 & 0 & 0 & 0 & H_7 & H_8 & H_9 & 0 & 0 & 0 & H_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_1 & H_2 & H_3 & 0 & 0 & 0 & H_4 & H_5 & H_6 & 0 & 0 & 0 & H_7 & H_8 & H_9 & 0 & H_{10} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{u}]^T = [\bar{u}_1 \quad \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_1 \quad \bar{v}_1 \quad \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_1 \quad \dots \quad u_c \quad v_c]$$

$$\begin{cases} u(x,y) = H_1 \bar{u}_1 + H_2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_1 + H_3 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_1 + H_4 \bar{u}_2 + \dots & + H_{10} u_c \\ v(x,y) = H_1 \bar{v}_1 + H_2 \dots & + H_{10} v_c \end{cases}$$

Le funzioni di forma, tenendo conto come incognite nodali anche le derivate, sono funz. di forma di questo tipo

4 nodi, ma sempre 10 funz. di forma.

- $H_1 = \xi_1^2(\xi_1 + 3\xi_2 + 3\xi_3) - 7\xi_1\xi_2\xi_3$
- $H_2 = \xi_1^2(a_3\xi_2 - a_2\xi_3) + (a_2 - a_3)\xi_1\xi_2\xi_3$
- $H_3 = \xi_1^2(b_2\xi_3 - b_3\xi_2) + (b_3 - b_2)\xi_2\xi_1\xi_3$
- $H_4 = \xi_2^2(\xi_2 + 3\xi_3 + 3\xi_1) - 7\xi_1\xi_2\xi_3$
- $H_5 = \xi_2^2(a_1\xi_3 - a_3\xi_1) + (a_3 - a_1)\xi_1\xi_2\xi_3$
- $H_6 = \xi_2^2(b_3\xi_1 - b_1\xi_3) + (b_1 - b_3)\xi_1\xi_2\xi_3$
- $H_7 = \xi_3^2(\xi_3 + 3\xi_1 + 3\xi_2) - 7\xi_1\xi_2\xi_3$
- $H_8 = \xi_3^2(a_2\xi_1 - a_1\xi_2) + (a_1 - a_2)\xi_1\xi_2\xi_3$
- $H_9 = \xi_3^2(b_1\xi_2 - b_2\xi_1) + (b_2 - b_1)\xi_1\xi_2\xi_3$
- $H_{10} = 27\xi_1\xi_2\xi_3$

DOVE  
 $a_i = x_k - x_j$   
 $b_i = y_j - y_k$   
 i, j, k PERMUTAZIONE di 1, 2, 3

DA QUI VEDERE COSA SCRITTO SUGLI APPUNTI LEZ. 07-04-20



SAPENDO CHE

$$f_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (*)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

Le  $f_i$  sono le coord. d'area  
coinciono con le funz. di  
forma  $N_i$  dell'elemento triangolare  
a 3 nodi  
LA RELAZIONE (\*) DIVENTA

$$2A = (x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

CON  $i, j, k$  PERMUTAZIONE CICLICA DI 1, 2, 3

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial f_p} \frac{\partial f_p}{\partial x} & 0 \\ 0 & \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial f_p} \frac{\partial f_p}{\partial y} \\ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial f_p} \frac{\partial f_p}{\partial y} & \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial f_p} \frac{\partial f_p}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(f_1, f_2, f_3) \\ v(f_1, f_2, f_3) \end{bmatrix} =$$

$$[H][\bar{u}]$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial x} = \frac{b_p}{2A} \quad \frac{\partial f_p}{\partial y} = \frac{c_p}{2A}$$

→ sempre una costante, perché  $f_i (*)$  è una funz. lineare in  $x$  e  $y$

$$= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^3 b_p \frac{\partial}{\partial f_p} & 0 \\ 0 & \sum_{p=1}^3 c_p \frac{\partial}{\partial f_p} \\ \sum_{p=1}^3 c_p \frac{\partial}{\partial f_p} & \sum_{p=1}^3 b_p \frac{\partial}{\partial f_p} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H_1(f_1, f_2, f_3) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2(f_1, f_2, f_3) & \dots & H_3(f_1, f_2, f_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 \frac{\partial H_1}{\partial f_1} + b_2 \frac{\partial H_1}{\partial f_2} + b_3 \frac{\partial H_1}{\partial f_3} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & c_1 \frac{\partial H_1}{\partial f_1} + c_2 \frac{\partial H_1}{\partial f_2} + c_3 \frac{\partial H_1}{\partial f_3} & \dots & \dots \\ c_1 \frac{\partial H_1}{\partial f_1} + c_2 \frac{\partial H_1}{\partial f_2} + c_3 \frac{\partial H_1}{\partial f_3} & b_1 \frac{\partial H_1}{\partial f_1} + b_2 \frac{\partial H_1}{\partial f_2} + b_3 \frac{\partial H_1}{\partial f_3} & \dots & \dots \end{bmatrix} [\bar{u}] =$$

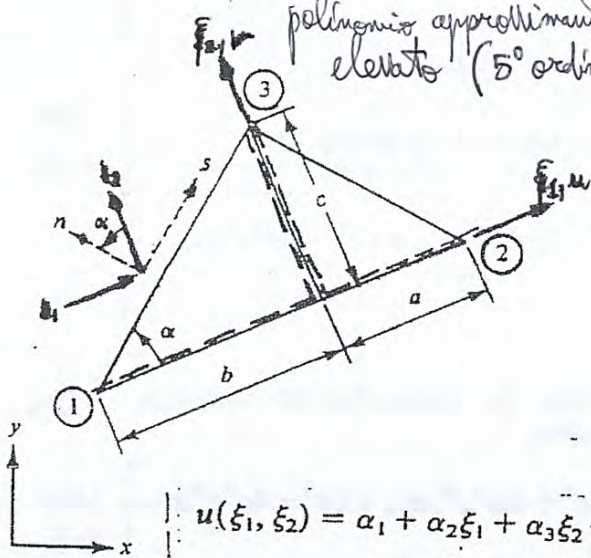
$$= [B][\bar{u}]$$



LEZ 14-4-2014 (Lex. Allaux)

**5) ELEMENTO CON POLINOMIO DEL QUINTO ORDINE**

ha solo 3 nodi, ma l'ordine del polinomio approssimante è elevato (5° ordine).



ELEMENTO SVILUPPATO DA DAVE PER L'ANALISI DEI QUCCI - PRESENTA SEI GRADI DI LIBERTA' PER OGNI NODO RELATIVAMENTE A CIASCUNA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO (TOTALE 36 GRADI DI LIBERTA')

$$u_i = \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right)_i, \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)_i, \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} \right)_i, \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)_i, \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} \right)_i$$

LE FUNZIONI SPOSTAMENTO SONO APPROSSIMATE MEDIANTE UN POLINOMIO COMPLETO DEL QUINTO GRADO SENZA IL TERMINE  $\xi_1^4 \xi_2$

$$u(\xi_1, \xi_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_1 + \alpha_3 \xi_2 + \alpha_4 \xi_1^2 + \alpha_5 \xi_1 \xi_2 + \alpha_6 \xi_2^2 + \alpha_7 \xi_1^3 + \alpha_8 \xi_1^2 \xi_2 + \alpha_9 \xi_1 \xi_2^2 + \alpha_{10} \xi_2^3 + \alpha_{11} \xi_1^4 + \alpha_{12} \xi_1^3 \xi_2 + \alpha_{13} \xi_1^2 \xi_2^2 + \alpha_{14} \xi_1 \xi_2^3 + \alpha_{15} \xi_2^4 + \alpha_{16} \xi_1^5 + \alpha_{17} \xi_1^3 \xi_2^2 + \alpha_{18} \xi_1^2 \xi_2^3 + \alpha_{19} \xi_1 \xi_2^4 + \alpha_{20} \xi_2^5$$

$$v(\xi_1, \xi_2) = \beta_1 + \dots$$

**oss:** - COME ILLUSTRATO IN FIGURA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO PRESENTA L'ASSE  $\xi_1$  COINCIDENTE CON UN LATO DEL TRIANGOLO E L'ASSE  $\xi_2$  PERPENDICOLARE A QUESTO E PASSANTE PER IL TERZO NODO. SE ORA SI PENSA IL TRIANGOLO SUDDIVISO IN DUE SOTTOTRIANGOLI, GLI ASSI  $\xi_1$  E  $\xi_2$  COINCIDONO CON I LATI E QUINDI POSSONO ESSERE TRATTATI COME ASSI RELATIVI A SISTEMI INTERNI. NE CONSEGUENZA CHE POSSONO ESSERE UTILIZZATE LE RELAZIONI IN FORMA CHIUSA, PER L'INTEGRAZIONE DEI TERMINI DELLE MATRICI, VISTE IN PRECEDENZA -

FA SI  
- LA MANCANZA DEL TERMINE  $\xi_1^4 \xi_2$  (ASSICURA) CHE IL TERMINE DI ROTAZIONE NEL PIANO  $\frac{\partial u}{\partial \xi_2}$  SIA RIDOTTO AD UN POLINOMIO DI TERZO GRADO IN  $\xi_1$  LUNGO IL LATO 1-2 ( $\xi_2 = 0$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_2} = c_1 + c_2 \xi_1 + c_3 \xi_1^2 + c_4 \xi_1^3$$

DOVE LE QUATTRO COSTANTI SI DETERMINANO TRAMITE I NODI 1 E 2. (ANALOGO DISCORSO VALE PER  $v$ )  $\frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}$  HEI

da qui a fine pag. 52 NON VISTO

LE INCOGNITE  $\alpha_i$  (COORD. GENER.) SONO 20 CONTRO LE 18 CONDIZIONI NODALI. LE DUE RIMANENTI EQUAZIONI SI OTTENGONO IMPOSTANDO LA CONDIZIONE CHE LA ROTAZIONE NEL PIANO  $\frac{\partial u}{\partial \xi_2}$  VARI COME FUNZIONE CUBICA DI "S" LUNGO IL LATO 1-3 (E 2-3 - VEDI FIGURA) QUESTO E' DATO DALL'ELIMINAZIONE DI TUTTI I COEFFICIENTI ASSOCIATI CON I TERMINI DEL QUARTO ORDINE DI "S" NELL'ESPRESSIONE DI  $\frac{\partial u}{\partial \xi_2}$  - CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA ED AL POLINOMIO INTERPOLANTE SI HA:

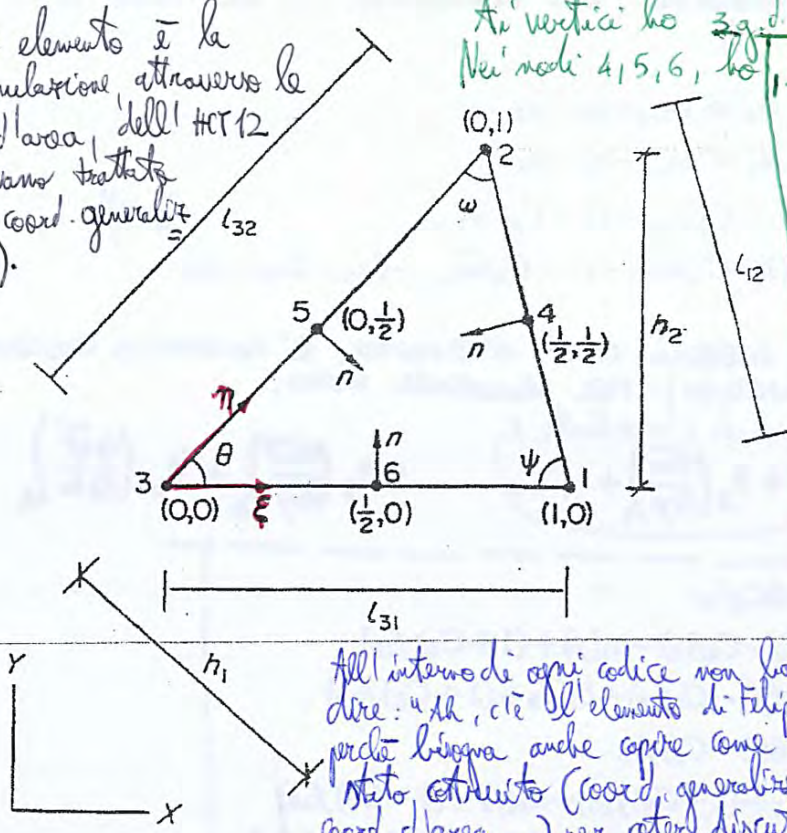


LEZ. 15-04-2014 <sup>cominciamo a</sup> INIZIO LEZIONE: Studiare elementi triangolari tramite le coord. d'area.

65) FORMULAZIONE DI ELEMENTI PIASTRA

1) ELEMENTO DI FELIPPA-CLOUGH (HCT12)

Questo elemento è la riformulazione, attraverso le coord. d'area, dell' HCT12 (lavoriamo trattata nelle coord. generalizzate).



Ai vertici ho 3 g.d.l. (quelli classici della piastra). Nei nodi 4, 5, 6, ho 11 g.d.l. (la derivata normale).

SI ASSUME COME FUNZIONE INTERPOLANTE UN POLINOMIO CUBICO COMPLETO (che ha 10 coeff.).  
 $w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3$   
 (\*\*) quindi non riuscivi ad imporre tutte le g.d.l. con un polinomio di 10 termini

All'interno di ogni codice non basta dire: "ah, c'è l'elemento di Felippa", perché bisogna anche capire come è stato costruito (coord. generalizzate, coord. d'area...) per poter discutere la bontà della soluz. finale.

CONSIDERANDO IN PRIMA FASE COME INCOGNITE MODALI LO SPOSTAMENTO E LE DERIVATE DELLO SPOSTAMENTO RISPETTO A  $\xi$  E  $\eta$ , CON RIFERIMENTO AI TRE VERTICI DEL TRIANGOLO. LA (\*\*)  
 CONSENTE DI SCRIVERE:

$$\alpha_1 = \bar{w}_3 \quad \alpha_2 = (\partial w / \partial \xi)_3 = \bar{w}_{3,\xi} \quad \alpha_3 = \bar{w}_{3,\eta}$$

$$\alpha_4 = 3\bar{w}_1 - 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \bar{w}_{1,\xi}$$

$$\alpha_6 = 3\bar{w}_2 - 3\alpha_1 - 2\alpha_3 - \bar{w}_{2,\eta}$$

$$\alpha_7 = \bar{w}_{1,\xi} + \alpha_2 + 2\alpha_1 - 2\bar{w}_1$$

$$\alpha_{10} = \bar{w}_{2,\eta} + \alpha_3 + 2\alpha_1 - 2\bar{w}_2$$

$$\alpha_5 + \alpha_8 = \bar{w}_{1,\eta} - \alpha_3$$

$$\alpha_5 + \alpha_9 = \bar{w}_{2,\xi} - \alpha_2$$

LE (\*\*\*) INDICANO CHE  $\alpha_5, \alpha_8, \alpha_9$  NON SONO UNIVOCAMENTE DEFINITE (SI SONO UTILIZZATE 9 CONDIZIONI PER 10 INCOGNITE)  $\Rightarrow$  OCCORRE INTRODURRE UN ULTERIORE SPOSTAMENTO MODALE - DAL MOMENTO CHE LA DERIVATA NORMALE LUNGO UN LATO VARIA IN MODO QUADRATICO, UNA SCELTA SPONTANEA È RAPPRESANTATA DALLA DERIVATA NORMALE AL CENTRO DI UN LATO -

$$h_3(\partial w / \partial \eta)_4 \equiv h_3 \bar{w}_{4,\eta} = -C_3 w_{,\xi} - (1 - C_3) w_{,\eta} |_{\xi=\eta=1/2}$$

$$h_1 \bar{w}_{5,\eta} = w_{,\xi} - C_1 w_{,\eta} |_{\xi=0, \eta=1/2}$$

$$h_2 \bar{w}_{6,\eta} = -C_2 w_{,\xi} + w_{,\eta} |_{\xi=1/2, \eta=0}$$

DI FIANCO VENGONO RIPORTATE LE RELAZIONI GENERALI DELLE DERIVATE NORMALI NEI TRE PUNTI CENTRALI DEI LATI DEL TRIANGOLO.

$$C_1 = (l_{31}/l_{32}) \cos \theta \quad C_2 = (l_{32}/l_{31}) \cos \theta \quad C_3 = (l_{32}/l_{12}) \cos \omega$$

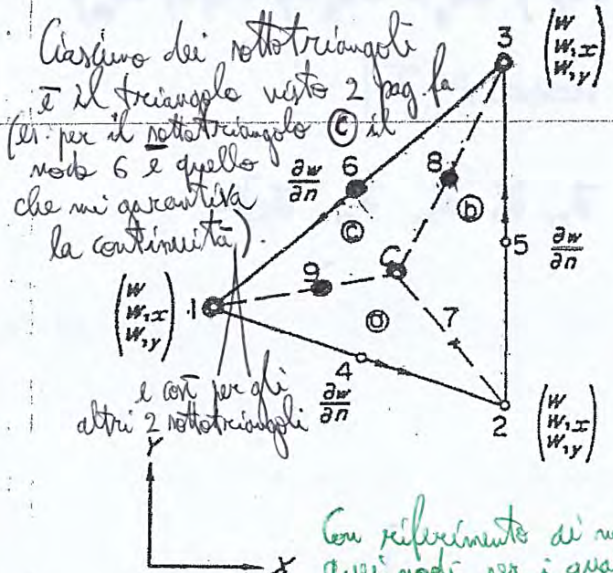


Con queste derivate normali non viene rispettata la continuità tra elementi adiacenti

$$\begin{aligned}
 4h_1 \bar{w}_{5,n} &= 6C_3 \bar{w}_1 + (-a_1 + a_3 C_3) \bar{w}_{1,x} + (b_1 - b_3 C_3) \bar{w}_{1,y} \\
 &\quad + 6(1 - C_1 - C_2) \bar{w}_2 + [-a_2(2 - C_3) - a_1(1 + C_1)] \bar{w}_{2,x} \\
 &\quad + [b_2(2 - C_3) + b_1(1 + C_1)] \bar{w}_{2,y} - 6(1 - C_1) \bar{w}_3 \\
 &\quad + [-a_3 + a_1(1 - C_1)] \bar{w}_{3,x} + [b_3 - b_1(1 - C_1)] \bar{w}_{3,y} + 4h_3 \bar{w}_{4,n} \\
 4h_2 \bar{w}_{6,n} &= 6(C_3 - C_2) \bar{w}_1 + [a_3(1 + C_3) + 2a_2 C_2] \bar{w}_{1,x} \\
 &\quad + [-b_3(1 + C_3) - 2b_2 C_2] \bar{w}_{1,y} + 6(1 - C_3) \bar{w}_2 - a_3(1 - C_3) \bar{w}_{2,x} \\
 &\quad + b_3(1 - C_3) \bar{w}_{2,y} - 6(1 - C_2) \bar{w}_3 + [a_2 - a_2(1 - C_2)] \bar{w}_{3,x} \\
 &\quad + [-b_3 + b_2(1 - C_2)] \bar{w}_{3,y} + 4h_3 \bar{w}_{4,n}
 \end{aligned} \tag{b}$$

Entrano in gioco le componenti di spostamento dei nodi 4, 2, 3, 1.

partiamo dall'elemento appena visto e vediamo se, partendo da esso, riusciamo a costruire un elemento conforme. A PARTIRE DA TALE FORMULAZIONE E' POSSIBILE COME GIÀ ILLUSTRATO IN PRECEDENZA, (PIASTRE IN COORDINATE GENERALIZZATE) FORMULARE UN ELEMENTO TRIANGOLARE COMPATIBILE.



IL TRIANGOLO ORIGINARIO VIENE SUDDIVISO IN TRE SOTTO TRIANGOLI COME ILLUSTRATO NELLA FIGURA A FIANCO (IL PUNTO C VIENE ASSUNTO COINCIDENTE CON IL BARICENTRO) - PER CIASCUN SOTTO TRIANGOLO SI CALCOLA LA MATRICE DI RIGIDITÀ E SI PROCEDE ALL'ASSEMBLACCIO CON RIFERIMENTO AL TRIANGOLO ORIGINARIO ASSUMENDO COME ORDINE DEGLI SPAZIALI LOCALI, I SEGUENTI:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)_1 & \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)_1 & \dots \end{bmatrix}$$

Con riferimento ai nodi interni quei nodi per i quali non diciamo niente nella derivata normale (cioè non garantiamo la continuità della derivata normale) → ricerca il punto C tale per cui la continuità della derivata normale per i nodi 4, 8, 9. Come facciamo? Guardando la (b) → diciamo che

OD IN FORMA COMPATA

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_c \end{bmatrix}$$

LA CONTINUITÀ DI  $w$  E DELLA DERIVATA NORMALE E' SODDISFATTA SUL CONTOURNO ESTERNO - TUTTAVIA, SE  $\bar{u}_c$  E' ARBITRARIO,  $(\partial w / \partial n)$  SUI LATI INTERNI DEI TRE SOTTO TRIANGOLI RISULTA DISCONTINUA - LA CONTINUITÀ PUO' ESSERE IMPOSTA EGUALIANDO LE DERIVATE NORMALI NEI SOTTO TRIANGOLI NEI PUNTI 7, 8, 9, UTILIZZANDO LE RELAZIONI (b) SOPRASCRITTE - QUESTO PORTA A VINCOLARE LE  $\bar{u}_c$  ALLE  $\bar{u}$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_c \end{bmatrix} = [E] \begin{bmatrix} \bar{u} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Condizioni di uguaglianza delle derivate normali nei nodi interni} \rightarrow \text{grazie a tali 3 condizioni, passò da 15 a 12 g.d.l.}$$

E BUNQUE RIBORRE A 12, IGUALI DI LIBERTÀ NELL'ELEMENTO MEDIANTE LA TECNICA DELLA CONDENSAZIONE STATICA (GIÀ VISTA IN PRECEDENZA).

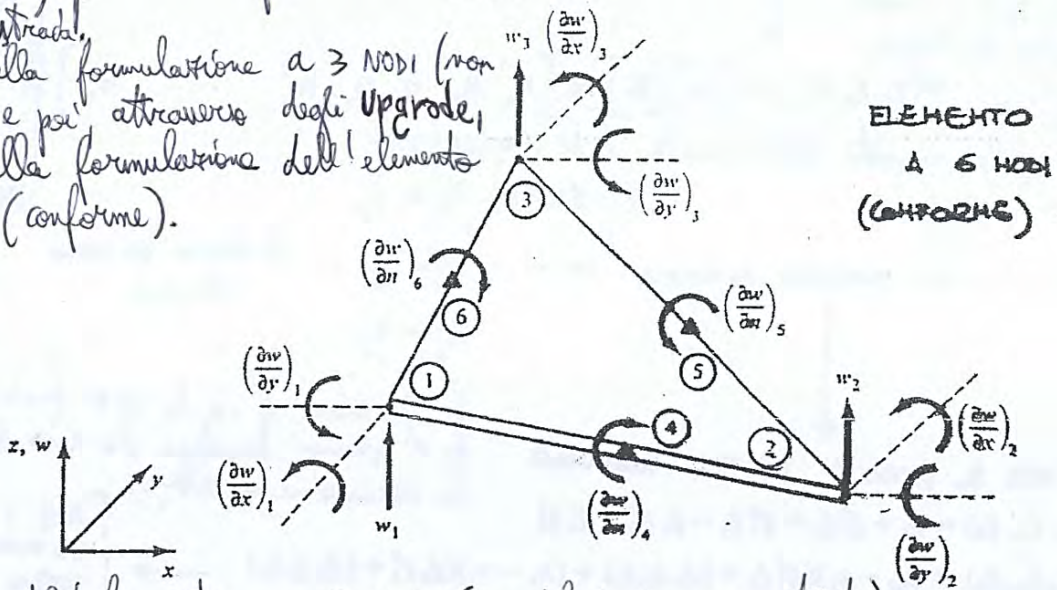
Questa vista è proprio la formulazione proposta da Felippa - Clough proprio per l'HCT 12.



LEZ. 15-04-2014

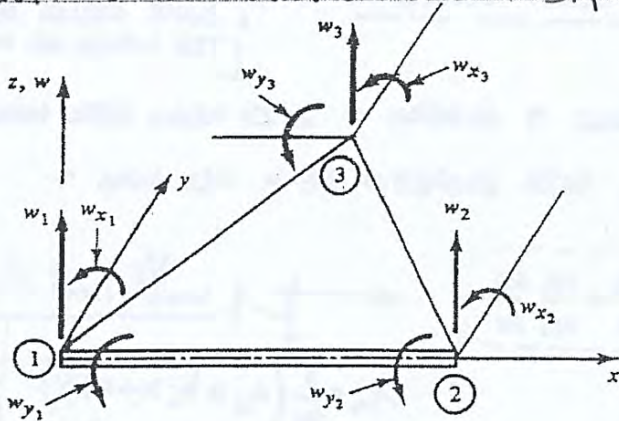
3) ELEMENTO NON CONFORME (3 NODI - 9 GRADI DI LIBERTA')  
 di 4 pag. precedenti CONFORME (6 NODI - 12 GRADI DI LIBERTA')

l'elemento 1) può essere formulato anche attraverso un'altra strada, si parte dalla formulazione a 3 NODI (non conforme) e poi attraverso degli Upgrade, si arriva alla formulazione dell'elemento a 6 NODI (conforme).

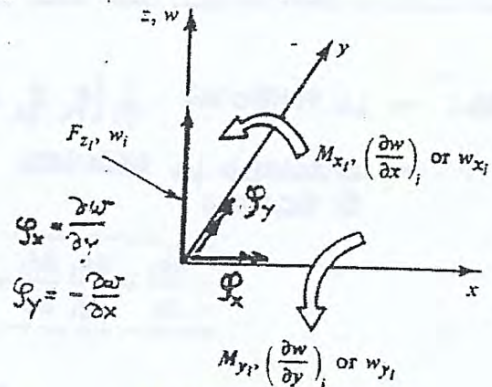


ELEMENTO A 6 NODI (CONFORME)

Partiamo dall'elemento a 3 NODI (3 g.d.l./nodo  $\Rightarrow$  9 costanti)



ELEMENTO A 3 NODI (NON CONFORME)



CONVENZIONE DI SEGNI

1) ELEMENTO A 3 NODI (BAZELEY-CHEUNG-IRONS-ZIENKIEWICZ)  $\Rightarrow$  3 g.d.l. per nodo  $\Rightarrow$  9 parametri nodali

SI ASSUME COME FUNZIONE APPROSSIMANTE LA DEFORMATA  $w$  LA SEGUENTE FUNZIONE ESPRESSA IN TERMINI DI COORD. D'AREA:

$$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 (\xi_2^2 \xi_1 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3) + \alpha_5 (\xi_2^2 \xi_3 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3) + \dots + \alpha_9 (\xi_1^2 \xi_3 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3)$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$  che non sono niente altro che  $L_1, L_2, L_3$  (A1/A, A2/A, A3/A).  
 Quindi dobbiamo entrare nell'orbita che il mondo del coord. assoluta non esiste più (ci sono tutti il mondo FE)

DETERMINATI I COEFF. GENERALIZZATI  $\alpha_i$  IN TERMINI DI SPOSTAMENTI E MOMENTI NODALI, LA STESSA RELAZIONE PUO' ESSERE RISCITTA NELLA FORMA: (bricolage algebrico)



## b) ELEMENTO A SEI NODI

INDICATA CON  $W$  LA DEFORMATA DELL'ELEMENTO NON CONFORME VISTO IN  $Q$ ) [ELEMENTO A TRE NODI] E CON  $w$  LA DEFORMATA "CONFORME" DELL'ELEMENTO A SEI NODI, QUEST'ULTIMA PUO' ESSERE VISTA COME UN'ESTENSIONE DELLA RELAZIONE PRECEDENTE:

$$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underbrace{W(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}_{\text{quella di prima}} + \sum_{i=4}^6 f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \left[ \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_i - \left. \frac{\partial W}{\partial n} \right|_i \right]$$

*anche qui li central*

DOVE, IN TERMINI DI SPOSTAMENTI MODALI VENGONO CONSIDERATE TUTTI LE DERIVATE NORMALI  $\partial w / \partial n$  DEI NODI POSTI A META' DEI TRE LATI. (DEFINIZIONE UNIVUCA DELLA VARIAZIONE QUADRATICA DELLA DERIVATA NORMALE LUNGO I BORDI INTERELEMENTO) E, IN TERMINI DI FUNZIONI DI FORMA, SI CONSIDERANO LE FUNZIONI AGGIUNTIVE:

funzioni di forma per i nodi centrali

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{8A}{l_{12}(\xi_3 + \xi_1)(\xi_3 + \xi_2)} \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3}{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \\ f_5 &= \frac{8A}{l_{23}(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_3)} \frac{\xi_1 \xi_2^2 \xi_3^2}{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \\ f_6 &= \frac{8A}{l_{13}(\xi_2 + \xi_1)(\xi_2 + \xi_3)} \frac{\xi_1^2 \xi_2 \xi_3^2}{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \end{aligned}$$

funzioni  $f_i$  usate all'elemento precedente

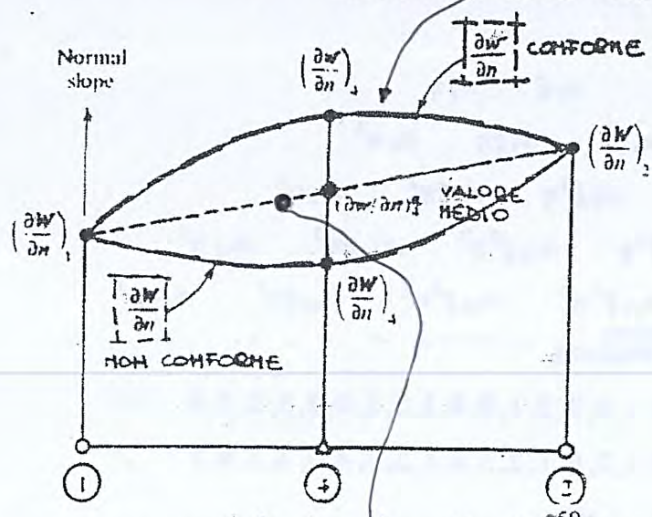
$l_{ij}$  = LUNGHEZZA LATO TRA I NODI  $i$  E  $j$

**OSS:** - LE CONSIDERAZIONI VENGONO SVOLTE PER  $f_4$ , HA VALORE IN MANIERA ANALOGA PER  $f_5$  E  $f_6$

- $f_4 = 0$  LUNGO TUTTI I LATI DEL TRIANGOLO
- $\partial f_4 / \partial x = \partial f_4 / \partial y = \partial f_4 / \partial n = 0$  NEI TRE ANGOLI
- $\partial f_4 / \partial n = 0$  LUNGO I DUE LATI OPPOSTI AL NODO 4

derivata normale lungo il lato che contiene il nodo 4

-  $\partial f_4 / \partial n$  VARIA IN MODO PARABOLICO LUNGO IL LATO 1-2 CON MASSIMO VALORE PARI AD 1 IN CORRISPONDENZA DEL NODO 4



INFATTI LUNGO IL LATO  $\xi_3 = 0$  SI HA:

$$\frac{\partial f_4}{\partial \xi_3} = \frac{8A}{l_{12}} \xi_1 \xi_2$$

↑ VARIAZIONE QUADRATICA

DA CUI SI RICAVA

$$\frac{\partial f_4}{\partial n} = \frac{\partial f_4}{h_3 \partial \xi_3} = 1 \quad \text{PER} \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 \\ \xi_3 = 0 \end{cases}$$

ALTEZZA RELATIVA LATO 1-2

Si può pensare, per semplicità di conti, di effettuare una semplificazione: invece di operare con un andamento di tipo parabolico della derivata normale, perché non



LA MANCANZA DEL TERMINE  $\xi^4$  ASSICURA CHE LA DERIVATA NORMALE DEL LATO  $\eta=0$  VARI CUBICAMENTE LUNGO  $\xi$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \xi} = c_1 + c_2 \xi + c_3 \xi^2 + c_4 \xi^3$$

LA CUI DEFINIZIONE È ASSICURATA DAI GRADI DI LIBERTÀ  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  E  $\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$  AI HOVI 1 E 2.

COME GIÀ VISTO PER GLI STATI DI TENSIONE PIANI OCCORRE DEFINIRE DUE ULTERIORI CONDIZIONI PER ARRIVARE ALLA COMPLETA DEFINIZIONE DELLE 20 COORDINATE GENERALIZZATE  $\alpha_i$  - QUESTE DUE CONDIZIONI DERIVANO DALL'IMPORRE UNA VARIAZIONE CUBICA DELLA DERIVATA NORMALE  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  LUNGO I LATI 1-3 E 2-3 - CON RIFERIMENTO AL LATO 1-3:

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{\partial w}{\partial \xi} \sin \phi + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cos \phi$$

$$\xi = s \cos \phi \quad \eta = s \sin \phi$$

$$\tan \phi = \frac{c}{b}$$

CONDIZIONE VARIAZIONE CUBICA DI  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$

COEFFICIENTE QUARTO ORDINE IN "S" NULLO

$$5b^4 \alpha_{16} + (3b^2 c^3 - 2b^4 c) \alpha_{17} + (2bc^4 - 3b^3 c^2) \alpha_{18} + (c^5 - 4b^2 c^3) \alpha_{19} - 5bc^4 \alpha_{20} = 0$$

IN MANIERA ANALOGA, PER IL LATO 2-3 SI RICAVALA:

$$5a^4 \alpha_{16} + (3a^2 c^3 - 2a^4 c) \alpha_{17} + (-2ac^4 + 3a^3 c^2) \alpha_{18} + (c^5 - 4a^2 c^3) \alpha_{19} + 5ac^4 \alpha_{20} = 0$$

A QUESTO PUNTO È POSSIBILE SCRIVERE LA RELAZIONE

$$[\bar{X}^n] [\alpha] = [\bar{U}_\pm^n]$$

VED. TABELLA PAGINA SEGUENTE

VECTORE SPOSTAMENTI GENERALIZZATI SISTEMA INTERNO

EQUAZIONI  $\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} = 0$

$$[\bar{U}_\pm^n]^T = \left[ \alpha_1^T \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right)_1, \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)_1, \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha_3} \right)_1, \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha_4} \right)_1, \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha_5} \right)_1, \dots, 0, 0 \right]$$

INVERTENDO LA RELAZIONE SOPRA SCRITTA

$$[\alpha] = [\bar{X}^n]^{-1} [\bar{U}_\pm^n]$$

$[\bar{U}_\pm^n]^T$  VECTORE SPOSTAMENTI MODALI SISTEMA INTERNO



OSSERVANDO CHE IL VETTORE  $[\bar{u}_I^*]$  PRESENTA GLI ULTIMI DUE TERMINI NULLI, LA RELAZIONE PUO' ESSERE RISCRISSA NELLA FORMA

$$[\alpha] = [\bar{x}^*]^{-1} [\bar{u}_I^*] = [T] [\bar{u}_I] \quad (18.1)$$

SI ELIMINANO LE ULTIME DUE COLONNE POICHE' GLI ULTIMI TERMINI DI  $[\bar{u}_I^*]$  SONO NULLI

$$[\bar{u}_I] = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5 \ w_6 \ w_7 \ w_8 \ w_9 \ w_{10}]$$

● MATRICE DI RIGIDEZZA

PARTENDO DALLA DEFINIZIONE DELL'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE PER LE PIASTE, SAPEENDO CHE QUESTA PUO' ESSERE ESPRESA IN TERMINI QUADRATICI DEGLI SPOSTAMENTI MODALI, SI PUO' SCRIVERE

$$(*) \quad U = \frac{D}{2} \iint \left[ w_{\xi\xi}^2 + w_{\eta\eta}^2 + 2\nu w_{\xi\xi} w_{\eta\eta} + 2(1-\nu) w_{\xi\eta}^2 \right] d\xi d\eta = \text{ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE IN TERMINI DI DEFORMA W}$$

$$= \frac{1}{2} [\bar{u}_I]^T [k] [\bar{u}_I] = \text{ENERGIA IN TERMINI DI SPOSTAMENTI MODALI}$$

$$[\alpha] = [T] [\bar{u}_I]$$

$$= \frac{1}{2} [\bar{u}_I]^T [T]^T [k] [T] [\bar{u}_I] =$$

$$[k] = [T]^T [k] [T]$$

"KERNEL" DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA

$$= \frac{1}{2} [\alpha]^T [K] [\alpha] = \text{ENERGIA DI DEFORMAZIONE IN TERMINI DI COORDINATE GENERALIZZATE \alpha_i}$$

DOVE I COEFFICIENTI DEL "KERNEL" SI OTTENGONO DALLA

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$$



CON RIFERIMENTO AL MONDO 1, LA LEGGE DI TRASFORMAZIONE RISULTA:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_{\xi_1} \\ w_{\eta_1} \\ w_{\xi\xi_1} \\ w_{\xi\eta_1} \\ w_{\eta\eta_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda\mu & \mu^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\mu & \lambda^2 - \mu^2 & \lambda\mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu^2 & -2\lambda\mu & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_{x_1} \\ w_{y_1} \\ w_{xx_1} \\ w_{xy_1} \\ w_{yy_1} \end{Bmatrix}$$

↑  
SPOSTAMENTO MONDO 1  
SISTEMA LOCALE

$$\lambda = \cos \theta \\ \mu = \sin \theta$$

↑  
SPOSTAMENTI MONDO 1  
SISTEMA GLOBALE

$$[\bar{u}_{1E}] = [\bar{R}] [\bar{u}_1]$$



$$\begin{Bmatrix} [\bar{u}_{1E}] \\ [\bar{u}_{2E}] \\ [\bar{u}_{3E}] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{R}] & 0 & 0 \\ 0 & [\bar{R}] & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{R}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\bar{u}_1] \\ [\bar{u}_2] \\ [\bar{u}_3] \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{u}_E] = [\bar{R}] [\bar{u}]$$

LA MATRICE DI RIGIDEZZA ESPRESSA NEL SISTEMA GLOBALE RISULTA:

$$U = \frac{1}{2} [\bar{u}_E]^T [k] [\bar{u}_E] =$$

$$= \frac{1}{2} [\bar{u}]^T \underbrace{[\bar{R}]^T [k] [\bar{R}]}_{[K]} [\bar{u}]$$

←  
[K] ← MATRICE DI RIGIDEZZA  
NEL SISTEMA GLOBALE



$$[\bar{R}]^T [\bar{T}]^T [k] [\bar{T}] [\bar{R}]$$

←  
MATRICE DI TRASFORMAZIONE  
TRA SISTEMA LOCALE E  
SISTEMA GLOBALE

↑  
MATRICE "KERNEL"

↑  
MATRICE GENERATRICE  
COORDINATE GENERALIZZATE



Per ora non dobbiamo cambiare niente rispetto all'elemento di pag. 54; abbiamo scritto solo in termini diversi nella nostra formulazione, ma non dobbiamo stravolgerne la natura dell'elemento. Abbiamo riscritto le stesse cose con riferimenti diversi → ora non conferma l'arbitrarietà e dunque continua ad essere non conforme qua.

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2A} \left[ (y_2 - y_3) \frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} + (y_3 - y_1) \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} + (y_1 - y_2) \frac{\partial g_1}{\partial \xi_3} \right]$$

- CONSIDERAZIONI ANALOGHE VALGONO PER  $\frac{\partial u_1}{\partial y}$
- SI RIPETONO LE OSSERVAZIONI PRECEDENTI PER LE FUNZIONI  $g_2$   $h_2$   $h_3$  NEL NODO 2 E  $g_3$   $h_3$  NEL NODO 3.
- LA FUNZIONE  $f_4$  VALE 1 NEL BARICENTRO E ZERO NEI TRE NODI DI VERTICE.

Come facciamo a far  $n$  che l'elemento diventi un elemento conforme?

CON RIFERIMENTO ALLA FUNZIONE APPROSSIMANTE SI PUÒ NOTARE CHE LO SPOSTAMENTO  $w$  VARIA CON ANDAMENTO CUBICO LUNGO UN LATO MENTRE LA DERIVATA NORMALE  $\frac{\partial w}{\partial n}$  VARIA CON ANDAMENTO PARABOLICO. PER QUEST'ULTIMA LE TRE  $\frac{\partial w}{\partial n}$  COSTANTI NON RISULTANO UNIVOCAMENTE DETERMINATE DAI DUE VALORI DI  $\frac{\partial w}{\partial n}$  ALLE ESTREMITÀ DEL LATO. "LA CONTINUITÀ INTERELEMENTI RISULTA NON SODDISFATTA" - UN METODO PER SUPERARE TALE PROBLEMA È QUELLO INDICATO DA HADLEY - KELSEY:

- DATI DUE ELEMENTI ADIACENTI "A" E "B" LA CONTINUITÀ DELLA DERIVATA NORMALE È IMPOSTA RICHIEDENDO CHE NEL PUNTO MEDIO DEL LATO COMUNE

$$\left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_A - \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_B = 0$$

la modifica da loro introdotta non entra in gioco nella formulazione dell'elemento stesso, ma nella formulazione della struttura (VEDI APPUNTI LEZ. 15-04-20).  
 nuovo  $w$  piccolo perché con faccende conformi.  
 il risultato è che si ricorrendo quest'operazione questa relax. la si ricavo per tutti i lati interni.



TENUTO CONTO DELLA (\*) È POSSIBILE RISCRIVERE LA RELAZIONE SOPRA RIPORTATA NEL SEGUENTE MODO

$$(**) \textcircled{a} [C_J]^T [u] = 0 \quad J = 1, 2, m$$

DOVE  $J$  = NUMERO IDENTIFICATIVO DELL'INTERFACCIA TRA I DUE ELEMENTI  
 $[C_J]^T$  = VETTORE RIGA CONTENENTE LE DERIVATE NORMALI DELLE FUNZIONI DI FORMA

$[u]$  = VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI LOCALI DELL'INTERA STRUTTURA

L'INSIEME DELLE "m" CONDIZIONI RELATIVE A TUTTE LE "m" INTERFACCIE ESISTENTI (m EQUAZIONI \*\*) POSSONO ESSERE SCRITTE IN FORMA MATRICIALE PER L'INTERA STRUTTURA:

$$[C][u] = [0]$$

(lati interni)  $\textcircled{a}$  è per un lato; questa è per l'intera struttura.

SI RIDUCE ALLA COSTRUZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'INTERA STRUTTURA ED ALL'ASSEMBLAMENTO DELL'INTERA STRUTTURA UTILIZZANDO LA FORMULAZIONE (\*) INCONVENIENTE → L'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE RISULTA DEFINITA IN MANIERA IMPROPRIA.

Allora: se ho la mia matrice di rigidezza dell'elemento non conforme, piú che di quella, costruisco la matrice di rigidezza globale della mia struttura che sarà appunto costruita a partire da quella di un elemento NON conforme → l'energia elastica non è NON CORRETTA. perché la continuità della derivata normale non è presa in considerazione nella mia struttura.

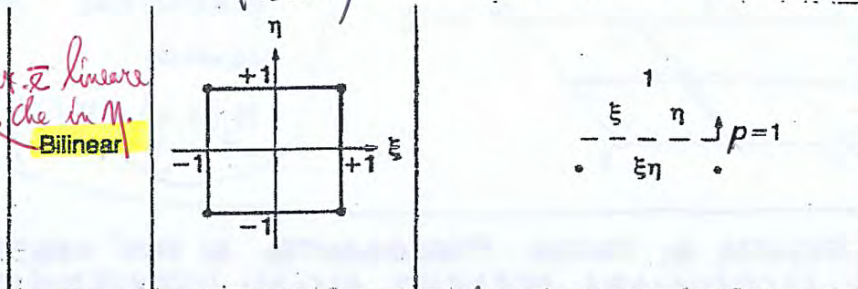


**c) ELEMENTO BIDIMENSIONALE (RETANGOLARE)**

1) CONCETTUALMENTE LA DETERMINAZIONE DELLE FUNZIONI DI FORMA PER ELEMENTI RETANGOLARI IN CLASSE  $C^0$  RISULTA ESTREMAMENTE SEMPLICE: E' SUFFICIENTE ESEGUIRE IL PRODOTTO DI FUNZIONI DI FORMA 1-D PER COSTRUIRE LA FUNZIONE DI FORMA 2-D DESIDERATA (VED. INTERPOLAZIONE - ELEMENTO BILINEARE, BIQUADRATICO, ...)

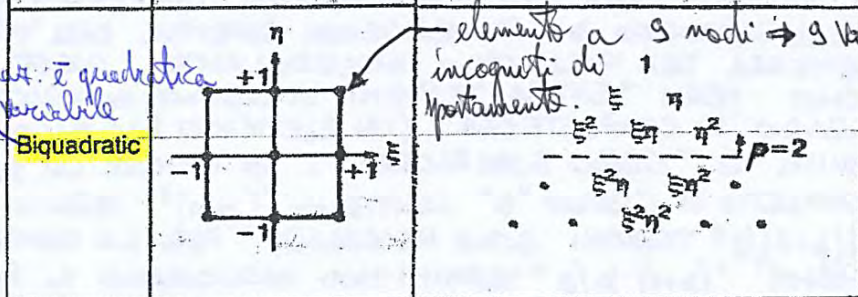
(lineari) in una direc. e nell'altra

*l'approximaz. è lineare ma in  $\xi$  che in  $\eta$ .*



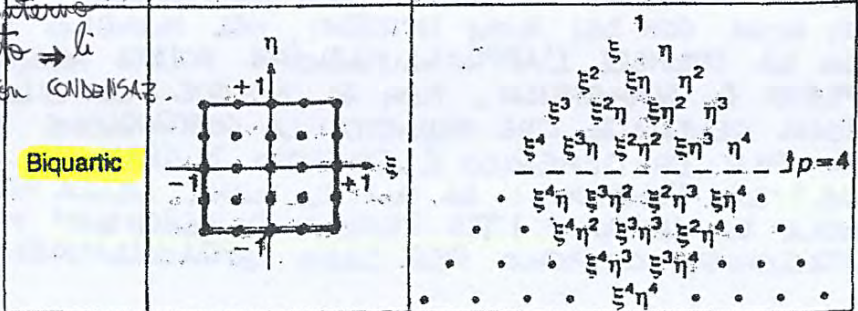
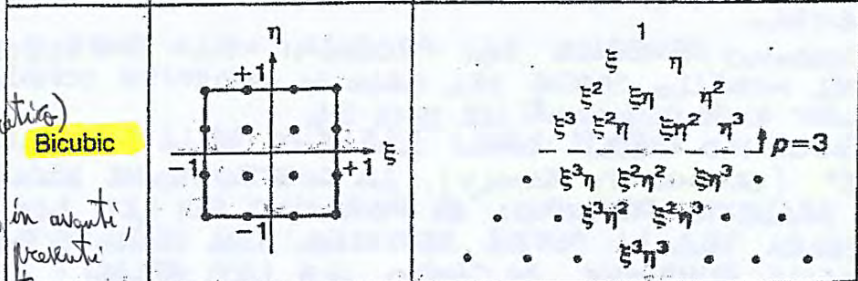
Elementi "PARENT" (omnis -1,+1)  $\Rightarrow$  farlo semplicemente un cambiamento di scala per ottenere l'elemento "REAL".

*l'approximaz. è quadratica sia nella  $\xi$  che in  $\eta$ .*



**ELEMENTI DELLA FAMIGLIA DI LAGRANGE**

*(caso del biquadrato) dal biquadrato in avanti, i nodi sono presenti anche all'interno dell'elemento  $\Rightarrow$  li toglieremo con CONDENSAZ. STATICA.*



**DEFINIZIONE DEI NODI DELL'ELEMENTO**

**TERMINI APPARTENENTI AL POLINOMIO APPROSSIMANTE**



Questi elementi non hanno nodi centrali (tranne l'ultimo (il QUARTICO) che l'ha anche)

<p><b>Linear</b></p>		$1$ $\xi \quad \eta \quad p=1$ $\xi \eta$
<p><b>Quadratic</b></p>		$\xi \quad \eta$ $\xi^2 \quad \xi \eta \quad \eta^2 \quad p=2$ $\xi^2 \eta \quad \xi \eta^2$
<p><b>Cubic</b></p>		$1$ $\xi \quad \eta$ $\xi^2 \quad \xi \eta \quad \eta^2$ $\xi^3 \quad \xi^2 \eta \quad \xi \eta^2 \quad \eta^3 \quad p=3$ $\xi^3 \eta \quad \xi^2 \eta^2 \quad \xi \eta^3 \quad \eta^4$
<p><b>Quartic</b></p>		$1$ $\xi \quad \eta$ $\xi^2 \quad \xi \eta \quad \eta^2$ $\xi^3 \quad \xi^2 \eta \quad \xi \eta^2 \quad \eta^3$ $\xi^4 \quad \xi^3 \eta \quad \xi^2 \eta^2 \quad \xi \eta^3 \quad \eta^4 \quad p=4$ $\xi^4 \eta \quad \xi^3 \eta^2 \quad \xi^2 \eta^3 \quad \eta^4$

stesso tipo di polinomio che avremmo nel caso dell'approssimazione di Lagrange.  
 bilineare  
 rispetto all'approssimazione di Lagrange, qui non ho i nodi interni, ma solo sui lati per garantire, in questo caso, un'approssimazione quadratica.

**ELEMENTI DELLA FAMIGLIA DELLA "SERENDIPITA"**

I termini nel polinomio di questi sono meno di quelli nel polinomio di Lagrange visti prima  $\Rightarrow$  questi polinomi. Nella realtà gli elementi della serendipità fanno il loro mestiere  $\Rightarrow$  sono implementati nei codici di calcolo commerciale a parità di grado di approssimazione degli spostamenti permettono di avere un numero minore di nodi all'interno dell'elemento rispetto agli elementi della famiglia di Lagrange  $\Rightarrow$  dico

**OSSERVAZIONE:**  
 PER QUESTO ELEMENTO E' NECESSARIO UN ULTERIORE NODO RISPETTO A QUELLI RAPPRESENTATI IN GENERE TALE NODO POSTO NEL BARICENTRO DELL'ELEMENTO VIENE ELIMINATO MEDIANTE LA CONDIZIONE STATICA -

ma: buon compromesso al punto di vista della risposta ed in più si ha un contenimento delle risorse computazionali.

ma viene tolto con condensazione statica.

Per costruire le funz. di forma il concetto di base è sempre lo stesso: in quel nodo la funz. di forma deve valere 1 e in tutti gli altri nodi 0.

**DEFINIZIONE NODI ELEMENTO**

**TERMINI APPARTENENTI AL POLINOMIO APPROSSIMANTE**

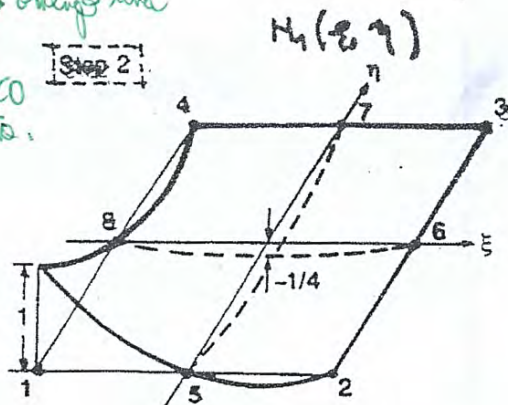
VIENE ORA PRESENTATO UN METODO (GENERALIZZABILE) PER LA DETERMINAZIONE DELLE FUNZIONI DI FORMA DELL'ELEMENTO QUADRATICO DELLA FAMIGLIA DELLA SERENDIPITA: DALLA TABELLA SI PUO' OSSERVARE CHE LA SOLUZIONE APPROSSIMANTE E' REALIZZATA TRAMITE UN POLINOMIO COMPLETO DI SECONDO GRADO PIU' DUE TERMINI CUBICI. IN TALE PROCEDURA SI GENERANO LE FUNZIONI DI FORMA DEI NODI INTERNI IMPOSTANDO DELLE CONDIZIONI SEMPLICI E POI SI GENERANO LE FUNZIONI DI FORMA DEI NODI D'ANGOLO MEDIANTE SOTTOTRATTI DALLE FUNZIONI INIZIALI DELLE FUNZIONI OBTENUTE PER I NODI INTERNI.



**STEP 2**

estraggo una funz. quadratica (N5, 2/8) sottraendo una funz. quadratica a una lineare  $\Rightarrow$  ottengo una funz. quadratica  $\Rightarrow$  andamento di come voluto.

IN QUESTA FASE OCCORRE FAR SI TIPO PARABOLICO CHE PER I NODI 8 E 5 LA FUNZIONE DI FORMA ASSUMA IL VALORE 0 E HOI 1/2 COME DATO DALLA  $F_2$  - SI SOTTRAIE ALLA  $F_1$ :  $1/2 N_5$  E  $1/2 N_8$



$$N_1(\xi, \eta) = F_2(\xi, \eta) - \frac{1}{2} N_5(\xi, \eta) - \frac{1}{2} N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

TALE SOTTRAZIONE NON ALTERA I VALORI CORRETTI DEGLI ALTRI SEI NODI. Quindi ho costruito le funz. di forma annullando l'elemento e facendo si di ottenere quello che "mi serve"  $\Rightarrow$  famiglia della perpendicolarità.

(cioè "by inspection")

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi\xi_i) (1+\eta\eta_i) (\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1)$$

$\xi_i, \eta_i =$  COORDINATE NODO  $i$

Lagrange è un polinomio interpolatore più ricco, però, per centro, ha la grossa dei nodi centrali  $\Rightarrow$  più costosi.

FUNZIONI DI FORMA ELEMENTO QUADRATICO

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1+\xi^2) (1+\eta\eta_i)$$

PER  $\xi_i = 0$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1+\xi\xi_i) (1-\eta^2)$$

PER  $\eta_i = 0$

FUNZIONI DI FORMA QUADRATICHE LUNGO CIASCUN LATO (QUESTO ASSICURA LA CONTINUITA' C<sup>0</sup> TRA GLI ELEMENTI POICHE' SONO TRE I NODI SU CIASCUN LATO - ALL'INTERNO DELL'ELEMENTO HANNO ANDAMENTO CUBICO IN ALCUNE DIREZIONI (POLINOMIO CUBICO INCOMPLETE) E NON QUE' IL COMPORTAMENTO RISULTA "ESSENZIALMENTE QUADRATICO"

DA QUI FINO A "CONFRONTO POLINOMI INTERPOLATORI" NON FATTO.

OSSERVAZIONE: IL METODO ORA PRESENTATO GENERALIZZABILE, PRODUCE SOLO FUNZIONI DI FORMA PER I NODI POSTI SUL CONTOURNO CONTEHENTI I TERMINI DEL TIPO  $\xi^p, \xi^p \eta, \xi \eta^p, \eta^p$



IN FORMA COMPACTA QUELLE RISULTANO

$$H_i = \frac{1}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) [-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)] \quad i = 1, 2, 3, 4$$

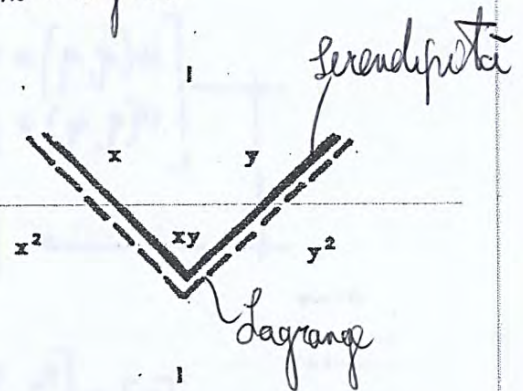
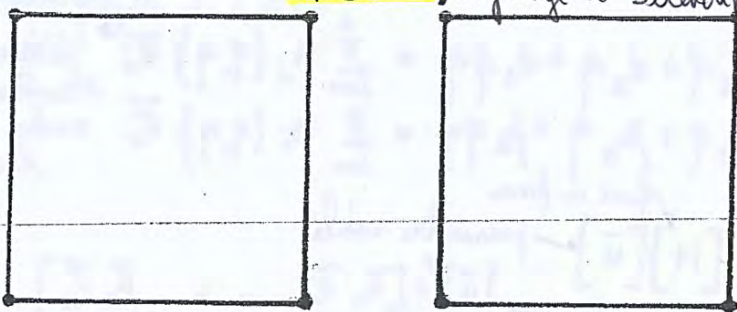
$$H_i = \frac{9}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) (1 + 9\eta \eta_i) \quad \text{PER } \xi_i = \pm 1 \quad \eta_i = \pm \frac{1}{3}$$

$$H_i = \frac{9}{32} (1 - \xi^2) (1 + 9\xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad \text{PER } \eta_i = \pm 1 \quad \xi_i = \pm \frac{1}{3}$$

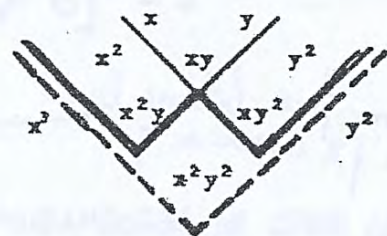
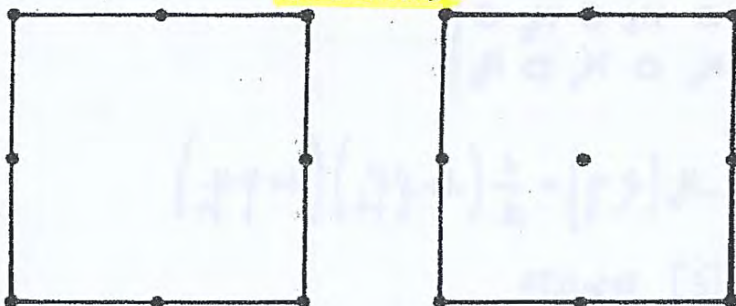
LEZ. 28-04-2014

**CONFRONTO POLINOMI INTERPOLATORI**

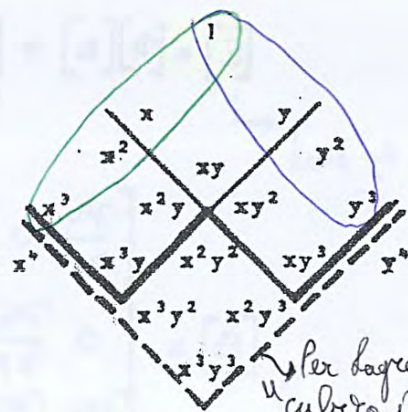
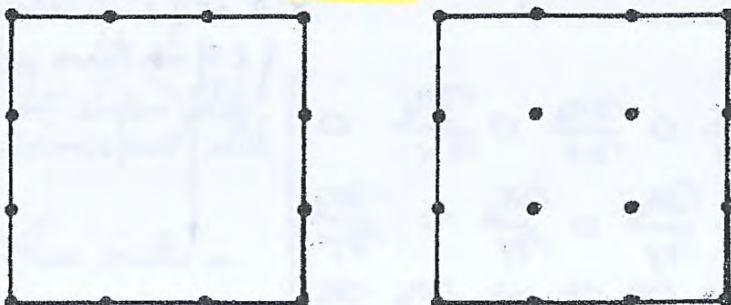
**LINEARE** → Lagrange e Serendipità non uguali



**QUADRATICO**



**CUBICO**



Per Lagrange ho:  
 "cubico in x"   
 "per cubico in y" → ho tutti questi elementi!"

**SERENDIP**

**LAGRANGE**

**BASE POLINOMIALE**

SERENDIP

LAGRANGE



SAREMO ORA CHE:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial x} &= \frac{1}{a} \frac{\partial H_i}{\partial \xi} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{4} (1 + \xi \eta_i) (1 + \eta \eta_i) \right] = \\ &= \frac{1}{4a} \eta_i (1 + \eta \eta_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial y} &= \frac{1}{b} \frac{\partial H_i}{\partial \eta} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{4} (1 + \xi \eta_i) (1 + \eta \eta_i) \right] = \\ &= \frac{1}{4b} (1 + \xi \eta_i) \eta_i \end{aligned}$$

LA MATRICE  $[B]$  PUO' ESSERE DESCRITTA COME:

$$[B] = [ [B_1] [B_2] [B_3] [B_4] ]$$

DOVE

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y} \\ \frac{\partial H_i}{\partial y} & \frac{\partial H_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4a} \eta_i (1 + \eta \eta_i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4b} (1 + \xi \eta_i) \eta_i \\ \frac{1}{4b} (1 + \xi \eta_i) \eta_i & \frac{1}{4a} \eta_i (1 + \eta \eta_i) \end{bmatrix}$$

PARALLELAMENTE, PER QUANTO VISTO IN PRECEDENZA, LA MATRICE DI RIGIDezza E' DATA DA:

$$[k] = \int_A [B]^T [D] [B] dA =$$

$$dA = dx dy = (a d\xi) (b d\eta) = ab d\xi d\eta$$

passiamo a  $\xi$  e  $\eta$

$$= ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] d\xi d\eta$$



Contributo bilineare classico

QUESTO CONDUCCE AD UN CAMPO DI SPOSTAMENTI DATO DA

Praticamente l'elemento risulta essere incompatibile: se quelli sono spostamenti propri dell'elemento, l'elemento adiacente avrà questi parametri che sono diversi, quindi lungo il lato comune ai 2 elementi adiacenti, la  $u$  di un elemento sarà diversa dalla  $u$  dell'altro elemento

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + (1-\eta^2)u_s + (1-\eta^2)u_b$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + (1-\eta^2)v_s + (1-\eta^2)v_b$$

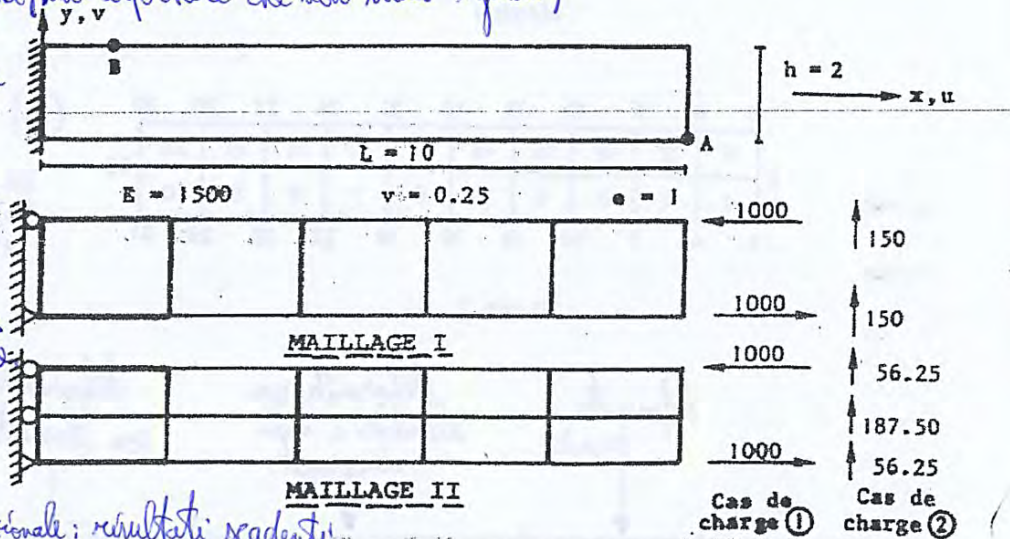
$$H_i(\eta, \eta) = \frac{1}{4}(1+\eta\eta_i)(1+\eta\eta_i)$$

$u_s, u_b$ : parametri nodali aggiunti. Questi parametri sono propri di quell'elemento, non hanno nulla a che vedere con gli equivalenti parametri nodali degli elementi adiacenti.

**OSSERVAZ.:**

LE COORDINATE GENERALIZZATE ( $u_s, u_b, v_s, v_b$ ) VENGONO CONSIDERATE COME DEI GRADI DI LIBERTA' "INTERNI" E SONO ELIMINATI TRAMITE CONDENSAZIONE STATICA. QUESTI POSSONO ESSERE INTERPRETATI COME DEGLI SPOSTAMENTI RELATIVI NEI RIGUARDI DEGLI SPOSTAMENTI NODALI E SONO ASSOCIATI AD UN ELEMENTO BEN DEFINITO. NE CONSEGUENZA UNA MODIFICA DI SPOSTAMENTI LUNGO IL BORDO DELL'ELEMENTO TALI DA RENDERLI "INCOMPATIBILI" CON QUELLI DELL'ELEMENTO VICINO.

Andiamo a violare il principio di continuità degli spostamenti per questa "proprietà" funzionale, ma funziona in una condizione ben precisa: se capisco come può funzionare un elemento incompatibile tramite il PATCH TEST.  $\Rightarrow$  tale test passa se l'elemento è rettangolare



elemento tradizionale: risultati scadenti

			DEPLACEMENT v en A		CONTRAINTE $\sigma_x$ en B	
Cas de charge			①	②	①	②
<b>Théorie des poutres</b>			100.0	103.0	3000.	4050.
QUADRILATERS	Q4	Maillage I	68.1	70.1	2182.	2945.
	Q4	Maillage II	70.6	72.3	2188.	2954.
	Q5	Maillage II	75.7	77.7	2270.	3056.
	Q6	Maillage I	100.0	101.5	3000.	4050.
	Q6	Maillage II	100.0	101.3	3000.	4050.

Non lo consideriamo

MODI INCOMPATIB.

**ATTENZIONE** AI FACILI ENTUSIASMI: QUESTO ELEMENTO (Q6) E' PERFORMANTE SOLO NEL CASO DI MESH PRESSOCHE' RETTANGOLARI. L'IMPiego COME ELEMENTO ISOPARAMETRICO (VEDI DOPO) E DUHQUE COME QUADRILATERO IREGOLARE GENERA UN NEGROSO NELLA SORTA' DEI RISULTATI. [QUESTO DERIVA DAL FATTO CHE L'ELEMENTO NON SUPERA IL "PATCH TEST" SE NON NELLA FORMA RETTANGOLARE]



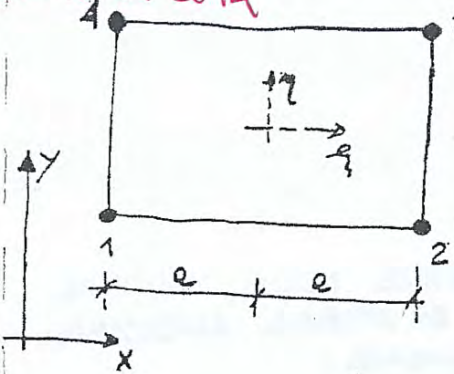
Cioè (i modi incompatibili) ci danno dei risultati non corretti



Sistema analogo può farsi per elementi di cubico (ma non lo facciamo vediamo)

**2) ELEMENTO CUBICO (4 NODI)**

LEZ. 20-04-2014



In cui si assumono come incognite nodali LE:

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \quad v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i$$

E COME POLINOMIO APPROSSIMANTE:

$$u(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3$$

$$v(\xi, \eta) = \beta_1 + \beta_2 \xi + \dots$$

$$[u] = [H][\bar{u}] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & \dots & H_{12} & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & \dots & 0 & H_{12} \end{bmatrix} [\bar{u}]$$

$$\left[ \bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_1 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)_1 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_1 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)_1 \dots \right]^T$$

DA CUI DERIVANO LE SEGUENTI FUNZIONI DI FORMA:

$$H_1 = \frac{1}{8}(\eta-1)(\xi-1) \left[ \frac{1}{2}(\eta-1)(\xi-1) - \frac{1}{2}(\eta+1)(\xi+1) - (\eta+1)(\eta-1) - (\xi+1)(\xi-1) \right]$$

$$H_2 = \frac{a}{8}(\eta-1)(\xi-1)^2(\xi+1)$$

$$H_3 = -\frac{b}{8}(\eta-1)^2(\xi-1)(\eta+1)$$

$$H_4 = \frac{1}{8}(\eta-1)(\xi+1) \left[ \frac{1}{2}(\eta-1)(\xi+1) - \frac{1}{2}(\eta+1)(\xi-1) + (\eta+1)(\eta-1) + (\xi+1)(\xi-1) \right]$$

$$H_5 = \frac{a}{8}(\eta-1)(\xi+1)^2(\xi-1)$$

$$H_6 = \frac{b}{8}(\eta-1)^2(\xi+1)(\eta+1)$$

$$H_7 = \frac{1}{8}(\eta+1)(\xi+1) \left[ \frac{1}{2}(\eta+1)(\xi+1) - \frac{1}{2}(\xi-1)(\eta-1) - (\eta+1)(\eta-1) - (\xi+1)(\xi-1) \right]$$

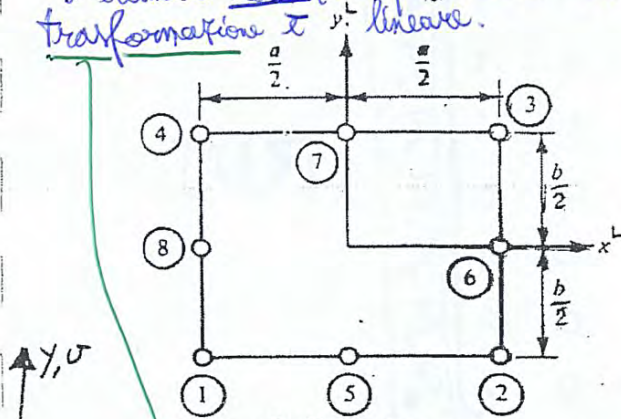
$$H_8 = \frac{a}{8}(\eta+1)(\xi+1)^2(\xi-1)$$

$$H_9 = \frac{b}{8}(\eta+1)^2(\xi+1)(\eta-1)$$

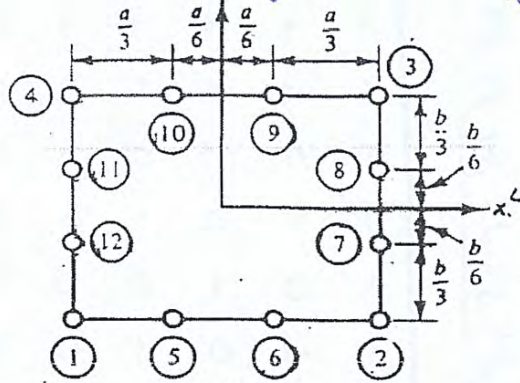


Discorso analogo può essere fatto per gli

3) ELEMENTI DELLA SERIEHIPITA': QUADRATICO (8 HOBI), CUBICO (12 HOBI).  
 LEZ. 28-04-2014  
 di elemento real (sia quadratico che cubico)  $\bar{x}$  rettangolare  $\Rightarrow$  la legge di trasformazione  $\bar{x}$  lineare.



QUADRATICO



CUBICO

SI ASSUMONO COME GRADI DI LIBERTA' IN CIASCUN HOBO LE DUE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$

$$x^L = x - x_c$$

$$y^L = y - y_c$$

$$\xi = \frac{x^L}{(a/2)} = \frac{x - x_c}{(a/2)}$$

$$\eta = \frac{y^L}{(b/2)} = \frac{y - y_c}{(b/2)}$$

LEGGI DI TRASFORMAZIONE

- ELEMENTO QUADRATICO

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 = \\ &= \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \xi + \bar{\alpha}_3 \eta + \bar{\alpha}_4 \xi^2 + \bar{\alpha}_5 \xi \eta + \bar{\alpha}_6 \eta^2 + \bar{\alpha}_7 \xi^2 \eta + \bar{\alpha}_8 \xi \eta^2 = \\ &= [H_i(\xi, \eta)] [\bar{u}_i] = \\ &= -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \bar{u}_1 \\ &\quad -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta) \bar{u}_2 \\ &\quad -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta) \bar{u}_3 \\ &\quad -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta) \bar{u}_4 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \bar{u}_5 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \bar{u}_6 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \bar{u}_7 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \bar{u}_8 \end{aligned}$$

LA DETERMINAZIONE DEI COEFFICIENTI  $\bar{\alpha}_i$  AVVIENE, COME GIÀ VISTO IN PRECEDENZA, IMPOSTANDO LE CONDIZIONI MODALI

$$u(\xi_i, \eta_i) = \bar{u}_i$$



PER QUANTO GIÀ VISTO IN PRECEDENZA A PARTIRE DALLE FUNZIONI DI FORMA, È POSSIBILE CALCOLARE LA MATRICE [B] DELLE DERIVATE, RICORDANDO CHE

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

INNESTANDO LA RELAZIONE

[J] MATRICE JACOBIANA DELLA TRASFORMAZIONE

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

[J]<sup>-1</sup> INVERSA DELLA MATRICE JACOBIANA

J = DETERMINANTE JACOBIANO =

$$= \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y}$$

POICHE'

$$x = x_c + \rho \frac{a}{2}$$

$$y = y_c + \rho \frac{b}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{a}{2} \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{b}{2}$$

$$J = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} - 0 \cdot 0 = \frac{ab}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4}{ab} \left[ \frac{b}{2} \frac{\partial f}{\partial \rho} - 0 \right] = \frac{2}{a} \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{ab} \left[ 0 + \frac{a}{2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] = \frac{2}{b} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$



$$\begin{array}{c}
 \textcircled{A} \\
 \left[ \begin{array}{ccc}
 \overline{b}_{1,1} & \overline{b}_{1,2} & \overline{b}_{1,3} \\
 \overline{b}_{2,1} & \overline{b}_{2,2} & \overline{b}_{2,3} \\
 \overline{b}_{3,1} & \overline{b}_{3,2} & \overline{b}_{3,3} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \overline{b}_{15,1} & \overline{b}_{15,2} & \overline{b}_{15,3} \\
 \overline{b}_{16,1} & \overline{b}_{16,2} & \overline{b}_{16,3}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{c}
 \textcircled{B} \\
 \left[ \begin{array}{ccc}
 b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & \dots & b_{1,15} & b_{1,16} \\
 b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & \dots & b_{2,15} & b_{2,16} \\
 b_{3,1} & b_{3,2} & \dots & \dots & b_{3,15} & b_{3,16}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\overline{k}_{ij} = \sum_{l=1}^3 \overline{b}_{i,l} b_{l,j}$$

$$\overline{b}_{i,l} = \sum_{r=1}^3 b_{r,i} d_{r,l}$$

DA CUI SEGUE IL TERMINE CORRENTE

$$\begin{aligned}
 k_{ij} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overline{k}_{ij} J \, d\xi \, d\eta = \overset{\text{cost.}}{Jt} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overline{k}_{ij} \, d\xi \, d\eta = \\
 &= t \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \sum_{l=1}^3 \left[ \left( \sum_{r=1}^3 b_{r,i} d_{r,l} \right) \cdot b_{l,j} \right] \right] d\xi \, d\eta
 \end{aligned}$$

L'INTEGRAZIONE DELLA FUNZIONE INTEGRANDA DIVIENE IN FORMA NUMERICA:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overline{k}_{ij} \, d\xi \, d\eta = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \overline{k}_{ij}(\xi_p, \eta_q) \cdot w_p w_q$$

$\uparrow \uparrow$   
 INDICE DEI PUNTI  
 DI INTEGRAZIONE  
 DI GAUSS  
 ( $m=n$ )

$\uparrow$   
 $(\xi_p, \eta_q)$   
 COORDINATE DEL  
 GENERICO PUNTO  
 DI GAUSS

$\uparrow$   
 "PESI" RELATIVI  
 AL PUNTO DI  
 GAUSS ( $p, q$ )

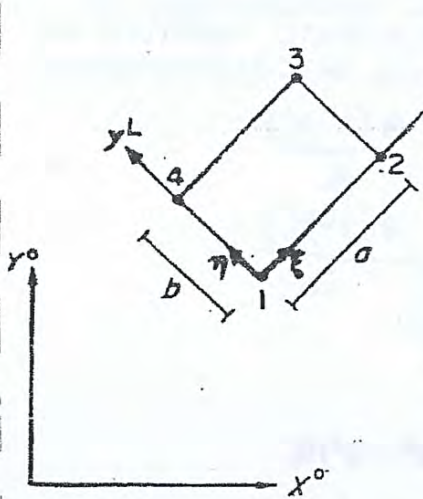
VED. CAPITOLO INDICATO  
 ALL'INTEGRAZIONE NUMERICA



LEZ. 28-04-2016

**CE) FORMULAZIONE PER ELEMENTI PASTRA**

**1) ELEMENTO ACH (ADINI - CLOUGH - HELOSH)**



*gli studenti*  
Sistema di riferimento locale in cui avremo studiato l'elemento. Invece di questo sistema posso pensare di usare il sistema adimensionale  $\xi$  e  $\eta$ :  
 $\xi = \frac{x-L}{b}$   
 $\eta = \frac{y-L}{a}$   
 posso prenderlo nel nodo 1 come in figura o nel baricentro (che solo una traslazione di mezzo).

COME GIÀ VISTO IN PRECEDENZA SI ASSUNGO MO COME INCOGNITE MODALI LE QUANTITÀ:

$$\left( \bar{w} \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial x^L} \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial y^L} \right)_i$$

IN TAL CASO HE SEQUE CHE L'ESPRESSIONE DELL'ABBASSAMENTO  $w$  LUNGO UN LATO DEVE DIPENDERE DA QUATTRO PARAMETRI (CUBICI) PER SODDISFARE I REQUISITI DI CONTINUITÀ - CON TEMPORANEAMENTE LE

DERIVATE NORMALI DEVONO VARIARE LINEARMENTE PER SODDISFARE LA CONTINUITÀ DI  $\frac{\partial w}{\partial n_i}$  - ASSUMENDO UN POLINOMIO INTERPOLATORE DEL TIPO:

*Come avremo fatto quando avremo visto il caso generalizzato o, se volete, la teoria dell'interpolazione.*

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3 \quad (*)$$

SI PUÒ OSSERVARE CHE LA CONTINUITÀ DI  $w$  RISULTI SODDISFATTA MENTRE SOGGONO PROBLEMI PER LA DERIVATA NORMALE: SI OTTEGGONO DELLE ESPRESSIONI DELLA DERIVATA NORMALE LUNGO I LATI DEL TERZO ORDINE CONTRO UNA RICHIESTA DI VARIAZIONE LINEARE.

LA (\*) RISCRIITA IN TERMINI DI FUNZIONI DI FORMA RISULTA:

$$w = H_1 \bar{w}_1 + H_2 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x^L} \right)_1 + H_3 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y^L} \right)_1 + H_4 \bar{w}_2 + \dots \quad (**)$$

- $H_1 = 2(\eta-1)(\xi-1) \left[ \frac{1}{2}(1+\xi+\eta) - \xi^2 - \eta^2 \right]$
- $H_2 = a(\eta-1)(\xi-1)^2 \xi$
- $H_3 = -b(\eta-1)^2 (\xi-1) \eta$
- $H_4 = 2(\eta-1) \xi (\eta^2 + \xi^2 - \frac{3}{2} \xi - \frac{1}{2} \eta)$
- $H_5 = a(\eta-1) \xi^2 (\xi-1)$
- $H_6 = b(\eta-1)^2 \xi \eta$
- $H_7 = 2\eta \xi \left[ -\eta^2 - \xi^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\xi + \eta) \right]$
- $H_8 = a\eta \xi^2 (\xi-1)$
- $H_9 = b\eta^2 \xi (\eta-1)$
- $H_{10} = 2\eta (\xi-1) (\eta^2 + \xi^2 - \frac{1}{2} \xi - \frac{3}{2} \eta)$
- $H_{11} = a\eta \xi (\xi-1)^2$
- $H_{12} = -b\eta^2 (\xi-1) (\eta-1)$

FUNZIONI DI FORMA IN TERMINI DI COORDINATE INTERNE



SAPENDO CHE PER LA MATRICE DI RIGIDEZZA VALE LA PROPRIETA'

$$U = \frac{1}{2} [\bar{w}]^T [k] [\bar{w}]$$

E CHE, PER QUANTO VISTO A PAGINA PRECEDENTE

$$U = [\bar{w}]^T \left\{ \int_A \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^{L2}} [H] \right)^T \left( \frac{\partial^2}{\partial x^{L2}} [H] \right) + \dots \right] dx^L dy^L \right\} [\bar{w}]$$

APPLICANDO IL TEOREMA DI CASTIGLIANO SI RICAHA IL TERMINE GENERICO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA:

$$k_{ij} = D \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^{L2}} \cdot \frac{\partial^2 H_j}{\partial x^{L2}} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^{L2}} \cdot \frac{\partial^2 H_j}{\partial y^{L2}} + \right. \\ \left. + D \left[ \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^{L2}} \cdot \frac{\partial^2 H_j}{\partial y^{L2}} + \frac{\partial^2 H_j}{\partial x^{L2}} \cdot \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^{L2}} \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^L \partial y^L} \cdot \frac{\partial^2 H_j}{\partial x^L \partial y^L} \right\} dx^L dy^L$$

ESEMPIO: CALCOLARE  $k_{34}$  UTILIZZANDO LA RELAZIONE SOPRASCRITTA.

$$(*) \quad k_{34} = D \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{4\partial^2 \eta_3}{a^2 \partial \xi^2} \left( \frac{4\partial^2 \eta_4}{a^2 \partial \xi^2} \right) + \frac{4\partial^2 \eta_3}{b^2 \partial \eta^2} \left( \frac{4\partial^2 \eta_4}{b^2 \partial \eta^2} \right) + \frac{16\nu}{a^2 b^2} \left[ \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial^2 \eta_4}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \eta_4}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial \eta^2} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{32(1-\nu)}{a^2 b^2} \left( \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial \xi \partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta_4}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right\} \left( \frac{ab}{4} \right) d\xi d\eta$$

DOVE

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k)(2 + \xi\xi_k + \eta\eta_k - \xi^2 - \eta^2)$$

$$\frac{\partial^2 N_k}{\partial \xi^2} = \frac{1}{4}(1 + \eta\eta_k)(\xi_k^2 - 3\xi\xi_k - 1)$$

$$\frac{\partial^2 N_k}{\partial \eta^2} = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_k)(\eta_k^2 - 3\eta\eta_k - 1)$$

$$\frac{\partial^2 N_k}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8}[4\xi_k\eta_k - 2(\xi_k\eta + \xi\eta_k) + 2\xi_k\eta_k(\xi\xi_k + \eta\eta_k) - 3\xi_k\eta_k(\xi^2 + \eta^2)]$$

$$\left( \xi_3, \eta_3 \right) = (1, 1) \quad \left( \xi_4, \eta_4 \right) = (-1, 1)$$

LA RELAZIONE (\*) PUO' ESSERE RISCRIITA NELLA FORMA INDICATA DA ZIENKIEWICZ - GALLAGHER:

$$k_{34} = D(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5)$$

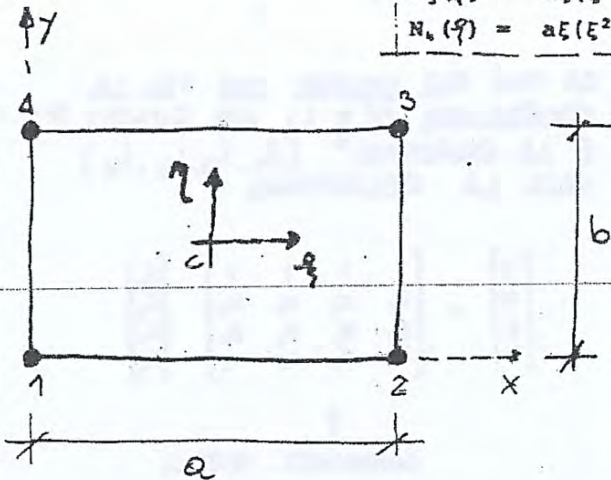


DOVE

$$\begin{aligned}
 [H_w] &= [H_1(\xi) \cdot H_1(\eta) & H_2(\xi) \cdot H_1(\eta) & H_2(\xi) \cdot H_2(\eta) & H_1(\xi) \cdot H_2(\eta)] \\
 [H_{w_x}] &= [H_2(\xi) \cdot H_1(\eta) & H_3(\xi) \cdot H_1(\eta) & H_4(\xi) \cdot H_2(\eta) & H_0(\xi) \cdot H_2(\eta)] \\
 [H_{w_y}] &= [H_1(\xi) \cdot H_2(\eta) & H_2(\xi) \cdot H_3(\eta) & H_2(\xi) \cdot H_4(\eta) & H_1(\xi) \cdot H_0(\eta)] \\
 [H_{w_{xy}}] &= [H_3(\xi) \cdot H_3(\eta) & H_4(\xi) \cdot H_3(\eta) & H_4(\xi) \cdot H_4(\eta) & H_3(\xi) \cdot H_0(\eta)]
 \end{aligned}$$

POLINOMI DI HERMITE

$$\begin{aligned}
 H_1(\xi) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) & H_1(\eta) &= (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) \\
 H_2(\xi) &= (3\xi^2 - 2\xi^3) & H_2(\eta) &= (3\eta^2 - 2\eta^3) \\
 H_3(\xi) &= 6\xi(\xi - 1)^2 & H_3(\eta) &= 6\eta(\eta - 1)^2 \\
 H_4(\xi) &= 6\xi(\xi^2 - \xi) & H_4(\eta) &= 6\eta(\eta^2 - \eta)
 \end{aligned}$$



MANTENENDO LA STESSA DEFINIZIONE DI POLINOMIO APPROSSIMANTE, LO STUDIO DELL'ELEMENTO PUO' ESSERE CONDOTTO IN TERMINI DI COORDINATE NATURALI (SISTEMA BARICENTRICO 3DIMENSIONALE) - IN TAL CASO LA RELAZIONE CHE ESPRIME LO SPOSTAMENTO  $w$  IN FUNZIONE DEI GRADI DI LIBERTA' MODALI RISULTA:

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \left[ G_i(\xi) G_i(\eta) w_i + \frac{a}{2} H_i(\xi) G_i(\eta) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b}{2} G_i(\xi) H_i(\eta) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i + \frac{ab}{4} H_i(\xi) H_i(\eta) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_i \right]
 \end{aligned}$$

DOVE

$$\begin{aligned}
 G_i(\xi) &= \frac{1}{4}(-\xi_i \xi^3 + 3\xi_i \xi + 2) \\
 H_i(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi^3 + \xi_i \xi^2 - \xi - \xi_i)
 \end{aligned}$$

POLINOMI DI HERMITE

$$\xi = \frac{x - (a/2)}{a/2} = 2\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \quad \eta = 2\left(\frac{y}{b}\right) - 1 \quad \leftarrow \text{LEGGE DI TRASFORMAZIONE}$$

LA DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDENZA AVIENE SEGUENDO LE MODALITA' DESCRITTE PER L'ELEMENTO "ACH" PRECEDENTE:

$$k_{ij} = \frac{Eh^3}{12ab(1-\nu^2)} \left[ \bar{\alpha}_1 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \bar{\alpha}_2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_4 \nu \right] a^{\bar{\alpha}_i} b^{\bar{\alpha}_j}$$

TERMINE CORRENTE MATRICE DI RIGIDENZA

I COEFFICIENTI  $\bar{\alpha}_i$  SONO STATI RIPORTATI NELLA SEZIONE RELATIVA ALLO STUDIO DI PIASTRE IN COORDINATE GENERALIZZATE -



$$a_i = \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_\ell & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix} \quad b_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix}$$

$$c_i = \det \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_\ell & 1 & z_\ell \end{bmatrix} \quad d_i = -\det \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_\ell & y_\ell & 1 \end{bmatrix}$$

COEFFICIENTI DELL'ESPRESSIONE  
RELATIVA ALLE COORDINATE  
DI VOLUME  $L_i$

CON  $(j, k, \ell)$  PERMUTAZIONE CICLICA DI  $(1, 2, 3, 4)$

ATTENZIONE: IL TUTTO È VALIDO IN UNA TERZA DEGR. CON I HOBI 1, 2, 3 NUMERATI IN MANIERA STORARIA SE VISTI DAL HOBO 4.

OSS: - SE  $f$  È UNA FUNZIONE DELLE COORDINATE INTERNE, LE DERIVATE RISPETTO ALLE COORDINATE CARTESIANE  $x, y, z$  SONO DATE DA:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial z}$$

DOVE  $\rightarrow \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{6V}, \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{6V}, \frac{\partial L_i}{\partial z} = \frac{d_i}{6V}$   
 OMO SELE COSTANT.

- L'INTEGRAZIONE DI TERMINI DI POLINOMI IN COORDINATE DI VOLUME PUO' ESSERE CONDOTTA MEDIANTE LA:

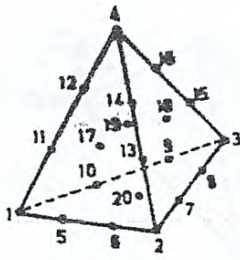
$$(*) \quad \iiint_V L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma L_4^\delta dV = \frac{\alpha! \beta! \gamma! \delta!}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 3)!} 6V$$

VALORI DELL'INTEGRALE  
DIVISI PER IL VOLUME V

$\alpha$	Value of			Value of the integral in Eq. (*) / V
	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1/4
2	0	0	0	1/10
1	1	0	0	1/20
3	0	0	0	1/20
2	1	0	0	1/60
1	1	1	0	1/120
4	0	0	0	1/35
3	1	0	0	1/140
2	2	0	0	1/210
2	1	1	0	1/420
1	1	1	1	1/840
5	0	0	0	1/56
4	1	0	0	1/280
3	2	0	0	1/560
3	1	1	0	1/1120
2	2	1	0	1/1680
2	1	1	1	1/3360



### d3) CAMPO CUBICO (LAGRANGE)



ELEMENTO A 20. MODI:

1: 4 VERTICI (4 MODI)

5: 16 MODI INTERMEDI DISPOSTI SUI LATI, POSIZIONI ALI TERZI (12 MODI)

17: 20 MODI POSTI NEL BARICENTRO DELLE QUATTRO FACCE

IN QUESTO CASO LE FUNZIONI DI FORMA RISULTANO:

- QUATTRO VERTICI

$$N_i = \frac{1}{2} L_i (3L_i - 1)(3L_i - 2), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

- MODI INTERMEDI DISPOSTI SUI LATI

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1)$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1)$$

$$N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_2 - 1)$$

$$N_8 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1), \text{ etc.}$$

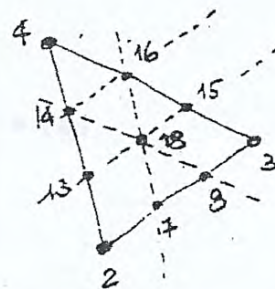
- MODI NEL BARICENTRO DELLE FACCE

$$N_{17} = 27L_1 L_2 L_3$$

$$N_{18} = 27L_2 L_3 L_1$$

$$N_{19} = 27L_1 L_3 L_2$$

$$N_{20} = 27L_1 L_2 L_3$$



oss: - ANALIZZANDO IL TRIANGOLO DI PASCAL "NELLO SPAZIO" NE SEGUE CHE PER UN POLINOMIO CUBICO COMPLETO SONO NECESSARI 19 TERMINI (QUESTI SONO FUNZIONE DI SOLO TRE VARIABILI DI VOLUME: INFATTI LA QUARTA VARIABILE DERIVA DALLE ALTRE SECONDO LA RELAZIONE  $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$ )

- SI ASSUME COME VENTESIMO TERMINE, UN TERMINE DI TIPO "SIMMETRICO" RISPETTO A TUTTE LE COORDINATE  $\rightarrow (x, y, z)$

- NE DERIVA UN POLINOMIO APPROSSIMANTE DEL TIPO:

$$\begin{aligned} \phi(q_1, q_2, q_3) = & \alpha_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 q_2 + \alpha_4 q_3 + \alpha_5 q_1^2 + \alpha_6 q_2^2 + \alpha_7 q_3^2 + \\ & + \alpha_8 q_1 q_2 + \alpha_9 q_2 q_3 + \alpha_{10} q_3 q_1 + \alpha_{11} q_1^3 + \alpha_{12} q_2^3 + \alpha_{13} q_3^3 + \\ & + \alpha_{14} q_1^2 q_2 + \alpha_{15} q_1 q_2^2 + \alpha_{16} q_2^2 q_1 + \alpha_{17} q_2^2 q_3 + \alpha_{18} q_3^2 q_1 + \alpha_{19} q_3^2 q_2 + \alpha_{20} q_1 q_2 q_3 \end{aligned}$$