NUMERO: 1107

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Masini

MATERIA: Geometria

Prof. Caire

GEOMETRIA

4/03/13

TUTTI I GIORNI
11.30 - 14.30 aula
BORSISTI × CONSULENZA

VETTORI NELLO SPAZIO

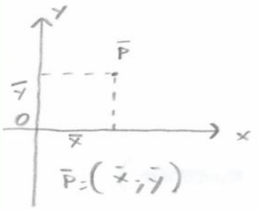
Un vettore si rappresenta con una freccia e per definirlo bene si dice che è un segmento orientato.

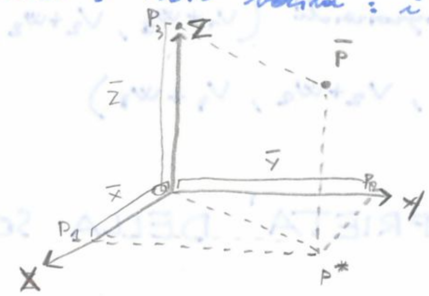
I vettori che utilizzeremo all'inizio sono tutti applicati in O, quindi hanno tutti un vo... ...linato.

La lunghezza, o modulo, del vettore si indica con due sbarre per lato $\|\vec{v}\|$, per differenziarlo dal valore assoluto dei numeri reali.

Per poter lavorare con i vettori dobbiamo fissare un sistema di riferimento. Piano cartesiano? Non basta: i vettori sono nello SPAZIO.

PIANO CARTESIANO





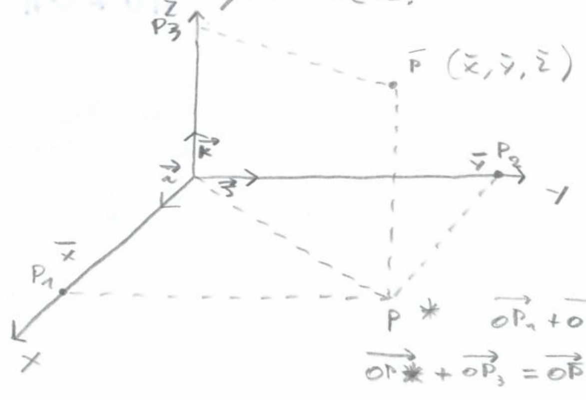
SISTEMA DI RIF. CARTESIANO
- ORTOGONALE (rette tutte perpendicolari tra loro)
- MONOMETRICO (l'unità di misura è uguale per tutte le dimensioni)
- BIUNIVOCO (ad ogni numero è associato in modo biunivoco una terna di numeri (uno per x, uno per y, uno per z) e viceversa)

COMPONENTI DEL VETTORE $\vec{OP}$: sono le tre coordinate del punto P

SOMMA DI DUE VETTORI: è il vettore che è la diagonale del parallelogramma i cui lati sono i due vettori di partenza.

$\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}$
$= x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{OP_1} = \vec{x i}$ $\quad \vec{OP_2} = y\vec{i}$.



$\vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \vec{OP^*}$

$\vec{OP^*} + \vec{OP_3} = \vec{OP}$

4/03/13 B

VERSORE: un qualunque vettore di modulo 1

versore di $\vec{v} = \frac{1}{\|v\|} \cdot \vec{v}$

PRODOTTO PER UNO SCALARE

Dato il vettore $\vec{v}$ e lo scalare $a \in \mathbb{R}$, il prodotto di a per $\vec{v}$ è il vettore $a\vec{v}$ avente stessa direzione di $\vec{v}$, verso uguale (se $a>0$) o opposto (se $a<0$) e modulo $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO (ALTRE 4)

- $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v}) = b(a\vec{v})$
- $1\vec{v} = \vec{v}$, $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$
- $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
- $a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

NB: quando io moltiplico un vettore per qualsiasi numero a, io so già che il vettore risultante avrà - in ogni caso - la stessa direzione del vettore di partenza.

ESERCIZIO

$\vec{v} = (1;2;-2)$ versore di $\vec{v}$?

$\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = 3$ $\quad$ vers $\vec{v} = \frac{1}{3}(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}) = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$

I vettori che hanno la direzione di $\vec{v}$ sono tutti del tipo $\boxed{\vec{w} = a\vec{v}}$ $a \in \mathbb{R}$

Trovare a | $\|w\| = 6$. $\quad w = a v = a(1;2;-2) = (a;2a;-2a)$

$\|w\| = \sqrt{a^2+(2a)^2+(-2a)^2} = 6 \quad a^2+4a^2+4a^2 = 36 \quad 9a^2 = 36 \quad a^2 = 4 \quad a = \pm 2$

NB: I VETTORI CHE NE RISULTANO SONO 2!!

PRODOTTO SCALARE

Il prod. scalare tra due vettori e' UN NUMERO

$$\boxed{v \circ w} = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(v \hat{} w)$$

$v \hat{} w$ e' l'angolo tra i due vettori, quello minore di π.

Tra zero e π il coseno puo' essere sia positivo che negativo

Il prod. scalare tra 2 vettori puo' essere sia positivo che negativo, dipende dall'angolo

CONDIZIONE DI ORTOGONALITA'

Due vettori v e w sono ortogonali se e solo se $v \cdot w = 0$

ESEMPIO

$\vec{u}$ comp $(1;2;3) \rightarrow \vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v}$ comp $(-1;1;2) \rightarrow \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

PROD. SCALARE: $u \circ v = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \circ (-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$ e l'angolo? NON CE L'HO MA USO UN TRUCCO ALGEBRICO

$= \vec{i} \circ (-\vec{i}) + \vec{i} \circ \vec{j} + \cancel{\vec{i} \circ 2\vec{k}} + \cancel{2\vec{j} \circ (-\vec{i})} + 2\vec{j} \circ \vec{j} + \cancel{2\vec{j} \circ 2\vec{k}} +$

$+ \cancel{3\vec{k} \circ (-\vec{i})} + \cancel{3\vec{k} \circ \vec{j}} + 3k \circ 2\vec{k}$ = CIO' CHE HO TOLTO E' PERCHE' ORTOGONALI

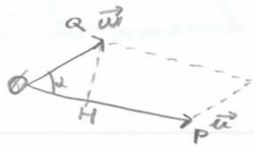
$= -1 + 2 + 6 = 7 \qquad \boxed{\vec{u} \circ \vec{v} = 7}$

PROPRIETA' DEL PROD. SCALARE

- Per ogni vettore v si ha: $v \cdot v = \|v\|^2$
- Dati i vettori u, v, w e lo scalare $a \in \mathbb{R}$ si ha
  1) $v \cdot w = w \cdot v$
  2) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
  3) $a(u \cdot v) = (au) \cdot v = u \cdot (av)$
- Se v ha componenti $(v_1; v_2; v_3)$ e w ha componenti $(w_1; w_2; w_3)$ allora
  $v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$
- Se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ allora l'angolo $(v \hat{} w)$ ha
  $\cos(v \hat{} w) = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) / \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)}$

5/03/2013

IL MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE È UGUALE ALL'AREA DEL PARALLELOGRAMMA CHE HA PER LATI I VETTORI v, w.



$|QH| = |OQ| \sin\alpha$

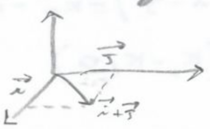
$= \|\vec{w}\| \sin\alpha$

AREA PARALLELOGRAMMA : $\|v\| \cdot (\|w\| \sin\alpha)$

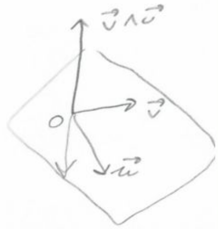
ESEMPIO (SLIDE 14/16)

1) Trovare un versore ortogonale alle seguenti coppie di vettori:

a) i, $i + j$



$\vec{i} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = \cancel{\vec{i} \wedge \vec{i}} + \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$



b) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| - 1 \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| + 1 \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\text{vers} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \|\vec{v} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

PROPRIETÀ DEL PROD. VETTORIALE

1) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

2) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

NON ASSOC. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

3) $\alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v})$

NB: CASI PARTICOLARI

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u}$ È FALSA IN GEN

- È VERA QUANDO $\vec{u}$ oppure $\vec{v}$ è n
  $(\vec{u} \wedge 0) = (0 \wedge \vec{u})$
- È VERA QUANDO $\vec{u}$ e $\vec{v}$ SONO PARALLE
  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{v} \wedge \vec{u})$
  $\downarrow 0 \qquad \downarrow 0$

PRODOTTO MISTO

$$\vec{u} \circ (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

RICORDA: NON FUNZIONA SE FAI $\vec{u} \wedge (\vec{v} \circ \vec{w})$, IL RISULTATO È UN NUMERO E NON UN VETTORE

Si ottiene dal determinante della matrice
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

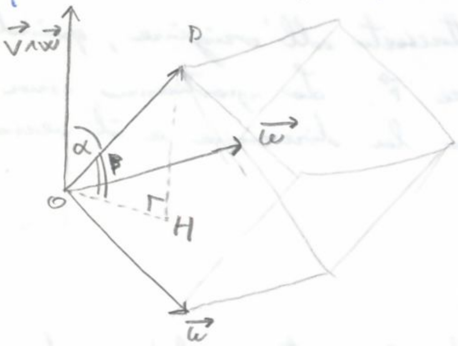
Il prodotto misto si annulla QUANDO I 3 VETTORI SONO COMPLANARI

CONDIZIONI DI COMPLANARITA'

- Tre vettori giacciono nello stesso piano (per O) $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \circ (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$
- Tre vettori giacciono nello stesso piano (per O) $\Leftrightarrow$ UNO DI ESSI È COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI DUE, CIOÈ SE ESISTONO $a, b \in \mathbb{R}$ TALI CHE $\boxed{u = av + bw}$

area parallelogr.

$$\left|\vec{u} \circ (\vec{v} \wedge \vec{w})\right| = \left|\, \|\vec{u}\| \circ \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \cos\alpha \,\right| \qquad \alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v} \wedge \vec{w}})$$



$\cos\alpha = \sin\beta$

ES 3 (I) slide 14/16

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \circ \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a-1) - 0(\dots) + a(-a) = \underline{a - 1 - a^2}$$

ES 3 (II)

$$a - 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0 \quad \nexists\, a$$

ES 3 (III)

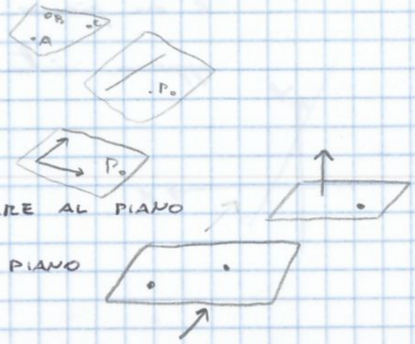
$|a - 1 - a^2| = 4$ Il volume del tetraedro è dato dal modulo del prodotto misto.

$$a - 1 - a^2 = 4 \Rightarrow a^2 - a + 5 = 0$$

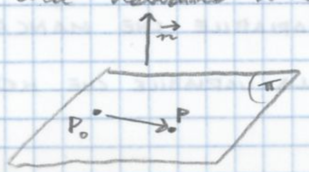
$$a - 1 - a^2 = -4 \Rightarrow a^2 - a - 3 = 0 \quad a = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \begin{cases} \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

PIANI NELLO SPAZIO (MODI X IDENTIFICARLI)

1) 3 PUNTI NON ALLINEATI
2) UNA RETTA E UN PUNTO $P_0 \notin$ retta
3) UN PUNTO P_0 E DUE VETTORI PARALLELI AL PIANO
4) UN PUNTO P_0 E UN VETTORE PERPENDICOLARE AL PIANO
5) DUE PUNTI E UN VETTORE PARALLELO AL PIANO



Ora troviamo l'equazione di un piano, partendo dal punto 4) che è il più facile.



$P \in \pi$

NB: $P \in \pi \iff \vec{P_0P} \perp \vec{n} \iff \boxed{\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0}$

$P(x;y;z)$ generico, $\in \pi$

$P_0(x_0;y_0;z_0)$ dato

$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ dato

$\vec{P_0P} = P - P_0 = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$

$\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)$ che deve dare zero

$$(x;y;z) \in \pi \iff ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

posto $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

$$(x;y;z) \in \pi \iff \boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

EQUAZIONE CARTESIANA DI π

EQUAZIONE VETTORIALE DEL PIANO π PASSANTE PER $P_0 = (1;-2;3)$ E ORTOGONALE A $\vec{n} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ $= \boxed{\left[(x-1)\vec{i} + (y+2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}\right] \cdot (3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})}$

$(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$

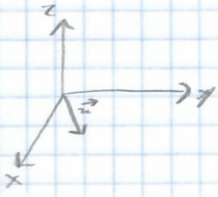
EQ. CARTESIANA DELLO STESSO $= \boxed{3x + y - 2z + 5 = 0}$

NB: se io faccio variare d, che succede? Troverò uno degli infiniti altri piani perpendicolari al nostro vettore $\vec{n}$, i quali sono tutti paralleli tra loro.

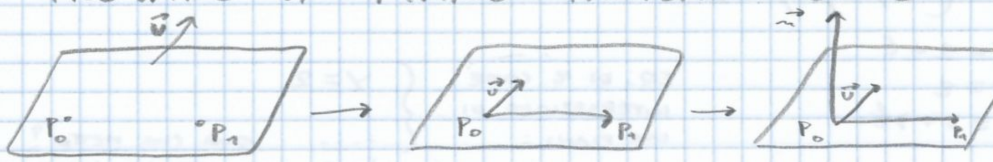
Es: $\pi: 2x + y - z + 1 = 0$

Trovare un punto $P(x;y;z)$ che soddisfa ↑ $P \in \pi$

con π ortogonale a $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ { per $P_0(0;-1;0)$ }



COME TROVARE UN PIANO PARTENDO DA 2 PUNTI E UN VETTORE // PIANO



$\vec n = \vec u \wedge \overrightarrow{(P_0 P_1)}$

ES: $P_0\,(1;1;2)$ $\quad P_1\,(-1;2;5)$ $\quad \overrightarrow{P_0P_1} = (-2;1;3)$

$\vec u = \vec i - \vec k$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) - (y-1) + (z-2) = 0$$

$$\boxed{x-y+z-2=0}$$

11/03/13 B

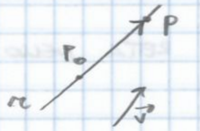
RETTA NELLO SPAZIO (CONDIZIONI)

1) PER 2 PUNTI A, B
2) PER P_0, // $\vec v$ (per P_0, // retta)
3) INTERSEZIONE DI DUE PIANI (non paralleli)

COME TROVARE RETTA PARTENDO DA P_0 e $\vec v$ //

$P_0\,(x_0;y_0;z_0)$

$\vec v = l\vec i + m\vec j + n\vec k$



$P \in r \iff \exists\, k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec v \iff$

$\iff \overrightarrow{P_0P} = t\vec v$

$\boxed{P - P_0 = t\vec v}$ EQ. VETTORIALE DI r

$P - P_0 = (x-x_0)\vec i + (y-y_0)\vec j + (z-z_0)\vec k$

LE COMPONENTI devono essere proporzionali:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}}$$

con $l \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ EQUAZIONI NORMALI FRATTE

oppure:

$$(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0) = (lt;\ mt;\ nt) \qquad \forall\, l, m, n \implies \text{MEGLIO}$$

$$\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \\ z - z_0 = nt \end{cases} \qquad P(x;y;z) \in r \iff \boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}}$$

EQ. PARAMETRICHE DELLA RETTA

(Parametriche perchè c'è il parametro t. Al variare di t, trovo tutti i punti della retta)

ES: retta per $P_0\,(1;-1;2)$, // $\vec v = 2\vec i - \vec j + 3\vec k$

$$\boxed{r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}} \implies \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} & \leftarrow \text{OTTENGO EQ. DI UN PIANO // z (xk z MANCA NELL'EQ.)} \\ \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3} & \leftarrow \text{OTTENGO EQ. DI UN PIANO} \end{cases}$$

$$\implies r = \pi_1 \cap \pi_2 \qquad \boxed{r = \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 3y+z+1=0 \end{cases}}$$

r SCRITTA COME EQ. INTERSEZIONE DI DUE PIANI

$$r: \begin{cases} 4x+5y-3z+6=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$$

Notiamo che la retta esiste: infatti vediamo che il vettore con comp. 4, 5, -3 è perpendicolare al primo piano, il vettore di comp. 3, 2, -1 è perpendicolare al secondo piano. I due vettori non sono paralleli allora i 2 piani si intersecano e la retta esiste.

COME TROVARE UN PUNTO DELLA RETTA:

FISSO UNA VARIABILE E MI RICAVO LE ALTRE DUE

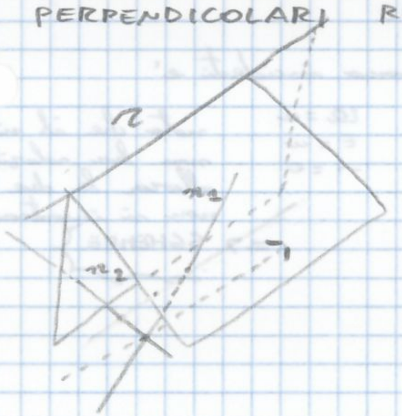
Fisso $x=0$ perché sicuramente appartiene al secondo piano

$$\begin{cases} x=0 \\ 5y-3z+6=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

$$P_0(0;6;12) \in r$$

COME TROVARE LA DIREZIONE DELLA RETTA r

È LA DIREZIONE DEL VETTORE PRODOTTO VETTORIALE TRA I VETTORI PERPENDICOLARI RISPETTIVAMENTE AL PRIMO ED AL SECONDO PIANO



RETTE PARTICOLARI

ASSE x: È PASSANTE PER V (L'ORIGINE) E PARALLELA A $\vec{i}$

$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

EQ. PARAM. EQ. CART.

ASSE y: È PASSANTE PER V (L'ORIGINE) E PARALLELA A $\vec{j}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

EQ. PARAM. EQ. CART.

ASSE z: È PASSANTE PER V (L'ORIGINE) E PARALLELA A $\vec{k}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

EQ. PARAM. EQ. CART.

RETTA // ASSE x (PER $P_0(x_0, y_0, z_0)$)

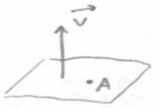
$\vec{r}(1;0;0)$

$$\begin{cases} x=x_0+t \\ y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$$

EQ. PARAM. EQ. CART.

ES (8) 12/03/13

$A(1;-1;2)$ $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$



$\pi: x - y + 3z - 8 = 0$

$d = (-ax_0 - by_0 - cz_0) = (-1 - 1 - 6) = -8$

ES a) (17)

$A(1;-1;2)$ $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

EQ. PARAM. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

EQ. NORMALI FRATTE $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$

EQ. CARTESIANE $\begin{cases} 3x - 3 = z - 2 \\ 3y + 3 = -z + 2 \end{cases}$ $\quad 3x - z - 1 = 0$, $\quad 3y + z + 1 = 0$

NB: le eq. parametriche che trovo non sono quelle e basta per la retta. Ho due gradi di libertà:
- CAMBIO IL PUNTO
- CAMBIO IL VETTORE

Come faccio a trovare altri punti della retta?
Cambio il valore di t nelle eq. parametriche
$t = 1$? $\Rightarrow A_1(2;-2;5)$

NB: STESSA RETTA, DIVERSE EQ

Se io vi do due terne di eq. param. e vi chiedo di dimostrare che sono la stessa retta, devo vedere che i due vettori // alle rette che trovo siano // anche tra loro. $\Rightarrow$ RETTE //. Se poi sostituisco il valore di un punto e vedo che appartiene ad entrambe, allora le due rette coincidono.

ES 1-II (17)

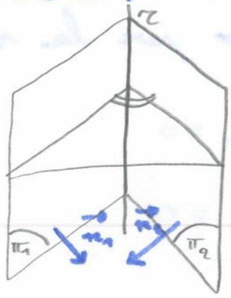
$\pi: ax + by + cz + d = 0$

$r: \begin{cases} 2x - 5y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k}$ par. dir. $r: (3;3;$

PUNTO $(1;1;$

ANGOLI TRA DUE PIANI



Per misurarli traccio un piano ortogonale ai due piani di cui cerco l'angolo.

In questo caso gli angoli sono 4, a due a due uguali

$$(\pi_1 \hat{,} \pi_2) = (\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2)$$

$$\boxed{\cos(\pi_1 \hat{,} \pi_2) = \pm \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \pm \text{vers}\, \vec{n}_1 \cdot \text{vers}\, \vec{n}_2}$$

ES c (23)

$\vec{n}_1 = (0; 1; -1)$

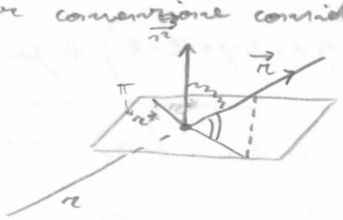
$\vec{n}_2 = (1; 0; -1)$

$$\cos(\pi_1 \hat{;} \pi_2) = \pm \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \pm 1/2$$

$$(\pi_1 \hat{;} \pi_2) = \begin{cases} \pi/3 \\ \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

ANGOLI TRA UNA RETTA E UN PIANO

Bisogna mettersi d'accordo: perché ce ne sono infiniti a seconda di come la guardo (?). Per convenzione considero il minore, cioè quello con la proiezione di r sul piano.



r^* = proiez. ort. di r su π

$$\cos(\vec{n} \hat{,} \vec{r}) = \sin(r \hat{,} r^*)$$

$$(r \hat{,} \pi) = (r \hat{,} r^*)$$

$$\boxed{\sin(r \hat{,} \pi) = \left|\cos(\vec{r} \hat{,} \vec{n})\right| = \pm \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\| \cdot \|\vec{n}\|}}$$

ES b (23)

$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = t+1 \end{cases}$

$\vec{r}(0; -1; 1)$

il piano $\alpha = x + y = 0$

$\vec{n}(1; 1; 0)$

$$\sin(r \hat{,} \alpha) = \left|\cos(\vec{r} \hat{,} \vec{n})\right| = \left|\pm \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right| = \pm 1/2$$

$$(r \hat{,} \alpha) = \pi/6$$

Se però $\lambda = 0$ => non posso dividere tutto per λ perché sarebbe dividere per zero.

Ma se $\lambda = 0$ $\quad \phi_r : \lambda(2x-5y+z-3) + \mu(x+2y-z) = 0$

avrei $\mu(x+2y-z) = 0 \quad x+2y-z = 0$ che è uno dei due piani dell'eq. cartesiana di r, quindi se il piano che mi serve fosse quello allora l'avrei già all'inizio, sostituendo il punto nei due piani dell'eq. cartesiana.

FORMA OMOGENEA : $(\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2)z + (\lambda d_1 + \mu d_2) = 0$ → TROVO TUTTI I PIANI $\in \phi_r$

FORMA ESSENZIALE : $\phi_r : \lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \quad \pi_1 + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda}}_{k}\pi_2 = 0 \quad \pi_1 + k\pi_2 = 0$

→ TROVO TUTTI I PIANI $\in \phi_r$ ECCETTO π_2

PERCHÉ: SE $\cancel{\mu} = 0$ → TROV...

SE $\lambda = 0$ π_1...

Se usate la forma essenziale controllate solo alla fine se π_2 è soluzione dell'esercizio sostituendo.

Vediamo di capire come scrivere equazioni su superfici diverse da un piano — 18/03/1?

FLATLANDIA
ABBOTT
ABELCHI
50 P.

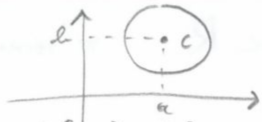
SUPERFICI SFERICHE

Nel piano l'eq. di una sfera è un eq. polinomiale di 2° grado e due variabili:

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

$$C(a;b)$$

$$R=\sqrt{a^2+b^2-c}$$



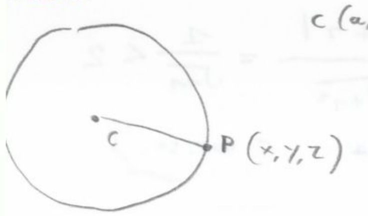
$$d(P,C)=R^2$$

$$\|P-C\|^2=R^2$$

EQ. VETT. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

SFERA:

$C(a,b,c)$, R



$$\boxed{\|P-C\|^2=R^2}$$

EQ. VETTORIALE

EQ. CARTES.

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$$

ES: sup. sferica di centro $C(1;2;-1)$, $R=3$

NB: quando ti danno centro + raggio allora prendo l'eq. cart. scritta più sopra, poi sviluppo e faccio i calcoli:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9 \qquad x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$$

NB: io ti do un eq. e ti dico è una sup. sferica. Non è detto! è una sfera solo se la quantità $a^2+b^2-c\ge 0$, cioè se il R esiste.

- $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+2=0$ $\quad C(1;1;2)$ $\quad R^2=1+1+4-2=4>0 \Rightarrow R=2$
- $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+7=0$ $\quad C(1;1;2)$ $\quad R^2=1+1+4-7=-1<0$ $\quad R\in\mathbb{C}$ NON È SUP. SFERICA
- $x^2+y^2+z^2-2x-2xy-4z+2=0$ NON È SUP. SFERICA: NESSUNA SFERA AVRÀ MAI
  - TERMINI MISTI
  - TERMINI QUADRATI A COEFF. $\neq 1$

Es: $S: x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+2=0$

$\pi: x-3y+z+d=0$

$C(1;1;2) \quad R=\sqrt{\cancel{1}+\cancel{1}+4-\cancel{2}}=2$

$2=\dfrac{\qquad}{\sqrt{1+9+1}}$

(1) trovare d, perché π sia tangente alla sup. sf.

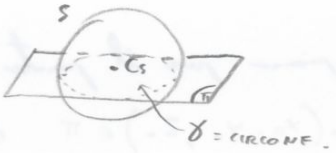
(2) TROVARE P_0

SI FA COME INTERSEZIONE TRA LA RETTA PASSANTE PER C_S, ⊥ AL PIANO CON ~~LA SFERA~~ IL PIANO

Es: Consideriamo di avere il caso in cui il piano π interseca la sup. sf.:

$S: x^2+y^2+z^2-x+z-3=0$

$\pi: x-y-z+2=0$



$\gamma = S \cap \pi$

$\cdot \exists \gamma$?

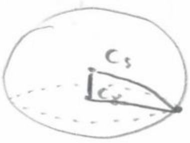
$C_S = \left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$

$R_S = \sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+3} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$d(c;\pi) = \dfrac{\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}+2}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$(d=)\ \sqrt{3} < \frac{\sqrt{14}}{2}\ (=R_S) \quad \Rightarrow \underline{\exists \gamma}$

(2) R_γ: PITAGORA



(1) C_γ?

(2) R_γ?

$R_\gamma^2 = R_S^2 - d^2 = \frac{14}{4} - 3 = \frac{1}{2} \qquad R_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(1) C_γ:

r = retta ⊥ al piano, passante per C_S

$C_\gamma = \pi \cap r$

$$C_\gamma: \begin{cases} r = \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 0 - t \\ z = -\frac{1}{2} - t \end{cases} \\ \pi: x-y-z+2=0 \end{cases}$$

$\pi: \frac{1}{2}+t+t+\frac{1}{2}+t+2=0$

$3t=-3 \quad t=-1$

IL PUNTO C_γ E' QUELLO CHE HA COORD. CHE TROVO SOSTITUENDO T CON -1 NELL'EQ. PAR. DI r:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = +1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad C_\gamma = \left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$$

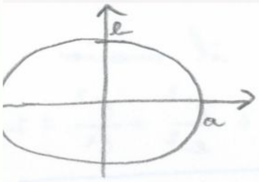
SUPERFICI CONICHE

18/03/13 B

× ELLISSE E IPERBOLE:
FORMA CANONICA =
• assi della conica = assi cartes.
• C ≡ O

Scrivo la forma canonica delle coniche :

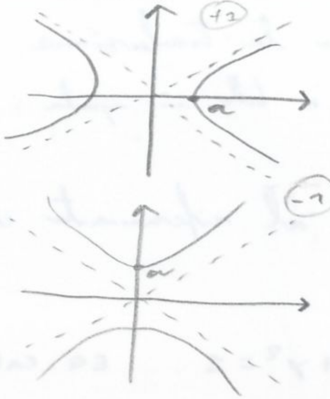
ELLISSE



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=+1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$ ELLISSE IMMAGINARIA
(SOMMA DI QUADRATI = N° NEGATIVO)

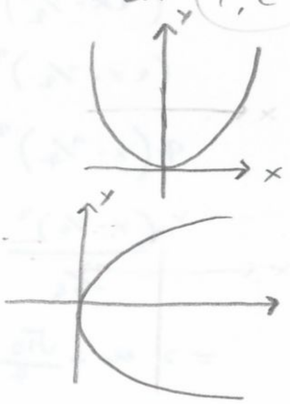
IPERBOLE



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$$

× PARABOLA
FORMA CANONICA =
• asse ≡ un asse coord.
• V ≡ O

PARABOLA F, C

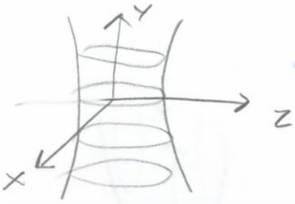


$y=ax^2$

$x=ay^2$

IPERBOLOIDE A UNA FALDA

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



A UNA FALDA: LA LETTERA CHE E' DAVANTI AL MENO E' L'ASSE

Se io faccio:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{b^2}\\ y=k \rightarrow \text{i piani } // \ O_{xz}\end{cases}$$

Le intersezioni sono delle ellissi

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}\\ z=k \rightarrow \text{i piani } // \ O,xy\end{cases}$$

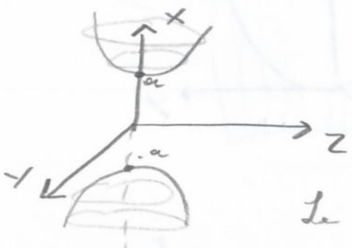
$$\begin{cases}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}\\ x=k \rightarrow \text{i piani } // \ O,yz\end{cases}$$

Le intersezioni sono delle iperboli

IPERBOLOIDE A DUE FALDE

A DUE FALDE: LA LETTERA DAVANTI AL PIU' E' L'ASSE

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Se metto eq. asse x $\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$ e interseco, trovo a e $-a$

$$\begin{cases}x=k \rightarrow \text{i piani } // \ O\,y,z\\ \frac{k^2}{a^2}-1=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\end{cases}$$

con $k \leq -a \vee k \geq a$

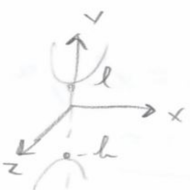
ALTRIMENTI A 1° MEMBRO E' NUMERO NEGATIVO

Le intersezioni danno un'ellisse

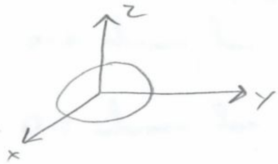
$$\begin{cases}y=k \rightarrow \text{i piani } // \ O,x,z\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{b^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}z=k \rightarrow \text{i piani } // \ O\,x,y\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}\end{cases}$$

Le intersezioni danno iperbole

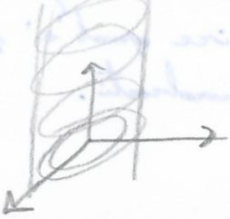


Se metto eq. asse y $\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$ allora nell'eq. dell'iperboloide a due falde trovo $\pm b$, cioè i due punti di intersezione con l'asse.

$x^2+y^2=1$ IN PIANO:  IN SPAZIO: 

Queste trasformazioni figure contengono quest circonferenza: una conica, un ellissoide, un iperboloide 

Ma tutte queste figure hanno il parametro z che varia in un certo grado che va tenuto in considerazione. Nell'eq. $x^2+y^2=1$ dove z non c'è, vuol dire che può essere qualunque! Allora i punti che soddisfano l'eq. hanno x e y dettati dalla legge rappresentata dall'eq.

allora è un cilindro 

Questo discorso vale anche per le eq. delle altre figure che abbiamo appena visto. Un cilindro che si appoggia sulla figura dettata dall'equazione che ho.

- $x^2-y^2=1$ è eq. di un iperbole senza z => CILINDRO IPERBOLICO

ES $x^2+2y^2-z^2+2x=0$ $\xrightarrow[\text{SU } x]{\text{COMPLET. DEI Q.}}$ $(x+1)^2+2y^2-z^2=1$ $C(-1;0;0)$

IPERBOLOIDE A 1 FALDA
↳ PASSA PER O, XK MANCA TERMINE NOTO

ES: $(x+1)^2+y^2-z^2=0$

CONO ASINTOTICO: è il cono che si ottiene mettendo insieme tutti gli asintoti di tutte le iperboli che si trovano spaccando l'iperboloide. Infatti nel piano l'iperbole $x^2-y^2=1$ se è $x^2-y^2=0$ ho l'eq. delle due bis. DEI ASINTOTI . Nello spazio, l'iperboloide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, se a una falda, scrivendo come $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ mi dà il cono asintotico.

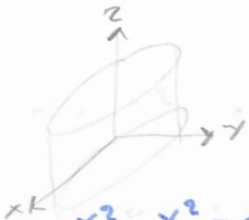
CILINDRI

'In geometria un cilindro è una qualunque lamiera ondulata'

CILINDRO: UNIONE DI RETTE GENERATRICI // TRA LORO, CHE PASSANO PER UNA CURVA $\mathcal{C}$ (DIRETTRICE).

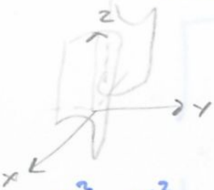
'Luogo delle rette // a v e con direttrice $\mathcal{C}$'

CILINDRO ELLITTICO



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

CILINDRO IPERBOLICO



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

CILINDRO PARABOLICO

$ax^2-y=0$

'Una qualunque conica letta nello spazio invece che nel piano è un cilindro quadrico'

CONO

CONO: UNIONE DI RETTE CHE PASSANO PER UNO STESSO PUNTO (VERTICE) E PER I PUNTI DI UNA CIRCONFERENZA (DIRETTRICE).

CONI QUADRICI

$x^2-y^2=1$

ASINTOTI: $x^2-y^2=0$ (EQ. COMPLESSIVA)

CONO IPERBOLICO

$x^2-y^2=0$

L'eq. complessiva degli asintoti dell'iperbole è, se vista nello spazio, l'eq. del cono asintotico del iperboloide a una falda, che è un cono iperbolico.
Quindi in generale:

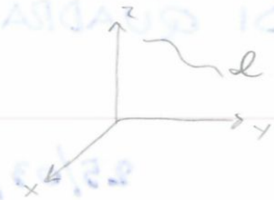
CONO IPERBOLICO: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

POLINOMIO OMOGENEO: TUTTI TERMINI DELLO STESSO GRADO

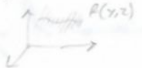
TRUCCO: QUALUNQUE EQ. OMOGENEA (DI QLNQ GRADO) RAPPRESENTA UN CONO PASSANTE PER L'ORIGINE

INVECE UN CONO DI VERTICE $V=(a,b,c)$ HANNO EQ. OMOGENEA DI QUALUNQUE GRADO (MA NON PIU' IN x, y, z, BENSI') IN $x-a$, $y-b$, $z-c$.

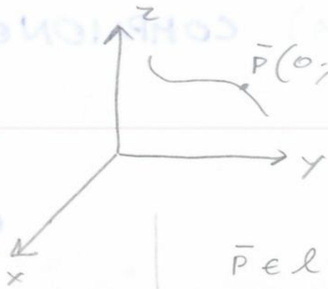
CONSIGLIO: imparatele bene le figure e le loro equazioni, perché analisi si basa su quello. Io mi farei uno schemino da appendere in camera.



Prendo una linea l che appartiene al piano Oy,z.
Che tipo di eq. avrà?
Così: $f(y,z)=0$
Ma devo anche dire che siamo sul piano $x=0$!
Perché se scrivo solo $f(y,z)=0$ in R_3 è un eq. di un cilindro

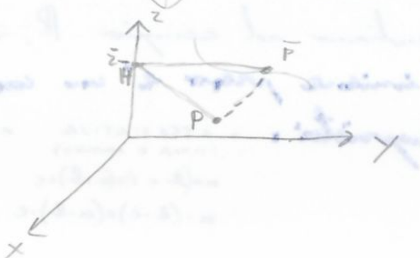


$$\Rightarrow l \begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$



$\bar{P}(0;\bar{y};\bar{z})$

$\bar{P} \in l$



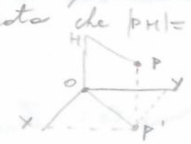
Faccio ruotare $\bar{P}$, che avrà coordinate $x, y, \bar{z}$

non si sposta dal piano $z=\bar{z}$

Essendo ruotato,
$|\bar{P}H| = |PH|$

$\bar{y}$

se lo proiettiamo su $z=0$ noto che $|PH|=|P'O|$

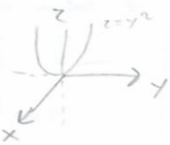


e $|P'O| = \sqrt{x^2+y^2}$

$y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \leftarrow |\bar{y}| = \sqrt{x^2+y^2} \Leftarrow$

Quindi l'eq. della mia superficie di rotazione è del tipo $\boxed{f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,;\, z\right)=0}$

ES: ho la linea $\begin{cases} z=y^2 \\ x=0 \end{cases}$



la sup. di rotaz. di questa linea intorno a asse z è $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\,;\, z\right)$, cioè $S: z = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

$S: z = x^2+y^2$

ES: $l: \begin{cases} z=e^y \\ x=0 \end{cases}$

$y \to \sqrt{x^2+y^2}$

$z = e^{+\sqrt{x^2+y^2}}$

$z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

Se ho una $l \begin{cases} f(x;z) \\ y=0 \end{cases}$

$x \to \pm\sqrt{x^2+y^2}$

$$\boxed{S: f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,;\, z\right)}$$

K - SPAZIO VETTORIALE ha:

$\mathbb{K}$ CAMPO (gli elementi del campo si chiamano scalari)

V INSIEME (gli elementi dell'insieme si chiamano vettori)

OPERAZIONI
- SOMMA TRA DUE VETTORI $+ : V \times V \xrightarrow{+} V$, $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v}+\vec{w} \in V$
- PRODOTTO DI UN ELEM. DI $\mathbb{K}$ PER UN VETTORE (DI UNO SCALARE PER UN VETTORE) $K \times V \to V$, $(a, \vec{v}) \mapsto a\vec{v} \in V$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO PER UNO SCALARE + PROP. DELLA SOMMA

$P_1)$ $\forall a, b \in K \quad \forall v \in V \quad (ab)v = a(bv)$ $\qquad S_1)$

$P_2)$ $\forall v \in V \quad 1V = V$ $\qquad S_2)$

$D_1)$ $\forall a, b \in K \quad \forall v \in V : \quad (a+b)v = av + bv$ $\qquad S_3)$

$D_2)$ $\forall a \in K \quad \forall u, v \in V : \quad a(u+v) = au + av$ $\qquad S_4)$

ES DI SPAZI VETTORIALI:

1] $V_3 = \{$vettori dello spazio applicati in $O\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

V_3 e' un $\mathbb{R}$-sp. vettoriale

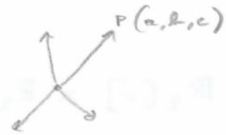
NEUTRO: $\vec{0}$

OPPOSTO: $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$

$V_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{v} \dashrightarrow (a, b, c)$

compo. di $\vec{v}$ = coord. del 2° estremo di $\vec{v}$



$\vec{v} \to (a, b, c)$

$\vec{w} \to (a', b', c')$

$\vec{v}+\vec{w} \to (a+a', b+b', c+c')$

$\lambda\vec{v} \to (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

1° GENERALIZZAZIONE: lavoriamo con le terne dei componenti invece che con i vettori

$V = \mathbb{R}^3$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (a, b, c) + (a', b', c') := (a+a', b+b', c+c')$

$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \lambda(a, b, c) := (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$V_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$
$K = \mathbb{R}$

$+)$ $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

$\cdot)$ $\lambda(a_1, \dots, a_n) := (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$

PROPRIETÀ ELEMENTARI DEGLI SPAZI VETTORIALI

- UNICITÀ DELL'ELEMENTO NEUTRO (0)
- UNICITÀ DELL'OPPOSTO $(-v)$
- TEOREMA DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO $\quad av = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0_K \\ v = 0_V \end{cases}$
- OPPOSTO DEL VETTORE $av \quad -(av) = (-a)v = a(-v)$
- PROPRIETÀ DI SEMPLIFICAZIONE
  1) Se $a \in K \setminus \{0\}$, allora $au = av \Rightarrow u = v$
  2) Se $v \in V \setminus \{0\}$, allora $av = bv \Rightarrow a = b$

26/03/17 B

SPAZIO VETTORIALE

$V_K \qquad V_{\text{VETTORI}}$

$\mathbb{K}$

$W \subseteq V$

Def: W è un sottospazio di $V \iff$ 1) $\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W \Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{w} \in W \Rightarrow \alpha \vec{w} \in W$

È R-SPAZIO VETTORIALE CON $+, \cdot$ ORDINARI.
NON QLL STRANO CHE HO CITATO PER FARE I CONTRO ESEMPI

$V = \mathbb{R}^2 \quad +, \cdot$ soliti

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$W = \{(a, b) \; ; \; a + b = 1\}$

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

  $a + b = 1 \quad c + d = 1 \quad (a + c) + (b + d) = 2 \Rightarrow \notin W$

$U = \{(a, b) \; ; \; a + b = 0\}$

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

  $a + b = 0 \quad c + d = 0 \quad (a + c) + (b + d) = 0$

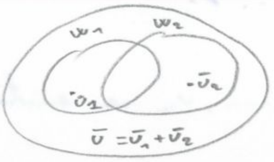
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(a, b) \in U$? sì

  $a + b = 0 \qquad \lambda(a, b) = (\lambda a; \lambda b) \qquad \lambda a + \lambda b = \lambda(a + b) = \lambda 0 = 0$

V $\mathbb{K}$ - sp. vettoriale

$W_1, W_2 \subseteq V$ s.s. di V

Def: SOMMA $W_1 + W_2 = \{ \bar{v} \in V : \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \quad \bar{v}_1 \in W_1, \bar{v}_2 \in W_2 \}$



Sommo tutti gli elementi dell'uno con tutti gli elementi dell'altro e quello che trovo è un altro sotto spazio.

W_1, W_2 s.s. di $V \Rightarrow W_1 + W_2$ s.s. di V

DIM

1) $\lambda \in \mathbb{K}, \bar{w} \in W_1 + W_2 \overset{?}{\Rightarrow} \lambda \bar{w} \in W_1 + W_2$

2) $u, v \in W_1 + W_2 \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in W_1 + W_2$

$\cdot \lambda \in \mathbb{K}, \quad \bar{w} \in W_1 + W_2 \Rightarrow \exists \bar{u} \in W_1, \ \exists \bar{v} \in W_2 ; \ \bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$

$$\lambda \bar{w} = \lambda (\bar{u} + \bar{v}) = \underbrace{\lambda \bar{u}}_{\in W_1} + \underbrace{\lambda \bar{v}}_{\in W_2} \Rightarrow \lambda \bar{w} \in W_1 + W_2$$

SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZI $U \oplus W$

$W_1 \oplus W_2 = \{ \bar{v} \in V : \exists ! \ \bar{v}_1 \in W_1, \exists ! \ \bar{v}_2 \in W_2$ per cui $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \}$

PROPRIETÀ: U, W SOTTOSPAZI DI $V \Rightarrow U \oplus W$ SOTTO SPAZIO DI V

PROPRIETÀ: la somma di due sottospazi di V è diretta se e solo se la loro intersezione è ridotta al solo 0_V.

$V = \mathbb{R}^2$

$W_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad W_1 = \{ (x; 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R} \}$

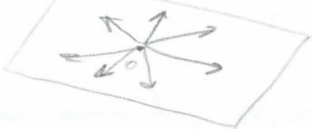
$W_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad W_2 = \{ (0; y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R} \} \qquad W_1 \cap W_2 = \{ (0; 0) \}$

W_1, W_2 s.s. di $\mathbb{R}^2$

$W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$

$$\forall (a, b) = \underbrace{(a, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, b)}_{\in W_2}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_3$ 26/03/13



$L(\bar{v}_1 ; \bar{v}_2) = \{ a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 ;\ a, b \in \mathbb{R} \}$

I vettori di L stanno tutti nello stesso piano.

Il senso dell'uguaglianza di proprietà 3 è: io cambio la base (cambio i coefficienti dei vettori) in quel piano, però riuscirò sempre a trovare tutti i vettori di quel piano.

CONCETTO DI DIPENDENZA LINEARE

Dico che i vettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ sono linearmente dipendenti se ognuno di loro si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti.
Dico che sono linearmente indipendenti se non è possibile fare questo.

Def $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ linearmente dipendenti $\iff \exists (a_1, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ | $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}$

Esiste una combinaz. lineare a coeff. non tutti nulli, che ci dà il vettore nullo

se $a_1 \neq 0$ $\Downarrow$ $\exists a_1^{-1}$

$$a_1 v_1 = -a_2\vec{v}_2 + \dots - a_n v_n$$

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1}\vec{v}_2 + \dots - \frac{a_n}{a_1} v_n$$

Def $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ linearmente indipendenti se $\forall$ combinaz. lineare di $v_1, \dots, v_n$ | $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \bar{0}$ solo se $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Qualunque combinazione lineare che ci dà lo zero è a coeff. tutti nulli.

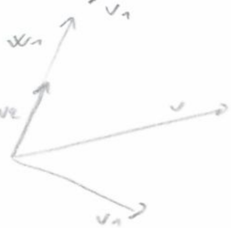
ES :

$\Rightarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI

Se $\bar{v} = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ e $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}$ lin. dip.

$\Rightarrow 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - v = 0$

$\bar{v} - 2\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = 0$



SE $w = 2v_2$

$\Rightarrow w, v_2$ lin. dip.

w, v_1, v_2 lin. dip.

$\bar{w} - 2\bar{v}_2 - 0 \cdot \bar{v}_1 = \bar{0}$

$w - 2v_2 = 0$

NB: v_1 e v_2 lin. indip. perché v_2 non è combinaz. lineare di v_1. Quindi l'unica eq. che mi dia lo zero che io posso scrivere è: $0 \cdot \bar{v}_1 + 0 \cdot \bar{v}_2 = \bar{0}$

v_1 lo posso mettere nell'eq. solo se con il coeff. zero, perché l'eq. dia zero. Allora vuol dire che v_1 non è linearm. dip. con v_2 e w

IN $\mathbb{R}^2$ $\bar{v}_1(1,2)$ $\bar{v}_2(2,4)$ $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ lin. dip.

$\bar{v}_1(1,2)$ $\bar{v}_2(3;5)$ $\bar{0}(0;0)$ lin. dip. (perche' c'e' lo $\bar{0}$)

$\bar{v}_1=(1,2)$ $\bar{v}_2=(3,5)$ $\bar{v}_3=(1,1)$ lin. dip. (perche' complanari in $\mathbb{R}^2$)

$\bar{v}_1 = a\,\bar{v}_2 + b\,\bar{v}_3$

$\Downarrow$ $(1,2) = a(3,5) + b(1,1)$

$(1,2) = (3a+b\,;\,5a+b) \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=1 \\ 5a+b=2 \end{cases}$ $a = 1/2$, $b = -1/2$ $\Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}\bar{v}_2 - \frac{1}{2}\bar{v}_3$

IN $\mathbb{R}^3$

$\{(a,b,c)\}$ ho solo questo e mi chiedo se e' lin. dip.. come faccio? vedo se e' uguale a zero. $\Rightarrow$ e' ins. libero se $\neq (0;0;0)$

$\{(1,0;0)\}$ ins libero $(1,0,0) \neq \bar{0}$

$\{(1,0,0),(2,5,1)\}$ libero (perche' non proporzionali)

$\{(1,0,0),(2,5,1),(4,1,0)\}$ lin. ind. (perche' non complanari)

guardo se sono complanari: PRODOTTO MISTO $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

IN $\mathbb{R}_2[x]$

$p_1(x)$

$p_1(x) = 1 + x$ $\quad p_2(x) = 1 - x - x^2$

$\downarrow$ $(1;1;0)$ $\quad\downarrow$ $(1;-1;-1)$ $\Rightarrow$ lin. indip.

$p_1(x) = 1 + x$ $\quad p_1(x) = 1 - x - x^2$ $\quad p_2(x) = 4 - x^2$ $\Rightarrow$ lin. indip.

$\downarrow$ $(1;1;0)$ $\quad\downarrow$ $(1;-1;-1)$ $\quad\downarrow$ $(4;0;-1)$

guardo se sono complanari $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$p_1(x) = 1 + x$ $\quad p_2(x) = 1 - x - x^2$ $\quad p_3(x) = 2 - x^2$

$\exists\, a, b \mid p_3(x) = a\,p_1(x) + b\,p_2(x)$

BASI

GRAFFE: IL CONTENUTO NON È ORDINATO

Abbiamo: V

$$1)\ I = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \text{ libero}$$
$$2)\ V = L(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$$
$$\Downarrow$$
$$B = (\bar{v}_1, \dots, v_n) \text{ base di } \bar{V}$$

TONDE: IL CONTENUTO È ORDINATO, NON SI PUÒ MESCOLARE

V_3 $\quad \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ lin. ind. $\quad$ BASE DI V_3: $\mathcal{S} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$

$\mathbb{R}^3$ $\quad e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)$ lin. ind. $\quad$ BASE DI $\mathbb{R}^3$: $E_{(3)} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

$\mathbb{R}^n$ $\quad E_{(n)} = (\bar{e}_1; \dots; \bar{e}_n)$

Se $B = (v_1, v_2)$ base di V_3

e $V = 2V_1 - 3V_2$ $\quad$ 2 e 3 sono COMPONENTI DI $\bar{V}$ RISPETTO ALLA BASE B

Tali componenti sono UNICHE.

SPAZIO DELLE RIGHE E DELLE COLONNE

• RANGO

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ \\ R_m \end{array}$$

$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \in \mathbb{K}^n$

$R_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{K}^n$

$R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \in \mathbb{K}^n$

E' UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{K}^n$

$\mathcal{R}_A = L(R_1, R_2, \dots, R_m) \leq \mathbb{K}^n$

SPAZIO DELLE RIGHE DI A

ES

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\bar{R}_1 = (1,2,0)$, $R_2 = (1,2,-1)$ R_1, R_2 linearmente indipendenti

$\mathcal{R}_A = L(\bar{R}_1, \bar{R}_2) \leq \mathbb{R}^3$ $(\bar{R}_1, \bar{R}_2)$ e' BASE DI $\mathcal{R}_A$

DIMENSIONE DI $\mathcal{R}_A = 2$

$C_1 = (a_{11}; a_{21}; \dots, a_{m1}) \in \mathbb{K}^m$

$C_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \in \mathbb{K}^m$

$C_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \in \mathbb{K}^m$

E' UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{K}^m$

$\mathcal{C}_A = L(C_1, C_2, \dots, C_n)$

SPAZIO DELLE COLONNE DI A

ES

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $C_1 = (1,1) \in \mathbb{R}^2$, $C_2 = (2,2) \in \mathbb{R}^2$, $C_3 = (0,-1) \in \mathbb{R}^2$

$\mathcal{C}_A = L(\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3)$ C_1, C_2, C_3 lin. dipendenti $\rightarrow$ tolgo C_1 oppure C_2 e i rimanenti sono lin. indipendenti

$\Rightarrow (\bar{C}_1, \bar{C}_3)$ e' BASE DI $\mathcal{C}_A$

DIMENSIONE DI $\mathcal{C}_A = 2$

TEOREMA:

Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una stessa matrice ha la stessa dimensione.

DEF: RANGO

Il RANGO di A $(\rho(A) \sim K(A))$ e' la dimensione comune.

$\rho = \rho(A) = \dim \mathcal{C}_A = \dim \mathcal{R}_A$

1) $L(R_1, R_2, \dots, R_n) = L(R_2, R_1, \dots, R_n)$

2) $L(R_1, R_2, \dots, R_n) = L(\alpha R_1, R_2, \dots, R_n) \quad \alpha \neq 0$

3) $L(R_1, R_2, \dots, R_n) = L(R_1 - 2R_2, R_2, \dots, R_n)$

$R_1 \to R_1 + \alpha R_2 \quad \forall \alpha$

$R_1 \to \alpha R_1 + b R_2 \quad \alpha \neq 0$

ES

$$A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- Scelgo un elem. della prima riga e lo candido a diventare elemento speciale.
- Per fare ciò devo rendere zero i numeri sottostanti. Allora tolgo R_2 e metto la combinazione lineare $R_2 - R_1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- Poi prendo R_3 e la sostituisco con $R_3 - 2R_2$
- Poi R_4 $\quad R_4 - R_1$
- Mi accorgo che la seconda e la terza riga sono uguali. Non voglio! Allora la sostituisco con un altra combinaz. lin, differenza tra le 2

$$A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 6^* \end{pmatrix}$$

- Ora scambio la seconda riga con la quarta, perché, se lascio così non ho elem. speciali nella seconda riga

$$A^r = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4^* & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^* & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora A è ridotta per righe

$\rho(A^r) = 3 = \rho(A)$ = DIMENSIONE DI $\mathcal{R}_A$

$\mathcal{R}_A = L(R_1, R_2, R_3, R_4)$

BASE DI $\mathcal{R}_A$ $\quad B = (R_1,$

NB: $R_1 + R_2 - R_3 = 0 \qquad R_2 = R_3 - R_1$

$R_1 = (1,1,1,1)$

BASE di $\mathcal{R}_A \quad \mathcal{B} = (R_1, W_1, W_2)$

$W_1 = R_4 - R_1 \qquad$ dove $\quad W_1 = (0,-2,1,4,6)$

$W_2 = R_2 - R_1 \qquad\qquad\quad W_2 = (0,2,-3,0,1)$

$p_1(x) = 1 - x^2$
$p_2(x) = 1 + x + x^2 \quad \in \mathbb{R}_2[x] \qquad \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ (lo sapevo già)
$p_3(x) = 1 - 5x^2 \qquad \qquad \mathcal{S} = (1, x, x^2)$

$B(p_1, p_2, p_3)$ base di $\mathbb{R}_2[x]$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1^* & 1 \\ 1^* & \boxed{0} & -1 \\ 1 & \boxed{0} & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1^* & 1 \\ 1^* & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & -4 \end{pmatrix} \quad \rho(A) = 3$$

Allora la risposta alla domanda e' sì. Ora come lo capisco che B e' base di $\mathbb{R}_2[x]$? Dal fatto che $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ sono linearmente indipendenti; perchè lo sono? Perchè il rango e' 3.

DIMENSIONE Sia V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale finitamente generato ...

LEMMA DI

Se conosco già la dimensione dello spazio $\dim V = n$

$\Rightarrow$ *) n e' il n° MINIMO di generatori di V
**) n e' il n° MASSIMO di vettori linearm. indipendenti

"Ad esempio se siamo in $\mathbb{R}^3$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti e' 3!"

TEO: DIMENSIONE DEI SOTTOSPAZI

Sia $\dim(V) = n$ e sia W un sottospazio di V, allora:

a) $\dim(W) \leq n$
b) $\dim(W) = n$ se e solo se $W = V$

PROPRIETA DEI DETERMINANTI

1) SE $B \in K^{n,n}$ E' MATRICE OTTENUTA DA A SCAMBIANDO DUE SUE RIGHE O COLONNE
$$|B| = -|A|$$

2) SE A HA DUE RIGHE O COLONNE PROPORZIONALI, $|A| = 0$

3) SE B E' OTTENUTA DA A MOLTIPLICANDO TUTA UNA SUA RIGA O COLONNA PER LO STESSO FATTORE K, $|B| = k^n |A|$ NUMERO DI RIGHE

5) SE $B = {}^t A$ $\quad |B| = |A|$

5) SE A E' TRIANGOLARE, $|A| = a_{11} a_{22} \cdot a_{nn}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

7) TEOREMA DI BINET: SE $A, B \in K^{n,n}$, $|AB| = |A||B|$

7) SE B E' OTTENUTA DA A CON UNA TRASFORMAZIONE DI TIPO T_1 SULLE SUE RIGHE O COLONNE, $|B| = |A|$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1+3 & 2+5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$-1 \qquad\qquad -1$$

8) SECONDO TEOREMA DI LAPLACE: SE MOLTIPLICHI UNA RIGA CON I COMPLEMENTI ALGEBRICI DI UN'ALTRA RIGA IL RISULTATO E' 0

c) $\bar{v} = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3 + d e_1$ anche questo posso farlo immediatamente con le matrici!

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ e_1 \\ v \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad R_5 \to R_5 - R_1 \quad \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ e_1 \\ v-v_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_2 \quad \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3-v_2 \\ e_1 \\ v-v_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_5 \to R_5 + R_3$$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3-v_2 \\ e_1 \\ v-v_1+v_3-v_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E mi accorgo che $v - v_1 + v_3 - v_2 = -3e_1$

$$\Rightarrow \boxed{v = v_1 + v_2 - v_3 - 3e_1}$$

PRODOTTO DI MATRICI

$A, B \in K^{m,n}$ posso fare $A+B$

Se $A \in K^{m,n}$ posso fare λA (con $\lambda \in K$)

SE $A \in K^{n,n}$ $\quad |\lambda A| = \lambda^n |A|$

tutti gli elem. della matrice sono moltiplicati per λ, allora

SE $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{n,p}$ $\Rightarrow \exists\, A \cdot B \in K^{m,p}$

• NON COMMUTATIVO $AB \neq BA$ ← magari BA neanche si può fare...

es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{3,2}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{2,4}$

$\Rightarrow \exists AB \in \mathbb{R}^{3,4}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -12 & 19 \\ 3 & 17 & -29 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NB: PRODOTTO SCALARE TRA STRINGHE

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) =$
$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

$d_{11} = R_1^{(A)} \cdot C_1^{(B)} = (1,2) \cdot (1,0) = 1$

$d_{12} = R_1^{(A)} \cdot C_2^{(B)} = (1,2) \cdot (-1,4) = 7$

$d_{13} = R_1^{(A)} \cdot C_3^{(B)} = (1,2) \cdot (2,-7) = -12$

$d_{14} = R_1^{(A)} \cdot C_4^{(B)} = (1,2) \cdot (3,8) = 19$

$d_{21} = R_2 \cdot C_1 = (3,5) \cdot (1,0) = 3$

$d_{22} = R_2 \cdot C_2 = (3,5) \cdot (-1,4) = 17$

$d_{23} = R_2 \cdot C_3 = (3,5) \cdot (2,-7) = -29$

$d_{24} = R_2 \cdot C_4 = (3,5) \cdot (3,8) = +49$

$A \times B = D \quad d_{ij} = R_i^{(A)} \cdot C_j^{(B)}$

$\bar{u}\,(1-i\,;\,2i)$ DIMOSTRA CHE
$\bar{v}\,(3,\,1+2i)$ $\bar{u},\bar{v}$ lin. ind. (in $\mathbb{C}^2$)

$\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{C} \mid \bar{u} = \alpha \bar{v}$

$\alpha = a+ib \quad (1-i\,;\,2i) = (a+ib)(3,\,1+2i)$

$(1-i\,;\,2i) = (3a+3ib\,;\,a+2ai+ib+2bi^2)$

$(1-i\,,\,2i) = (3a+3b\,i\,;\,a-2b+i(2a+b))$

$$\begin{cases} 1-i = 3a+3b\,i \\ 2i = a-2b+i(2a+b) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 3a \\ -1 = 3b \\ 2 = 2a+b \\ 0 = a-2b \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 1/3 \\ b = -1/3 \\ \\ a = 2b \quad a = 2/3 \end{matrix} \quad a \neq a \; \nexists$$

$\Rightarrow \nexists\, \alpha \in \mathbb{C} \mid \bar{u} = \alpha \bar{v}$

15/04/13

EQUAZIONI E SISTEMI LINEARI

Un equazione lineare in n incognite nel campo K è un equazione del tipo (*) $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ dove $a, b \in K$.
Soluzione dell'eq. lineare è una n-upla $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in K^n$ che verifica (*), cioè tale che $a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b$.

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite nel campo K è un insieme di m equazioni lineari in n incognite su K, cioè un espressione del tipo

$$(**) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Soluzione del sistema lineare (**) è una n-upla $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in K^n$ che verifica tutte le equazioni del sistema (**). Si dice incompatibile un sistema che non ammette soluzioni.

FORMA MATRICIALE E FORMA VETTORIALE DI UN SISTEMA LINEARE

Il sistema (**) si può scrivere in forma matriciale $AX = B$, dove:

A = matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ B = matrice (colonna) dei termini noti $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$

X = matrice (colonna) delle incognite $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ES $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

NB: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\quad X \in \mathbb{K}^{n,1}$ $\quad B \in \mathbb{K}^{m,1}$

A r.r $\longrightarrow$ sistema $AX=B$ ridotto INCOMPATIBILE

$$\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ -y = 1 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases} \qquad 0 = 2 \; \nexists$$

ES

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

. $AX=B$ è sistema ridotto, perché la matrice A è ridotta

. A non ha righe nulle $\Rightarrow$ sistema è risolubile

(si prende l'altra riga perché è quella con più zeri)

$$\begin{cases} \\ -2 - 2z = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7 - 2 + 3/2 = 13/2 \\ z = -3/2 \\ y = 2 \end{cases}$$

ES

SISTEMA $\begin{cases} a + b + 2c + e = 1 \\ -b + d + g = 0 \\ 3b + f + 3g = -2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ FORMA MATRICIALE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bisogna scegliere due incognite libere che compaiono nell'ultima equazione

$$\begin{cases} \\ f = -2 - 3b - 3g \end{cases} \qquad \begin{cases} d = b - g \\ f = -2 - 3b - 3g \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 - e - b - 2c \\ d = b - g \\ f = -2 - 3b - 3g \end{cases}$$

4 INCOGNITE LIBERE: b, c, e, g

$\Rightarrow \infty$ SOLUZIONI

$$\Sigma = \{ (1 - b - 2c - e, b, c, b - g, e, -2 - 3b - 3g, g), \; b, c, e, g \in \mathbb{R} \}$$

si scrive ∞^4 perché 4 è il numero di incognite libere

ES:

SISTEMA $\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ -y+z=1 \\ -x+y-z=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ MATRICE COMPLETA $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & +2 & 3 \\ 0 & -1 & +1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & +2 & 3 \\ 0 & -1 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & +2 & 3 \\ 0 & -1 & +1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

SISTEMA INCOMPATIB.

Capisco già che andrà male perché in R_2 ho ... $-1\ 1 | 1$ e in R_3 ho ... $-1\ 1 | 5$

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEL SISTEMA:
Sono 3 eq. di piani, che non si intersecano tutti e 3 nella stessa retta.
Si intersecano, a due a due, in 3 rette diverse.

Se invece abbiamo 3 eq. e il sistema ha ∞^1 soluzioni ('alla 1', quindi c'è un' incognita libera) l'interpr. geom. è di un fascio di piani che si appoggiano tutti su una retta.

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Dato il sistema $AX=B$, si considerino la matrice dei coefficienti A e la matrice completa $(A|B)$

Dato il sistema di m eq. lineari in n incognite $AX=B$, con $A\in K^{m,n}$

1) Il sistema $AX=B$ è risolubile se e solo se $\rho(A)=\rho(A|B)$
2) Se $p=\rho(A)=\rho(A|B)$, il sistema $AX=B$ è equivalente ad ogni sistema $A'X=B'$ ottenuto considerando p righe ~~linearm.~~ indipendenti di $(A|B)$.
3) Ci sono $n-p$ incognite libere
4) Si possono assumere come libere determinate $n-p$ incognite se e solo se le p colonne della matrice A corrispondenti alle incognite rimanenti sono linearm. indipendenti.

OSSERVAZIONE: se il sistema è risolubile e $n=p$ c'è una sola soluzione

SISTEMA OMOGENEO

$AX = 0$ ha sempre almeno la soluzione nulla: la n-upla $(0,0,\dots,0)$

Non è mai sistema incompatibile

$X \in \mathbb{K}^{n,1}$

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\quad (A|0) = (A) \quad \rho(A) = \cancel{\rho(A|0)} = p$

$n-p$ incognite libere

$S = \{\text{soluzioni sistema } AX=0\}$ $\quad p = \rho(A)$ $\quad S \subseteq \mathbb{K}^n$ SOTTOSPAZIO

$\dim S = n - p$

DIM:

1) $0 \in S$ (sì: la soluz. nulla è soluzione)

2) $\boxed{X_1, X_2 \in S \longrightarrow X_1 + X_2 \in S}$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \in S \Rightarrow AX_1 = 0 \\ X_2 \in S \Rightarrow AX_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow AX_1 + AX_2 = 0 \quad A(X_1+X_2) = 0 \Downarrow X_1 + X_2 \in S$$

3) $\boxed{X_1 \in S,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda X_1 \in S}$

$X_1 \in S \Rightarrow AX_1 = 0 \Rightarrow \lambda(AX_1) = \lambda 0$

$\Rightarrow A(\lambda X_1) = 0 \Rightarrow \lambda X_1 \in S$

TEOREMA

Dato il sistema omogeneo di m equazioni lineari in n incognite $AX=0$, con $A \in K^{m,n}$:

1) L'insieme delle soluzioni del sistema forma un sottospazio $S \in K^n$

2) Se $p = \rho(A)$, la dimensione dello spazio delle soluzioni è $\dim(S) = n - p$ (pari al numero delle incognite libere).

3) Si può trovare una base di S dando alle incognite libere i valori delle $(n-p)$-uple $(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)$ (e ricavando le incognite non libere per questi valori delle incognite libere).

OSSERVAZIONE: il sistema ha solo la soluzione banale se e solo se $\rho(A) = n$; dunque, se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e se $m < n$ il sistema $AX=0$ ammette sempre soluzioni non banali.

SISTEMI A INCOGNITE VETTORIALI

16/04/13

$$\begin{cases} a_{11}\overline{X}_1 + a_{12}\overline{X}_2 + \dots + a_{1n}\overline{X}_n = \overline{B}_1 \\ a_{21}\overline{X}_1 + a_{22}\overline{X}_2 + \dots + a_{2n}\overline{X}_n = \overline{B}_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\overline{X}_1 + a_{m2}\overline{X}_2 + \dots + a_{mn}\overline{X}_n = \overline{B}_m \end{cases}$$

DOVE I VETTORI INCOGNITI

$$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p}) \quad X_2 = (\dots, x_{2p}) \quad \vdots \quad X_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np})$$

SONO LE RIGHE DI $X \in K^{n,p}$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p} \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2p} \\ \vdots \\ x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np} \end{pmatrix}$$

E I VETTORI TERMINI NOTI

$$B_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1p}) \quad B_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2p}) \quad \vdots \quad B_m = (b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mp})$$

SONO LE RIGHE DI $B \in K^{m,p}$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

ES: $\begin{cases} X_1 + 2X_2 = (1\ 2) \leftarrow B_1 \\ 2X_1 + X_2 = (0\ 1) \leftarrow B_2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$X_1 = (x_{11}, x_{12})$

$X_2 = (x_{21}, x_{22})$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX = B} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 2x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{21} = 2 \\ 2x_{11} + 2x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 180

NB: se A è invertibile, l'inversa di A è l'unica soluzione del sistema $AX = I$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad AX = I \qquad (A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \rho(A) = 1 \\ \rho(A|I) = 2 \end{array} \Rightarrow A \text{ non è invertibile}$$

PROVA:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y + t = 0 \\ -4x - 2z = 0 \\ -4y - 2t = 1 \end{cases} \quad 2x + z = 0 \quad \nexists$$

NB: $AX = B \qquad A \in \mathbb{K}^{m,n}, \quad X \in \mathbb{K}^{n,p}, \quad B \in \mathbb{K}^{m,p}$

RISOLVO FACENDO $(A|B)$ ECC..

$XA = B \qquad X \in \mathbb{K}^{n,p}, \quad A \in \mathbb{K}^{m,m}, \quad B \in \mathbb{K}^{m,p}$

COME RISOLVO? $\quad XA = B \Rightarrow {}^t(XA) = {}^tB \Rightarrow {}^tA\,{}^tX = {}^tB \Rightarrow$

$$CY = D$$

RISOLVO FACENDO $(C|D)$ ECC.. POI SO CHE LA SOLUZIONE È LA TRASPOSTA DI QUELLO CHE HO TROVATO

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \exists A^{-1}?$$

$|A| = -1 + (-1) = -2 \quad \det A \neq 0 \Rightarrow \rho(A) =$

(x PROPRIETÀ DETERMINANTI)

$\Rightarrow \exists A^{-1}$

$AX = I$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = (0, 1, 0) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \bar{x}_1 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \\ \bar{x}_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}; & \frac{5}{2}; & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}; & -\frac{3}{2}; & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}; & -\frac{1}{2}; & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ x + 2y = 2 \\ 4x + 2y + z = b \end{cases}$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2-a & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -a & 0 & b-3 \end{array}\right)$$

"Matrice è ridotta. Però ora tutto dipende dai valori di a e di b"

- Se $a \neq 0$ $\rho(A) = 3 = \rho(A|B)$ $\forall b$ $\Rightarrow 3-3 =$ incognite libere $\Rightarrow \exists!$ solu
- Se $a = 0 \wedge b \neq 3$ SISTEMA INCOMPATIBILE, NO SOLUZIONI perché $\rho(A) = 2$, $\rho(A|B) = 3$
- Se $a = 0 \wedge b = 3$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$ $\Rightarrow 3-2 =$ incognite libere $\Rightarrow \infty^1$ soluzio

$a \neq 0$, $\forall b$

$$\begin{cases} x + 2\left(\frac{3-b}{a}\right) = 2 \\ y = \frac{3-b}{a} \end{cases} \to x = 2\left(1 - \frac{3-b}{a}\right) \longrightarrow \begin{cases} z = 1 - 3\frac{2(a+b-3)}{a} - a\frac{3-b}{a} \\ x = \frac{2(a+b-3)}{a} \\ y = \frac{3-b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{a - 6a - 6b + 18 - 3a + ab}{a} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{2(a+b-3)}{a} ; \frac{3-b}{a} ; \frac{ab - 8a - 6b + 18}{a} \right) \right\}$$

$a = 0$, $b = 3$

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ x + 2y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{x libera} \qquad \begin{cases} z = 1 - 3x \\ y = \frac{2-x}{2} \end{cases}$$

∞^1 soluzioni:

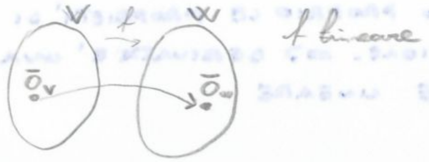
$S = \left\{ \left(x, 1 - \frac{x}{2}, 1 - 3x\right), x \in \mathbb{R} \right\}$

$S = \left\{ (2t, 1-t, 1-6t), t \in \mathbb{R} \right\}$

L' IMMAGINE DI QUALUNQUE APPLICAZIONE LINEARE DI VETTORI E' SCOMPONIBILE SECONDO LE 2 PROPRIETA':

$$f(3\bar{v}+5\bar{v}) = f(3\bar{v})+f(5\bar{v}) = 3f(\bar{v})+5f(\bar{v})$$

NB: $f(0_v) = 0_w$



INFATTI: $\bar{0}_v = \bar{v}+(-\bar{v})$

$$f(\bar{0}_v) = f(\bar{v}+(-\bar{v})) = f(\bar{v})+f(-\bar{v}) =$$
$$= f(\bar{v})-f(\bar{v}) = \bar{0}_w$$

NB: GLI SPAZI VETTORIALI MESSI IN RELAZIONE DA UNA FUNZIONE LINEARE DEVONO APPARTENERE ALLO STESSO CAMPO $\mathbb{K}$!

Per seconda proprietà: $f(\lambda\bar{v}) = \lambda f$

$V_{\mathbb{K}} \longrightarrow W_{\mathbb{K}}$

NB: se un eserc. ti chiede se la tale funzione e' lineare, una condizione necessaria perche' sia tale e' che 'mandi zero in zero' $f(0_v)=0_w$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z) = (3x+5y-7z,\ 2x+8z+1)$

$f(0,0,0) = f(0,1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ NO FUNZ. LINEARE

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z) = (3x+5y-7z,\ 2x+8z)$

1) $f((x,y,z)+(x',y',z')) \stackrel{?}{=} f(x,y,z)+f(x',y',z')$

1° MEMBRO: $= f(x+x';y+y';z+z') = (3(x+x')+5(y+y')-7(z+z'),\ 2(x+x')+8(z+z')) =$

$= (3x+3x'+5y+5y'-7z-7z';\ 2x+2x'+8z+8z')$

2° MEMBRO: $= (3x+5y-7z,\ 2x+8z)+(3x'+5y'-7z';\ 2x'+8z') =$

$= (3x+5y-7z+3x'+5y'-7z',\ 2x+8z+2x'+8z')$

SONO UGUALI

2) $f(a(x,y,z)) \stackrel{?}{=} a f(x,y,z)$ ..... 'Non vi tedio con un'altra verifica.. guardiamola velocemente sulle slide'

3) $\bar{v} \in \ker f,\ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda v \in \ker f$ DIMOSTRATE VOI

$\Rightarrow \ker f$ SOTTOSPAZIO

$\mathrm{Im}\, f = \{\bar{w} \in W \mid \exists \bar{v} \in V / f(\bar{v}) = \bar{w}\}$

1) $\bar{0}_w \in \mathrm{Im}\, f$ OK $f(\bar{0}_v) = f(\bar{0}_w)$

2) $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\, f$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall w \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \lambda \bar{w} \in \mathrm{Im}\, f$

DIM 1, 2 A CASA

DIM 3: Hp: $\bar{w} \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \exists \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \bar{w}$

Th: $\lambda \bar{w} \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \exists w' \in V : f(\bar{v}') = \lambda \bar{w}$ VERO: $\bar{v}' = \lambda \bar{v}$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA f INIETTIVA $\Leftrightarrow \ker f = \{\bar{0}_v\}$

A) "$\Rightarrow$" Hp: f iniettiva Th: $\ker f = \{\bar{0}_v\}$

$\bar{v} \in \ker f \Rightarrow f(\bar{v}) = (\bar{0}_w)$ $f(\bar{0}_v) = \bar{0}_w$ f iniett $\Rightarrow \bar{v} \equiv \bar{0}_v \Rightarrow \ker f = \{\bar{0}_v$

B) "$\Leftarrow$" Hp: $\ker f = \{\bar{0}_v\}$, Th: f iniettiva: $f(\bar{u}) = f(\bar{v}) \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$

Prendo $\bar{u}, \bar{v}$; $f(\bar{v}) \Rightarrow f(\bar{u}) - f(\bar{v}) = \bar{0}_w \Rightarrow f(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{0}_w \Rightarrow \bar{u} - \bar{v} \in \ker f$

SVOLGO Hp, $\Rightarrow$) $\bar{u} - \bar{v} = \bar{0}_v \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$

NUCLEO DELL'OPERATORE DI DERIVAZIONE: $\ker D = \{$FUNZIONI COSTANTI$\} \Rightarrow D$ NON E' INIETTIVA

IMMAGINE: $\mathrm{Im}\, D = \{ g \in C^{(k-1)}(\mathbb{R}) : \exists f \in C^k(\mathbb{R}) / \underbrace{D(f) = g}_{\text{PRIMITIVA}} \}$

L'OPERATORE DERIVATA E' F LINEARE SURIETTIVA E NON INIETTIVA

Quali funzioni ammettono primitive? Tutte le funzioni continue

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, D = C^{(k-1)}(\mathbb{R}) \Rightarrow D$ E' SURIETTIVA

NUCLEO DELL'OPERATORE INTEGRALE DEFINITO: $\ker A = \{ f \in C^{(0)}[I] : \int_a^b f(x) = 0 \}$ CONTIENE INFINITE SOLUZIONI $\Rightarrow$ NO INIETTIVA

$A = \int_a^b$, $I = [a,b]$ $A : C^{(0)}(I[a,b]) \to \mathbb{R}$

IMMAGINE DELL'OPERATORE INTEGRALE DEFINITO: $\mathrm{Im}\, A = \{ c \in \mathbb{R} : \exists f / \int_a^b f(x)\,dx = c \}$ E' SURIETTIVA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 180

$$f^{-1}((1,-2)) =: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(x,y,z) = (1;-2)\}$$

$$\begin{cases} 3x+5y-7z=1 \\ 2x \quad +8z = -2 \end{cases} \quad \infty^1 \text{ soluz. } (z \text{ libera}) \qquad \begin{cases} -3-12z+5y-7z=1 \\ x=-1-4z \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{19z+4}{5} \\ x=-1-4z \end{cases}$$

$$f^{-1}(1;-2) = \left\{\left(-1-4z, \frac{19z+4}{5}, z\right), z \in \mathbb{R}\right\} =$$

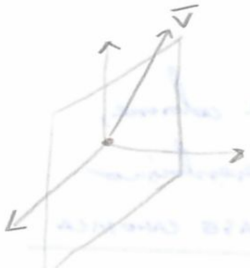
$$= \left\{\left(-1-4z; \frac{19}{5}z + \frac{4}{5}; z\right), z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(-1, \tfrac{4}{5}; 0\right) + z\underbrace{\left(-4; \tfrac{19}{5}; 1\right)}, z \in \mathbb{R}\right\}$$

NB: è Ker f!!

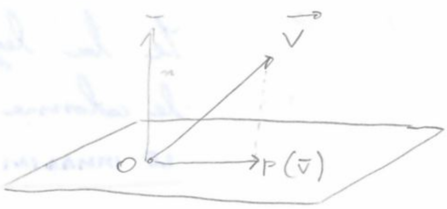
L'INSIEME DELLE CONTROIMMAGINI DI UNA FUNZIONE LINEARE NON È MAI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE (non contiene lo zero!) (ECCEZION FATTA PER LA FUNZIONE NULLA).

MA TALE INSIEME È FORMATO DA UNA PARTICOLARE CONTROIMMAGINE PIÙ IL NUCLEO!

$P: V_3 \longrightarrow V_3$



π PIANO PER O FISSATO



P = PROIEZ. ORT. SU π

$$\text{Ker} f = \{\bar{v} \in V_3 \ ; \ \bar{v} = k\vec{n}, \ k \in \mathbb{R}\} \quad (= L(\vec{n})) \qquad \Rightarrow \text{NO INIETTIVA}$$

$$\text{Im} f = \{\text{vettori} \in \pi\} \qquad \Rightarrow \text{NO SURIETTIVA}$$

dim Im f = 2

dim Ker f = 1

Se ho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ qual è l'applicazione associata?

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 \,;\, -x_2 + x_4 + x_7 \,;\, 3x_2 + x_6 + 3x_7)$$

$$c_1 = f(e_1) = (1, 0, 0)$$

$$c_2 = f(e_2) = (1, -1, 3)$$

$$\vdots$$

$$c_7 = f(e_7) = (0, 1, 3)$$

$\operatorname{Im} f = L(f(e_1), \dots, f(e_n))$

Lo spazio delle colonne di $A = C_A = L(c_1, c_2, \dots, c_n) \stackrel{?}{=} \operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} f = \{ \bar{w} \in \mathbb{K}^m \,;\, \exists\, \bar{v} \in \mathbb{K}^n \,/\, f(\bar{v}) = \bar{w} \}$ dato $\bar{w}$, cerco (se $\exists$) $\bar{v} \in \mathbb{K}^n / f(\bar{v}) = \bar{w}$

$\bar{v} \in \mathbb{K}^n$

$$\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + \dots + v_n \bar{e}_n$$

$$f(\bar{v}) = f(v_1 \bar{e}_1 + \dots + v_n \bar{e}_n) = v_1 f(\bar{e}_1) + \dots + v_n f(\bar{e}_n)$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) \in L(f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n))$$

Ogni $f(\bar{v})$ sta in spazio generato dalle immagini della base canonica

$\Rightarrow \operatorname{Im} f$, che è la raccolta di tutti gli $f(\bar{v})$,

$$\Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Im} f = \dim C_A = \rho(A)}$$

APPLICAZIONI LINEARI E DIPENDENZA LINEARE

Siano $f: V \to W$ $\quad \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in V$

1) se $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ lin. ind. $\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$ lin. ind.

DIM: Th: $a_1 = \dots = a_n = 0$

$a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}_V \Rightarrow f(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n) = f(\bar{0}_V)$

$\Rightarrow a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_n f(v_n) = \bar{0}_W$ Hp

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$

2) se f iniettiva e $v_1, v_2, \dots, v_n$ lin. ind $\Rightarrow f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ lin. ind.

DIM:

$v_1, v_2, \dots, v_n$ l.i. e f iniettiva $\Rightarrow f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)$ l.i.

$a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_n f(\bar{v}_n) = \bar{0}_W$ $\quad$ Th: $a_1 = \dots = a_n = 0$

$\Updownarrow$

$f(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n) = \bar{0}_W$

$\Downarrow$

$a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n \in \operatorname{Ker} f = \{\bar{0}_V\} \Rightarrow a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}_V$ $\quad a_1 = \dots = a_n = 0$

3) se $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n) \Rightarrow \operatorname{Im} f = L(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$

DIM: $\bar{w} \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{w}$ $\Rightarrow \exists\, \bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n \mid$

$f(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n) = \bar{w}$

$\Rightarrow a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_n f(\bar{v}_n) = \bar{w}$

$\Rightarrow \bar{w} \in L(f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n))$

4) se f suriettiva e $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n) \Rightarrow W = L(f(\bar{v}_1), f(\bar{v}_2), \dots, f(\bar{v}_n$

NB: se f è un isomorfismo

1) $v_1, v_2, \dots, v_n$ L.I. $\Leftrightarrow f(\bar{v}_1), f(\bar{v}_2), \dots, f(\bar{v}_n)$ L.I.

2) $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n) \Leftrightarrow W = L(f(v_1), f(v_2), \dots f(v_n))$

3) se $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ base di $V \Longleftrightarrow (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$ base di W

$$\boxed{\begin{array}{c} f: V_{\mathbb{K}} \to W_{\mathbb{K}} \\ \dim (n) \quad \dim (m) \\ \mathcal{B}_V \quad \mathcal{D}_W \end{array}}$$

$\dim V = n \leftarrow$ base $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$

$\dim W = m \leftarrow$ base $\mathcal{D}_W = (d_1, \dots, d_m)$

$$\underset{\in \mathbb{K}^{m,n}}{M_f^{\mathcal{B},\mathcal{D}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\quad f(b_1) \quad f(b_2) \quad \dots \quad f(b_n)$$

AP. L. ASSOCIATA AD A (TRAMITE LE BASI B_V E D_W)

$f(\bar{v}_1) \in W \implies f(\bar{b}_1) = a_{11}\bar{d}_1 + a_{21}\bar{d}_2 + \dots + a_{m1}\bar{d}_m$

$f(\bar{v}_2) \in W \implies f(\bar{b}_2) = a_{12}\bar{d}_1 + a_{22}\bar{d}_2 + \dots + a_{m2}\bar{d}_m$

$\vdots$

$f(\bar{v}_n) \in W \implies f(\bar{b}_n) = a_{1n}\bar{d}_1 + a_{2n}\bar{d}_2 + \dots + a_{mn}\bar{d}_m$

NB: CONOSCENDO LE COLONNE DI $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{D}}$...

$\bar{v} = \bar{v}_1\bar{b}_1 + \bar{v}_2\bar{b}_2 + \bar{v}_n\bar{b}_n \in V$

$f(\bar{v}) = w_1\bar{d}_1 + w_2\bar{d}_2 + \dots + w_m\bar{d}_m$ $\qquad \bar{v} \to \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad f(\bar{v}) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}$$

ES: (DATI SU SLIDE 22)

$f: \mathbb{R}_3[x] \to V_3 \leftarrow \mathcal{D} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$

$$A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{D}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{DATA}$$

$f(1) = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$

$f(x) = 2\bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}$

$f(x^2) = 2\bar{j} + 2\bar{k}$

$f(x^3) = \bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}$

INVENTATO...

$f(2x + 3x^2 + \frac{3}{4}x^3) =$

a) $2f(x) + 3f(x^2) + \frac{3}{4}f(x^3) = 2(2\bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}) + 3(2\bar{j} + 2\bar{k}) + \frac{3}{4}(\bar{i} - \bar{j} - 3$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/4 \\ 13/4 \\ -9/4 \end{pmatrix}$

$\frac{19}{4}\bar{i} + \frac{13}{4}\bar{j} - \frac{9}{4}\bar{k}$

$\dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$

$\downarrow$

$\operatorname{Im} f \equiv \mathbb{R}_2[x]$

$\downarrow$

f suriettiva

Controimmagine di $f^{-1}(x - x^2)$?

RICORDA: $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$f^{-1}(\bar{w}) = AX = w$

$$A = M_f^{1,B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$AX = w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A|w) = \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A) = \rho(A|w) = 3$ ∞^1 soluz

$$\begin{cases} c = 2a + 7d + 1 = 4l + 35l - 7 + 1 = 39l - 6 \\ d = a + 3l - 1 = 5l - 1 \\ a = 2l \end{cases}$$

$$S = \{(2l, l, 39l - 6, 5l - 1), l \in \mathbb{R}\}$$

Posso dire $S = L$ (qualche cosa)? No. Perchè S non è uno spazio. S di un sistema omogeneo lo è.

$$S = \{(0, 0, -6, -1) + l(2, 1, 39, 5)\}$$

$$f^{-1}(x - x^2) = \left\{\begin{pmatrix} 2l & l \\ 39l - 6 & 5l - 1 \end{pmatrix}, l \in \mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Ker} f$$

ES: SLIDE (26)

$f: V_3 \to \mathbb{R}_3[x]$ ($\dim(3)$, $\dim(4)$)

$\mathcal{B} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ $\mathcal{D} = (1, x, x^2, x^3)$

$\boxed{A_f\,?}$ $\boxed{\operatorname{Im} f\,?}$

$$A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{D}} = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \\ f(\bar{i}) \quad f(\bar{j}) \quad f(\bar{k}) \end{array}$$

Per trovare il rango riduco la matrice per colonna perchè non ha entità

$$\xrightarrow{C_3 \to C_3 + C_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

L.I.

$\rho(A) = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} = 2$

$\operatorname{Im} f \underset{\text{ISOMORFO}}{\simeq} L(C_1, C_2)$ sarebbe uguale solo se fossimo in $\mathbb{R}_3$

$\operatorname{Im} f = L(1 + 2x - x^2 + 2x^3;\ 6 + x^2 + 7x^3)$

CONTROIMMAGINE DI $1+2x-x^3$?

$f^{-1}(1 + 2x - x^3)$

$$AX = w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -7 & 0 & 7 & -1 \\ 9 & 0 & -9 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{array}\right)$$

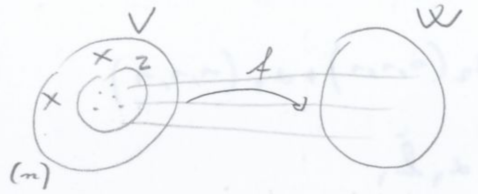
SISTEMA INCOMPATIBILE

ALLORA IL POLINOMIO NON HA CONTROIMMAGINI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 180

RIASSUNTO DI TUTTI I MODI CHE ABBIAMO VISTO PER ASSEGNARE UN APP. LIN.

SCRIVO SU FOGLI SLIDE 4



nota $f: Z \to W$ estendere f a una $\tilde{f}$: $\tilde{f}: V \to W \,/\, \tilde{f}/_Z \equiv f$

$\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_r)$ base di Z

1) COMPLETO $\mathcal{G}$ A BASE $\mathcal{B}$ DI V $\quad \mathcal{B} = \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-r}\}$ $\in V \setminus Z$

2) DEFINISCO $\tilde{f}(\bar{g}_1) = f(\bar{g}_1)$
$\tilde{f}(\bar{g}_r) = f(\bar{g}_r)$

$\tilde{f}(\bar{v}_1) = \forall$ vettore di W
$\tilde{f}(\bar{v}_{n-r}) = \forall$ vettore di W

ES SLIDE 3 30/04/13

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\rho(A) = 3$ $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\Rightarrow$ BASE DI $\mathbb{R}_3$ =

b) × TEOREMA: $\exists!\, f: V \to W \,/\, f(\bar{v}_1) = \bar{w}_1,\ f(\bar{v}_2) = \bar{w}_2, \dots, f(\bar{v}_3) = \bar{w}_3$ come $\mathcal{B}_V$ fissata $(\bar{v}_1, \dots$ $w_1, w_2, \dots, w_n$ qualunq $\in W$.

c) $M_f^{B,E}$ $\longrightarrow$ vuol dire conoscere le immagini della prima base rispetto alla seconda base e metterle nelle colonne della matrice.

$E = (e_1, e_2, e_3)$

HO:

$f(0,0,1) = (2,3,5)$ $\quad f(0,1,1) = (1,0,0)$ $\quad f(1,1,1) = (0,1,-1)$

b_1 $\quad b_2$ $\quad b_3$

$B = M_f^{B,E} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$f(e_1) = ?$

$f(e_1) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$

INVECE: $\mathcal{B} = M_f^{E,E} = \left(\begin{array}{c|c|c} \, & \, & \, \end{array}\right)$

$f(e_1)$ $\quad f(e_2)$ $\quad f(e_3)$

$f(e_2) = ?$
$f(e_3) = f(b_1) = (2,3,5)$

ESTENSIONE DI UN A.L.

$f : Z \to W$

base di Z $\quad \mathcal{G}_Z = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r)$

$f(g_1)$
$\vdots$
$f(g_r)$

1)
BASE DI V: $\quad \mathcal{B} = \bar{\mathcal{G}} = \{ \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r, \bar{v}_1, \dots, v_{n-r})$

$\tilde{f} : V \to W$ estensione di f $\quad$ 2) $\boxed{\tilde{f}(\bar{g}_1) = f(\bar{g}_1), \dots, \tilde{f}(\bar{g}_r) = f(g_r)}$

$\tilde{f}(\bar{v}_1) = \forall\, w_1 \in W, \dots, \tilde{f}(v_{n-r}) = \forall\, \bar{w}_{n-r} \in W$

ES SLIDE 7

$\bar{u} = (1,-1,0,-1) \qquad \bar{v} = (2,0,-3,1) \qquad p(x) = 1-x \qquad q(x) = 3+x+x^2$

a) ? $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[x] \;/\; \operatorname{Ker} f = L(\bar{u}, \bar{v})$ e $\operatorname{Im} f = L(p(x), q(x))$

$\operatorname{Ker} f = L(\bar{u}, \bar{v}) \implies$ so che $f(\bar{u}) = 0, \quad f(\bar{v}) = 0$.

i) ESTENDERE $(\bar{u}, \bar{v})$ A BASE DI $\mathbb{R}^4$

$\mathcal{B} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}_1, \bar{w}_2)$

COSTRUISCO IO!
L'IMPO E' CHE SIA R.R.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & \boxed{0} & -3 & 1^* \\ 1^* & 0 & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 0 & 1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ e_1 \\ e_3 \end{array}$$

$\mathcal{B} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$

ii) DEFINIRE f =

$f(u) = 0$
$f(v) = 0$

SONO DUE GRADI DI ARBITRARIETA': POTEVO AD ES METTERE $p(x)+q(x)$, $p(x)-q(x)$

$\to \left| \begin{array}{l} f(e_1) = p(x) = 1-x \\ f(e_3) = q(x) = 3+x+x^2 \end{array} \right\} \implies \operatorname{Im} f = L(p(x), q(x)) \to \dim \operatorname{Im} f = 2$

$$M_f^{\mathcal{B}, \mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$\quad f(u) \quad f(v) \quad f(e_1) \quad f(e_3)$

$M_f^{\mathcal{B}, \mathcal{Y}}$ NON E' AFFATTO UNICA!

b)

OPERAZIONI CON A.L.

A.L. $f: V_K \to W_K$
A.L. $g: V \to W$

- $f+g: V \to W$ $\quad \forall \bar{v} \in V, \ (f+g)(\bar{v}) := f(\bar{v}) + g(\bar{v})$

  $\boxed{\text{E' ANCORA A.L. (CI CREDO SENZA DIM)}}$

- $(\lambda f): V \to W$ $\quad (\lambda f)(\bar{v}) := \lambda f(v)$

  $\boxed{\text{E' ANCORA A.L. (CI CREDO)}}$

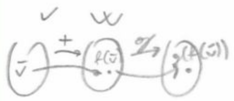
$Hom(V,W)$ = INSIEME DI TUTTE LE A.L. TRA V E W

$\boxed{Hom(V,W) \text{ E' K-SPAZIO VETTORIALE (CI CREDO)}}$

* NEUTRO RISPETTO A SOMMA: FUNZIONE NULLA O $\quad V \to W$
$\forall \bar{v} \in V, \ O(\bar{v}) = $

* OPPOSTO: $(-f)(\bar{v})$ $\quad (-f)(\bar{v}) = -f(v)$

COMPOSIZIONE DI A.L.



$(g \circ f)(\bar{v}) = g(f(\bar{v}))$ $\quad \boxed{\text{E' ANCORA A.L.}}$

SLIDE 14

MATRICE DI PASSAGGIO DI BASI

2/05/13

$\boxed{\underset{(n)}{V}}$ $\mathcal{B}_1 = (b_1, \dots, b_n)$

$\mathcal{D}_1 = (d_1, \dots, d_n)$

Siccome $d_1, \dots, d_n$ sono tutti vettori di V, allora si possono esprimere rispetto a $\mathcal{B}$

$d_1 = \dots b_1 + \dots b_2 + \dots + \dots b_n$

$d_2 = \dots b_1 + \dots b_2 + \dots + \dots b_n$

$\vdots$

$d_n = \dots b_1 + \dots b_2 + \dots + \dots b_n$

ho $n \times n$ coefficienti.

Posso metterli in una matrice, chiamandoli p_{ij}.

con $d_1 = p_{11}\bar{b}_1 + p_{21}\bar{b}_2 + \dots + p_{n1} b_n$

$\vdots$

$d_n = p_{1n}\bar{b}_1 + p_{2n}\bar{b}_2 + \dots + p_{nn} b_n$

COLONNE: "componenti dei vettori della nuova base rispetto alla vecchia base"

$$P = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{matrix} \right) \\ \begin{matrix} [d_1]_{\mathcal{B}} & [d_2]_{\mathcal{B}} & \quad & [d_n]_{\mathcal{B}} \end{matrix} \end{array}$$

CONVENZIONE INTERNA NOS: $[\bar{d}_i]_{\mathcal{B}}$ = "componenti di d_i rispetto a $\mathcal{B}$"

La matrice P si chiama matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base $\mathcal{D}_1$

PROPRIETÀ DI P:

1) P è INVERTIBILE (perché ha rango massimo $\rightarrow$ perché le colonne sono vettori che fanno parte di una base, perciò sono L.I.)

2) P^{-1} è LA MATRICE DI PASSAGGIO $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$.

ES: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$

$E = (e_1, e_2, e_3) \qquad S = (1, x, x^2)$

$$\begin{cases} f(e_1) = 1 + x + x^2 \\ f(e_2) = x - x^2 \\ f(e_3) = 1 - 2x + x^2 \end{cases} \qquad M_f^{E,S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} [f(e_1)]_S & [f(e_2)]_S & [f(e_3)]_S \end{array}$$

---

* $\cdot \; M_\varphi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\varphi(\bar{b}_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\varphi(\bar{b}_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$

$\varphi(\bar{b}_1) = \bar{d}_1 = \overset{\text{VEDI } \boxed{**}}{\cdots} = p_{11}\bar{b}_1 + p_{21}\bar{b}_2 + \dots + p_{n1}\bar{b}_n$

$$\Rightarrow M_\varphi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & & p_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = P \qquad \boxed{M_\varphi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = P}$$

$$\begin{array}{ccc} [\varphi(\bar{b}_1)]_{\mathcal{B}} & & [\varphi(\bar{b}_n)]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

$\cdot \; M_\varphi^{\mathcal{D},\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} [\varphi(\bar{d}_1)]_{\mathcal{D}} & \cdots & [\varphi(\bar{d}_n)]_{\mathcal{D}} \end{pmatrix}$

P^{-1} = MATRICE DI PASSAGGIO DA $\mathcal{D} \to \mathcal{B}$ $= Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$

$\bar{b}_1 = q_{11}\bar{d}_1 + \dots + q_{n1}\bar{d}_n$

"SCHERZAVO: LA 3° NON LA POSSO SCRIVERE.."

RIEPILOGO: $\boxed{I = M_\varphi^{\mathcal{B},\mathcal{D}}}$ $\qquad \boxed{P = M_\varphi^{\mathcal{B},\mathcal{B}}}$