



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1113

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Ottina

MATERIA: Geomatica 2013/14

Prof. Cina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

GEOMATICA

Bisogna sapere i principi fondamentali di misura e tecnologia e sapere come usarli perché, anche se la tecnologia cambia, i principi di base non cambiano. Bisognerà adottare le conoscenze alle nuove tecnologie.

TRATTAMENTO DELLE MISURE

la misura può essere assimilata ad un'estrazione da una popolazione di misure.

la misura può risultare affetta da errori.

TIPI DI ERRORE

1) ERRORE GROSSOLANO

Sono gli errori grossolani quegli errori macroscopici dovuti alla DISTRAZIONE dell'operatore.

Questo tipo di errore bisogna toglierlo SEMPRE e si elimina semplicemente RIPETENDO le misure.

Avere 1 sola misura non fornisce nessuna informazione sulla presenza di errori grossolani.

Eseguire una 2^a misura serve per vedere se i valori ottenuti sono concordi o discordi.

CONTROLLABILITÀ

Effettuare una 2^a misura serve per valutare la presenza dell'errore grossolano.

AFFIDABILITÀ

Effettuare una 3^a misura serve per decidere quale dei 2 valori è più sicuro.

A] VARIABILE CASUALE A 1D

la misura è associabile ad una variabile casuale quando è possibile estrarre solo parte della popolazione e non tutta.

$$X \left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{array} \right.$$

Ad ogni variabile casuale X è associato un valore (x_1, x_2, \dots, x_n) con una probabilità di accadere pari a (p_1, p_2, \dots, p_n) .

CONDIZIONI

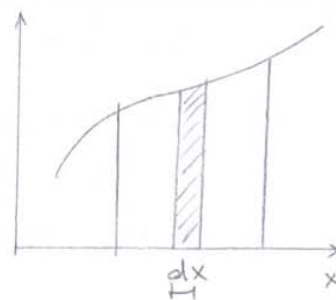
- 1) $p_i \geq 0$ PROBABILITÀ NON NEGATIVA
- 2) $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Se 1 delle 2 condizioni non è verificata, non abbiamo una distribuzione di probabilità.

$f(x)$ = FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ

X è la rappresentazione DISCRETA mentre $f(x)$ è la rappresentazione CONTINUA.

$$dp = f(x) dx \quad \text{AREOLA INFINITESIMA.}$$



REQUISITI $f(x)$

- 1) $f(x) \geq 0$

Il sen(x) non è una funzione densità di probabilità

- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

MOMENTI DI VARIABILE CASUALE 1D

A) CAMPO DISCRETO

1) MEDIA = MOMENTO DEL 1° ORDINE

$$M_{1,x} = \sum_i x_i p_i$$

L'ordine del momento è definito dall'esponente.

$$M_{1,x} = M(x_i) \text{ MEDIA.}$$

2) VALORE QUADRATICO MEDIO: MOMENTO DEL 2° ORDINE

$$M_{2,x} = \sum_i x_i^2 p_i$$

VARIABILE SCARTO

Dalla variabile statistica (X) deriviamo la variabile statistica scarto (V), avente la stessa distribuzione della X e valori argomentali definiti da:

$$V_i = X_i - M_{1,x}$$

1) la variabile scarto ha media nulla:

$$M_{1,v} = \sum_{i=1}^n (X_i - M_{1,x}) p_i = \underbrace{\sum_i X_i p_i}_{M_{1,x}} - M_{1,x} = 0$$

MEDIA: INDICATORE DI POSIZIONE

la media degli scarti è nulla.

2) VARIANZA

$$M_{2,v} = \sigma^2 = \sum_i (X_i - M_{1,x})^2 p_i$$

VARIANZA: INDICATORE DI DISPERSIONE ATTORNO LA MEDIA

B] VARIABILE CASUALE 2 D

Analizziamo 2 ATTRIBUTI di una popolazione (X, Y).

		← C →				
Y \ X	x_1	x_2	x_3	...	x_R	v
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	...	p_{R1}	v_1
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	...	p_{R2}	v_2
y_3	p_{13}	p_{23}	p_{33}	...	p_{R3}	v_3
...
y_S	p_{1S}	p_{2S}	p_{3S}	...	p_{RS}	v_S
μ	μ_1	μ_2	μ_3	...	μ_R	1

↑ K ↓

p_{ik} = probabilità di avere contemporaneamente $X=x_i$ e $Y=y_k$.

$$\text{PROBABILITÀ} = \frac{\# \text{ CASI FAVOREVOLI}}{\# \text{ CASI TOTALI}}$$

Nel caso di una variabile discreta, definiremo un intervallo di campo numerico e calcoleremo le varie probabilità p_{ik} .

- RIGHE y_k : DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA DI X PER $Y=y_k$
con $k = 1, 2, \dots, S$

I valori centrali sono CONDIZIONATI, ovvero non INDIPENDENTI.

- COLONNE x_i : DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA DI Y PER $X=x_i$
con $i = 1, 2, \dots, R$

- COLONNA V: DISTRIBUZIONE MARGINALE DELLA Y

Definiamo come si ripartisce l'attributo Y SENZA considerare i valori ammessi da X.

3) POTENZO MISTO

$$M_{xy} = \sum_i \sum_k x_i y_k P_{ik}$$

VARIABILI SCARTE

Come nel caso 1D, la variabile scarto è data dalla differenza tra il valore argomentale e la media della variabile.

4) VARIANZA

$$\sigma_x^2 = \sum_i \sum_k (x_i - m_{1x})^2 P_{ik} = m_{2x} - m_{1x}^2$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i \sum_k (y_k - m_{1y})^2 P_{ik} = m_{2y} - m_{1y}^2$$

5) COVARIANZA

la covarianza misura la relazione tra x e y

$$\sigma_{xy} = \sum_i \sum_k (x_i - m_{1x})(y_k - m_{1y}) P_{ik} = m_{xy} - m_{1x} m_{1y}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sum_i \sum_k (x_i - m_{1x})(y_k - m_{1y}) P_{ik} = \\ &= \sum_i \sum_k (x_i y_k - x_i m_{1y} - y_k m_{1x} + m_{1x} m_{1y}) P_{ik} = \\ &= m_{xy} - m_{1y} \sum_i \sum_k x_i P_{ik} - m_{1x} \sum_i \sum_k y_k P_{ik} + m_{1x} m_{1y} \\ &= m_{xy} - 2 m_{1y} m_{1x} + m_{1x} m_{1y} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_{xy} = m_{xy} - m_{1x} m_{1y}}$$

In generale, x e y possono essere INDIPENDENTI o DIPENDENTI.

• X, Y SONO INDIPENDENTI SE

$$P(x=X, y=Y) = P(x=X) \cdot P(y=Y)$$

• X, Y SONO DIPENDENTI E CORRELATI SE

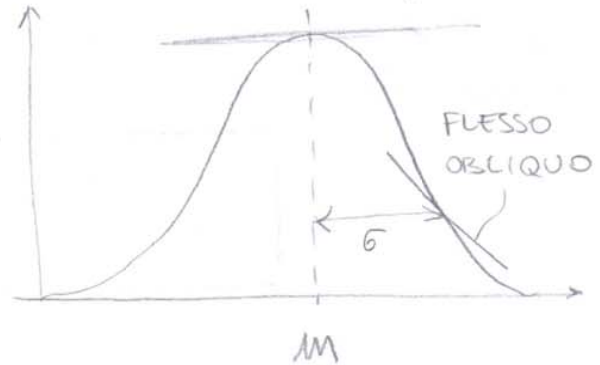
$$P(x=X, y=Y) \neq P(x=X) \cdot P(y=Y)$$

Quando le variabili sono indipendenti, le posso considerare come distribuzioni 1D.

RAPPRESENTAZIONE DISTRIBUZIONE NORMALE

σ = SCARTO QUADRATICO MEDIO
è la radice della VARIANZA

SCARTO = differenza tra il
valore argomentale
e la media.



VARIANZA (M_2V) = MOMENTO DEL 2° ORDINE DELLO SCARTO

$$\sigma^2 = \pi(V^2)$$

M_{2x} = VALORE QUADRATICO MEDIO

MATRICE DI VARIANZA = COVARIANZA (C_{xx})

La matrice di varianza - covarianza è una matrice quadrata e simmetrica che ha le dimensioni del numero di variabili con le variante nella diagonale principale e le covarianze nelle altre posizioni.

Consideriamo una variabile 2D $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Sia M un operatore che estrae la media della popolazione del valore dentro parentesi: la varianza è la MEDIA DEL QUADRATO DEGLI SCARTI.

TEOREMA DELLA MEDIA

Siano x e y due variabili casuali ad una dimensione legate dalla relazione $y = f(x)$; la media di y vorrà:

$$\boxed{M(y) = M(f(x))}$$

1° COROLLARIO

Se (x, y) sono variabili casuali e f è una funzione lineare:

$$\boxed{y = ax + b} \rightarrow \boxed{M_{1y} = a M_{1x} + b}$$

È possibile scambiare l'operatore media $m()$ con l'operatore lineare a .

Questa equazione vale solo nei casi lineari; nei casi non lineari questa operazione è approssimata.

DIMOSTRAZIONE

$$M(y) = M(ax + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) f(x) dx$$

con (a, b) costanti d'integrazione, escano dall'integrale.

$$M(y) = a \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a M(x) + b$$

$$M_{1y} = a M_{1x} + b$$

2° COROLLARIO

Sia $y = g(x)$, con x variabile casuale "poco dispersa" nell'intorno della media m_x e g linearizzabile anche solo in un intorno $[a, b]$ di m_x .

$$\boxed{y = g(x)} \rightarrow \boxed{M_{1y} = g(m_{1x})}$$

DIMOSTRAZIONE

Sviluppiamo $g(x)$ in Serie di Taylor arrestato al 1° ordine nell'intorno di m_x :

$$g(x) \approx g(m_x) + g'(m_x) (x - m_x) + \text{termini 2° ordine}$$

$$M_{1y} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(m_x) + g'(m_x) (x - m_x)] f(x) dx$$

Ricordando che $(AB)^T = B^T A^T$

$$(A \cdot B \cdot C \cdot D)^T = D^T \cdot C^T \cdot B^T \cdot A^T$$

$$C_{yy} = N [A (X - \mu_{1,x}) (X - \mu_{1,x})^T A^T]$$

Scambiando l'operatore medio con l'operatore A

$$C_{yy} = A \underbrace{N [A (X - \mu_{1,x}) (X - \mu_{1,x})^T]}_{C_{xx}} A^T$$

$$C_{yy} = A C_{xx} A^T$$

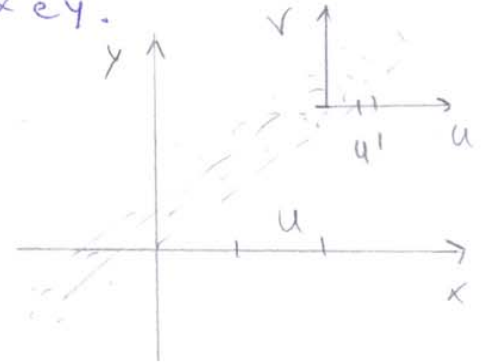
Questa relazione vale quando trattiamo dei 'con' e 'vece' (come la misura dei dislivelli) o quando abbiamo funzioni RECORRENTI o LINEARIZZABILI.

Ricordiamo che la covarianza è l'elemento che serve per misurare la correlazione tra x e y .

CORRELAZIONE LINEARE

(X, Y) sono perfettamente correlate solo se TUTTI i punti stanno su una retta.

Pero, a vedere questa distribuzione, (X, Y) sembrano essere correlate.



Spostando gli assi $(X, Y) \rightarrow (u, v)$, cambia il grado di correlazione? NO.

Cambiando l'unità di misura $u \rightarrow u'$, cambia il grado di correlazione? NO.

VARIABILI SCARTE NORMALIZZATE

Queste variabili si ottengono sottraendo ad ogni valore angolare la media della distribuzione e dividendo per lo scarto quadratico medio:

$$u = \frac{x - \mu_{1,x}}{\sigma_x}$$

$$v = \frac{y - \mu_{1,y}}{\sigma_y}$$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ Sì C_{xx} ha
3 VARIABILI
A 1-DIMENSIONE

6) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & 2 & 0,1 \\ 4 & 0,1 & 3 \end{vmatrix}$ No C_{xx}

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{7}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2}} > 1$$

PROPAGAZIONE C_{xx} 2D

Variable $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$

con $C_{xx} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{vmatrix}$ e $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$Y = A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

applico la legge di propagazione della matrice di varianza: covarianza.

$$C_{yy} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$C_{yy} = \begin{vmatrix} (a_{11}\sigma_1^2 + a_{12}\sigma_{12})(a_{11}\sigma_{12} + a_{12}\sigma_2^2) & a_{11}a_{21} \\ (a_{21}\sigma_1^2 + a_{22}\sigma_{12})(a_{21}\sigma_{12} + a_{22}\sigma_2^2) & a_{12}a_{22} \end{vmatrix}$$

$$C_{yy} = \begin{vmatrix} \sigma_{y1}^2 & \sigma_{y12} \\ \sigma_{y12} & \sigma_{y2}^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{y1}^2 = a_{11}^2\sigma_1^2 + a_{12}^2\sigma_2^2 + 2a_{11}a_{12}\sigma_{12} \\ \sigma_{y2}^2 = a_{21}^2\sigma_1^2 + a_{22}^2\sigma_2^2 + 2a_{21}a_{22}\sigma_{12} \\ \sigma_{y12} = a_{11}a_{21}\sigma_1^2 + a_{11}a_{22}\sigma_{12} + a_{21}a_{12}\sigma_{12} + a_{12}a_{22}\sigma_2^2 \end{cases}$$

la varianza della somma e' la somma delle varianze, moltiplicate per il quadrato dei coefficienti. (nell'ipotesi di non correlazione).
I termini misti nascono quando si ha correlazione.

PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA DI 1 SOLA OSSERVAZIONE Y

Considero che y non è determinata direttamente da più misure x_1, x_2, \dots, x_n , di varianza $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

CASO LINEARE

$$\left\{ \begin{aligned} y &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \\ \sigma_y^2 &= a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2 \end{aligned} \right.$$

CASO NON LINEARE

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{(0)}^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{(0)}^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{(0)}^2 \sigma_n^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{(0)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{(0)} \sigma_{12} + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{(0)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{(0)} \sigma_{13} + \dots$$

STIMA CON MINIMI QUADRATI

Il problema della Geometria è quello di risolvere sistemi di equazioni RIDONDANTI per stimare i PARAMETRI.

CARATTERISTICHE DI UNA STIMA

1) CONSISTENTE

Una stima è consistente se, al tendere all'infinito del numero n di elementi, tende al valore teorico del parametro stimato.

2) NON AFFETTA DA ERRORE SISTEMATICO

Una stima si dice non affetta da errore sistematico se la media della popolazione delle stime coincide con la media della popolazione da cui vengono estratti i campioni.

3) EFFICIENTE

Una stima si dice efficiente se, rispetto a tutte le possibili stime del parametro, la popolazione a cui appartiene ha varianza minima.

Il principio di massima verosimiglianza significa costruire i valori di (μ, σ^2) tali da rendere MASSIMO V

$$\boxed{(\mu, \sigma^2) : V = \text{MASSIMO.}}$$

A) STIMARE LA MEDIA

• OSSERVAZIONI CON LO STESSO PESO

Bisogna avere che la somma dei quadrati degli scarti ma la MINORE POSSIBILE:

$$\boxed{\sum_i (O_i - \mu)^2 = \text{MINIMO}}$$

N.B. la somma degli scarti è nulla ma la somma dei quadrati degli scarti non è nulla.

Per trovare il minimo, deriviamo rispetto la media:

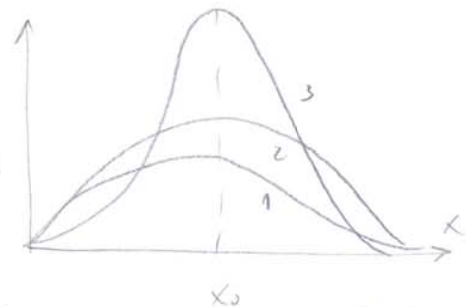
$$\frac{\partial \sum_i (O_i - \mu)^2}{\partial \mu} = -2 \sum_{i=1}^n (O_i - \mu) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_i O_i = n \cdot \mu$$

$$\boxed{\mu = \frac{\sum_i O_i}{n}}$$

μ è il valore di MEDIA ARITMETICA.

• OSSERVAZIONI CON DIVERSO PESO

Prima le osservazioni derivavano dalla stessa famiglia, adesso consideriamo di avere diverse misurazioni, dovute alle diverse condizioni.



le 3 stime hanno stessa media (x_0) ma diversa precisione (σ^2).

Introduciamo il **Peso**: coefficiente che attribuisce ad ogni misura una importanza proporzionale allo sua precisione.

la misura più pesante sarà quella con varianza minore.

Il peso è un coefficiente di omogeneizzazione delle misure rispetto ad una ipotetica distribuzione di varianza σ_0^2 che abbia peso unitario.

LA PROBABILITA' COMPOSTA

$$dP = \frac{\sqrt{P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n}}{(2\pi \sigma_0^2)^{n/2}} e^{-\frac{\sum_i P_i (O_i - \mu)^2}{2\sigma_0^2}} dO^n$$

Per ottenere la probabilità MASSIMA (MAX) devo ricercare il valore MINIMO della derivata.

MEDIA PESATA

$$\sum_i P_i (O_i - \mu)^2 = \text{MINIMO} \rightarrow \frac{\partial \sum_i P_i (O_i - \mu)^2}{\partial \mu} = 0$$

$$-2 \sum_i P_i (O_i - \mu) = 0 \rightarrow \mu \sum_i P_i = \sum_i P_i O_i$$

$$\mu_p = \frac{\sum_i P_i O_i}{\sum_i P_i} = \frac{P_1 O_1 + P_2 O_2 + \dots + P_n O_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

Se $P_1 = 1000$ e $P_n = 1$, più l'osservazione è pesante e più la media tende al valore con peso maggiore.

Se ho un DATO NOTO con ELEVATA PRECISIONE, gli attribuisco un peso MAGGIORE.

μ_p è il valore teorico della grandezza?

No, questa è la migliore stima del parametro vero.

$\hat{\mu}_p$ MEDIA STIMATA, valore che dipende dallo stimatore usato, per esempio i minimi quadrati, etc.

Che più grandezze?

PROCEDIMENTO CON PIU' GRANDezze

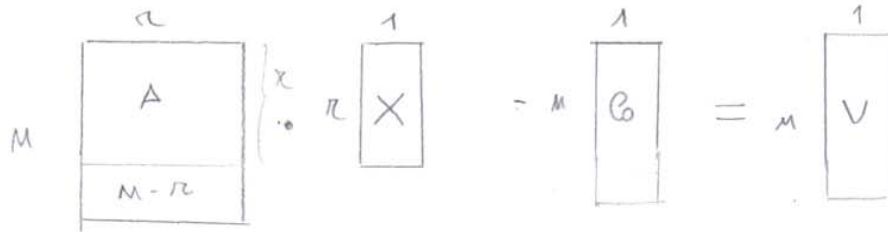
- 1) OSSERVIATO PIU' GRANDezze
- 2) ATTRIBUITO DIVERSA PRECISIONE
- 3) Quando non possiamo misurare direttamente la misura abbiamo MISURE INDIRETTE, FUNZIONALI DELLA POSIZIONE
- 4) RIDONDANZA delle misure, per ridurre gli errori e migliorare la precisione del rilievo.

Il principio dei minimi quadrati permette di risolvere il caso più generale di misure di qualsiasi grandezza con qualunque condizione di vincolo.

$e = x_0 - c =$ vettoRE DEI TERMI NI NOTI

$$\boxed{Ax - b_0 = V}$$

• RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



il sistema di m -equazioni in r -incognite ($m \geq r$) sarebbe perfettamente compatibile se non ci fossero gli SCARTI.

Gli scarti V_i sono incogniti ma hanno un vincolo da rispettare: "il metodo dei minimi quadrati impone di MINIMIZZARE gli scarti"

$$\boxed{\sum_{i=1}^m V_i^2 = \text{MINIMO}}$$

V_i sono incogniti ma soggetti ad un vincolo.

Rispetto a cosa deve essere MINIMO?

Rispetto a cosa deriviamo?

Prima avevamo derivato rispetto al valore medio, adesso:

$$\frac{\partial \sum_i V_i^2}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial \sum_i V_i^2}{\partial x_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial \sum_i V_i^2}{\partial x_r} = 0$$

risolto il sistema di m -equazioni in r -incognite

$$N \cdot X = T_m$$

$$\boxed{\hat{X} = N^{-1} T_m}$$

SISTEMA NORMALE

$$r \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} T_m \end{bmatrix}$$

Questo è lo STIMA DEI PARAMETRI \hat{X} .

Derivo $\sum_i v_i^2$ rispetto a x_1 e x_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum_i v_i^2}{\partial x_1} = 2x_1(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) + 2x_2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) + \\ - 2(a_{11}b_0 + a_{21}b_2 + a_{31}b_3) = 0 \\ \frac{\partial \sum_i v_i^2}{\partial x_2} = 2x_2(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) + 2x_1(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) + \\ - 2(a_{12}b_0 + a_{22}b_2 + a_{32}b_3) = 0 \end{cases}$$

Queste 2 equazioni formano il sistema normale.

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) & (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) \\ (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) & (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_0 + a_{21}b_2 + a_{31}b_3) \\ (a_{12}b_0 + a_{22}b_2 + a_{32}b_3) \end{bmatrix}$$

N

T_u : TERMINE NOTO

$$\boxed{N \cdot x = T_u}$$

N : MATRICE NORMALE

T_u : VETTORE DEI TERMINI NOTI NORMALIZZATI

Scrivo la matrice disegno A e il vettore delle osservazioni b_0

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{MATRICE} \\ \text{DISEGNO} \end{matrix} \quad b_0 = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Con la normalizzazione:

$$A^T A = N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$A^T b_0 = T_u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Tornando a $Ax - b_0 = v$ e ricordando che $N \cdot x = T_u$

$$\boxed{\hat{x} = N^{-1} T_u = (A^T A)^{-1} A^T b_0}$$

Metodo dei minimi quadrati per misure con lo stesso peso.

VEITORE DEGLI SCARTI STIMATI \hat{v}

Cosa succede se al minimo iniziale vado a vedere i parametri stimati?

$$A \cdot x - e_0 = v \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{v} = A \hat{x} - e_0}$$

$A \cdot \hat{x}$ = MISURA STIMATA / CALCOLATA

\hat{v} = SCARTO STIMATO, e' lo scarto tra la misura calcolata e la misura misurata.

Se ho avuto un errore nella misura, ottengo uno scarto elevato.

I minimi quadrati permettono di vedere in evidenza la presenza di errori nelle misure, andando a vedere gli scarti (dobbiamo effettuare dei test, vedi dopo).

STIMA DELLA VARIANZA DELL'UNITA' DI PESO $\hat{\sigma}_0^2$

Partendo dall'espressione della funzione di verosimiglianza (V):

$$V = \frac{\sqrt{P_1 P_2 \dots P_M}}{(2\pi \sigma_0^2)^{M/2}} e^{-\frac{\sum_i P_i (O_i - m)^2}{2 \sigma_0^2}}$$

bisogna cercare il valore di σ_0^2 tale da ottenere il valore massimo della funzione di verosimiglianza V.

Per ottenere il valore massimo di V, deriviamo l'espressione:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma_0^2} = 0$$

Per semplicita', calcoliamo il logaritmo di V siccome il massimo di V coincide col massimo di $\log V$.

$$\log V = \frac{1}{2} \ln(P_1 P_2 \dots P_M) - \frac{M}{2} \ln(2\pi) - \frac{M}{2} \ln(\sigma_0^2) - \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_i P_i (O_i - m)^2$$

$$\frac{\partial \ln V}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{M}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_i P_i (O_i - m)^2 = 0$$

con $v_i = (O_i - m)$, ricaviamo σ_0^2

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_i P_i v_i^2}{M - \pi}$$

$$C_{xx} = (N^{-1} A^T P) C_{ee} (P^T A^T N^{-1})$$

con $N = N^T$ e $P = P^T$, matrici simmetriche

$$C_{xx} = (N^{-1} A^T P) C_{ee} (P A N^{-1})$$

con $\sigma_0^2 = P C_{ee} \rightarrow C_{ee} = \sigma_0^2 P^{-1}$
 $\frac{1}{P \cdot P} = 1$

$$C_{xx} = N^{-1} A^T P \sigma_0^2 P^{-1} P A N^{-1}$$

$$C_{xx} = \sigma_0^2 (N^{-1} \underbrace{A^T P A}_{N} N^{-1}) \quad \text{con } N = A^T P A$$

$$C_{xx} = \sigma_0^2 (N^{-1} N N^{-1}) = \sigma_0^2 N^{-1}$$

$Q_{xx} = N^{-1}$ MATRICE DEI COFATTORI DEI PARAMETRI

$$\boxed{C_{xx} = \sigma_0^2 N^{-1}}$$

C_{xx} è proporzionale a N^{-1} ricorre moltiplicare la matrice dei cofattori per la varianza dell'unità di peso σ_0^2 , valore costante.
 Se una matrice è soggetta ad un errore, l'errore si muoverà negli scarti (che sono al quadrato) e crescerà il valore di σ_0^2 .
 Il valore di σ_0 viene incrementato dagli errori grossolani.

ANALIZZATO $Q_{xx} = (A^T P A)^{-1}$

Ho la necessità di fare le misure per stimare la precisione dello schema o posso saperlo a priori?

Per scrivere A servono le misure?

NO, A contiene solo i COEFFICIENTI delle misure.

Bisogna solo decidere quali misure fare e le misure sono contenute dentro e.

A è una matrice progettabile perché può essere scritta prima di effettuare le misure.

P è progettabile? Posso ipotizzare P?

P è progettabile in base alle caratteristiche degli strumenti.

$$R_{u \times u} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots \\ \pi_{12} & \pi_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \pi_{1u} & \vdots & \pi_{uu} \end{pmatrix} \quad \text{matrice piena}$$

CARATTERISTICHE R

- 1) $\pi_{ii} =$ RIDONDANZA LOCALI $0 \leq \pi_{ii} \leq 1$
- 2) la traccia di R (somatoria degli elementi nella diagonale) è uguale alla ridondanza globale.

$$\text{TRACCIA}(R) = \sum_i \pi_{ii} = u - r$$

Non ci interessano i valori fuori diagonale.

Non è detto che la misura contribuisca alla ridondanza sempre con il valore 1: π_{ii} è il contributo della ridondanza locale alla ridondanza globale.

- Se $\pi_{ii} = 0$ non ha contributo alla ridondanza globale.

L'analisi delle ridondanze locali permette di valutare l'importanza dell'osservazione in uno schema completo di misure: essa dipende sia dalla gravità delle misure requisite, espressa nella matrice A, sia dalla precisione delle osservazioni, contenute nella matrice P.

R serve per calcolare l'AFFIDABILITÀ delle misure: l'affidabilità è la possibilità delle misure di controllare gli errori.

Così i test ottengono comunque un livello di incertezza α .

- R MATRICE PROGETTABILE poiché non dipende dal vettore delle osservazioni l_0 né dal valore di σ_0^2 .

Occorrerà ipotizzare lo schema delle misure per poter scrivere la matrice A e fare delle ragionevoli ipotesi sui pesi da assegnare alle singole osservazioni della matrice P.

$$C_{VV} = \sigma_0^2 \left[AN^{-1} \underbrace{A^T P A}_{=1} N^{-1} A^T - \underbrace{P^{-1} P}_{=1} AN^{-1} A^T + AN^{-1} A^T \mathbf{I} + P^{-1} \mathbf{I} \right]$$

con $N = A^T P A$

$$C_{VV} = \sigma_0^2 \left(AN^{-1} \underbrace{N N^{-1}}_{=1} A^T - AN^{-1} A^T - AN^{-1} A^T + P^{-1} \right)$$

$$C_{VV} = \sigma_0^2 \left(AN^{-1} A^T - 2AN^{-1} A^T + P^{-1} \right) = \sigma_0^2 \left(P^{-1} - AN^{-1} A^T \right)$$

$Q_{VV} = (P^{-1} - AN^{-1} A^T)$ MATRICE DEI COFATTORI DEGLI SCORTI

$$\boxed{C_{VV} = \sigma_0^2 Q_{VV}}$$

ANALOGIA • SCORTI V: $C_{VV} = \sigma_0^2 Q_{VV}$

• PARAMETRI X: $C_{XX} = \sigma_0^2 Q_{XX}$ $Q_{XX} = N^{-1}$

Analizziamo $Q_{VV} = (P^{-1} - AN^{-1} A^T)$

$$Q_{VV} = P^{-1} (\mathbf{I} - AN^{-1} A^T P) = R P^{-1}$$

$$\boxed{Q_{VV} = R P^{-1}}$$

La matrice dei cofattori degli scorti è legata alla matrice di ridondanza:

$$C_{VV} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \sigma_{v_1}^2 & \sigma_{v_1 v_2} & \dots & \dots \\ \sigma_{v_1 v_2} & \sigma_{v_2}^2 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{v_1 v_m} & \vdots & \sigma_{v_m}^2 & \dots \end{matrix} \\ \text{MxM} & \end{matrix}$$

C_{VV} contribuisce nella diagonale principale le varianze $\sigma_{v_i}^2$ degli scorti delle osservazioni dopo l'applicazione dei minimi quadrati e le covarianze fuori diagonale.

La matrice C_{VV} è proiettabile?

Poiché ipotizzarla priva delle misure?

cos'è proiettabile? P, R, N SI $\rightarrow Q_{VV}$ SI.

C_{VV} è proiettabile.

TEST SUI MINIMI QUADRATI

Vediamo dei test statistici per le misure soggette a errori grossolani: oggi non vengono fatte più le verifiche di compensazione (la somma degli angoli interni del triangolo è 180° ...) la verifica non viene fatta attraverso l'osservazione dei DATI MA DEL CORCERE DI AUTOMATIZZARE le procedure.

Può capitare che in una compensazione ai minimi quadrati, la stima dei parametri venga DEVIATA dalla presenza di ERRORI GROSSOLANI nelle osservazioni, la cui individuazione può essere complicata in sistemi complessi di misura.

Un'analisi sulla presenza degli errori grossolani può essere fatta a partire dall'analisi degli SCARTI STIMATI

$$\hat{V} = \hat{E} - P_0 = A \hat{X} - P_0$$

$$\text{con } \hat{X} = N^{-1} T_M = (A^T P A)^{-1} A^T P P_0$$

\hat{V} = vettore degli SCARTI STIMATI definito come differenza tra il valore stimato (\hat{E}) ed il valore osservato (P_0).

la misura con lo scarto più elevato sarà soggetta ad errori grossolani: metodo INTUITIVO MA NON RIGOROSO.
la sola osservazione degli scarti non è sufficiente per determinare gli errori grossolani MA è un'indicazione.

$$V_i \in N(0, \sigma_i^2)$$

la distribuzione degli scarti varia da osservazione a osservazione MA possiamo dire che gli scarti V_i appartengono ad una popolazione Normale con MEDIA NULLA MA DISPERSIONE DIFFERENTE.

Non sono confrontabili tra di loro valori provenienti da distribuzioni differenti.

Nella pratica si considera sempre il caso di avere errore grossolano MA bisogna ricordare che quando scarto la misura ho sempre il 1% probabilità di avere comunque un errore (ho il 1% probabilità di avere scartato una misura buona).

• ERRORE DI TIPO I

| Errore che commetto quando scarto una misura CORRETTA.

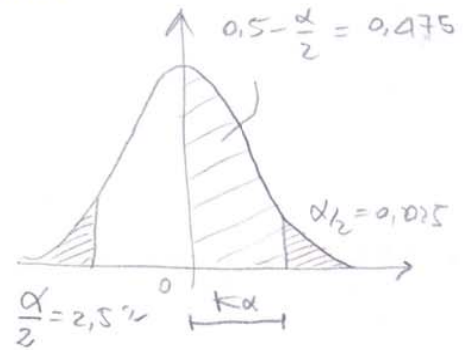
ESEMPIO

con $\alpha = 5\%$, $1 - \alpha = 95\%$

$P(0,5 - \frac{\alpha}{2}) = 0,475 \rightarrow K_{\alpha} = 1,96$

Entrò nella tabella con P ed esco con K_{α} :

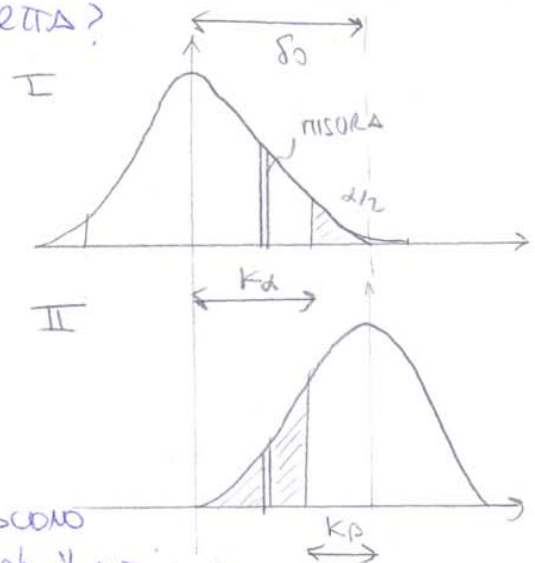
- Se $w_i < 1,96$, con $\alpha = 5\%$, accetto LA MISURA
- Se $w_i > 1,96$ ho il 5% di probabilità di aver commesso ^{UN} ERRORE.



Ma quando accetto la misura, ma non veramente sicuro di aver accettato una MISURA CORRETTA?

Supponiamo di avere 2 distribuzioni normali dove la II è spostata.

Quando effettuo la misura, questa misura non deriva dalla prima distribuzionale MA dalla seconda.



β = POTENZA DEL TEST

K_{β} = INTERVALLO DI CONFIDENZA

Adesso abbiamo considerato per buono un valore che deriva da un'altra distribuzionale.

• ERRORE DI TIPO II

| Accettiamo una misura, con $w_i \leq K_{\alpha}$, che però deriva da un'altra distribuzionale.

- In β non considero la coda di destra perché quel valore sarebbe già scartato dal test di d .
Devo considerare per β solo quella parte di tabella che rispetta i limiti di α .

$$\beta = 10\% \rightarrow K_{\beta} = 1,28 \quad (0,3937)$$

$$\delta_0 = K_{\alpha} + K_{\beta} = 1,96 + 1,28 = 3,24$$

Che è π_{ii} ? $0 \leq \pi_{ii} \leq 1$

- $\pi_{ii} = 0$, il mio contributo è nullo;
- $\pi_{ii} = 1$ perché il mio contributo è massimo, quel valore non può contribuire oltre se stesso.

Quindi se $\pi_{ii} \rightarrow 0$ il test lo mette in evidenza,
Volei avere $\pi_{ii} \rightarrow 1$ per avere ridondanza locale $\rightarrow 1$.

Ma δ_0 è meglio se contribuisce molto o poco alla ridondanza locale?

Il minimo errore che posso rilevare:

$$MDS = \frac{\delta_0}{\sqrt{\pi_{ii}}} \cdot \sigma_i = \frac{3,24}{\sqrt{0,25}} \cdot 1 = 6,48 \text{ cm}$$

Posso intercettare degli errori solo se sopra i 6 cm: sotto i 6 cm il test non mette in evidenza gli errori.

AFFIDABILITÀ ESTERNA

L'errore superiore ai 6 cm moduce dell'influenza sulle misure: affidabilità esterna.

L'affidabilità esterna è l'errore nei parametri \hat{x} a causa di un errore non intercettato (σ_e).

$$\sigma_e = (A^T P A)^{-1} A^T P \cdot MDS$$

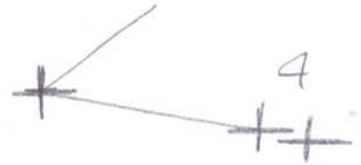
Non abbiamo sempre la nomina meccanica possibile.

Globalmente lo schema di misura è ridondante, sono tranquillo?

localmente lo schema è ridondante.

Aggiungendo il punto 4 ho introdotto 2 incognite ma ho fornito solo 2 misure (d_{14} e d_{15}).

Il punto 4 è ISODETERMINATO poiché se ho un suo lieve spostamento, non riesco ad accorgermene.



Globalmente ho ridondanza = 1 ma localmente = 0

$$R = \begin{vmatrix} 0,17 & & & & \\ & 0,25 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 0,00 & \\ & & & & 0,00 \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \pi_{11d} = 0 \\ \pi_{11\alpha} = 0 \end{cases}$$

Ma $\pi_{DB} \rightarrow \infty$ per il punto 4.

Normalmente non mi farei una sola misura per un'incognita. Nemmeno produce delle matrici con:

Spesso però, facendo delle misure deboli (scarse) con $R_{ii} = 0,001 \div 0,005$ ho valori alti per π_{DB} .

Progettiamo le misure degli schemi in funzione della precisione richiesta.

La precisione però è costosa e le misure devono essere FINALIZZATE PER LA PRECISIONE.

Progettiamo la precisione con le matrici di varianza covarianza e con l'affidabilità.

Fino a che punto questo rapporto vale Δ ?

σ_0^2 è una costante definita a priori.

$\hat{\sigma}_0^2$ è funzione di V_i^2

- $V_i \in N(0, \sigma_i^2)$ DISTRIBUZIONE NORMALE

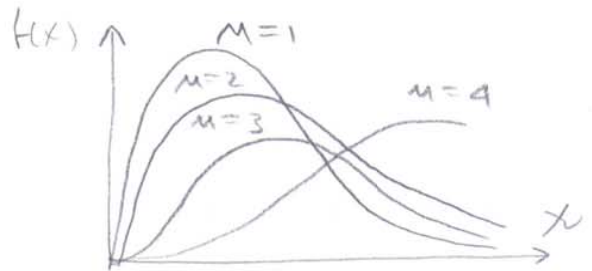
- $V_i^2 \in \chi^2$ DISTRIBUZIONE CHI-QUADRO

Il quadrato di una distribuzione normale segue la distribuzione del chi-quadro.

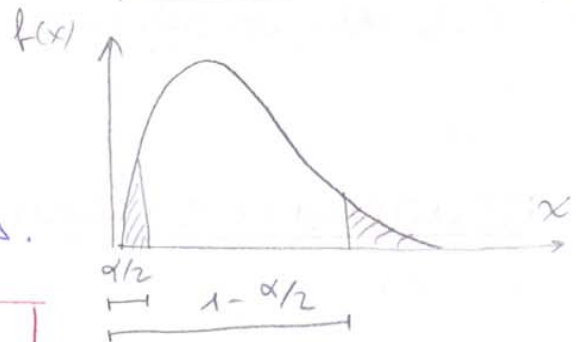
$\sum_{i=1}^m V_i^2 \in \chi_m^2$ distribuzione del chi-quadro definita in base ai gradi di libertà (m).

Anche il rapporto $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ segue una distribuzione χ^2 essendo σ_0^2 una costante definita a priori.

Applichiamo l'ipotesi $H_0 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$



Stabilisco $\alpha\%$ come LIVELLO DI CONFIDENZA, ovvero probabilità di accettare una ipotesi SBAGLIATA.



$$\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, \nu}}{\nu} \leq \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}), \nu}}{\nu}$$

$\nu = \nu - k = \text{GRADI DI LIBERTÀ}$

Stabilito α , devo definire i limiti di $\alpha/2$ e $1-\alpha/2$, scegliere la distribuzione con ν -gradi di libertà e verificare la disuguaglianza:

- Se il valore fuoriesce dai limiti, l'ipotesi iniziale di $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ va scartata.

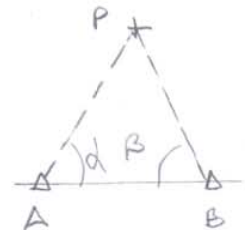
Questo non altera la stima dei parametri μ ma solo della stima di varianza/covarianza di parametri e scarti.

Generalmente nelle reti classiche questo test passa sempre. Nelle reti GPS questo test non passa perché i lettori GPS sono allestiti da errori: la matrice del N non è un valore non pratico e una matrice sottostima della matrice dei pesi.

Potremmo sapere prima se è mitica e ben configurato? Sì.

BONTÀ DELLA CONFIGURAZIONE DEL SISTEMA

Voglio determinare il punto P tramite 2 punti noti A, B .



Un piccolo errore di (α, β) produce grandi spostamenti di P .

Con i triangoli equilateri abbiamo un'incertezza ridotta.



PUNTO DI VISTA GEOMETRICO

$\Delta x = b \rightarrow x = A^{-1} b$, applico i minimi quadrati.
 $b =$ misure eseguite

Se il problema è ben conformato geometricamente: piccole variazioni Δb (errore nelle misure) provocano variazioni Δx (errore nello spostamento dei punti).

Pero' non è il caso migliore.

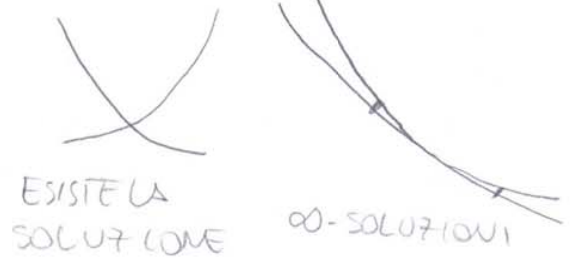
Vorrei ottenere, per grandi valori Δb , piccoli valori Δx , nonostante errori nelle misure voglio avere errori contenuti nei parametri.

Non voglio il caso di grandi Δx per piccoli Δb .

$$X = N^{-1} T u$$

- N^{-1} piccolo $\rightarrow N$ grande, valori grandi.
- Voglio che AMPI $\Delta T u$ producano PICCOLI ΔX .

Questo accade quando ho 2 circonferenze che mi intersecano molto vicino.



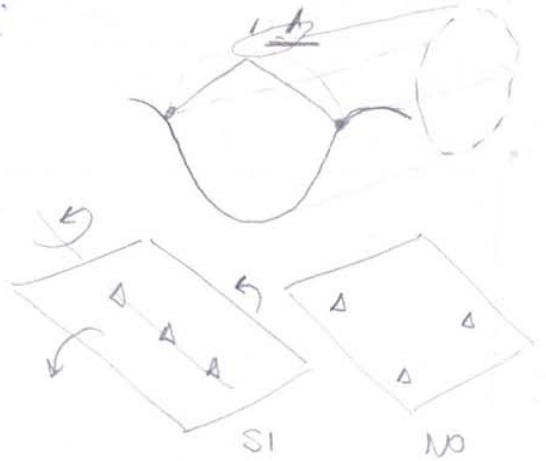
ESEMPI

1) Questo accade quando sono nei voli fotogrammetrici nelle volte a 0.

2) PUNTI ALLINEATI

Se ho 3 punti allineati, ho difficoltà di stimare il piano: la soluzione è singolare o vicino alla singolarità.

Il numero di condizioni è BASSO.

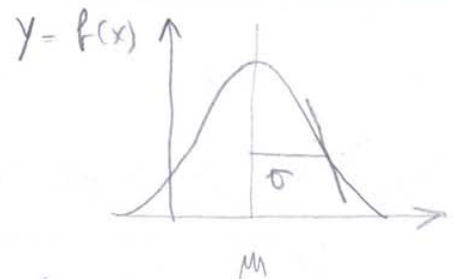


Più sono vicino alla singolarità e più lo stima dei parametri è scadente.

"Se la geometria è debole, noi andiamo molto distanti".

ESTENSIONE MATRICE DI VARIANZA-COVARIANZA A n-DIMENSIONI

Considero 2 variabili casuali di tipo normale (x,y) INDIPENDENTE



IPOTESI $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$

La probabilità dei valori osservabili (x,y) è data dal prodotto delle singole probabilità:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu_{1x})^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(y_i - \mu_{1y})^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x_i - \mu_{1x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y_i - \mu_{1y})^2}{\sigma_y^2} \right]}$$

1. D

$$\begin{cases} \mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma & P = 68\% \\ \mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma & P = 95\% \\ \mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma & P = 99,8\% \end{cases}$$

Cosa succede con più dimensioni?

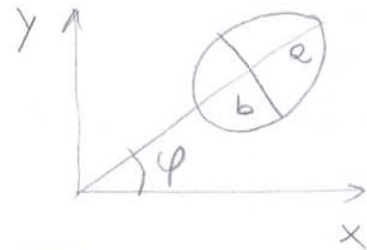
- Se x, y fossero incorellabili, potremmo calcolare la $z.p.$:
 $f(x, y) = f(x) \cdot f(y) = 0,68 \cdot 0,68 = 0,46$

In 3D VOLUTO, ELUSSOIDE D'ERRORE
 In 4D IPER-ELUSSOIDE

Se volemmo $P = 95\%$, corrisponderebbe a 2,447 volte l'ellime standard.

Stesse considerazioni fatte nell'ellimoido d'errore.

- 1 - ELLISSE STANDARD ha $P = 39\%$
- 2 - ELLISSI STANDARD ha $P = 86,5\%$
- 3 - ELLISSI STANDARD ha $P = 99\%$



ALCUNO SOTTILISSI ELLISSE

$$a^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_x\sigma_y^2}$$

$$b^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_x\sigma_y^2}$$

$$\tan 2\varphi = - \frac{2\sigma_x\sigma_y}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}$$

L'ellime d'errore tiene conto di varianza e covarianza.

Se le misure non sono incorelate, l'ellime standard ha gli assi paralleli agli assi coordinati (x, y)

$$\sigma_{xy} = 0 \quad \varphi = 0$$

la rotazione dell'ellime d'errore da idea nella correlazione tra (x, y) .

L'ellime d'errore m'ingetta e serve per capire le direzioni di massima precisione.

RETI ALTIMETRICHE

- | | |
|---------------------------|---|
| 1D : RETE DI LIVELLAZIONE | } STRUMENTI, METODI e TIPOLOGIE
DIFFERENTI |
| 2D : RETE PLANIMETRICA | |
| 3D : RETI GPS o RISTE | |

Oggi il GPS fornisce una composizione 3D dove l'altimetria e Planimetria non sono SEPARABILI.

Quali sono le equazioni geometriche da usare?

Tipicamente minimizziamo:

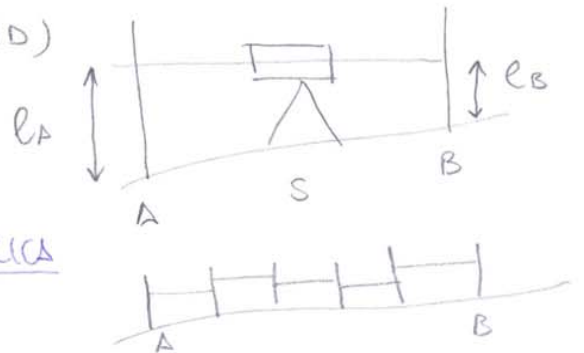
- Angoli, distanze e dislivelli;
- Vettori (base-line GPS / GNSS);
- SITUAZIONI DI VINCOLO dove n'rimano angoli, coordinate ...

In queste equazioni ci saranno dei pesi.

1) EQUAZIONE DEI DISLIVELLI (RETE 1D)

La misura del dislivello tra 2 punti A (PUNTO INDIETRO) e B (PUNTO AVANTI) avviene mediante un'operazione di LIVELLAZIONE GEOMETRICA

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = e_A - e_B$$



Il dislivello è positivo se andiamo in SALITA.
Se la distanza è lunga, fare più misure.

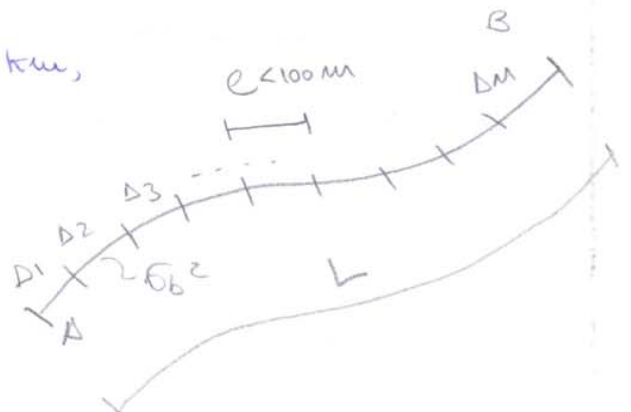
• Pesi

Come bisogna pesare il dislivello?

Nella livellazione geometrica, il dislivello viene ottenuto sommando i vari dislivelli delle singole battute, di lunghezza limitata e comunque inferiore ai 100 m.

Quando abbiamo battute da n-km, sarebbe troppo oneroso ripetere più volte le misure.

Le n-battute hanno la stessa varianza σ_b^2 .



1. ERRORE MEDIO KILOMETRICO

I dislivelli vengono determinati dall'errore medio kilometrico (e_{mk}) ed è l'errore che commetto ogni km.

$$\sigma_{\Delta} = e_{mk} \sqrt{L [km]}$$

NO COERENZA DIMENSIONALE

ESEMPIO

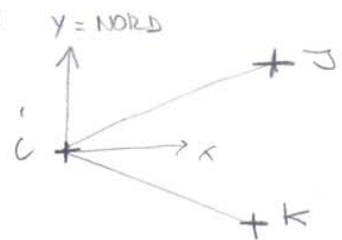
$L = 4 \text{ km}$ $e_{mk} = 2 \text{ mm/km}$

$\sigma_{\Delta} = 2 \cdot \sqrt{4} = \pm 4 \text{ mm}$.

Questa è una delle poche equazioni lineari.

2) EQUAZIONE ALLA DISTANZA (RETI PLANI RETRICHE)

Consideriamo la distanza tra 2 punti, dove i punti possono essere ENTUSIBI, NESSUNO o SOLO 1 INCOGNITI.



$$\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} - d_{ij} = 0$$

Questa equazione non è lineare ma può essere linearizzata a partire dai valori approssimati delle incognite:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{(0)} x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{(0)} x_n + \text{trascuro i termini del 2° ordine}$$

$$X = X^{(0)} + x$$

X = VALORE CORRETTO

$X^{(0)}$ = VALORE APPROSSIMATO

x = INCREMENTO, CORREZIONE

$$f(X) = f(X^{(0)}) + \text{grad } f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dove $\text{grad } f()$ è il vettore che contiene le derivate parziali.

ESEMPIO

$d = 4 \text{ km}$ $SC = 2 \text{ mm}$ $SV = 2 \text{ mm/km} = 2 \text{ PPM PARTI PER MILIONE}$.

$$\delta d = \pm (2 + 2 \cdot 4) = \pm 10 \text{ mm}$$

Potremo ipotizzare la matrice dei seni con questo modo e le equazioni diventano lineari.

ANGOLI

L'angolo è una differenza tra 2 direzioni angolari:



$\alpha =$ ANGOLO AZIMUTALE, differenza tra 2 direzioni.

$$\alpha = A_{iK} - A_{iJ}$$

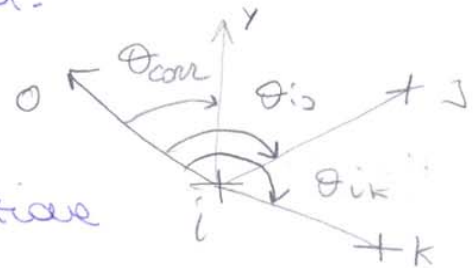
Se $Y \equiv$ Nord Geografico, A è l'Azimut.

L'azimut si può misurare con i teodoliti ginevrini che permettono di orientare a Nord lo zero del cerchio.

Però in generale l'azimut non si misura perché in genere non si riesce ad orientare lo zero con il Nord.

$\Theta =$ DIREZIONE ANGOLARE

$0 =$ ZERO DEL CERCHIO



La differenza tra l'azimut e la direzione angolare è nell'orientamento.

$\Theta_{corr} =$ DIREZIONE DI CORREZIONE e' la direzione da dove allo zero del cerchio per arrivare al Nord.

3) EQUAZIONE AZIMUT

$A_{iJ} =$ azimut con stazione in i e punto avanti in J .

$$\arctg \frac{y_J - y_i}{x_J - x_i} - A_{iJ} = 0$$

Nel caso dei misuratori quadranti, l'espressione non è uguagliata a zero ma al valore dello scarto V .

4) EQUAZIONE ANGOLO DI DIREZIONE

L'angolo di direzione n ha quando il cerchio azimutale non è orientato nella direzione del nord e bisogna effettuare una correzione d'orientamento Cor .

Cor la correzione d'orientamento è una nuova incognita per ogni stazione angolare e per ogni cambio di orientamento (reiterazione) del cerchio.

$$\theta_{12} = A_{12} - Cor$$

$$\arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \theta_{12} - Cor = 0$$

Ho 5 incognite: x_2, x_1, y_2, y_1, Cor .

Minuire l'angolo con 2 stazioni (azimut o angolo di direzione) non vuol dire avere ridondanza perché aggiunge un grado di libertà.

: PESO ANGOLO DI DIREZIONE

Ogni volta che eroguo una stazione, uno n -direzionali dello zero differenti ed uno n -direzionali non confrontabili.

Devo usare il peso fornito dalla cosa costruttrice

$P_i \rightarrow 6$ della cosa costruttrice

DERIVATO

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_{12}}{\partial x_2} = \frac{y_2 - y_1}{d_{12}^2} \\ \frac{\partial \theta_{12}}{\partial x_1} = - \frac{y_2 - y_1}{d_{12}^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_{12}}{\partial y_2} = - \frac{x_2 - x_1}{d_{12}^2} \\ \frac{\partial \theta_{12}}{\partial y_1} = \frac{x_2 - x_1}{d_{12}^2} \end{array} \right. \quad \frac{\partial \theta_{12}}{\partial Cor} = -1$$

NOTA: non posso fare le medie n direzionali con valore dello zero diversi

Questi angoli non sono di base CONFRONTABILI e posso calcolare lo scarto quadratico medio:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_i (\alpha_i - \alpha_m)^2}{n-1}} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

σ_0 = SCARTO QUADRATICO MEDIO STRUMENTALE, dovrebbe essere uguale alla precisione dello strumento.

σ_m = SCARTO MEDIO / VARIANZA MEDIA, avendo fatto n misure

ESEMPIO

$$\sigma_0 = \pm 5'' \quad , \quad \sigma_m = \pm 2''$$

lettero la misura facendo n STRATI

$$n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_m^2} = \frac{5''^2}{2''^2} = n \quad 6 \text{ STRATI}$$

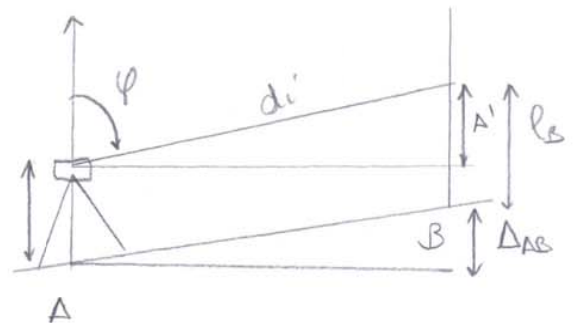
Posso usare gli angoli: non è grave rifare gli angoli, è grave rifare le livellazioni geometriche.

6) EQUAZIONE ANGOLO ZENITALE

L'angolo zenitale è usato per il calcolo dei dislivelli, dislivelli in approssimazione PIVVA.

l_B = LUNGHEZZA PRISMA

h_A = ALTEZZA STRUMENTALE



$$\Delta_{AB} = z_B - z_A = d_i \cos \varphi + h_A - l_B$$

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{\Delta_{AB} - h_A + l_B}{d_i} = \cos^{-1} \frac{\Delta_{AB} - h_A + l_B}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}}$$

Questa espressione lo posso inserire nella compensazione 3D, da lineareizzare nell'intorno del valore centrale.

Con 2 punti di quota nota fino anche lo scara, ma non è la condizione di minimo vincolo.

RETE 3D

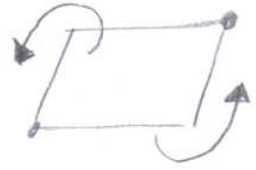
Un corpo nello spazio ha 6 g.d.l.

Prendo 2 punti 3D?

No, perché il corpo ruoterebbe nello spazio.

Prendo 3 punti 3D?

No, perché avrei delle distorsioni nello schema



Per avere la condizione di MINIMO VINCOLO:

- 1 PUNTO NOTO DI COORDINATE X, Y ;
- 1 DIREZIONE θ ;
- 3 PUNTI DI LINEAZIONE CON NOTO Z .

Ipotezziamo invece:

- 2 PUNTI X, Y
 - 3 PUNTI Z
- oppure
- 2 PUNTI X, Y, Z
 - 1 PUNTO Z

Ho 7 parametri che delimitano la scara λ , le 3 traslazioni T e le 3 rotazioni R

$$T_x, T_y, T_z, R_x, R_y, R_z, \lambda$$

Nella realtà potrei avere più punti di vincolo.

1 - VINCOLO DI POSIZIONE

I punti di coordinate note vengono tolti dalle circonferenze e vanno nel vettore dei termini noti.

Il vincolo di posizione SANA LA DEFICIENZA DI RANGO fissando la **TRASLAZIONE**, rispetto al S.R., dello schema di misure.

NOTI $x^{(v)}, y^{(v)}, z^{(v)}$

$$\left[\begin{array}{l} X - x^{(v)} = 0 \quad ; = V_1 \\ Y - y^{(v)} = 0 \quad ; = V_2 \\ Z - z^{(v)} = 0 \quad ; = V_3 \end{array} \right]$$

Impostiamo la differenza:

- = 0 se siamo in condizione di minimo vincolo
- = V (SCARTO) se non siamo in condizione di minimo vincolo.

3 - VINCOLO DI SCALA

Puo' capitare che 2 S.R. non abbiano la STESSA SCALA o che siano composti da catene di triangoli con scale non definite. Se ho 3 ANGOLI non posso risolvere un triangolo perché avrei 2 soluzioni.

Devo FISSARE LA **SCALA**, FISSANDO LA LUNGHEZZA DI UN LATO.

$$\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2} = \sqrt{(X'_A - X'_B)^2 + (Y'_A - Y'_B)^2} = d$$

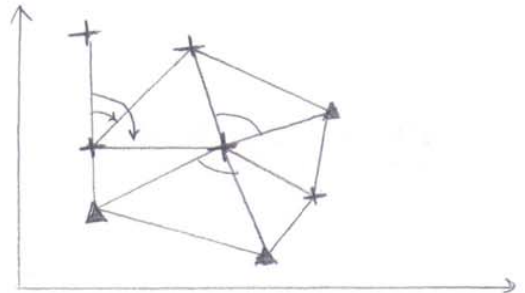
In una catena di triangoli, basta fissare una lunghezza per definire il sistema.

Bisogna imporre l'uguaglianza nella distanza misurata in 2 differenti S.R.

Se questa equazione viene perata in modo preesistente, diventa un VINCOLO ASSOLUTO: questo dipende se le distanze o le coordinate sono note con valore assoluto.

Considero una rete planimetrica con punti di coordinate note (*) e incognite (+).

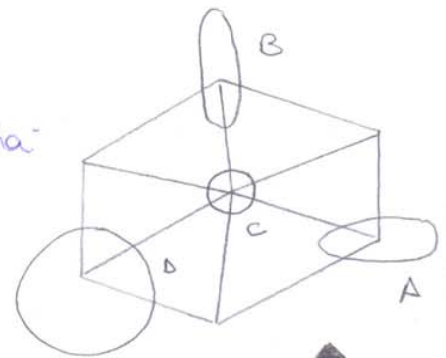
Ho scelto di misurare con la matrice di varianza-covarianza.



Bisogna sempre determinare gli **ellimi d'errore**: sono aree ad eguale probabilità di trovare i valori.

Ipotesiamo di avere questa rete che rappresenta il movimento dei punti e voglio vedere quanto mi sposta un punto nel tempo (pendio in piana).

Considero le misure ed ottengo i seguenti ellimi.



DIREZIONE DI VISTA

Vorrei che l'ellime d'errore sia:

- di AREA PIU' PICCOLA POSSIBILE;
- FORMA TANGENTE AL CERCHIO.

Scrivo la matrice con le equazioni di vincolo

Q_c = VALORE INCOGNITO

Q_c^V = VALORE NOTO DELLA MONOGRAFIA

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right| \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_c \end{array} - \begin{array}{c} \Delta C_1 \\ \Delta_{12} \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{c3} \\ \Delta_{13} \\ \hline Q_c^V \end{array} = V$$

La matrice aveva una riga in più, di matrice n matrice

$$A x - b_0 = v \rightarrow \hat{x} = N^{-1} T u = (A^T P A)^{-1} A^T P b_0$$

Aggiungendo una incognita in più, una colonna, dovrai aggiungere una riga.

Se non scrivemmo anche l'equazione di vincolo, avremmo una deficienza di rango quando proviamo ad invertire N .

$$Q_c - Q_c^{(V)} = 0$$

Sarei tentato a dire 5 equazioni in 4 incognite, SBAGLIATO!

Matrice dei pesi

$$P = k \cdot \frac{1}{L}$$

$$P = \left| \begin{array}{ccc|c} 1/L_{1c} & 0 & \dots & \\ 0 & 1/L_{12} & \dots & \\ \vdots & & & \\ \hline & & & 1/\sigma_c^2 \end{array} \right|$$

Per avere un peso elevato: $\sigma_c \rightarrow 0$, $1/\sigma_c \sim 10^{20}$.

La ridondanza locale di queste matrici è zero.

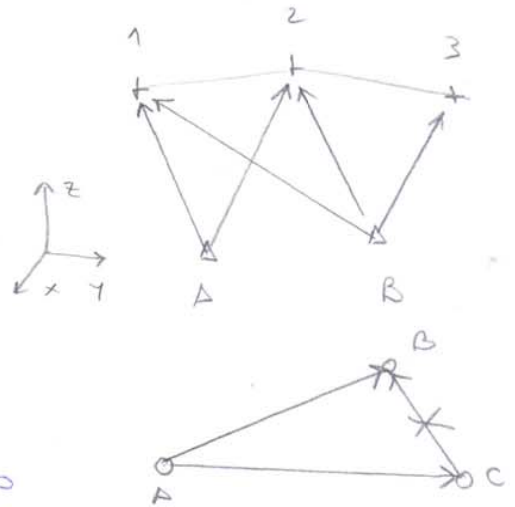
Se fuori dalla diagonale ho elementi non nulli,
la matrice dei pesi E non è diagonale.

Per invertire N devo imporre delle EQUAZIONI DI VINCULO.

ESEMPIO

Ipotesiamo di avere 3 ricevitori:
Quanti vettori posso determinare?

- b_{AB}, b_{AC} SI
- b_{BC} NO, questo vettore non viene determinato perché è linearmente dipendente dagli altri 2.



In generale, nelle reti GPS, facciamo
 N -BASIS LINEARMENTE INDIPENDENTI

Mettiamo i 3 ricevitori in:

- A 1 2 e determino b_{A1}, b_{A2}
- B 1 2 e determino b_{B1}, b_{B2} o B 2 3 $\rightarrow b_{B2}, b_{B3}$.

A, B NOTI (se fossero sconosciuti dovrei aggiungere 6 equazioni).

	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
b_{A1}	1	0	0						
$\lambda - A$	0	1	0	0			0		
	0	0	1						
b_{B1}	-1	0	0	1	0	0			
$\lambda - B$	0	-1	0	0	1	0			0
	0	0	-1	0	0	1			
b_{B2}				-1	0	0	1	0	0
	0			0	-1	0	0	1	0
				0	0	-1	0	0	1
b_{B3}							1	0	0
	0						0	1	0
							0	0	1
b_{B4}				-1	0	0			
	0			0	-1	0			0
				0	0	-1			

$\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{matrix}$	-	$\begin{matrix} \Delta x_{A1} + x_A \\ \Delta y_{A1} + y_A \\ \Delta z_{A1} + z_A \\ \Delta x_{B2} \\ \Delta y_{B2} \\ \Delta z_{B2} \\ \vdots \end{matrix}$	=	$\begin{matrix} \rightarrow \\ V \end{matrix}$
---	---	--	---	--

$\hookrightarrow Ax - b_0 = v$

dove $b_{A1} = x_A - x_1$ etc.



POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, del Territorio e delle Infrastrutture

Posizionamento GNSS

(Global Navigation Satellite System)

Alberto CINA

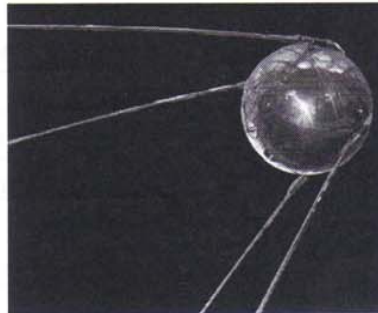
GEOMATICA - a.a. 2013-2014

PAG 10

L'inizio del posizionamento satellitare

Il 4 ottobre 1957 l'URSS lanciava il primo satellite artificiale della storia intorno alla Terra: lo Sputnik 1

Inizio del posizionamento satellitare: il DoD (Department of Defence USA si rese conto della possibilità di determinare la posizione di punti sfruttando l'effetto Doppler.



1958: inizia il programma TRANSIT, costellazione di 6 satelliti ad una altezza di 1100 km che poteva permettere la determinazione della posizione sfruttando l'effetto Doppler sull'unica frequenza trasmessa

La misura poteva anche durare alcune ore con una precisione di circa 200-500 m. Ciò portò gli americani a concepire un sistema più rapido e preciso: il **GPS**.

Il sistema GNSS

Il GNSS (Global Navigation Satellite System) è il sistema di posizionamento e navigazione basato sulla ricezione di segnali radio trasmessi da **diverse costellazioni di satelliti** artificiali.

- **GPS (Global Positioning System)**, realizzato e controllato dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti (DoD)
- **GLONASS (GLObalnaya NAVigatsionnaya Sputnikovaya Sistema)** è il sistema di posizionamento russo del *Russian Aerospace Defence Forces*
- **GALILEO** è il sistema di posizionamento Europeo
- **BeiDou o BDS (BeiDou Navigation Satellite System)** è il sistema di posizionamento cinese
- **QZSS (Quasi-Zenith Satellite System)** è il sistema di posizionamento regionale Giapponese
- ... altre costellazioni previste ...

Completano il sistema GNSS alcuni servizi di *augmentation* quali satelliti geostazionari e componenti locali di terra

PAG 15

Le scale di tempo

Il tempo è una delle principali osservabili nel posizionamento satellitare e ogni sistema GNSS ha una sua scala temporale. Esistono parecchi standard: tra i principali:

TAI (*tempo atomico internazionale*) è una scala di tempo molto accurata definita dalla radiazione dell'atomo di cesio e mantenuta da 200 orologi atomici dislocati in oltre 70 laboratori nel mondo. L'istante zero è fissato al 1 gennaio 1958 e in un giorno TAI ci sono esattamente 86400 secondi..

GMT (*Greenwich Medium Time*) si basa su osservazioni celesti legate al tempo di rotazione terrestre. La variazioni della velocità di rotazione fa ritardare il GMT rispetto al tempo degli orologi atomici.

UTC (**Tempo Universale Coordinato**), adottato per la definizione dei fusi orari. Deriva dal GMT ma non è basato sull'osservazione di fenomeni celesti bensì è mantenuto con orologi atomici. La differenza tra le due scale di tempo è mantenuta con uno scarto massimo di 0.9 s, applicando ogni 1.5 anni la correzione di 1 secondo intercalare o *leap second*, a partire dal 1972

Le scale di tempo

La scala di tempo TAI che si origina al 1958, differisce dal tempo UTC, che parte dal 1972, di ulteriori *leap seconds* e la differenza tra le due scale, al 2014, è di 35 secondi.

Data e ora	
Ora UTC	09:50:07
Ora CET	10:50:07
Ora TAI	09:50:42
Data	09/12/2013
MJD	56635 .41
Secondi intercalari	35
Coordinate GPS (WGS84)	
Lat	45° 00' 54.05"
Lon	7° 38' 20.71"
Alt	205.88 m

tempo GPS è mantenuta dall'orologio atomico della *Master Control Station*, senza alcuna correzione astronomica per la rotazione terrestre. Al 6 gennaio 1980, coincideva perfettamente col tempo UTC. A causa delle correzioni esso si discosta oggi dal tempo UTC di 16 *leap seconds*.

Le scale di tempo

Il tempo **GLONASS** è mantenuta dall'orologio Maser del Central Synchronizer (CS) Time ed è periodicamente corretta di un numero intero di secondi (*leap seconds*) per allinearla al tempo UTC. La scala di tempo sovietica è UTC(SU) = UTC + 3 ore.

Tempo Galileo: GST (Galileo System Time): inizia alle 00:00 del 22 agosto 1999. Nel messaggio di navigazione sono contenuti i coefficienti per calcolare l'offset tra la scala GST e le scale UTC e GPS, per un'interoperabilità tra le costellazioni.

scala di tempo **BeiDou**: BDT (*BeiDou navigation satellite system Time*). L'epoca d'inizio è l'ora 00:00:00 del 1 gennaio 2006 del tempo UTC. periodicamente controllata per avere un offset rispetto al tempo UTC inferiore a 100 ns

Scala di tempo	Ora
UTC	9:50:07
TAI	9:50:42
GPS	9:50:23
GLONASS	12:50:07

Messaggio di navigazione GLONASS

Contiene le posizioni, velocità e accelerazioni dei satelliti, per un intervallo di 30 minuti. Posizioni intermedie si ottengono per integrazione di un sistema d'equazioni differenziali di 4° grado.

```

2.10          GLONASS NAV DATA          RINEX VERSION / TYPE
SpiderWeb 4.0          2012 10 03 10:20  PGM / RUN BY / DATE
2012 10 3 1.825392246246e-007          CORR TO SYSTEM TIME
16          LEAP SECONDS
          END OF HEADER
1 12 10 02 23 15 0.0 -1.764595508575D-04 0.000000000000D+00 8.280000000000D+04
1.171229736328D+04 8.000659942627D-02 3.725290298462D-09 0.000000000000D+00
2.265614453125D+04 -1.700992584229D-01 0.000000000000D+00 1.000000000000D+00
8.109526367188D+02 -3.560448646545D+00 1.862645149231D-09 0.000000000000D+00
2 12 10 03 01 15 0.0 -3.349976614118D-04 -1.818989403546D-12 3.600000000000D+03
1.862383866719D+04 -8.145399093628D-01 2.793967723846D-09 0.000000000000D+00
1.571796826172D+04 -6.501874923706D-01 -1.862645149231D-09 -4.000000000000D+00
7.548077636719D+03 -3.358065605164D+00 1.862645149231D-09 0.000000000000D+00
    
```

In grigio le posizioni XYZ, in grassetto le velocità e sottolineate le accelerazioni. Nel box i parametri di correzione degli orologi

Principi sul segnale GNSS

componenti del segnale sono controllate da orologi atomici, con stabilità a lungo termine pari a $10^{-12} \div 10^{-14}$

Gli orologi producono una frequenza fondamentale f_0 a cui corrisponde una lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{c * 10^8 \text{ m/s}}{f_0}$$

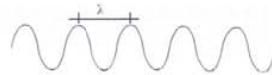
Da essa si originano le 3 parti del segnale:

- **componente portante**: onde sinusoidali generate moltiplicando la frequenza fondamentale per coefficienti noti;
- **componente impulsiva** (codici): onde quadre formate da transizioni di valori +1 e -1, generati da un algoritmo che si ripete periodicamente nel tempo. Vengono detti, per questo motivo, "pseudo casuali" o PRN (Pseudo Random Noise).
- **Componente messaggio** (codice di navigazione): contiene importanti informazioni tra le quali le effemeridi per il calcolo della posizione dei satelliti

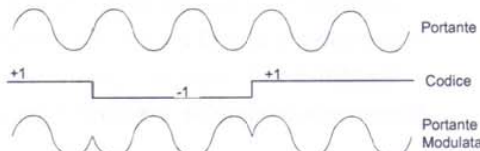
PA6 12

Le componenti del segnale GNSS

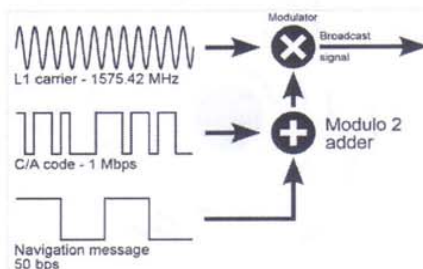
componente sinusoidale: hanno lunghezza d'onda di circa 20 cm, a seconda della frequenza



componente impulsiva (codici): transizioni di +1 e -1 che modulano le portanti, producendo uno sfasamento di π sulla fase



Il segnale trasmesso (Broadcast signal) che ne risulta è dunque quello della portante modulata dai vari codici:



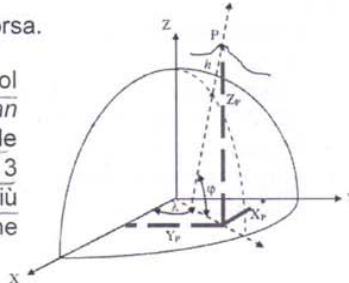
PAG 19

Il sistema di riferimento WGS84

Il **WGS84** (*World Geodetic System 1984*) è un sistema geocentrico o *ECEF* (*Earth Centered Earth Fixed*) definito con:

- **origine** nel centro di massa della Terra;
- **asse Z** diretto verso il polo convenzionale raccomandato dallo IERS (*International Earth Rotation Service*);
- **asse X** diretto nel punto d'intersezione del piano equatoriale terrestre con il meridiano zero stabilito dal BIH (*Bureau International de l'Heure*);
- **asse Y** che completa la terna destrorsa.

Il WGS84 coincide inizialmente col DATUM NAD83 (*Nord American DATUM, 1983*) che utilizza l'ellissoide GRS80. Esso ha poi subito 3 "riallineamenti" usando coordinate più precise delle stazioni permanenti che materializzano il sistema stesso.



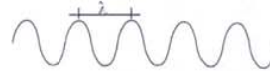
IL SEGNALE GPS – componente portante (Fasi)

Il segnale si origina da una frequenza fondamentale $f_0 = 10.23 \text{ MHz}$

- Il tipo di modulazione del segnale GPS è CDMA (*Code Division Multiple Access*)
- Tutti i satelliti hanno la stessa frequenza, a differenza dei satelliti delle costellazioni GLONASS

COMPONENTE PORTANTE SINUSOIDALE L1 L2

- $f_{L1} = 154 f_0 = 1575.42 \text{ MHz}$ ($\lambda = c/f_{L1} \approx 19 \text{ cm}$)
- $f_{L2} = 120 f_0 = 1227.60 \text{ MHz}$ ($\lambda = c/f_{L2} \approx 24 \text{ cm}$)



Nuova portante L5:

- $f_{L5} = 115 f_0 = 1176.45 \text{ MHz}$ ($\lambda = c/f_{L5} \approx 25 \text{ cm}$)

Disponibile sui satelliti del blocco IIRM-L5 (2009) e sul nuovo blocco IIF

IL SEGNALE GPS – componente impulsiva (Codici)

COMPONENTE IMPULSIVA: CODICI C/A, P: onda quadra generata da un algoritmo pseudo random noise (PRN) che modula le portanti e si ripete periodicamente nel tempo

- $f_{C/A} = f_0 / 10 = 1.023 \text{ MHz}$ ($\lambda = c/f_{C/A} \approx 300 \text{ m}$)
- $f_P = f_0 = 10.23 \text{ MHz}$ ($\lambda = c/f_P \approx 30 \text{ m}$)



• **Nuovo codice civile L2C sulla portante L2, formato da 2 distinti PRN (CM, CL):** trasmesso su L2 dei satelliti blocco IIRM. Migliora l'accuratezza di navigazione ed è più robusto alle interferenze. Diversamente dal C/A ha due distinti PRN trasmessi a $f_0/20$:

- **CM** (Civilian Moderate length)
- **CL** (Civilian Long length)

Nuovi codici militari M

Futuro codice su L1 chiamato L1C (2014?)

DATUM GLONASS: PZ90 (Parametry Zemli 1990)

- è il DATUM nel quale sono fornite le posizioni dei satelliti GLONASS, attraverso le effemeridi
- detto anche PE90=Parameters of the Earth 1990
- come il WGS84 è un sistema ECEF
- con decisione governativa del 20 giugno 2007 il sistema **PZ90.02** è il **nuovo sistema di riferimento GLONASS**

Parametri PZ90	Ellipsoid		
	Semi-major axis of the ellipse	<i>a</i>	6 378 136.0 m
	Flattening factor	<i>f</i>	1/298.257839303
	Earth angular velocity	ω_E	$7\,292\,115.0 \cdot 10^{-11}$ rad/s
	Gravitational constant	μ	$3\,986\,004.4 \cdot 10^8$ m ³ /s ²
	Speed of light in a vacuum	<i>c</i>	$2.99792458 \cdot 10^8$ m/s
	Second zonal harmonic coefficient	J_2^0	$1\,082\,625.75 \cdot 10^{-9}$

PA6 23

Il segnale GLONASS

- Il GPS ha modulazione CDMA (Code Division Multiple Access) e le frequenze sono tutte uguali
- Il GLONASS ha modulazione FDMA (Frequency Division Multiple Access) La banda di frequenza è suddivisa in un numero di sottobande (sottocanal) che occupino, in frequenza, una banda più piccola

• Le frequenze GLONASS risultano diverse e dedotte da una frequenza fondamentale $f_0=5\text{MHz}$:

$$f_1 = 1602 + 0.5625 K \text{ (MHz)}$$

$$f_2 = 1246 + 0.4375 K \text{ (MHz)} \quad \text{Con } f_1/f_2 = 9/7$$

con K variabile da -7 a 8



• sui satelliti blocco K è prevista 3° frequenza e sperimentazione CDMA $f_3 = 3/4 f_1$

Le sottoportanti L1 e L2 sono modulate da codici:

- **PR ranging code:** velocità 511 Kbit/s che si ripete periodicamente ogni 1 ms.
- **Messaggio di navigazione**

PA6 24

Il sistema Galileo

La costellazione completa sarà composta da 27 satelliti più 3 di riserva, su tre piani orbitali inclinati di 56° rispetto al piano equatoriale. Il semiasse dell'orbita è 29601.297 km.

Il completamento, previsto per il 2012, ha subito un ritardo per l'allontanarsi delle industrie private dal progetto.

Il primo satellite GIOVE A (Galileo In-Orbit Validation Element è stato lanciato il 26/12/2005) per assicurare l'uso delle frequenze, validare le tecnologie di posizionamento e il segnale.

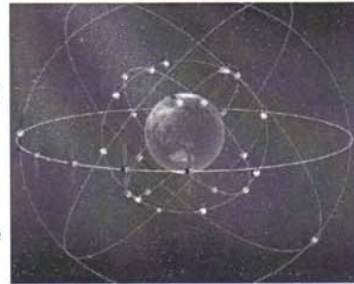
Il secondo satellite GIOVE B è stato lanciato il 27 aprile 2008 e sta trasmettendo il primo segnale GALILEO agli utenti dotati di ricevitori abilitati a queste frequenze. Tale missione ha lo scopo di dimostrare il possibile uso di un orologio PHM (Passive Hydrogen Maser)

Attualmente i 4 satelliti permettono un posizionamento minimale per un periodo di tempo limitato e solo in certi luoghi

I satelliti BeiDou

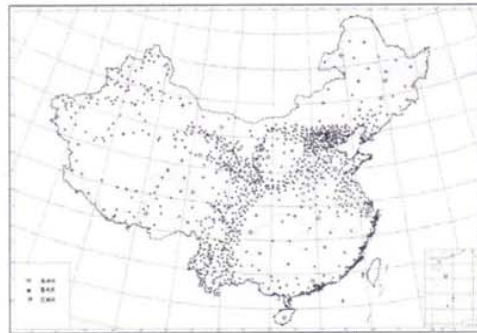
In BeiDou-2 i satelliti hanno tre differenti tipi di orbite:

- **5 satelliti geostazionari (GEO)** ad un'altezza di 35786 km dalla superficie terrestre che incorporano quelli BeiDou-1. Ne sono stati lanciati 4 nel 2010.
- **3 satelliti IGSO (Inclined Geosynchronous Satellite Orbit)** ad un'altezza di 35786 km dalla superficie terrestre, in tre piani orbitali inclinati di 55° rispetto all'equatore. Lanciati dal dicembre 2010 ad aprile 2011, il loro scopo è orbitare sul territorio cinese permettendo un posizionamento anche in presenza di edifici o ostacoli.
- **27 satelliti MEO (Medium Earth Orbit)** sono previsti ad un'altezza di 20528 km su 3 piani orbitali inclinati di 55° rispetto al piano equatoriale, con un periodo di 12 ore 53 minuti. **Il primo satellite è stato lanciato nell'aprile 2011.**



Il sistema di riferimento Cinese CGSS

Dopo l'unificazione delle reti geodetiche, Il 1° luglio 2008 il governo cinese annuncia l'adozione del nuovo sistema di riferimento chiamato **CGCS2000** (*China Geodetic Coordinate System 2000*),



Esso è costituito inizialmente da 210 stazioni permanenti GNSS che diventano circa 500 nel 2013, con interdistanza 150 km. È un sistema ECEF a cui è associato l'ellissoide **CGCS2000**

Il segnale BeiDou

Beidou-2 trasmette un segnale su **tre frequenze** nei ranges:

- 1559.052-1591.788MHz
- 1166.22-1217.37MHz
- 1250.618-1286.423MHz

Alcune frequenze sono in comune con GPS e GALILEO.

Attualmente sono documentate le specifiche della singola frequenza $B1I=1561.098$ MHz.

La portante è poi modulata dai codici:

- "ranging code" C_{B1I} : con lunghezza 2046 bit ed è trasmesso alla frequenza di 2.046 MHz;
- Messaggio di navigazione NAV

GPS & GNSS

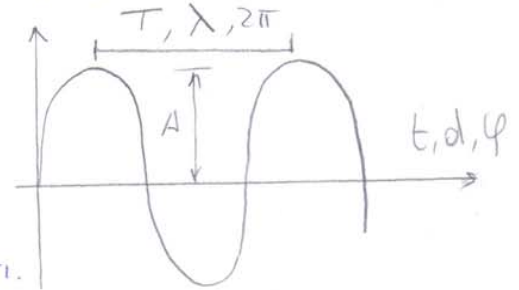
PRINCIPI FONDAMENTALI

Come misurare la distanza attraverso la propagazione di un segnale?

Considero un'onda elettromagnetica che si propaga nel tempo.

Δ = AMPIEZZA del fenomeno.

Questo fenomeno si ripresenta con la stessa intensità $I(t)$ ad intervalli costanti.



T = PERIODO, è la distanza tra due picchi ed è il tempo necessario impiegato dal fenomeno per ripresentarsi con la stessa intensità.

Il tempo è una delle grandezze.

I distanti metri ad impulsi misurano delle lunghezze

λ = LUNGHEZZA D'ONDA e ϕ = MISURA DI FASE

- Nella scala del tempo $\rightarrow T$
- Nella scala delle distanze $\rightarrow \lambda$
- Nella scala delle fasi $(\phi) \rightarrow 2\pi$

• RELAZIONE LUNGHEZZA ÷ TEMPO ÷ FASI

$$\boxed{\frac{t}{T} = \frac{d}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi}}$$

1) RELAZIONE SPAZIO ÷ TEMPO

$$\boxed{d = \frac{\lambda}{T} t = c \cdot t}$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \text{VELOCITÀ DELLA LUCE}$$

2) RELAZIONE SPAZIO FASE

$$\boxed{d = \frac{\phi}{2\pi} \cdot \lambda = \phi \lambda}$$

λ = lunghezza d'onda, che in genere è 1 μm

ϕ = MISURA DI FASE espressa in cicli.

Oggi il Galileo è completamente operativo.

Utilizzeremo più costellazioni insieme per aumentare la RIDONDANZA; non aumenterò la precisione MA dovrò il corretto posizionamento anche in situazioni difficili.

GALILEO (Sistema Europeo) per fini commerciali;
 BEIDOU (Sistema Cinese);
 QZSS (Giapponese) sistema regionale per aumentare la precisione

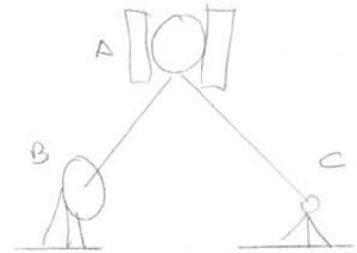
SERVIZI DI AUGMENTATION

Sono dei servizi di terra che permettono di aumentare la precisione, utile per la Geodemia: INTEGRITÀ SICUREZZA DI POSIZIONAMENTO. Questo produce una precisione più elevata ed è servizio di Integrità deve fornire il valore PRIMA del momento (serve al pilota che vuole atterrare), oltre che fornire segnali di pericolo/errore.

STRUTTURA DEI SISTEMI GNSS

• SEGMENTO SPAZIALE (A)

Costituito dai satelliti: ogni costellazione globale completa permette la visibilità di almeno 4 satelliti in qualunque luogo e ora (requisito fondamentale per il posizionamento).



Ogni satellite ha degli orologi atomici perché è importante conoscere la posizione dei satelliti per poterli posizionare: lavorando gli errori, li modello per ridurli.

FUNZIONE DEI SATELLITI

- TRASMETTERE INFORMAZIONI AGLI UTILIZZATORI, con segnale radio;
- MANTENERE UN RIFERIMENTO DI TEMPO ACCURATO, con gli orologi atomici di bordo.

I satelliti mandano il segnale al ricevitore GPS.

Come trasmettono i satelliti?

Qual'è l'altrezza di un satellite geostazionario?

$$T = 24 \text{ h} \quad a = \sqrt{\frac{GM}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}} = \dots = 42.241 \text{ km}$$

Verore (v, h) modifcano la forza di attrazione / repulsione.

SCALE DI TEMPO

Il tempo è una delle osservazioni fondamentali:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Piccoli errori nel tempo alla velocità della luce ($1/1000 \text{ s}$) significa sbaglio di km (300 km).

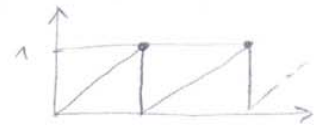
Piccoli errori nel tempo = grandi errori nella DISTANZA.

Oggi usiamo orologi di TEMPI ATOMICI

- Il **TAI** è una scala di tempo molto accurata:

$$1 \text{ GIORNO TAI} = 86400 \text{ s}$$

- Il tempo solare medio di Greenwich **GMT** è legato al tempo di rotazione della Terra, che non è costante durante i giorni.
- Il tempo **UTC** non è più distante di 1 s dal tempo GMT perché, quando diventa di 1 s viene riavvertato. Anche UTC segue la rotazione terrestre.



I secondi intercalari mettono in relazione il TAI con UTC.

Ogni sistema di posizionamento satellitare fa riferimento ad una sua scala di tempo, definita dagli orologi del sistema di controllo.

- Il GPS segue la scala atomica e differisce dal tempo UTC per 16 secondi intercalari.
- I Satelliti Galileo sono aderenti al tempo UTC + 3 h.

Le scale temporali differiscono anche di FRAZIONI DI SECONDO.

Le scale di tempo differenti, basate su osservazioni diverse, devono essere SINCRONIZZATE.

X = Intersezione del piano equatoriale con Greenwich

Z = Asse di rotazione terrestre

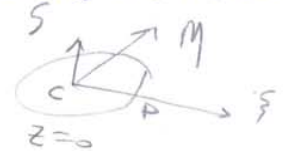
X_0 = ASSE INERZIALE

Θ = vero seno angolare formato tra gli assi X e X_0

P = PERIGEO ed è il punto dell'orbita del satellite che si trova più vicino al centro della Terra.

ξ = asse ortogonale al piano dell'orbita;

ξ = asse che passa per il geocentro e perigee.



Come determino la posizione del satellite?

PARAMETRI ORBITALI

1) a = SEMIASSE MAGGIORE DELL'ORBITA ELLITTICA

2) $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ ECCENTRICITÀ DELL'ORBITA, con b semiasse minore

(a, e) definiscono la DIMENSIONE e FORMA DELL'ORBITA

3) ω = ARGOMENTO DEL PERIGEO, angolo tra (k, P) misurato in C

4) Ω = ASCENSIONE RETTA DEL NODO ASCENDENTE, angolo con vertice in C tra l'asse $X^{(0)}$ e il nodo ascendente k .

5) i = INCLINAZIONE ORBITA, angolo tra il piano dell'orbita e il piano equatoriale

6) M_0 = ANOMALIA MEDIA ALL'EPOCA DI RIFERIMENTO t_0

(ω, Ω) definiscono il PIANO ORBITALE NEL SISTEMA APPARENTE

(i, M_0) definiscono la POSIZIONE NEL PIANO DELL'ORBITA

VANTAGGIO: segue il satellite nelle sue orbite con il suo movimento.

Nel campo di navigazione, insieme ai coefficienti tempo contate le orbite non sono quelle teoriche di Keplero ma considero anche le PERTURBAZIONI.

la realtà è molto complessa e ogni portante è
robusta da molti codici.

$p = \text{RANGE}$ distanza tra il centro di fase dell'antenna del ricevitore e il centro di fase dell'antenna del satellite.

Come misurare p ?

- 1) MISURE DI CODICE: a partire dal tempo di propagazione del segnale dal satellite al ricevitore, misurato in codici che modulano le portanti.
- 2) MISURE DI FASE: a partire dal numero di cicli interi e della parte frazionaria dell'onda portante.
Il numero lo sfasamento tra l'onda entrante e uscente e calcolo quanto lunghezza d'onda a' sono nella distanza.

DISTANZA RETRO \leftarrow \rightarrow PRISTA

- DISTANZA RETRO: SISTEMA A 2 VIE
- RICEVITORE GPS: SISTEMA A 1 VIA, dal punto di vista militare non è percorribile, deve fare un posizionamento preciso perché ricevo soltanto.

Con la MISURA DI CODICE ho un posizionamento di buona precisione MA MOLTO ROBUSTO, sempre disponibile.

Con la MISURA DI FASE ho un posizionamento preciso MA NON sempre disponibile.

1) SISTEMA NAVSTAR GPS

Sistema più preciso di sincronizzazione del tempo.

1) SEGRETATO DI CONTROLLO

Abbiamo 18 stazioni a terra che gestiscono il sistema.

2) SEGRETATO SPAZIALE

È costituito dalla costellazione satellitare, che deve garantire la disponibilità di almeno 24 satelliti per il 95% del tempo, in orbita a 20200 km dalla Terra.

L'inclinazione del piano dell'orbita rispetto all'equatore è di 55° ed il periodo orbitale è di $T = 12$ h.

• COMPONENTE PORTANTE SINUSOIDALE (L_1, L_2, L_3)

Le portanti sono ottenute moltiplicando la frequenza fondamentale per un numero:

- PORTANTE L_1 : $f_{L1} = 154 \cdot f_0 = 1575,42 \text{ MHz}$
- PORTANTE L_2 : $f_{L2} = 120 \cdot f_0 = 1227,60 \text{ MHz}$
- PORTANTE L_3 : $f_{L3} = 115 \cdot f_0 = 1176,45 \text{ MHz}$

Con le relative lunghezze d'onda

$$\lambda_{L1} = \frac{c}{f_{L1}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,57542 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}} \approx 19 \text{ cm}$$

$$\lambda_{L2} = \frac{c}{f_{L2}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,2276 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}} \approx 24 \text{ cm}$$

$$\lambda_{L3} = \frac{c}{f_{L3}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,17645 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}} \approx 25 \text{ cm}$$

L_5 è la nuova portante da ora usata per i nuovi satelliti.

I codici modulano le portanti secondo una tecnologia ad accesso multiplo detta CDMA ed ogni satellite della costellazione trasmette nella stessa frequenza.

Perché dobbiamo usare più frequenze?

L'utilizzo di 2 o più frequenze è fondamentale per eliminare cause di errore come il ritardo del segnale per rifrazione ionosferica o per determinare l'ambiguità di fase in modo rapido e affidabile.

• COMPONENTE IMPULSIVA O CODICI PRN ($C/A, P, L_2C$)

I codici PRN permettono la misura della distanza SATELLITE - RICEVITORE attraverso la misura del tempo di propagazione del segnale, misurato a partire dai codici che modulano le portanti.

Questi codici generano un segnale pseudo casuale che si ripete nel tempo.

I codici vengono trasmessi con una determinata velocità (bit/s).

Il nuovo codice di navigazione (CNAV) è un aggiornamento del segnale di navigazione NAV.

$$\text{RIPETIBILITÀ} = \frac{\text{LUNGHEZZA (bit)}}{\text{VELOCITÀ DI TRASFERIMENTO}}$$

la ripetibilità è il tempo in cui l'onda si ripete.

I ricevitori che possono demodulare solo parte della frequenza sono detti a SINGOLA FREQUENZA mentre quelli che possono demodulare tutte le frequenze sono detti MULTIFREQUENZA.

2) SISTEMA GLONAV

Lo scopo del sistema Glonass è quello di permettere un posizionamento globale a qualunque ora di un numero illimitato di utenti.

• SEGRETATO DI CONTROLLO

Monitora la costellazione Glonass e carica periodicamente sui satelliti le effemeridi e i coefficienti dei modelli di correzione degli orologi.

Stabilità $2 \cdot 10^{-15}$.

• SEGRETATO SPAZIALE

24 satelliti a ~ 25.000 km dal centro della Terra disposti su 3 piani orbitali inclinati di $64,8^\circ$ rispetto l'equatore, con $T = 11$ h e 15 min.

Satelliti nello stesso piano possono avere lo stesso colore di K se in posizione diametralmente opposta, in modo tale da non essere tracciati contemporaneamente dall'utente.

SISTEMA DI RIFERIMENTO PZ90

Il Glonass ha un suo sistema di riferimento, diverso dal WGS84 del GPS, e fornisce diversi PARAMETRI ORBITALI.