NUMERO: 1105

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Masini

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Nicola

ANALISI I

1/10/12

APPELLI:

TEST [LUN 28/01, MAR 29/01, MER 30/01]   TEST [MER 13/02, GIO 14/02, VEN 15/02]

SCRITTO: GIO 31/01   SCRITTO: LUN 18/02

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = NUMERI NATURALI = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = NUMERI NATURALI E I LORO OPPOSTI = $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = NUMERI RAZIONALI = $\left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ Una cosa è la frazione e una cosa è il numero che rappresenta. Ci sono frazioni equivalenti $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Se q è razionale lo si può rappresentare con una rappresentazione decimale periodica.

$\mathbb{R}$ = NUMERI REALI = $\{\sqrt{2} \ldots\}$ = {NUMERI RAZIONALI} ∪ {NUMERI IRRAZIONALI}: Se α è un numero irrazionale lo si può rappresentare con una rappresentazione decimale che però non è periodica: cioè (dopo la virgola) scriverò cifre sempre diverse senza avere mai un blocco di cifre che da un certo punto in poi si ripetono.

3/10/12

INTERSEZIONE $\cap$: INSIEME DEGLI ELEMENTI CHE APPARTENGONO AD ENTRAMBI GLI INSIEMI DI PARTENZA

UNIONE $\cup$: INSIEME DEGLI ELEMENTI CHE APPARTENGONO ALMENO AD UNO DEI DUE INSIEMI DI PARTENZA

CONTENUTO $\subset$ ($\subseteq$) : INSIEME CONTENUTO IN (O EVENTUALMENTE UGUALE A) QUELLO DI PARTENZA

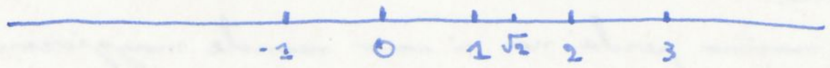
RETTA REALE

SI FISSA UN PUNTO SULLA RETTA, CHE CHIAMIAMO ORIGINE O E GLI ASSEGNAMO VALORE ZERO.

· DECIDIAMO CHE MUOVENDOCI VERSO DESTRA TROVIAMO NUMERI + GROSSI (VERSO DI PERCORRENZA)

· DECIDIAMO L'UNITÀ DI MISURA: ASSEGNAMO VALORE 1 ALLA DISTANZA TRA O E IL NUMERO 1

$\Rightarrow$ CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA UNITÀ DI MISURA E NUMERI REALI



SE $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x < y \Longrightarrow x + z < y + z$$ COMPATIBILITÀ DELLA RELAZIONE D'ORDINE CON LA SOMMA

SE $z > 0$, $\Rightarrow x < y \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$

SE $z < 0$, $\Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$

CARATTERIZZAZIONE DEL SUP

$$K = \sup X \iff \begin{cases} x \le K \quad \forall x \in X & \text{cioè deve essere un maggiorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X ; x > K - \varepsilon \end{cases}$$

$K-\varepsilon$ $\quad K$

$x \in X$

ESEMPIO :

$$X = \left\{ 1 - \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad 1$

VERIFICHIAMO CHE $1 = \sup X$

① $1 - \frac{1}{n} \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ $\quad$ OK

② $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \neq 0 ; \quad 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon \quad -\frac{1}{n} > -\varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA DEI NUMERI REALI

Ogni sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, non vuoto, che è limitato superiormente ha estremo superiore.
Questo ci fa capire che $\mathbb{R}$ non ha dei "buchi", ci dà l'idea di continuità.

DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$

Comunque presi due numeri reali $r < r'$, esiste un numero razionale q ; $r < q < r'$ $\quad q \in \mathbb{Q}$
Si può perciò dire che l'insieme $\mathbb{Q}$ è omogeneamente distribuito nell'insieme $\mathbb{R}$

VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \implies |x| \ge 0 \quad \forall x$$

$|3| = 3 \qquad |-3| = -(-3) = 3$

Il valore assoluto di una differenza tra due numeri corrisponde alla distanza presente tra i due numeri sulla linea retta reale.

Se $r, 1 \in \mathbb{R}$, $x > 0$ se $x, y > 0$

$$r < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^r < x^1 & \text{se } x > 1 \\ x^r > x^1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases} \qquad x < y \Rightarrow \begin{cases} x^r < y^r & \text{se } r > \\ x^r > y^r & \text{se } r < \end{cases}$$

LOGARITMO DI UN NUMERO

Dato $a > 0, a \neq 1$, $b > 0$ si dice logaritmo in base a di b quel numero $x = \log_a b$ tale che $a^x = b$ (si dimostra che quel numero esiste ed è unico).

PROPRIETÀ

$x, y > 0, \quad a, b > 0, \quad a, b \neq 1$

- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a a^x = x$
- $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a (x^r) = r \log_a x$

NUMERO DI NEPER

$e = 2,71828$

$\log b$ = LOGARITMO IN BASE e DI B

$\ln b$ = LOGARITMO NATURALE DI B

CAMBIO DI BASE

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

LEZ - 2 8/10/12

PRODOTTO CARTESIANO DI DUE INSIEMI X, Y:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

PIANO CARTESIANO (Un piano euclideo in cui viene imposta una corrispondenza biunivoca) ad ogni punto del piano corrisponde una coppia di numeri reali.

RELAZIONE

Una relazione di X in Y è un sottoinsieme R di $X \times Y$ $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ES: $R = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

FUNZIONE

È una particolare relazione in cui un generico x è in relazione con un unico y. Una relazione f di X in Y si dice FUNZIONE (di X in Y) se per ogni $x \in X$ esiste uno ed uno solo $y \in Y$ che è in relazione con x. $y = f($

$f: X \to$

y: immagine di x mediante f

x: controimmagine di x mediante f

Def: FUNZIONE CRESCENTE

Sia $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ si dice crescente se $\forall x_1, x_2$, $x_1 < x_2$ $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Prese due x, una minore dell'altra ($x_1 < x_2$), la stessa relazione deve sussistere con le rispettive immagini.

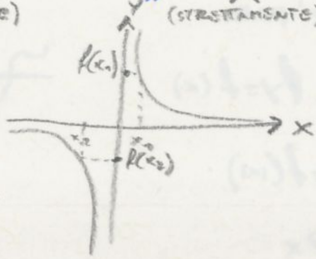
10/10/12

Def: FUNZIONE MONOTONA

Una funzione è monotona se è crescente (STRETTAMENTE) oppure decrescente (STRETTAMENTE).

ES:

$f(x) = \frac{1}{x}$ con $D: \mathbb{R} \setminus \{0\}$

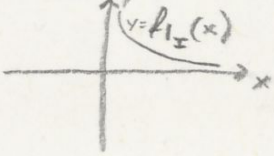


È MONOTONA? NO, PERCHÉ NON È DECRESCENTE SU TUTTO IL SUO DOMINIO, INFATTI $f(x_1)$ NON È MINORE DI $f(x_2)$.

Def: FUNZIONE RISTRETTA

Se $f: X \to Y$ è una funzione e $I \subset X \Rightarrow$ si dice restrizione di f ad I ($f_{|I}$) la funzione $f_{|I}: I \to Y$ $f_{|I}(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

ES: $f(x) = \frac{1}{x}$ con $D: \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La sua restrizione a $I = (0; +\infty)$ è la funzione $f_{|I}$ data $f_{|I}(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$

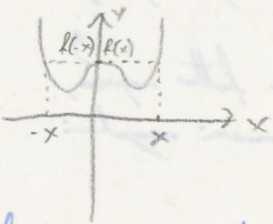


È MONOTONA? SÌ, PERCHÉ È DECRESCENTE SU TUTTO IL SUO DOMINIO

Def: FUNZIONE PARI - DISPARI

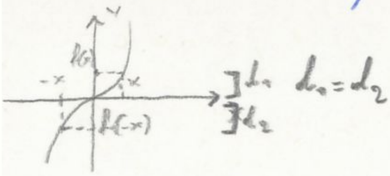
$f: X \to \mathbb{R}$ si dice pari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y

se $x \in X \Rightarrow -x \in X$ e $f(x) = f(-x)$.



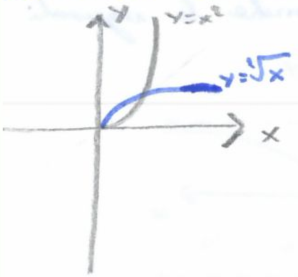
$f: X \to \mathbb{R}$ si dice dispari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine $(0;0)$.

se $x \in X \Rightarrow -x \in X$ e $f(-x) = -f(x)$

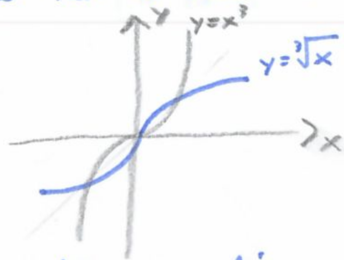


FUNZIONE RADICE

$f(x) = x^n$ non è invertibile se n è pari. Però la sua restrizione a $[0;+\infty]$ è invertibile e la sua inversa è detta funzione radice $\sqrt[n]{x}$. Ha dominio $[0;+\infty]$ cioè l'immagine di $f(x$



Per $f(x) = x^n$ con n dispari non si deve restringere perchè è invertibile in $\mathbb{R}$.

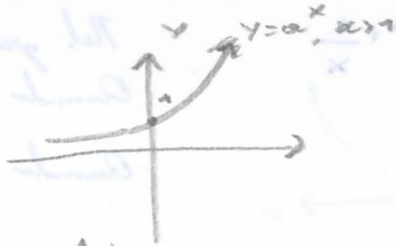


Per

Man mano che n aumenta $f(x)$ sarà più schiacciata verso l'asse y per $0<x<1$, mentre sarà sempre più **orizzontale** per $x>1$.

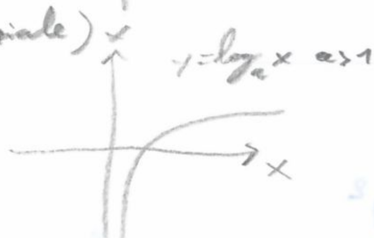
FUNZIONE ESPONENZIALE

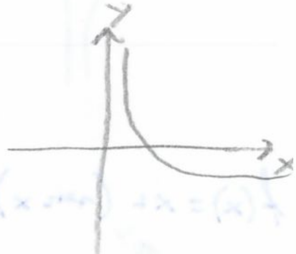
$\boxed{f(x) = a^x}$ D: $\mathbb{R}$ Im: $(0;+\infty)$



FUNZIONE LOGARITMO (inversa dell'esponenziale)

$\boxed{f(x) = \log_a x}$ D: $(0;+\infty)$ Im: $\mathbb{R}$





Def: FUNZIONE LIMITATA

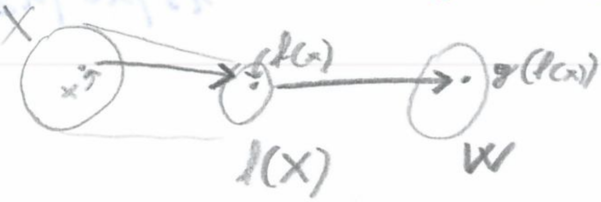
$f: X \to \mathbb{R}$ si dice limitata, limitata superiormente, limitata inferiormente, se tale è la sua immagine. Si pone $\sup f(x) = \sup f(X)$

Def: FUNZIONE PERIODICA

$f: X \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo T se $f(x+T) = f(x)\ \forall x \in X$

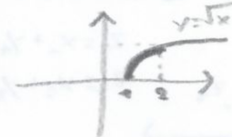
FUNZIONI COMPOSTE

Date due funzioni $f: X \to Y$, $g: Z \to W$ con $f(x) \subset Z$, si definisce la funzione composta: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X$



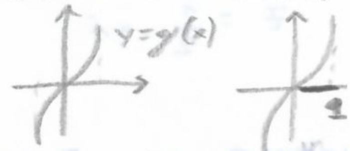
ES: DOMINIO E IMMAGINE DI $y = \arcsin\left(\sqrt{x-1}\right)$

$$D: \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \leq \sqrt{x-1} \leq 1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 2 \qquad [1 \leq x \leq 2]$$

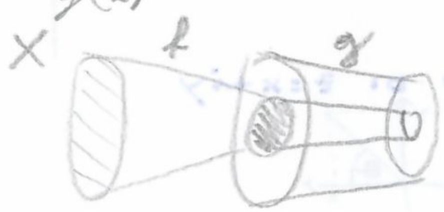


Im: per trovarla prendo l'im. della funzione interna e trovo un intervallo

Diventa così la parte che devo considerare del DOMINIO di $g(x)$.



Gen def: l'im di $f(x)$ deve essere contenuta nel dominio di $g(x)$



NUMERI COMPLESSI

$x^2 = -1$ non è un numero reale

SI INTRODUCE UN NUOVO SIMBOLO $\boxed{i}$ (unità immaginaria) TALE CHE $\boxed{i^2 = -1}$

Def: NUMERO COMPLESSO

Un numero complesso è una espressione del tipo $z = x + iy$, dove $x, y \in \mathbb{R}$

e x è la parte reale → SE $x=0$: NUMERO IMMAG. PURO

iy è la parte immaginaria → SE $y=0$: NUMERO REALE

Con numeri complessi si fanno operazioni di somma, prodotto come si fa con i polinomi.

ES

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$(3-i)(2+4i) = \cancel{6-4i^2-2i}\ 6 + 12i - 2i - 4i^2 = 6 + 10i + 4 = 10 + 10i$$

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{4-i^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

Il modulo di un numero complesso è la distanza che quel punto ha ~~dal~~ sul piano di Gauss dall'origine. La distanza è sempre un numero reale, allora il modulo di un numero complesso $|z| \in \mathbb{R}$.

DISUGUALIANZA TRIANGOLARE

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Il modulo di z_1+z_2 è minore o uguale al modulo di z_1 più modulo di z_2.

Perchè il lato di un triangolo è minore della somma degli altri 2.

ES

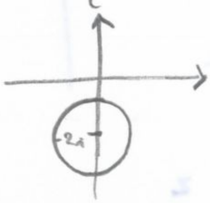
Rappresentare:

$$\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z+2i| = 1\}$$

"Tutti gli z tali che il modulo dei z più 2i è uguale a 1."

$$\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z-(-2i)| = 1\}$$

DISTANZA



$x = \rho \cos \theta$

$y = \rho \operatorname{sen} \theta$

$$z = x + yi \longrightarrow z = \rho \cos\theta + \rho \operatorname{sen}\theta \, i$$

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \, i)}$$

PRODOTTO

$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$

$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1)\right]$$

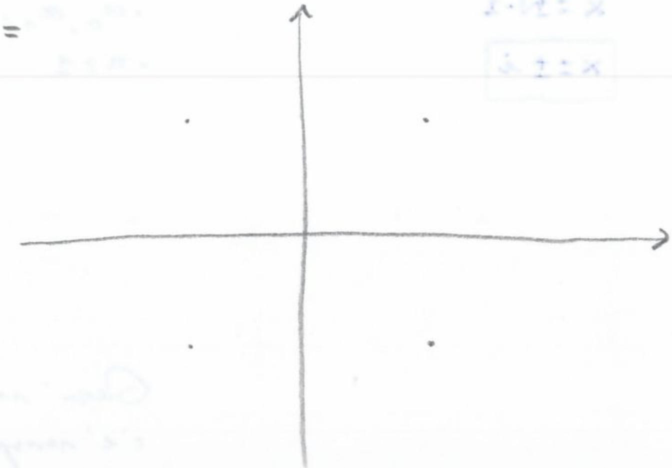
$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1\theta_2)\right]}$$

ES: calcolare $\sqrt[4]{i}$ $i = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ $i = 1(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2)$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0+1} = 1$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = \pi/2$$

$$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{4}\right)\right) =$$

- $= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen} \pi/8\right)$
- $= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{5}{8}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{8}\pi\right)$
- $= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{9}{8}\pi + i \operatorname{sen}\frac{9}{8}\pi\right)$
- $= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{13}{8}\pi + i \operatorname{sen}\frac{13}{8}\pi\right)$



17/10/12

ARGOMENTO PRINCIPALE $-\pi \le \theta \le \pi$ SI USA POCO, PERO' A VOLTE L'ARGOMENTO E' ESPRESSO COSI' INVECE CHE TRA $0 \le \theta \le 2\pi$

FORMULA DI EULERO

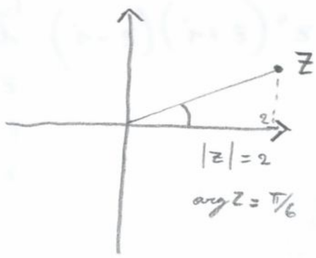
Si definisce: $e^{i\theta} = \boxed{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}$ → si denota come esponenziale come ha caratteristiche molto simili

ES

$e^{i\pi} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$ $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ → fu considerata nel rinascimento come formula un po' magica. Perché racchiudeva ogni branca della matematica: aritmetica (0, 1), geometria (π), analisi (e), i (numeri complessi).

=> FORMULA ESPONENZIALE:

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$$



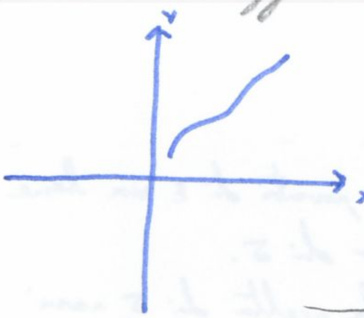
- $z = \sqrt{3} + i$
- $z = 2(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$
- $z = 2e^{i\pi/6}$

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

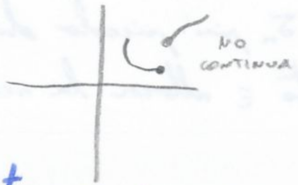
$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

FUNZIONI CONTINUE

Questa, se volete, è la lezione più difficile del corso. Non tanto perché ci sono formule strane, ma perché il concetto di limite e continuità sono difficile. Non dovete scoraggiarvi se non capite immediatamente cosa significa.



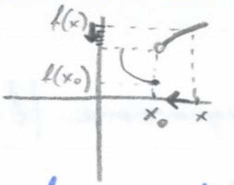
DEF. INTUITIVA: è continua la funzione il cui grafico lo posso tracciare senza alzare mai la penna dal foglio.



È un idea che gli studiosi hanno avuto da sempre ma che è stato difficile tradurre in linguaggio matematico.

TENTATIVO: f è continua in x_0 se quando x si avvicina a x_0 allora $f(x)$ si avvicina $f(x_0)$.

Però non va sempre bene:



Questa funzione si avvicina per x, ma per $f(x)$ avvicinandosi rimarrà sempre una distanza di sicurezza.

TENTATIVO: f è continua in x_0 a patto di prendere x opportunamente vicino a x_0 il valore di $y = f(x)$ si mantiene vicino quanto vogliamo a $f(x_0)$.

TRADUZIONE IN TERMINI MATEMATICI IL CONCETTO DI VICINANZA

CONCETTO DI VICINANZA, INTORNO DI UN PUNTO x_0:

δ = RAGGIO DELL'INTORNO

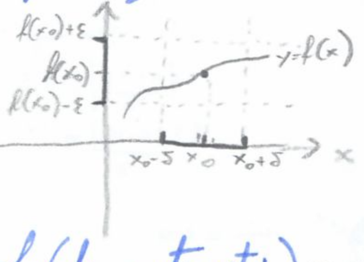
$$(x_0-\delta ; x_0+\delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0-\delta < x < x_0+\delta\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| < \delta\}$$

$\Rightarrow (x_0-\delta ; x_0+\delta)$ sono i punti che distano da x_0 meno di δ. $-\delta < x-x_0 < \delta$

TRADUZIONE IN TERMINI MATEMATICI

Def (di continuità)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ (DOMINIO DI f) e $x_0 \in X$ (UN PUNTO DEL DOMINIO). Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ si dice continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$: se $x \in X$, $|x-x_0| < \delta$ allora $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$



$$|x-x_0| < \delta \iff x \in (x_0-\delta ; x_0+\delta) = U$$
$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \iff x \in (f(x)-\varepsilon ; f(x)+\varepsilon) = V$$

Def (di continuità) IN ALTRE PAROLE

f è continua in x_0 se per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0, tale che se $x \in U$ $(x \in X \cap U)$ allora $f(x) \in V$.

DEF DI LIMITE

Quando x si avvicina a x_0, $f(x)$ si avvicina a l (che non è il valore della funzione in quel punto)

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo che il dominio X contenga un intervallo di x_0 privato di x_0

$(x_0 - \delta ; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

Sia $l \in \mathbb{R}$. Diciamo che f tende a l per $x \to x_0$ e si scrive: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$

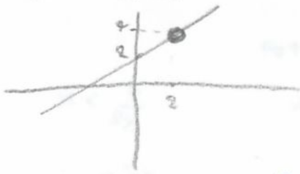
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$. Oppure: per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale che se $x \in X$, $x \in U$, $x \neq x_0$, allora $f(x) \in V$.

Se f è definita in un intorno di x_0, f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

C.E.: $x \neq 2$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$

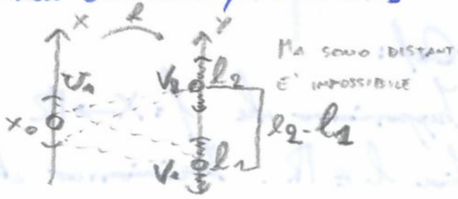


TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE

Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ non può tendere a due limiti distinti per $x \to x_0$

DIM: Per assurdo:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \qquad$ con $l_1 < l_2$



Prendiamo $\varepsilon < \frac{l_2 - l_1}{2}$, ad es.: $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{4}$

$V_1 = (l_1 - \varepsilon ; l_1 + \varepsilon)$

$V_2 = (l_2 - \varepsilon ; l_2 + \varepsilon)$

Per def di lim:

$\exists$ un intorno U_1 di x_0 : $x \in U_1$, $x \in X$, $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \in V_1$.

$\exists$ un intorno U_2 di x_0 | $x \in U_2$, $x \in X$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V_2$

Quindi se $x \in U_1 \cap U_2$, $x \in X$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ASSURDO

perché ho scelto intorni opportunamente piccoli $\left(\varepsilon < \frac{l_2 - l_1}{2}\right)$

Def: DEFINIZIONE UNIFICATA DI LIMITE

Una volta che avremo definito che cosa si intende per intorno di $(-\infty;+\infty)$, la potremo dare. Per definirlo premettiamo cos'è la RETTA REALE ESTESA $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. 'Estesa' perché ai numeri si aggiungono i simboli $+\infty, -\infty$.

INTORNO DI $(-\infty;+\infty)$
Si intende un qualsiasi intervallo del tipo $(a;+\infty)$

$\Rightarrow$

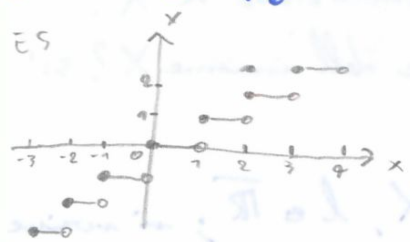
Siano $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intorno di x_0, privato eventualmente di x_0. Diciamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale che $x \in X, x \in U$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$.

Def: INTORNI DESTRI, INTORNI SINISTRI

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ si definiscono INTORNI DESTRI: $(x_0; x_0+\delta)$, INTORNI SINISTRI: $(x_0-\delta; x_0)$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ se vale per ogni intorno V di l esiste un intorno destro U di x_0 tale che $x \in X, x \in U, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$

ES



$\lim_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2$

$\lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1$

Def: DISCONTINUITÀ DI I° SPECIE (O DI TIPO SALTO)

x_0 è un punto di discontinuità di prima specie quando $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_2$ e $l_1 \neq l_2$.

Def: DISCONTINUITÀ DI II SPECIE

x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie se f non è continua e x_0 non è né una discontinuità eliminabile né di prima specie.
Cioè quando almeno uno dei due limiti per $x \to x_0$ è $\pm\infty$ o $-\infty$.

$Z = \{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi : n \in \mathbb{N} \}$ ha $+\infty$ come punto di accumulazione

$f|_Z(x) = 1 \quad \forall x \in Z$

$\lim f|_Z(x) = 1$

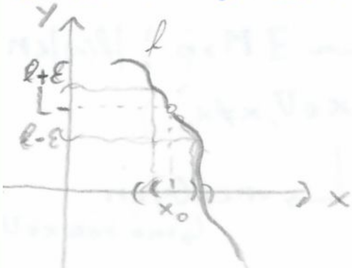
La funzione $f|_Z(x) = \sin x$ e $f|_Y(x)$ ha quindi due limiti distinti per $x \to +\infty$.

Allora $f(x) = \sin x$ (senza restrizioni) non ha un limite per $x \to +\infty$.

LEZIONE 24/10/12

Supponiamo che tutte le f che intervengono siano definite in un intorno del punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO



Supponiamo che esista $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, $l > 0$ allora esiste un intorno U di x_0 : $f(x) > 0 \ \forall x \in U, x \neq$

Dim:

Noi vogliamo arrivare a dire che x è sempre positiva in questo intorno.

Se noi prendiamo un qualunque $\varepsilon < l$ (ad es: $l/2$)

Dalla definizione di limite con $\varepsilon = l/2$ vedremo che esiste un intorno U di x_0:

$|f(x) - l| < \varepsilon = l/2$ se $x \in U, x \neq x_0$

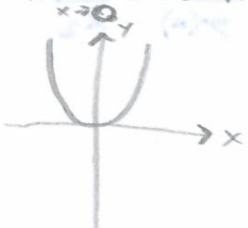
Errore comune è invertire ipotesi e tesi del teorema.

IPOTESI: il valore di l è > 0

TESI: $\forall U$ di x_0 : $f(x) > 0 \ \forall x \in U, x \neq 0$

NON SI PUÒ INVERTIRE → ESEMPIO DI CONFERMA: $f(x) = x^2$ $\quad y > 0 \ \forall x \neq$

MA $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ NON È > 0



Non si può dire: $f(x) > 0 \ \forall x \in U, x \neq x_0 \Rightarrow l > 0$

$\Longrightarrow$ Si può solo dire: $f(x) > 0 \ \forall x \in U, x \neq x_0$ ed $\exists$ il limite $l = \lim_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow l \geq$

PERCHÈ POTREBBE ANCHE

DIM $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=l_1+l_2$ Dobbiamo verificare che $f(x)+g(x)$ verifichino la condizione di limite. Allora scrivo la def di limite applicata alla funzione $f(x)+g(x)$

Dato $\varepsilon>0$ dobbiamo verificare che esiste un intorno U di x_0 | se $x\in U$, $x\neq x_0$ allora $|f(x)+g(x)-(l_1+l_2)|<\varepsilon$ $\quad l_1+l_2-\varepsilon<f(x)+g(x)<l_1+l_2+\varepsilon$

Per ipotesi esiste un intervallo U_1 di x_0: $x\in U_1, x\neq x_0 \Rightarrow l_1-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<l_1+\frac{\varepsilon}{2}$

ed esiste un intervallo U_2 di x_0 $x\in U_2, x\neq x_0 \Rightarrow l_2-\frac{\varepsilon}{2}<g(x)<l_2+\frac{\varepsilon}{2}$

e infatti sommando membro a membro ottengo:

$$l_1+l_2-\varepsilon<f(x)+g(x)<l_1+l_2+\varepsilon \qquad |f(x)+g(x)-(l_1+l_2)|<\varepsilon$$

e ciò vale per $x\in U_1\cap U_2$ (e cioè: ciò vale per $x\in U_1$, se $U_1\subset U_2$; ciò vale per $x\in U_2$, se $U_2\subset U_1$)

Dovevamo verificare che esiste un intorno U di x_0 ... ma che intorno U posso prendere? $U=U_1\cap U_2$ va bene.

RICHIAMO: CONTINUITÀ Se f è definita in un intervallo di x_0.

f è cont. in $x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

COROLLARIO TEOREMA DELL'ALGEBRA DEI LIMITI

Se f,g sono continue in $x\in\mathbb{R}$, allora $f(x)+g(x)$ e $f(x)\cdot g(x)$ sono continue in x_0. Se inoltre $g(x)\neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ è continua in x_0.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \lim f(x) + \lim g(x)$$

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)}_{\parallel} = \underbrace{\lim f(x)}_{f(x_0)} + \underbrace{\lim g(x)}_{g(x_0)}$$

OSS: CONTINUITÀ FUNZIONI POLINOMIALI E RAZIONALI

TUTTE le funzioni polinomiali sono continue, così come le funzioni razionali (dove non si annulla il denominatore). $Tg(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ è continua $\forall x_0\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

LIMITI DI FUNZIONI POLINOMIALI

29/10/12

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x^3+1}{3x^3+5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^3\left(-\frac{1}{2x}+1+\frac{1}{4x^3}\right)}{3x^3\left(1+\frac{5}{3x^2}\right)} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

per $x\to+\infty$, le espressioni in parentesi tendono ad 1, ma è sempre così perché ho raccolto il fattore dominante

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x^5}{x^3+x^2+3} = \frac{-x^5\left(\frac{1}{-x}+1\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^5}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} -x^2 = -(+\infty) = -\infty$$

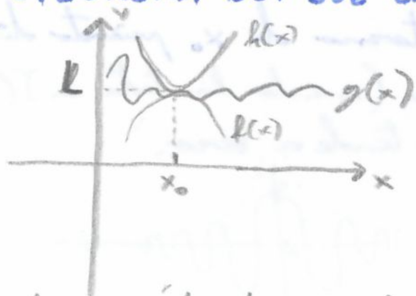
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x}{3x^5+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(1-1/x^2)}{3x^5\left(1+\frac{1}{3x^5}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

TEOREMI DEL CONFRONTO

Servono per capire se c'è ma e qual è il limite di una funzione più o meno elaborata confrontandoli con i limiti di funzioni campione semplici.

Supponiamo che le f che intervengono siano definite in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, privato eventualmente di x_0.

• TEOREMA DEI DUE CARABINIERI



Se $f(x) \le g(x) \le h(x)$ in un intorno di x_0 privato di x_0 e $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} g(x) = l$

Si chiama "dei due carabinieri" per Pinocchio: quando Pinocchio è portato via dai due carabinieri lui è in mezzo e deve andare dove lo portano i carabinieri.

Dim.:

Per ipotesi, dato $\varepsilon>0$ $\exists$ due intorni U_1 e U_2 di x_0: $x\in U_1, x\neq x_0 \Rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l$

$x \in U_2, x\neq x_0 \Rightarrow l-\varepsilon < h(x) < l$

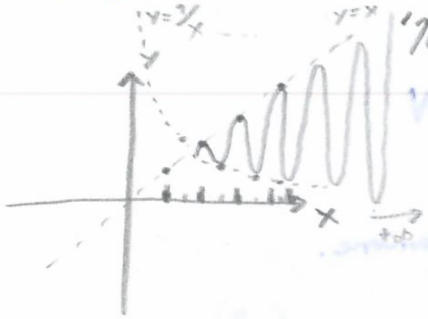
$l-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < l+\varepsilon \quad \forall x \in U_1 \cap U_2,\ x \neq x_0$

NB :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\sin x}$$

"Negli infiniti punti in cui il seno vale 1, quanto vale la funzione? x

"Negli infiniti punti in cui il seno vale -1, quanto vale f? $\frac{1}{x}$



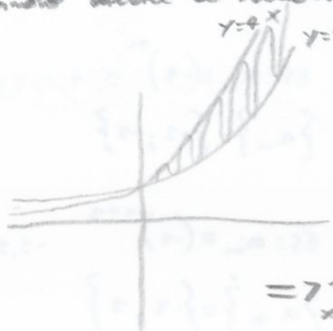
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^{\sin x} = \nexists$$

Intuiamo considerando anche a livello grafico solo il $x\to+\infty$.

ES:

$$\lim_{x\to+\infty}(3+\sin x)^x$$

$(3+\sin x)^x \geq 2^x \ \forall x$

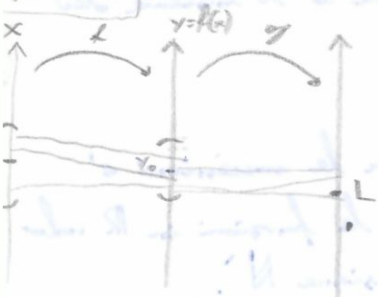


$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(3+\sin x)^x = +\infty$$

LIMITE DI FUNZIONI COMPOSTE

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y)$$

$\boxed{y=f(x)}$.



$f: X\to\mathbb{R}$, $g: Y\to\mathbb{R}$, $f(X)\subset Y$.

Sia $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ e f definita in un intorno di x_0 privato di x_0 e $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Supponiamo g definita in un intorno di y privato eventualmente di y_0. Supponiamo che

1) $f(x)\neq y_0 \ \forall x\in X$ ed $\exists \lim_{y\to y_0} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

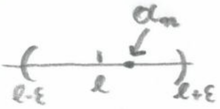
OPPURE

2) g continua in y_0 $\left(\Rightarrow \lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0)\right)$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y) = l$$

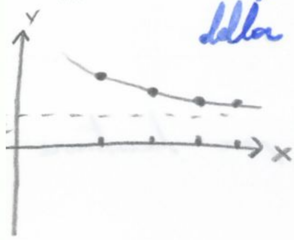
ESEMPIO:

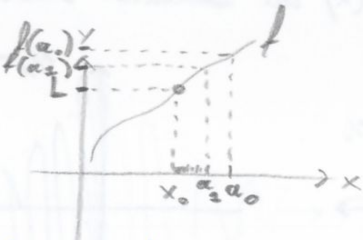
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2}$$



"Dal punto di vista del calcolo, non cambia niente se faccio esercizi con le funzioni generiche o con le successioni"

$\frac{n^2+1}{n^2}$ i punti del grafico di questa successione, stanno sopra i punti della funzione $\frac{x^2+1}{x^2}$. Quindi se $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=0$





TEOREMA DI RELAZIONE

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e f una funzione definita in un intorno di x_0 privato eventualmente di x_0.

Allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ se $\forall$ successione (a_n) ; $(a_n)\neq x_0$ $\forall n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$ risulta $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$.

Se f è continua in x_0 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ quindi se $a_n \to x_0$ $f(a_n)\to f(x_0)$

$\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)\right)$

ES:

$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\downarrow \frac{\pi}{2}$

$\sin x$ è continua, per questo ho potuto fare la sostituzione.

ES:

$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{1}{n}\right)$ se sostituissimo verrebbe $\lim = 0$, ma non è così: l'errore è stato nello sostituire, infatti non è una funzione continua e quindi non lo potevo fare.

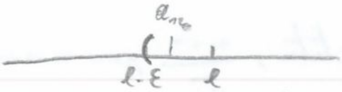
ES:

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-3n^2}{\sqrt{n}+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-3x^2}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2}{\sqrt{x}} = -\infty$

TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE DI SUCCESSIONI MONOTONE

Se a_n è una successione crescente allora esiste $\lim_{n\to n_0} a_n = \sup\{a_n\}$

DIM: sia (a_n) limitata superiormente. Sia $l = \sup\{a_n\}$, quindi $l \in \mathbb{R}$



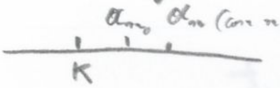
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ un indice $n_0 \in \mathbb{N} \mid a_{n_0} > l - \varepsilon$.

Se $n > n_0$, $a_n > a_{n_0}$ (perché (a_n) è crescente).

$a_{n_0} \leq a_n \leq l$

Sia (a_n) non è limitata superiormente. Sia $\sup\{a_n\} = +\infty$.

Da ciò segue: $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N}$; se $n > n_0 \Rightarrow a_n > a_{n_0} > K$



$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

SUCCESSIONE DI NEPER

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad , \ n \geq 1$$

Quando n cresce cosa succede? Innanzi tutto la base è > 1, poi non mare nuovo che aumenta n la base diminuisce.. mentre l'esponente cresce! Quindi non posso usare un teorema semplice per capire se (a_n) è crescente. Comunque dopo un calcolo lungo si ottiene che (a_n) è crescente* e limitata superiormente.

a_n è CRESCENTE e LIMIT. SUPERIORMENTE. $\Rightarrow$ (PER TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE DI SUCCESSIONI MONOTONE) $\exists \lim_{n\to n_0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ che per definizione è detto NUMERO DI NEPER ed è $2{,}71828182845 9\ldots$

QUALCHE ESERCIZIETTO

$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n - 2^n}{(-1)^n + 3^{2n}} =$ sarebbe $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$... al numerat. 4^n va a ∞ più velocemente di 2^n, al denominat. $(-1)^n$ è limitata e 3^{2n} no e tende a ∞

allora prendo questi 2: $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{3^{2n}}$ e lo moltiplico per $\frac{1}{1}$ scritto come

$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{3^{2n}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{(-1)^n}{3^{2n}}}$ infatti per $n \to +\infty$ N e D dell'aggiunto tende a 1

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{9^n} \cdot 1$ tende a ∞ 9^n più velocemente di $4^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 0 \cdot 1 = 0$

NB

31/10/12 B

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ elimino le radici moltiplicando per la somma delle radici

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

ma.. ora ho le radici al Denom.! Però sono una somma di $+\infty$, (e non una differenza come prima $[+\infty-\infty]$ che ti dà forma indeterm.) ora non è forma indeterminata.

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\cdot\sqrt[3]{n^2}$$

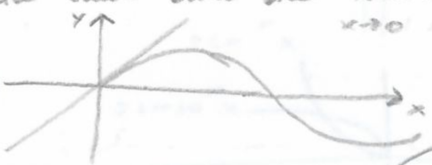
$(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})($$

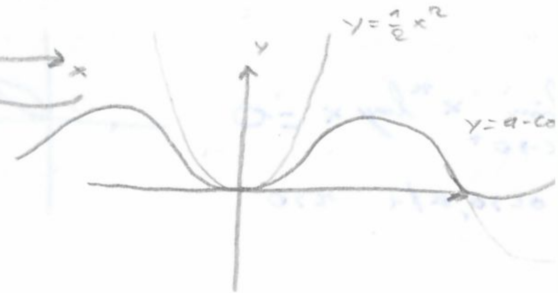
NON CI VEDEVO

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ si vede perché vuol dire che $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} x$. Quindi vicino a zero $\sin x$ è simile a x.



$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$ allora infatti: $\lim_{x\to 0} 1-\cos x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2$



$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Però x molto grande la base è piccola e l'esponente molto grande. Qui la base è maggiore di 1 e continua a diminuire, mentre l'esponente continua ad aumentare. Uno tira da una parte l'altro tira dall'altra e si ha una compensazione perfetta pari intorno al numero e.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

QUALCHE ESERCIZIETTO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{\sin(2x)}$$

ci vengono in mente i lim. notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$, allora moltiplico per $\frac{3x}{3x}$ e così lo faccio assomigliare al secondo e poi moltiplico per $\frac{2x}{2x}$ così lo faccio assomigliare al primo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \frac{3x}{2x} = \lim_{x\to 0} 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

NB: ASPETTATE ALLA FINE A SOSTITUIRE A CIASCUN ESPRESSIONE IL VALORE DEL LIMITE

Se faccio un pezzo, poi sostituisco il valore solo a ciò che mi fa comodo per andare avanti, poi continuo a semplificare... sbaglio!

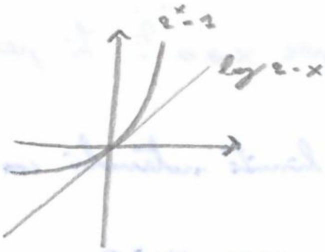
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)\,x}{1-\cos x}$$

voglio avere qualcosa di simile a quei due limiti notevoli sopra.. ~~divido~~ MOLTIPLICO per $\frac{1/x^2}{1/x^2}$ così ho simile $\lim$ avere $\frac{1-\cos x}{x^2}$, allora $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(\sqrt{1-x}-1)x}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$, poi metto in mano davanti alla prima frazione: $\frac{1-\cos x}{x^2} \to 1/2$

5/11/12

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$$

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = \log 2$ $\qquad \lim_{x\to 0} 2^x - 1 = \log 2 \cdot x$



INFINITI, INFINITESIMI, SIMBOLI DI LANDAU

Notazioni adeguate per vedere quanto velocemente una funzione tende a zero oppure a $\pm\infty$.

Sia x_0 un numero $\mathbb{R}$, f definita in un intorno di x_0 privato eventualmente di x_0.

f è UN INFINITO per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

f è un INFINITESIMO per $x\to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

$$\boxed{f \sim g \iff f = g + o(g)}$$

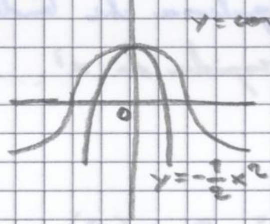
in realtà la scritta è un abuso di notazione: è giusta se io la scrivo come $f - g = o(g)$

$$f \sim g \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
$$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$$
$$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$
$$\iff f - g = o(g)$$

Riscriviamo in questa forma i limiti notevoli

$\sin x = x +$

$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$ per $x \to 0$ $\qquad \cos x = \frac{x^2}{2} - 1 + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$



NOTA BENE:

$$\boxed{3 \cdot o(x) = o(x)} \quad \text{per } x \to 0$$
$$\Updownarrow$$

se $f = o(x)$ allora $3f = o(x)$ infatti $\lim_{x\to 0} 3\frac{f(x)}{x} = 3 \cdot 0 = 0$

NB: CON I SIMBOLI DI LANDAU NON VALGONO LE SEMPLIFICAZIONI!

$\boxed{o(g) - o(g) = o(g)}$ se $f_1 = o(g)$ e $f_2 = o(g)$ allora $f_1 - f_2 = o(g)$

ALGEBRA DEGLI O-PICCOLI

$o(g) \pm o(g) = o(g)$

$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$

$\lambda \cdot o(g) = o(\lambda \cdot g) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \quad = o(g)$

$o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$

$o(f)^n = o(f^n)$

$$f_1 \sim f_2 \text{ e } g_1 \sim g_2 \implies \begin{cases} f_1 g_1 \sim f_2 g_2 \\ f_1/g_1 \sim f_2/g_2 \end{cases}$$

NB: NO $f_1 + f_2 \sim f_2 + g$

$f_1(x) = x \sim f_2(x) = x + 1$

$g_1(x) = -x \sim g_2(x) = -x$

LEZIONE 7/11/12

ORDINI DI INFINITO / INFINITESIMO

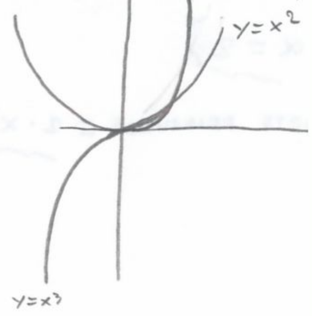
Se f e g sono due infiniti per $x \to x_0$, diciamo che f è un infinito di ordine INFERIORE a g se $f = o(g)$ ('cioè i valori di f per $x \to x_0$ sono grandi perché tendono a ∞, ma sono piccoli se paragonati ai valori di g per $x \to x_0$');
f è di un ordine (INFINITO) SUPERIORE a g se $g = o(f)$; f, g sono (INFINITI) dello stesso ordine se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste finito e diverso da zero.

In tutti gli altri casi f e g si dicono NON CONFRONTABILI.

Lo stesso vale per funzioni f e g infinitesime, ma con le parole SUPERIORE e INFERIORE scambiate.

ES:
x^3 è un infinito per $x \to \pm\infty$ ed è infinito di ordine superiore a x^2 perché $x^2 = o(x^3)$ per $x \to +\infty$

ES:
x^3 è un infinitesimo per $x \to 0$ ed è infinitesimo di ordine superiore a x^2 perché $x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$.



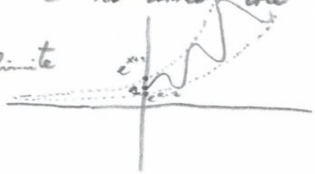
ES:
$1 - \cos x$ per $x \to 0$ è un infinitesimo dello stesso ordine di x^2, infatti:
$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ES:
$\sqrt{x^2+1}$ per $x \to +\infty$ ha lo stesso ordine di infinito di x perché
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ES:
e^x, $e^{x + \sin x}$ per $x \to +\infty$ sono infiniti non confrontabili. (Per teorema del confronto se una funzione è $\geq$ di un'altra che sappiamo tendere all'infinito per $x \to x_0$, allora anche la prima funzione tende a ∞ per $x \to x_0$. E notiamo che $e^{x + \sin x} \geq e^{x-1}$)

$\lim_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+\sin x}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x} \cdot e^{\sin x}}{\cancel{e^x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\sin x} = \nexists$ limite

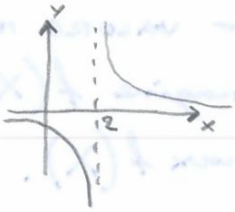


ASINDOTO VERTICALE

Se $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$ allora la retta $x = x_0$ si dice asindoto verticale

ES:

$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ $x=2$ ASINTOTO VERTICALE



ASINTOTO OBLIQUO

Come facciamo a dire che è la retta per cui la diff. di distanza con la $f(x)$ è minima man mano che vado per $x \to \infty$? Noto che tale differenza è $|f(x) - (mx+q)|$.

Allora posso scrivere che $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx+q)) = 0$. Noto che ho appena scritto che la mia funzione infinitesima.

Con i simboli di Landau una funz. infinitesima si può scrivere $f(x) = 0 + o(1)$

perché $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \implies \lim_{x \to x_0}$

Quindi la nostra $f(x) - (mx+q) \overset{\text{per } x \to +\infty}{\vee}$ posso scriverla come $f(x) - (mx+q) = o(1)$ $\iff$ (per $x \to +\infty$)

$\implies f(x) = mx + q + o(1)$ per $x \to +\infty$

$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ non c'è $o(x)$ perché per $x \to +\infty$ è trascurabile

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

ESEMPIO: ASINDOTO DESTRO DI

$f(x) = \sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2(1+1/x)} = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2} = x\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

per $x \to +\infty$

(INFATTI È ASINDOTO DESTRO)

$= \boxed{x + \frac{1}{2}} + o(1)$

$\downarrow$

$m = 1$

$q = 1/2$

RICORDA:

$(x+1)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y)$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

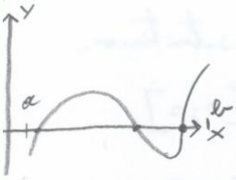
7/11/12 B

Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$

Allora f ha almeno un punto di MAX e almeno un punto di MIN

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

$f(x)=0$, cioè i punti in cui la funzione attraversa l'asse delle ascisse.

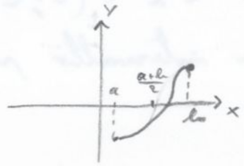


Sia f una funzione continua su intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ tale che $f(a)<0$ e $f(b)>0$, allora esiste $c \in (a,b) : f(c)=0$

$(f(a)>0)$ $\quad (f(b)<0)$

DIM:

$f(a)<0$, $f(b)>0$

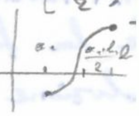


Calcolo $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ ho concluso, basta prendere $c=\frac{a+b}{2}$.

In caso contrario distinguiamo i due casi:

se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ vuol dire che la soluzione che cerco è a destra, nell'intervallo $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$

Definiamo allora $a_1=\frac{a+b}{2}$ $b_1=b$, consideriamo poi f nell'intervallo $[a_1;b_1]$.



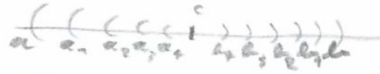
Noto che sono nella situazione è uguale alla precedente e noto anche che la soluzione che cerco è a sinistra, cioè nell'intervallo $\left[a_1; \frac{a_1+b_1}{2}\right]$. Considero solo quest'intervallo chiamandolo $[a_2;b_2]$ e ripeto il ragionamento.

Ripetendo il ragionamento potrebbe essere che ci si fermi dopo un numero finito di passi se si trova uno zero di f. Altrimenti si definiscono gli intervalli $[a_n;b_n]$ i quali sono ognuno contenuto nell'altro come le bambole russe e hanno lunghezza a_n-b_n che si può scrivere come $\frac{a-b}{2^n}$ (infatti $b-a$ è lunghezza di $[a;b]$

$\frac{b-a}{2}$ $[a_1;b_1]$

$\frac{b-a}{2^2}$ $[a_2;b_2]$).

Gli estremi sinistri di ogni intervallo $[a_n;b_n]$ costituiscono una successione crescente, mentre gli estremi destri ne costituiscono un'altra ma decrescente.



La successione (a_n) è crescente e limitata superiormente da b, quindi esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 \le b$

Invece (b_n) è decrescente e limitata inferiormente da a. Quindi esiste $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 \ge a$

Passando al limite per $n\to\infty$ in $(*)$

$l_1-l_2=0$ perché simmetrici?

$l_1=l_2$

Posto $c=l_1=l_2$ mostriamo che $f(c)=0$. Per costruzione $f(a_n)<0$ $\forall n$.

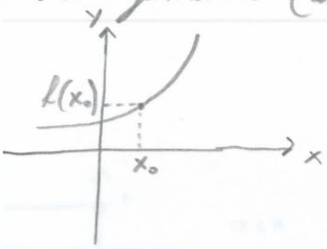
Siccome f è continua $f(c)=\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$ $\qquad f(c)=\lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$

>0

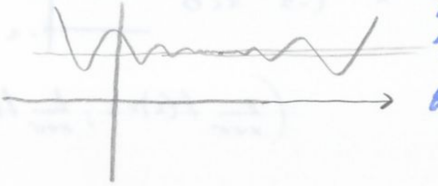
LEZIONE 12/11/12

DERIVATE

Il concetto di derivata è richiesto dalla fisica (trovare la velocità istantanea di un punto) e dalla geometria (cosa significa la retta Tg di un grafico).



La retta Tg è quella che, tra tutte quelle che passano per il punto, è più approssimata al grafico della funzione in quel punto.



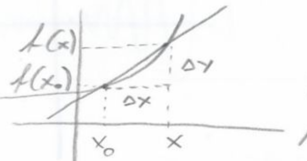
Ma la retta orizzontale è una Tg in quel punto? Interseca la funzione infinite volte, eppure...
Allora capisco che la definizione data non basta

COEFFICIENTE ANGOLARE

$y = mx + q$

$m = \mathrm{Tg}\,\theta = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$

Si considera una retta secante generica



$m_{secante} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Se pensiamo x_0 fisso, la x che posso prendere è qualunque, basta che sia $x \neq x_0$.

Questa funzione (è funzione, perché cambiando x il valore cambia) si chiama RAPPORTO INCREMENTALE. Man mano che $x \to x_0$, avrò diverse altre secanti sempre più inclinate, fino ad arrivare ad avere una POSIZIONE LIMITE in cui $x = x_0$. Il rapporto incrementale della posizione limite è la RETTA Tg a $f(x)$ in x_0.

Def:
Sia f definita in un intorno di x_0. Diciamo che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e si pone $\boxed{f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ la derivata di $f(x)$ in x_0

$\left(f'(x) = Df(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0} \right)$

Se f è derivabile in x_0 la retta Tg "in x_0" oppure "nel punto $(x_0 ; f(x_0))$" è la retta

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

LEZIONE 14/11/12

f derivabile in $x_0 \iff \exists$ finito il limite $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$\Updownarrow$$

$\exists$ finito $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

---

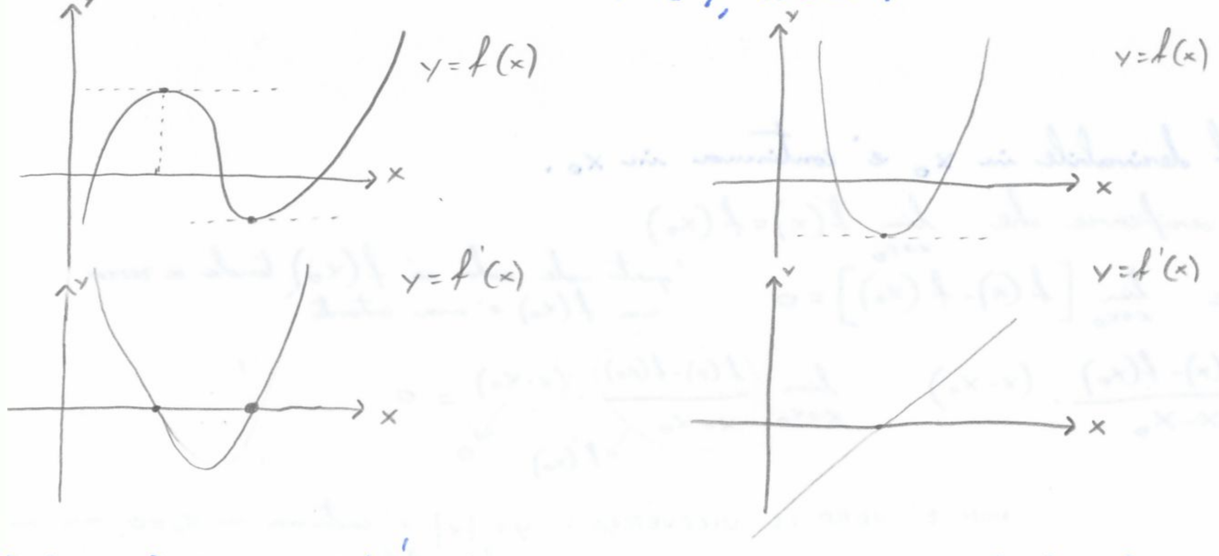
f continua in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$$\Updownarrow$$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

Se f è definita su un intervallo I f si dice derivabile in I se è derivabile in tutti i punti INTERNI ad I (punti che non sono gli estremi dell'intervallo) e nell'estremo sinistro di I, se questo è $\in I$, f è derivabile a destra, mentre nell'estremo destro...

La derivata si denota con $f'(x)$, $x\in I$.



PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

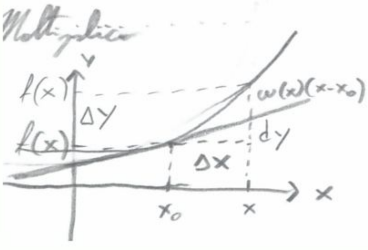
↳ PRIMA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Faccio ora la funzione differenza: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$ e la chiamo $\omega(x)$. Sicuramente possiamo dire che $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0$

$\Rightarrow \omega(x)$ è infinitesima per $x\to x_0$.

Moltiplico per $(x-x_0)$ e ho:

$$\boxed{f(x)-f(x_0)=\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{dy}+\underbrace{\omega(x)(x-x_0)}_{o(x-x_0)}}$$



$$\boxed{\Delta y = dy + o(x-x_0)}$$

DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

1) $f(x) = x^n \qquad f'(x) = n x^{n-1}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + \dots + a^1 b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$\frac{\cancel{(x-x_0)}\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0^1 + \dots + x^1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)}{\cancel{x-x_0}}$$

$x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1}$

per $x \to x_0$

$f'(x) = n x^{n-1} \qquad \Rightarrow n x^{n-1}$

2) $f(x) = x^\alpha \qquad f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 + h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} = x_0^\alpha \lim_{h \to 0} \frac{\left(1 + h/x_0\right)^\alpha - 1}{h}$$

$$= \frac{x_0^\alpha}{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\left(1 + h/x_0\right)^\alpha - 1}{h/x_0} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

3) $f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$$f'(x) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} = \cos x_0$$

$1/2 \cdot 0 = 0$

4) $f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

5) $f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \log a$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (a > 0)$

$\hookrightarrow f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

ESEMPIO:

$D\,3^{\sin x}$ ← FUNZIONE COMPOSTA $g(f(x))$ $\quad f(x)=\sin x \quad g(y)=3^y \quad g'(y)=3^y \log 3$

$$D\,3^{\sin x} = D(g(y))\cdot D(f(x)) = 3^{\sin x}\cdot \log 3 \cdot \cos x$$

La derivata di funzioni composte si applica anche ripetutamente

ES:

$D\sqrt{1+\cos^2 x} =$ $\quad g(f(x)) \quad g(y)=\sqrt{y} \quad f(x)=1+\cos^2 x$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\cdot\left(2\cos x\cdot(-\sin x)\right)$$

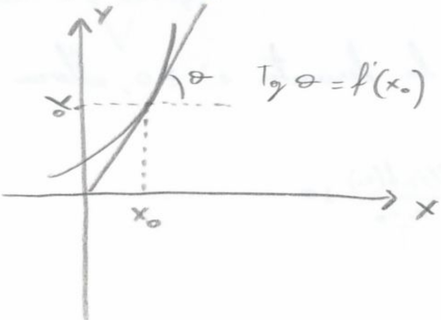
DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia f definita e continua (E STRETTAMENTE MONOTONA) in un intervallo I e derivabile in un punto $x_0 \in I$, con $f'(x_0) \neq 0$.

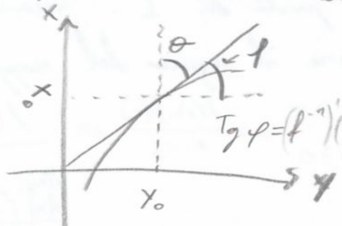
Allora la funzione inversa f^{-1} (che è definita su $f(I)$) è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

"La derivata della funzione inversa è il reciproco della funzione derivata della funzione calcolata nell'intervallo I"



La funzione inversa



$\theta + \varphi = \pi/2$

$Tg\,\varphi = (f^{-1})'(y_0) \quad Tg\,\theta\,\varphi = \frac{1}{Tg\,\theta}$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

ESEMPIO:

$y = \sin x \quad x \in (-\pi/2; \pi/2)$

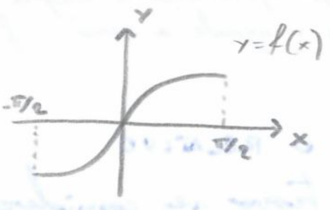
$-1 < y < 1$

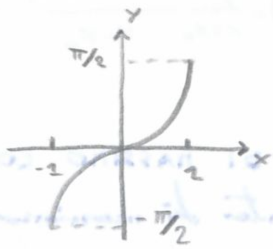
$x = \arcsin y$

$\cos^2 x = \sqrt{1-y^2}$

$\cos x = \pm\sqrt{1-y^2} \rightarrow \cos x = \sqrt{1-y^2}$

NB: prendo $+\sqrt{\ }$ e non $-\sqrt{\ }$ perché vedo che $x \in (-\pi/2; \pi/2) \Rightarrow \cos x \in (0;1)$





$x = \arcsin y$

$$D \arcsin y = \frac{1}{D \sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Longrightarrow D \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

TEOREMA DI FERMAT

Sia f una funzione definita in un intorno (quindi NON AGLI ESTREMI) di un punto, derivabile in x_0 e avente in x_0 un punto di massimo o minimo relativo. Allora $f'(x_0)=0$

DIM

Supponiamo x_0 punto di max relativo. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\begin{cases} \geq 0 & \text{se } x_0 > x \\ \leq 0 & \text{se } x_0 < x \end{cases}$

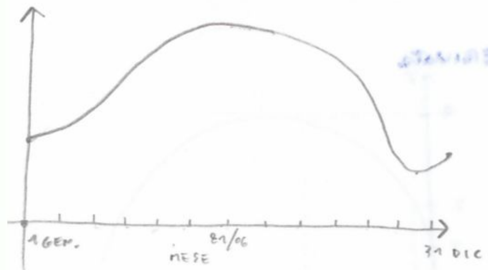
Questo vale se $\begin{cases} \geq 0 \longrightarrow x_0-\delta < x < x_0 \\ \leq 0 \longrightarrow x_0 < x < x_0+\delta \end{cases}$ cioè per un opportuno intorno di zero.

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \qquad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad f'(x_0)=\underbrace{f'_+(x_0)}_{\leq 0}=\underbrace{f'_-(x_0)}_{\geq 0}=0$$

DEF: PUNTO STAZIONARIO

Un punto x_0 in cui $f'(x_0)=0$ si chiama PUNTO STAZIONARIO.

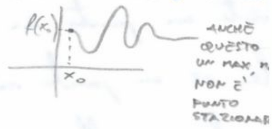
Ciò vuol dire che $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è prossimo a zero quando x è vicino a x_0. Quindi



Quando siamo in prossimità degli equinozi, percepiamo in due o tre giorni che la luce aumenta, quando invece siamo vicino ai solstizi non ci accorgiamo dell'aumento di luce giornaliero: sembra costante.

NB:

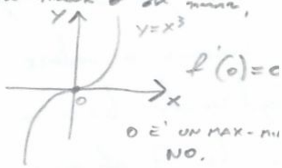
Se x_0 è un punto di massimo relativo allora x_0 è un punto stazionario. FALSO



I punti di MAX, MIN relativo vanno ricercati tra:

- GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO
- TRA I PUNTI INTERNI IN CUI f NON E' DERIVABILE
- TRA I PUNTI INTERNI IN CUI f E' DERIVABILE E $f'(x)=0$

Quest'ultima condizione, cioè il teorema di Fermat, non ci dà da sola la sicurezza di avere a che fare con un punto di max o di min, ci permette di restringere il campo. È condizione necessaria ma non sufficiente.



SIMBOLI DI LANDAU

$\sin t = t + o(t)$, $t \to 0$

$\sin\left(\frac{1}{3}x^4\right) = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$, $x \to 0$

$\sin(x-2) = x-2+o(x-2)$, $x \to 2$, $x-2 \to 0$

$\sin\left(\frac{3}{x^4}\right) = \frac{3}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$, $x \to +\infty$, $3/x^4 \to 0$

$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, $t \to 0$

$\cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2 + o(x)$, $x \to 0$

$\cos\left(\frac{2}{x^3}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$, $x \to +\infty$, $2/x^3 \to 0$

$e^t = 1 + t + o(t)$, $t \to 0$

$e^{-5/x} = 1 - \frac{5}{x} + o(1/x)$, $x \to +\infty$, $-5/x \to 0$

$e^{x-3} = 1 + x - 3 + o(x-3)$, $x \to 3$, $x-3 \to 0$

$\log(1+t) = t + o(t)$, $x \to 0$

$\log(1+4x^5) = 4x^5 + o(x^5)$, $x \to 0$

$\log(4+x^5) = \log 4\left(1+\frac{x^5}{4}\right) = \log 4 + \log(1+x^5) = \log 4 + \frac{x^5}{4} + o\left(\frac{x^5}{4}\right)$

$\log_a(1+t) = \log_a e \cdot t + o(t)$, $x \to 0$

$\log\left(1-\frac{7}{x^2}\right) = -\frac{7}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x \to +\infty$, $-7/x^2 \to 0$

$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$, $x \to 0$

$\sqrt[4]{1+8x^4} = 1 + \frac{1}{4}\cdot 8x^4 + o(x^4)$, $x \to 0$

$\sqrt[3]{1-3/x^4} = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$, $x \to +\infty$, $-3/x^4 \to 0$

$\sqrt[3]{8+x^4} = \sqrt[3]{8(1+1/8\,x^4)} = 2\sqrt[3]{1+1/8\,x^4} = 2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)$

$(x-1)^x = e^x + o(x^x)$, $x \to +\infty$

$(x-\alpha)^x = e^\alpha x^x + o(x^x)$, $x \to +\infty$

$a^x = 1 + x\log_e a + o(x)$

TEOREMA

SE (a_n) È UNA SUCCESSIONE CRESCENTE, ALLORA $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$. SE (a_n) È UNA SUCCESSIONE DECRESCENTE, ALLORA $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS

OGNI SUCCESSIONE LIMITATA HA UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE

FUNZIONE INFINITESIMA: SE $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

FUNZIONE INFINITA: SE $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

'F È O-PICCOLO DI G': SE $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ E SI SCRIVE $f = o(g)$

'F È ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTE A G': SE $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ $f \sim g$

ALGEBRA DEGLI O-PICCOLI

- $o(g) \pm o(g) = o(g)$
- $f \cdot o(g) = o(f\cdot g)$
- $\lambda \cdot o(g) = o(\lambda\cdot g) = o(g)$
- $o(f)\cdot o(g) = o(f\cdot g)$
- $o(f)^n = o(f^n)$
- $f_1 \sim f_2,\ g_1 \sim g_2 \Rightarrow \begin{cases} f_1 g_1 \sim f_2 g_2 \\ f_1/g_1 \sim f_2/g_2 \end{cases}$

• se $f = o(g),\ g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$

• $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$

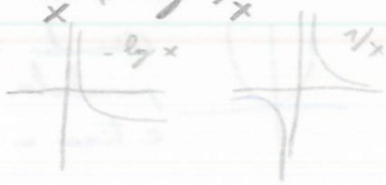
• SE $f \sim g,\ g \sim h \Rightarrow f \sim h$

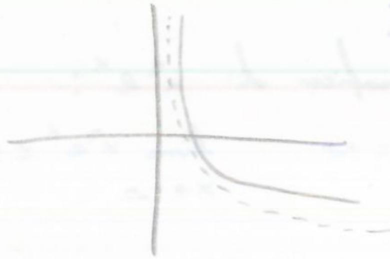
• se $f \sim g,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$

• $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g)$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f = g + o(g)$

Voglio il grafico di $\frac{1}{x} + \log \frac{1}{x}$

$\log \frac{1}{x} = - \log x$





ES

$y=f(x)$ legge oraria del moto di un punto con velocità $f'(x)$; $|f'(x)| \le 10$ m/s. in I [3;7]

Quindi supponiamo che il punto sulla nostra retta si muova in un verso o nell'altro con una velocità sempre minore di 10 m/s. o uguale ad essa.

Già intuitivamente possiamo capire che in I, cioè in 4 secondi, al massimo il nostro punto percorre 40 metri.

La matematica ci dice questo risultato con il teorema di Lagrange:

$f(7)-f(3)=f'(c)(7-3) \le 10 \cdot 4 = 40$ m

LEZIONE 21/11/12

$$D\left(f(x)^{g(x)}\right) = D\, e^{g(x)\lg f(x)} = e^{g(x)\lg f(x)} \cdot \left[g'(x)\cdot \lg f(x) + g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right]$$

$$= f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot \lg f(x) + g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right]$$

ES: $D\, x^x = D\, e^{x\lg x} = e^{x \lg x}\cdot\left[1\cdot\lg x + x\cdot\frac{1}{x}\right] = x^x\cdot(\lg x+1)$

ES: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lg n} = \lim_{n\to\infty} e^{\lg n\cdot \lg(1+1/n)}$ $\leftarrow$ $\left[\lg n \cdot \lg(1+1/n) = \lg n\cdot\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\lg n}{n} + o\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right.$

$= \lim_{n\to+\infty} e^0 = 1$

CONSIGLIO: USARE SEMPRE QND SI PUO' I SIMBOLI DI LANDAU, PERCHE' SONO LA COSA PIU' MECCANICA CHE C'E' E NON RICHIEDE GRANDI IDEE.

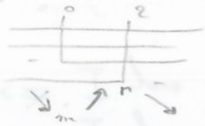
ES: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}\lg\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}$ $\longrightarrow \sqrt{n}\left(1/n^3+o(1/n^3)\right) = +\infty$ $= \lim_{n\to+\infty} e^{+\infty} = +\infty$

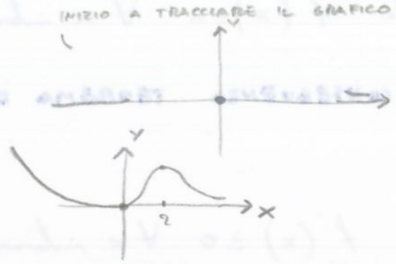
ES: tracciare il grafico di $f(x)=x^2e^{-x}$

- $D: \mathbb{R}$
- $f(x)\geq 0 \ \forall x>0$, $f(0)=0$
- $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$

INIZIO A TRACCIARE IL GRAFICO:

- $f'(x)=2xe^{-x}+x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1) = x(2-x)e^{-x} \geq 0$ per $0\leq x\leq 2$





$x=0$ punto di min relat (ass)
$x=2$ punto di max relat

DEFINIZIONE DI PRIMITIVA

Una funzione f si dice PRIMITIVA di una funzione g su un intervallo I se f è derivabile in I e la sua derivata coincide con la g: $f'(x)=g \ \forall x\in I$.

ES: $f(x)=x^2$ è una primitiva su $\mathbb{R}$ di $g(x)=2x$ perché $f'(x)=2x=g(x) \ \forall x\in\mathbb{R}$.

ES: $f(x)=\arcsin x$ è primitiva su $(-1;1)$ di $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ perché $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=g(x) \ \forall x\in(-1;1)$

OSSERVAZIONE

Se f è una primitiva di g anche $f(x)+c$ è una primitiva di g perché $D'(f(x)+c)=f'(x)=$

TEOREMA

Due qualsiasi primitive di una funzione g, su un intervallo I, differiscono per una costante.

Infatti se f_1, f_2 sono due primitive allora $\left.\begin{array}{l} f_1'(x)=g(x) \\ f_2'(x)=g(x)\end{array}\right. \forall x\in I.$

$Df_1 - Df_2 = g(x)-g(x)=0 \iff f_1'(x)=f_2'(x)$

ANCHE QUESTO È CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI LAGRANGE.

ES: $g(x)=x^3$ $\qquad$ primitive: $f(x)=\frac{1}{4}x^4+c \quad (c\in\mathbb{R})$

SIMBOLO PER LE PRIMITIVE

$\int g(x)\,dx$ (integrale indefinito di g) è il simbolo per denotare l'insieme delle primitive di g.

$g(x)$	$\int g(x)\,dx$
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ $\quad \alpha\in\mathbb{R}$

TEOREMA DI L'HÔPITAL

Si applica per il calcolo di limiti in forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, e dice che $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (quando esiste)

$$\downarrow$$
$$\frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty}$$

Siano f, g definite in un intorno di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ eventualmente privato di x_0, derivabili con $g'(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$. Supponiamo che il $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.

Allora $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ quando quest'ultimo esiste.

ES: $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{H} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\cancel{x}}{1+x}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}$

So che $\log(1+x) = x + o(x) \longrightarrow \log(1+x) - x = o(x) \Rightarrow$ tende a zero più velocemente di x

Qui abbiamo avuto f diviso x^2 tende a $-\frac{1}{2}$. Allora so che f è infinitesimo di ordine 2 rispetto all'infinitesimo campione x.

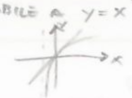
$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)^{\alpha}} = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \log(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \longrightarrow$ PIU' PRECISA DI $\log(1+x) = x + o(x)$!

INFATTI $\log(1+x) = x + o(x)$ VUOL DIRE CHE IN x VICINE A ZERO $\log(1+x)$ E' APPROSSIMABILE A $y = x$



$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ SI DICE CHE

$y = x - \frac{1}{2}x^2$

IN x VICINE A ZERO $\log(1+x)$ E' APPROSSIMABILE A $y = x - \frac{1}{2}x^2$ E COME VEDIAMO E' PIU' PRECISO PERCHE' TIENE CONTO DELLA CURVATURA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 104

POLINOMIO DI TAYLOR

Sia f derivabile $n-1$ volte in un intorno di x_0 e esiste la derivata n-esima in x_0. Si dice polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x_0 il polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Se $x_0 = 0$ si parla di polinomio di Mc Laurin

ES:

$f(x) = e^x \qquad x_0 = 0 \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$

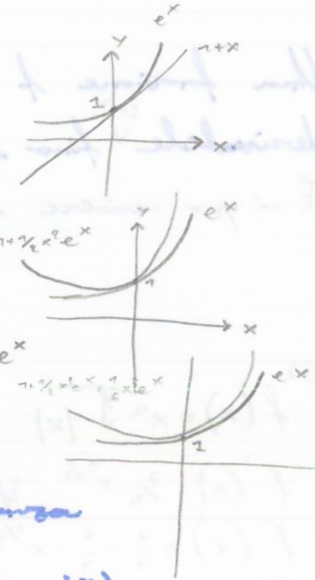
$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$

$\vdots \qquad \vdots$

$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 1 + x$

$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = 1 + \frac{1}{2}x^2e^x$

$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{f'''(x_0)}{3}(x-x_0)^3 = 1 + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$



Abbiamo quindi un polinomio candidato a verificare l'uguaglianza di prima: $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

È vera questa cosa? Sì è vera col polinomio di Taylor (+ il resto a parte).

TEOREMA DI TAYLOR (O FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO)

Se f è derivabile $n-1$ volte in un intorno di x_0 e esiste la derivata n-esima in x_0 allora $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$, dove $P_n(x)$ è il polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0.

NB: È IMPORTANTE CHIARIRE LA DISTINZIONE

FORMULA DI TAYLOR / SVILUPPO DI TAYLOR: $P_n(x) + o((x-x_0)^n)$

POLINOMIO DI TAYLOR: $P_n(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 2\left(\sqrt[2]{1+x}-1\right)}{x^2} = \frac{0+o(x)}{o(x)}$$ CON LANDAU COME SAPEVO FIN ORA $\Rightarrow$ NIENTE DA FARE

prendiamo ad esempio per il $\sin x$ ordine 3 e per $\sqrt[2]{1+x}$ ordine 2

$$= \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)-2\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-\cancel{1}\right)}{x^2} =$$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$

$\binom{1/2}{2} = \frac{1/2\cdot(1/2-1)}{2} = -\frac{1}{8}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+o(x^4)+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

ES:

Sviluppo di Taylor di ordine 3 in $x_0=0$ di $(1+x)^{\sin x}$

$(1+x)^{\sin x} = e^{\sin x \log(1+x)}$

$e^{\sin x \log(1+x)} = e^{x+\frac{a}{6}x^3+a x^2+o(x^4)} = 1+(\ )+\frac{1}{2}(\ )^2+\frac{1}{6}(\ )+o(\ )$

$e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)$

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE

Come la f. di Tay. con resto di Peano deriva dalla prima formula dell'incremento finito, questa deriva dalla seconda formula dell'incremento finito

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

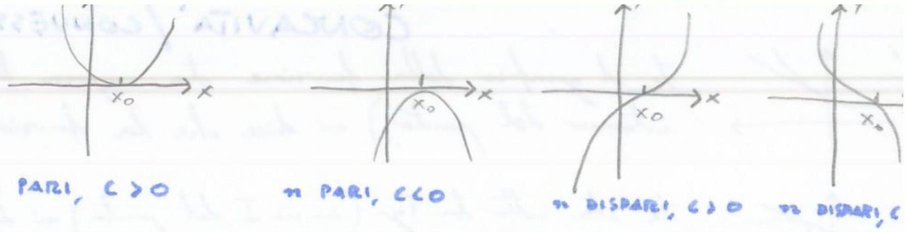
per un opportuno c sta tra x_0 e x.

ES:

$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{\sin c}{4!}\left(\frac{1}{10}\right)^4$ NOTO CHE IL RESTO E' $\frac{\sin c}{240'000}$, QUINDI L'ERRORE E' MINORE DI $\frac{1}{240'000}$ DI SICURO

Derivando dalla II f. dell'incr. finito, questa è formula quantitativa e non qualitativa. Serve per il calcolo di cifre decimali, infatti è usata dai circuiti delle calcolatrici.

$$f(x) = c\,(x - x_0)^n \qquad c = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$



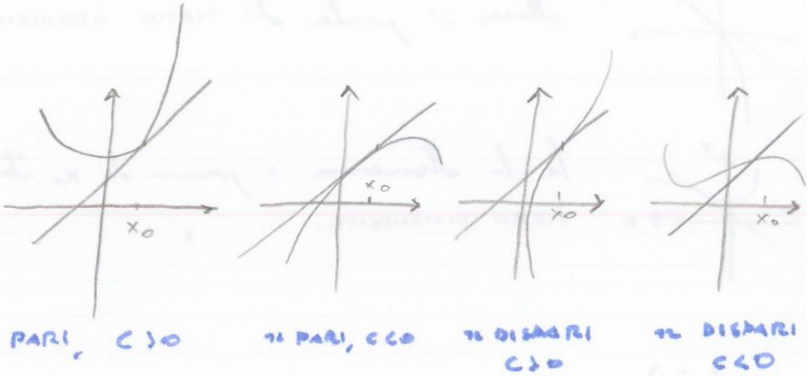
Però questa funzione è particolare perché ha derivate nulle fino alla derivata ennesima.

se io scrivo:

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + c\,(x - x_0)^n$$

RETTA T_g

$f(x)$ è somma tra una retta e la funzione i cui possibili grafici li ho disegnati a inizio pagina



⇓

TEOREMA

Nelle ipotesi del teorema di Taylor supponiamo inoltre che (se $n \geq 3$) $f''(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = \dots$ allora:

1) Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora f è STRETTAMENTE CONVESSA in x_0

2) Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora f è STRETTAMENTE CONCAVA in x_0.

3) Se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora f ha un PUNTO DI FLESSO ASCENDENTE in x_0.

4) Se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora f ha un PUNTO DI FLESSO DISCENDENTE in x_0.

Questo teorema non è da imparare a memoria, ma i grafici di questa pagina sono invece da sapere bene!

OSSERVAZIONE

Nelle ipotesi del teorema di Taylor se $f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ allora

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f'(x_0)$$
$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Sia f deriv. infinite volte e tale che

$f(x) = 2 - 3x + x^6 + o(x^6)$ per $x \to 0$

a) f è crescente in un int. di $x = 0$

b) f è convessa in $x = 0$

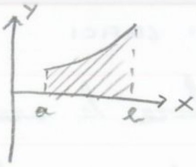
c) $f^{VI}(0) = 1 \cdot 6! > 0$ d) $f''(0) = f'''(0) = f^{IV}(0) = f^{V}(0) = 0$

$n = 6$ PARI $f^{VI}(0) > 0 \Rightarrow f$ convessa in $x = 0$

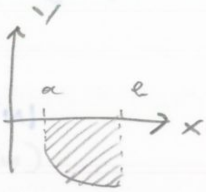
• Se $f \geq 0$ $A = \int_a^b f(x)\,dx$ = AREA DELLA REGIONE $\{(x,y) : a \le x \le b,\ a \le y \le$

l'insieme dei punti del piano

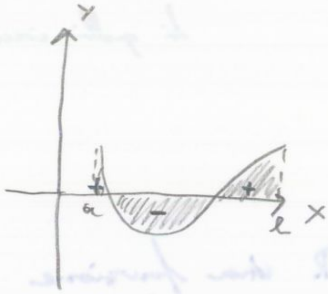
le cui y è compresa tra a e f(



• Se $f \leq 0$ $A = \int_a^b f(x)\,dx \cdot (-1)$

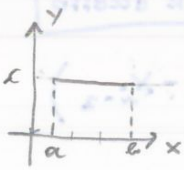


• Se $f \le 0 \vee f \ge 0$ A SECONDA DELL'INTERVALLO A = SOMMA ALGEBRICA DEI $\int$



ESEMPIO

$f(x) = c$



$$s_P = \sum_{i=1}^{n} c\,(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c\,(b-a)$$

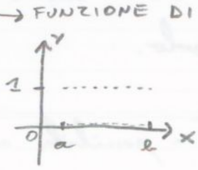
$$S_P = \dots\dots\dots = c\,(b-a)$$

$$\frac{I}{s = S}$$

$$\Rightarrow \int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$$

ESEMPIO FUNZIONE NON INTEGRABILE → FUNZIONE DI DIRICHLET

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



È stato lui a dire per primo che le funzioni devono essere considerate leggi qualsiasi: anche quelle non deducibili analiticamente. Da lui allora ci sono le funzioni definite a tratti, ad esempio

$$s_P = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i}_{0} (x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$S_P = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i}_{1} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a$$

$$s = \sup s_P = 0$$

$$\Rightarrow S = \inf S_P = b - a \longrightarrow s \neq S \Rightarrow f \text{ NON È INTEGRABILE su } [a,b]$$

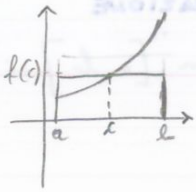
LEZ. 10/12/12

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

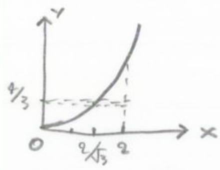
Se f è continua su un intervallo $[a,b]$ allora esiste $c \in [a,b] \mid f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

DIM:

Sappiamo che la media integrale di f è un valore compreso tra l'estremo superiore (= max, perché f è continua) e l'estremo inferiore (= min, perché f è continua) di f su $[a,b]$. Quindi per il teorema dei valori intermedi tale valore è assunto in un punto $c \in [a,b]$.



ES: $f(x) = x^2$ $\quad I\ [0;2]$

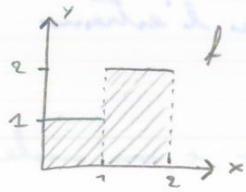


MEDIA INTEGRALE $= \frac{\int_0^2 x^2\,dx}{2-0} = \frac{8/3}{2} = \frac{4}{3}$ "NOI X ORA LO DIAMO PER BUONO..."

$f(c) = \text{MEDIA}$ $\quad c^2 = 4/3$ $\quad \boxed{c = 2/\sqrt{3}}$

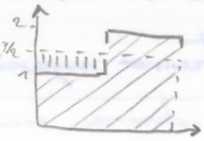
IL TEOREMA NON VALE, IN GENERALE, SE f NON È CONTINUA

ES:



$\int_0^2 f(x)\,dx = 3$

MEDIA INTEGRALE $= \frac{\int_0^2 f(x)\,dx}{2-0} = \frac{3}{2}$



È ancora vero che l'area del rettangolo è uguale all'area della funzione però $3/2$ non è un valore di f.

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

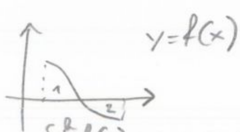
• LINEARITÀ: $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

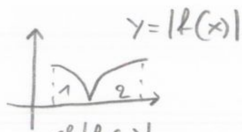
$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

se $f(x)+g(x)$ è integra
e $\lambda f(x)$ è integrabil

• MONOTONIA: $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ $\quad$ se $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$

$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ $\quad$ se $|f(x)|$ è pure integrabile





$\int_a^b f(x) = 1 - 2 = -1$

$\left|\int_a^b f(x)\right| = 1$

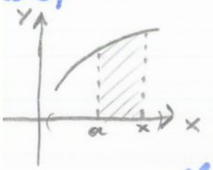
$\int_a^b |f(x)| = 1 + 2 = 3$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia f continua su un intervallo I e $a \in I$.

Definiamo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ — t è variabile muta, avrei potuto usare qualsiasi altra lettera a parte x perché è già impegnata.

→ DETTA FUNZIONE INTEGRALE DI f



allora F è una primitiva di f, ossia $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

DIM.:

Sia x_0 un punto interno ad I. Verifichiamo che $F'(x_0) = f(x_0)$, ossia

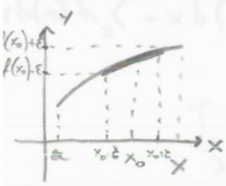
$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0}$$

→ = MEDIA INTEGRALE DI f nell'intervallo $[x_0; x]$ o $[x; x_0]$.

TOTALE: $F'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} = f(x)$

Siccome f è continua in x_0, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ ;$ se $|x - x_0| < \delta, \ x \in I \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



DEF. CONTINUITA' → $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

DEF. LIMITE ↘

$$\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

se $|x - x_0| \leq \delta$

Perciò $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ ; \ |x - x_0| < \delta, \ x \in I \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

CONSEGUENZA:
- Una funzione continua ha sempre una primitiva
- Non è detto che funzioni discontinue ce le abbiano.

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Se f è continua su un intervallo I, G è una sua primitiva e $a, b \in I$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

Siccome f è continua, se consideriamo $\int_a^x f(t)\,dt$ questa è una primitiva, ma noi conosciamo già un'altra primitiva: G.

Queste allora devono essere uguali a meno di una costante (è conseguenza del teorema di Lagrange). $\int_a^x f(t)\,dt = G + K$. Sostituendo $x = a \rightarrow 0 = G(a) + K \quad K = -G(a)$

$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$F'(y) = f(y)$

$F(\varphi(x)) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy$$

con $y = \varphi(x)$

$$\boxed{\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + c}$$

NB: DIFFERENZIALE

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \boxed{\varphi'(x)\, dx} = \int f(y)\, dy$$

con $y = \varphi(x)$

$dy = \varphi'(x)\, dx$

NB: LA FORMULA NON RICHIEDE CHE $\varphi(x)$ SIA INVERTIBILE

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy \qquad f \in C^0(J),\ \varphi \in C^1(I),\ \varphi(I) \subset J$$

ES:

$\int_2^3 x e^{x^2} dx$ — noto che l'integrazione per parti in questo caso complica la funzione di partenza. Allora uso l'integrazione per sostituzione

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_4^9 e^y dy = \frac{1}{2}\left[e^y\right]_4^9 = \frac{1}{2}\left(e^9 - e^4\right)$$

$y = x^2$

$dy = 2x\, dx$

ES:

c'è una funzione e la sua derivata: $-\sin x$ è derivata del $\cos x$ =>

$$\int \operatorname{Tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{y} dy = -\log|y| + c$$

$$= -\log|\cos x| + c$$

$y = \cos x$

$dy = -\sin x\, dx$

ES:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2}\log|y| + c = \frac{1}{2}\log|1+x^2| + c = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

$1+x^2 = y$

$dy = 2x\, dx$

("Tolgo il valore assoluto perché $1+x^2$ è sempre positivo")

ES:

$$\int \operatorname{arcTg} x\, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arcTg} x\, dx = x \operatorname{arcTg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arcTg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

$f'(x) = 1 \quad f(x) = x$

$g(x) = \operatorname{arcTg} x \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

INTEGRO PER SOSTITUZIONE

NB: GLI INTEGRALI DELLE FUNZIONI ELEM. INVERSE ($\log x$, $\operatorname{arcsin} x$, ...) VENGONO BENE INTEGRANDO PER PARTI PONENDO 1• LA FUNZIONE

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

12/12/12

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx \qquad A(x),\ B(x) \text{ polinomi}$$

ES: GRADO $B(x) = 2$

GRADO $A(x) \leq 1$

- SE $B(x)$ HA DUE RADICI REALI DISTINTE x_1, x_2

$$\boxed{\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{c_1}{x-x_1} + \frac{c_2}{x-x_2}}$$

per opportune costanti c_1, c_2.

DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI

$$\int \frac{x^3+x^2+6x+1}{x^2+x-2}\,dx = \int x + \frac{8x+1}{x^2+x-2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{8x+1}{x^2+x-2}\,dx$$

$B(x) = x^2+x-2 \qquad x_{1/2} = \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \int \frac{c_1}{x+2} + \frac{c_2}{x-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\lg|x+2| + \frac{1}{5}\lg|x-1| + c$$

$$\frac{8x+1}{x^2+x-2} = \frac{c_1}{x+2} + \frac{c_2}{x-1} \qquad \frac{c_1(x-1)+c_2(x+2)}{x^2+x-2} = 8x+1$$

$$\frac{xc_1 - c_1 + xc_2 + 2c_2}{x^2+x-2} = \frac{(c_1+c_2)x + 2c_2 - c_1}{x^2+x-2}$$

$$\begin{cases} 8 = c_1 + c_2 \\ 1 = 2c_1 - c_2 \end{cases} \qquad c_1 = 8 - c_2 \qquad 1 = 16 - 2c_2 - c_2 \qquad 3c_2 = 15 \qquad c_1 = 3,\ c_2 = 5$$

IN ALTERNATIVA, PER TROVARE c_1, c_2:

- MOLTIPLICO IL 2° MEMBRO NEL RETTANGOLO PER $(x-x_1)$

$\Rightarrow c_1 + c_2 \frac{(x+2)}{(x-1)}$

- PRENDO $\lim_{x\to -2}$ IN MODO DA AVERE $c_2 \cdot 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to -2} = \frac{-15}{-3} = 5$

- SE $B(x)$ HA DUE RADICI REALI COINCIDENTI

$$\boxed{\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{c_1}{x-x_1} + \frac{c_2}{(x-x_1)^2}}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2}$$

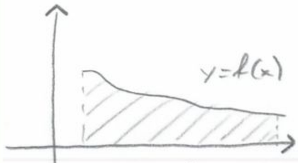
$$\hookrightarrow \frac{x-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lg|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ldots$$

INTEGRALI IMPROPRI

19/12/12

CIOE' INTEGRALI SU INTERVALLI ILLIMITATI



f continua in $[a;+\infty)$

DEF. INTEGRALE IMPROPRIO

Si definisce l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

$$= \boxed{\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx}$$ quando il limite esiste

↳ e la funzione integrale $F(x)$

IL LIMITE	L'INTEGRALE
finito	convergente
$+\infty$	divergente positivamente
$-\infty$	divergente negativamente
NON ESISTE	INDETERMINATO

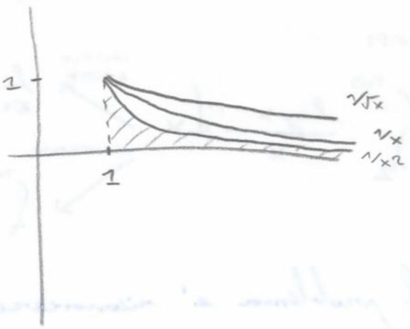
ES: $f(x)=\frac{1}{x^2}$ in $[1;+\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \left(1-\frac{1}{c}\right) \quad \lim_{c\to+\infty}\left(1-\frac{1}{c}\right)=1$$

ES:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left[\lg|x|\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \lg|c| = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases}\text{converge se } \alpha>1\\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha\le 1\end{cases}$$



CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Se la funzione f per $x\to+\infty$ è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^\alpha}$, eventualmente per una costante, allora

Se $f(x)\sim\frac{c}{x^\alpha}$ per $x\to+\infty$ con $c\neq 0$, allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$
- se $\alpha>1$ converge
- se $\alpha\le 1$, $c>0$ diverge a $+\infty$
- se $\alpha\le 1$, $c<0$ diverge a $-\infty$

ESEMPI:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2+e^{-x}}{\sqrt{x}\,(x^4+1)}\,dx \sim$$

$$\frac{x^2+e^{-x}}{\sqrt{x}\,(x^4+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^{9/2}} = \frac{1}{x^{5/2}}$$

$\alpha = 5/2 \quad \alpha>1 \Rightarrow$ l'integrale converge

ES:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$$

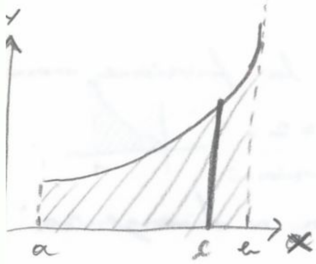
"Questa è una situazione tipica di quando uno vuole sbarazzarsi di seni e coseni QUANDO INTERVENGONO COME FOSSERO UN PRODOTTO";

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{x^{3/2}}$$

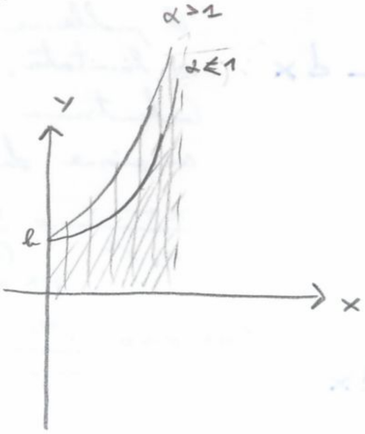
$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx \text{ CONVERGE} \Longrightarrow}_{\text{CRITERIO DEL CONFRONTO}} \int \left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| dx \text{ converge} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA}} \int \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx \text{ converge}$$

NTEGRALI DI FUNZIONI ILLIMITATE

$f: [a; b)$ continua



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$



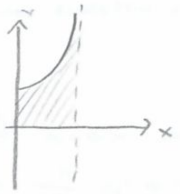
$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\, dx$$

se $\alpha \ge 1$ diverge

se $\alpha < 1$ converge

ES

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$$



EQUAZIONI DIFFERENZIALI

EQUAZIONE ALGEBRICA: l'incognita è un numero

EQUAZIONE DIFFERENZIALE: l'incognita è una funzione e compaiono nell'uguaglianza anche le sue derivate

ES: $y' = 2y$ $\longrightarrow$ $y(x)$: FUNZIONE INCOGNITA: cerchiamo la $f(x)$ la cui derivata $f'(x)$ sia uguale a 2 volte la funzione stessa.

La soluzione è $f(x) = e^{2x}$

Una soluzione di un'equazione differenziale di ordine n (in cui intervengono le derivate fino all'ordine n) è una funzione $y(x)$ definita su un intervallo I e derivabile n volte che soddisfi l'equazione $\forall x \in I$.

ES: $y' = y$
$$\begin{cases} y(x) = e^x & \forall x \in \mathbb{R} \\ y(x) = c e^x & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
INFINITE SOLUZIONI

Queste sono tutte soluzioni, ma verifichiamo che non ce ne siano altre:
Sia quindi $y(x)$ una soluzione $\left(e^{-x}y(x)\right)' = -e^{-x}y(x) + e^{-x}y'(x)$ ma per ipotesi $y'(x) = y$

$\Rightarrow \left(e^{-x}y(x)\right)' = -e^{-x}y(x) + e^{-x}y(x) = 0$ $\Rightarrow e^{-x}y(x) = c$ costante su I $\Rightarrow \boxed{y(x) = c e^{x}}$

NB: nell'esempio interviene UNA costante arbitraria perché è un'equazione del primo ordine. Se fosse stata di secondo ordine allora avremmo avuto DUE costanti arbitrarie.

PROBLEMA DI CAUCHY

Se io disegno i grafici delle soluzioni, essendo queste infinite, riempio il piano eccetto (y

La cosa interessante è che queste soluzioni non si intersecano mai: se io prendo un punto $(x_0; y_0)$ allora per esso passerà una ed una sola funzione soluzione.

Se ho perciò uno STATO INIZIALE (un punto fissato) le infinite soluzioni si riducono ad un'unica funzione.

Per le classi di equazioni del primo ordine che noi vedremo (lineari e a variabili separabili) esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \text{EQUAZIONE} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
DEFINITA IN UN INTORNO DI x_0

1

es: $y' + \underbrace{x}_{a(x)} y = \underbrace{x}_{b(x)}$ in $I = \mathbb{R}$

Primitiva di $a(x) = x$ in $\mathbb{R}$ $\quad A(x) = \frac{1}{2}x^2$

Primitiva di $b(x)e^{A(x)} = xe^{\frac{1}{2}x^2}$ $\quad B(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$

INTEGRALE GENERALE: $y(x) = e^{-A(x)}\left[B(x) + c\right]$ $\quad y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left[e^{\frac{1}{2}x^2} + c\right] = 1 + ce^{-x^2/2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

---

es: $\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = x \\ y(1) = 2 \end{cases}$

$a(x) = \frac{1}{x}$ $\quad b(x) = x$

$I = (0;+\infty)$ potevamo scegliere $(-\infty;0)$, però dovendo poi risolverla in $x=1$ mi serve $(0;+\infty)$.

$A(x) = \int \frac{1}{x}dx = \log x$

$B(x) = \int x e^{\log x} dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$

INTEGRALE GENERALE: $e^{-A(x)}\left[B(x)+c\right] = e^{-\log x}\left[\frac{1}{3}x^3 + c\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{3}x^3 + c\right]$

$\begin{cases} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x} \\ y(1) = 2 \implies \frac{1}{3} + \frac{c}{1} = 2 \quad c = \frac{5}{3} \end{cases}$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\underbrace{y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3x}}_{\text{PER } x>0}$$

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y(x))}$$

dove $g(x)$ è una funzione continua in un intervallo I e $h(y)$ è una funzione continua in un intervallo J

es: $y' = \underbrace{(y^2+y-6)}_{h(y) \text{ definita in } J=\mathbb{R}} \underbrace{\log x}_{g(x) \text{ definita in } I=(0;+\infty)}$

DISTINGUIBILI PERCHÉ CONCORRE IL PRODOTTO TRA UNA f DOVE COMPARE LA SOLA x E UN'ALTRA DOVE COMPARE LA SOLA y.

es: $y' = e^{x+y}$ è a variabili separabili? Sì, infatti si può scrivere come $y' = \underbrace{e^x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^y}_{h(y)}$

NB: SE CI FOSSE STATA y AL POSTO DI e^y SAREBBE STATA UNA EQ. DIFF. LINEARE.
$\implies$ È LINEARE SE y COMPARE IN FORMA POLINOMIALE.

RICERCA DI SOLUZIONI COSTANTI:

Sono le funzioni $y(x) = c$, $x \in I$ che sono soluzioni ovvero soddisfano l'equazione:

$0 = g(x)h(c) \implies h(c) = 0$

Le soluzioni costanti sono $y(x) = c$ $\quad x \in I$ dove c verifica $h(c) = 0$.

es: $y' = \underbrace{(y^2+y-6)}_{h(y)}\log x$ $\quad x \in I = (0;+\infty)$

$y^2+y-6=0$ $\quad y=-3 \vee y=2$ SOLUZIONI COSTANTI DELL'EQUAZ.

EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE LINEARI A COEFF. COSTANTI

$$\boxed{y'' + a y' + b y = g(x)}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ COSTANTI

$g(x)$ funzione continua su un intervallo I

Se $g(x)=0$ l'eq. è OMOGENEA $\boxed{y'' + a y' + b y = 0}$

"Queste equazioni hanno delle soluzioni di tipo esponenziale".

RISOLUZIONE DELL'OMOGENEA

Cerchiamo delle soluzioni nella forma $y(x)=e^{\lambda x}$ $\left(y'(x)=\lambda e^{\lambda x} \quad y''(x)=\lambda^2 e^{\lambda x}\right)$

$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}} + a\lambda \cancel{e^{\lambda x}} + b \cancel{e^{\lambda x}} = 0 \qquad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ EQUAZIONE CARATTERISTICA DELL'OMOGENEA

Quindi se λ è soluzione dell'eq. caratteristica allora $e^{\lambda x}$ è una soluzione dell'eq. omogenea.

Quindi se l'eq. caratteristica delle due radici $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ allora ha le due soluzioni

$y_1(x)=e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$

) Se λ è una radice doppia dell'eq. caratteristica allora sono soluzioni dell'eq. omogenea

$y_1(x)=e^{\lambda x} \qquad y_2 = x e^{\lambda x}$

) Se l'eq. caratteristica ha radici complesse $\lambda = \alpha \pm i\beta$ $(\beta \neq 0)$, allora sono soluzioni dell'omogenea. $y_1(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

10/01/13

Da queste osservazioni si può risalire a tutte le soluzioni dell'equazione.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE (VALE PER EQ. LINEARI OMOGENEE)

Se $y_1(x), y_2(x)$ sono due soluzioni anche $y_1(x)+y_2(x)$ è soluzione

Se $y(x)$ è soluzione e $c \in \mathbb{R}$ allora anche $c\,y(x)$ è soluzione.

Infatti se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni vuol dire che soddisfano l'equazione:

$\Rightarrow y_1''(x) + a y_1'(x) + b y(x) = 0 \quad , \quad y_2''(x) + a y_2'(x) + b y(x) = 0$

devo verificare che $(y_1(x)+y_2(x))'' + a(y_1(x)+y_2(x))' + b(y_1(x)+y_2(x)) = 0$

ossia $\underbrace{y_1''(x) + a y_1'(x) + b y_1(x)}_{=0} + \underbrace{y_2''(x) + a y_2'(x) + b y_2(x)}_{=0} = 0$

Quindi se ad esempio $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni allora

$e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}$ è soluzione

$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni

Ecco le infinite soluzioni

EQ. CARATTERISTICA	INTEG. GENERALE EQ. DIFF. OMO
2 RADICI REALI E DISTINTE λ_1, λ_2	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
UNA RADICE DOPPIA λ	$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
2 RADICI COMPLESSE $\lambda = \alpha \pm i\beta$ $(\beta \neq 0)$	$C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

NB: perché nel 3 caso ci sono seni e coseni?
Ricorda la formula di Eulero: se $\lambda = \alpha + i\beta$, allora $e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} =$
$= e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin...$

ES: $y'' + y' - 2y = 0$ eq. caratteristica: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
$(\lambda+2)(\lambda-1)$
$\lambda_1 = -2$
$\lambda_2 = 1$

INTEGRALE GENERALE: $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

ES: $y'' - 4y' + 4y = 0$ eq. caratteristica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
$(\lambda - 2)^2 = 0$
$\lambda = 2$ DOPPIA

INTEGRALE GENERALE: $y(x) = C_1 e^{2x} + x C_2 e^{2x}$

ES: $y'' + 2y' + 5y = 0$ eq. caratteristica: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$
$\lambda = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$
$\alpha = -1$
$\beta = 2$

INTEGRALE GENERALE: $y(x) = C_1 e^{-x} \cdot \cos 2x + C_2 e^{-x} \cdot \sin 2x$