NUMERO: 1108 DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Masini

MATERIA: Meccanica Applicata alle Macchine

Prof. Garibaldi

GARIBALDI LUIGI ✉ LUIGI.GARIBALDI@POLITO.IT

Non si è deciso ancora se si faranno dei laboratori, vediamo se riusciamo da metà corso in poi.

NB: SE MI SCRIVETE UNA MAIL, DOVETE SCRIVERE IL CODICE DEL CORSO (ALTRIMENTI NON RISPONDO), PERCHÈ HO ALTRI CORSI.

SITO DEL CORSO
È molto ricco, ci sono già i testi di tutte le esercitazioni. Ci sono filmati utili a vedere come funzionano dei cinematismi.

LIBRO: MECCANICA APPLICATA di Ferraresi - Raparelli CLUT
Oltre alla teoria contiene molti esercizi svolti, utili per superare l'esame.
La parte teorica del corso segue il libro.

ESAME
Uguale tra i due corsi paralleli. SOLO SCRITTO.
3 ESERCIZI + 1 DOMANDA TEO → 2 ORE E MEZZA sicuro 1 di cinematica
Gli esercizi spaziano su tutto il programma. Non sono disponibili compiti di esame precedenti, ma sappiate che gli es di esame ricalcano le trovate negli es di esercitaz.
Il risultato numerico dell'es, vale poco: -0,5 PTI.
Un ordine di grandezza sbagliato vale -1 PTI perchè è maggiore.
La maggior parte degli errori si possono correggere se fate l'analisi dimensionale dell'equazione.
Non si può utilizzare materiale didattico. Non puoi portare nemmeno fogli tuoi, ci sono i fogli timbrati. Si porta solo calcolatrice, squadrette, penne.
NON ACCETTI IL VOTO? BASTA SCRIVERE UNA MAIL A GARIBALDI

GLI ESERCITATORI: Alessandro Fasana Stefano Marchesiello
Mediamente le esercitazioni saranno 1,5 ore il lunedì e 1,5 il mercoledì.

Se alzate la mano per chiedere le cose durante la lezione, io lo apprezzo.
Dopo ogni modulo faccio 10-15 min di intervallo.

CONSULENZA: MARTEDI' POMERIGGIO 14.30-16.00 IN DIPARTIMENTO DI MECCANICA

BLOCCO 1: CINEMATICA

(lunga 2,5 settimane.) Riguarda lo studio del moto di corpi rigidi rispetto a spazio e alla sua derivata rispetto al tempo.

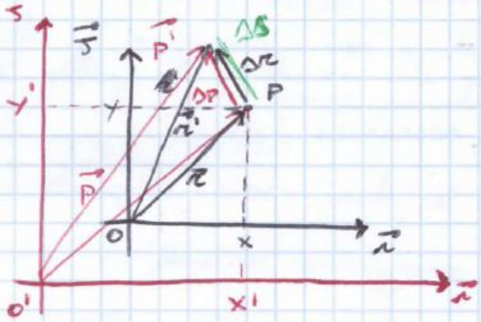
In cinematica compaiono POSIZIONI, VELOCITÀ, ACCELERAZIONI nel tempo e non compaiono FORZE, COPPIE, MOMENTI ecc..

- Ci muoveremo SUL PIANO
  - ↳ parleremo di PUNTI MATERIALI e CORPI INDEFORMABILI

a) DEFINIZIONE PUNTO MATERIALE

Per identificarlo nel piano possiamo utilizzare 3 tipi di coordinate:

- CARTESIANE
- LOCALI
- POLARI



$\vec{r}'$ è il vettore al tempo $t+\Delta t$, $\vec{r}$ è quello al tempo t.
Lo stesso per $\vec{p}$ e $\vec{p}'$.
Ma risulta che Δr è uguale a Δp

Possiamo definire una VELOCITÀ MEDIA: $V_m = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ e

VELOCITÀ ISTANTANEA: $v_p = \lim_{t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Possiamo definire una ACCELERAZIONE MEDIA: $a_m = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ e

ACCELERAZIONE ISTANTANEA: $a_p = \lim_{t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

NB: $\Delta \vec{r} \neq \Delta s$ $\quad$ $\Delta \vec{r}$ è lo spostamento ed è vettore, Δs è la distanza tra i due punti ed è scalare.

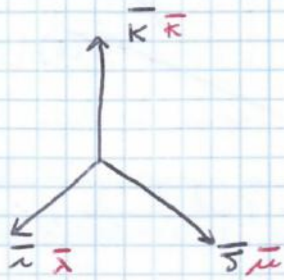
Solo a livello infinitesimo sono uguali: $d\vec{r} = ds$ ma $d\vec{r}$ rimane vettoriale e ds scalare.

FORMULE DI POISSON (la regola della mano DX)

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$

$\bar{j} \wedge \bar{k} = \bar{i} \quad \Rightarrow \quad \ldots$

$\bar{k} \wedge \bar{i} = \bar{j} \quad \Rightarrow \quad \ldots$



NB: ora chiameremo $\dot{\theta}$ come ω, perché la velocità angolare è espressa in termini di ω.

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{\lambda} = \omega \bar{k} \wedge \bar{\lambda} = \omega \cdot \vec{\mu} = \boxed{\dot{\theta} \vec{\mu}}$$

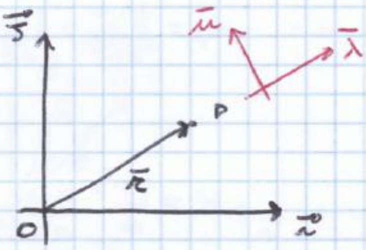
→ COORDINATE POLARI

"Le vediamo perché nei sistemi meccanici tutto ruota"

$\bar{r} = r \bar{\lambda}$

$r = r(t)$

$\lambda = \lambda(t)$



$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d(r\bar{\lambda})}{dt} = \dot{r}\bar{\lambda} + r\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \underbrace{\dot{r}\bar{\lambda}}_{\text{COMP. RADIALE}} + \underbrace{r\dot{\theta}\bar{\mu}}_{\text{COMP. TANGENZIALE}} = \bar{V}_P$$

$$\frac{d\bar{\mu}}{dt} = -\dot{\theta}\bar{\lambda}$$

$$\bar{a}_P = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{V}_P}{dt} = \ddot{r}\bar{\lambda} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{\mu} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{\mu} + r\ddot{\theta}\bar{\mu} - r\dot{\theta}^2\bar{\lambda}$$

$$\bar{a}_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{\lambda} + (r\ddot{\theta} + \underbrace{2\dot{\theta}\dot{r}}_{\text{ACCELERAZIONE DI CORIOLIS}})\bar{\mu}$$

$$V_P = \dot{r}\bar{\lambda} + r\dot{\theta}\bar{\mu}$$

ACCELERAZIONE DI CORIOLIS: Nasce solo quando c'è una composizione di moti: quando cammini lungo il treno mentre il treno sta girando. $\dot{\theta}$ è la velocità angolare del treno, $\dot{r}$ è la velocità tua con cui percorri il vagone.

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$v = cost$, $a = \frac{dv}{dt} = 0$; $v = \frac{dx}{dt}$ $\qquad \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx$

$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = v(t - t_0) \qquad x(t) = x_0 + v(t - t_0)$

Il coeff. angolare della retta è la velocità

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$a = cost$, $\quad a = \frac{dv}{dt} \qquad \int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_{v_0}^{v(t)} dv \qquad v(t) = v_0 + a(t - t_0)$

$v = \frac{dx}{dt} \qquad \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 + a(t-t_0)\,dt =$

$= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$

$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$

$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$

NB: se $V_{INIZIALE} = V_0$
e $V_{FINALE} = 0$

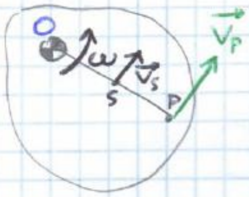
$\Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} \qquad \int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_{v_0}^{0} dv \qquad -v_0 = a(t - t_0)$

Quindi: $a = -\frac{v_0}{(t - t_0)}$

Questo per dire che se il risultato è una decelerazione, non devo forzare io il segno meno, mi viene in automatico dal calcolo

2) MOTO ROTATORIO INTORNO ASSE FISSO

5/03/14



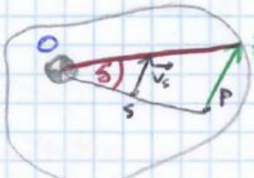
ω è incerta

$\overline{V}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$ con $\vec{OP} = -\vec{PO}$

$|\vec{V}_P| = V_P = \omega \cdot OP = \omega \cdot PO = \omega \cdot r$ con $r = OP$

$\vec{V}_S = \vec{\omega} \wedge \vec{OS}$

Posso ora tracciare il: TRIANGOLO DELLE VELOCITÀ

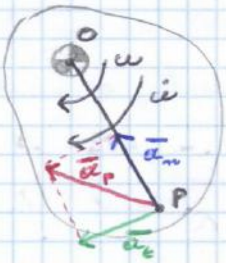


$$\delta = Tg^{-1} \frac{V_P}{OP} = Tg^{-1} \frac{\omega \cdot OP}{OP} = Tg^{-1} \omega$$

$$\delta = Tg^{-1} \omega$$

Il triangolo delle velocità serve per poter trovare facilmente la velocità di ogni punto del corpo rigido che ruota.

Questo è per quanto riguarda la velocità, ora vediamo l'accelerazione:



$V_P = \cancel{\dot{r}\overline{\lambda}} + r\dot{\theta}\overline{\mu}$ ($r = OP = cost$)

$V_P = r\dot{\theta}\overline{\mu}$
$= \overline{\dot{\theta}} \wedge \overline{r}$
$= \overline{\omega} \wedge \overline{OP}$

$a_P = -r\dot{\theta}^2\overline{\lambda} + r\ddot{\theta}\overline{\mu}$ perché sarebbe: $a_P = (\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\overline{\lambda} + (r\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{\theta}\dot{r}})\overline{\mu}$

$= r\dot{\theta}^2\overline{n} + r\ddot{\theta}\overline{\mu}$

$= \underbrace{r\omega^2\overline{n}}_{normale} + \underbrace{r\dot{\omega}\overline{\mu}}_{tangenziale}$

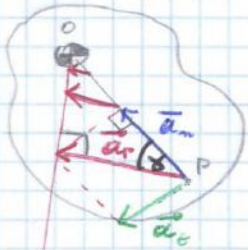
$\overline{a}_n = r\omega^2\overline{n}$

$\overline{a}_t = r\dot{\omega}\overline{\mu} = \overline{\dot{\omega}} \wedge \overline{OP}$

$|\overline{a}_P| = a_P = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} =$

$= \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\dot{\omega})^2} = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$

Posso ora tracciare il: TRIANGOLO DELLE ACCELERAZIONI

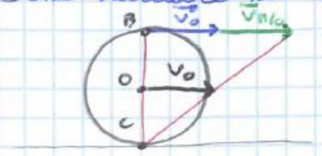


$$\gamma = Tg^{-1} \frac{a_t}{a_n} = Tg^{-1} \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$$

SE $\gamma = 0 \longrightarrow \dot{\omega} = 0$, $a_t = 0$ ω cost

SE $\gamma = \pi/2 \longrightarrow \omega = 0$, $a_n = 0$ siamo a moto incipiente

Come tracciare il triangolo delle velocità:

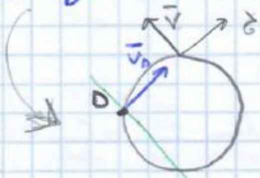


$\overline{V}_O = \overline{\omega} \wedge \overline{CO} = \omega r \overline{i}$ $\quad \neq \overline{OC}$!!

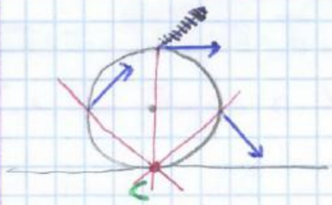
$\overline{V}_B = \overline{\omega} \wedge \overline{CB} = \omega 2r \overline{i}$ → perché abbiamo detto che C è centro delle velocità

$\overline{V}_D = \overline{\omega} \wedge \overline{CD}$ con $CD = r\sqrt{2}$

$\overline{V}_D = \omega r \sqrt{2}\, \overline{\varepsilon}$



$\overline{V}_D = \overline{V}_O + \overline{V}_{D/O} = \omega r \overline{i} + \omega r \overline{j} = \omega r \sqrt{2}\, \overline{\varepsilon}$



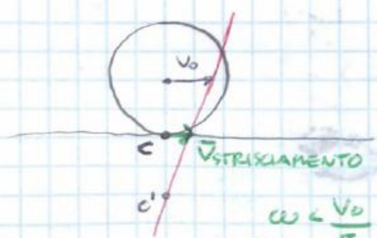
POLARE FISSO : centri di velocità nel piano fisso

POLARE MOBILE : centri di velocità nel piano mobile

NB: se la velocità di qualche punto su una retta solidale al corpo stona con il triangolo delle velocità che posso creare, allora vuol dire che il corpo in questione non è un corpo rigido.

5/03/14 B

Se il centro delle velocità è nel punto $C' \neq C$ ..



$\omega < \frac{V_O}{r}$

Caso cinematico (= ROTOL PURO)

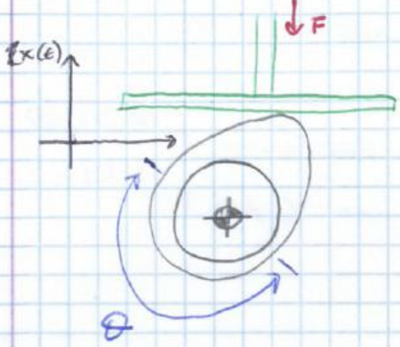
$V_O = \overline{\omega} \wedge \overline{r} = \overline{\omega} \wedge \overline{CO} = \omega r \overline{i}$

$|V_O| = V_O = \omega r$

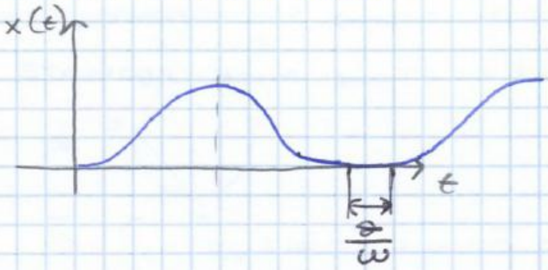
se $\omega = 0$: STRISCIAMENTO PURO

se $\omega \neq 0$ e $V_O = 0$: SLITTAMENTO PURO

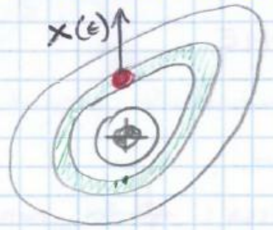
→ ACCOPPIAMENTO CINEMATICO DI FORZA (CAMME - PUNTERIA)



CONTATTO ASSICURATO TRA CAMMA E PUNTERIA



CAMMA DESMODROMICA



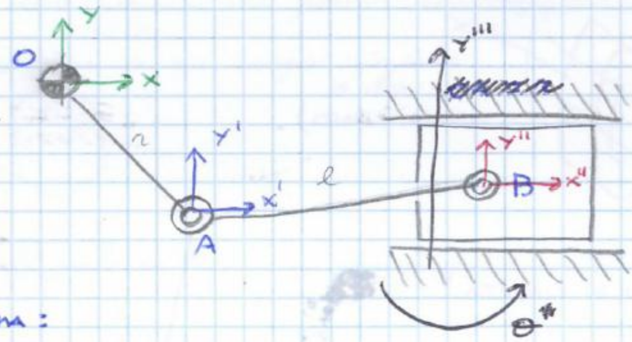
Non ha bisogno di cose esterne che la riportino giù perché è la pallina che lo fa.

TIPICO ESEMPIO DI CINEMATISMO: SISTEMA BIELLA-MANOVELLA

È sistema di 3 elementi: BIELLA MANOVELLA PISTONE

OA = r lunghezza manovella

AB = l biella

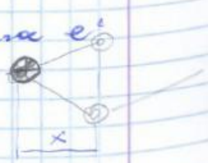


GRADI DI LIBERTÀ DEL SISTEMA:

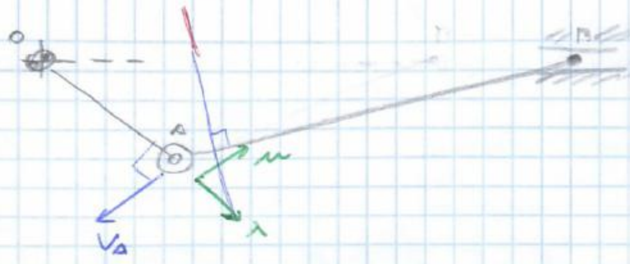
$9\ GL - 2 - 2 - 2 - 2 = 1\ GL$

Questo vuol dire che mi basta una coordinata per determinare in modo univoco il sistema.

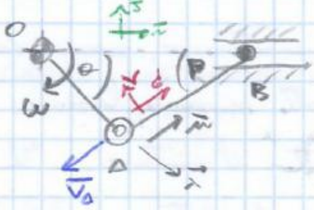
Non una coordinata a caso però: ad esempio se uso x ad essa è associata non una ma ben due posizioni della manovella.



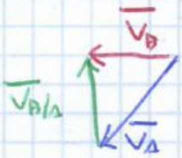
Possiamo usare, invece, l'angolo θ.



Stavamo risolvendo il sistema col metodo dei vettori. 6/03/2014



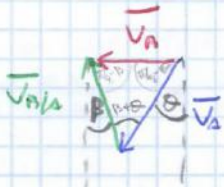
	$\overline{V}_B$	=	$\overline{V}_A$	+	$\overline{V}_{B/A}$	
	?		$\lvert\bar{\omega}\wedge\overline{OA}\rvert$		$\lvert\bar{\dot\beta}\wedge\overline{AB}\rvert$	MODULO
	$//OB$		$\perp OA$		$\perp \overline{AB}$	DIREZ
	?		$-\bar{\mu}$		?	VERSO



L'unico modo per far sì che $\overline{V}_B$ sia uguale a $\overline{V}_A + \overline{V}_{B/A}$ (vettori che ho già trovato) è con questo verso.

=> Ho trovato anche il segno di $\overline{V}_{B/A}$

TEO DEI SENI:



$$\frac{V_A}{\sin(\pi/2-\beta)} = \frac{V_B}{\sin\gamma} = \frac{V_{B/A}}{\sin(\pi/2-\theta)} \quad \text{con } \gamma = \theta+\beta$$

$$V_B = V_A \cdot \frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos\beta}$$

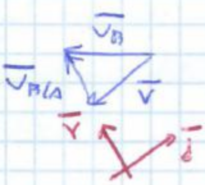
?. ok $V_B = V_A \sin\theta + V_{B/A}\sin\beta$

$$V_B = r\omega \cdot \frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos\beta}$$

$$\overline{V}_B = r\omega \frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos\beta}(-\bar{\lambda})$$

$$\boxed{V_{B/A} = V_A \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\beta}} \; ; \quad \overline{V}_{B/A} = r\omega \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\beta}\ \checkmark$$

$$\overline{V}_{B/A} = \bar{\dot\beta}\wedge\overline{AB} \implies \bar{\dot\beta}\ \odot$$



$$\dot\beta = \frac{V_{B/A}}{\ell} = \frac{V_A}{\ell}\frac{\cos\beta}{\cos\theta}$$

=>	$\overline{V}_B$ =	$\overline{V}_A$ +	$\overline{V}_{B/A}$	
	$V_A\left(\sin\theta+\frac{\cos\theta}{\cos\beta}\right)$	$\lvert\bar{\omega}\wedge\overline{OA}\rvert$	$V_A\frac{\cos\theta}{\cos\beta}$	MODULO
	$//OB$	$\perp\overline{OA}$	$\perp\overline{AB}$	DIREZ
		$-\bar{\mu}$		VERSO

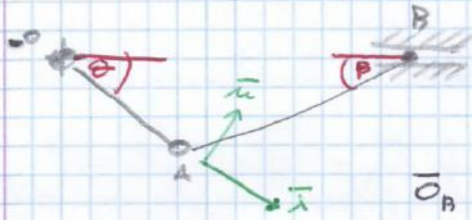
$$\dot\beta = \frac{V_A}{\ell}\frac{\cos\beta}{\cos\beta}$$

2.3 → le ACCELERAZIONI

Per questo dobbiamo ricordarci questa formula fondamentale per il corso:

FORMULA DI RIVALS:

$$\bar a_B = \bar a_A + \bar a_{B/A} = \bar a_A + \bar a_{B/A\,n} + \bar a_{B/A\,t}$$



$$\bar a_B = \bar a_A + \bar a_{B/A\,n} + \bar a_{B/A\,t}$$

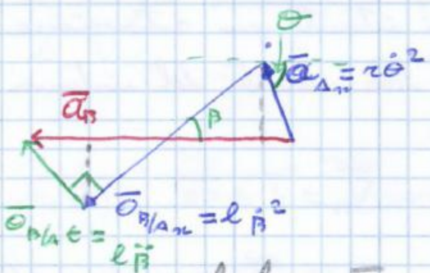
$\bar a_B$ =	$\bar a_{A\,n}$ +	$\bar a_t$ +	$\bar a_{B/A\,n}$ +	$\bar a_{B/A\,t}$
	$r\dot\theta^2$	$r\ddot\theta = 0$	$l\dot\beta^2$	$l\ddot\beta$
// OB	// OA	⊥ OA	// AB	⊥ AB
	$-\bar\lambda\ (\bar n)$	?	$-\bar t$	?

TESTO DELL'ESERCIZIO:

$\omega = \text{cost}$

$\Rightarrow \ddot\theta = 0$

Ora facciamo il poligono delle accelerazioni:



Ora posso calcolare $\bar a_B$:

PROIEZIONE ORIZZONTALE: $\bar a_B = r\dot\theta^2\cos\theta \ (+\, l\dot\beta^2\cos\theta + l\dot\beta^2\cos\beta + l\ddot\beta\sin\beta$

PROIEZIONE VERTICALE: $0 = r\dot\theta^2\sin\theta \ (+\, l\dot\beta^2\sin\theta) - l\dot\beta^2\sin\beta + l\ddot\beta\cos\beta$

L'eq. della proiezione verticale mi è utile per ricavare $\ddot\beta$:

$$\ddot\beta = \frac{l\dot\beta^2\sin\beta - r\dot\theta^2\sin\theta}{l\cos\beta}$$

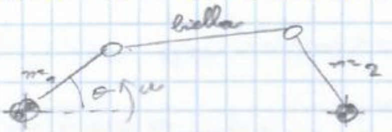
Da qui ricavo il verso di $\ddot\beta$ usando la seguente verità:

$\bar a_{B/A\,t} = \bar{\ddot\beta} \wedge \overline{AB}$ noto che $\ddot\beta$ deve avere $\circlearrowleft$

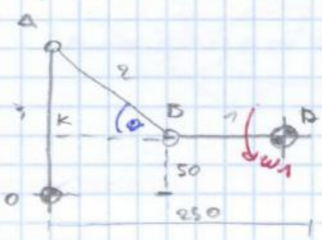
ESEMPI (\ESERCIZI) DI CINEMATISMI

• QUADRILATERO ARTICOLATO (è molto ricorrente)

E' formato da due manovelle e una biella. GL : 1



→ ESERCIZIO



DATI:

$\overline{OA} = 100$ mm

$\overline{OB} = 50$ mm

$\overline{OD} = 250$ mm

$\overline{BD} = 75$ mm

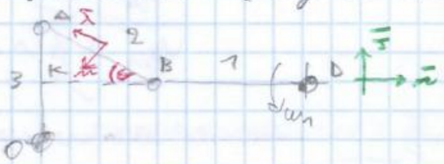
$\omega_1 = 2$ rad/s

VOGLIO: $\omega_2, \omega_3, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$

1) GEOMETRIA DEL SISTEMA

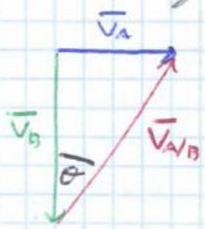
$\theta = Tg^{-1}\frac{AO/2}{KB} = 15{,}94°$ $AB = \frac{KB}{\cos\theta} = 182$ mm   (con $KB = OD - BD = 175$ mm)

2) VELOCITA' (scelgo di usare formula fondam. della cinematica)



V_A	=	V_B	+	$V_{A/B}$	
$\omega_3\overline{OA}$		$\omega_1\overline{BD}$		$\omega_2\overline{AB}$	MODULO
$\perp\overline{OA}$		$\perp\overline{BD}$		$\perp\overline{AB}$	DIREZ
?		$-\overline{J}$		?	VERSO

Faccio il triangolo delle velocità:



Ottengo il verso di $\overline{V}_{A/B}$ e di $\overline{V}_A$

I valori ora:

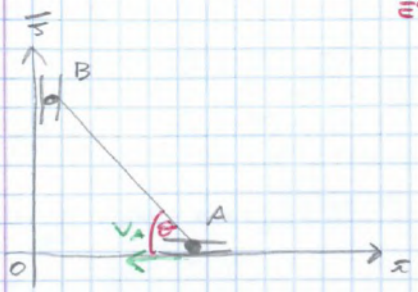
$V_B = \omega_1\overline{BD} = 0{,}15$ m/s

$V_A = V_B\,Tg\,\theta = 0{,}428$ m/s   NB: L'HO OTTENUTA DAL TRIANGOLO DI VETTORI VELOCITÀ

$V_{A/B} = V_B/\cos\theta = \omega_2\overline{AB} \Rightarrow \omega_2 = \frac{V_B}{\cos\theta \cdot AB} = 0{,}857$ rad/s $\overline{V}_{A/B} = \overline{\omega}_2 \wedge \overline{BA} \Rightarrow \otimes$

$\omega_3 = \frac{V_B\,Tg\,\theta}{\overline{OA}} = 0{,}428$ rad/s $\overline{V}_A = \overline{\omega}_3 \wedge \overline{OA} \Rightarrow \omega_3\ \otimes$

ESEMPIO DELLA SCALA APPOGGIATA AL MURO



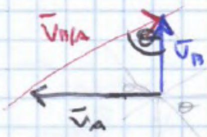
$GL = 3 - 1 - 1 = 1$

DATI

$\bar{V}_A = cost = -\bar{i}$

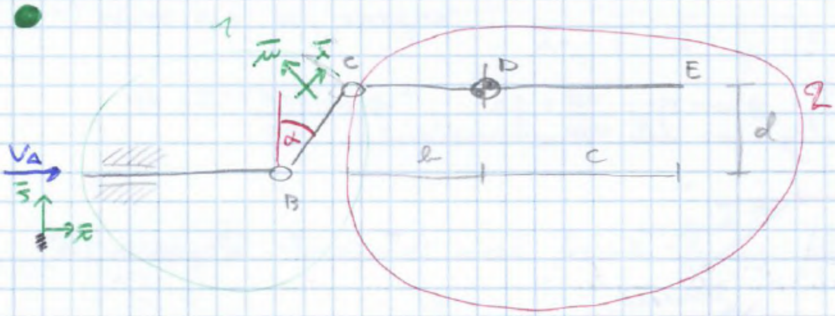
$$\bar{V}_B = \underset{\substack{cost \\ //OA \\ -\bar{i}}}{\bar{V}_A} + \underset{\substack{\omega \overline{AB} \\ \perp AB \\ ?}}{\bar{V}_{B/A}}$$

$//OB$, $\bar{j}$



$$\omega = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{V_A}{\sin\theta \cdot AB}$$

$$\boxed{V_B = V_A \cdot Tg(\pi/2 - \theta)}$$



DATI:

$\bar{V}_A = 2m/s\ \bar{i}$

$b = 0,2\ m$

$c = 0,3\ m$

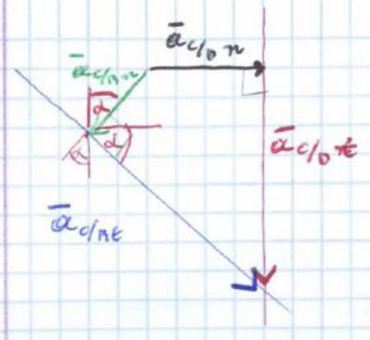
$d = 0,2\ m$

$\alpha = 45° = \pi/4$

1) GEOMETRIA

$BC = d\sqrt{2}$; $V_B = V_A + \cancel{V_{B/A}}^{=0}$

$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{C/B} = \bar{V}_{C/B}$



E ora ci faccio le proiezioni per dedurne delle grandezze:

PROIEZ. ORIZZ: $-a_{c/B\,n}\cdot \sin\alpha + a_{c/B\,t}\cos\alpha = a_{c/D\,n}$

$$-\omega_1^2\sqrt{2}d\sin\alpha + \dot{\omega}_1 d\sqrt{2}\cos\alpha = \omega_2^2 l \qquad \dot{\omega}_1 = \frac{\omega_2^2 l + \omega_1^2\sqrt{2}d\sin\alpha}{\sqrt{2}d\cos\alpha} \overset{\alpha=\pi/4}{=} \frac{\omega_2^2 l + \dots}{d}$$

$$= 200\ rad/s^2$$

VERSO DI $\dot{\omega}_1$:

tale che $\bar{\dot{\omega}}_1 \wedge \overline{BC} = \bar{a}_{c/B\,t} \Rightarrow \otimes$

PROIEZ. VERTICALE: $a_{c/D\,t} = a_{c/B\,n}\cos\alpha + a_{c/B\,t}\sin\alpha$

$$\dot{\omega}_2 l = \omega_1^2 d\sqrt{2}\cos\alpha + \dot{\omega}_1 d\sqrt{2}\sin\alpha \Rightarrow \dot{\omega}_2 = 300\ rad/s^2$$

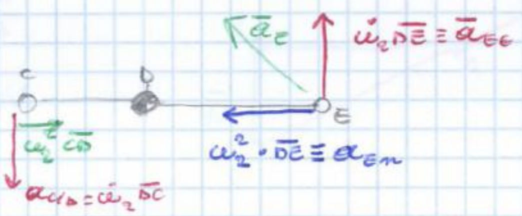
verso di $\dot{\omega}_2$:

tale che $\bar{\dot{\omega}}_2 \wedge \overline{DE} = \bar{a}_{c/D\,t} \Rightarrow \bar{\dot{\omega}}_2 \odot$

Ora cerco l'accelerazione del punto E:

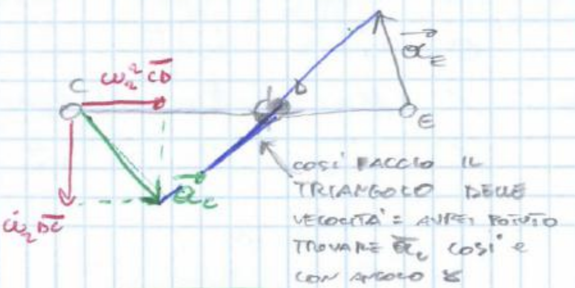
$$\bar{a}_E = \bar{a}_{E\,n} + \bar{a}_{E\,t}$$

	$\bar{a}_{E\,n}$	$\bar{a}_{E\,t}$
	$\omega_2^2\overline{DE}$	$\dot{\omega}_2\overline{DE}$
	$\parallel \overline{DE}$	$\perp \overline{DE}$
	$-\bar{i}$	$\bar{j}$



$$a_E = DE\sqrt{\dot{\omega}_2^2 + \omega_2^4} = 0{,}3\sqrt{300^2 + 20^4} = 37{,}9\ m/s^2$$

Avevamo dimenticato di scrivere come viene $\bar{a}_c$

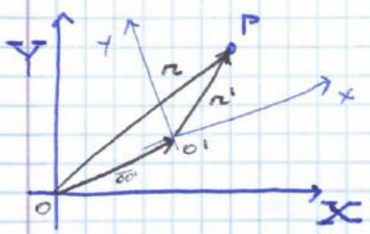


$$a_c = \sqrt{\dot{\omega}_2^2\,\overline{DC}^2 + \omega_2^4\,\overline{CD}^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 206

MOTI RELATIVI

12/03/14



con XY SR MOBILE che ha OO' fisso

$$\overline{V}_P = \overline{V}_{O'} + \overline{V}_{P/O'}$$

Il moto relativo ce lo abbiamo quando P si muove nel sistema di riferimento mobile (x,y).

In caso di moto relativo avremo per il punto P: SR MOBILE con $\overline{OO'}$ non fisso

$$\overline{V}_P = \underbrace{\overline{V}_{O'} + \overline{V}_{P/O'}}_{\text{VELOCITA' DI TRASCINAMENTO}} + \underbrace{\overline{V}_{rel\,P/O'}}_{\text{VELOCITA' RELATIVA}}$$

Vuol dire che il punto P si muove su $(O'xy)$.

Nello stesso caso, avrò la seguente accelerazione:

$$\overline{a}_P = \overline{a}_{P\,trascinamento} + \overline{a}_{P\,relativa} + \underline{\overline{a}_{coriolis}}$$

infatti derivando la velocità otterrò: da cui:

$$\overline{a}_P = \overline{a}_{O'} + \overline{a}_{P/O'\,t} + \overline{a}_{P/O'\,n} + \overline{a}_{rel\,P/O'} + \overline{a}_{coriolis}$$

$$\overline{a}_P = \overline{a}_{O'} + \dot{\overline{\omega}} \wedge \overline{O'P} + \omega^2 \overline{O'P}\,\overline{n} + \frac{d^2\overline{O'P}}{dt^2} + 2\overline{\omega}\wedge\overline{\dot{O'P}} =$$

con $\overline{n} = -\overline{\lambda}$

$$= \overline{a}_{O'} + \underbrace{\dot{\overline{\omega}}\wedge\overline{l}}_{\overline{a}_{P/O'\,t}} + \underbrace{\omega^2 l\, \overline{n}}_{\overline{a}_{P/O'\,n}} + \underbrace{\ddot{l}\,\overline{\lambda}}_{\overline{a}_{P/O'\,rel}} + \underbrace{2\overline{\omega}\wedge\dot{\overline{l}}}_{\overline{a}_{coriolis}}$$

con $l = O'P$

Ora scriviamo il tutto in coordinate polari partendo dalle def:

$$\overline{a}_P = \overline{a}_{O'} + (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2)\overline{\lambda} + (r\dot{\omega} + 2\omega\dot{r})\overline{\mu}$$

nota che: $\uparrow \ddot{l}$ $\uparrow \omega^2 l$ $\uparrow \dot{\overline{\omega}}\wedge\overline{l}$ $\uparrow 2\overline{\omega}\wedge\dot{\overline{l}}$

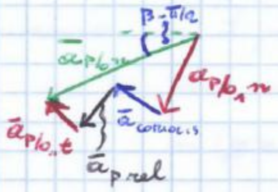
NB: CORIOLIS

È un'accelerazione che dipende solo dalla composizione dei moti dei due sistemi, perciò ~~è~~ compare anche se non c'è una accelerazione del punto P. È presente anche se non c'è nemmeno un'accelerazione di un sistema rispetto all'altro.

Accelerazioni:

$$\cancel{\bar{a}_{P/O_t}} + \bar{a}_{P/O_n} = \cancel{\bar{a}_{O_1}} + \bar{a}_{P/O_1\,trasc.t} + \bar{a}_{P/O_1\,trasc.n} + \bar{a}_{P\,rel} + \bar{a}_{coriolis}$$

$=0$	$\omega^2 r$	$=0$ $\lvert\ddot{\theta}_1 \wedge \overline{O_1P}\rvert$	$\dot{\theta}_1^2\,\overline{O_1P}$	$\ddot{l}$	$\lvert 2\dot{\theta} \wedge \dot{l}\rvert$
	$//\overline{OP}$	$\perp \overline{OP}$	$//\overline{O_1P}$	$//\overline{O_1P}$	$\perp \overline{O_1P}$
	$-\bar{i}$	?	$-\bar{i}$	?	$\bar{j}$



$\bar{a}_{P/O_n} = 1'007\ m/s^2$ direz $-\bar{i}$

$\bar{a}_{P/O_t} = 3'000\ m/s^2$

$$\bar{a}_P \cos\alpha = \bar{a}_{P/O_1 n} + \bar{a}_{P\,rel}$$

$$\bar{a}_P \sin\alpha = \bar{a}_{coriolis} + \bar{a}_{P/O_1\,tang}$$

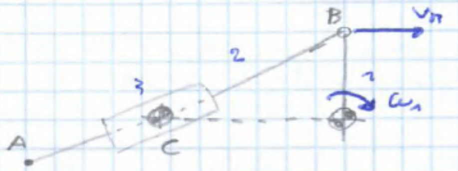
$$\bar{a}_{P\,rel} = \omega^2 r \cos\alpha - \dot{\theta}_1^2 l = 100^2 \cdot 0,3 \cdot \cos(37,3^\circ) - 70,67^2 \cdot 0,61 = 1471,3\ m/s^2\ (-\bar{i})$$

$$a_{P/O_1 t} = \ddot{\theta}_1 l = a_P \sin\alpha - \bar{a}_{coriolis} \qquad \ddot{\theta}_1 = \frac{\omega^2 r \sin\alpha - 2\dot{\theta}\dot{l}}{l} = 518,8\ rad/s^2\ (\circlearrowleft)$$

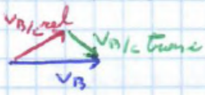
$$\bar{a}_A = \bar{a}_{An} + \bar{a}_{At} = \dot{\theta}_1^2\,\overline{O_1A}\,(-\bar{i}) + \ddot{\theta}_1\,\overline{O_1A}\,(\bar{j})$$

$$\text{con } \overline{a_A} = \overline{O_1A}\sqrt{\dot{\theta}_1^4 + \ddot{\theta}_1^2} = 1387,3\ m/s^2$$

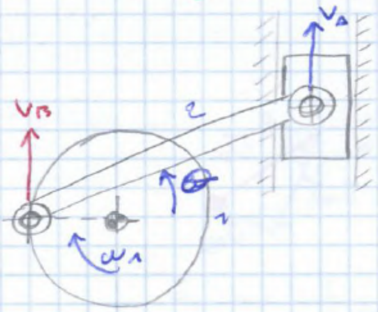
• FIGURA 1.75 (ES 1.29 P 41)



$V_P = \bar{\omega} \wedge \bar{r} = \bar{\omega} \wedge \overline{OB}$



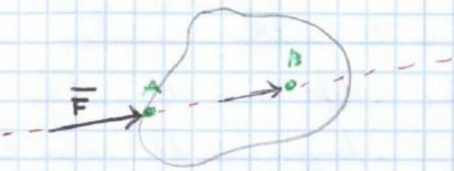
• FIGURA 1.65 (ES 1.19 P 38)



Il centro delle velocità va a ∞, il moto in questo istante è puramente traslatorio.

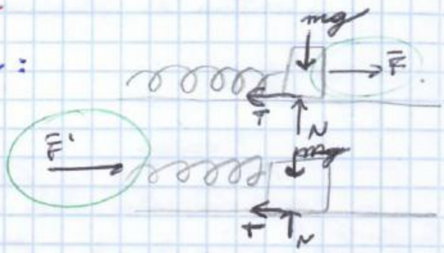
FORZE ED EQUILIBRI

La forza si rappresenta con un vettore, quindi ha: modulo, direzione, verso, retta di applicazione.

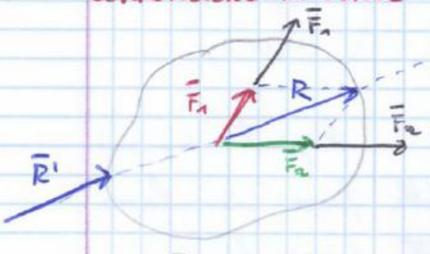


Per i corpi rigidi la forza si applica in un punto qualsiasi della retta di applicazione. Sliding vector

Per i corpi elastici la questione è diversa: i due esempi a destra danno risultati diversi. La forza non è più sliding vector per corpi elastici.



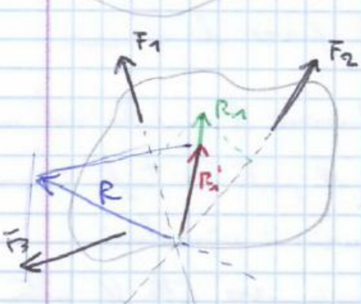
COMPOSIZIONE DI FORZE



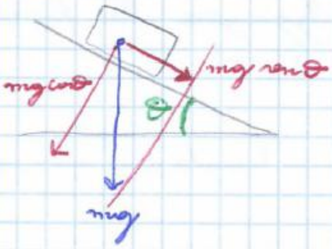
$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

$$\overline{R} = F_{1x}\,\overline{i} + F_{1y}\,\overline{j} + F_{2x}\,\overline{i} + F_{2y}\,\overline{j}$$

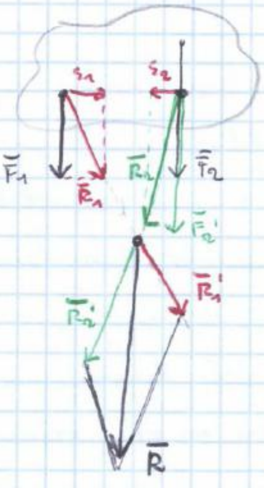
$$\overline{R} = (F_{1x} + F_{2x})\,\overline{i} + (F_{1y} + F_{2y})\,\overline{j}$$



P98



SOMMA DI VETTORI //

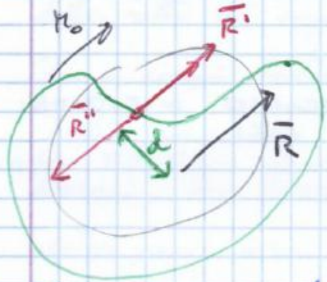


$S_1 = -S_2$

$\sum F_x = 0$

In una coppia di forze si ha forza risultante pari a zero: $\sum F_y = 0$

Infatti è diverso da tutti gli altri casi perché negli altri non c'era risultante della forza nulla, quindi il sistema tendeva a ruotare ma anche a traslare. La coppia di forze tende solo a far ruotare.



ESEMPIO

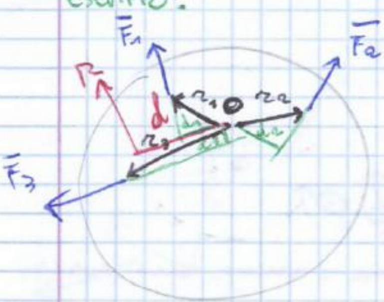
Se al mio sistema aggiungo le forze in rosso, uguali e contrarie e con stesso punto di applicazione, non cambia nulla (cambia se considero le tensioni interne, ma non le guardo). con $|\bar{R}| = |\bar{R}'| = |\bar{R}''|$

Ma se io considero solamente il pacchetto verde, ho una coppia di forze data da $\bar{R}$ e $\bar{R}''$. Ma tale coppia deve essere uguale e contraria a M_o. $M_o = R \cdot d$ $\quad \bar{M}_o - \bar{M}_o' = 0$

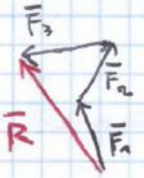
07/03/14 B

ESEMPIO:

p 51-52



$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$



Ora so direzione e verso di R, ma dove va applicato?

• MODULO: lo ottengo dalle prime due equazioni

$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$

$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$

• PUNTO DI APPLICAZIONE: lo ottengo dalla eq. di momento

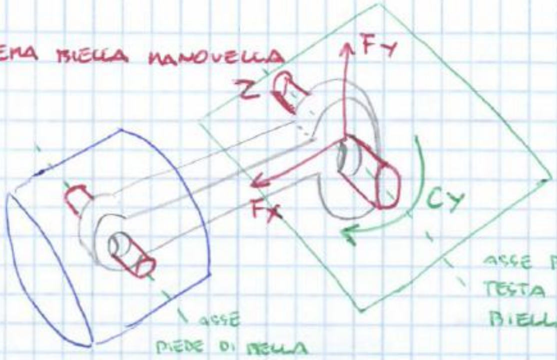
$\bar{M}_o = \bar{r}_1 \wedge \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \wedge \bar{F}_2 + \bar{r}_3 \wedge \bar{F}_3 = \underline{F_2 d_2} - F_1 d_1 - F_3 d_3 \ \otimes \odot =$

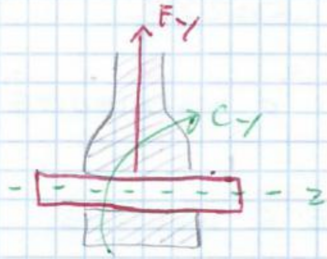
ANTIORARIO

$= \bar{r} \wedge \bar{R}$

$\boxed{M_o = d R}$ $\quad d = \frac{M_o}{R}$

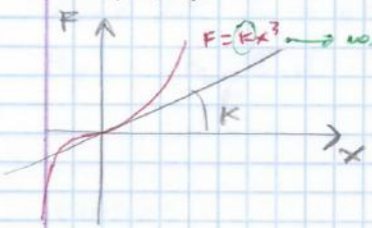
SISTEMA BIELLA MANOVELLA





2) DUE ELEMENTI FLESSIBILI : MOLLE ED AMMORTIZZATORI (SMORZATORI)

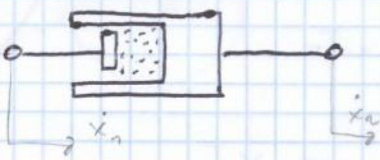
K RIGIDEZZA DELLA MOLLA



$F = Kx^3 \rightarrow$ non sono $[N/m]$

$\boxed{F = Kx}$ in generale per molla lineare $K = [N/m]$

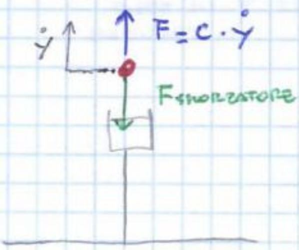
in realtà sarebbe Δx.



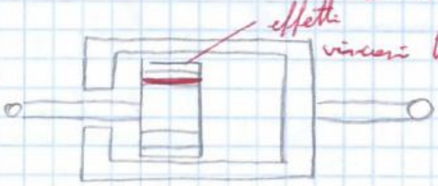
Lo smorzatore è un elemento flessibile e non-rigido come la molla.

$\boxed{F = c\dot{x}}$

in realtà sarebbe $\Delta\dot{x}$



C = COEFF. DI SMORZAMENTO



effetti viscosi tra fluido e pistone

LEGGI DI NEWTON

19/03/14

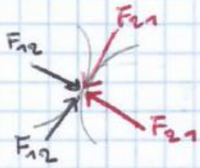
CORPO PUNTIFORME

1) SE $\sum \bar{F}_e = 0$ MANTIENE LO STATO : SE FERMA, RIMANE FERMA

SE IN MOTO, MOTO RETTILINEO UNIF.

2) SE $\sum \bar{F}_e \neq 0$ $\quad \sum \bar{F}_e = m\bar{a}$ ACCELERAZ. DELLA PARTICELLA NELLA DIREZIONE DELLA RISULTANTE

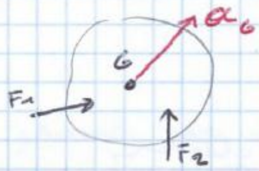
3) AZIONE E REAZIONE



$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$

CORPO RIGIDO

21) SE $\sum \bar{F}_e = \bar{R} \neq 0$ $\quad \sum \bar{F}_e = m\,\bar{a}_G$



con $a_G = \frac{R}{m}$

22) SE $\sum \bar{M}_{eG} \neq 0$ $\quad \sum \bar{M}_{eG} = I_G\,\bar{\dot{\omega}}$

MOMENTO D'INERZIA RISPETTO A BARICENTRO G

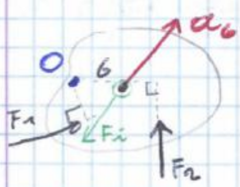
Ora $-m \cdot \bar{a}_G$ lo chiamo $\bar{F}_i$ = FORZA D'INERZIA,

$-I_G\,\bar{\dot{\omega}}$ lo chiamo $\bar{M}_{iG}$ = MOMENTO D'INERZIA.

Naturalmente posso scrivere: $\sum \bar{F}_e + \bar{F}_i = 0$

$\sum \bar{M}_{eG} + M_{iG} = 0$

L'ultima equazione la si può scrivere con i momenti rispetto ad un punto O qualsiasi (per quanto riguarda M_{eG}):



Allora devo scrivere: $\sum \bar{M}_{eO} + \underbrace{\bar{M}_{iG} + \overline{OG} \wedge \bar{F}_i}_{\bar{M}_{iO}} = 0$

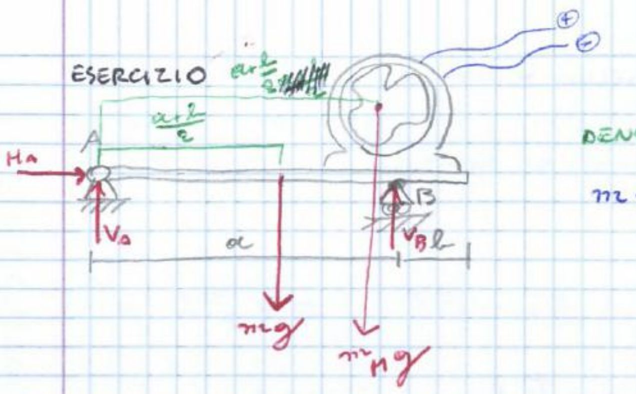
$\sum \bar{M}_{eO} + \bar{M}_{iO} = 0$

Ma allora anche rispetto ad un punto qualsiasi la somma di $M_e + M_i = 0$!

p56

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 206

ESERCIZIO



DENSITA' DELLA TRAVE: $\gamma \left[\frac{kg}{m}\right]$

$$m = \gamma \cdot (a+l)$$

EQUAZIONI EQUILIBRIO STATICO

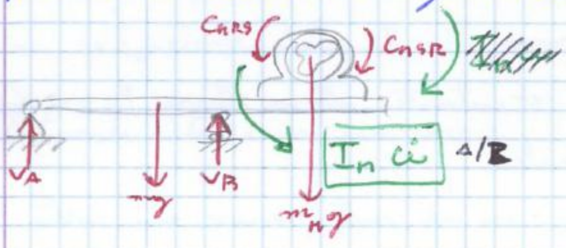
$$A \curvearrowleft : V_B \cdot a - mg\left(\frac{a+l}{2}\right) - m_M g\left(a + \frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\downarrow : mg + m_M g - V_B - V_A = 0$$

$$\rightarrow : H_A = 0$$

Al motore sono attaccati due cavi: allora parte, fornirà una COPPIA al sistema. Indirizzandola in senso orario. C_{MSR} è la coppia trasmessa dallo STATORE al ROTORE. Per principio di azione/reazione avrò anche C_{MRS}. Per A/R scrivo $C_{MSR} = -C_{MRS}$

NB: sono coppie INTERNE AL SISTEMA e perciò queste coppie non compariranno nelle eq. di equilibrio del sistema. Però grazie a tali, il sistema accelera. Nascerà perciò una COPPIA DI INERZIA (dovuta agli effetti di massa, al fatto che sta accelerando angolarmente il sistema).



EQ. EQUILIBRIO STATICO (CON COPPIA MOTRICE)

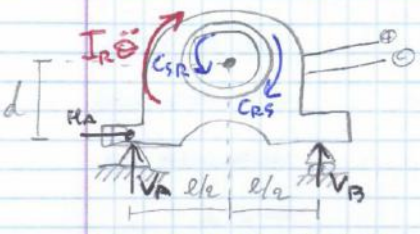
$$A \curvearrowleft : V_B \cdot a - mg\frac{(a+l)}{2} - m_M g\left(a + \frac{l}{2}\right) + I_M \dot{\omega} = 0$$

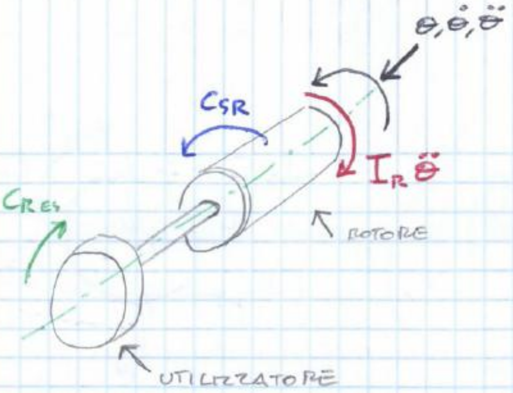
$$\downarrow : (m + m_M) g - V_B - V_A = 0$$

$$\rightarrow : H_A = 0$$

19/03/14 B

II° ESEMPIO SU MOTORE





EQ. ROTAZIONE ROTORE

$$\circlearrowleft : C_{SR} - C_{RES} - I_R\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{C_{SR} - C_{RES}}{I_R}$$

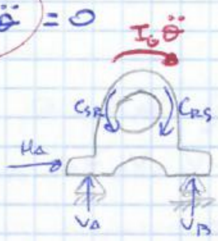
EQ. ROTAZIONE SOLO STATORE

$$\circlearrowright : \quad C_{RS} + V_A\frac{l}{2} - V_B\frac{l}{2} - H_A d$$

EQ. TUTTO COMPRESO ROTORE

$$\circlearrowleft : \quad V_B\frac{l}{2} - V_A\frac{l}{2} + H_A \cdot d - I_G\ddot{\theta} = 0$$

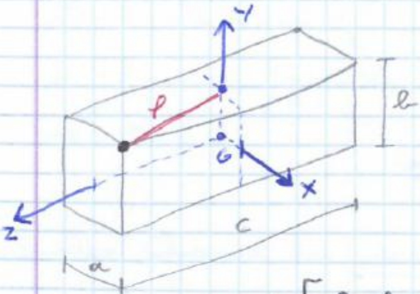
$I_G\ddot{\theta}$ e' l'effetto dell'inerzia di tutto il sistema



MOMENTO DI INERZIA

$$\boxed{I = \int_V \rho^2\, dm}$$

TRAVI, BARRE, MENSOLE



γ = DENSITA' $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$$I_y = \int_V \rho\, dm^2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2}\int_{-l/2}^{l/2}\int_{-c/2}^{c/2} \gamma\,(x^2+z^2)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \gamma\left[\left[\left[\frac{z^3}{3}yx + \frac{x^3}{3}zy\right]_{-a/2}^{a/2}\right]_{-l/2}^{l/2}\right]_{-c/2}^{c/2} =$$

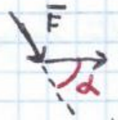
$$= \gamma\cdot\left[\frac{c}{12}la + \frac{a^3}{12}l\cdot c\right] = \gamma\left[a\,l\,c\right]\left[\frac{c^2}{12} + \frac{a^2}{12}\right]$$

LAVORO ED ENERGIA

20/03/14

LAVORO

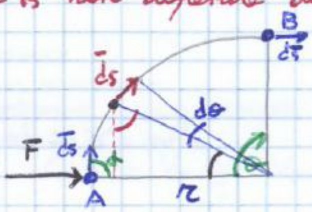
$$dL = \bar{F} \times \bar{ds} = F \cdot ds \cos\alpha$$



$[J] = [N \cdot m]$

NB: ANCHE IL MOMENTO HA UDM $[N \cdot m]$, PERÒ QUEST'ULTIMO È UNA GRANDEZZA VETTORIALE, MENTRE IL LAVORO È SCALARE. ECCO PERCHÉ NON VENGONO EQUIVALSE.

Se il sistema è conservativo, il lavoro da A a B non dipende dal percorso: $L = rF$



$$dL = \bar{F} \times \bar{ds} = F ds \cos\alpha$$

$$L = \int_A^B F ds \cos\alpha = \int_A^B F \cos\alpha \, r \, d\theta = \int_A^B r F \sin\theta \, d\theta =$$

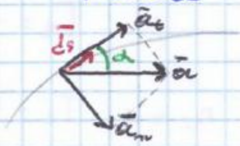
$$= \int_0^{\pi/2} r F \sin\theta \, d\theta = \left[-rF\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = rF$$

NO SU LIBRO

Sempre che F sia costante! È un'altra condizione

ENERGIA CINETICA

$$\bar{F} = m\bar{a}$$



$$\bar{F} \times \bar{ds} = m\bar{a} \times \bar{ds} \qquad |\bar{F} \times \bar{ds}| = m a \, ds \cos\alpha = m a_t \, ds$$

$$|\bar{F} \times \bar{ds}| = m \frac{dv}{dt} ds = m \, dv \, v \qquad dL = m v \, dv$$

$$L = \int_{v_1}^{v_2} m v \, dv = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

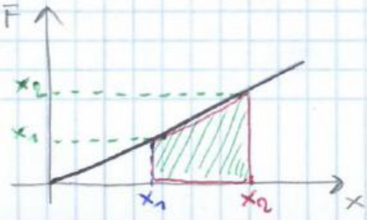
lavoro delle forze esterne per far variare la velocità da v_1 a v_2.

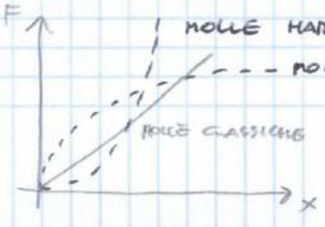
→ ENERGIA ELASTICA (MOLLE)

$$dL = \bar{F} \times \bar{ds} = F ds = kx \, ds$$

$$L_e = \int_{x_1}^{x_2} kx \, dx = \frac{1}{2} k \left(x_2^2 - x_1^2\right) = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

← VALIDA SOLO SE SI PARTE DA ZERO ($x_1 = 0$)





PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLE ENERGIE

$$\underbrace{L_e + L_i}_{\text{DIPENDONO DAL PERCORSO}} = \underbrace{\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta E_{EL}}_{\text{DIPENDONO DA STATO IN. E STATO FIN.}}$$

L_e: LAVORI FORZE ESTERNE — ad esempio $F_{ATTRITO}$ e $F_{applicata}$ dall'esterno

L_i: LAVORO FORZE INTERNE — il bilancio dei lavori interni se non c'è attrito è nullo, se c'è attrito è un lavoro di perdita.

SE $L_e + L_i = 0 \Rightarrow E_c + E_p + E_{EL} = \text{cost}$: SISTEMA È CONSERVATIVO

24/03/2014

POTENZA E RENDIMENTO

Il portare una massa da un livello energetico ad un altro implica una spesa di energia. La rapidità con cui spendo questa energia è la grandezza potenza.

$P = \frac{dL}{dt}$ $[J/s] = [W]$ ~~$W = F \frac{ds}{dt} = F v$~~

PER TRASLAZIONI: $P = \frac{F\,ds}{dt} = Fv$ $\quad P = Fv$

PER ROTAZIONI: $dL = M\omega\,dt$ $\quad P = M\omega$ $\quad P = M\omega$

PER GENERICO MOTO: $P = Fv + M\omega$

NB: CAVALLI VAPORE

$CV = 75 \cdot kg\frac{m}{s} = 75 \cdot 9{,}81\ \frac{N\,m}{s} = 736\ W$ $\qquad CV = 0{,}736\ KW$

$Q \left[kg \frac{m}{s} \right]$

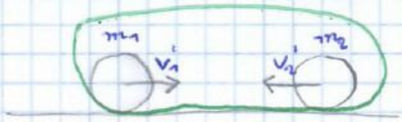
Posso scomporre in componenti l'eq. di prima, ottenendo 3 eq. linearmente indipendenti:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}_{e_x}\, dt = Q_{2x} - Q_{1x};$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}_{e_y}\, dt = Q_{2y} - Q_{1y};$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_{e_z}\, dt = Q_{2z} - Q_{1z}$$

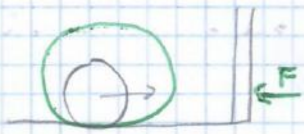
ESEMPIO PALLINE



$Q_1 = m_1 V_1' + m_2 V_2'$

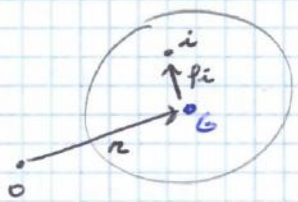
$Q_2 = Q_1 = m_1 V_1'' + m_2 V_2''$

La Q si conserva perché come sistema ho considerato tutto il sistema. E la $\Sigma \bar{F}_e = 0$ in questo caso.



Qui non si conserva perché rispetto al sistema ho una forza esterna quando la palla sbatte (e' la reazione di AZ/REAZ)

Q PER UN SISTEMA DI PARTICELLE



$$Q = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i = \Sigma m_i (\underbrace{\bar{V}_G + \bar{\rho}_i}_{V_G + V_R}) =$$

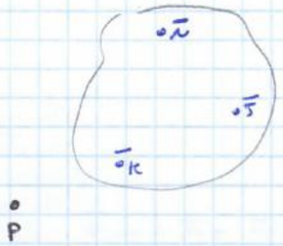
$$= \Sigma m_i \bar{V}_G + \Sigma m_i \bar{\rho}_i =$$

$$= m_T \bar{V}_G + \frac{d}{dt} \underbrace{\Sigma m_i \bar{\rho}_i}_{\text{ZERO}} = m_T \bar{V}_G$$

DEF BARICENTRO: e' quel punto t.c. la sommatoria delle particelle per la distanza che hanno da quel punto e' pari a zero.

$$\bar{Q} = m_{TOT} \bar{V}_G$$

• PER SISTEMA DI PARTICELLE



$$\bar K_P = \sum \bar\rho_i \wedge m_i \bar v_i$$

Se P è punto fisso: $\bar K_O = \sum \bar r_i \wedge m_i \dot{\bar r}_i$

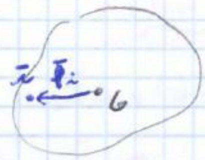
e poi: $\frac{d\bar K_O}{dt} = \sum \cancel{\dot{\bar r}_i \wedge m_i \dot{\bar r}_i} + \sum \bar r_i \wedge m_i \ddot{\bar r}_i =$

$$= \sum \bar r_i \wedge m_i \bar a_i = \sum \bar M_{eO}$$

$$\boxed{\frac{dK_O}{dt} = \sum \bar M_{eO}}$$

PARTICOLARITÀ DEL BARICENTRO G:

Se invece di O prendo G, ho:



e posso scrivere $\bar K_G = \sum \bar\rho_i \wedge m_i \bar v_i =$

$$= \sum \bar\rho_i \wedge m_i (\bar v_G + \dot{\bar\rho}_i)$$

$$K_G = \sum \bar\rho_i \wedge m_i \bar v_G + \sum \bar\rho_i \wedge m_i \dot{\bar\rho}_i$$

e poi: $\frac{dK_G}{dt} = \sum \dot{\bar\rho}_i \wedge m_i \bar v_i + \sum \bar\rho_i \wedge m_i \dot{\bar v}_i = \sum \dot{\bar\rho}_i \wedge m_i (\bar v_G + \dot{\bar\rho}_i) +$

$$+ \sum \bar\rho_i \wedge m_i \dot{\bar v}_i = \sum \dot{\bar\rho}_i \wedge m_i \bar v_G + \sum \bar\rho_i \wedge m_i \bar a_i =$$

$$= \sum \dot{\bar\rho}_i m_i \wedge \bar v_G + \sum \bar\rho_i \wedge m_i \bar a_i =$$

$$= \cancel{\frac{d}{dt} \sum \bar\rho_i m_i \wedge \bar v_G} + \sum \bar\rho_i \wedge m_i \bar a_i = \sum M_{eG}$$

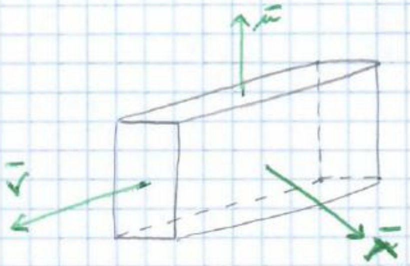
$$\boxed{K_G = \omega I_G}$$

NB: I K_G SONO TUTTI UGUALI INDIPENDENTEMENTE CHE CI SI RIFERISCA A UN POLO MOBILE P, UNO FISSO O O AL BARICENTRO

LIBRO FORMULA 9.38
PEDICE ERRATO, PRIMA PARENTESI NON È $\dot\rho_i$, MA ρ

Se ho un sistema nello spazio avrei:

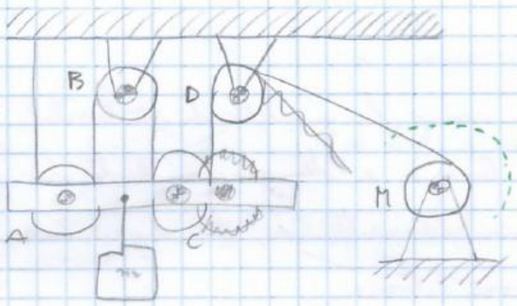
• $K_G = I_\lambda \omega_\lambda \bar{\lambda} + I_\mu \omega_\mu \bar{\mu} + I_\gamma \omega_\gamma \bar{\gamma}$ con $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\gamma}$ ASSI PRINCIPALI DI INERZIA



$I_\lambda > I_\mu > I_\gamma$

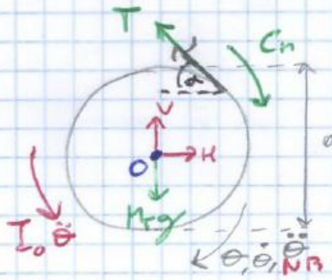
ESERCITAZIONE 24/03/2014

12 PARANCO)



$V_0 = 0$ m/s

Visto che sul tamburo ho la coppia motrice, mi sarà comodo isolarlo:



Quando isolo col diagramma di corpo libero, nei punti in cui la macchina tocca un elemento devo andare ad inserire le sollecitazioni che il mondo scarica sul sistema dentro la macchina.

NB: i versi delle reazioni vincolari (finché non comparirà l'attrito) li posso orientare come voglio.

Dato che il tamburo non sta traslando non ho forza d'inerzia F_i.
Ho però un momento d'inerzia M_i, opposto a $\ddot{\theta}$.

Ora scrivo le eq. di equilibrio:

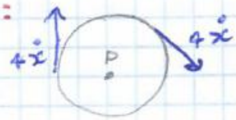
↑ $V - M_T g + T \sin\alpha = 0$

→ $H - T\cos\alpha = 0$

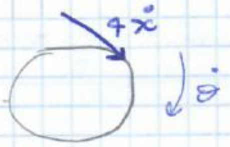
Queste equazioni vanno scritte, ma non ci permettono di risolvere il problema.

Scriviamo la 3° equazione di equilibrio

La 4°:



L'ultima:



$$4\dot{x} = \frac{d}{2}\dot{\theta}$$

Ho le 3 eq. risolventi. Da queste ottengo:

$$\ddot{x} = \frac{8\,C_m/d - mg}{m + 64\,I_o/d^2}$$

DIMENSIONALMENTE: $\left[\frac{Nm/m - kg\cdot\frac{N}{kg}}{kg + m^2kg/m^2}\right] = \left[\frac{N}{kg}\right] = \left[m/s^2\right]$

$$\ddot{x} = 0,38\ m/s^2$$

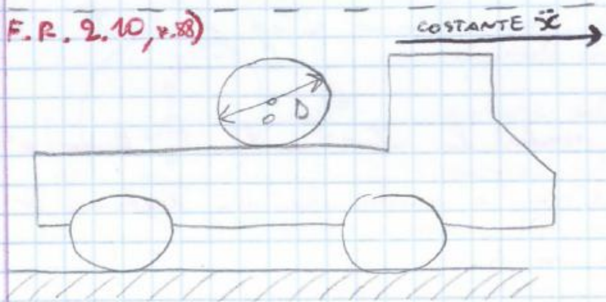
NB: scopro che $\ddot{x}$ è un'accelerazione costante, questo perché mi è detto che C_m è costante. Nella realtà non è mai vero che la coppia di un motore sia costante.

Ora che ho $\ddot{x}$ posso trovare la velocità con la legge oraria:

$\dot{x} = x_0 + \ddot{x}\,t$ $\qquad t = 2s$ e $x_0 = 0 \Rightarrow \dot{x} =$

F.R. 2.10, p.88)

ESERCIZIO PER NULLA BANALE!

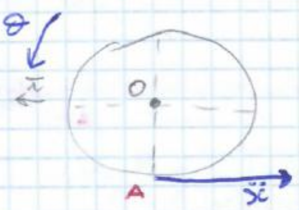


Il rullo ha massa uniformemente distribuita, perciò $I_o = \frac{1}{2}m\left(\frac{D}{2}\right)^2$ → NB: DATO CHE IL LIBRO DA' PER SCONTATO

$$x = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t - t_0)^2$$

$$x_F = \frac{1}{2}\ddot{x}_F t_F^2$$

Ma mi blocco, so solo che $\ddot{x} = cost$ e niente altro di questa equazione.

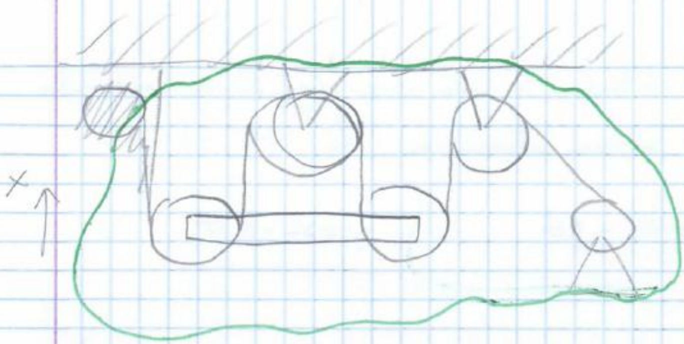


A si muove di $\ddot{x}$ perché è al camion.

$$\bar{v}_O = \bar{v}_T + \bar{v}_R$$

v_T è quella che il corpo avrebbe se non ci fosse il moto relativo.

v_R è quella che avrebbe se non ci fosse il trascinamento



- LA FUNE NON SVOLGE LAVORO (ogni elemento della fune ha due forze uguali e opposte)
- LA FORZA PESO SVOLGE LAVORO $-mg\,dx$ (segno - perche' opposto alla forza lo spostam.)
- LA COPPIA MOTRICE SVOLGE LAVORO $C_m d\theta$

Quindi posso scrivere: $C_m d\theta - mg\,dx = d\left(\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)$

ora sostituisco con la cinematica $4x = R\theta$:

$C_m \frac{4dx}{R} - mg\,dx = d\left(\frac{1}{2}I_0\frac{16\dot{x}^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)$ che così non mi serve,

ma se derivo rispetto al tempo tutto quanto (passando a potenza [W]) noto che la velocita' si semplifica:

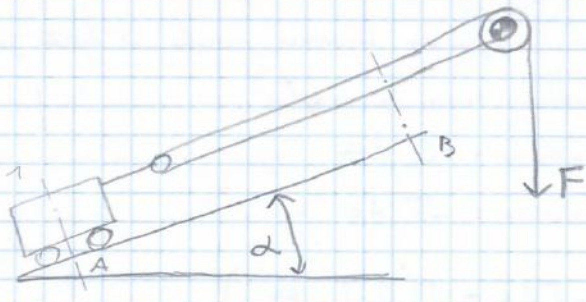
$C_m \frac{4}{R}\dot{x} - mg\dot{x} = I_0\frac{16}{R^2}\dot{x}\ddot{x} + m\dot{x}\ddot{x}$

e trovo $\ddot{x}$: $\ddot{x} = \dfrac{C_m 4/R - mg}{m + 16 I_0/R^2}$ che è la stessa cosa che ho trovato la lezione scorsa con l'altro metodo.

NB: IL METODO DELLE ENERGIE E' PIU' COMODO A VOLTE, MA

- MI FORNISCE L'EQ. DEL MOTO SOLO SE IL SISTEMA HA UN SOLO GRADO DI LIBERTA'
- NON MI DA' ALCUNA INFO SULLE FORZE ALL'INTERNO DEL SISTEMA

3)



La massa della puleggia e' uniformemente distribuita, perche' NON E' SCRITTO NEL TESTO!

$I_2 = \frac{1}{2}m_2 R_2^2$

1° MODO: DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO

Potrei partire dalla puleggia (perche' mi danno il valore di F) oppure dal carrello (mi chiedono la velocita' del carrello). Decido di partire dalla puleggia.

$x_F = 2\,m = \frac{1}{2}\ddot{x}\,t_F^2 \qquad t_F = 0,95\,s$

$\dot{x}_F = \ddot{x}\,t_F = 4,2\ m/s$

Abbiamo avuto bisogno della cinematica per legare ad una variabile che considero indipendente. Ho scelto la x, poiché mi chiedevano uno spostamento del carrello.
Qui ho avuto bisogno di tante equazioni quante erano le incognite.

2) METODO DELLE ENERGIE

$$F\,dy - m g\,dx \sin\alpha = d\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2\right)$$

N non compie lavoro, T non la vedo perché ad ogni T_{nm} corrisponde $-T_{mn}$.

$2\dot{x} = R_2\dot{\theta} \qquad 2\,dx = R_2\,d\theta = dy$

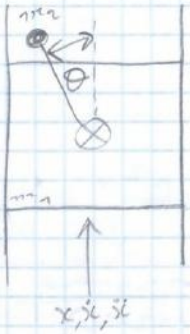
$$2F\,dx - m_1 g\,dx\sin\alpha = d\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}m_2R_2^2\cdot\frac{4\dot{x}^2}{R_2^2}\right)$$

$$2F\,dx - m_1 g\sin\alpha\,dx = d\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{x}^2\right)$$

derivo rispetto al tempo: $2F\dot{x} - m_1 g\sin\alpha\,\dot{x} = m_1\dot{x}\ddot{x} + 2m_2\dot{x}\ddot{x}$

$2F - m_1 g\sin\alpha = m_1\ddot{x} + 2m_2\ddot{x} \qquad \ddot{x} = \dfrac{2F - m_1 g\sin\alpha}{m_1 + 2m_2}$

F.R. 2.14, P 89)



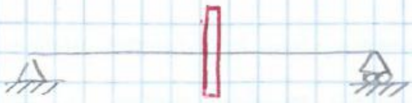
$m_1 = 20\,kg \qquad m_2 = 5\,kg$

$r = 0,4\,m$

$\omega = 4\,rad/s$

SE $\theta = 0 \longrightarrow V_1 = 0,6\ m/s$

SE $\theta = 60° \longrightarrow V_2$. $\qquad V_2$?

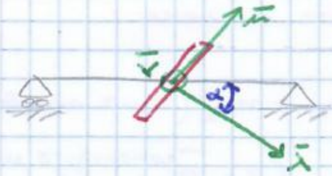


Disco montato su un albero, in rotazione.

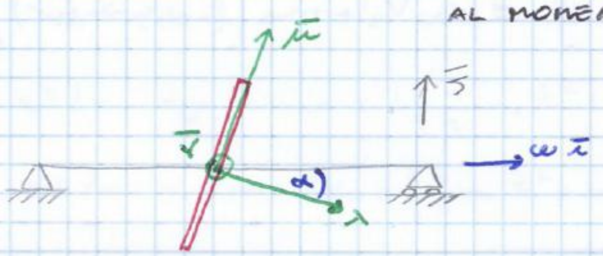
Possono capitare due cose:

SQUILIBRIO STATICO: L'ASSE DI ROTAZIONE RISPETTO A CUI RUOTA IL SISTEMA NON COINCIDE CON IL BARICENTRO

SQUILIBRIO DINAMICO: L'ASSE DI ROTAZIONE COINCIDE CON IL BARICENTRO, PERO' NON E' COINCIDENTE CON NESSUN ASSE PRINCIPALE DI INERZIA.



NASCONO DEI MOMENTI ~~D'INERZIA~~ CHE SARANNO RIBALTANTI O RADDRIZZANTI IN BASE AL MOMENTO DI INERZIA



$$K_G = I_\lambda \omega_\lambda \bar{\lambda} + I_\mu \omega_\mu \bar{\mu} + I_\nu \omega_\nu \bar{\nu}$$

con $\omega = cost$

$\omega_\lambda = \omega \cos\alpha$

$\omega_\mu = \omega \sin\alpha$

$\omega_\nu = 0$

$$\frac{dK_G}{dt} = I_\lambda \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha\,(-\bar{\nu}) + I_\mu \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\,(\bar{\nu}) + I_\nu\, 0 = \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha\,(I_\mu - I_\lambda)\,(\bar{\nu})$$

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{\lambda} = \omega \sin\alpha\,(-\bar{\nu})$$

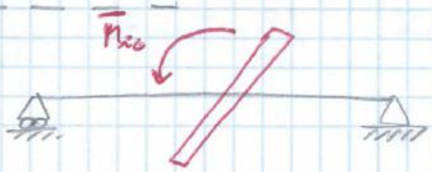
$$\frac{d\bar{\mu}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{\mu} = \omega \cos\alpha\,(\bar{\nu})$$

$$\frac{d\bar{\nu}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{\nu} = \omega\,(\bar{\zeta})$$

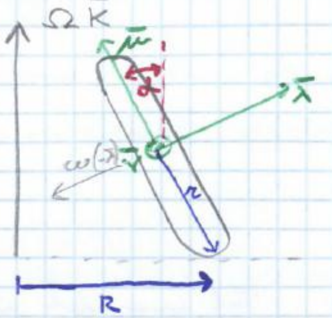
$$M_{iG} = -\frac{dK_G}{dt} = \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha\,(I_\lambda - I_\mu)(\bar{\nu})$$

Considerando il disco SOTTILE se trascuro lo spessore, perciò: $I_\lambda = 2 I_\mu = \frac{mR^2}{2}$

M_{iG} DIRETTO LUNGO $\bar{\nu}$, ALLORA:



ESEMPIO DELLA MOTO IN CURVA



$$\bar{v} = \bar{\Omega} \wedge \bar{R}$$

$$\bar{\omega}_{ruota} = \omega(-\bar{\lambda})$$ perché deve essere tale che la ruota avanzi.

$$K_G = I_\lambda \omega_\lambda \bar{\lambda} + I_\mu \omega_\mu \bar{\mu} + I_\nu \omega_\nu \bar{\nu}$$

cost $\rightarrow \omega_\lambda = -\omega + \Omega \sin\alpha$

cost $\rightarrow \omega_\mu = \Omega \cos\alpha$

cost $\rightarrow \omega_\nu = 0$

$$\frac{dK_G}{dt} = I_\lambda(-\omega + \Omega\sin\alpha)\,\Omega\cos\alpha\,(-\bar{\nu}) + I_\mu(\Omega\cos\alpha)\,\Omega\sin\alpha\,(\bar{\nu}) + 0 = (I_\mu - I_\lambda)(\Omega^2 \sin\alpha\cos\alpha) + I_\lambda \Omega\omega\cos\alpha\,(\bar{\nu})$$

$$\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial t} = \bar{\Omega}\wedge\bar{\lambda} = \Omega\cos\alpha\,(-\bar{\nu})$$

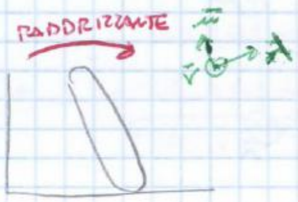
$$\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial t} = \bar{\Omega}\wedge\bar{\mu} = \Omega\sin\alpha\,(\bar{\nu})$$

$$\frac{\partial\bar{\nu}}{\partial t} = \bar{\Omega}\wedge\bar{\nu} = \Omega\,(\bar{\mu})$$

$$M_{iG} = -\frac{dK_G}{dt} = (I_\lambda - I_\mu)(\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha) \underbrace{- I_\lambda\Omega\omega\cos\alpha}\,(\bar{\nu})$$

È IL TERMINE DI GRAN LUNGA PIÙ IMPORTANTE, PERCHÉ $\omega \gg \Omega$

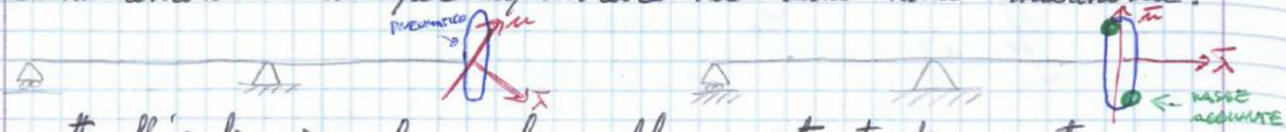
$$M_{iG} \cong - I_\lambda \Omega\omega\cos\alpha\,(\bar{\nu})$$



NB: VELOCITÀ MOZZO RUOTA

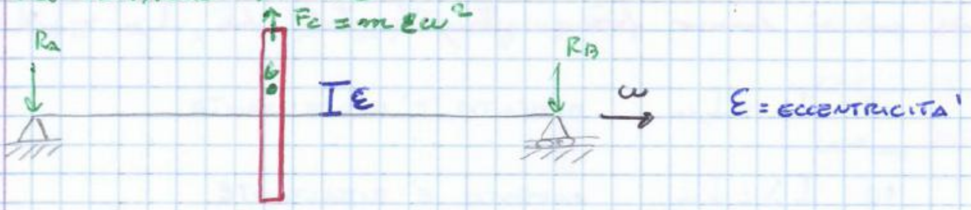
$$V_{M.R.} = \Omega(R - \underbrace{r\,\text{sen}\alpha}_{\cong R}) = \omega r$$

Questo concetto è usato per equilibrare la ruota nella macchina:



rispetto all'inclinazione, la macchina del gommista ti dice quanta massa aggiungere e dove per raddrizzare l'asse principale di inerzia.

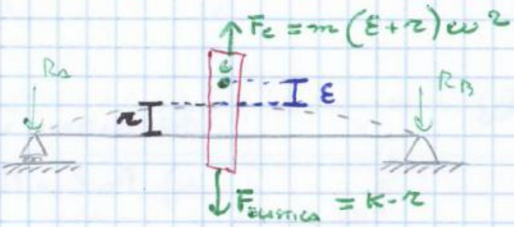
SQUILIBRIO STATICO



ε = ECCENTRICITÀ

Quando ruota, il baricentro G sentirà una forza d'inerzia verso l'esterno (forza centrifuga).

- Se albero è RIGIDO: avremo due reazioni sui vincoli. Anche qui le reazioni ruoteranno.
- Se albero è FLESSIBILE:



In questo disegno i versi di R_A e R_B sono generici, non so dove puntano. Nel precedente invece sono proprio così.

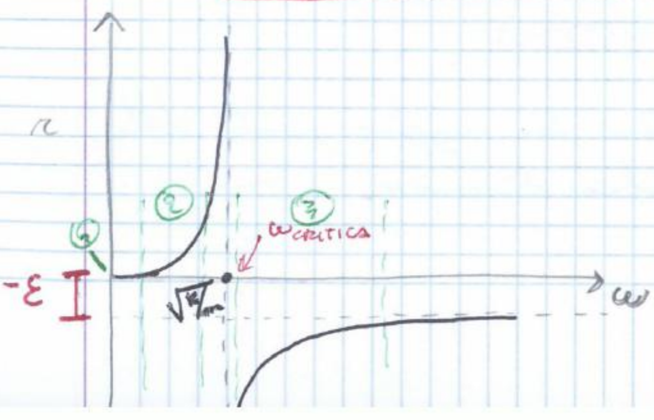
EQUILIBRIO:

$$m\varepsilon\omega^2 + mr\omega^2 - kr = 0$$

$$\boxed{r = \frac{m\varepsilon\omega^2}{k - m\omega^2}}$$

SE $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\Rightarrow$ denominatore $\to 0$ $r \to \infty$

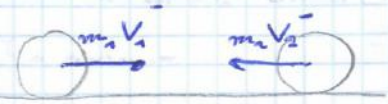
$$\omega = \sqrt{k/m} = \omega_{CRITICA}$$



per $\omega \to \infty$ $r = -\varepsilon$

$\omega = \pm\sqrt{\frac{kr}{m(r+\varepsilon)}}$

URTI



V^- prima dell'urto
V^+ dopo l'urto

Sappiamo che: $\int_1^2 \Sigma F_{ex}\, dt = \int_1^2 dQ_x = Q_{2x} - Q_{1x}$

$\Sigma F_{ex} = 0 \Rightarrow \Delta Q_x = 0 \longrightarrow Q_{2x} = Q_{1x}$

$\Sigma F_{ey} \neq 0 \Rightarrow \Delta Q_y \neq 0$

$$\underbrace{m_1 V_1^- + m_2 V_2^-}_{Q_{1x} \text{ istante iniziale}} = m_1 V_1^+ + m_2 V_2^+$$

NB: LE VELOCITA' VANNO PRESE CON SEGNO PER QUESTO CALCOLO!

Se, per esempio, $m_1 = m_2 = m$ e $V_1 = -V_2$
$\Rightarrow Q_{1x} = 0$

CONSERVAZIONE DI Q_x PER SISTEMA ISOLATO $\rightarrow \Sigma F_{ex} = 0$

- URTO CONSERVATIVO (ELASTICO PERFETTAMENTE)

Urto in cui tutta l'en. cinetica è conservata: $E_{c_{IN}} = E_{c_{FIN}}$
$\Delta E_c = 0$.

$$\frac{1}{2}\left[m_1 V_1^{-2} + m_2 V_2^{-2}\right] = \frac{1}{2}\left[m_1 V_1^{+2} + m_2 V_2^{+2}\right]$$

Se unisco questa alla equazione di conservazione di Q, posso ottenere V_1^+ e V_2^+ conoscendo solo V_1^- e V_2^-.

- URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

Equivale alla massima deformazione plastica: si ottiene, dopo l'urto, un unico corpo rigido con una certa V.

Se $m_1 = m_2$ e $V_1^- = -V_2^-$ allora $Q_{1x} = 0$ e per conservazione di Q avrò anche $Q_{2x} = 0$. Ma essendoci ora un'unica massa

ESEMPIO DI SOLIDO GIROSCOPICO (EFFETTI GIROSCOPICI) 31/03/14 B

Smerigliatrice.

$n = 1800$ rpm

$m = 0{,}5$ kg

$d = 300$ mm

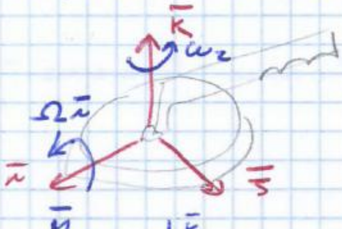
$\Omega = 1$ rad/s

$\omega_{ROTAZ.\bar{k}} = \omega_z \bar{k} = 1800 \cdot \frac{2\pi}{60}$ rad/s

$\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$

Si vuole imporre la velocità angolare $\hat{\Omega}$ intorno a $\bar{i}$ di 1 rad/s.

Posso tenere $\bar{i}$ e $\bar{j}$ ($e\,\bar{k}$) solidali con "manico"



$\bar{K}_G = I_x \omega_x \bar{i} + I_y \omega_y \bar{j} + I_z \omega_z \bar{k}$

$\bar{M}_{iG} = -\frac{d\bar{K}_G}{dt}$

$\frac{d\bar{K}_G}{dt} = \cancel{I_x \omega_x \cdot 0} + \cancel{I_y \cdot 0 \cdot \Omega \bar{k}} + I_z \omega_z \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} =$

$= -I_z \omega_z \Omega \bar{j}$

$\bar{\omega}_x = \omega_x \bar{i}$

$\bar{\omega}_y = \omega_y \bar{j} = 0$

$\bar{\omega}_z = \omega_z \bar{k}$

$M_{iG} = I_z \omega_z \Omega \bar{j}$

$\frac{\partial \bar{i}}{\partial t} = \bar{\Omega} \wedge \bar{i} = \Omega \bar{i} \wedge \bar{i} = 0$

$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t} = \bar{\Omega} \wedge \bar{j} = \Omega \bar{k}$

$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} = \bar{\Omega} \wedge \bar{k} = -\Omega \bar{j}$

I_z = mom. d'in. polare del disco $= \frac{1}{2} m R^2$

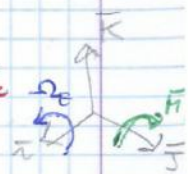
$I_x = I_y$ sarebbero $= \frac{1}{4} m R^2$

$M_{iG} = 5{,}625 \cdot 10^{-3} \cdot 1800 \frac{2\pi}{60} \cdot 1 \,\bar{j} = 1{,}06$ Nm $\bar{j}$

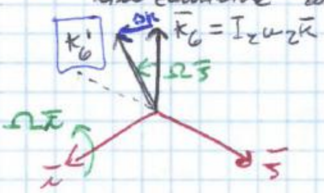
QUESTO È IL MOMENTO CHE LA SMERIGLIATRICE DÀ ALLA MIA MANO.

ALLORA IL MOMENTO ESTERNO CHE CHE DEVO AVERE PER EQUILIBRARE L'INERZIA È: $M_{ESTERNO} = -1{,}06$ Nm $\bar{j}$

Devo dare un ~~altro~~ momento ~~lungo~~ intorno a $\bar{j}$ per poter ruotare lungo $\bar{i}$. È un effetto giroscopico.



Accade perché: inizialmente abbiamo un momento della quantità di moto lungo k

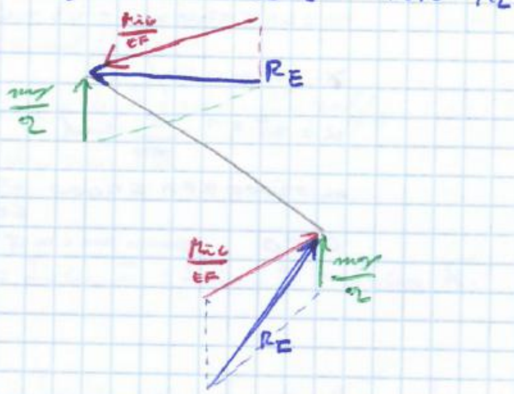


$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{K}_G}{\Delta t} = \frac{d\bar{K}_G}{dt}$

Il mom. di inerzia risultante dovuto alla variazione del momento di quantità di moto

Il disegno finale perciò sarà:

Le reazioni ruotano: DOPO π/2

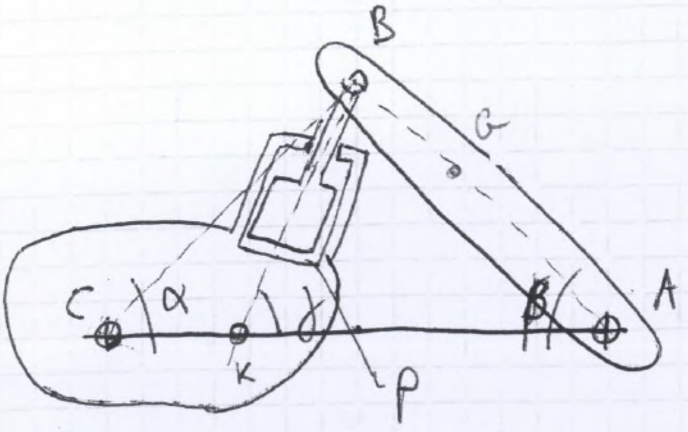


BLOCCO 3: ATTRITO

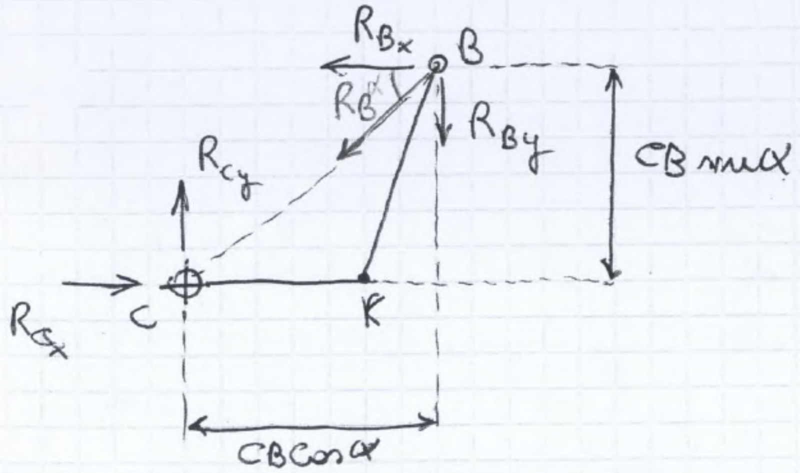
LEZ 2/04 (A+B)
SALTATE PER LAUREA ZANE
CORRISPONDONO A:
- LIBRO P (93-99)
- FOTOCOPIA ES. CORRADO

→ ESERCIZIO DI STATICA ⇒ SOLLEVATORE IDRAULICO

(pg 91 n° 2.19)

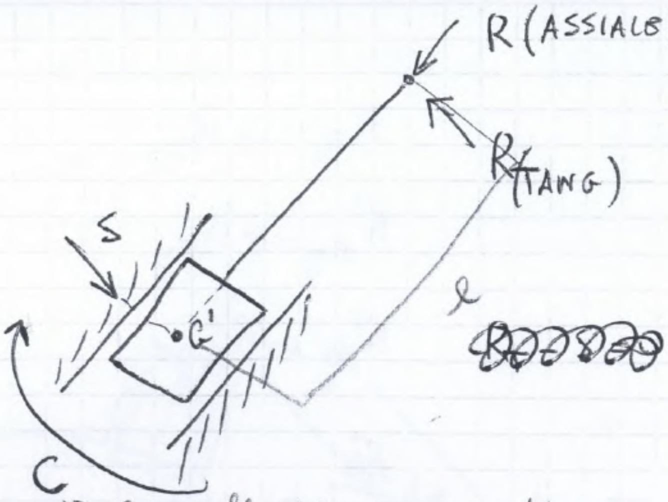


- pressione dell'olio idraulico $= p$?
- A e C cerniere fisse
- $\alpha = \beta = 30°$
- $BA = 4\ m \rightarrow BC = BA$
- $BG = 2{,}5\ m$
- $P = 2000\ N$
- $d_{pistone} = 0{,}2\ m = 200\ mm$



$\circlearrowleft C \quad R_{Bx} \cdot CB \sin\alpha - R_{By} \cdot CB \cos\alpha = 0 \rightarrow \frac{R_{By}}{R_{Bx}} = \tan\alpha$

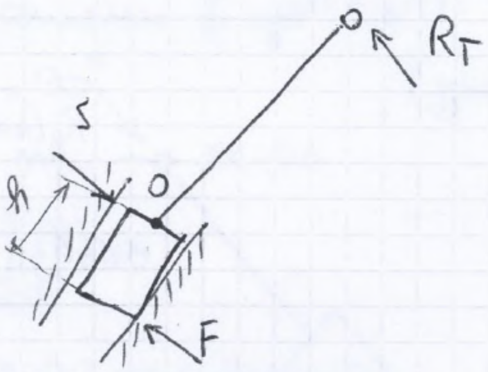
$R_{Bx} = R_B \cos\alpha \ ; \quad R_{By} = R_B \sin\alpha$



→ momento affinché sia in equilibrio

G') $R_T \cdot l - C = 0$

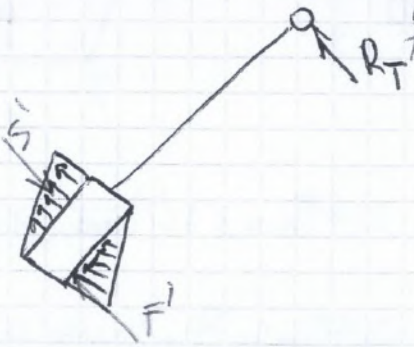
↖) $R_T - S = 0$



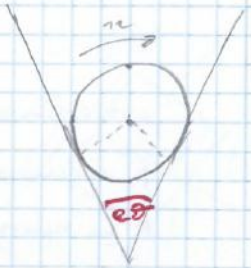
O) $R_T\left(l - \frac{h}{2}\right) - F \cdot h = 0$

↖) $R_T - S + F = 0$

baricentro delle pressioni è ai $\frac{2}{3}$ dell'altezza del triangolo



CUSCINETTO A "V" (il cuscinetto della spiedina, è un po' rudimentale)



$d = 30 \cdot 10^{-3}\ m$

$n = 100$ giri/min $= 100\ \frac{2\pi}{60}$ rad/s

$\theta = 30°$

$P = 100\ kg_{forza} = 981\ N$

$\rho = 0{,}2\ m$ RAGGIO D'INERZIA

$f = 0{,}25$

- COPPIA C_m NECESSARIA PER FAR RUOTARE A V=COST IL SISTEMA?
- Q DISSIPATA NELL'UNITÀ DI TEMPO? LA VOGLIO IN $\left[\frac{Kcal}{h}\right]$
- È NECESSARIO PER ARRESTO SE TOL C_m

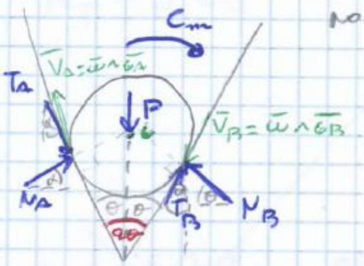
IN GENERALE SI DICE CHE $I = m\rho^2$

$\Downarrow$

NEL MIO CASO: $\rho^2 = \frac{1}{2}R^2$

$\rho = \frac{R}{\sqrt{2}}$

CORPO LIBERO



NO INERZIA: V = COST

$\uparrow\quad T_B\cos\theta + N_B \sin\theta + N_A \sin\theta - T_A\cos\theta - P = 0$

$\rightarrow\quad N_A\cos\theta + T_A\sin\theta - N_B\cos\theta + T_B\sin\theta = 0$

$G)\quad C_m - T_A\frac{d}{2} - T_B\frac{d}{2} = 0 \qquad$ NB: $\ddot\theta = 0$

dato che abbiamo moto relativo tra le superfici, posso scrivere:

$T = fN \implies T_A = fN_A\ ;\ T_B = fN_B$

S EQ 3 INC.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{f}(T_A - T_B)\cos\theta + (T_A + T_B)\sin\theta = 0\\&(T_B - T_A)\cos\theta + \frac{1}{f}(T_A + T_B)\sin\theta - P = 0\end{aligned}\right\}\ \text{CERCO } T_A + T_B$$

VIENE POI CHE:

$$(T_A + T_B)\left(\frac{\sin\theta}{f} + f\sin\theta\right) = f \implies (T_A + T_B) = \frac{P\cdot f}{\sin\theta + f^2\sin\theta}$$

$$G)\quad C_m = \frac{d}{2}(T_A + T_B) = \frac{d}{2}\,\frac{P\cdot f}{\sin\theta + f^2\sin\theta} = \frac{30\cdot 10^{-3}\cdot 981\cdot 0{,}25}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(1 + 0{,}25^2)} = 6{,}929\ Nm$$

$$Q = \frac{Kcal}{h} = W\left[\frac{J}{s}\right]\cdot \frac{3600}{4186}$$

1 Kcal = 4187 J

1 h = 3600 s

$$\frac{J}{s} = W = C_m\cdot\omega = 6{,}929\ Nm \cdot 100\cdot\frac{2\pi}{60}\ \text{rad/s} = 72{,}545\ W$$

$$Q = 72{,}545\cdot\frac{3600}{4186} = 62{,}36\left[\frac{Kcal}{h}\right]$$

$m V_0 \cdot \underset{OG}{h} = I_G \omega + m \boxed{V'} h$ DOPO L'URTO

ma.. $V' = \omega h$ perché è solo rotazione rispetto a O.

$\Rightarrow m V_0 h = m \rho^2 \omega + m \omega h^2 \qquad \omega = \frac{V_0 h}{\rho^2 + h^2} \qquad V' = \frac{V_0 h^2}{\rho^2 + h^2}$

Ora verifichiamo l'energia tra prima e dopo l'urto.

$$E_{PERSA} = \underbrace{\frac{1}{2} m V_0^2}_{E_{INIZIALE}} - \frac{1}{2}\left[m V'^2 + I_G \omega^2\right] \Rightarrow \frac{1}{2} m V_0^2 \left[1 - \frac{h^2}{h^2 + \rho^2}\right]$$

NON DOVREI USARE I RISPETTO A O?

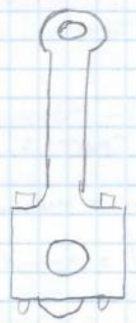
CIOE' $I_O = I_G + m h^2$

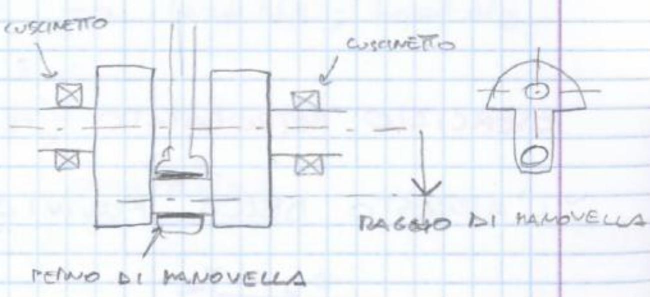
7/04/14

ATTRITO NEI PERNI

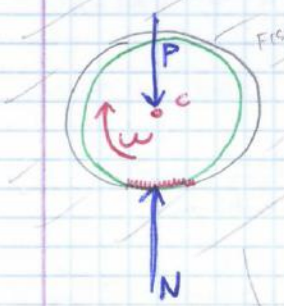
E' l'attrito di tipo bronzina.

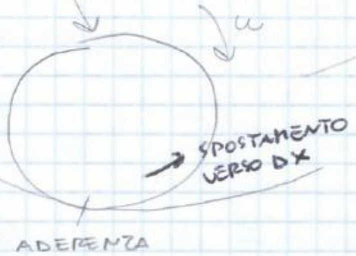
Ad esempio negli alberi a gomito:



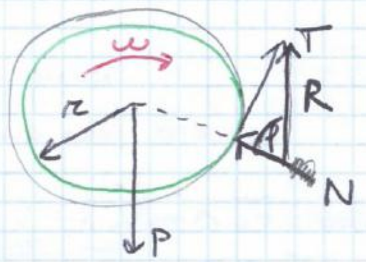


PERNO - BOCCOLA





SE C'E' ADERENZA



N, T sono le forze che la boccola trasmette al perno.

R è uguale e contraria a P: la deve essere per l'equilibrio!

φ è di quanto si inclina R rispetto alla N.

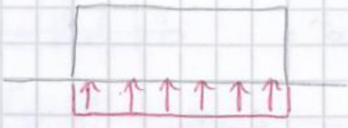
• COMPONENTI MECCANICHE AD ATTRITO

- FRENI — FUNZIONALE
- FRIZIONI
- CINGHIE
- NASTRI

→ IPOTESI SU TIPO DI CONTATTO

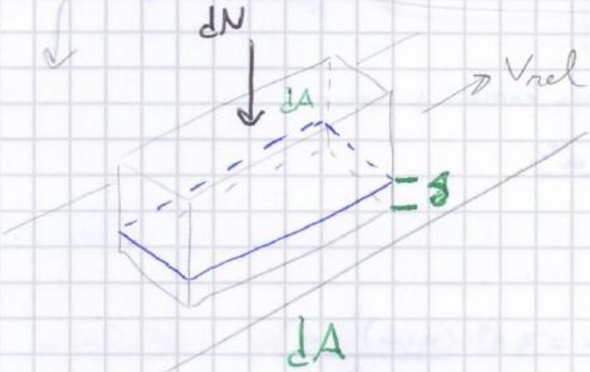
(1) PRESSIONE COSTANTE

(2) PRESSIONE FUNZIONE DEL CONSUMO



IPOTESI DEL CONSUMO DI 'RAY

$L_{attrito} \propto$ QUANTITA' DI MATERIALE ASPORTATO



$$\underbrace{\delta\, dA}_{\text{Volume materiale}} = \underbrace{k\, p\, dA \cdot f\, V_{rel}}_{\text{Lavoro forza di attrito nell'unità di tempo}}$$

$$\boxed{p = \frac{\delta}{k f V_{rel}}}$$

Se il sistema è TIPO "PATTINO" => $V_{rel} = c$

$p = k'\delta$ → DISTRIBUZIONE DI PRESSIONI SULLA SUPERFICIE DEL PATTINO

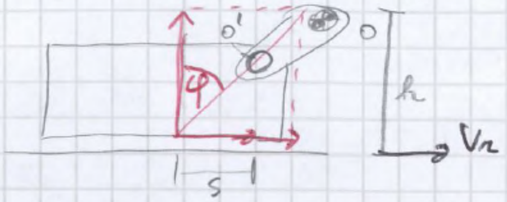
VEDIAMO IL TIPO DI CONSUMO PER RISALIRE ALLA DISTRIBUZ. DI PRESSIONI

- FRENI A PATTINO → ACCOSTAMENTO RIGIDO / ACCOSTAMENTO LIBERO
- FRENI A DISCO
- FRENI A NASTRO
- FRENI A TAMBURO (ceppi)

- FRENI A PATTINO AD ACCOSTAMENTO LIBERO

NB: se l'accostamento è rigido, cioè ha un solo grado di libertà, devo andare a vedere il diagramma delle pressioni.

Se l'accostamento è libero io so già il verso della reazione



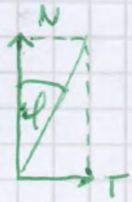
Quando avete un accostamento con 2 gradi di libertà la reazione dovrà passare per la cerniera

$\circlearrowright O)$ $C_{ESTERNA} - Rd = 0$

$s = h \cdot Tg\,\varphi$

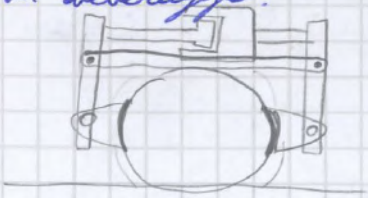
$R \sin\varphi = T$

$R \cos\varphi = N$



- FRENI A TAMBURO (CEPPI) ESTERNI

Ci sono solo nei vecchi carri ferroviari: i ceppi agiscono sulla parte liscia della ruota del treno. I ceppi si avvicinano con un leveraggio.



$I_A = \frac{2}{4} m_r \rho^2 \neq 2 m_r \frac{R^2}{2}$ perchè ρ è diverso da $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Vuol dire che se ti danno il raggio d'inerzia, tu devi usare quello per calcolare I. Se non ti danno nulla allora usi $\rho = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

PERCHÈ LE RUOTE ANTERIORI SONO 2!

Analizza D.C.L. di tutto il sistema:

$\downarrow)\ mg - N_A - N_P = 0$

$\leftarrow)\ T_P - T_A - m\ddot{x} = 0$

$A\circlearrowleft\ N_P \cdot p - mg\, x_G - m\ddot{x}\, z_G - I_A \ddot{\theta}_A - I_P \ddot{\theta}_P = 0$

$T_P = f_A N_P$ ← ci è detto che si vuole la coppia massima, la condizione limite.

$\ddot{x} = \frac{D}{2} \ddot{\theta}_P$ ← dato che siamo in aderenza (TESTO)

Scrivo l'eq. dei momenti per un solo assale (quello posteriore, con coppia C_M):

$C_P\circlearrowleft\ C_M - I_P \ddot{\theta}_P - T_P \cdot \frac{D}{2} = 0$

Scrivo quello dell'assale anteriore:

$C_A\circlearrowleft\ T_A \frac{D}{2} - I_A \ddot{\theta}_A = 0$

HYPOTIZZO ADERENZA RUOTE ANTERIORI: $\ddot{x} = \frac{D}{2} \ddot{\theta}_A$

8 EQ. - 8 INC.

Quindi

- $T_A = \frac{2 I_A}{D} \cdot \ddot{\theta}_A$

$T_P = T_A + m\ddot{x} = \frac{2I}{D} \ddot{\theta}_A + m\ddot{x}$

- $\ddot{\theta}_A = \frac{\ddot{x}}{D} \cdot 2$

$I_A = \frac{2}{4} m_r \rho^2 \neq 2 m_r \frac{R^2}{2}$ perché ρ è diverso da $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Vuol dire che se ti danno il raggio d'inerzia, tu devi usare quello per calcolare I. Se non ti danno nulla allora usi $\rho = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

PERCHÉ LE RUOTE ANTERIORI SONO 2!

Analizzo D.C.L. di tutto il sistema:

$\downarrow)\quad mg - N_A - N_P = 0$

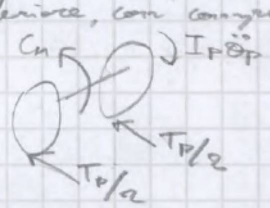
$\leftarrow)\quad T_P - T_A - m\ddot{x} = 0$

$A\circlearrowleft)\quad N_P \cdot p - mg\, x_G - m\ddot{x}\, z_G - I_A \ddot{\theta}_A - I_P \ddot{\theta}_P = 0$

$T_P = f_A N_P$ ← ci è detto che si vuole la coppia massima, la condizione limite.

$\ddot{x} = \frac{D}{2}\ddot{\theta}_P$ ← dato che siamo in aderenza (TESTO)

Scrivo l'eq. dei momenti per un solo assale (quello posteriore, così compare C_M)



$C_P\circlearrowleft)\quad C_M - I_P \ddot{\theta}_P - T_P \cdot \frac{D}{2} = 0$

Scrivo quello dell'assale anteriore:

$C_A\circlearrowleft)\quad T_A \frac{D}{2} - I_A \ddot{\theta}_A = 0$

HYPOTIZZO ADERENZA RUOTE ANTERIORI: $\ddot{x} = \frac{D}{2}\ddot{\theta}_A$

8 EQ. – 8 INC.

Risolvo

- $T_A = \frac{2 I_A}{D} \cdot \ddot{\theta}_A$

$T_P = T_A + m\ddot{x} = \frac{2I}{D}\ddot{\theta}_A + m\ddot{x}$

- $\ddot{\theta}_A = \frac{\ddot{x}}{D} \cdot 2$

$$T = N \frac{2(\omega+\rho)}{d} \cdot \quad = 22,05\,N$$

$$N = \frac{mg \cdot b}{(a+\alpha+b) - \frac{2h(\omega+\rho)}{d}} = 740,7\,N$$

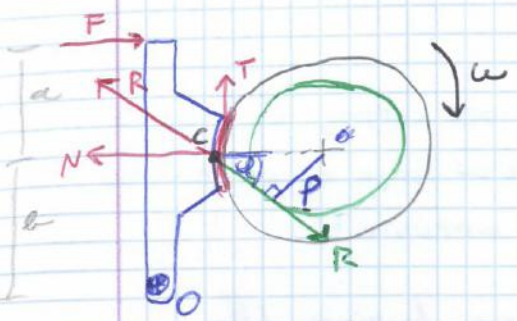
$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} F_{\sin\beta} - T = 0 \\ F_{\cos\beta} = mg - N \end{array}\right\} \quad \tan\beta = \frac{T}{mg-N} = 0,0496 \implies \boxed{\beta = 2,84°}$$

$\Downarrow$

$$F = \sqrt{T^2 + (mg-N)^2} = \boxed{444,6\,N}$$

E se la rotazione del tamburo è opposta?



$O \circlearrowright \; F(a+b) - Nb + hT = 0$

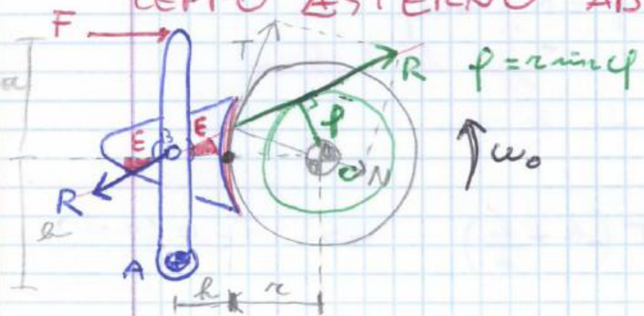
$$\Rightarrow \boxed{T = F\,\frac{(a+b)}{\frac{b}{f}+h}}$$

CEPPO SVOLGENTE: per nessun valore di h ho frenata massima

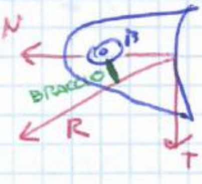
IL CEPPO AVVOLGENTE FRENA DI PIU'

=> Nell'auto io monto su una ruota un ceppo in un senso, sull'altra nell'altro senso. Così ho tanta frenata sia in retromarcia che in direzione di marcia. Nella moto li monto entrambi avvolgenti così freno ancora di più.

CEPPO ESTERNO AD ACCOSTAMENTO LIBERO



Il modello non è più questo perché si creerebbe così un momento non nullo che farebbe ruotare il ceppo.

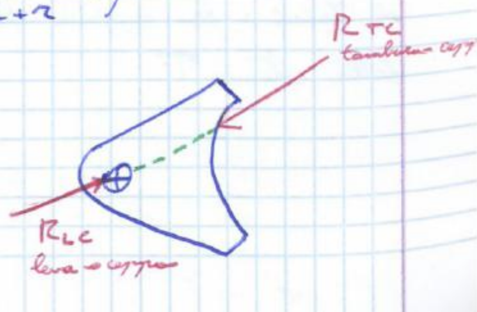


Allora, per avere momento risultante nullo, devo avere R passante per B.

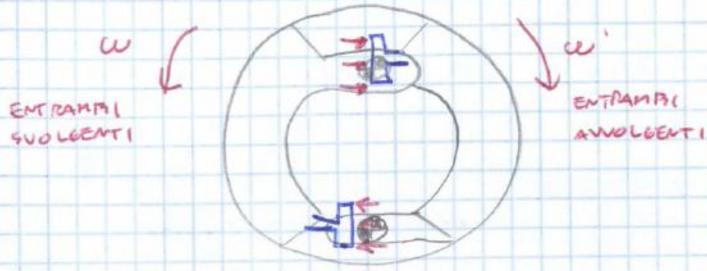
$BO = h + r$ $\qquad \varepsilon = \sin^{-1}\left(\frac{\rho}{h+r}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{r \sin\varphi}{h+r}\right)$

Equazione di rotazione della leva:

$A \circlearrowright \; F(a+b) - R\cos\varepsilon \cdot b = 0$

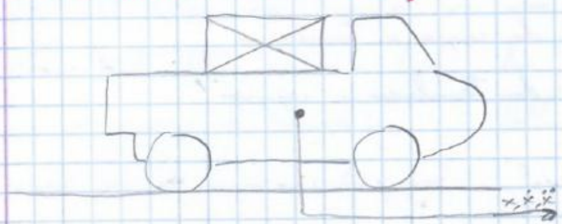


Ceppi interni entrambi avvolgenti, possibile? sì



3/04/14 B

ES: CAMION IN FRENATA)



DECELERAZIONE: $3\ m/s^2 \rightarrow \ddot{x} = -3\ m/s^2$

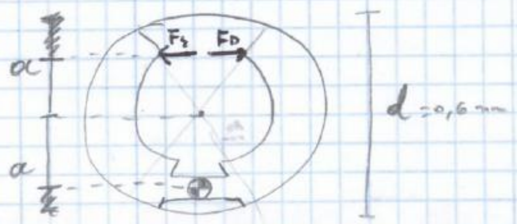
$V_0 = 50\ km/h = 13,8\ m/s$

$M = 1600\ kg$

$m = 400\ kg$

$f = 0,25$ TAMBURO-CEPPO $\quad a = 0,2\ m$

$D = 0,8\ m \quad d = 0,6\ m$



$F = F_D = F_S$

TEMPO DI ARRESTO? SPAZIO DI ARRESTO?

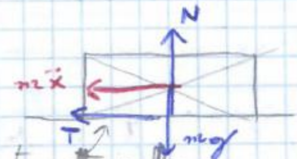
$f_{a\,min}$ TRA CASSA E PIANALE?

F DA APPLICARE?

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} \qquad \int_{V_0}^{0} d\dot{x} = \int_0^t \ddot{x}\, dt \qquad \ddot{x}\, t = 0 - V_0 \qquad \boxed{t = -\frac{V_0}{\ddot{x}} = -\frac{13,8}{-3} = 4,63\ s}$$

$$\boxed{x_f = \underbrace{\cancel{x_0}}_{=0} + V_0 t + \frac{1}{2}\ddot{x} t^2 = 13,8 \cdot 4,63 + \frac{1}{2}(-3)(4,63)^2 = 32,15\ m}$$

Disegno il pianale:



$\leftarrow\ m\ddot{x} + T = 0 \qquad T = 400 \cdot 3 = 1200\ N$

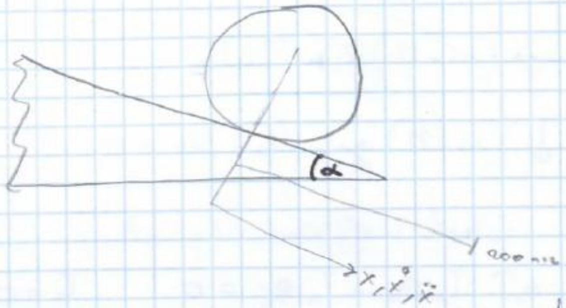
$\downarrow\ mg - N = 0 \qquad N = 3924\ N$

Il pianale trasmetterà alla cassa una forza che tenderà a tenerla ferma

$T \leq f_a N \qquad f_a \geq \frac{T}{N}$

$$\boxed{f_{a\,min} = \frac{1200\ N}{3924\ N} = 0,306}$$

ES RULLO SU PIANO INCLINATO)



$\alpha = 10°$

$\alpha = 45°$

$l = 200$ m

$I = m\frac{R^2}{2} = m\frac{d^2}{8}$

$d = 1$ m

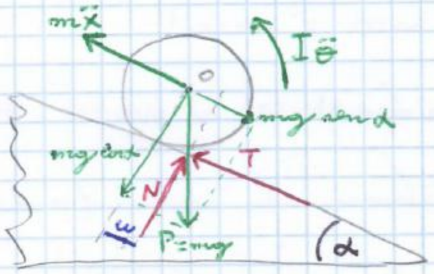
$P = 10'000\ kg_f = 98'000$ N

$f_a = 0,2$

$f = 0,15$

$u = 0,02$ m

$n°$ GIRI EFFETTUATI DOPO 200 m ?



• $N - mg\cos\alpha = 0$

• $mg\,sen\,\alpha - m\ddot{x} - T = 0$

IPOTESI ROTOLAM. PURO: • $\ddot{x} = \frac{d}{2}\ddot{\theta}$ → DOVRÒ VERIFICARE $T \le f_a N$

$$\ddot{x} = \frac{mg\,sen\,\alpha\,\frac{d}{2} - mg\cos\alpha\cdot u}{\frac{2I}{d} + m\frac{d}{2}} = \frac{4}{3}\frac{g}{d}\left(sen\,\alpha\,\frac{d}{2} - \cos\alpha\cdot u\right)$$

→ $\alpha = 10°$ → $\ddot{x} = 0,878\ m/s^2$ $T = 8'255$ N $N = 96'620$ N $\frac{T}{N} = 0,085 < f_a$ ok!

$n°$ GIRI $= \frac{l}{\pi d} = 63,66$ è così semplice perchè rotola senza strisciare

→ $\alpha = 45°$ → $\ddot{x} = 4,44\ m/s^2$ $T = 29'372$ N $N = 69'367$ N $\frac{T}{N} = 0,36 > f_a = 0,2$ NON ROTOLA SENZA STRISCIARE

=> $\ddot{x} = \frac{d}{2}\ddot{\theta}$ NON È VALIDA la sostituisco con $\boxed{T = fN}$

$$\Rightarrow \begin{cases} N - mg\cos\alpha = 0 \\ mg\,sen\,\alpha - T - m\ddot{x} = 0 \\ I\ddot{\theta} + Nu - T\frac{d}{2} = 0 \\ T = fN \end{cases}$$

$\ddot{x} = g(sen\,\alpha - f\cos\alpha) = 5,896\ m/s^2$

=> Che perciò non è uguale a $\frac{D}{2}\ddot{\theta}$ perchè c'è strisciamento.

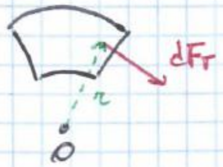
Dalla 3 eq. del movimento ottengo $\ddot{\theta}$:

$\ddot{\theta} = 3,092\ rad/s^2$

$x = \overset{=0}{x_0} + \overset{=0}{v_0}t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$ → $t = \sqrt{\frac{2x}{\ddot{x}}} = \frac{400}{5,896} = 8,2371$

$\theta = \overset{=0}{\theta_0} + \overset{=0}{\dot{\theta}_0}t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2$ → $\theta = 104,54$ rad GIRI $= \frac{\theta}{2\pi} = 16,48$ giri

Ora cerchiamo il momento frenante $M_{frenante}$:



$$dM = dF_T \cdot r$$

$$dF_T = p\, dA \cdot f \longrightarrow dF_T = dN \cdot f$$

$$M_{frenante} = \int_{r_i}^{r_e}\int_{\theta_1}^{\theta_2} p f\, dA\, r = \int_{r_i}^{r_e}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{k'}{r} f\, r\, r\, dr\, d\theta = k' f\, \frac{r_e^2 - r_i^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)$$

Lo posso riscrivere come:

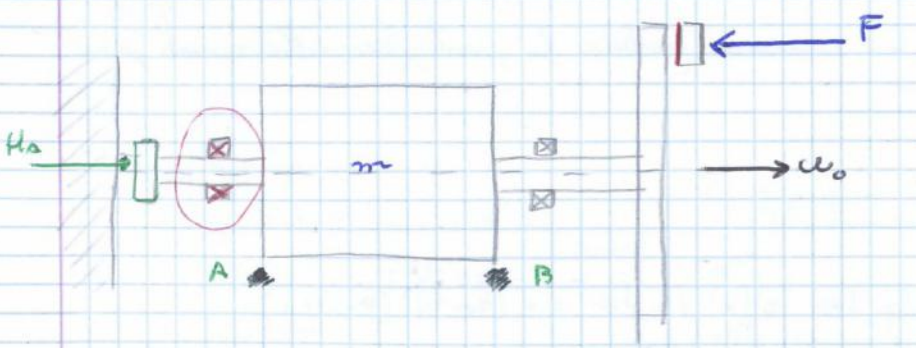
$$M_f = k' f\, \frac{r_e + r_i}{2}(r_e - r_i)(\theta_2 - \theta_1) = N f\, r_{media}$$

Questo è il calcolo dell'effetto frenante su una sola pastiglia. Se io però pinzo con due pastiglie, allora avrò M_f doppio!

$$\boxed{M_f = 2 N f\, r_m}$$

ANTICIPO: dal punto di vista analitico i freni a disco funzionano esattamente come le frizioni.

ES: MOTORE RUOTANTE CON DISCO SUL SUO ASSE



Eq. ALLA ROTAZIONE DEL SISTEMA?

$t_{ARRESTO} = 10\ s$

$\omega_0 = 1500\ RPM$

$M = 100\ kg$

$\rho = 0{,}3\ m$

$r_i = 15\ cm$

$r_e = 20\ cm$

$f = 0{,}3$

Massa di tutto il sistema, tant'è che mi hanno dato ρ come raggio di ... di tutto il sistema