



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1115

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Rossi A.

MATERIA: Costruzione di Macchine + Temi + Eserc.

Prof. Raffa

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Costruzione di Macchine (14ALPNC) (Laurea magistrale in Ingegneria elettrica - a.a. 2011/12)

Docente: prof. Francesco RAFFA

Esercitazioni al LAIB: ing. Nicola COLELLA

OBIETTIVI DEL CORSO

Si vogliono fornire agli allievi le conoscenze di base, teoriche e applicative, concernenti alcune delle problematiche più significative della progettazione meccanica. La tecnica di soluzione privilegiata è il metodo degli elementi finiti alle cui applicazioni sono dedicate esercitazioni in aula e al LAIB.

Prerequisiti: Fondamenti di meccanica strutturale, Fondamenti di meccanica applicata.

PROGRAMMA

Resistenza statica: teoria dell'elasticità, dischi rotanti

Lezioni: Stato 3D delle tensioni e delle deformazioni, legge di Hooke, tensioni principali, equazioni differenziali di equilibrio e di compatibilità, lo stato di tensione piana. Tensioni e deformazioni nei solidi assialsimmetrici. Dischi rotanti di spessore costante soggetti a tensioni radiali applicate ai bordi, campo centrifugo, gradiente radiale di temperatura. Effetto della plasticità sulla resistenza dei dischi rotanti.

Esercitazioni in aula: Esercizi sul calcolo di resistenza dei dischi rotanti.

Introduzione al metodo degli elementi finiti

Lezioni: Equilibrio statico dei sistemi discreti, coefficienti di rigidezza. Matrici di rigidezza e vettori dei carichi equivalenti degli elementi asta e trave. Formulazione generale degli elementi finiti mediante il principio dei lavori virtuali. Elementi piani a 3 e a 4 nodi. Risultati relativi agli elementi di ordine superiore e agli elementi solidi. Requisiti di completezza e di compatibilità, h -convergenza.

Esercitazioni in aula: Esercizi di statica (calcolo marziale delle strutture).

Elementi di dinamica delle macchine

Lezioni: Richiami sull'oscillatore armonico. Oscillazioni libere e forzate di sistemi discreti a molti gradi di libertà. Problema agli autovalori: frequenze proprie, modi di vibrare e loro proprietà, matrici di massa (*lumped* e *consistent*). Dinamica dei rotori: risposta libera e forzata del rotore di Jeffcott, velocità critica, autocentrimento. Sistemi rotanti a molti gradi di libertà, effetti giroscopici.

Esercitazioni in aula: Esercizi sulla risposta libera e forzata di alberi vibranti e rotanti mediante modelli con elementi asta e trave.

ESERCITAZIONI AL LAIB

Presso il LAIB gli studenti svolgeranno un'esercitazione di calcolo agli elementi finiti mediante il sistema di codici Patran/Nastran della durata di 4 settimane (l'impegno è di 3 h/settimana). L'esercitazione è dedicata al calcolo di resistenza dei dischi rotanti.

TESTI CONSIGLIATI

Appunti del docente su alcune parti del corso (in rete: teoria dell'elasticità, dischi rotanti, elementi finiti, vibrazioni libere e forzate dei sistemi discreti). Per approfondimenti:

G. Genta, *Vibrazioni delle strutture e delle macchine*, Levrotto & Bella, Torino.

G. Belingardi, *Il metodo degli elementi finiti nella progettazione meccanica*, Levrotto & Bella, Torino.

MODALITÀ D'ESAME

L'esame prevede una prova scritta articolata su esercizi e quesiti di carattere teorico. La prova orale, per essere ammessi alla quale bisogna avere ottenuto almeno 18/30 allo scritto, si basa sulla discussione dell'elaborato scritto e della relazione sull'esercitazione di calcolo agli elementi finiti svolta al LAIB.

La Teoria elastica si basa su due concetti fondamentali

TENSIONE e DEFORMAZIONE

Queste 2 sono in relazione tra loro finché si rispetta la proprietà di "perfetta elasticità"

La nasce legge Hooke

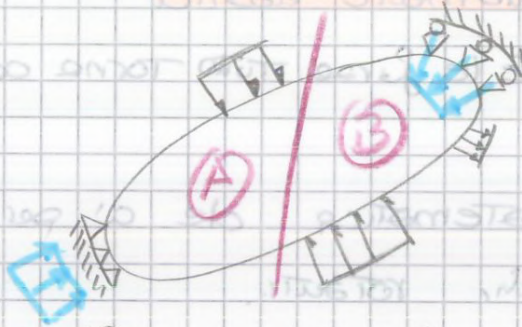
La Tensione è un'invenzione

La deformazione è solo geometria

TENSIONE

Solido 3D qualsiasi che caricato in un certo modo qualsiasi

Proviamo di causare le reazioni vincolari



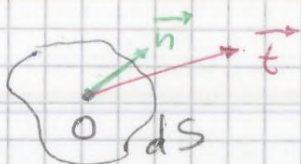
Diciamo che è in equilibrio \Rightarrow cioè lo noto separando il mio solido A e B e dico che questa delle 2 parti (ad esempio A) offriamo che è in equilibrio sotto le forze esterne competono + le forze (reazioni vincolari) + distribuzione forze interne della parte B sulla parte A.



$F_{in} \equiv$ AZIONE di B su A

prendo una parte δS intorno ad O che è un punto della superficie di separazione

Allora si dice che esiste applicato in "O" un vettore detto vettore della Tensione Totale \vec{T}



$$\vec{T} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta P}{\delta S}$$

PRINCIPIO di EULERO-CAUCHY

Passo due che:

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x2} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \quad 2$$

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \quad \downarrow$$

$$\tau_{xz1} = \tau_{xz2} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \quad 1$$

$$\sigma_{y3} = \sigma_{y4} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \quad 4$$

$$\tau_{yx3} = \tau_{yx4} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \quad \downarrow$$

$$\tau_{yz3} = \tau_{yz4} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \quad 3$$

$$\sigma_{z5} = \sigma_{z6} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \quad 6$$

$$\tau_{zx5} = \tau_{zx6} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \quad \downarrow$$

$$\tau_{yz5} = \tau_{yz6} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \quad 5$$

x, y, z
sono forze di
volume
 N/m^3

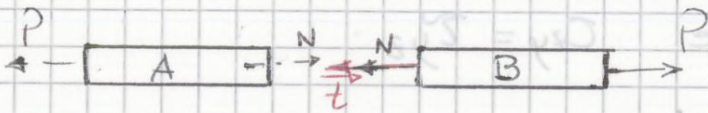
Il nostro elemento di volume è in equilibrio
rispetto alla traslazione e rispetto alla rotazione

dico che il nostro elemento è in equilibrio
rispetto all'asse x .

$$\begin{aligned} x): & - \left[\underbrace{(\sigma_{y3} - \sigma_{y4}) dx dz}_{4^\circ} \right] \frac{dz}{2} + \left[\underbrace{(\sigma_{z5} - \sigma_{z6}) dx dy}_{4^\circ} \right] \frac{dy}{2} \\ & - \left(\underbrace{\tau_{yz5} dx dy}_{3^\circ} \right) dz + \left(\tau_{yz3} dx dz \right) dy \\ & + \left[\underbrace{(\tau_{xz1} - \tau_{xz2}) dy dz}_{3^\circ} \right] \frac{dy}{2} - \left[\underbrace{(\tau_{xy1} - \tau_{xy2}) dy dz}_{3^\circ} \right] \frac{dz}{2} \\ & + \left(\underbrace{z dx dy dz}_{4^\circ} \right) \frac{dy}{2} - \left(\underbrace{y dx dy dz}_{4^\circ} \right) \frac{dz}{2} \stackrel{4^\circ}{=} 0 \end{aligned}$$

oggetto 2 parti A e B

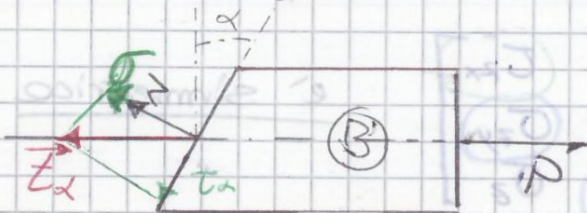
A area sezione



$$t \cdot A = P \Rightarrow t = \frac{P}{A}$$

$$\vec{T} = \sigma \vec{N} = \frac{P}{A} \vec{N}$$

problema e sezione in modo inclinato di un oggetto d



$$t_d A_d = P$$

$$A_d = \frac{A}{\cos \alpha}$$

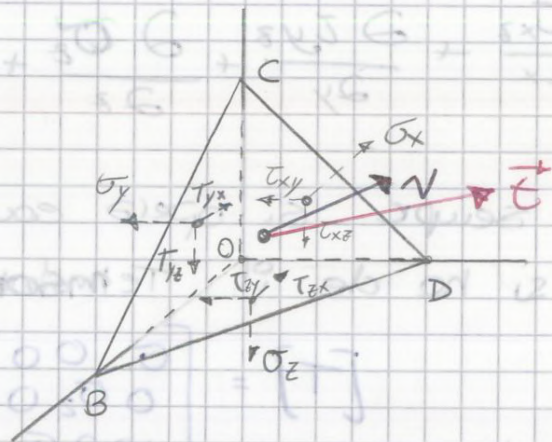
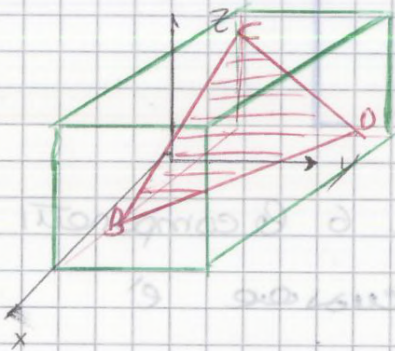
$$t_d = \frac{P}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

$$\sigma_n = t_d \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_n = t_d \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\vec{T} = \begin{cases} \vec{T}(\sigma, t) \\ \vec{T}(\vec{n}) \end{cases}$$

il problema è: "Se conosco tutte le tensioni sono capace di trovare un piano de tagli il nostro volume tale da avere sub tensioni σ ?"



$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

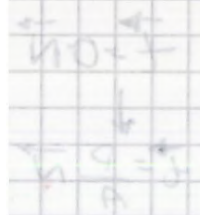
$$([T] - \sigma [I]) \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

È un problema agli autovalori per cui si risolve secondo le matrici

$$|[T] - \sigma [I]| = 0$$

ottenendo

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$



$$\begin{cases} \sigma = \sigma_x \\ \sigma = \sigma_y \\ \sigma = \sigma_z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_x &= \sigma_x + \tau_{yx} \frac{y}{x} + \tau_{zx} \frac{z}{x} \\ \sigma = \sigma_y &= \tau_{xy} \frac{x}{y} + \sigma_y + \tau_{zy} \frac{z}{y} \\ \sigma = \sigma_z &= \tau_{xz} \frac{x}{z} + \tau_{yz} \frac{y}{z} + \sigma_z \end{aligned}$$

$$[T] \{v_i\} = \sigma_i \{v_i\}$$

$$[T] \{v_j\} = \sigma_j \{v_j\}$$

uso la tecnica di premoltiplicare $\{v_j\}^T$

$$\{v_j\}^T [T] \{v_i\} = \{v_j\}^T \sigma_i \{v_i\}$$

$$\{v_j\}^T [T] \{v_j\} = \{v_j\}^T \sigma_j \{v_j\}$$

sono uguali

facciamo la trasposta

$$\{v_j\}^T [T]^T \{v_i\} = \sigma_j \{v_j\}^T \{v_i\}$$

visto che è simmetrica

sottraiamo membro a membro

$$0 = (\sigma_i - \sigma_j) \{v_j\}^T \{v_i\} \quad \text{per tutto}$$

$$\{v_j\}^T \{v_i\} = 0$$

Abbiamo dimostrato che le tensioni principali ortogonali si presentano loro ortogonali.

due invarianti I_1, I_2 e I_3 sono invarianti

Tracce di T = tracce

$$I_1 = \text{tr}[T] = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \text{tr}[C_T] = \text{somma 3 determinanti}$$

$$I_3 = \det T / |T|$$

$[C_T]$ = matrice cofattori di T

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

matrice che rimane una volta tolta la riga i-esima e la colonna j-esima

sapendo che

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_T = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} & \dots & \dots \\ \dots & \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} & \dots \\ \dots & \dots & \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

non interessa poiché prendo solo le tracce

Abbiamo visto:

- STATO 3D delle tensioni!

$$\vec{T}_j = [T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tensioni principali

Demonstrazione

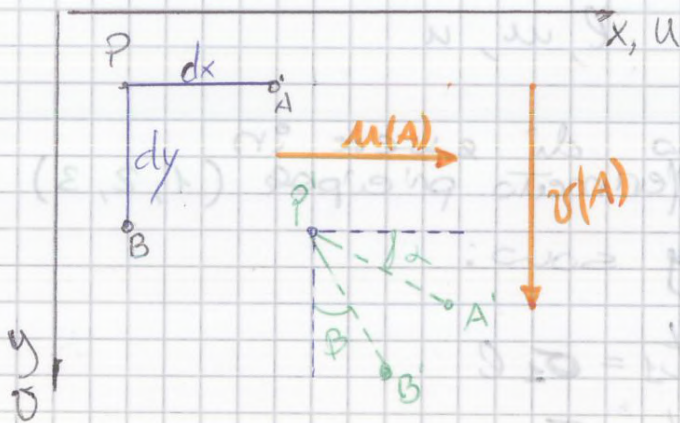
3 equazioni differenziali di equilibrio rispetto la traslazione (poiché $\tau_{ij} = \tau_{ji}$)

STATO 3D DELLE DEFORMAZIONI!

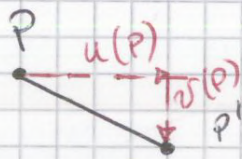
Lavoriamo solo nel piano

Prendiamo una piastra su cui agiscono delle forze e vediamo come queste deformano la piastra.

Il mezzo sul piano del foglio:



Applico sul piano/piastra due segmenti (strigole) dopo l'applicazione delle forze visto che A' e B' si saranno spostati.



$$u(A) = u(P) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$v(A) = v(P) + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Tutto ciò vale se e solo se rimango nella linearità (spostamenti deformazioni) piccole

$$u(B) = u(P) + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$v(B) = v(P) + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$\epsilon_x = \frac{u(A) - u(P)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{v(B) - v(P)}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

γ_{xy} scorrimento angolare

non solo si separati hanno variato le lunghezze ma anche l'angolo

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

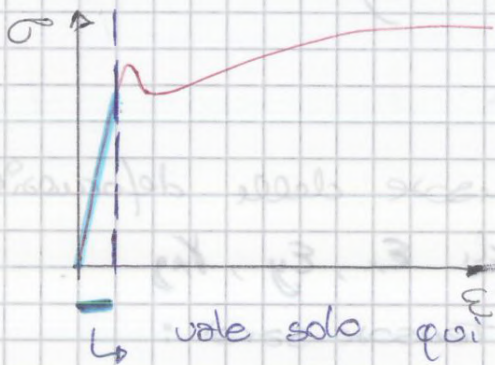
la legge di Hooke è la sintesi di molte prove sperimentali.

↳ finché si hanno piccole deformazioni siamo in linearità.

→ si può usare principio di sovrapposizione degli effetti.

$$\underline{1D} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$$

abbiamo visto che



↳ vale solo qui in linearità

Per materiali isotropi dalla legge di Hooke

si nota che ci sono due sotto legami

infatti σ e ϵ sono disaccoppiate dalle τ e γ

1) DISACCOPPIAMENTO $\{\sigma, \epsilon\}$ da $\{\tau, \gamma\}$

2) LEGAME $\{\sigma, \epsilon\} \neq$ LEGAME $\{\tau, \gamma\}$

↳ tutte contribuiscono

↳ quindi τ ha un solo γ e non influenza altri

(presenza σ nelle 2^a sottostruttura)

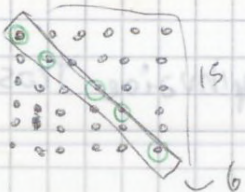
$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

Nel caso di MATERIALI ANISOTROPI?

Hooke (6×6) ma avrei 36 componenti

$15 + 6 = 21$ coefficienti indipendenti



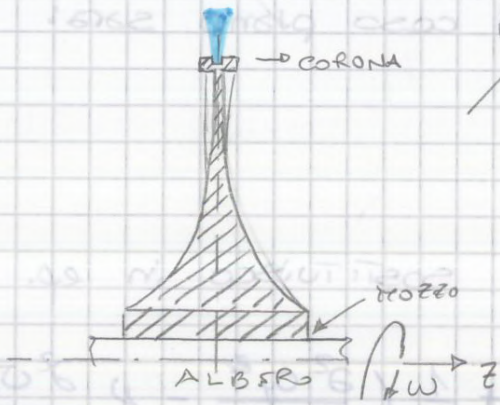
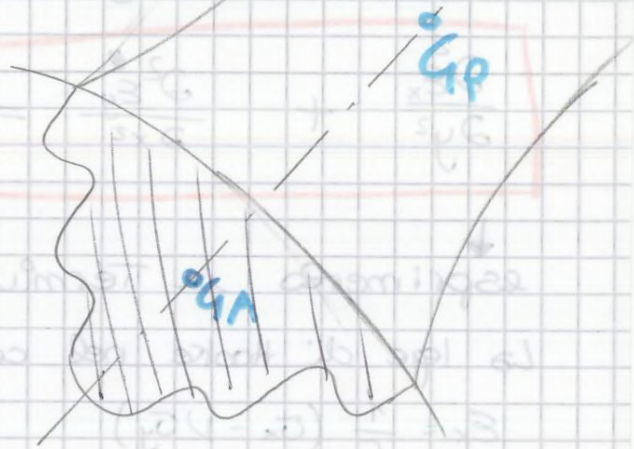
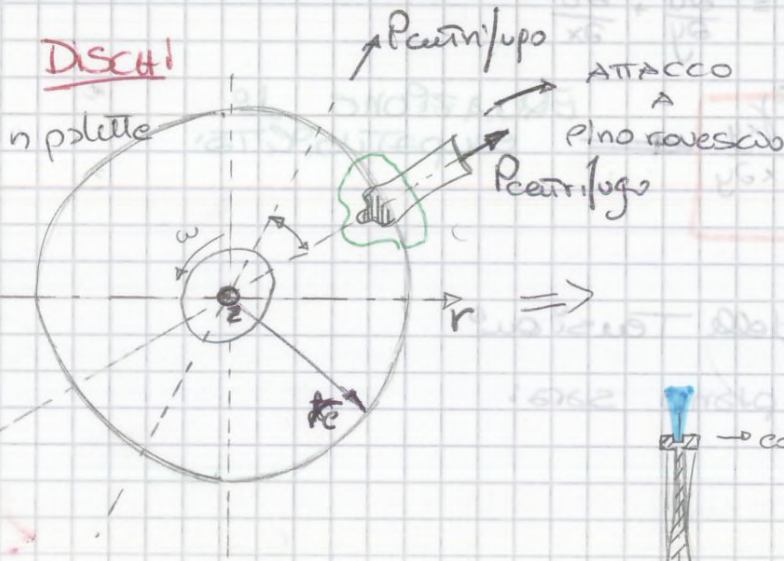
con tutte le equazioni $3 + 6 + cc$

ho una unica della soluzione al problema elastico

↳ **KIRCHOFF**

G_A BORICENTRO
 G_P ATTACCO
 BARICENTRO
 PALETTA

Dischi



disco de e' ASSIAL SIMMETRICO

(polo de P_c e' presente
 e' tratto quindi non simmetrico)

↳ quando le palette vengono soppresse e sostituite da un carico uniforme sulla superficie regolarmente distribuito

G_A e G_P noti inoltre note le masse m_A e m_P

$$P_c = \omega^2 (m_A r_{GA} + m_P r_{GP}) \quad [N]$$

↳ tiro centrifugo

Per farlo diventare assial simmetrico

prendo $N P_c = \text{Tiro complessivo}$

$$\sigma_{re} = \frac{N P_c}{2\pi r_e h_e}$$

se scrivo

h_e spessore del disco (esterno)

se considero un disco

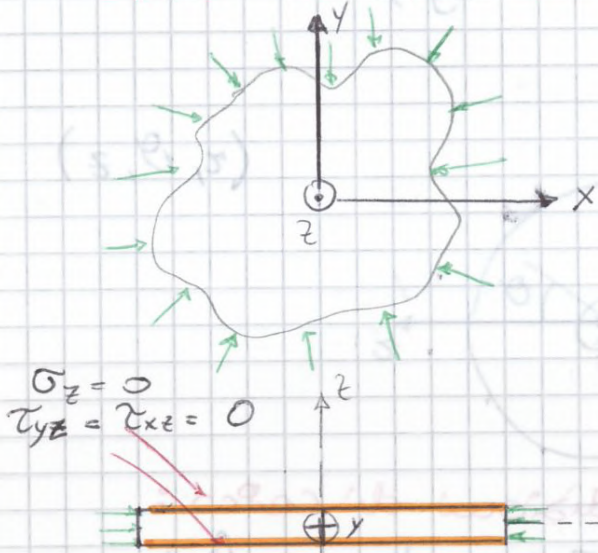
di spessore costante

$$\sigma_{re} = \frac{N P_c}{2\pi r_e (h)}$$

[MPa]

RICHIAMO

Caso particolare interessante per i dischi
 ↳ STATO DI TENSIONI PIANA (PLANE STRESS)



S spessore molto piccolo
 e caricato solo nel
 piano stesso del foglio
 (caricato solo lungo x)

Hp. (CERTE)

- 1) Tutte le componenti lungo z sono nulle
 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$
- 2) $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \neq 0$
 fanno parte del piano di deformazione ma non dipendono da z

ci conduce all'hp di tensione piana

$$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$$

dove il pallino indica "QUALSIASI VARIABILE"

per Hooke gli scorrimenti γ corrispondenti alle z saranno nulle $\Rightarrow \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

$$\epsilon (E_x, E_y, \gamma_{yx}) \neq 0$$

Hooke
$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

EQ. EQUILIBRIO

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

$$[X, Y] = \frac{N}{m^3}$$

↳ forze su unità di volume

(r, ϑ, z)

(u, v, w)

$(\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z; \tau_{r\vartheta}, \tau_{rz}, \tau_{zr})$

circonfereze

$(\epsilon_r, \epsilon_\vartheta, \epsilon_z, \gamma_{r\vartheta}, \gamma_{rz}, \gamma_{zr})$

3D in coordinate cilindriche

visto da nulla

dipende da z allora anche una dimensione

(r, ϑ)

$(\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta})$

(u, v, w)

$(\epsilon_r, \epsilon_\vartheta, \epsilon_z, \gamma_{r\vartheta})$

per Hooke

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (-\nu(\sigma_r + \sigma_\vartheta))$$

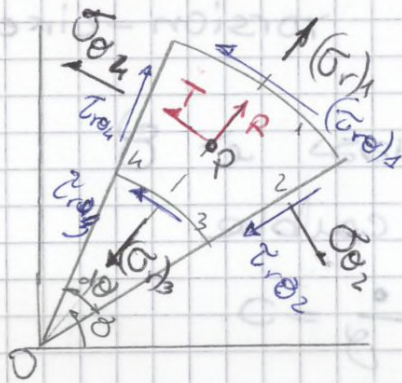
INDIPENDENTI

dati dallo 1° Hp

DA SLIDE

coefficiente di resistenza dei dischi

CAUSE DI SOLLECITAZIONE



scrivo equilibrio radiale

$$\sigma_{r1} r_1 d\vartheta - \sigma_{r2} r_2 d\vartheta - \sigma_{\vartheta 2} (r_1 - r_2) \sin \frac{d\vartheta}{2} - \sigma_{\vartheta 1} (r_1 - r_2) \sin \frac{d\vartheta}{2} + \tau_{\vartheta r 1} (r_1 - r_2) \cos \frac{d\vartheta}{2} - \tau_{\vartheta r 2} (r_1 - r_2) \cos \frac{d\vartheta}{2} + R r d\vartheta dr = 0$$

prendo tutte le componenti lungo il raggio e le passo sopra a ϑ .

$$r = \bar{r}$$

divido tutto per $d\vartheta dr$:

e con opportuni passi scivolo

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + R = 0$$

(r, θ)

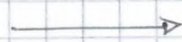
TORSIONLESS

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = 0$$

(z)

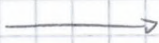
problems
monodimensionale
1D

(u, v, w)



(u, w)

$(\sigma_r, \sigma_c, \tau_{rc})$



(σ_r, σ_c)

Fisicamente problema
piano 2D

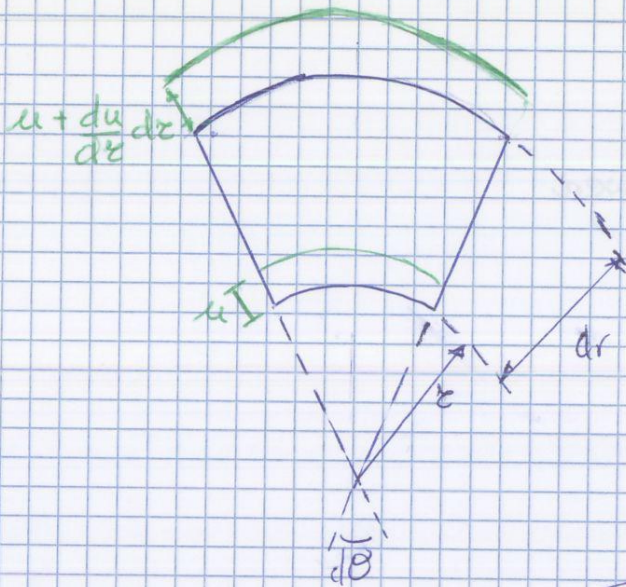
$(\epsilon_r, \epsilon_c, \epsilon_z, \gamma_{rc})$



$(\epsilon_r, \epsilon_c, \epsilon_z)$

poi ci sono anche equazioni di compatibilità

considero la fibra infinitesima



$$\boxed{\epsilon_r} = \frac{(u + \frac{du}{dr} dr) - u}{dr} = \boxed{\frac{du}{dr}}$$

si ha anche una deformazione in direzione circonferenziale

più facile

$$\boxed{\epsilon_c} = \frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \boxed{\frac{u}{r}}$$

iniziale

quindi si hanno due deformazioni radiali e circonferenziali

giungo ad avere una sola eq. di compatibilità

$$\boxed{\epsilon_r = \frac{d}{dr} (r \epsilon_c)}$$

si passa da ϵ allo σ con la legge di Hooke

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_c) + \alpha T$$

$$\epsilon_c = \frac{1}{E} (\sigma_c - \nu \sigma_r)$$

cioè il termine fusione della temperatura

α = coefficiente di dilatazione termica

EQ. COMPATIBILITÀ SENZA TENSIONI?

T = temperatura fusione del raggio

$$(1 + \nu)(\sigma_r + \sigma_c) + r \frac{d\sigma_c}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} + \alpha E r \frac{dT}{dr} = 0$$

nei calcoli ν , E , α devono considerarsi costanti, e non variano con il raggio

si può fare una prima previsione solo dello σ_r

si opera usando le 2 equazioni e si opera solo con σ_r

soluzione

$$y = \frac{d\sigma_z}{dx} \rightarrow y = Cx^{-3}$$

$$\sigma_z(x) = C \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-2} + A$$

$$\sigma_z(x) = A - \frac{B}{x^2}$$

nota $\sigma_z(x)$:

$\sigma_c(x)$ dall'eq. di equilibrio radiale

$\epsilon_z(x), \epsilon_c(x)$: note dalla legge di Hooke

$$\hookrightarrow \epsilon_z(x)$$

ci possiamo ricavare anche lo spostamento

$$\epsilon_c = \frac{u}{r} \rightarrow u = r \cdot \epsilon_c = r_c x \epsilon_c$$

quindi il nostro lavoro principale è
calcolare $\sigma_c(x)$

$$\hookrightarrow u = r \epsilon_c = r \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_c)$$

in conclusione

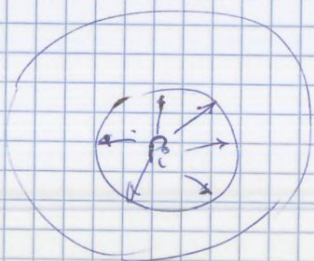
$$\sigma_z(x) = A - \frac{B}{x^2}$$

$$\sigma_r(x) = \sigma_c = A + \frac{B}{x^2}$$

$$u(x) = \frac{r_c x}{E} \left[A(1-\nu) + \frac{B}{x^2} (1+\nu) \right]$$

H_p
disco
fermo
e
freddo
⇓
H_p ⊗

può essere anche un disco forato
e devono conoscere la pressione di
foramento



$$\sigma_z = -p_i$$

$$x = b \Rightarrow \sigma_z = -p_i \Rightarrow A - \frac{B}{b^2} = -p_i$$

$$x = 1 \Rightarrow \sigma_z = 0 \Rightarrow A - B = 0$$

integrale particolare

$$\sigma_z(x) = Cx^2$$

$$\Rightarrow 2C + 6C + \rho \omega^2 r_e^2 (3 + \nu) = 0$$

$$C = -\rho \omega^2 r_e^2 \frac{3 + \nu}{8} = -\sigma_0 \frac{3 + \nu}{8}$$

dove σ_0 ha un significato fisico

soluzione generale $\sigma_z(x) = A - \frac{B}{x^2} - \sigma_0 \frac{3 + \nu}{8} x^2$

conoscendo σ_z Trovo il resto

$$\sigma_c(x) = A + \frac{B}{x^2} - \sigma_0 \frac{1 + 3\nu}{8} x^2$$

$$u = r \epsilon_\theta = r \epsilon_c = \dots$$

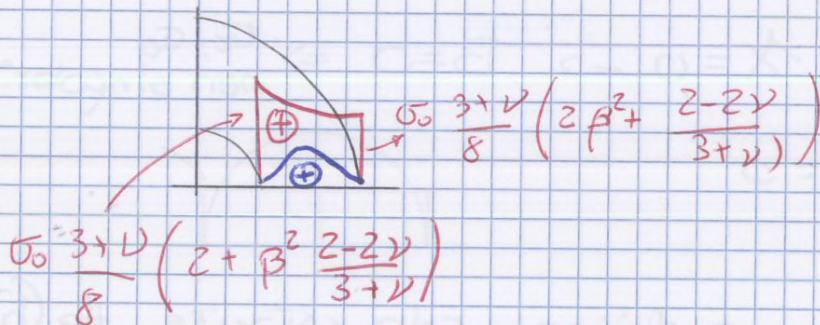
A e B le ricavo dalle condizioni al contorno

→ DISCO FORATO ROTANTE

$$x = \beta \Rightarrow \sigma_z = 0 \Rightarrow A - \frac{B}{\beta^2} - \sigma_0 \frac{3 + \nu}{8} \beta^2 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \sigma_z = 0 \Rightarrow A - B - \sigma_0 \frac{3 + \nu}{8} = 0$$

$$A = \sigma_0 \frac{3 + \nu}{8} (1 + \beta^2) \quad B = \sigma_0 \frac{3 + \nu}{8} \beta^2$$

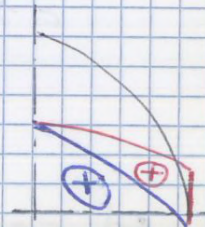


→ DISCO PIENO ROTANTE

$$x = 1 \Rightarrow \sigma_z = 0 \Rightarrow A - B - \sigma_0 \frac{3 + \nu}{8} = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Downarrow A = \sigma_0 \frac{3 + \nu}{8}$$



sovrapposizione effetti.

↳ elimino sommatoria ed ottengo
il seguente integrale particolare

$$\sigma_r(x) = C_i x^i$$

$$i(i-1)C_i x^{i-2} + \frac{3}{x} i C_i x^{i-1} + 2 E \epsilon b_i x^{i-2} = 0$$

$$C_i = -\frac{2 E \epsilon b_i}{i+2}$$

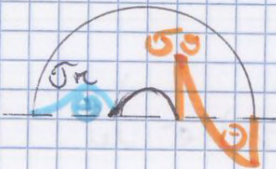
$$\sigma_r = A - \frac{B}{x^2} - \frac{2 E \epsilon b_i}{i+2} x^i$$

$$\sigma_\theta = \sigma_c = A + \frac{B}{x^2} - \frac{i+1}{i+2} \dots$$

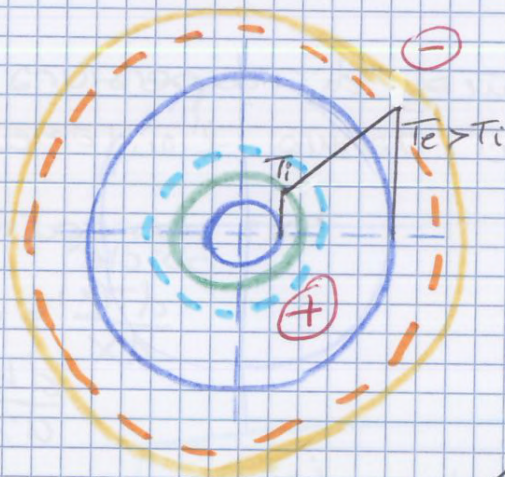
$$u = \dots$$

DISCO FORATO

Ricordo A e B e posso analizzare
l'andamento



se $\epsilon_c < 0$ negativo
sicuramente c'è temperatura



prendiamo il disco
come somma quelli
se ci fosse solo la
fibra interna

↳ questa T_e dovrebbe ad
essere

↳ sottoposta ad u_{eTi}

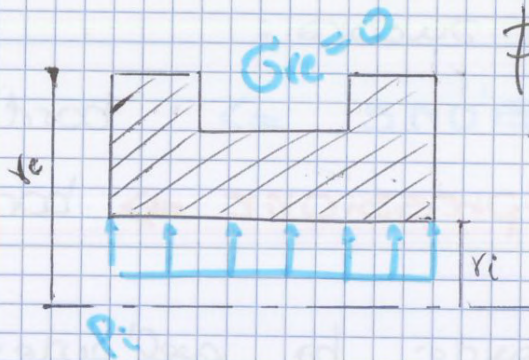
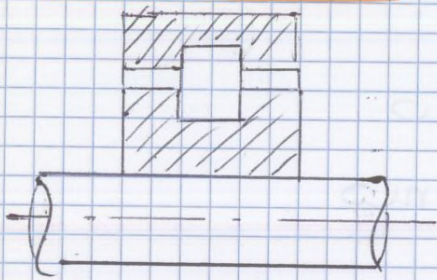
↳ ma considerando le
fibre circostanti
che sono più
calde e diventa

vicversa quella
interna che per

le minor temperatura della fibre precedenti
sarà invece che

$$B = \phi_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} \beta^2 = B_{\phi_i} + B_w$$

ESERCIZIO 1



$$\phi_i = 13 \text{ MPa}$$

$$u(\beta) = ?$$

questo disco è fermo e freddo
 $(w=0)$ $(\frac{dw}{dx}=0)$

prendo soluzione generale

$$\sigma_r = A - \frac{B}{x^2} \quad \text{e impongo le c.c.}$$

$$\sigma_r(\beta) = -\phi_i$$

$$\sigma_r(1) = 0$$

$$A = B$$

$$\Rightarrow = \boxed{\phi_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2}}$$

$$B = A$$

$$X = \frac{r}{r_e}$$

$$\epsilon_c = \begin{matrix} \text{cine.} \rightarrow \\ \text{Hooke} \rightarrow \end{matrix} \frac{u}{r} = \frac{1}{r_e} \frac{u(X)}{X}$$

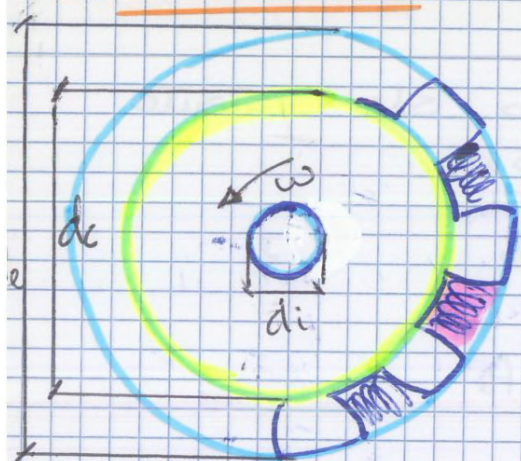
$$\frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta)$$

$$\epsilon_c(\beta) = \frac{1}{E} [\sigma_r(\beta) - \nu \sigma_\theta(\beta)] \quad \text{e' nota}$$

$$u(\beta) = r_e \beta \epsilon_c(\beta)$$

$$= \frac{r_e \beta}{E} [\sigma_r(\beta) - \nu \sigma_\theta(\beta)] = 8,2 \mu\text{m}$$

ESERCIZIO 5



$$d_i = 200 \text{ mm}$$

$$d_c = 800 \text{ mm}$$

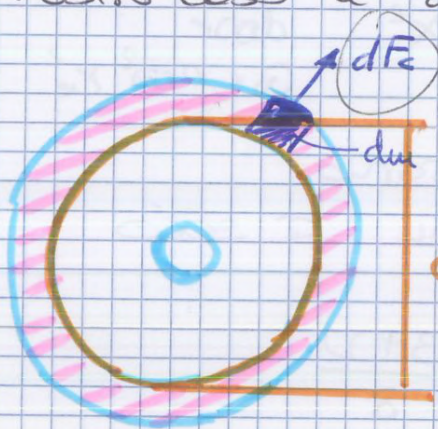
$$d_e = 1300 \text{ mm}$$

$$\omega = 1800 \text{ rpm}$$

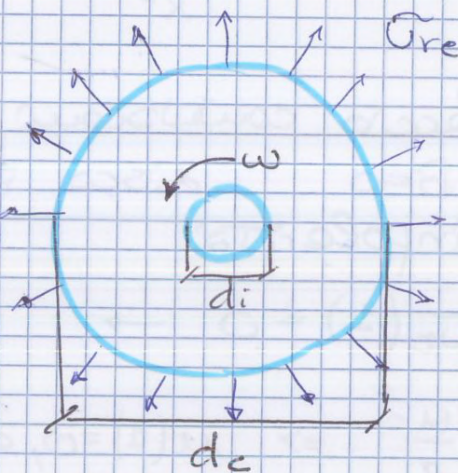
è viene detto da Claupeletto
però come il ferro maciato

$$\sigma_{ce} = 0$$

el rastro caso è diventato



$d_c \Rightarrow$



$$\sigma_{ce} = \frac{F_c}{\pi d_c h}$$

$$dF_c = du \omega^2 r$$

$$du = \rho dV = \rho 2\pi r dr h$$

$$dF_c = \rho \omega^2 2\pi r^2 h dr$$

$$F_c = \int_{r_c}^{r_e} dF_c = \int_{r_c}^{r_e} \rho \omega^2 2\pi r^2 h dr =$$

$$= 2\pi \rho \omega^2 h \frac{r_e^3 - r_c^3}{3}$$

ricordo
$$\sigma_{ce} = \frac{\rho \omega^2 (r_e^3 - r_c^3)}{3 r_c}$$

rispetto le c.c. $\sigma_z(B) = 0$; $\sigma_z(1) = 0$

e ricavo A e B

$$\sigma_c(x) = A + \frac{B}{x^2} + \sum_{i=1}^2 (i+1) C_i x^i$$

note A e B note σ_z e σ_c

$\sigma_c(B) > 0$ trazione

$\sigma_c(1) < 0$ compressione

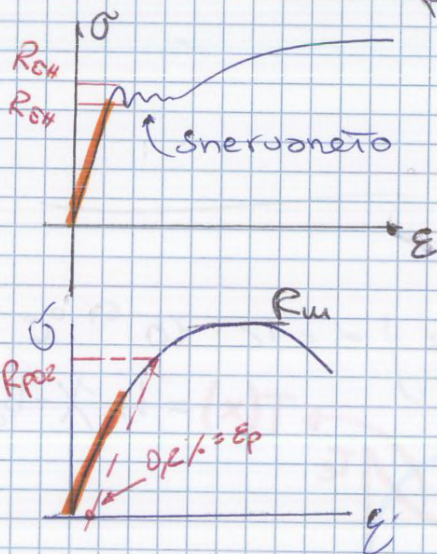
$$\sigma_c(B) = 265 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c(1) = -224 \text{ MPa}$$

↳ atteso
perché c'è
solo la
temperatura

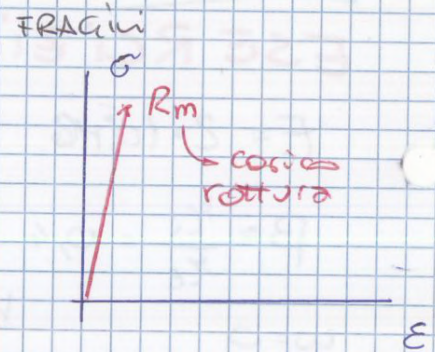
VELOCITÀ DI INIZIO PLASTICIZZAZIONE

i materiali sono caratterizzati da 2 possibili cadute alla prova di trazione



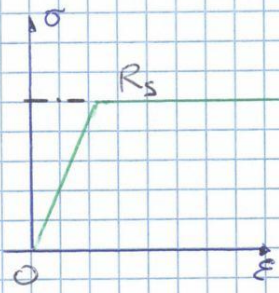
per materiali duttili:
con Sneruamento

duttile senza
Sneruamento

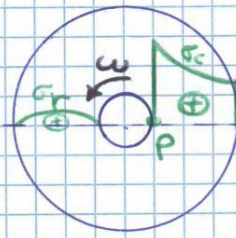


noi operiamo solo nei tratti lineari

voglio sapere quando il disco entra
nel primo punto di elasticità



comportamento elastico plastico ideale



$\sigma_r = 0$
 $\sigma_\theta = 0$

$P \{ \sigma_c(\beta), \sigma_r(\beta), \sigma_z(\beta) \}$

$R_s = \frac{R_{ut} + R_{et}}{2}$

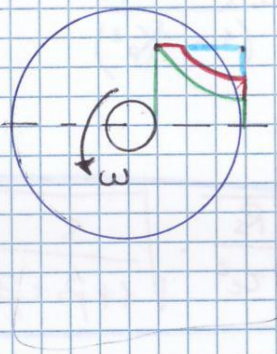
la condizione pericolosa

è quella in cui $\sigma_c(\beta) = R_s$

abbiamo visto che l'incognita è $\sigma_s = \rho \omega^2 r_e^2$

$$\omega_{ep} = \sqrt{\frac{R_s}{\rho r_e^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3+\nu} + \beta^2(1+\nu)}}$$

dal nostro esercizio trov $\omega_{ep} = 13157 \text{ rpm}$
inoltre era da verificare se il disco resiste ad una velocità angolare di 20000 rpm



se faccio aumentare $\omega > \omega_{ep}$ del mezzo, le fibre si fanno carico dell'aumento delle velocità e il diagramma delle tensioni diventa ω fino ad arrivare al limite ω , dove ω è quello di **collasso plastico**. ω_{ep}

Quindi una $\omega > \omega_{ep}$ il disco scoppia

↳ la dimostrazione è lunga.

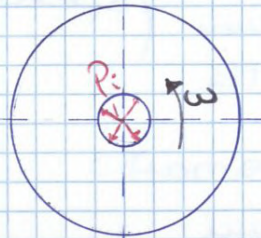
Ci si può ad una velocità $\omega > \omega_{ep}$ osservare che il disco è assai mobile e due diverse parti una zona attorno al mezzo che rappresenta il disco plastico e una parte esterna elastico

ossia $\frac{R_{m1} + R_{m2}}{2} = 884 \text{ MB}$ quindi devo

scegliere R_{m1} e R_{m2} tale da avere tale condizione.

VARIATIONE ESERCIZIO

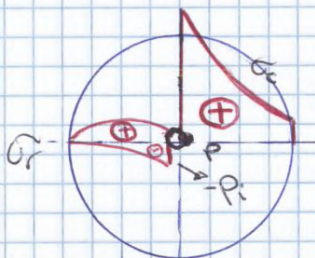
oltre ad essere rotante ω il cerchio caricato al bordo interno.



Sicuramente la w_{ip} sarà minore.

↳ dovuta alla $p_i \Rightarrow$ la teoria di cui fa dedurre questo è la tensione ridotta di Tresca von Mises.

Lo stato delle tensioni sarà



In $P \left\{ \begin{aligned} \sigma_c(\beta) > 0, \sigma_r(\beta) < 0, \sigma_z(\beta) = 0 \end{aligned} \right.$

Ma β la tensione non è più solo circonferenziale ma coincide

$$\sigma_{id}(\beta) = \sigma_c - \sigma_r$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $\sigma_1 \quad \sigma_3$

TRESCA: $\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3$
 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$\sigma_r(\beta) = -p_i$; $\sigma_z(1) = 0$

$\sigma_c(x) = A - \frac{B}{x^2} - \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} x^2$

imponendo le c.c. \rightarrow fusione sdo di w

$A = p_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} (1+\beta^2)$

$B = p_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} \beta^2$

$\sigma_r(x), \sigma_c(x)$ NOTI

$\sigma_r(\beta) = -p_i$

$\sigma_c(\beta) =$

funzione della sola p_i

$= p_i \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{\sigma_0}{4} [3+\nu + \beta^2(1-\nu)]$

bisogna trovare

$\sigma_{id}(\beta) = R_s$

Troviamo le $w_{ip} =$

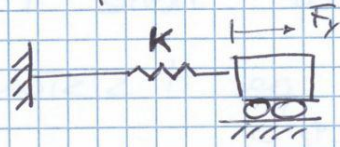
$\sqrt{\quad} =$

* Elementi finiti in corpo strutturale

→ calcolo matriciale per le strutture

EQ. STATICO

il sistema più semplice ha solo 1 gde ad esempio



$$\overline{F} = K u$$

$$[K] = N/m$$

un altro tipo di sistema può essere un sistema torsionale



$$K_t = \left[\frac{Nm}{rad} \right]$$

$$M_t = K_t \varphi$$

Scrivo che per un sist. ad 1 gde l'equilibrio sarà

1 gde : $Q = K q$

K = rigidità del sistema.

$$[q] = \frac{1}{K} Q = [a] Q$$

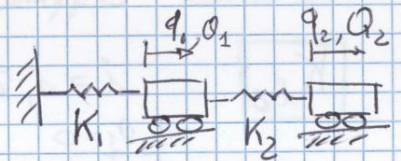
$\frac{1}{K} = a$ = coefficiente di flessibilità

$$a = \begin{cases} \frac{1}{K} = \text{traslazione} \\ \frac{1}{K_t} = \text{torsionale} \end{cases}$$

vogliamo trattare l'equilibrio di elementi

discreti con:

n gde → 2 gde ad esempio



possiamo di conoscere k_1 e k_2

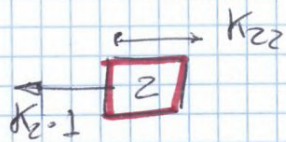
↳ correlli senza massa propria inerziale

definiamo $K_{ij} =$

definito come le forze ^(o momento) per unità di spostamento o di rotazione (di angolo) che nasce nel grado di libertà i -esimo se al sistema sono imposti

i seguenti spostamenti: $q_j = 1$ e tutti gli altri spostamenti uguali a 0, ossia $q_l = 0$ ($l \neq j$)

se faccio equilibrio su secondo carrello



$$K_{22} \cdot 1 = K_2 \cdot 1$$

$$K_{22} = K_2$$

mostriamo che K_{12} e K_{21} ci danno lo stesso valore di libertà anche nell'altro

$$Q_1 = K_{11} \cdot q_1 + K_{12} \cdot q_2$$

$$Q_2 = K_{21} \cdot q_1 + K_{22} \cdot q_2$$

in forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

matrice di rigidità

alla forza Q_1 realmente applicata forniamo rif. K_{11} e K_{12} e i relativi spostamenti.

se ho n gdl uno:

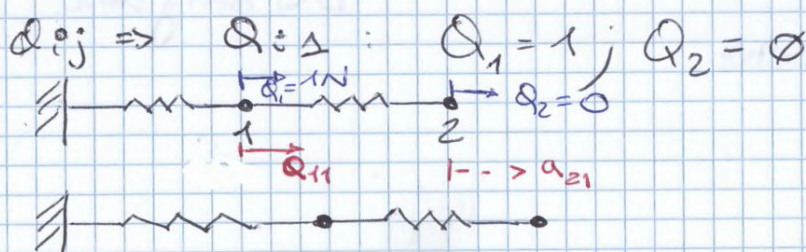
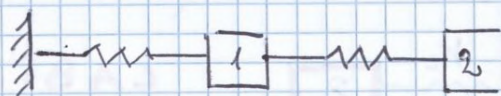
$$\begin{matrix} n \times 1 & & n \times n & & n \times 1 \\ \{Q\} & = & [K] & \{q\} \end{matrix}$$

Allo stesso modo si definiscono i coefficienti di flessibilità

Q_{ij} = spostamento nel gdl i quando

$Q_j = 1$ mentre tutte le altre $Q_l = 0$

con $l \neq j$



$$\begin{cases} Q_1 = K_2 (q_1 - q_2) \\ Q_2 = -K_2 (q_1 - q_2) \end{cases}$$

se $Q_1 = 0$ $Q_2 = 0$
 sconosciuto
 soddisfo da $q_1 = q_2 = \text{cost}$

La posizione di equilibrio non è determinata
 lungo q .

la matrice di rigidezza con $K_1 = 0$ è sempre definita

la matrice di flessibilità con $K_1 = 0$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + \frac{1}{K_2} \end{bmatrix}$

Quindi:

3) **SISTEMI LABILI**

$[K]$ singolare, $\det[K] = 0$

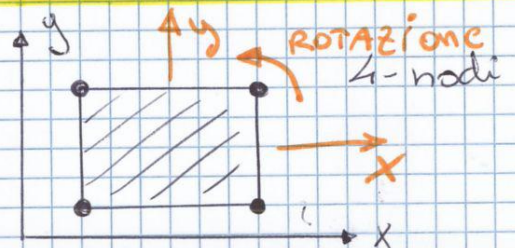
$[A]$ ~~non~~ non è definita

4) Ogni elemento finito è un sistema labile!!

Quando analizziamo un sistema a 4 nodi

ovvero 3 spostamenti:

- lungo y
- lungo x
- rotazione nel piano



\Rightarrow questo è un esempio di un sistema labile

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

è già determinata
la matrice di
rigidezza

→ elemento labile → singolare

TRAZ./compressione

$$u(x) = \frac{F_x}{EA}$$

lo spostamento →

TORSIONE (sez. circolare)

$$\varphi(x) = \frac{M_t x}{G J_p}$$

la rotazione di
2 sezioni distanti x

C'è una corrispondenza
tra le due.

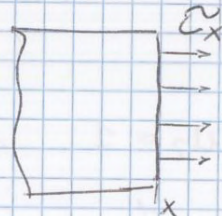
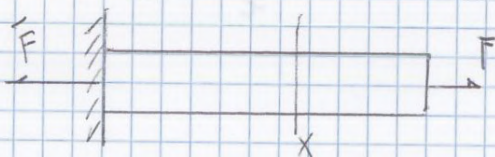
dove $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ (mom. inerzia polare)

si può subito passare a:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

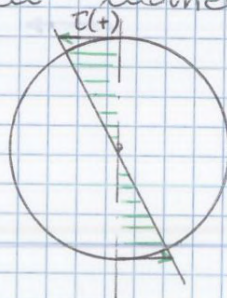
$$\begin{Bmatrix} M_{t1} \\ M_{t2} \end{Bmatrix} = \frac{G J_p}{l} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

una barra sottoposta a trazione ha un
autonero costante delle tensioni



$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

la stessa barra con un momento torcente



$$\tau(r) = \frac{M_t r}{J_p}$$

2) congruenza

$$u_2 - u_1 = \alpha l \Delta T \rightarrow \text{effetto termico}$$

↳ coefficiente
dell'espansione
termica α^{-1}

$$u_2 - u_1 = F_2^* l / EA$$

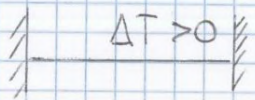
si ottiene

$$F_2^* = EA \alpha \Delta T \quad F_1^* = -F_2^*$$

l'equilibrio all'elemento esito:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + EA \alpha \Delta T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

CASO



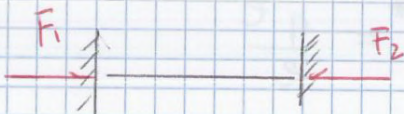
$$u_1 = u_2 = 0$$

allungamento impedito

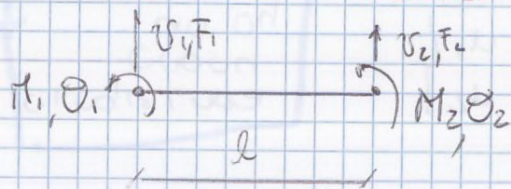
$$F_1 = EA \alpha \Delta T > 0$$

$$F_2 = -EA \alpha \Delta T < 0$$

F_1, F_2 sono ora reazioni vincolari



Elemento Trave

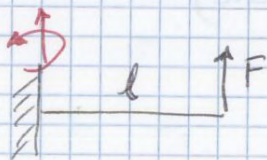


E, J, l costanti,
labile

Equilibrio statico:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & & & \\ & K_{12} & & \\ & & K_{21} & \\ & & & K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

per il calcolo
diretto dei coefficienti
di rigidità
sono utili i seguenti
risultati:



$$v(l) = \frac{Fl^3}{3EJ}$$

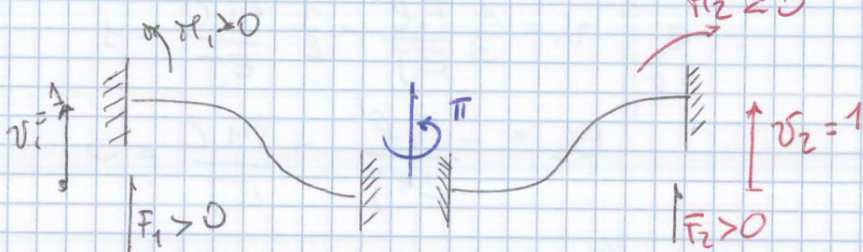
$$\theta(l) = \frac{Fl^2}{2EJ}$$

Riassumendo

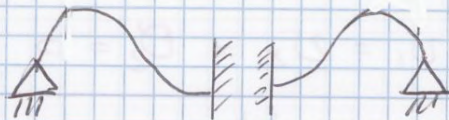
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} \downarrow K_{i1} & \downarrow K_{i2} & & \\ 12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 12 & 0 \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

12, -6l, 4l²: per simmetria

$$(12) \Rightarrow \frac{F_1}{v_1} = \frac{F_2}{v_2} \quad (-6l) \rightarrow \frac{M_2}{v_2} = -\frac{M_1}{v_1}$$



$$(4l^2) \Rightarrow \frac{M_1}{\theta_1} = \frac{M_2}{\theta_2}$$

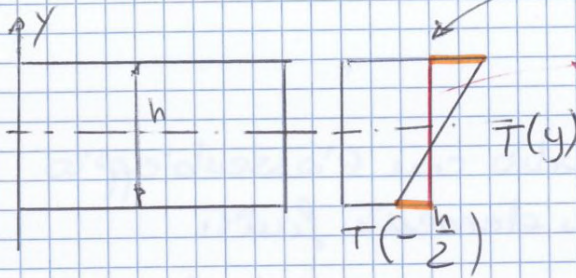


per simmetria

modello TRAVE
Bernoulli-Euler

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Elemento TRAVE



quindi avrà de
 $T(\frac{h}{2}) = T_m + \Delta T$
 $T(-\frac{h}{2}) = T_m - \Delta T$

da cui $T_m = \frac{T(\frac{h}{2}) + T(-\frac{h}{2})}{2}$

$\Delta T = \frac{T(\frac{h}{2}) - T(-\frac{h}{2})}{2} > 0$

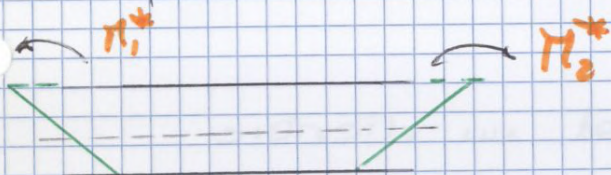
La T_m non entra in gioco ma nella torsione gioca ΔT



dove $F_1^* = F_2^* = 0$ non ha carichi di forza

$|M_1^*| = |M_2^*| = \frac{2 \alpha E J \Delta T}{h}$ ma segno opposto

dove la nostra $J = J_z$ (z asse uscente dal foglio)
 dal punto di vista delle fibre noto:



Definito così posso definire l'equilibrio

Equilibrio $\left\{ \begin{array}{l} ASTA \\ TRAVE \end{array} \right.$

spostamento
o
rotazione

$\{F_n\} + \{F_q\} + \{F_{\Delta T}\} = [K] \{f_n\}$

NODALI vettori dei carichi equivalenti

molla

IDEALE

l'equilibrio agli elementi finiti ricorda sempre de:

$F = Kx$

Poi chiamo $F_{2I} = F_1$, $F_{2II} = F_3$

ho 3 gde



quindi mi aspetto che la matrice di rigidezza K sia una $[3 \times 3]$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2I} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2II} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

scrivo esplicitamente:

$$F_1 = K_{11} u_1 + K_{12} u_2$$

$$F_{2I} = K_{21} u_1 + K_{22} u_2$$

$$F_{2II} = K_{22} u_2 + K_{23} u_3$$

$$F_3 = K_{32} u_2 + K_{33} u_3$$

Applico la condizione di equilibrio:

$$F_2 = F_{2I} + F_{2II} =$$

$$= K_{21} u_1 + (K_{22} + K_{22}) u_2 + K_{23} u_3$$

scrivo tutto in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

↳ il determinante = 0

poiché sistema ancora labile

non ho applicato c.o.c. e forza P. ???

la traccia dell'assemplo è il $[2]$

si sommano algebricamente



independentemente da quanti elementi ho.

La considerando de sono elementi in serie.

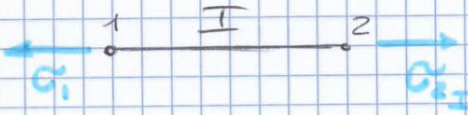
$$I: \begin{cases} \sigma_1 = \frac{F_1}{A} = -P/A \\ \sigma_{2I} = \frac{F_{2I}}{A} = P/A \end{cases}$$

$$II: \begin{cases} \sigma_{2II} = F_{2II}/A = -P/A \\ \sigma_3 = F_3/A = P/A \end{cases}$$

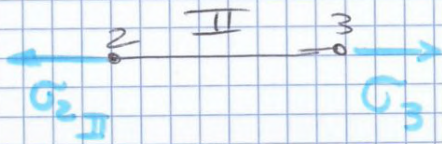
$$F_{2I} = \frac{2EA}{l} u_2 = P$$

↳ dalle considerazioni precedenti,

$$F_{2II} = + \frac{2EA}{l} (u_2 - u_3) = -P = -F_{2I}$$

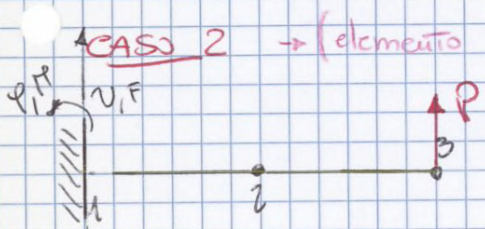


↳ elemento sottoposto a trazione
 ↳ era risultato stress (TIRANTE)

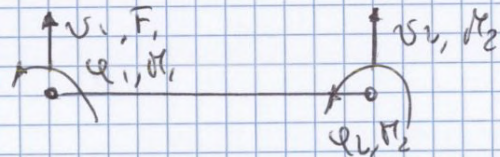


$$|\sigma| = \frac{P}{A}$$

PELOI! AGO CULO!!



compatibilità in questo caso



ovvero per consistenza de $u_{2I} = u_{2II}$

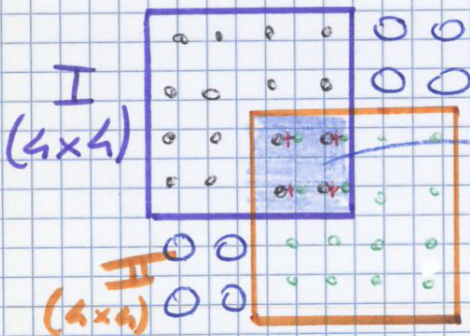
e de $\phi_{2I} = \phi_{2II}$

per l'EQUILIBRIO:

$$F_{2I} + F_{2II} = \begin{cases} F_{ext} \text{ (se esiste)} \\ \emptyset \end{cases}$$

$$M_{2I} + M_{2II} = \begin{cases} M_{ext} \\ \emptyset \end{cases}$$

le equazioni di equilibrio saranno determinate con il sistema precedente



matrice 2x2
 $= u_2, \phi_2$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \phi_1 = 0 \\ u_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ \phi_3 \end{cases}$$

nella soluzione
 conosciuta che
 $u_1, \phi_1 = 0$

impone le condizioni di vincolo prest.

$u_1 = 0 \Rightarrow$ portante secondo il calcolo
metto da parte prima riga e 1° colonna

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

non ex
carico concentrato
in nodo 2.

\rightarrow c'è il carico di volume ma è esemplificato
col termine $\frac{ql}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

potrebbe ricavare

$$\frac{ql}{2} = \frac{EA}{l} u_2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EA}$$

potrebbe di nuovo mettere e ricavare (ripetendo
1° riga - 1° colonna)

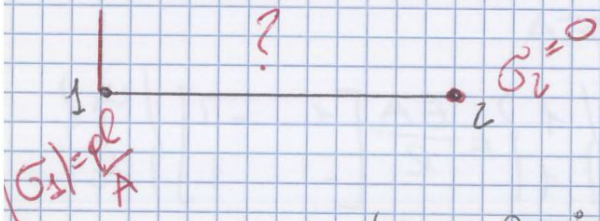
$$F_1 + \frac{ql}{2} = - \frac{EA}{l} \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EA} \Rightarrow$$

$$F_1 = -ql$$

rimane da determinare le tensioni

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{F_1}{A} = -\frac{ql}{A} \\ \sigma_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{incompressor} \\ \text{con} \\ 1^\circ \text{ livello} \end{array}$$

supplendo de:

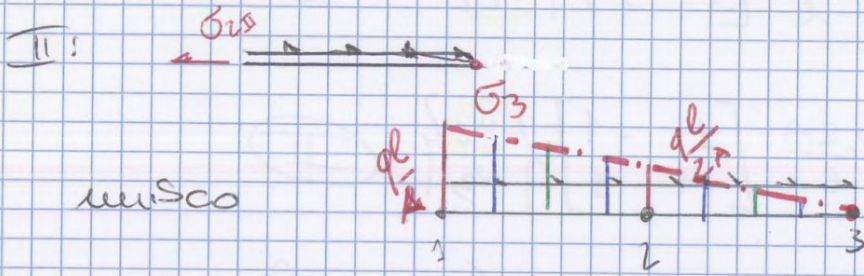
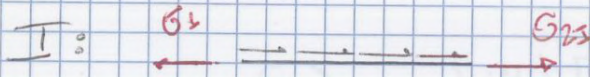


nel mezzo non
so cosa avviene.

La soluzione è che dobbiamo
aumentare il numero degli elementi
del modello.

$$G_3 = \frac{F_3}{A} = \sigma$$

rappresentato



mesh

intuitivamente copioso che aumentando i nodi o i suoi punti intermedi

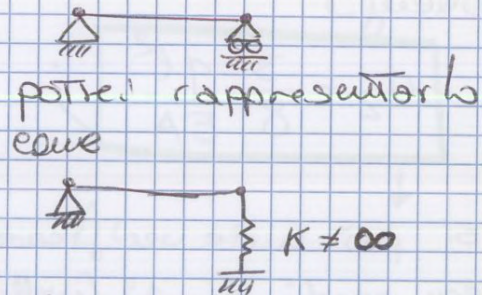
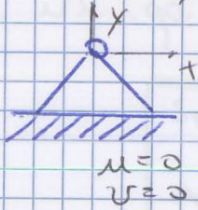
si parla di **h-convergenza** dove con h ci si riferisce alle caratteristiche che descrivono la struttura.

In tal caso $h \approx l$

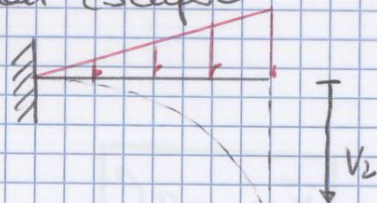
modularità / procedura \Rightarrow **h-convergenza**

fin ora abbiamo solo visto un caso rigido possiamo il concetto di un caso elastico

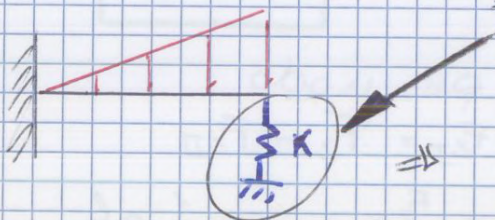
ad esempio rigido invece di disporre una cerniera



ad esempio



una flessibilità molto alta per aumentare la rigidità focoso:



\Rightarrow si riduce la deformabilità.

Scritto così è facile da sommare alle matrici di rigidità della Trave.

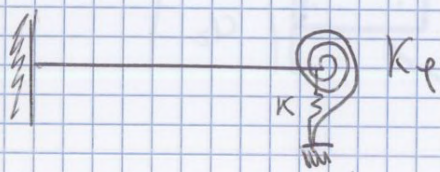
$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{Kl^3}{EJ} & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

coefficiento di rigidità
 \uparrow
 coefficiento di rigidità

denota l'aumento

quindi sicuramente gli spostamenti saranno più piccoli,

→ CASO 2 (potrei avere un molla alla rotazione)



$$[K_p] = \frac{Nm}{rad}$$

in tal caso il sistema sarebbe

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & -K_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

doppio contributo

fatto l'assemblaggio

$$\begin{Bmatrix} F \\ K \end{Bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K & K_p \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} v \\ \varphi \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

individuato il nodo e
 sommo K e K_p alla sotto matrice
 corrispondente

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow K_{xy} \\ \leftarrow K_{yx} \end{matrix}$$

K_{xy} , K_{yx} non
 sono mai presenti
 nel nostro caso.

↳ si trovano nei
 elementi incollati

piu' di baro e scarica.

ricordiamo de

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{GJ\theta}{l} \quad \vartheta_2 = -\theta \\ M_4 &= -\frac{GJ\theta}{l} \quad \vartheta_3 = -\theta \end{aligned}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_p} \frac{d}{2}$$

dove $W_t = \frac{J_p}{d/2}$

es.



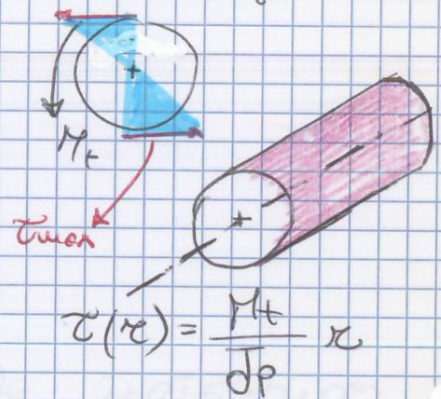
$$\begin{cases} J_p = \frac{\pi d^4}{32} \\ W_t = \frac{\pi d^3}{16} \end{cases}$$



$$\begin{cases} J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \\ W_t = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} \end{cases}$$

ricordiamo de

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$



$$\tau(r) = \frac{M_t}{J_p} r$$

per tanto

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\tau_1 = \frac{M_1}{W_t} = -\frac{M_t}{W_t}$$

$$\tau_{2I} = \frac{M_{2I}}{W_t} = \frac{M_t}{W_t}$$

sono sempre
tensioni
 τ_{\max}

$$\tau_{2II} = \frac{M_{2II}}{W_t} = \frac{GJ\theta}{2l \cdot W_t} (\vartheta_2 - \vartheta_3) = 0$$

$$\tau_{3II} = \frac{M_{3II}}{W_t} = \frac{GJ\theta}{2l \cdot W_t} (\vartheta_2 - \vartheta_3) = 0$$

BARRA
II e'
SCARICA

$$\tau_{3III} = \frac{M_{3III}}{W_t} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\tau_4 = \frac{M_4}{W_t} = -\frac{M_t}{W_t}$$

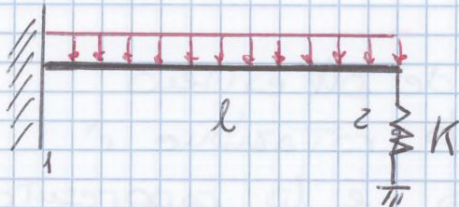
III

$v_2 = -5 \text{ mm}$ e introdotto nel calcolo
 ricavo K sapendo che $q = -100 \text{ N/mm}$

$$K = 10^4 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] = \text{Kmln}$$

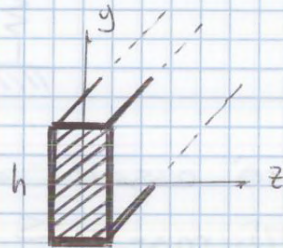
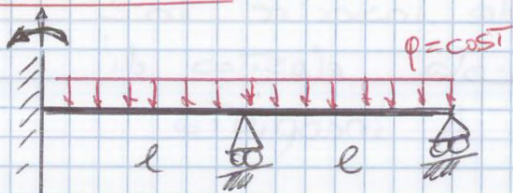
ESERCIZIO AUTODIDATTICO

il medesimo esercizio con gli stessi dati



ma in tal caso $\varphi_2 \neq 0$
 con $v_1 = \varphi_1 = 0$
 dovuto all'incastro

ESERCIZIO 3



è iperstatico 2 volte ma per un'analisi più
 un problema con elementi finiti.

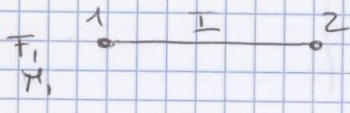
problema era ipersistita.

Successivamente passo ordinato a calcolare F_i, M_i

$$F_1 = \frac{13}{28} q l \quad ; \quad M_1 = \frac{q l^2}{14}$$

$$F_2 = \frac{8}{7} q l \quad ; \quad F_3 = \frac{11}{28} q l$$

rimane ora solo il calcolo delle Tensioni



$$\sigma_{max} = \frac{M_I}{W_f}$$

$\sigma_x = \frac{M_f}{J_z} y$ ci interessa poco l'andamento, ma ci interessa il valore massimo

$$\sigma_{x, max} = \frac{M_I}{J_z} y_{max}$$

$$\frac{J_z}{y_{max}} = W_f$$

$$J_z = \frac{b h^3}{12}$$

e noi ci interessa solo questo

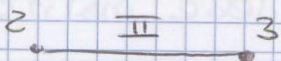
$$y_{max} = \frac{h}{2}$$

$$W_f = \frac{b h^2}{6}$$

$$\sigma_{I, max} = \frac{M_I}{W_f}$$

$$\sigma_{2I, max} = \frac{M_{2I}}{W_f}$$

si ottiene dall'eq. matriciale di equilibrio dell'elemento 1.



$$\sigma_{2II, max} = \frac{M_{2II}}{W_f}$$

ep. di equilibrio dell'elemento 2.

$$\sigma_{3, max} = \frac{M_3}{W_f} = 0$$

Quando parliamo di Tensioni di flessione e torsione ci riferiamo sempre ai valori massimi

$$\tau_{1, max} = \frac{3}{2} \frac{F_1}{b h}$$

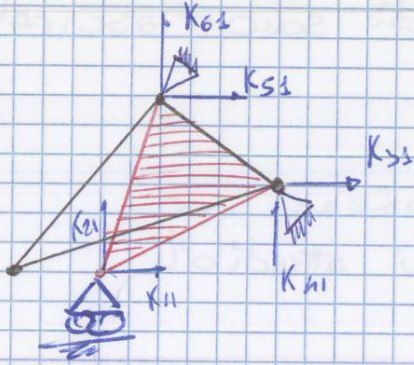
$$\tau_{2I, max} = \frac{3}{2} \frac{F_{2I}}{b h}$$

$$\tau_{2II, max} = \frac{3}{2} \frac{F_{2II}}{b h}$$

$$\tau_{3, max} = \frac{3}{2} \frac{F_3}{b h}$$

$$K_{i1}: M_2 = 1, \quad U_2 \dots \dots = U_3 = 0$$

tutti gli altri
spostamenti sono
pari a 0



↗ def. deformata

abbiamo rappresentato
graficamente le condizioni
che abbiamo appena imposto

Non sono in grado di calcolare le 6 forze
che garantiscono l'equilibrio del sistema

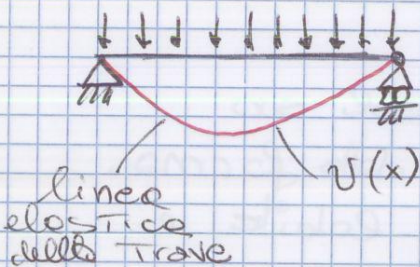
Rinunciamo al solito approccio (che non ci
permette di arrivare ad una soluzione)

Diremo se un sistema è in equilibrio se il
"principio dei lavori virtuali"

Il PLV è del tutto sconnesso da qualsiasi
applicazioni fisce.

PLV le condizione necessaria e sufficiente
affidare un sistema meccanico sia in equilibrio
è che:

$$\delta L_{ext} + \delta L_{int} = 0$$



possiamo di aver risolto
la trave.

Immaginiamo di imporre alla condizione
di equilibrio (la nostra linea elastica)
della spostamenti virtuali.

Questi spostamenti virtuali non dipendono
da alcuna forza esterna applicata al sistema,
siamo noi che otterremo la configurazione del
sistema senza alcuna forza esterna.

$$[mg l \cos \theta - k l (1 - \cos \theta) l \sin \theta] \delta \theta = 0$$

$$mg \cos \theta - k l (1 - \cos \theta) \sin \theta = 0$$

$$(1 - \cos \theta) \tan \theta = \frac{mg}{kl}$$

→ θ_0

equilibrio del
SISTEMA

il vettore delle deformazioni

$\{\epsilon(x, y, z)\}$: CAMPO DELLE DEFORMAZIONI

questo 3 componenti nel esempio precedente

$$\{\epsilon(x, y, z)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x(x, y) \\ \epsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix}$$

in generale la
dimensione e'

$$h \times 1$$

il vettore

dove $h \neq g$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

che posso scrivere come:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

nota quindi che

$$\begin{Bmatrix} \epsilon(x, y, z) \end{Bmatrix}_{h \times 1} = \begin{bmatrix} \partial \end{bmatrix}_{h \times g} \begin{Bmatrix} f(x, y, z) \end{Bmatrix}_{g \times 1}$$

$\{\sigma(x, y, z)\}$: CAMPO DELLE TENSIONI

$$\begin{Bmatrix} \sigma \end{Bmatrix}_{h \times 1} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \text{ nel nostro esempio}$$

↳ mi serve Hooke in modo inverso

sp. di
artem

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 - \nu & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$[C]$

faccio l'inverso

ho una relazione de lege fin a α con una matrice $[\phi_N]$ di numeri nota.

$$\Rightarrow \{f(x, y, z)\} = [N(x, y, z)] \{f_N\}$$

8×10

← punto più imp. x elem. finiti.

↳ matrice delle funzioni di forma

la matrice:

$$\{N(x, y, z)\} = [\phi(x, y, z)] [\phi_N]^{-1}$$

↳ quindi perfettamente nota.

da questo punto segue lo schema precedente

$$\{e(x, y, z)\} = [D] \{f(x, y, z)\} =$$

$n \times 1$ $n \times g$ $h \times ng$

$$= [D] [N(x, y, z)] \{f_N\} = [B(x, y, z)] \{f_N\}$$

$$\{G(x, y, z)\} = [D] (\{e(x, y, z)\} - \{e_T(x, y, z)\}) =$$

$h \times 1$ $h \times h$

$$= [D] ([B(x, y, z)] \{f_N\} - \{e_T(x, y, z)\})$$

↳ e_T rapp. deformazioni di natura termica

nel caso monodimensionale $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha T$

$$\rightarrow \sigma_x = E \epsilon_x - E \alpha T = E (\epsilon_x - \alpha T) = E (\epsilon_x - \epsilon_T)$$

Per avere le equazioni di equilibrio del generico elemento finito, possiamo usare il principio dei lavori virtuali

$$\delta L_{ext} + \delta L_{int} = 0$$

possiamo al calcolo dei lavori virtuali

$$L_{int} = \{ \delta f_N \}^T \left[\int_V dV \underbrace{[B]}_{N \times h}^T \underbrace{[D]}_{h \times h} \underbrace{[B]}_{h \times N} \{ f_N \} - \int_V dV \underbrace{[B]}^T [D] \{ \epsilon_T \} \right]$$

non è mai chiesta in corso la geometria dell'elemento.

$$\begin{aligned} \{ F_N \} + \int_V dV [N]^T \{ q \} &= \\ = \left[\int_V dV [B]^T [D] [B] \right] \{ f_N \} - \int_V dV [B]^T [D] \{ \epsilon_T \} & \text{Termico} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\{ F_N \}}_{\text{CARICHI nodali}} + \underbrace{\{ F_q \}}_{\text{CARICHI rest nodali}} + \underbrace{\{ F_T \}}_{\text{ripulenza}} = [K] \{ f_N \} \quad \leftarrow \text{spostamenti nodali}$$

$$\{ F_q \} = \int_V dV [N]^T \{ q \}$$

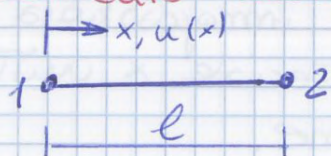
$$\{ F_T \} = \int_V dV [B]^T [D] \{ \epsilon_T \}$$

$$[K] = \int_V dV [B]^T [D] [B]$$

noi ci occupiamo solo di carichi di volume e di temperatura.

Applichiamo la formulazione generale agli elementi che consideriamo

elemento asta



Elemento Asta

$$g = 1 ; N = 2 ; h = 1$$

$$\{ f(x, y, z) \} \Rightarrow u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x = [1 \ x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

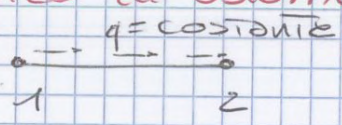
$$\{ f(x, y, z) \} = [\phi(x, y, z)] \{ \alpha \}$$

2 coefficienti α sono $N \cdot g$

$$= \int_0^l A dx \begin{Bmatrix} -1/e \\ 1/e \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ e & e \end{bmatrix} = \frac{EA}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

carico di volume

risultato già noto

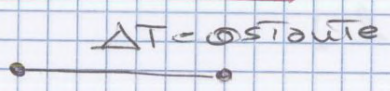


$$\{F_q\} = \int dV [N]^T \{q\}$$

$$[q] = [N/m] \Rightarrow \{q\} = \frac{q}{A}$$

$$\{F_q\} = \int_0^l A dx \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{e} \\ \frac{x}{e} \end{Bmatrix} \frac{q}{A} = \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

carico termico

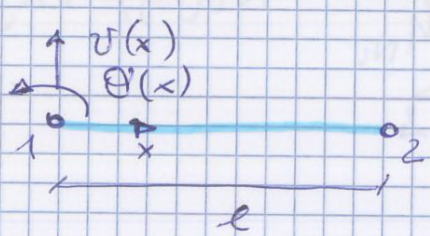


$$\{F_T\} = \int dV [B]^T [D] \epsilon_T$$

$$\{\epsilon_T\} = \Delta T \quad \text{per tutto:}$$

$$\{F_T\} = \int_0^l A dx \begin{Bmatrix} -1/e \\ 1/e \end{Bmatrix} E \Delta T = EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Elemento Trave (bim)



$$g = 2, N = 2, h = 1$$

in tal caso si ha un caso particolare ossia

$$[g=2] \quad N_g = 4$$

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

attribuisco tutti i α a $v(x)$ e uso a $\theta(x)$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$$

modello di Bernoulli-Eulero.

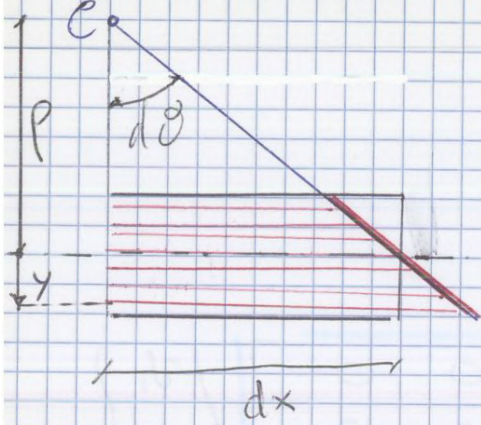
si arriva al 3° grado.

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

[4x4] →

se abbiamo una Trave

Costo curvatura



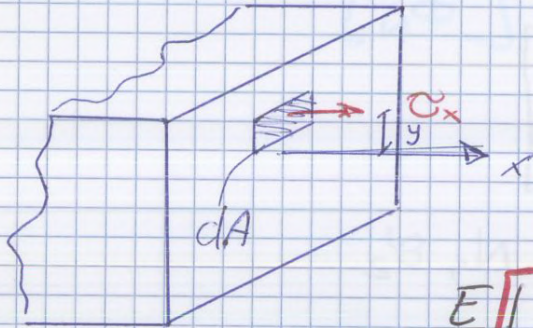
$$dx = \rho d\theta$$

$$\epsilon_x = \frac{[(\rho + y)d\theta - \rho d\theta]}{\rho d\theta}$$

$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho} ; \quad \sigma_x = E \frac{y}{\rho}$$

$\frac{1}{\rho}$ = curvatura della Trave.

$$\int dA \sigma_x - \int dA \frac{E}{\rho} y^2 \Rightarrow M = EJ \frac{1}{\rho}$$



$$dF_{int} = \sigma_x dA$$

$$\int_A (\sigma_x dA) y = M_f$$

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_f ; \quad \frac{M_f}{EJ} = \frac{1}{\rho}$$

$\hookrightarrow J_z$

Dunque

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \rightarrow M = EJ \frac{d^2 \sigma}{dx^2}$$

$$[D] \rightarrow EJ$$

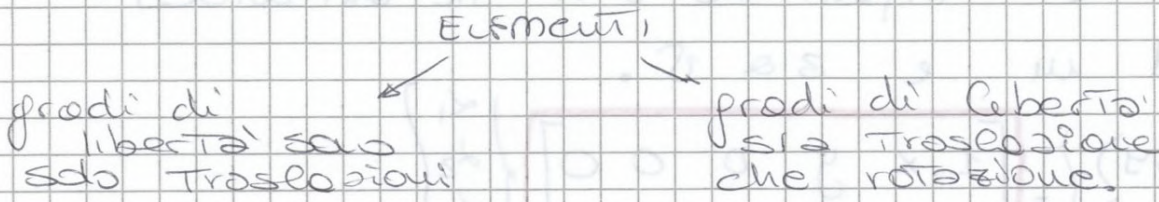
$$\{\epsilon\} \Rightarrow \frac{d^2 \sigma}{dx^2} = [N_1'' \quad N_2'' \quad N_3'' \quad N_4''] \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

ricavo la [K]

$$[K] = \int_V dV [B]^T [D] [B]$$

$$\int_0^l dx \begin{bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{bmatrix} EJ [N_1'' \quad N_2'' \quad N_3'' \quad N_4'']$$

Tutti gli elementi finiti divisi in due grandi categorie.



$$\{ f(x, y, z) \} = [N(x, y, z)] \{ f_N \}$$

↓ cinematica delle deformazioni

$$\{ \epsilon(x, y, z) \} = [B(x, y, z)] \{ f_N \}$$

↓ legge di Hooke

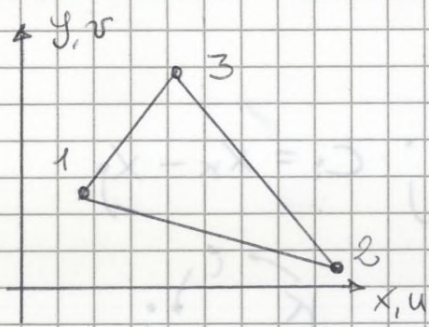
$$\{ \sigma(x, y, z) \} = [D] \{ \epsilon(x, y, z) \}$$

primo passo per ogni elemento finito.

→ il vettore $\{ f_N \}$ è l'elemento predominante

Vediamo elementi piani. ⇒ PLANE STRESS (stato delle tensioni piana)

ELEMENTO A 3 NODI (slide)



$g = 2$ → del sistema
 $N = 3$ → del problema
 $h = 3$ → del sistema

elemento non usato ma è il prototipo

PLANE STRESS: solo $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \neq 0$

PLANE STRAIN (stato deformazione)

Tutte le componenti con indice z valgono 0 (piano)

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \neq 0$ Anche $\sigma_z = 0$

ma $\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu [(\sigma_x + \sigma_y)]) = 0$

$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \rightarrow [N] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\downarrow [B] = [const]$$

si chiama CST = Constant Strain Triangle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Plane stress:

$G_z = 0$ Legge di Hooke

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

rimuovendo il caso di plane strain.

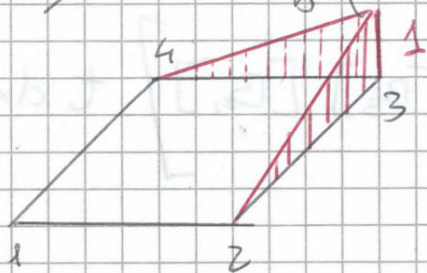
Passiamo a definire la matrice 6x6 di rigidità

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] tA$$

$\hookrightarrow t dx dy$

dove t è lo spessore dell'elemento

$$N_3 = \frac{xy}{ab}, \quad N_4 = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$



$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

N_3

sulla figura iniziale
assi calcolando con
lato 14 e 12
ossia 1 e in origine.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underbrace{[B]}_{[B]} [N] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} y-b & 0 & -(y-b) & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & (x-a) & 0 & -x & 0 & x & 0 & -(x-a) \\ (x-a) & (y-b) & -x & -(y-b) & x & y & -(x-a) & y \end{bmatrix}$$

1° primi elementi (1° riga) dipende solo da y
elementi 2° riga dipende solo da x.

In generale lineare in y e non varia con x
per la 1° riga e in modo duale per la seconda

$$[B] = [B(x, y)] \text{ e sim.}$$

ϵ_x = costante in x, lineare in y

ϵ_y = lineare in x, costante in y

γ_{xy} = lineare sia in x che in y

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

e tensioni sono
lineari sia in x che in y

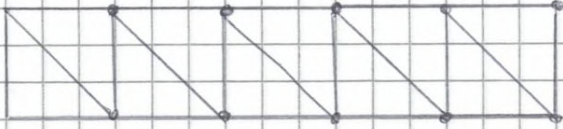
$$[D]_{\text{stress}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

tutte 3 le tensioni
variano in modo
lineare

↳ questo importante

$$[K] = \int_V dV [B]^T [D] [B] = \int_A dx dy t [B]^T [D] [B] =$$

modello a 3 nodi

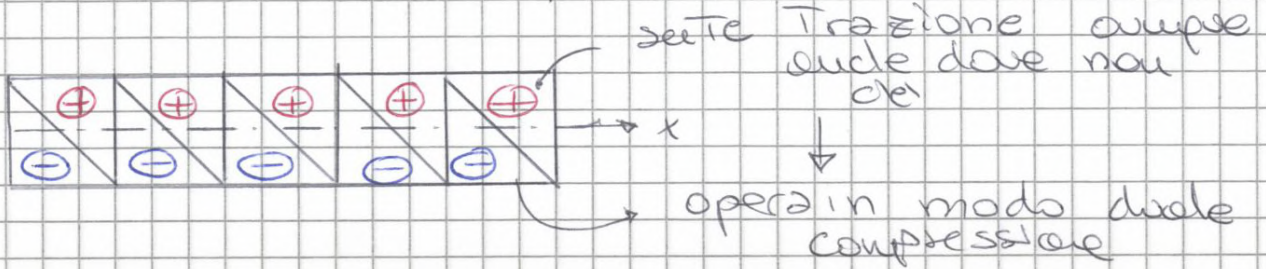


10 elementi

12 nodi

24 gdl

Risultati (per E_x)



questo non va bene

Per l'elemento a 3 nodi E_x è costante sia in x che in y (ovvero σ_x lo è)

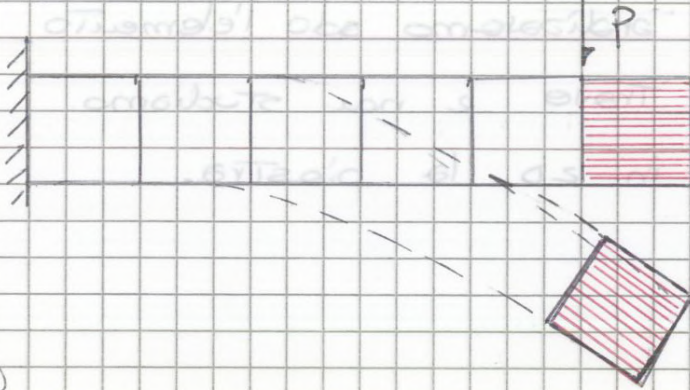
il modello non descrive adeguatamente il problema.

In alcune regioni del modello anche il segno dei risultati è in disaccordo con la teoria delle Travi.

① esempio elemento piano a 4 nodi



esempio trave (statica)



② Collegamento con la convergenza del FEM all'aumentare del numero degli elementi

esempio elemento a 4 nodi

