NUMERO: 1104

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

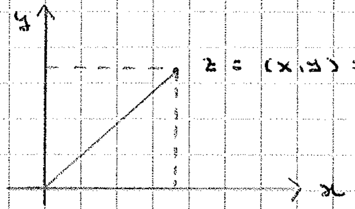
STUDENTE: Lecce

MATERIA: Metodi Matematici + Eserc.

Prof. Recupero

Richiami sui complessi

I numeri complessi sono rappresentati come vettori nel piano complesso



$z = (x,y) = x + iy$

$1 = (1,0)$ unità reale

$i = (0,1)$ unità immaginaria

$x + iy$ è detta forma cartesiana del numero compl.

$x = Re\{z\}$ $y = Im\{z\}$

Somma e prodotto

$z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$

Si definisce somma di due numeri complessi z_1 e z_2 la seguente: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Ricordiamo che $\boxed{i^2 = i \cdot i = -1}$

allora si definisce prodotto tra due numeri complessi z_1 e z_2 la seguente:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

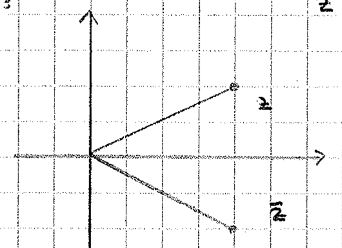
$$x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2 y_1y_2 =$$

$$\underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{Re\{z_1z_2\}} + \underbrace{i(x_1y_2 + y_1x_2)}_{Im\{z_1z_2\}}$$

Addizione e moltiplicazione rendono i numeri complessi un campo cioè valgono proprietà associativa, commutativa ... e viene indicato con $\mathbb{C}$

Coniugato e modulo

consideriamo il numero complesso $z = x + iy$ si definisce complesso coniugato di z e lo si indica con $\bar{z}$ il seguente numero complesso: $\bar{z} = x - iy$



speculare rispetto all'asse reale

$z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

Definiamo rappresentazione trigonometrica del numero z:

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Rappresentazione esponenziale

Ricordiamo che per la formula di Eulero:

$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

pertanto il numero complesso z può essere anche scritto così: $x + iy = \rho\cos\theta + \rho i\sin\theta = \rho e^{i\theta}$

Il numero complesso z ha esattamente tutte le proprietà dell'esponenziale.

esempio: $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ $\quad z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Abbiamo ottenuto che:

$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

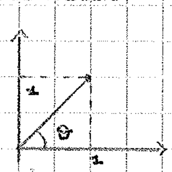
esempio: calcolare le radici di $z^3 = 1 + i$

• Teorema fondamentale dell'algebra:

Ogni equazione algebrica ammette esattamente un numero di soluzioni nel campo $\mathbb{C}$ pari al grado del polinomio

- scrivo z in coordinate esponenziali

$1 + i = re^{i\tau}$ $\quad |1+i| = \sqrt{2}$ $\quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$



$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} \Longrightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

Due numeri complessi sono uguali se sono uguali i moduli e gli argomenti:

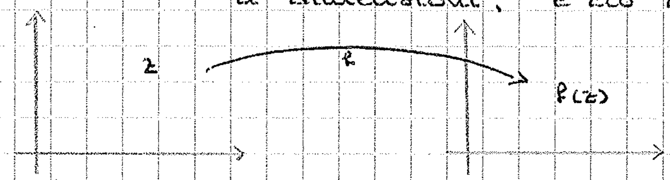
$$\begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

- Funzioni su $\mathbb{C}$

Consideriamo una funzione f così definita:

$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

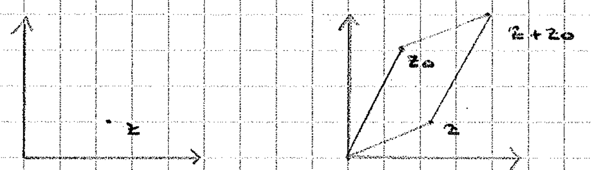
osservazione: la funzione è definita su un piano bidimension. a valori in un piano bidimensionale, quindi per poter fare il grafico avremmo bisogno di 4 dimensioni, e ciò non è possibile allora:



esempio: $f(z) = \gamma z + z_0$ analogo delle rette $\gamma, z_0 \in \mathbb{C}$ fissati

Prendono il nome di funzioni affini

I CASO: $\gamma = 1$ $f(z) = z + z_0$



ad ogni z gli sommo il vettore z_0

TRASLAZIONI DEL PIANO

II CASO: $z_0 = 0$ $f(z) = \gamma z$ con $\gamma = r e^{i\tau}$

$z = \rho e^{i\theta} \longmapsto f(z) = r\rho\, e^{i(\tau+\theta)}$

$$\begin{cases} |f(z)| = |\gamma||z| \\ \arg(f(z)) = \arg(\gamma) + \arg(z) \end{cases}$$

$\tau + \theta$ provoca rotazione

se $|\gamma|$ 1 $f(z) = \rho e^{i(\tau+\theta)} = |z| e^{i(\tau+\theta)}$

ottieniamo delle rotazioni intorno all'origine

se $|\gamma| \neq 1$ $f(z) = r\rho\, e^{i(\tau+\theta)}$ rotazione

omotetia

omotetia è una espansione o compressione distanze

ottieniamo delle rotoomotetie

Conclusione: $f(z) = \gamma z + z_0$ equivale a:

$z \longrightarrow \gamma z \longrightarrow \gamma z + z_0$

composizione di rotoomotetia + traslazione

Topologia

Consideriamo $A \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ accade che $z_0 \in A$ oppure $z_0 \notin A$

(caratterizzazione insiemistica)

Per la topologia invece un punto può essere caratterizzato come:

- Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $B_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \}$

  cerchio aperto centrato in z_0 con raggio r definito con il nome di intorno aperto (senza il bordo) o palla aperta

DEF: (1.) z_0 si dice interno ad A

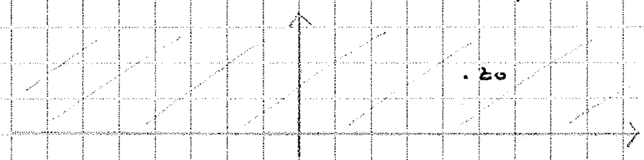
se $\exists r > 0$ t.c. $B_r(z_0) \subseteq A$ cioè se esiste una palla tutta contenuta in A

(2.) z_0 si dice esterno ad A se è interno al complemen. di A cioè ad A^c

(3.) z_0 si dice di frontiera per A se non è né interno né esterno ad A (si trova sul bordo)

NOTAZIONE: $\mathring{A}$ insieme dei punti interni ad A
∂A insieme dei punti di frontiera di A
$\mathring{A^c}$ insieme dei punti esterni

ESEMPIO: $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0 \}$



compreso l'asse x

Verifichiamo che:

- se $z_0 : \operatorname{Im}(z_0) > 0$ allora $z_0 \in \mathring{A}$. Si consideri la palla $B_r(z_0)$ con $r = \operatorname{Im}(z_0)$ mostriamo che $B_r(z_0) \subseteq A$

  sia $w \in B_r(z_0)$. ma $w = z_0 + \rho e^{i\theta}$ $\forall \theta$ e $\rho < r$

  $\Rightarrow \operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(z_0) + \rho \sin\theta \geq \operatorname{Im}(z_0) - \rho > \operatorname{Im}(z_0) - r = r - r = 0$

  allora $\operatorname{Im}(w) > 0$ quindi $w \in A$ e $B_r(z_0) \subseteq A$

- Analogamente se $z_0 : \operatorname{Im}(z_0) < 0 \Rightarrow z_0 \in \mathring{\bar{A}}$
- Infine se $z_0 : \operatorname{Im} z_0 = 0$ cioè z_0 è reale $z_0 \in \partial A$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 122

OSS: se $\mathring{A} = \Phi$ allora A non può essere una regione

PROP: (i) un sottoinsieme è chiuso <=> il suo complementare è aperto

(ii) sia $A \subseteq \mathbb{C}$, $\bar{A} : A \cup \partial A$ è sempre chiuso ed è detto la chiusura di A

(iii) $A \subseteq \mathbb{C}$ allora $\mathring{A}$ è un aperto

(iv) A, B aperti $\Rightarrow A \cup B$ e $A \cap B$ aperto

(v) A, B chiuso $\Rightarrow A \cup B$ e $A \cap B$ sono chiusi

- Curve su $\mathbb{C}$

DEF: Una curva in $\mathbb{C}$ è una funzione $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ (continua)

NOTAZIONE: $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ con $x(t)$ e $y(t)$

continue e $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si definisce supporto e si indica con $supp(\gamma)$ l'insieme

$supp(\gamma) = \{ \gamma(t) \mid t \in [a;b] \} \subseteq \mathbb{C}$ cioè l'immagine

una curva $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

e si dice semplice se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ $\forall t_1 \neq t_2$ allora una

curva chiusa non è mai semplice

PROP: $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$

con $x(t)$ e $y(t)$ continue e C^1 a tratti (sempre derivabili,

con derivata continua, tranne al più un numero

finito di punti)

PROP: una curva $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ si dice di Jordan se è:

C^1 a tratti, chiusa ed è tale che

$\forall t_1, t_2$ con $t_1, t_2 \neq [a;b] \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

DEF: Sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$ si dice che f è continua in z_0 punto di accumulazione di Ω e $z_0 \in \Omega$ se:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Lemma: sia $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z_0 punto di accumulazione per D e sia $f(z) = u(z) + i v(z)$ con $u(z) = \operatorname{Re} f$, $v(z) = \operatorname{Im} f$

Allora f è continua in $z_0 \iff u$ e v sono continue in $z_0 = x_0 + i y_0$

Esempio: $f(z) = \bar{z} + z^2$ è continua?

Usiamo il lemma: $z = x + iy$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

$$f(z) = f(x+iy) = x - iy + (x+iy)^2 =$$
$$x - iy + x^2 + 2ixy - y^2 =$$
$$(x + x^2 - y^2) + i(2xy - y) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$\Rightarrow u$ e v sono continue $\xrightarrow{\text{lemma}}$ $f = u + iv$ è continua

Proposizione:

Siano $f(z)$, $g(z)$ funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ e sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva (continua) tali che ha senso considerare le composizioni di funzioni:
$$(g \circ f)(z) := g(f(z))$$
$$(f \circ \gamma)(t) := f(\gamma(t))$$

Se f e g sono continue allora $f \circ g$ e $f \circ \gamma$ sono continue

- Derivate complesse

DEF: Sia D dominio (aperto connesso di $\mathbb{C}$)

$f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad z_0 \in D$. Si dice che f è derivabile in z_0 se esiste:
$$\boxed{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)}$$

PROP: Se $f(z)$ è derivabile in z_0, allora è continua in z_0

Dimostrazione: verifichiamo che: $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

cioè $\lim_{z \to z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0$

allora $|f(z) - f(z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} \right| |(z - z_0)| \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{u(x_0+h_1, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_1} + i \frac{v(x_0+h_1, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_1} =$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \qquad (1)$$

CASO II $\quad h = i h_2 \qquad f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + i h_2) - f(z_0)}{i h_2} =$

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + h_2)) - f(x_0 + i y_0)}{i h_2} =$$

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + h_2) + i v(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{i h_2}$$

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{h_2} - i \frac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{h_2}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \qquad (2)$$

Abbiamo ottenuto che: $\quad (1) = (2) = f'(z_0)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = - \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Osservazione: a) in ' $\Rightarrow$ ' non serve l'ipotesi $u, v \in C^1(\Omega)$

quindi f derivabile in $z_0 \Rightarrow$ valgono le Cauchy-R.

e $\quad f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0)$

b) un teorema difficile afferma che se:

f è differenziabile (in senso complesso) in Ω allora:

$u, v \in C^1(\Omega)$

esempio: $\quad f(z) = e^z \qquad \exists f'(z) = ?$

usiamo Cauchy-Riemann quindi $f = u + iv$ - ?

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$$

$u, v \in C^1(\mathbb{R}^2) \qquad C\text{-}R = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = - \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

DEF: Sia $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con Ω aperto, si dice armonica se:

1. $u \in C^2(\Omega)$
2. $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ con Δu Laplaciano di u

es. $u(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad u \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$ allora:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$ quindi u è armonica in $\mathbb{R}^2$

$u(x,y) = x^2$ non è armonica perché: $\Delta u = 2 \neq 0$

$u(x,y) = y^3$ non è armonica perché $\Delta u = 6y \neq 0 \quad \forall y \neq 0$

Osservazione: le uniche funzioni del tipo $u(x,y) = \varphi(x)$ (cioè dipendente solo da x) che sono armoniche, sono della forma $\varphi(x) = ax + b$.

Dim: $\quad \Delta u(x,y) = \varphi''(x) = 0 \quad$ se integro:

$\varphi'(x) = a \quad$ e integrando nuovamente: $\varphi(x) = ax + b$

es. Trovare tutti i polinomi di grado 2 armonici:

$u(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

calcoliamo: $\left.\begin{aligned} \dfrac{\partial u}{\partial x} &= 2ax + cy + d \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} &= 2by + cx + e \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2a + 2b = 0$. Allora tutti i polinomi in x, y armonici di grado due sono del tipo:

$u(x,y) = ax^2 - ay^2 + cxy + dx + ey + f$

TEOREMA: Se $f = u + iv$ e $\Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa in Ω (aperto) allora u e v sono armoniche $\Big\{$ Proviamo che f olomorfa $\Rightarrow$ u e $v \in C^2(\Omega)$

Dim: Cominciamo con u. Dobbiamo trovare Δu.

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ ma per C-Riem $\longrightarrow$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ ma per il t. di Swartz sostituisco $v(x,y)$ nella seconda:

$-2y + 2x = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ma v la conosco, quindi posso

derivarla $\Rightarrow$ $-\cancel{2y} + 2x = \cancel{-2y} - c'(x)$ cioè $c'(x) = -2x$

Integrando $\int c'(x) = c(x) = -x^2 + cost$

Allora $v(x,y) = 2xy + y^2 - x^2 + cost$ con $cost \in \mathbb{R}$.

Osservazione: Data $u(x,y)$ armonica e $v(x,y)$ sua armonica coniugata in generale non è vero che $u(x,y)$ è armonica coniugata di $v(x,y)$

Controesempio: $u(x,y) = x$ (armonica) $\Rightarrow$ $v(x,y) = y$ (armon. coni)

infatti $f = x+iy = u+iv$ è olomorfa

Ma $v(x,y) = y$ (arm) $\Rightarrow$ $g(x+iy) = y+ix$ è olomorfa?

cioè $u(x,y) = x$ è l'armonica coniugata di v?

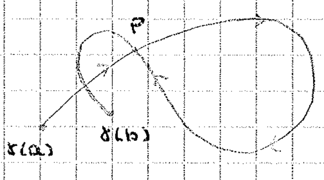
Se applico C-R non è olomorfa! Posso verificarlo anche: $g(x+iy) = y+ix = i(x-iy) = i\bar{z}$ che non è olomorfa

N.B. Nel seguito tratteremo esclusivamente curve continue a tratti

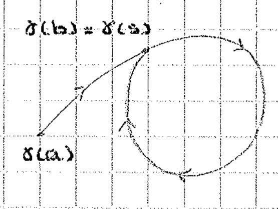
DEF: Una curva $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ si dice semplice se ogni punto $\gamma(t)$ della sua traiettoria (sostegno) eccetto al più i punti iniziale e finale, è ottenuto con un solo parametro $t \in [a;b]$.

In formula: $\gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \forall t \in [a;b] \quad \forall s \in (a;b) \Rightarrow s \neq t$

esempio:



γ non è semplice perchè ad esempio il punto P è raggiunto due volte



γ non è semplice $\gamma(b) = \gamma(s)$ sia punto finale ma anche punto di mezzo.

• $\sin t + i e^{2it}$

$$\frac{d}{dt}\left[-\cos t + i\,\frac{e^{2it}}{2i}\right] = \frac{d}{dt}\left[-\cos t + \frac{1}{2}e^{2it}\right]$$

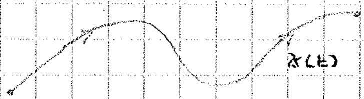
Quindi: $$\int_{-\pi}^{0} (\sin t + i e^{2it})\,dt = \left(-\cos t + \frac{e^{2it}}{2}\right)\Big|_{t=0} - \left(-\cos t + \frac{e^{2it}}{2}\right)\Big|_{t=-\pi}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -2$$

DEF: Si dice lunghezza di γ il numero:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \in \mathbb{R}$$

Osservazione:



Se la velocità raddoppia $\gamma(2t)$ quindi:

$$\gamma(2t) = \gamma(\phi(t)) = \tilde{\gamma}(t)$$

PROP: Siano $\gamma: [a;b] \to \mathbb{C}$ $\phi: [c;d] \to [a;b]$ strettamente crescente suriettiva e sia $\tilde{\gamma}: [c;d] \to \mathbb{C}$ con $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(\phi(t))$ allora

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$$

Integrali di linea complessi

DEF: Sia $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua e sia $\gamma: [a;b] \to D \subseteq \mathbb{C}$. Si pone

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

esempio: Calcolare $I = \int_\gamma \bar{z}\,dz$ con $\gamma: [0;2] \to \mathbb{C}$ e $\gamma(t) = t^2 + it$

$\gamma'(t) = 2t + i$

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^2 \overline{\gamma(t)}\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^2 \overline{(t^2 + it)}\,(2t+i)\,dt =$$

$$\int_0^2 (t^2 - it)(2t+i)\,dt = \int_0^2 (2t^3 - it + t)\,dt = \left|\frac{t^4}{2} - i\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=2} = 10 - i\frac{8}{3}$$

PROP: (i) linearità: $\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz + \mu \int_\gamma g(z)\,dz$

(ii) Additività: $\gamma_1: [a;c] \to \mathbb{C}$ $\gamma_2: [c;b] \to \mathbb{C}$ con $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$

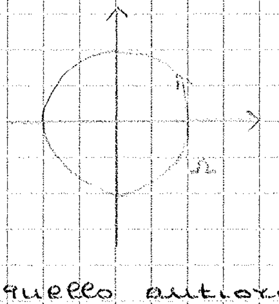
sia $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a;c] \\ \gamma_2(t) & t \in [c;d] \end{cases}$

DEF: Se $\partial\Omega$ è formato da almeno due curve di Jordan, si dice anche che Ω è molteplicemente connesso.

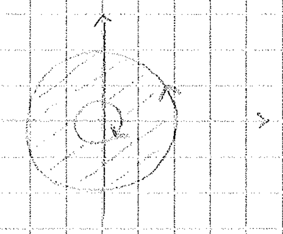
E se Ω è un dominio regolare limitato si dice anche che Ω è un dominio ammissibile

DEF: Sia Ω dominio regolare si dice orientazione positiva di $\partial\Omega$ quella per cui percorrendo $\partial\Omega$, l'insieme Ω sta a sinistra.

esempio: $\Omega = B_1(0)$



senso positivo quello antiorario



A seconda della circonferenza dovrò scegliere un verso orario o antiorario.

DEF: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio regolare limitato e sia $f: \partial\Omega \to \mathbb{C}$ continua, si pone $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$ dove $\gamma_1 \dots \gamma_n$ sono le curve di Jordan i cui sostegni costituiscono $\partial\Omega$ orientate in senso positivo.

Richiami sui campi vettoriali

Un campo vettoriale è una funzione $E: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Se $E(x,y) = (E_1(x,y), E_2(x,y))$ è continuo, curvilineo, l'integrale di E lungo una curva $\gamma: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to D$ è definito da:

$$\int_\gamma E(x,y) \cdot d\vec{s} := \int_a^b E(\gamma(t)) \circ \gamma'(t)\,dt$$

Vale la seguente formula di Gauss-Green:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ dominio regolare limitato e sia $E \in C^0(\bar{A};\mathbb{R}^2)$ in $C^1(A;\mathbb{R}^2)$ (cioè E_1, E_2 continue su $\bar{A}$ e $E_1, E_2 \in C^1(A)$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 122

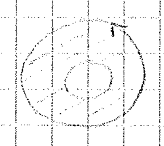
esempio 2: $I = \int_{\partial B_1(7i)} \frac{\sinh(e^z)}{z}\, dz = 0$

la funzione integranda non è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ ma solo in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma questo non ci interessa!

$f(z) = \frac{\sinh(e^z)}{z}$ è continua e olomorfa in $B_1(7i)$

esempio 3: $\Omega = B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ corona circolare

$f(z) = \frac{e^z}{z}$ olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$



con f continua su $\overline{\Omega}$ e olomorfa in Ω

$\Rightarrow I = \int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 0$

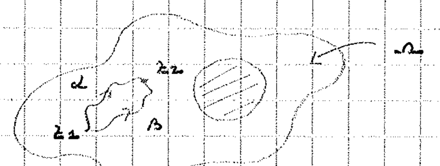
ma $\int_{\partial\Omega} \frac{e^z}{z}\, dz = \int_{\partial B_2(0)} \frac{e^z}{z}\, dz + \int_{\partial B_1(0)^-} \frac{e^z}{z}\, dz$

(antiorario) (orario)

$\int_{\partial B_2(0)} \frac{e^z}{z}\, dz - \int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{z}\, dz = 0$

Otteniamo $\left| \int_{\partial B_2(0)} \frac{e^z}{z}\, dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{z}\, dz \right|$

COROLLARIO:



Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e siano $\alpha : [a;b] \to \Omega$ e $\beta : [c;d] \to \Omega$

t.c. z_1 punto iniziale di α e β e z_2 punto finale di α e β e

la porzione di piano racchiusa da α e β è contenuta in Ω

E sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa

Allora $\int_\alpha f(z)\, dz = \int_\beta f(z)\, dz$

Dim: Per Cauchy-Goursat:

$0 = \int_{\alpha \cup \beta^-} f(z)\, dz = \int_\alpha f(z)\, dz - \int_\beta f(z)\, dz$

in Ω quindi per C-Goursart $\int_{\partial\Omega} \frac{dz}{z-z_0} = 0$ ma questo integrale è uguale a:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} - \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} = 0$$

Allora: $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$

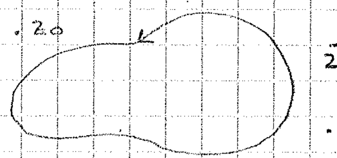
Osservazione: Comunque prendo una curva di Jordan percorsa in senso antiorario ottengo che

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 1$$

esempio: γ curva chiusa il cui sostegno è percorso n volte in senso antiorario quindi il suo sostegno può essere visto come l'immagine di una curva di Jordan γ_1 e sia z_0 al suo "interno". Allora:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = n \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-z_0} = n \quad \text{(per l'additività)}$$

esempio: Se z_0 è all'esterno di γ, γ data come nell'esempio precedente:



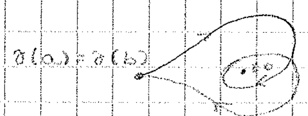
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 0$$

Mentre se γ curva chiusa è percorsa n volte in senso orario e z_0 all' "interno":

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = -n\,2\pi i$$

DEF: Sia γ curva chiusa $(\gamma(a)=\gamma(b))$ con $\gamma:[a;b]\to\mathbb{C}$ e sia $z_0\in\mathbb{C}$ ma non appartenente al sostegno. Si dice indice di avvolgimento di γ attorno a z_0 il numero e si denota con $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$

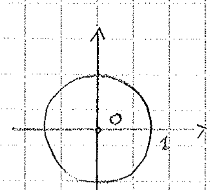
Osservazione: $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ è il numero di "giri" che γ compie attorno a z_0 in senso antiorario



esempio: $I = \displaystyle\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{z}\, dz$

Applico la formula dell'integrale di Cauchy.

$f(z) = e^z \qquad z_0 = 0 \qquad A = B_1(0) \qquad \Longrightarrow$



$$I = \int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{z}\, dz = (2\pi i)\, f(0) = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

<u>Ripasso</u>

- Formula integrale di Cauchy

$A \subseteq \mathbb{C}$ dominio limitato regolare (si dice anche dominio ammissibile) $z_0 \in A$, $f : \bar{A} \to \mathbb{C}$ continua, olomorfa.

Allora $\displaystyle f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$

- Nelle stesse ipotesi (in particolare f è derivabile una volta) si può verificare che è lecito derivare la formula di Cauchy sotto il segno di integrale rispetto a z.

Per cui si ha: (facendo variare z_0 in A)

$$\frac{df}{dz_0} = f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{d}{dz_0}\left(\frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz} \qquad (1)$$

È possibile ~~integrare~~ derivare sotto il segno di integrale, ancora rispetto a z. $\displaystyle f''(z_0) = \frac{df'(z_0)}{dz_0}$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{d}{dz_0}\left(\frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{2 f(z)}{(z - z_0)^3}\, dz$$

Osservazione: l'esistenza di $f''(z_0)$ è conseguenza della sola derivabilità di f (una volta)!

Si può derivare ancora: $\displaystyle f^{(3)}(z_0) = \frac{df''(z_0)}{dz_0}$

$$= \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{d}{dz_0}\left(\frac{f(z)}{(z - z_0)^3} \right) dz$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{(z - z_0)^4}\, dz$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 122

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|z-z_0|=r} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

Segue che $|f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$

allora f è costante!

q.e.d

Osservazione: a Sia $P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$

(non costante) $a_m \neq 0 \quad m \geq 1$

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$$

b In analisi 1 se $g(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \to \pm\infty} |g(x)| = 0$

allora $g(x)$ è limitata. (Questo è vero anche per funzioni $f(z)$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue)

Th (fondamentale dell'algebra):

Ogni polinomio $P(z)$ non costante, ha almeno una radice in $\mathbb{C}$.

Dim (per assurdo): (da non sapere)

- Supponiamo che non abbia radici, cioè $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

allora posso fare: $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ è definita su $\mathbb{C}$ e $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$ perché quoziente di funzioni olomorfe. $f(z)$ è limitata perché $\frac{1}{P(z)} \to 0$ per $|z| \to \infty$

allora $\xrightarrow{\text{Liouville}}$ $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ è costante

$\to P(z)$ costante, assurdo!

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

(Si dice che la convergenza assoluta implica la convergenza semplice)

Serie di Potenze

DEF: Sia (c_n) successione di numeri complessi. Si dice SERIE DI POTENZE di centro z_0 e coefficienti c_n,

la funzione: $\boxed{S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}$

$$= c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n$$

(Si pone implicitamente per $n=0$ e $z=z_0$ che $0^0=1$)

Essa è definita per $\forall z \in \mathbb{C}$ t.c. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge

Non è restrittivo studiare la teoria in $z_0 = 0$

TEOREMA:

Data $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $\exists R \in [0;+\infty]$ tale che:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge se $|z|<R$

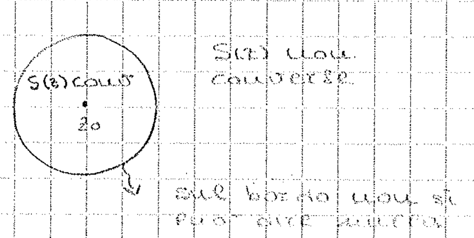
(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ non converge se $|z|>R$

Inoltre:

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ se tale limite esiste

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ se tale limite esiste

R si dice RAGGIO DI CONVERGENZA



- Serie geometrica

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ è detta SERIE GEOMETRICA. E ha raggio di convergenza $R=1$.

Se $|z|=1$:

$|c_n z^n| = |z|^n = 1^n$ ma $\lim_{n\to\infty} 1^n \neq 0$

Allora la serie geometrica non converge per $|z|=1$

Insieme di convergenza: $B_1(0)$

In questo caso possiamo calcolare la somma (per $|z|<1$)

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} 1+z+\ldots+z^n$

[Ricordo che: $w^n - z^n = (w-z)(w^{n-1}+w^{n-2}z+\ldots+wz^{n-2}+z^{n-1})$]

Applichiamo tale formula con $w=1$ e con $n+1$ invece che con n

$1-z^{n+1} = (1-z)(1+z+z^2+\ldots+z^n)$

Allora: $= \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \boxed{\frac{1}{1-z}}$

Perché $\lim_{n\to\infty} |z^{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |z|^{n+1} = 0$

Conclusione: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ per $|z|<1$ $\Big\{$ nella geometrica il raggio vale sempre 1

Esempio: Trovare l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2nz+inz}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2nz+inz} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n(2z+iz)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{(2z+iz)}\right)^n$

Se pongo $w = e^{(2+i)z}$ ho la serie geometrica

$\sum_{n=1}^{\infty} w^n$ converge $\Rightarrow |w|<1$

e $\sum_{n=1}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n - 1 = \frac{1}{1-w} - 1 = \frac{w}{1-w}$

Quindi la serie data è:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{(2+i)z}\right)^n = \frac{w}{1-w} = \frac{e^{(2+i)z}}{1-e^{(2+i)z}}$

Insieme di convergenza:

$\{z\in\mathbb{C} : |w|<1\} = \{z\in\mathbb{C} : |e^{(2+i)z}|<1\} = \{z\in\mathbb{C} : e^{Re(2+i)z}<1\}$

$\{z\in\mathbb{C} : e^{Re(2x+2iy+ix-y)}<1\} = \{z\in\mathbb{C} : e^{2x-y}<1\} =$

$\{z\in\mathbb{C} : 2x-y<0\}$

Formula integrale di Cauchy:

"nuova variabile"

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw =$$

z fissata

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w\left(1 - \frac{z}{w}\right)}\, dw \qquad (*)$$

Vorremo arrivare ad una serie geometrica:

$$\frac{1}{1 - z/w} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n \quad \text{se} \quad \left|\frac{z}{w}\right| < 1 \quad \text{è vera l'uguaglianza}$$

cioè se $|z| < |w| = r$

Allora possiamo sostituire in $*$:

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n}\, dw; \quad (\text{Scambio } \textstyle\int \text{ con la } \Sigma)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw \right) \cdot z^n ;$$

Abbiamo ottenuto proprio una serie di potenze in 0.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

(Per il teorema sulle serie di funzioni olomorfe)

qed

Esempio: $e^z = f(z)$ è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ quindi:

$z_0 = 0 \qquad r_0 = +\infty$

$f'(z) = e^z \qquad f''(z) = e^z \quad \ldots$ allora $f'(0) = 1; \qquad f''(0) = 1$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Esempio: $f(z) = \sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\, i z^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k} (-i) z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} \; {}^{2i}/_{(i+1)}}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

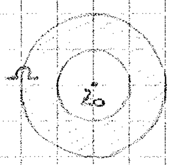
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 122

Serie di Laurent

- Se $f(z)$ è olomorfa possiamo applicare il teorema delle serie di Taylor
- Se $f(z)$ non è olomorfa in Ω, ad esempio non definita in un centro $z_0 \in \Omega$ come $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ (non può avere uno sviluppo di Taylor in z_0) in situazione come questa, f ammette uno sviluppo in serie, ma con potenze negative di $(z-z_0)$

Teorema (Laurent)

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $0 \le r_1 \le r_2 \le +\infty$. E supponiamo che f sia analitica (olom) nella corona circolare $\Omega : \{ z : r_1 < |z-z_0| < r_2 \}$



Allora, $\exists c_n \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \Omega$

Sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Inoltre $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \qquad \forall r \in (r_1, r_2)$

Esempio: Scrivere lo sviluppo di Laurent di

$f(z) = \frac{\sinh(2z^2)}{z^{11}}$ in $z_0 = 0$ $\qquad f$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Possiamo applicare il teorema di Laurent con $r_1 = 0$ $r_2 = +\infty$

Per trovare lo sviluppo non calcoliamo tutti i c_n con la formula integrale ma utilizziamo lo sviluppo di Taylor del sinh

$$f(z) = \frac{\sinh(2z^2)}{z^{11}} = \frac{1}{z^{11}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{4n+2-11} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{4n-9}$$

Non basta! Devo arrivare alla forma con due serie

$$= \underbrace{\left(\frac{2}{z^9} + \frac{2^3}{3!\, z^5} + \frac{2^5}{5!\, z} \right)}_{\text{termini negativi}} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{4n-9}}_{\text{termini positivi}}$$

DEF: $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice singolarità isolata di $f(z)$ se $f(z)$ è olomorfa in un intorno $B_r(z_0)$ privato di z_0 cioè f olomorfa in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ per qualche $r>0$

DEF: Sia z_0 una singolarità isolata di $f(z)$ (cioè $\exists\, r_0>0$ t.c. f olomorfa in $B_{r_0}(z_0) \setminus \{z_0\}$). E sia $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ il suo sviluppo di Laurent in $B_{r_0}(z_0) \setminus \{z_0\}$

(i) La serie con le potenze negative di $(z-z_0)$ si dice PARTE PRINCIPALE di f in z_0

(ii) Se la parte principale di f in z_0 è zero ($c_{-n}=0 \;\; \forall n \geq 1$) allora z_0 si dice singolarità eliminabile.

(iii) Se $\exists\, m \geq 1$ tale che $c_{-m} \neq 0$, $c_{-n}=0 \;\forall n > m$ cioè la p.princ. è del tipo: $\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0}$ cioè è una somma finita, allora z_0 si dice polo di ordine m

(Se $m=1$ si dice polo semplice, $m=2$ polo doppio)

(iv) Se $\exists$ infiniti coefficienti $c_{-n} \neq 0$ con $n \geq 1$ cioè la P.P è una serie infinita, allora z_0 dicesi singolarità essenziale

(v) Si dice RESIDUO di f in z_0 il numero $\mathrm{Res}_f(z_0)$ con $r \in (0, r_0)$

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\,dz = c_{-1}$$

esempio: Classificare la singolarità $z_0=0$ di $f(z) = \frac{1}{iz^2 - z^5}$ (precedente)

Dei due sviluppi precedenti la definizione si applica solo in $\Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1 \} = B_1(0) \setminus \{0\}$

Quindi $f(z) = \underbrace{\frac{1}{iz^2}}_{\text{P.P.}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n-2}}{i^{n+1}} \Rightarrow z_0=0$ è un polo doppio

e $\mathrm{Res}_f(0) = c_{-1} = \text{coefficiente di } \frac{1}{z-z_0} = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 122

Regole per il calcolo dei residui

(i) Poli semplici

z polo semplice $\iff$ $f(z) = \dfrac{g(z)}{z - z_0}$ con $g(z)$ olomorfa in un intorno di z_0

e $g(z_0) \neq 0$

In tal caso: $\mathrm{Res}_f(z_0) = g(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

Vediamo perché: z_0 polo semplice $\iff$

$f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$

$f(z) = \dfrac{1}{z - z_0} \overbrace{\left(c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots\right)}^{g(z)\ ,\ g(z_0) = c_{-1} \neq 0} \iff f(z) = \dfrac{1}{z - z_0} g(z)$, g olom.

(ii) Poli multipli

z_0 polo di ordine $m \geq 1$ per f $\iff$ $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ con g olom. in un int.

e $g(z_0) \neq 0$

In tal caso: $\mathrm{Res}_f(z_0) = \dfrac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z \to z_0} \left[\dfrac{1}{(m-1)!} \left(\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right) \right]$

esempio: Calcolare il residuo di $f(z) = \dfrac{\cos hz}{3 + 2iz}$ in $z_0 = i\dfrac{3}{2}$

$f(z) = \dfrac{\cos hz}{2i\left(z + \dfrac{3}{2i}\right)} = \underbrace{\left(\dfrac{\cos hz}{2i}\right)}_{g(z)} \dfrac{1}{\left(z - \dfrac{3i}{2}\right)}$ g olomorfa.

$g\left(i\dfrac{3}{2}\right) \neq 0$? $\quad g\left(i\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2i}\right) \dfrac{e^{i3/2} + e^{-i3/2}}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ z_0 polo semplice

$\mathrm{Res}\,f(i3/2) = g(i3/2) = \dfrac{1}{2i} \cos \dfrac{3}{2}$

esempio: Calcolare il residuo di $f(z)$ in $z_0 = 0$ di $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z^2 - z^3}$

$f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z^2(1 - z)} = \overbrace{\left(\dfrac{e^{2z}}{1 - z}\right)}^{g(z)} \dfrac{1}{z^2}$ $g(z)$ è olomorfa in un intorno di 0

$g(0) = \dfrac{e^0}{1} \neq 0$ $\Rightarrow$ $f(z)$ è un polo doppio

$\mathrm{Res}\,f(0) = g'(0) = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{e^{2z}}{1 - z}\right)\Bigg|_{z=0} = \dfrac{2e^{2z}(1 - z) + e^{2z}}{(1 - z)^2}\Bigg|_{z=0} = 3$

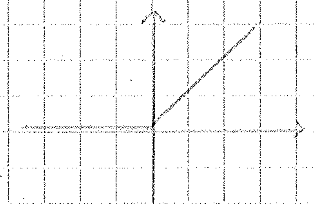
Distribuzioni

Introduzione euristica (non da programma)

Consideriamo una particella (punto materiale) di massa pari a 1kg, in quiete fino all'istante $t = x = 0$. In questo istante subisce un impulso e comincia a muoversi di moto rettilineo con velocità 1 m/s.

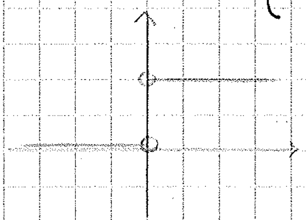
La sua legge del moto allora è rappresentabile dalla funzione

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ t & \text{se } t\geq 0 \end{cases}$$



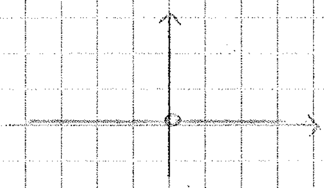
La derivata prima $s'(t)$ (per $t \neq 0$) è la velocità tranne che nel momento dell'impulso.

$$v(t) = s'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ 1 & \text{se } t>0 \end{cases} \quad (\text{con } t \neq 0) \quad (\text{è ragionevole})$$



E l'accelerazione? È $s''(t)$? Proviamo a calcolare $s''(t)$ per $t \neq 0$

$$s''(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ 0 & \text{se } t>0 \end{cases}$$



La derivata (seconda) dà zero ma il punto comincia a muoversi, per cui $s''(t)$ non dà info sull'impulso. Quindi la derivata della Analisi 1 non è uno strumento adatto per i fenomeni impulsivi.

Bisogna trovare un nuovo strumento per descrivere $f(t) = v(t)$ e l'accelerazione del punto.

L'idea è guardare le velocità medie e non quelle puntuali. La velocità media su un intervallo $[a;b]$ è

$$V_{[a;b]} = \frac{s(b) - s(a)}{b-a}$$

Quindi consideriamo piuttosto:

$$T_f : \varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t)\,dt$$

C^{∞}, zero fuori da $[c,d]$ limitato

tali $\varphi(t)$ sono chiamate funzioni test.

Con cosa sostituiamo la derivata punto per punto? Per capirlo vediamo che succede se f fosse "regolare" cioè C^1:

- la media sarebbe $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\varphi(t)}^{\text{TEST}} f'(t)\,dt \overset{\text{PER PARTI}}{=}$

$$0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) f(t)\,dt$$

Quindi la media di $f'(t)$ è $-\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) f(t)\,dt$. Ciò suggerisce quando

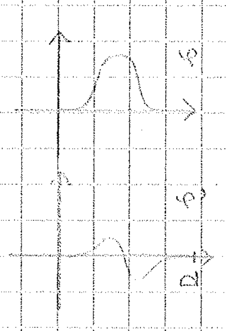
$f(t) = (v(t))$ non è derivabile di considerare come (nuova) derivata generalizzata la media:

$$(T_f)' : -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) f(t)\,dt \qquad \forall \varphi \quad \text{quindi}$$

$$(T_f)' : \varphi \longmapsto -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) f(t)\,dt \qquad \text{"nuova derivata"}$$

Nel caso concreto: $f(t) = v(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ 1 & \text{se } t>0 \end{cases}$ si ha:

$$(T_v)' = \varphi \longmapsto -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) v(t)\,dt \qquad \text{cos'è?}$$



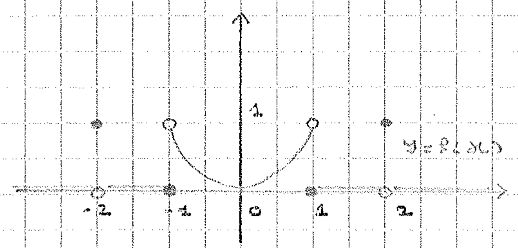
$$= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(t)\,dt$$

$$= -\int_{0}^{d} \varphi'(t)\,dt = -\cancel{\varphi(d)}^{=0} + \varphi(0) = \varphi(0)$$

Abbiamo trovato che la nuova derivata di $v(t)$ è $(T_v)' : \varphi \longmapsto \varphi(0)$

Questa associazione $\varphi \longmapsto \varphi(0)$ è chiamata <u>delta di Dirac</u> ed è il nuovo modello matematico per l'accelerazione del punto materiale cioè dell'impulso.

esempio: Trovare il supporto di $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } |x|<1 \\ 1 & \text{se } |x|=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{(-1;1) \setminus \{0\}\} \cup \{2;-2\}$

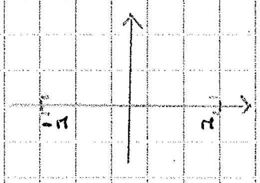
$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}} = [-1;1] \cup \{2;-2\}$

DEF: Avremo a che fare in particolare con funzioni a <u>supporto compatto</u> ciò vuol dire funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $supp(f)$ è chiuso e limitato (compatto)

OSS: Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua allora $supp(f)$ è compatto $\Leftrightarrow$

$\exists M>0 : \quad f(x)=0 \quad \forall x \notin [-M;M]$

cioè f è nulla fuori da un intervallo limitato



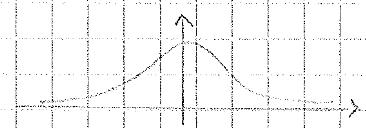
DEF: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice <u>SOMMABILE</u> se:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ sono convergenti

Si dice <u>LOCALMENTE SOMMABILE</u> se:

$\forall a,b$ finiti $(a<b)$: $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b |f(x)|dx$ sono finiti

esempio: Consideriamo $f(x) = e^{-x^2}$



$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ finito

$\Rightarrow$ f sommabile $\Rightarrow$ f è localmente sommabile.

esempio: Consideriamo $f(x) = x^3$

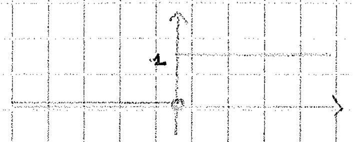
$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx$ non converge! $\Rightarrow$ f non è sommabile

ma $\forall a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$:

$\int_a^b x^3\,dx$ e $\int_a^b |x^3|dx$ finiti $\Rightarrow$ f è localm. sommabile

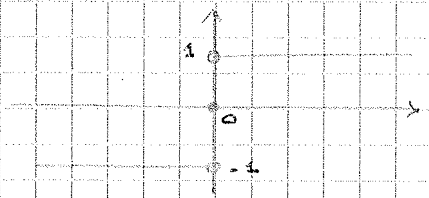
(iii) funzione di Heaviside

$$H(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



(iv) funzione segno

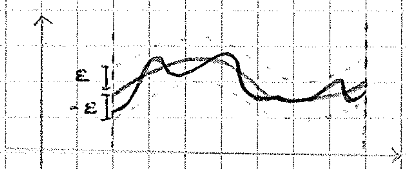
$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$



DEF: $f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $f: I \longrightarrow \mathbb{C}$

Si dice che f_n converge ad f <u>uniformemente</u> su I se

1. $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left[\text{se } n \geq n_\varepsilon \text{ e } x \in I \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right]$
2. Ovvero, $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left[n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right]$
3. Ovvero, $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left[n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty, I} < \varepsilon \right]$
4. $\Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{\infty, I} = 0$



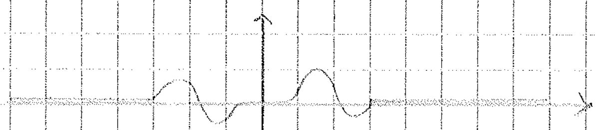
$f(x)$ —

$f_n(x)$ —

DEF: Sia $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si dice <u>funzione TEST</u> se:

(1) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$

(2) $\operatorname{supp}(\varphi)$ compatto



L'insieme di tutte le funzioni test è uno spazio vettoriale e si denota con $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ o semplicemente con $\mathcal{D}$

- Esistono effettivamente funzioni test $\neq 0$? Sì, un esempio:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1 \\ e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } |x|<1 \end{cases}$$

Osservazione: La convergenza in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ è una condizione molto forte, cioè si verifica di rado.

DEF: Distribuzione

Si dice DISTRIBUZIONE un "funzionale" cioè un'applicazione

$T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ (che ha come dominio l'insieme delle funzioni test, ecco perché le chiamiamo funzionali). Il codominio è l'insieme complesso che rappresenta il risultato del test, in alcuni casi "medie integrali".

T è un'applicazione tale che:

(i) T è lineare, cioè

$$T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

(ii) T è continuo che significa che:

se $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora $T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$ in $\mathbb{C}$

Oss: La condizione (ii) è solo matematicamente tecnica ed è una richiesta molto debole (perché la condizione $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}$ è molto forte.

Notazione

Per i funzionali, cioè per applicazioni $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ si usa invece che la notazione $T(\varphi)$, la notazione $\langle T, \varphi \rangle$ cioè $\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$

Allora ad esempio, T lineare si scrive:

$$\langle T, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle + \mu \langle T, \psi \rangle$$

Mentre T continuo si scrive:

se $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$ in $\mathbb{C}$

Distribuzioni Regolari

Sono distribuzioni costruite in questo modo, sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ loc. sommabile si dice dist. regolare associata o generata da f la distribuzione

$T_f: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definita da $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$

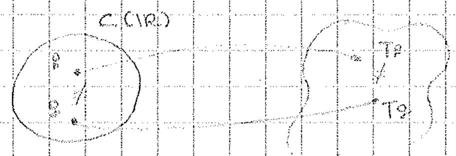
A volte si dice che f è il simbolo della distribuzione regolare T_f.

L'insieme di tutte le distribuzioni $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale e si denota con $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Si può dimostrare che se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sono continue allora:

$$\left[T_f = T_g \implies f = g \right]$$

In altri termini la funzione $C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $f \longrightarrow T_f$ è iniettiva.

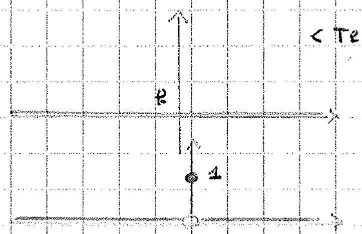


Quindi si può scrivere: $C(\mathbb{R})$ "$\subseteq$" $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ cioè $C(\mathbb{R})$ è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(le funzioni continue sono un "sottoinsieme" delle distribuzioni)

Questo non è vero se f e g non sono continue.

esempio: $f(x) = 0$ $\quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, \varphi(x) \, dx = 0$

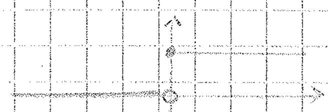


$g(x) = \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$ $\quad \langle T_g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{0\}}(x) \, \varphi(x) \, dx = 0$

Quindi $f \neq g$ ma $T_f = T_g$ perché g non è continua.

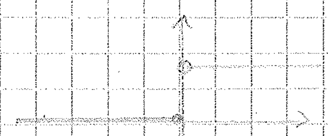
Tuttavia possiamo pensare a funzioni che differiscono al più in un insieme finito (o discreto) come alla stessa funzione dal punto di vista delle distribuzioni, più precisamente se $T_f = T_g$ consideriamo f e g come la stessa funzione.

esempio: $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



Dal punto di vista di $\mathcal{D}'$ è uguale a:

$H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$



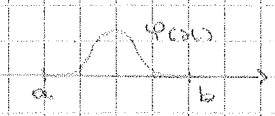
Operazioni in $\mathcal{D}'$

1. Derivazione

Vediamo come si comporta $T_{f'}$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$ e prendiamo spunto da qui per definire la derivata di una distribuzione qualunque.

$f \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ localm. sommabile

$$\Rightarrow \langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx$$



$$= \Big[f(b)\cancel{\varphi(b)}^{=0} - f(a)\cancel{\varphi(a)}^{=0}\Big] - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$

Quindi se $f \in C^1(\mathbb{R})$:

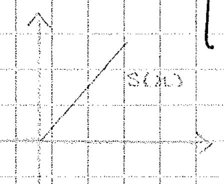
$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$

Prendiamo tale formula come spunto per definire la derivata:

DEF: Derivata distribuzionale

se $T \in \mathcal{D}'$ si dice derivata distribuzionale di T, la distribuz. T' definita da $\boxed{\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle}$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

Esempio: Sia $S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ calcolare T_S'.



$$\langle (T_S)', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} S(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx \quad \text{(per parti)}$$

$$= -\Big|x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}{}^{=0} + \int_0^{+\infty}\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty}\varphi(x)dx$$

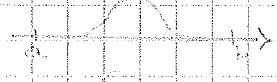
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx = \langle T_H, \varphi \rangle$$

- $(T_S)'' = (T_H)' = ?$

Per come è fatta H

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty}\varphi'(x)dx$$

$$= -\int_0^b \varphi'(x)dx = -(\varphi(b) - \varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$



$$\Rightarrow (T_H)' = \delta_0$$

$$= -\Big| f(x)\varphi(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=x_1^-} + \int_{-\infty}^{x_1} f'(x)\varphi(x)\,dx +$$

funzione perché localm. sommabile

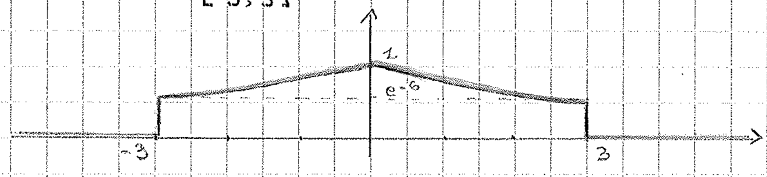
$$-\Big| f(x)\varphi(x) \Big|_{x=x_1^+}^{x=+\infty} + \int_{x_1}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= -f(x_1^-)\varphi(x_1) + \int_{-\infty}^{x_1} f'(x)\varphi(x)\,dx + f(x_1^+)\varphi(x_1) + \int_{x_1}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx + \big(f(x_1^+) - f(x_1^-) \big)\varphi(x_1)$$

$$= \langle T_{f'}, \varphi \rangle + \langle (f(x_1^+) - f(x_1^-))\,\delta_{x_1}, \varphi \rangle$$

esempio: Sia $f(x) = \mathbb{1}_{[-3;3]}(x)\, e^{-|2x|}$. calcolare $(T_f)' = ?$



Applico il teorema:

$$\forall x \neq -3, 3, 0 \quad \exists\, f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x|>3 \\ e^{-|2x|}(-\operatorname{sign}(2x))\,2 & \text{se } |x|<3 \end{cases}$$

$$= -\mathbb{1}_{[-3;3]}(x)\, 2\operatorname{sign}(x)\, e^{-|2x|} = f'$$

(localm. sommabile)

$\Rightarrow T_f' = T_{f'} + e^{-6}\delta_{-3} - e^{-6}\delta_3$ infatti: $f(-3^+) - f(-3^-) = e^{-6}$

$f(3^+) - f(3^-) = -e^{-6}$

In $x=0$ f non è derivabile, ma non c'è un salto, non scrivo nulla.

3. Riscalamento

Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente sommabile.

Consideriamo $g(x) := f(ax)$. Ricaviamo T_g.

- $\varphi \in \mathcal{D}$

$$< T_g, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\varphi(x)\,dx \qquad \text{pongo } y = ax$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{a} & a>0 \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{a} & a<0 \end{cases} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{|a|}\varphi\left(\frac{y}{a}\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{1}{|a|}\underbrace{\varphi\left(\frac{x}{a}\right)}_{\text{è una funzione test}}dx = < T_{f(x)}, \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) >$$

DEF: Riscalamento distribuzionale

Se $T \in \mathcal{D}'$ e $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ si definisce come riscalamento di T di un fattore a, la distribuzione denotata col simbolo $T(ax)$, e definita da $< T(ax), \varphi(x) > := < T(x), \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Osservazione: $\psi(x) = \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ è la funzione test su cui agisce T nella definizione precedente.

CASO PARTICOLARE: $a = -1$

$$\boxed{< T(-x), \varphi(x) > = < T(x), \varphi(-x) >}$$

A volte viene chiamata inversione temporale

ESEMPIO: $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad \delta_{x_0}(ax) = ?$

Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ $\quad < \delta_{x_0}(ax), \varphi(x) > = < \delta_{x_0}(x), \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) >$

$$= \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x_0}{a}\right) = < \frac{1}{|a|}\delta_{\frac{x_0}{a}}, \varphi(x) >$$

Abbiamo ottenuto che $\delta_{x_0}(ax) = \frac{1}{|a|}\delta_{\frac{x_0}{a}}$

Se $a = -1 \implies \boxed{\delta_{x_0}(-x) = \delta_{-x_0}}$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\log|x|\,\varphi'(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\log|x|\,\varphi'(x)\,dx\right]$$ in $x=0$ è un integrale improprio

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\Big|\log|x|\,\varphi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \Big|\log|x|\,\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx\right]$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\log\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \log\varepsilon\,\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right\}$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\log\varepsilon\left[\varphi(-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon)\right] - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right\}$$

moltiplico e divido per ε

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0^+}\overbrace{(\varepsilon\log\varepsilon)}^{0\ \text{De l'Hospital}}\overbrace{\left[\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right]}^{2\varphi'(0)}}_{\text{tende a zero}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] \ldots$$

Abbiamo trovato che la derivata (distrub.) di $T_{\log|x|}$ opera così: $\forall\varphi\in\mathcal{D}$: $\langle T'_{\log|x|},\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]$

Questa distribuzione $T'_{\log|x|}$ è chiamata valore principale di $1/x$, $\text{v.p.}\,\frac{1}{x}\in\mathcal{D}'$ ed è uguale a $T'_{\log|x|}$

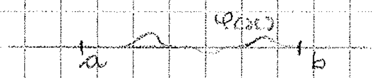
$$\left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{x},\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right)$$

Convergenza di distribuzioni

DEF: Si dice che $T_n \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se $\forall\varphi\in\mathcal{D}$ $\langle T_n,\varphi\rangle \longrightarrow \langle T,\varphi\rangle$ in $\mathbb{C}$

esempio: $T_n = \delta_n \longrightarrow\ ?$ A cosa converge?

Sia $\varphi\in\mathcal{D}$



$\langle T_n,\varphi\rangle = \langle\delta_n,\varphi\rangle = \varphi(n) \longrightarrow\ ?$

Poiché $\text{supp}(\varphi)\subseteq[a,b]$ (per qualche a,b finiti) allora:

$$\varphi(n)=0\quad\forall n>b \Rightarrow \varphi(n)\longrightarrow 0 \quad \text{per } n\to+\infty$$

Quindi $\langle\delta_n,\varphi\rangle = \varphi(n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 = \langle 0,\varphi\rangle$

Nel senso delle distribuzioni $\delta_n \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}'$

esempio: $T_n = \delta_{\frac{1}{n}}$ $\quad\delta_{1/n}\longrightarrow\ ?$ in $\mathcal{D}'$

Sia $\varphi\in\mathcal{D}$; $\langle\delta_{1/n},\varphi\rangle = \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \varphi(0) = \langle\delta_0,\varphi\rangle$

perché φ è continua

Dunque: $\delta_{\frac{1}{n}} \longrightarrow \delta_0$ in $\mathcal{D}'$

$< T_{\rho_n}, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\varphi(x)dx$ ci chiediamo se è vero che $T_{\rho_n} \longrightarrow \delta_0$?

È vero se $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \varphi(0)$ cioè se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\varphi(x) - \varphi(0)\, dx \longrightarrow 0$$ ovvero se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\varphi(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\varphi(0)dx \longrightarrow 0$$

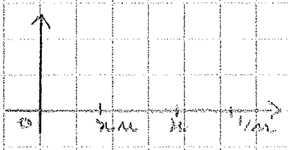
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n (\varphi(x) - \varphi(0))dx \longrightarrow 0$$

Consideriamo il valore assoluto:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx\right| \le \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(x)\left|\varphi(x) - \varphi(0)\right|dx$$

Per il teorema del valor medio:

$$\le \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(x)\left|\varphi'(x_n)\right| \frac{1}{n}dx \quad \text{con } x_n \in \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$$

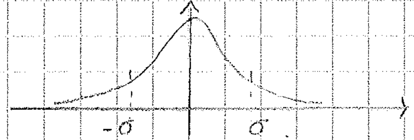


$$\le \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(x)\|\varphi'\|_\infty \frac{1}{n}dx$$

$$= \|\varphi'\|_\infty \frac{1}{n}\int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(x)dx \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$\Longrightarrow T_{\rho_n} \longrightarrow \delta_0$ in $\mathcal{D}'$

esempio: $\rho_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$



$T_{\rho_\sigma} \longrightarrow \delta_0$ in $\mathcal{D}'$ per $\sigma \longrightarrow 0$?

Cioè dobbiamo dimostrare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\sigma(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \varphi(0) \quad \text{per } \sigma \longrightarrow 0 ? \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\sigma(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \longrightarrow 0 \ ?$$

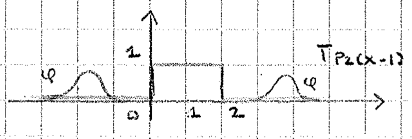
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\sigma(x)\varphi(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\sigma(x)\varphi(0)dx \longrightarrow 0 \quad \text{per } \sigma \to 0 \ ?$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\sigma(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx \longrightarrow 0 \ ?$$

$$\left|\int_a^b \rho_\sigma(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx\right| = \int_a^b \rho_\sigma(x)\left|\varphi(x) - \varphi(0)\right|dx$$ Pongo: $y = \frac{x}{\sigma}$

$$\le \int_a^b \rho_\sigma(x)\left|\varphi'(x_\sigma)\right||x|dx \le \int_a^b \rho_\sigma(x)\|\varphi'\|_\infty$$

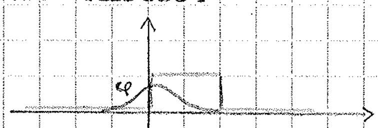
Esempio: Se $f(x) = p_2(x-1)$



$supp(T_{p_2(x-1)}) = [0,2]$

Allora $\langle T_{p_2(x-1)}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x-1)\varphi(x)dx = \int_0^2 \varphi(x)dx = 0$

Se invece:



In questo caso: $\langle T_{p_2(x-1)}, \varphi \rangle = \int_0^2 \varphi(x)dx \neq 0$

PROP: $supp(T') \subseteq supp(T)$

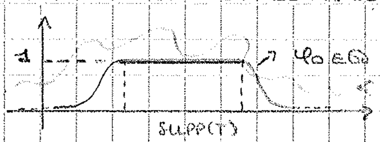
Esempio: Consideriamo δ_{x_0}. Otteniamo che $supp(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$ si verifica

che $supp(\delta_{x_0}^{(p)}) = \{x_0\} \quad \forall p \in \mathbb{N}$

Se $T \in \mathcal{D}'$ è a supporto compatto, cioè $supp(T)$ è compatto allora si possono definire (estendere) i test anche a funzioni $\varphi \in C^\infty$ non (necessariamente) a supporto compatto.

Si procede così:

DEF: Sia $T \in \mathcal{D}'$ a supp. compatto se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, si definisce



$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi_0 \varphi \rangle$ che ha senso perché $\psi_0 \varphi \in \mathcal{D}$ (e si ha $\psi_0\varphi(x) = \varphi(x)$ in $supp(T)$).

OSS: Si può dimostrare che questa definizione in effetti non dipende da come scegliamo ψ_0 fuori dal $supp(T)$, questo grazie al fatto che $supp(T)$ è compatto

Esempio:
- δ_{x_0} è a supporto compatto, quindi ha senso (grazie alla definizione precedente) scrivere $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$
- $\langle \delta_1, e^x \rangle = e^1$
- $\langle \delta_0, \cos x \rangle = \cos(0) = 1$

Si potrebbe definire se $T, S \in \mathcal{D}'$:

$< T * S, \varphi > = < T(y), < S(x), \varphi(x+y) > >$

ciò ha senso se $< S(x), \varphi(x+y) > = \psi(y)$ è una funzione test

In generale: $\psi(y)$ è solo C^∞.

Abbiamo due situazioni:

(i) Se T è a supporto compatto, la formula ha comunque senso

(ii) Se S è a supporto compatto, si può dimostrare che $supp(\psi)$ è compatto, la formula ha ancora senso

Quindi poniamo per definizione:

DEF: Se almeno una tra $T \in \mathcal{D}'$ e $S \in \mathcal{D}'$ ha supporto compatto definiamo $T * S \in \mathcal{D}'$:

$$\boxed{< T * S, \varphi > = < T(x), < S(y), \varphi(x+y) > >}$$

PROP: Commutativa $S * T = T * S$

Traslazione $(S * T)(x-a) = S * T(x-a) = S(x-a) * T$

Derivazione $(S * T)' = S' * T = S * T'$

ESERCIZIO: $T_n \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'$

$S \in \mathcal{D}'$ $supp(S)$ compatto. Verificare che $T_n * S \longrightarrow T * S$ in $\mathcal{D}'$

Svolgimento:

$\varphi \in \mathcal{D}$; $< T_n * S > = < T_n(y), \underbrace{< S(x), \varphi(x+y) >}_{\text{funzione test}} > \longrightarrow < T(y), < S(x), \varphi(x+y) > >$

$= < T * S, \varphi >$

OSS: • $T \in \mathcal{D}'$. Allora $T * \rho_n$ è $C^\infty(\mathbb{R})$. cioè $T * \rho_n$ è una distribuzione regolare T_f con $f \in C^\infty$. Inoltre $T * \rho_n \longrightarrow T$

• La scrittura $T * \rho_n$ significa $T * T_{\rho_n}$

ESEMPIO: $x_0 \in \mathbb{R}$, $T * \delta_{x_0} = ?$

Sia $\varphi \in \mathcal{D}$; $< T * \delta_{x_0}, \varphi > = < T(x), < \delta_{x_0}(y), \varphi(x+y) > >$

$= < T(x), \varphi(x+x_0) >$

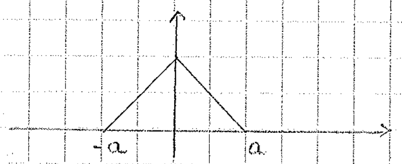
$= < T(x-x_0), \varphi(x) >$

Fare la convoluzione con la delta vuol dire traslare si scrive anche: $\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k \right) * p_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_1(x-k)$

esempio: $p_a * p_a = ?$

$$(p_a * p_a)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_a(x-y)\, p_a(x)\, dy$$

$$= \int_{x-a/2}^{x+a/2} p_a(y)\, dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x+\frac{a}{2} \le -\frac{a}{2}; \quad x \le -a \\ x+a & \text{se } -\frac{a}{2} \le x+\frac{a}{2} \le \frac{a}{2}; \quad a \le x \le 0 \\ -x+a & \text{se } -\frac{a}{2} \le x-\frac{a}{2} \le \frac{a}{2}; \quad 0 \le x \le a \\ 0 & \text{se } x \ge a \end{cases}$$



esercizio: consideriamo le variabili aleatorie normali

$\tilde{X} \sim N(0, \sigma^2)$

$\tilde{Y} \sim N(0, 1)$

le funzioni di densità sono:

$$f_{\tilde{X}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$f_{\tilde{Y}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) \qquad \text{con } z \in \mathbb{R}$$

sappiamo che $f_{\tilde{X}+\tilde{Y}} = f_{\tilde{X}} * f_{\tilde{Y}} = ?$

$$(f_{\tilde{X}} * f_{\tilde{Y}})(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-y)^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(z^2 - 2zy + y^2 + \sigma^2 y^2 \right) \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left((1+\sigma^2) y^2 - 2zy + z^2 \right) \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2} \left[\left(y - \frac{z}{1+\sigma^2} \right)^2 - \frac{z^2}{(1+\sigma^2)^2} + \frac{z^2}{1+\sigma^2} \right] \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2} \left(y - \frac{z}{1+\sigma^2} \right)^2 \right) \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{z^2}{1+\sigma^2} - z^2 \right) \right) dy$$

$$= \exp\left(-\frac{z^2 \sigma^2}{(1+\sigma^2) 2\sigma^2} \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2} \left(y - \frac{z}{1+\sigma^2} \right)^2 \right) dy$$

cambio variabili

$\sqrt{1+\sigma^2} \left(y - \frac{z}{1+\sigma^2} \right) = x$

$dx = \sqrt{1+\sigma^2}\, dy$

$$= \exp\left(-\frac{z^2\sigma^2}{(1+\sigma^2) 2\sigma^2} \right) \cdot \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \frac{dx}{\sqrt{1+\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\sigma^2)} \right) \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx}_{=1}$$

Trasformata di Fourier

DEF: Di trasformata di funzioni

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabile. Si dice trasformata di Fourier di f la funzione $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (oppure $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) definita da:

$$\mathcal{F}(f)(\nu) = \underset{NO}{\hat{f}(\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \nu t}\, dt \qquad \text{per } \nu \in \mathbb{R}$$

PROP: f, h sommabili

(i) $\mathcal{F}(\lambda f + \mu h) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(h)$

(ii) $\mathcal{F}(e^{2\pi i \nu_0 t} f(t))(\nu) = \mathcal{F}(f(t))(\nu - \nu_0)$

(iii) $\mathcal{F}(f(t - t_0))(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu}\, \mathcal{F}(f(t))(\nu)$

(iv) $\mathcal{F}(f(at))(\nu) = \dfrac{1}{|a|}\, \mathcal{F}(f(t))\left(\dfrac{\nu}{a}\right)$

(v) $\mathcal{F}(f(-t))(\nu) = \mathcal{F}(f(t))(-\nu)$

OSS: $e^{-2\pi i \nu t} = \cos(-2\pi \nu t) + i \operatorname{sen}(-2\pi \nu t)$

$= \cos(2\pi \nu t) - i \operatorname{sen}(2\pi \nu t)$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}(f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i \nu t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(2\pi \nu t)\, dt - i \int_{\mathbb{R}} f(t) \operatorname{sen}(2\pi \nu t)\, dt$$

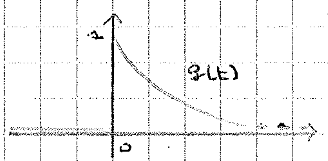
Quindi:

a) Se f pari: $\mathcal{F}(f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(2\pi \nu t)\, dt$;

b) Se f è dispari: $\mathcal{F}(f)(\nu) = -i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(2\pi \nu t)\, dt$;

esempio: $a > 0 \qquad f(t) = H(t)\, e^{-at}$

$\mathcal{F}(f) = \hat{f} = ?$



$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \nu t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \nu t}\, e^{-at}\, dt$$

$$= \left. \frac{e^{-(2\pi i \nu + a)t}}{-(2\pi i \nu + a)} \right|_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \overbrace{\frac{e^{-(2\pi i \nu + a)t}}{-(2\pi i \nu + a)}}^{\text{verifichiamo che va a zero}} + \frac{1}{2\pi i \nu + a}$$

$$* \quad \left| \frac{e^{-(2\pi i \nu + a)t}}{2\pi i \nu + a} \right| = \frac{e^{\operatorname{Re}(-(2\pi i \nu + a)t)}}{|2\pi i \nu + a|} = \frac{e^{-at}}{|2\pi i \nu + a|} \xrightarrow[a>0]{t \to +\infty} 0$$

Formulario di Metodi Matematici - Analisi

Trasformata di Fourier

$\mathcal{F}(g)(\nu) = \hat{g}(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i\nu t}dt, \qquad \nu \in \mathbb{R}.$

Proprietà

(a) $\mathcal{F}(e^{2\pi i\nu_0 t}T(t))(\nu) = \mathcal{F}(T(t))(\nu - \nu_0) \qquad (\nu_0 \in \mathbb{R})$

(b) $\mathcal{F}(T(t-t_0))(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu}\mathcal{F}(T(t))(\nu) \qquad (t_0 \in \mathbb{R})$

(c) $\mathcal{F}(T(at))(\nu) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(T(t))\left(\frac{\nu}{a}\right) \qquad (a \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$

(d) $\mathcal{F}(t^k T(t))(\nu) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k (\mathcal{F}(T))^{(k)}(\nu) \qquad (k \in \mathbb{N})$

(e) $\mathcal{F}(T^{(k)})(\nu) = (2\pi i\nu)^k \mathcal{F}(T)(\nu) \qquad (k \in \mathbb{N})$

Tavola di trasformate ($a > 0$)

Distribuzione	Trasformata
$T(t)$	$\mathcal{F}(T(t))(\nu)$
$H(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a+2\pi i\nu}$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$
$p_a(t)$	$\frac{\sin(a\pi\nu)}{\pi\nu}$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\nu^2/a}$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-2\pi a\|\nu\|}$

Distribuzione	Trasformata
$\frac{\sin(at)}{t}$	$\pi p_{a/\pi}(\nu)$
δ_{x_0}	$e^{-2\pi i x_0 \nu}$
$e^{2\pi i x_0 t}$	δ_{x_0}
v.p. $\frac{1}{t}$	$-\pi i \,\mathrm{sign}(\nu)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{1}{\pi i}$ v.p. $\frac{1}{\nu}$
$H(t)$	$\frac{1}{2\pi i}$ v.p. $\frac{1}{\nu} + \frac{\delta_0}{2}$

Formulario per l'esame di Calcolo delle Probabilità 01AGG, 04AGG, 09AGG
V1.4 del 17 settembre 2007

x	e^{-x}	$\Phi(x)$	$\text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
0	1	0.5	0
0.1	0.9048	0.5398	0.07966
0.2	0.8187	0.5793	0.1585
0.3	0.7408	0.6179	0.2358
0.4	0.6703	0.6554	0.3108
0.5	0.6065	0.6915	0.3829
0.6	0.5488	0.7257	0.4515
0.7	0.4966	0.758	0.5161
0.8	0.4493	0.7881	0.5763
0.9	0.4066	0.8159	0.6319
1	0.3679	0.8413	0.6827
1.1	0.3329	0.8643	0.7287
1.2	0.3012	0.8849	0.7699
1.3	0.2725	0.9032	0.8064
1.4	0.2466	0.9192	0.8385
1.5	0.2231	0.9332	0.8664
1.6	0.2019	0.9452	0.8904
1.7	0.1827	0.9554	0.9109
1.8	0.1653	0.9641	0.9281
1.9	0.1496	0.9713	0.9426
2	0.1353	0.9772	0.9545
2.1	0.1225	0.9821	0.9643
2.2	0.1108	0.9861	0.9722
2.3	0.1003	0.9893	0.9786
2.4	0.09072	0.9918	0.9836
2.5	0.08208	0.9938	0.9876
2.6	0.07427	0.9953	0.9907
2.7	0.06721	0.9965	0.9931
2.8	0.06081	0.9974	0.9949
2.9	0.05502	0.9981	0.9963
3	0.04979	0.9987	0.9973
3.1	0.04505	0.999	0.9981
3.2	0.04076	0.9993	0.9986
3.3	0.03688	0.9995	0.999
3.4	0.03337	0.9997	0.9993
3.5	0.0302	0.9998	0.9995
3.6	0.02732	0.9998	0.9997
3.7	0.02472	0.9999	0.9998
3.8	0.02237	0.9999	0.9999
3.9	0.02024	1	0.9999
4	0.01832	1	0.9999

ANALISI
Binomio di Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Serie geometrica: $\sum_{k=0}^{\infty} ap^k = a/(1-p)$, con $0 \le p < 1$. Serie esponenziale: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$. Funzione Gamma: per $a > 0$, $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$; $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$; se a intero $\Gamma(a) = (a-1)!$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Funzione Beta: per $a, b > 0$ e $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$; $B(a,b)\Gamma(a+b) = \Gamma(a)\Gamma(b)$. FdD normale standard: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Funzione degli errori: $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$, $x \ge 0$. $\text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(x) - \Phi(-x)$.

$\Leftarrow$ TAVOLE
A destra le tavole della funzione di sopravvivenza esponenziale standard, della funzione di distribuzione normale standard e delle probabilità normali per intervalli simmetrici.

FUNZIONE DI RISCHIO
X positiva con densità f e funzione di distribuzione F. Funzione di rischio: $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$, $1 - F(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\, du\right)$. Condizionamento: $P(X > t+s | X > s) = e^{-\int_s^{t+s} \lambda(u) du}$.

GAMMA E POISSON
$F_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ è la funzione di distribuzione della $\Gamma(n, \lambda)$. Se il numero di eventi che si verificano nell'intervallo $[0, t]$ è una Poisson(λt), allora il tempo di arrivo dell'n-mo evento è una $\Gamma(n, \lambda)$ e gli intertempi sono indipendenti e Exp(λ).

CONVOLUZIONE
Se X e Y sono variabili aleatorie reali indipendenti e $Z = X + Y$, $f_X \star f_Y = f_Z$. Caso continuo: $= f_X \star f_Y(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$. Variabili aleatorie a valori interi: $= f_X \star f_Y(z) = \sum_y f_X(z-y) f_Y(y)$. Casi notevoli:

- $\text{Binom}(n,p) \star \text{Binom}(m,p) = \text{Binom}(n+m,p)$
- $\text{Poisson}(\lambda_1) \star \text{Poisson}(\lambda_2) = \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $\Gamma(\alpha, \lambda) \star \Gamma(\beta, \lambda) = \Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$
- $N(\mu_1, \sigma_1^2) \star N(\mu_2, \sigma_2^2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI
La FGM di X è $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$, definita per tutti i t per cui è finita. Se $a, b \in \mathbb{R}$, allora $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$. Se le derivate esistono, allora $M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$. Se X e Y sono indipendenti, allora $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$. Se $K(t) = \log M(t)$, allora $K'(0) = E(X)$, $K''(0) = \text{Var}(X)$.

LIMITI per $n \to \infty$.

Poisson: Se $p(n) = \lambda/n$, allora $\text{Bin}(n, p(n)) \to \text{Poisson}(\lambda)$.
LGN: Se $X_1, X_2, \ldots$ sono IID e $\sim X$, allora $\overline{X}_n \to E(X)$.
TLC: Se $X_1, X_2, \ldots$ sono IID e $\sim X$, $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$, allora $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \to N(0, \sigma^2)$.

La definizione precedente ha senso solo se supp(T) è compatto, ma questo non è il caso di $H(t)$ e $\cos(t)$ (o meglio di $T_{H(t)}$, $T_{\cos(t)}$)

- Come risolviamo il problema?

L'idea è trovare un nuovo spazio di funzioni test (chiamiamolo $\mathcal{S}$) tale che valga: " $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}$ "

Questa condizione permetterebbe di dare un senso alla formula $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$

Definiremo le "nuove" distribuzioni come funzionali su $\mathcal{S}$ cioè $T: \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ lineari, "continue".

Lo spazio cercato è detto "delle funzioni rapidamente decrescenti all'∞".

DEF: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice rapidamente decrescente all'∞ se:

$\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e se: $\lim_{t \to \pm\infty} t^p \varphi^{(q)}(t) = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$

(cioè $\varphi^{(q)}(t)$ va a zero più velocemente dei polinomi)

Questo spazio si denota con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o $\mathcal{S}$ ed è lo spazio delle funzioni C^{∞} che tendono a zero più velocemente di ogni $\frac{1}{t^p}$ per $t \to \pm\infty$. Stessa cosa vale per le derivate.

esempi: • $\varphi(t) = e^{-t^2} \in \mathcal{S}$

• se $\varphi \in \mathcal{D}$ allora $\varphi \in \mathcal{S}$; in altri termini $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$

Allora:

DEF: Si dice che $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ se $t^p \varphi_n^{(q)}(t) \to t^p \varphi^{(q)}(t)$ uniformemente su $\mathbb{R}$. Si dimostra che:

PROP: (i) $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}$

(ii) $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_n) \to \mathcal{F}(\varphi)$ in $\mathcal{S}$

Ora possiamo definire le "nuove" distribuzioni

DEF: $T: \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ si dice distribuzione temperata se:

a) T è lineare
b) T è "continua" cioè $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S} \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ in $\mathbb{C}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 122

Esempio: Calcolare $\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = ?$

Sia $\varphi \in \mathcal{S}$:

$< \mathcal{F}(\delta_{x_0}), \varphi > = < \mathcal{F}(\delta_{x_0})(\nu)), \varphi(\nu) >$

φ sommabile $= < \delta_{x_0}(\nu), \mathcal{F}(\varphi)(\nu) >$

$= < \delta_{x_0}(\nu), \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt >$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \underbrace{e^{-2\pi i x_0 t}}_{\varphi(t)} dt$

$= < T_{e^{-2\pi i x_0 t}}, \varphi(t) > = < T e^{-2\pi i \nu x_0}, \varphi(\nu) >$

Abbiamo trovato che:

$$\boxed{< \mathcal{F}(\delta_{x_0})(\nu), \varphi(\nu) > = < T_{e^{-2\pi i x_0 \nu}}, \varphi(\nu) >}$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}(\delta_{x_0})(\nu) = T e^{-2\pi i x_0 \nu}$

Più semplicemente: $\quad \mathcal{F}(\delta_{x_0})(\nu) = e^{-2\pi i x_0 \nu}$

Inoltre se $x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(\delta_0) = 1$

DEF: (Antitrasformata di Fourier di funzione)

se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è sommabile allora l'antitrasformata di Fourier di f è la funzione:

$\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (oppure $\mathcal{F}^{-1}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.)

definita da $\check{f}(t) = \mathcal{F}(f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\nu) e^{2\pi i t \nu} d\nu$. In altri termini

$\check{f}(t) = \hat{f}(-t)$ (oppure $\mathcal{F}^{-1}(f)(t) = \mathcal{F}(f)(-t)$)

PROP: se f è sommabile allora $\hat{f}$ e $\check{f}$ sono sommabili e continue.

DEF: (Antitrasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$)

se $T \in \mathcal{S}'$ la sua antitrasformata è la distribuzione temperat[a] $\check{T}$ (oppure $\mathcal{F}^{-1}(T)$) definita da: $< \check{T}, \varphi > = < T, \check{\varphi} >$

oppure: $< \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi > = < T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) >$

Non è difficile verificare che: $\check{T}(t) = \hat{T}(-t)$ o anche:

$\mathcal{F}^{-1}(T)(t) = \mathcal{F}(T)(-t)$

Tema d'esame

- Se $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = H(t)$ allora:

a. $f(t) = H(-t)$ c. $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\, v.p\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\delta_0}{2}$

b. $f(t) = H(t)$ d. $f(t) = -H(t)$

Risposta (a)

infatti per la formula d'inversione $\underbrace{\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)(t))}_{H(t)} = f(-t) \Rightarrow f(t) = H(-t)$

Valgono per la trasformata di Fourier in S' le stesse proprietà di $\mathcal{F}(f)$ con f sommabile. (Vedi formulario)

esempio: Dato $f(t) = t^m$ (m fissato). Calcolare $\mathcal{F}(f) = ?$

$f(t) = t^m$ è un polinomio, quindi è a crescita lenta $\Rightarrow T_f \in S'$ quindi $\mathcal{F}(t^m)$ significa

$$\mathcal{F}(t^k\, T(t))(\nu) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \left[\mathcal{F}(T(t))\right]^{(k)}(\nu)$$

con $k = m$ $T(t) = 1$

allora: $\mathcal{F}(t^m)(\nu) = \mathcal{F}(t^m 1)$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^m \left[\mathcal{F}(1)\right]^{(m)}(\nu)$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^m \delta_0^{(m)}$$

esempio: $\mathcal{F}(\sin t) = ?$

$\sin t$ limitato allora $\sin(t) \in S'$ (temperata)

intendendo $T_{\sin(t)} \in S'$

$$\mathcal{F}(\sin t)(\nu) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)(\nu)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}(e^{it})(\nu) - \mathcal{F}(e^{-it})(\nu)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}(e^{2\pi i(\frac{1}{2\pi})t})(\nu) - \mathcal{F}(e^{2\pi i(-\frac{1}{2\pi})t})(\nu)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\delta_{1/2\pi} - \delta_{-1/2\pi}\right)$$

Trasformata di Laplace

DEF: Sia $f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ loc. sommabile. Si dice trasformata di Laplace di f, la funzione:

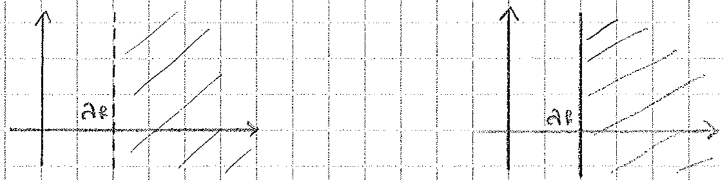
$$\mathcal{L}(f): \Omega_f \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definita da:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad s \in \Omega_f$$

dove $\Omega_f = \{ s \in \mathbb{C} : f(t)e^{-st}$ è sommabile in $t \in [0,+\infty) \}$

TEOREMA: Ω_f è $\mathbb{C}$, oppure $\emptyset$ oppure è un semipiano del tipo: $\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda_f \}$ oppure del tipo $\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \lambda_f \}$



Si dice che: $\lambda_f = \inf \{ \operatorname{Re} s : s \in \Omega_f \}$

λ_f: ascissa di $\mathcal{L}$-trasformabile e si dice che f è $\mathcal{L}$-trasformabile se $\Omega_f \neq \emptyset$

Esempio: $\mathcal{L}(H(t))(s) = ?$

$$\mathcal{L}(H(t))(s) = \int_0^{+\infty} H(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left| \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{t=+\infty}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-st}}{-s} + \frac{1}{s}$$

⤳ quando esiste?

$\exists$ se $\operatorname{Re} s > 0$ e in tal caso fa zero

$$\mathcal{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{per } \operatorname{Re} s > 0$$

In generale però utilizzeremo la seguente:

PROP: (i) $\mathcal{L}$ è lineare

(ii) $\mathcal{L}(e^{s_0 t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s - s_0)$

(iii) $\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0))(s) = e^{-t_0 s}\, \mathcal{L}(f(t))(s)$

(iv) $\exists\, [\mathcal{L}(f(t))]'(s) = -\mathcal{L}(t f(t))(s)$ ($\mathcal{L}(f)$ olomorfa in Ω_f)

Questo integrale viene scritto con la notazione:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty} \mathcal{L}(f)(s)\, e^{st}\, ds$$

Abbiamo ottenuto la cosiddetta formula d'inversione di Riemann-Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty} \mathcal{L}(f)(s)\, e^{st}\, ds$$

Deduciamo da tale formula che $\mathcal{L}$ è iniettiva cioè:

se $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \Rightarrow f = g$ con f, g continue su $[0, +\infty)$

se $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \Rightarrow \mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(f-g) = 0$

$$\Rightarrow f(t) - g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty} \underbrace{\mathcal{L}(f-g)}_{=0}\, e^{st}\, ds = 0 \Rightarrow f = g$$

Allora $\exists\ \mathcal{L}^{-1}$, detta antitrasformata di Laplace

esempio: • $\mathcal{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)(t) = H(t)$$

Calcolare: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)(t)$

sappiamo che: $\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0))(s) = e^{-t_0 s}\,\mathcal{L}(f(t))(s)$

$$\mathcal{L}(e^{s_0 t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-s_0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)(t) = e^{2t}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{s}\right)(t) = e^{2t} H(t)$$

• $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(2s-1)^2}\right)(t) = ?$

Ricordo che: $\mathcal{L}(t H(t))(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}\right)(t) = \frac{1}{4} e^{1/2\, t} \cdot t H(t) \qquad s_0 = \frac{1}{2} \quad k = 1$$

• Calcolare: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4s^2+9}\right)(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4(s^2+9/4)}\right)(t) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3}{2}t\right) H(t)$$

$\mathcal{L}$-trasformata di distribuzioni

Per avere un suggerimento per la definizione, prendiamo f $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} H(t)f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$= \langle T_{H(t)f(t)}, e^{-st} \rangle$$

Questo ha senso se T_f ha supporto compatto. Quindi definiamo:

DEF: sia $T \in \mathcal{D}'$ a supporto compatto, con $supp(T) \subseteq [0;+\infty)$ la $\mathcal{L}$-trasformata di T è la funzione $\mathcal{L}(T): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da:

$$\mathcal{L}(T)(s) = \langle T(t), e^{-st} \rangle$$

ESEMPIO: $x_0 \in \mathbb{R}$ δ_{x_0} ha supporto compatto,

$supp(\delta_{x_0}) = \{x_0\} \subseteq [0;+\infty)$ con $x_0 \geq 0$

$\mathcal{L}(\delta_{x_0})(s) = \langle \delta_{x_0}(t), e^{-st} \rangle = e^{-x_0 s}$

Pertanto otteniamo:

$$\mathcal{L}(\delta_{x_0})(s) = e^{-x_0 s}$$

se $x_0 = 0$ $\mathcal{L}(\delta_0)(s) = 1$

La definizione precedente sostanzialmente va bene anche se $T \in \mathcal{S}'$ perché $supp(T) \subseteq [0;+\infty)$ e e^{-st} è rapidamente decrescente (a $+\infty$) per $t \to +\infty$ purché $Re\,s > 0$

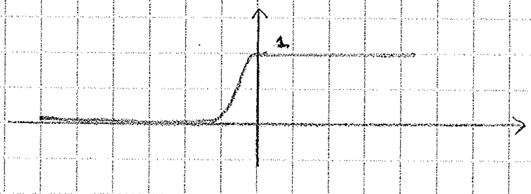
DEF: Sia $T \in \mathcal{S}'$ (temperata) con $supp(T) \subseteq [0;+\infty)$

la $\mathcal{L}$-trasformata di T, è la funzione $\mathcal{L}(T): \Omega_T \to \mathbb{C}$

definita da $\mathcal{L}(T)(s) = \langle T, \xi(t)e^{-ts} \rangle$

con $\Omega_T = \{ s \in \mathbb{C} : Re\,s > 0 \}$

e $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ come in figura:



- $\mathcal{L}(\delta'_{x_0})(s) = s\,\mathcal{L}(\delta_{x_0})(s) = s\,e^{-x_0 s}$

Iterando:

$$\mathcal{L}(\delta_{x_0}^{(p)})(s) = s^p e^{-x_0 s}$$

caso particolare $x_0 = 0$:

$$\mathcal{L}(\delta_0^{(p)})(s) = s^p$$

In particolare $\mathcal{L}^{-1}(a_p s^p + \dots + a_1 s + a_0)(t)$

$$= a_p \delta_0^{(p)} + \dots + a_1 \delta_0' + a_0 \delta_0$$

esempio: $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s^5 + s^3 - 1}{s^3 + s}\right)(t) = ?$

Dividiamo i polinomi:

$$\begin{array}{cccc|c} s^5 & +s^3 & -1 & & s^3+s \\ \cline{5-5} -s^5 & -s^3 & & & s^2 \\ \cline{1-4} // & // & -1 & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{s^5+s^3-1}{s^3+s} = s^2 - \frac{1}{s^3+s} = s^2 - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1}$$

Allora: $\mathcal{L}^{-1}(s^2) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) =$

$$\delta_0^{(2)} - H(t) + \cos(t)H(t)$$

consideriamo $f, g : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f, g = 0$ su $(-\infty, 0)$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)\,g(y)\,dy$$

$$= \int_0^t f(t-y)\,g(y)\,dy$$

Si può dimostrare che $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g)$

anche in $\mathcal{D}'$ si ha $\mathcal{L}(T * S) = \mathcal{L}(T)\,\mathcal{L}(S)$ e il primo membro si può definire $\forall T, S$ con $\mathrm{supp}(T) \subseteq [0; +\infty)$ $\mathrm{supp}(S) \subseteq [0; +\infty)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 122

Soluzione

Intorno al punto $z_0 = i$, $\sinh\left(\frac{2}{z}\right)$ è olomorfa, allora ammette lo sviluppo di Taylor in $z_0 = i$: $\sinh\left(\frac{2}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-i)^n$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-i)^n$ in un intorno di $z_0 = i$

$Res_f(i) = -1$ e $z_0 = i$ polo doppio

3. 4/9/12 Quale delle seguenti f è analitica in $\mathbb{C}$?

a. $f(x+iy) = x - iy$ (complesso coniugato non è olomorfo $f(z) = \bar{z}$)

b. $f(x+iy) = x^2$ (non è armonica, quindi non è olom. in tutto $\mathbb{C}$)

c. $f(z) = |z|^2$ (c'è un modulo!)

d. $f(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy$

Soluzione

La d è un polinomio $f(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy = (x+iy)^2 = z^2$ quindi è olomorfa

4. 17/7/12 Quiz 5 Qual è vera?

a. $\mathcal{F}(t^2 \delta_1(t+2))(\nu) = e^{2\pi i \nu}$

b. $\mathcal{F}(t^2 \delta_1(t+2))(\nu) = \frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i \nu}$

c. $\mathcal{F}(t^2 \delta_1(t+2))(\nu) = \frac{1}{4\pi^2} \delta_{-1}''$

d. $\mathcal{F}(t^2 \delta_1(t+2))(\nu) = 4e^{-2\pi i \nu}$

Soluzione

$t^2 \delta_1(t+2) = t^2 \delta_{-1}(t)$ applico la traslazione

$= (-1)^2 \delta_{-1} = \delta_{-1}$ moltiplicazione di una $C^\infty \cdot \delta$

5. $T = (x^3 - 12\cos x)\delta_3(x-4)$. Calcolare $\langle T, x^2 \rangle$

$T = (x^3 - 12\cos x)\delta_3(x-4) = (x^3 - 12\cos x)\delta_7 = (7^3 - 12\cos 7)\delta_7$

$\Rightarrow \underbrace{(7^3 - 12\cos 7)}_{\text{costante}} \underbrace{\langle \delta_7, x^2 \rangle}_{\text{diraca}} = (7^3 - 12\cos 7)(7^2)$

3. $f_n(x) = \mathbb{1}_{[-n; 1/n]}(x)$

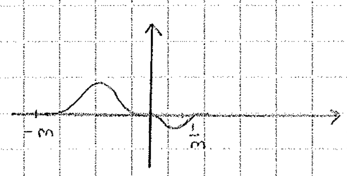
$T_n = T_{f_n} - \delta_n$. allora $T_n \to ?$

Soluzione

Sappiamo che $\delta_n \to 0$ in $\mathcal{D}'$ (primo esempio)

$\varphi \in \mathcal{D}$ $\quad \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-n;1/n]}(x)\,\varphi(x)\,dx$

$$= \int_{-n}^{1/n} \varphi(x)\,dx$$



Quando $n \to \infty$ $-n$ si sposta sempre più verso $-\infty$ mentre $\frac{1}{n} \to 0$. allora

L'integrale diventa: $\int_{-n}^{0} \varphi(x)\,dx$

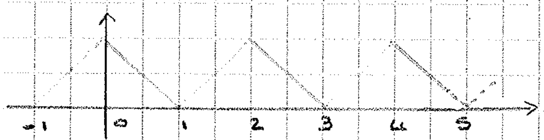
$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{(-\infty;0)}(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle T_{\underbrace{\mathbb{1}_{(-\infty;0)}}_{=H(-x)}}, \varphi \rangle$

allora: $\quad T_{f_n} \to T_{H(-x)}$ in $\mathcal{D}'$

$T_n \to T_{H(-x)}$ in $\mathcal{D}'$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 122

3.



$$\tilde{f}(t) = f(t) * \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{2n}$$

$$\mathcal{L}(\tilde{f}(t))(s) = \mathcal{L}\left(f(t) * \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{2n}\right) = \mathcal{L}(f(t))(s)\ \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{2n}\right)(s)$$

$$= \mathcal{L}(f(t)) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(\delta_{2n})(s)$$

$$= \mathcal{L}(f(t)) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2ns}$$

$$= \mathcal{L}(f(t)) \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2s})^n$$

$$= \mathcal{L}(f(t))(s)\ \frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{e^{-s}+e^{s}-2}{s^2}\ \frac{1}{1-e^{-2s}}$$

4. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2-3s-3}{s-4}\right)(t)$

1° passo: scomporre in fratti semplici

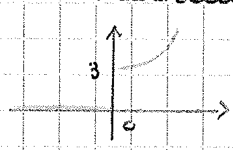
$$\begin{array}{rr|l} s^2-3s-3 & & s-4 \\ -s^2+4s & & \hline s+1 \\ \hline // \quad s-3 & & \\ -s+4 & & \\ \hline // \quad 1 & & \end{array}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(s+1+\frac{1}{s-4}\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}(s) + \mathcal{L}^{-1}(1) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-4}\right)$$

$$= \delta_0' + \delta_0 + e^{4t}H(t)$$

5. Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + y = H(t)e^{2t} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}(y'+y)(s) = \mathcal{L}(H(t)e^{2t})(s)$$

$$\mathcal{L}(y')(s) + \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$s\,\mathcal{L}(y)(s) - \overset{\text{"}3}{y(0^+)} + \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s+1)\,\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s-2} + 3$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{3s-5}{(s-2)(s+1)}$$

formula di Heaviside

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s-5}{(s-2)(s+1)}\right)(t) \overset{\downarrow}{=} \mathrm{Res}_F(2)\,e^{2t} + \mathrm{Res}_F(-1)\,e^{-t}$$

$$= \left(\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{8}{3}e^{-t}\right)H(t)$$