NUMERO: 1099

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lacirignola

MATERIA: Metodi Numerici + Eserc.

Prof. Monegato

30/09/13

Equazioni differenziali ordinarie

$y(x) = ?$

$y''(x) + k^2 y(x) = 1 + x$ → eq. diff. di ordine 2 (ordine massimo di derivazione) e lineare (combinazione lineare tra y e y'', 1 e k^2, costanti)

Se k fosse stata una funz. nota allora non lineare. Anche $y''(x) + y'(x)\,y(x) + 2x = 0$ NL

Lineare quando y e le sue derivate compaiono come combinazioni lineari.

Ex: $y'''' + 2y = 1$ → eq. diff. di ordine 4 lineare

La soluzione dipende dalla costante arbitraria che dipende dalle condizioni iniziali.

PROBLEMI AL VALORE INIZIALE

$y(x)$:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \quad , \quad x > a \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Con l'aggiunta delle cost. arbitraria definisco una sola curva di soluzioni

Ex: $y'(x) + \cos^2(x)\,y^2(x) = \sin x$

FORMA CANONICA

$$y'(x) = \underbrace{\sin x - \cos^2(x)\,y^2(x)}_{f(x,\,y(x))}$$

→ eq. diff del 1° ordine non lineare

Equaz. esplicite nella derivata di ordine massimo, esempio di forma implicita:

$\cos(e^{y'(x)}) + y = 2$ → questo tipo di problema si risolve col metodo delle secanti (o delle tangenti...)

SOLUZIONE (CLASSICA) : $y(x)$ e $y'(x)$ e f continue in $x > a$. Quindi $y'(x) = f(x,y)$ è un'uguaglianza di funzioni continue (e anche le sue derivate fino a quelle di ordine massimo) $y(x), y'(x) \in C[a,b] \Leftrightarrow y \in C^1[a,b]$

È possibile affermare qualcosa sulla classicità e unicità della funzione analizzand $f(x,y)$

3/10/13

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \quad , x > a \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

⚠ PRIMA DI APPLICARE UN METODO NUMERICO BISOGNA SCRIVERLO IN QUESTA FORMA

Ex: Equazione del 2° ordine:

$$\begin{cases} y''(x) = \cancel{f}\, g(x, y(x), y'(x)) \rightarrow \text{generica rappresentazione} \star \\ x > a \\ \text{(I valori iniziali sono i valori che assumono la derivata prima di } y \text{ e } y\text{:)} \\ y(a) = y_0 \\ y'(a) = y_0^1 \end{cases}$$

Considero tutte le derivate di ordine inferiore come fossero delle incognite:

$z_1(x) = y(x)$

$z_2(x) = y'(x)$

Quindi:

$$y''(x) = \underbrace{(y'(x))}_{\to z_2}{}' = z_2'(x)$$

$$\begin{cases} z_2'(x) = g(x, z_1(x), z_2(x)) \\ z_1'(x) = z_2(x) \rightarrow \text{equaz. del 1° ordine} \\ z_1(a) = y_0 \\ z_2(a) = y_0^1 \end{cases}$$

Introducendo i vettori:

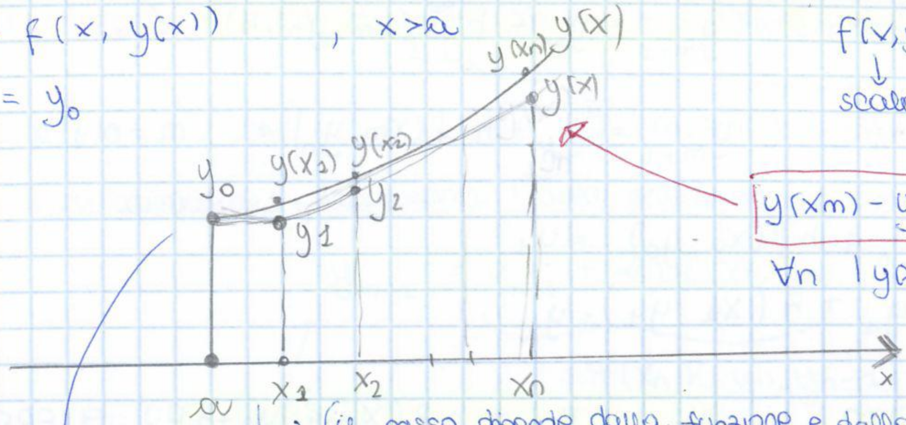
$$z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} \qquad z(a) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0^1 \end{pmatrix} \equiv z_0 \qquad \overset{z'}{f(x, z(x))} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ g(x, z_1(x), z_2(x)) \end{pmatrix}$$

In forma canonica $\star \Longleftrightarrow \begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) \quad , x > a \\ z(a) = z_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) , & x > a \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f(x,y)$, $y \in \mathbb{R}^m$

$f(x,y) \to$ scalare ; $y \to$ vettore



$\boxed{|y(x_m) - y_m|}$ ERRORE

$\forall n \quad |y(x_n) - y_m| \leq$ tolleranza

↳ (il passo dipende dalla funzione e dalla sua forma)

Da qsto pto y_0, per quel punto passa una e una sola curva (soluz. del problema differenziale) (CURVA CONTINUA CON DERIV. PRIMA CONTINUA

Ricorda: $y(x) \in C^1$ (derivata continua (come la funzione di partenza))

↳ SOLUZIONE CLASSICA, uguaglianza puntuale

Un metodo più accurato è tanto più preciso quanto più la funzione è regolare (con tanti più numeri di derivate continue) o SOLUZIONE

I metodi numerici approssimano la curva a → PUNTI DISCRETI (successione di punti) e decido io quanto è fitta tale successione di punti.

INTERPOLAZIONE

METODI NUMERICI

ONE - STEP

Utilizzo solo l'ultimo valore che ho trovato per procedere avanti

ultimo valore trovato

$(x_m, y_m) \xrightarrow[h = h_m]{} x_{n+1}, y_{m+1} = ?$

ESPLICITO — IMPLICITO

se la formula che fornisce l'incognita non contiene l'incognita

MULTISTEP

Al contrario della one-step, si tiene conto non solo dell'ultima approssimazione (k passi)

$$y_{m+1} = \Psi(\underbrace{y_m, y_{m-1}, y_{m+1-k}}_{k})$$

ESPLICITO — IMPLICITO

Metodo dei trapezi: $y_m + \frac{h}{2}\underbrace{\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]}_{\Phi(x_n, y_n, y_{n+1}; h)}$ IMPLICITO ONE STEP

Formula del punto medio: approssima l'area sottesa da una curva con un rettangolo

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \underbrace{2h f(x_n, y_n)}_{\Psi(x_n, h, y_n, y_{n-1})} \qquad K = 2$$

METODO MULTISTEP A DUE PASSI ESPLICITO
↳ quindi bisogna conoscere y_0, y_1 (calcolati precedentemente con Eulero ad esempio).

★ COME RICAVARE IL METODO DI EULERO?

$y'(x) = f(x, y(x))$

Trovare ~~a~~ un metodo one-step che mi consenta di trovare il passo successivo.

I) $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ → mi piazzo nel punto di partenza

II) ↳ Non voglio la derivata prima, quindi applico la definizione di derivata
↳ RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + \cancel{err} = f(x_n, y(x_n))$$

TRASCURO POICHÈ NON CONOSCO y', quindi eseguo un'approssimazione

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$$ → formula di Eulero ESPLICITO

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x)$$

$x_n \le x \le x_{n+1}$ → in qualsiasi punto

$x = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ → nel punto medio è doppiamente più accurato

IMPLICITO

I) Parto dal punto x_{n+1} (tanto l'errore che commetto in qualunque punto è sempre lo stesso!)

$y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y_{n+1})$
↳ RAPPORTO INCREMENTALE

2) $(x(t), y(t)) = P(t)$ $\quad r = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$

↳ distanza dal punto dall'origine

$$\begin{cases} x''(t) = -\dfrac{x(t)}{r^3}, & x(0) = \dfrac{1}{2}, \quad x'(0) = 0 \\ y''(t) = -\dfrac{y(t)}{r^3}, & y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

SISTEMA DI 2 EQUAZ. DEL 2° ORDINE
↳ SISTEMA DI 4 EQUAZ. DEL 1° ORDINE

$Z_1(t) = x(t)$
$Z_2(t) = x'(t)$] relative alla 1° equazione

$Z_3(t) = y(t)$
$Z_4(t) = y'(t)$] // // 2° //

~~$Z_2'(t) = -\dfrac{Z_1(t)}{r^3}, \quad Z_1(0) = \dfrac{1}{2}, \quad Z_2(0) = 0$~~ $\quad r^3 = \sqrt{Z_1^2(t) + Z_3^2(t)}$

$Z_1' = Z_2$

$$\begin{cases} Z_1' = Z_2 & Z_1(0) = \dfrac{1}{2} \\ Z_2'(t) = -\dfrac{Z_1(t)}{r^3} & Z_2(0) = 0 \\ Z_3'(t) = Z_4(t) & Z_3(0) = 0 \\ Z_4'(t) = -\dfrac{Z_3(t)}{r^3} & Z_4(0) = 1 \end{cases}$$

↓ Z' ↓ Z ↓ Z_0

$$Z(t) = \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ Z_3(t) \\ Z_4(t) \end{pmatrix}; \quad Z'(t) = \begin{pmatrix} Z_1'(t) \\ Z_2'(t) \\ Z_3'(t) \\ Z_4'(t) \end{pmatrix}; \quad Z(0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(t, Z(t)) = \begin{pmatrix} Z_2(t) \\ -Z_1(t)/r^3 \\ Z \\ -Z_3(t)/r^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} Z'(t) = f(x, t), & t > 0 \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

7/10/13

① $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} z'(x) = A z(x) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$

APPLICAZIONE METODO DI EULERO

$z_0 : \; z_{n+1} = z_n + h f(x_n, z_n)$

$$z_n = \begin{pmatrix} z_{1n} \\ z_{2n} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Prima di applicare il metodo:

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 & , \; z_1(0) = 1 \\ z_2' = -2z_1 + 3z_2 & , \; z_2(0) = 1 \end{cases}$$

Applicazione del metodo

$$\begin{cases} z_{1,n+1} = z_{1n} + h z_{2n} & , \; z_{10} = 1 \\ z_{2,n+1} = z_{2n} + h(-2z_{1n} + 3z_{2n}) & , \; z_{20} = 1 \end{cases}$$

NB: z_{10} e z_{20} le conosco, e con questo posso trovare z_{11} e z_{22} ...

EQUIVALENTI

$$\begin{pmatrix} z_{1,n+1} \\ z_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1n} \\ z_{2n} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{1n} \\ z_{2n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_{1,n+1} \\ z_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1n} \\ z_{2n} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_{2n} \\ -2z_{1n} + 3z_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1n} + h z_{2n} \\ z_{2n} + h(-2z_{1n} + 3z_{2n}) \end{pmatrix}$$

$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})$

$z_{n+1} = z_n + h f(\cancel{x}_{n+1}, z_{n+1})$

$z_{n+1} = z_n + h \underline{A z_{n+1}}$

$I z_{n+1} - hA z_{n+1} = z_n$

$(I - hA) z_{n+1} = z_n$ $\quad n = 0, 1, \ldots$

il costo computazionale risiede nella risoluzione di questo sistema lineare.

- Con il metodo dei trapezi: (IMPLICITO)

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{2}\left[f(X_n, Z_n) + f(X_{n+1}, Z_{n+1}) \right]$$

II MEMBRO DELL'EQUAZ. CON PEDICE n ALLE x E A z

II MEMBRO, CON PEDICE n+1 (SIA ALLE x CHE ALLE z)

NB: hai un termine in più rispetto al precedente, doppia accuratezza

$$\begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \frac{h}{2}\left[Z_{2n} + Z_{2,n+1} \right], & Z_{10} = 1/2 \\ Z_{2,n+1} = Z_{2n} + \frac{h}{2}\left[\frac{Z_{1n}}{(Z_{1n}^2 + Z_{3n}^2)^{3/2}} + \frac{Z_{1,n+1}}{(Z_{1,n+1}^2 + Z_{3,n+1}^2)^{3/2}} \right], & Z_{20} = 0 \\ Z_{3,n+1} = Z_{3,n} + \frac{h}{2}\left[Z_{4,n} + Z_{4,n+1} \right], & Z_{30} = 0 \\ Z_{4,n+1} = Z_{4,n} - \frac{h}{2}\left[\frac{Z_{3n}}{(Z_{1,n}^2 + Z_{3,n}^2)^{3/2}} + \frac{Z_{3,n+1}}{(Z_{1,n+1}^2 + Z_{3,n+1}^2)^{3/2}} \right], & Z_{40} = 1 \end{cases}$$

Se non troviamo metodo Stiff (?!?) usa l'esplicito.

ESEMPIO GENERICO

$$\begin{cases} y''' = f(x, y, y', y''), & x > 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \\ y''(0) = \gamma \end{cases}$$

$y \to Z_1$, $y' \to Z_2$, $y'' \to Z_3$

$$\begin{cases} Z_1' = Z_2 \\ Z_2' = Z_3 \\ Z_3' = f(x, Z_1, Z_2, Z_3) \end{cases}$$

Applicando il metodo dei Trapezi

$$\begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1n} + \frac{h}{2}\left[Z_{2n} + Z_{2,n+1} \right] \\ Z_{2,n+1} = Z_{2n} + \frac{h}{2}\left[Z_{3n} + Z_{3,n+1} \right] \\ Z_{3,n+1} = Z_{3n} + \frac{h}{2}\left[f(X_n, Z_{1n}, Z_{2n}, Z_{3n}) + f(X_{n+1}, Z_{1,n+1}, Z_{2,n+1}, Z_{3,n+1}) \right] \end{cases}$$

Alla fine si ottiene una sola equaz. di una sola incognita ☺

$h \to \frac{h}{2}$

$h^p \to \left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{h^p}{2^p}$

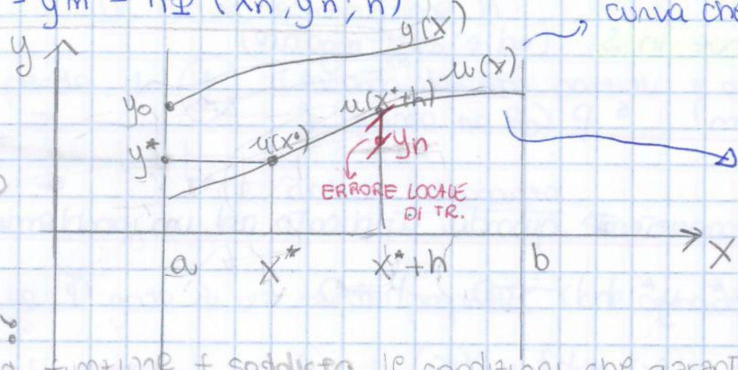
p mi dà una misura di ~~cosa~~ una riduzione che subisce l'errore quando cambio il passo h.

MET. EULERO $(p = 1)$ / MET. DEI TRAPEZI $(p = 2)$

Esiste un legame quando si compie un solo passo tra l'errore locale e globale.

Se Φ gode di una determinata proprietà (REGOLARITÀ), allora l'errore ~~loca~~ globale si comporta allo stesso modo del locale.

$0 = y_{n+1} - y_n - h\Phi(x_n, y_n; h)$



u(x) → curva che passa per il pto (x^*, y^*)

EQ. CHE DEFINISCONO LA CURVA

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) & a < x \le b \\ u(x^*) = y^* \end{cases}$$

X UNA F PASSA UNA E UNA SOLA CURVA

↓ Cioè:

la mia funzione f soddisfa le condizioni che garantiscono l'esistenza dell'unicità della funzione

DE ⚠ Due curve dell'equaz. differenziale si intersecano? No, per ogni punto passa una e una sola curva! ⚠

$u(x) \equiv y(x) \Rightarrow y^* \equiv y_0$ → COINCIDONO SOLO IN QST CASO

$y_{n+1} - y^* - h\Phi(x^*; y^*; h) = 0$

AL POSTO DEL VALORE APPROX METTO IL VAL. ESATTO

$\boxed{u(x^*+h) - y^* - h\Phi(x^*, y^*; h) \neq 0}$ → ERRORE LOCALE

↳ valore esatto! (non quello approssimato)

$y_n = y^* + h\Phi(x^*; y^*; h)$

$y_n - y^* - h\Phi(x^*; y^*; h) = 0$

VAL. APPROX

divido per h (NORMALIZZANDO)

ERRORE LOCALE UNITARIO DI TRONCAMENTO

$$\boxed{\frac{1}{h}\left[u(x^*+h) - y^* - h\Phi(x^*, y^*; h)\right] = t(x^*; y^*; h)}$$

$\Downarrow = u(x^*)$

↳ (METODO CHE IL MODELLO RESTITUISCE)

↳ Se $t \to 0$, $h \to 0$ METODO NUMERICO CONSISTENTE

La velocità con cui tende a $\emptyset$, coincide con l'ordine di consistenza.

↳ si trova con gli sviluppi in serie di Taylor (di $f(x, u(x))$), e se le derivate non si possono fare, non si può dire nulla riguardo l'errore.

Un metodo di ordine elevato è più costoso dal punto di vista computazionale, ma i passi h sono più lunghi rispetto ad un metodo di ordine più basso.

toll = 10^{-4}

$h \approx 10^{-4}$ ESEMPIO:

$h \approx 10^{-4} \rightarrow$ 10 passi con un metodo del IV ordine. costo: 40
10000 " " " I ordine: costo: 10000 !!

↳ SOLO SE f suff. regolare, al contrario, devo avanzare con passo 10^{-4} e in questo caso il costo comp. del metodo del IV ordine è maggiore !!

Quindi, dipende da f (facendo derivate parziali e controllando che siano continue e quante ne ho)

↳ e dalla tolleranza.

Teorema: se Φ gode di una certa proprietà (che coincidono con quelle di f) ovvero suff. regolare in S, derivate parziali continue... e soddisfa l'enunciato:
(METODO RUNGE KUTTE)
(?!?)

$$t(\ ) = O(h^p)$$
$$\Downarrow$$
$$\max_n \| y(x_n) - y_n \| = O(h^p)$$

Osservazione :

$y_n = y^*$

$y_{n+1} = u(x^*+h)$

$y_{n+1} - y_n - hf(x_n, y_n) = 0$

↓

$$\frac{u(x^*+h) - \underbrace{u(x^*)}_{y^*}}{h} - \cancel{h}f(x^*, u(x^*)) = t(x^*, y^*, h)$$

$$\cancel{\frac{y(x^*+h) - y(x^*)}{h}} \qquad \frac{u(x^*+h) - u(x^*)}{h} + O(h) = f(x, u(x^*))$$

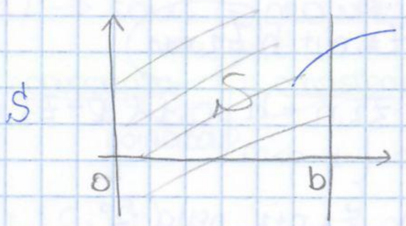
$O(h)$ → ERRORE LOCALE UNITARIO DI TRONCAMENTO

e' il residuo che il metodo produce

★ Applicando il metodo:

$y_1 = y_0 + h y_0^{1/3} = 0$

$y_1 = y_3 = \dots y_n = 0$



$y^{1/3}$ e' continu

$f(x,y) = y^{1/3}$

- $f_x = 0$
- $f_y = \frac{1}{3} y^{-2/3}$

↳ ESPLODE IN 0 !

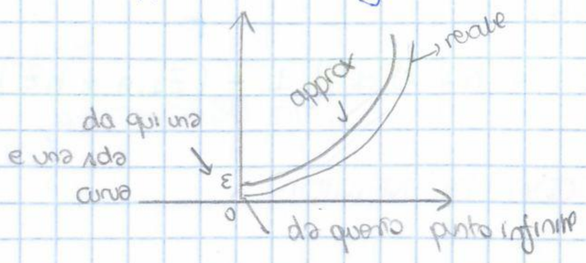
$f \notin F_1(S)$ → le derivate parziali di f non sono continue in S

Non possiamo affermare nulla!

$y(x) = 0$ → e' UNA SOLUZIONE DI QUEL PROBLEMA.

↳ Ne ha infinite di soluzioni (questo perche' la condizione iniziale e' $y(0)=0$)

Un modo per risolvere, e' quello di approssimare $y(0) = \varepsilon = 10^{-9}$



$z^{(0)}$: $z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{F(z^{(k)})}{F'(z^{(k)})}$, $k = 0, 1, ..$ → rivedere metodo di Newton

14/10/13

Runge-Kutta a r stadi

(r = 1 EULERO)

a_i, b_i parametri liberi
c_{ij}

GENERICO METODO DI RUNGE-KUTTA ESPLICITO A r STADI

$r \geq 1$

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{r} a_i K_i \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_i = f(x_n + b_i h, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} K_j) \end{cases}$$

→ quello di Eulero $i = 1$

$0 < b_i \leq 1$

$i = 2 ; r$ → i vale $(r-1)$

$y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}K_j \approx y(x_n + b_i h)$ → SONO LE ORDINATE VALUTATE IN X

per questo motivo vogliamo l'errore locale unitario di troncamento

Vogliamo massimizzare il massimo ordine di convergenza. (o consistenza) COINCIDONO

$t(x^*, y^*; h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + ... + \alpha_p h^p + ..$

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR DELL'ERRORE

$\alpha_k = \alpha_k(\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_{ij}\})$

$m < p - 1$ $\begin{cases} \alpha_0() = 0 \\ \alpha_1() = 0 \\ \alpha_m() = 0 \end{cases}$

↓ m deve essere massimo $m = r - 1$ ↓ poiché i coeff. sono pari a r-1

m RAPPRESENTA IL NUM. DI COEFF. DI TAYLOR CHE DEVONO ESSERE NULLI PER AVERE t=0

SI SCOPRE CHE: PEDICE MAX

$r = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow m = r - 1$

$\boxed{t() = O(h^r)}$ $p = r$

$$\begin{cases} K_1^* = f(x^*, u(x^*)) \\ K_i^* = f(x^* + b_i h, y^* + h\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}K_j^*) \\ \frac{1}{h}\left[u(x^* + h) - u(x^*) - h\sum_{i=1}^{r} a_i K_i^*\right] = t(x^*, y^*; h) \end{cases}$$

~~$K_i = f(x^* + b_i h, y^* + h\sum_{j=1}^{i-1}$~~

→ PORTO TUTTO A SX E DATO CHE CI SONO I VAL. ESATTI È ≠ 0

Se $r > 4$ m non vale più $r - 1$.

CASO DI $p = 2$ $(r = 2)$

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + h(a_1 K_1 + a_2 K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + b_2 h, y_n + hc_{21}K_1) \end{cases}$$

$(i = 2 \quad j = 1)$

4 coefficienti

$t() = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \alpha_4 h^4 +$

Come annullare i 4 coefficienti?

Esercizi

$y'(x) = \underbrace{2y(x) + \cos x}_{f(x,y)}$, $y(0) = 1$ — $f(x,y)$ e' il secondo membro!

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = 2y_m + \cos(x_m) \\ \cancel{k_2 = 2y_{m0} + \cos(x_0 ...)} \\ k_2 = \cos(x_n + h) + 2(y_m + hk_1) \end{cases}$$

← Applicazione metodo di Heun

$f(x_m, y_m)$

HEUN
$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

secondo membro

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$(x_n + h, z_{1n} + hk_1^{(1)}, z_{2n} + hk_2^{(2)})$

$$\begin{cases} y'' = 0.1(1 - y^2)y' - y \quad , \quad x > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} z_1' = z_2 \\ z_2' = 0.1(1 - z_1^2)z_2 - z_1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z' = f(x, z) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad z(0) \quad z_0$$

$$\boxed{z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad f(x,z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ 0.1(1 - z_1^2)z_2 - z_1 \end{pmatrix} \qquad k_1 = \begin{pmatrix} k_1^{(1)} \\ k_1^{(2)} \end{pmatrix} \quad k_2 = \begin{pmatrix} k_2^{(1)} \\ k_2^{(2)} \end{pmatrix}}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$z_0^{(1)} = 1$ $\qquad$ $z_0^{(2)} = 0$

$z_{n+1}^{(1)} = z_n^{(1)} + h(k_1^{(1)} + k_2^{(1)})$ $\qquad$ $z_{n+1}^{(2)} = z_n^{(2)} + h(k_1^{(2)} + k_2^{(2)})$

$$K_2 = \begin{pmatrix} K_2^{(1)} \\ K_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\left[Z_{2n} + \frac{h}{2} \underbrace{k_1^{(2)}}_{D_n}\right] / p\left(x_n + \frac{h}{2}\right)}^{A_n} \\ \underbrace{-q\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\left[Z_{1n} + \frac{h}{2} \underbrace{k_1^{(1)}}_{C_n}\right]}_{B_n} \end{pmatrix}$$

NB: il coeff q e p vanno calcolati in $x_n + \frac{h}{2}$

$$\left\{ K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, Z_n + \frac{h}{2} k_1\right) \Rightarrow f_i\left(x_n + \frac{h}{2}, Z_{1n} + \frac{h}{2} k_1^{(1)}, Z_{2n} + \frac{h}{2} k_1^{(2)}\right)\right.$$

$$Z_{1,n+1} = Z_{1n} + h K_2^{(1)}$$

$$K_2^{(1)} = A_n = \left(Z_{2n} + \frac{h}{2} D_n\right) / p\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$Z_{2,n+1} = Z_{2n} + h K_2^{(2)}$$

$$K_2^{(2)} = B_n = -\left(Z_{1n} + \frac{h}{2} C_n\right) \cdot q\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$$

METODI MULTISTEP A K PASSI (LINEARI)

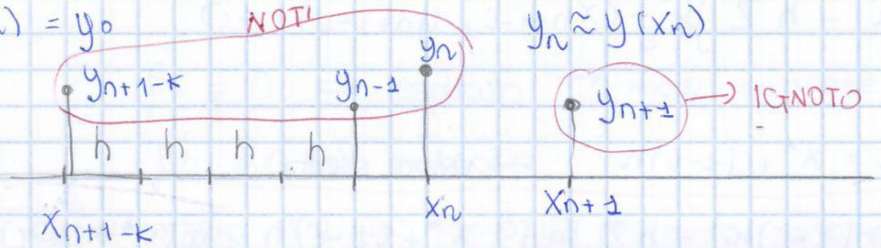
↳ quando coinvolge $k+1$ valori consecutivi

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x > a \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

(uguaglianza tra vettori)

$y_n \approx y(x_n)$

$x_{n+1} - x_n = h$



- PASSO COSTANTE: quando la funzione non ha bruschi cambiamenti di forma -

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, y_{n+1-i} = h \sum_{i=0}^{k} \left(\beta_i \, f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i})\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i = \alpha_i(k) \\ \beta_i = \beta_i(k) \end{array}\right\} \rightarrow \text{dipendono solo da } k \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_i \neq \alpha_i(h, n) \\ \beta_i \neq \beta_i(h, n) \end{array}\right.$$

ES: $\alpha_0 y_{n+1} - \alpha_k y_{n+1-k} = h \beta_0 f(x_{n+1}, y_{n+1})$

PASSO $= k = n+1 - [(n+1) - k] = k$

↳ il passo è dato dalla differenza del passo più grande meno quello più piccolo

POLINOMIO CARATTERISTICO

Riscrivendola:

$$\alpha_0 \underbrace{y_{n+1}}_{t^k} + \alpha_1 \underbrace{y_n}_{t^{k-1}} + \dots + \alpha_k \underbrace{y_{k+1-i}}_{1} = 0$$

$t \quad$ EQ. CARATTERISTICA ASSOCIATA

$$\alpha_0 t^k + \alpha_1 t^{k-1} + \dots \alpha_{k-1} t + \alpha_k = 0$$

→ polinomio caratteristico con k zeri (reali e/o complessi coniug)

Il metodo è detto zero stabile sse tutte le radici $|t_i| \le 1$, e quelle che hanno modulo pari a 1 sono semplici.

L'ordine di convergenza è uguale all'ordine di consistenza. (Anche l'errore globale è maggiorato da una costante (come il locale)). Il metodo è certamente consistente se almeno una delle radici è $= 1$. (se ne abbiamo solo 1 è consistente zero stabile; se nessuna zero stabile)

I metodi di Adams sono i metodi più utilizzati

ESEMPIO:
$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i})$$
$\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_i \neq 0$, $i > 1$

$n+1-(n+1-k) = k \longrightarrow$ passi

$\beta_0 = 0 \Rightarrow$ esplicito → NON COMPARE $f(x_{n+1}, y_{n+1})$

$\beta_0 \neq 0 \Rightarrow$ implicito

(NB: per vedere la zero stabilità scrivo il polinomio caratteristico con $\alpha_0 t^k + \alpha_1 t^{k-1} + \dots \alpha_k = 0$)

21/10/13

METODI DI ADAMS sono particolari metodi multistep a k passi.

$$y_{m+1} - y_m = h \sum_{i=0,1}^{k} \beta_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i})$$

implicito   esplicito (poiché annullo il termine $f(x_{n+1}, y_{n+1})$)

Il metodo è automaticamente zero stabile: (CONSISTENTE)

$$t^k - t^{k-1} = t^{k-1}(t-1) = 0$$

COME SI COSTRUISCONO?

$y'(x) = f(x, y(x)) \longrightarrow$ NON SI PARTE DA QUESTA

Adams implicito con $k=1 \longrightarrow$ METODO DEI TRAPEZI

$$= \int_{x_n}^{x_{n+1}} y' \, dx = y(x_{n+1}) - y(x_n) \quad (*)$$

$\boxed{y'(x) = \text{polinomio di grado} \leq K-1 \Rightarrow P_{K-1}(x) = y'(x)}$

↳ SOLO IN QUESTO CASO COINCIDONO OVUNQUE!

In generale approssimo $y'(x)$ con $P_{K-1}(x)$

$$y'(x) = P_{K-1}(x) = \sum_{i=1}^{K} \ell(x)\, y'(x_{n+1-i}) + err$$

Se la soluzione $y(x)$ e' un polinomio di grado $\leq K \Rightarrow err = 0$

$$(*) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \sum_{i=1}^{K} \ell_{n+1-i}(x)\, y'(x_{n+1-i})\, dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} err(x)\, dx$$

ISOLANDO y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{K} \underbrace{\left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_{n+1-i}(x)\, dx\right]}_{h\beta_i} y'(x_{n+1-i}) + R_K$$

Poiche' h e' costante (nodi costanti) : $\underbrace{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_{n+1-i}(x)\, dx}_{n,i,h} = h\beta_i$

$\beta_i \neq \beta_i(n,h)$ $\quad \beta_i = \beta_i(K)$

↳ legato solo al n° dei passi

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \sum_{i=1}^{K} \beta_i\, y'(x_{n+1-i}) + R_K(h) \quad (**)$$

formula di quadratura di tipo interpolatorio (β_i pesi della formula)

$y(x_{n+1}) - y(x_n) = hf(x_n, y(x_n)) + err$ ← EULERO

$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\,y'(x_n) + err$

↳ La formula dei trapezi trovata e' una generalizzazione della formula $(**)$

UTILIZZANDO $y'(x) = f(x, y(x))$ elimino la dipendenza da y' :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \sum \beta_i f(x_{n+1-i}, y(x_{n+1-i})) + \cancel{R_K}$$

TRASCURO (ERRORE LOCALE ~~UNITARIO~~ DI TRONCAMENTO)

$R_K = O(h^{K+1})$ NON NORMALIZZATO

↳ come faccio a dirlo?

• EULERO ESPLICITO

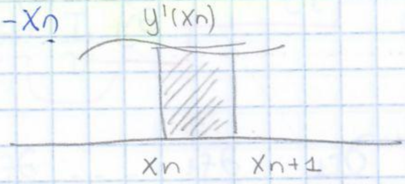
$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx \qquad K=1$$

$\cancel{P_1(x)}$ $P_0(x_n) = y'(x_n)$ DATO CHE È ESPLICITO P_0

$$P_0(x) = y'(x_n)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \underbrace{y'(x_n)}_{f(x_n,\,y(x_n))} \overbrace{\int_{x_n}^{x_{n+1}} dx}^{h} + \underbrace{O(h^{2})}_{\text{RESIDUO}} \qquad 2 \to K+1$$

$h = x_{n+1} - x_n$

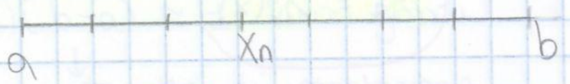


$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)} \quad \text{EULERO}$$

24/10/13

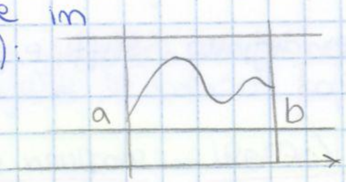
Solo se i K passi sono costanti, i β_i sono costanti. Il metodo multistep richiede una valutazione ad ogni passo.

Tutti i metodi visti sono convergenti:



$$\max_n \|y(x_m) - y_m\| = O(h^p), \quad h \to 0$$ (l'errore globale va simultaneamente a $\emptyset$ in tutti i punti)

$f \in \mathbb{F}_p(S)$ (f suff. regolare in una zona):

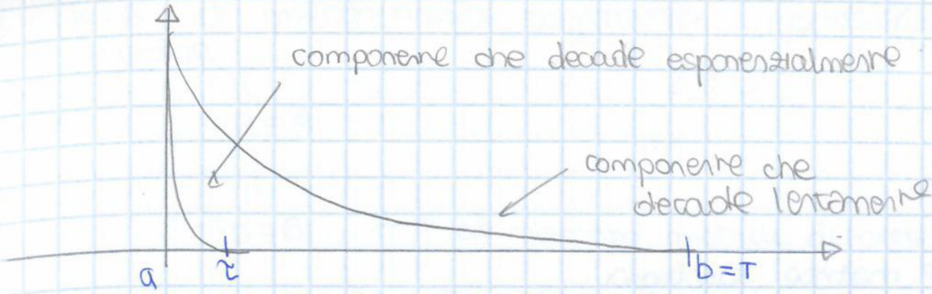


Fissata toll (tolleranza finita), toll > 0, è certamente possibile scegliere un $h > 0$ (suff. piccolo) tale che $\max_m \|y(x_m) - y_m\| \leq$ toll. (ESEMPIO QUALITATIVO)

Per risolvere le equazioni alle derivate parziali:

IVP → ~~NO~~ STIFF

IVP → NON STIFF



$e^{Re(\lambda min)}$

$e^{Re(\lambda max)}$

La componente che decade molto lentamente definisce il transitorio. La componente minima descrivere il cammino minimo che il mio percorso deve fare. E il passo con cui avanzare è pari a τ. n° di passi $\frac{T}{\tau}$.

$e^{-\lambda}$ $\quad -\frac{T}{\tau}$ $\quad \lambda = \frac{T}{\tau}$

EX: $\tau = 10^{-8}$

Se mi interessa studiare il fenomeno nella fase di innesco ($t_0 = 10^{-6}$).

Per integrare tra τ e t_0 devo fare 100 passi (NO STIFF!)

Inoltre, un sistema è stiff anche quando: — il numero di passi è come fare $\frac{\max Re(\lambda_i)}{\min Re(\lambda_i)}$

1. Deve esistere almeno un λ_i con $Re(\lambda_i) << -1$.
   (Lievemente -10^3). Gli eventuali λ_i con $Re(\lambda_i) \neq 0$ devono essere tali che $Re(\lambda_i)(b-a) \approx 1$ (non grandi)
   $\downarrow$ intervallo di integrazione

   Entrambe le condizioni devono essere soddisfatte.

   ~~Considerando solo quelli con le parti reali negative:~~

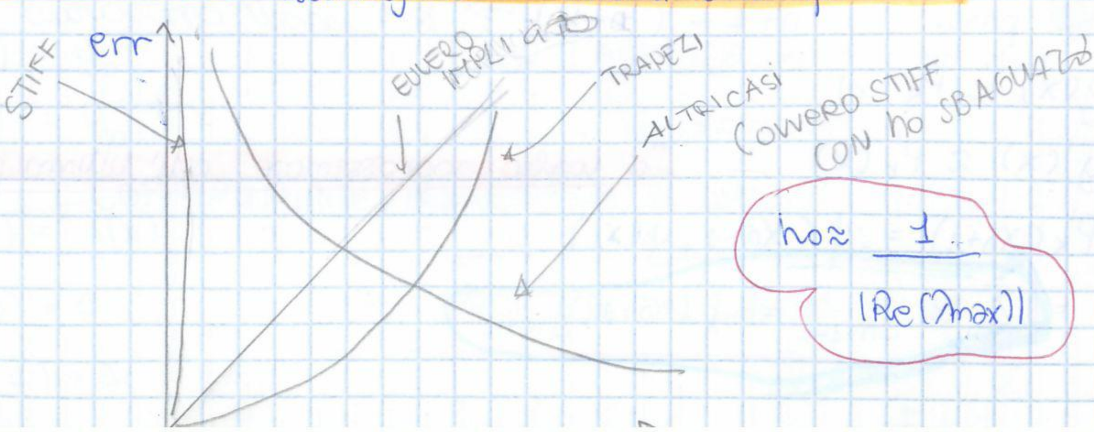
2. Supponendo che siano soddisfatte le condizioni sopra elencate: per λmax deve risultare $|Re(\lambda_i)|(b-a) >> 1$ — CONSIDERO SOLO QUELLI CON PTE REALE NEGATIVA

dove: (λmax: $Re(\lambda max) = \min_{Re(\lambda_i)<0} Re(\lambda_i)$
$\hookrightarrow$ pte reale negativa più grande)

OPPURE IL MAX DEI VALORI ASSOLUTI:

$$\left\{ \max_{Re(\lambda_i)<0} |Re(\lambda_i)|(b-a) >> 1 \right\}$$

Se il punto 1. e 2. sono soddisfatte il sistema è di tipo STIFF.



$$h_0 \approx \frac{1}{|Re(\lambda max)|}$$

Se $k \leq 6$ il metodo risulta convergente. (CONSISTENTE E ZERO STABILE)
↳ ordine

BDF : $p = 3$
⋮
$p = 6$ → al massimo metodi di ordine 6

DE: Dare la definizione di sistema STIFF. Quale metodo utilizzeresti per risolverlo? {EU, TR, BDF}
Cosa succederebbe se si utilizzasse un generico metodo esplicito?

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x > a \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

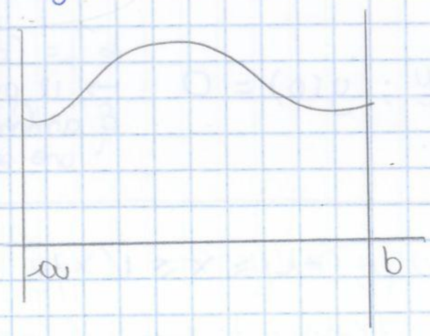
PROBLEMI CON VALORI AI LIMITI

I problemi a valori iniziali rappresentano un problema di una funzione che evolve nel tempo.

↳ le configurazioni stazionarie sono rappresentati dai problemi dei valori di limiti

ESEMPI: SITUAZIONI ALL' EQUILIBRIO

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & a < x < b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$ → intervallo noto a priori



$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & a < x < b \\ g(y(a), y(b)) = 0 \end{cases}$$

↓
La soluzione aggiuntiva seleziona una particolare soluzione.

TRA LE INFINITE NE SELEZIONIAMO UNA

1. $$\begin{cases} y''(x) = y(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_0^1 \end{cases}$$ ⇒ AMMETTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE

↓ CORRISPONDENTE PROBLEMA VAL AI LIMITI

$$\begin{cases} y''(x) = y(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$ ⇒ PROBLEMA CON VALORI AI LIMITI

EQUAZIONE PARTICOLARE DI UN PROBLEMA LINEARE DEL II ORDINE:

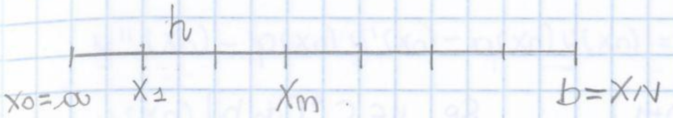
$$\begin{cases} y''(x) = p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) + r(x) & a \leq x \leq b \\ a_0\, y(a) - a_1\, y'(a) = \alpha \\ b_0\, y(b) + b_1\, y'(b) = \beta \end{cases}$$

31/10/13

DIFFERENZE FINITE

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

→ Riprendendo il teorema coi valori ai limiti



Intervallo a-b suddiviso in N parti uguali. f ha comportamento uniforme nell'intervallo.

$$h = \frac{b-a}{N}$$

- PARTIZIONE DI TIPO UNIFORME (suddivis. di uguale ampiezza)
- PARTIZIONE DI TIPO ADATTATIVA (la suddivisione si adatta)

$[a,b] \approx \{x_n,\ n = 0 : N\}$ si approssima il dominio discreto con quello continuo.

$$\begin{cases} y''(x_n) = f(x_n, y(x_n), y'(x_n)) & n = 1 : N-1 \\ y(x_0) = \alpha \\ y(x_N) = \beta \end{cases}$$

$y(x_n) = ?$ → le incognite si sono trasformate in numeri.

$n = 1 : N-1$

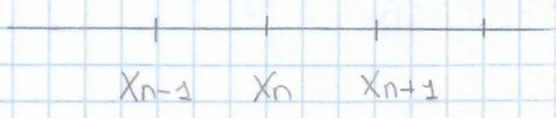
Nota $y(x) \longrightarrow y'(x),\ y''(x)$

$\{y(x_n)\} \longrightarrow \{y'(x_n)\},\ \{y''(x_n)\}$

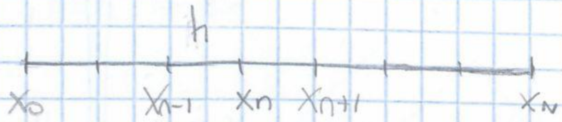
↳ nuove incognite

Posso esprimere le derivate in funzione dei valori delle y

I VALORI CHE POSSO UTILIZZARE SONO SOLO QUELLI DISCRETI



$$\begin{cases} y''(x) - p(x)y'(x) - q(x)y(x) = r(x) \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \qquad a \le x \le b$$



$p, q, r \in C[a,b]$, $\quad q(x) > 0 \quad$ in $[a,b]$

$$\max_{1 \le n \le N-1} |y(x_n) - y_n| = O(h^2)$$

$$y''(x_n) \approx a_{n-1} y_{n-1} + a_n y_n + a_{n+1} y_{n+1}$$

$$\begin{cases} y''(x_n) - p(x_n)y'(x_n) - q(x_n)y(x_n) = r(x_n) \\ y(x_0) = \alpha \\ y(x_N) = \beta \end{cases}$$

TRA I NODI x_{n-1} E x_{n+1}

$$\begin{cases} \dfrac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{h^2} h^2 - p(x_n)\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} h^2 - h^2 q(x_n)\, y_m = h^2 r(x_m), \quad n = 1 : N-1 \\ y_0 = \alpha \\ y_N = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{\left(1 + \frac{h}{2}p_n\right)}_{a_n} y_{n-1} - \underbrace{(2 + h^2 q_n)}_{b_n} y_n + \underbrace{\left(1 - \frac{h}{2}p_n\right)}_{c_n} y_{n+1} = r_n \cdot h^2 \\ y_0 = \alpha \\ y_N = \beta \end{cases}$$

$-b_1 y_1 + c_1 y_2 = h^2 r_1 - \alpha a_1 \qquad n = 1$

$a_2 y_1 - b_2 y_2 + c_2 y_3 = h^2 r_2 \qquad n = 2$

$a_{N-2} y_{N-3} - b_{N-2} y_{N-2} + c_{N-2} y_{N-1} = h^2 r_{N-2}$

$a_{N-1} y_{N-2} - b_{N-1} y_{N-1} = h^2 r_{N-1} - \beta c_{N-1}$

y_{m-1} -

y_{m+1}

y_{m-1}

y_{m-1}

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & & \emptyset \\ a_2 & -b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{N-2} \\ \emptyset & & a_{N-1} & -b_{N-1} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} h^2 r_1 - \alpha a_1 \\ h^2 r_2 \\ \vdots \\ h^2 r_{N-2} \\ h^2 r_{N-1} - \beta c_{N-1} \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\{ Ay = b$$

Se $h \le \dfrac{2}{\max\limits_{a \le x \le b} |p(x)|}$ $\longrightarrow$ A diagonale dominante, non singolare

4/11/13

ESERCIZI

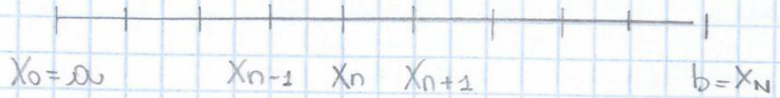
$$\begin{cases} y''(x) - p(x)\,y'(x) - q(x)\,y(x) = r(x) & a \le x \le b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

ESEMPIO 1 - Applicazione metodo differenze finite -

$$\begin{cases} y'' - p(x)\,y'(x) - q(x)\,y(x) = r(x) \\ y'(a) + \gamma\, y(a) = \alpha \\ y'(b) + \delta\, y(b) = \beta \end{cases}$$

$\leftarrow$ TIPO SEPARATO (una condizione per a e una per b)

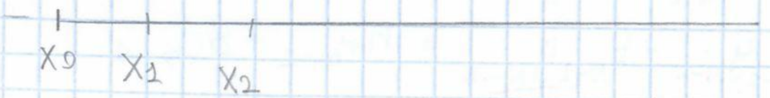
- Dirichlet $\to$ in quel pto viene impostato il valore della funzione.
- Neumann $\to$ in quel pto viene imposto il valore della derivata prima
- Robin (misto) in questo caso e' di tipo misto (SIA DERIVATA PRIMA CHE FUNZIONE)



$h = \dfrac{b-a}{N}$, $x_n = a + nh$, $n = 0; N$

$y_n \approx y(x_n)$ $n: 0; N$ $\Rightarrow$ $N+1$ incognite

NO PUNTI PRECEDENTI



1

$$a_0\left(y_1 + 2h\gamma y_0 - 2h\alpha\right) - b_0 y_0 + c_0 y_1 = h^2 r_0$$

$$(2h\gamma a_0 - b_0)\,y_0 + (a_0 + c_0)\,y_1 = h^2 r_0 + 2h\alpha a_0$$

DUE INCOGNITE

$$\begin{cases} (2h\gamma a_0 - b_0)\,y_0 + (a_0+c_0)\,y_1 = h^2 r_0 + 2h\alpha a_0 & N=0 \\ a_m y_{m-1} - b_m y_m + c_m y_{m+1} = h^2 r_m & N=1;3 \\ (a_N + c_N)\,y_{N-1} + (b_N + 2h\delta c_N)\,y_N = h^2 r_N - 2h\beta c_N & N=4 \end{cases}$$

SISTEMA TRIDIAGONALE

2

$$a_N y_{N-1} - b_N y_N + c_N\left(y_{N-1} - 2h\delta y_N + 2h\beta\right)$$

~~$y_N + (\ldots - 2h\delta c_N)\,y_N + 2h\beta c_N$~~

$$(a_N + c_N)\,y_{N-1} - (b_N + 2h\delta c_N)\,y_N + 2h\beta c_N$$

INCOGNITE: $y_0, y_1, \ldots, y_N$ OK!

(fare l'esempio con $N=4$)

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

1 con $\begin{cases} p(x) = r(x) = q(x) = 1 \\ \gamma = 1 \\ \delta = 2 \end{cases}$

SISTEMA [5×5]

2 $\begin{cases} y'' \ldots \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_N) = 0 \end{cases}$

→ IN QUESTO ESEMPIO QUI NON SI INTRODUCE IL LIVELLO FITTIZIO DEL PASSATO, SOLO x_{N+1}

$x_0 \quad x_1 \quad \ldots \quad x_N \quad x_{N+1}$

$$\begin{cases} a_n y_{n-1} - b_n y_n + c_n y_{n+1} = h^2 r_n \\ y_0 \\ \dfrac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h} = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{N+1} = y_{N-1}$$

$$\begin{cases} a_1 y_0 - b_1 y_1 + c_1 y_2 = h^2 r_1 - a_1 \\ a_n y_{n-1} - b_n y_n + c_n y_{n+1} = h^2 r_n & n = 2 : N-1 \\ a_N y_{N-1} - b_N y_N + c_N y_{N+1} = h^2 r_N \end{cases}$$

MA!

$$\Downarrow$$

$$(a_N + c_N)\,y_{N-1} - b_N y_N = h^2 r_N$$

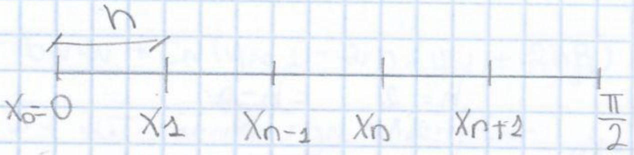
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 106

7/11/13 174

ESERCIZIO - metodo delle diff. finite -

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$

$y(x) = x + \cos(x) - \sin(x)$ → SOLUZIONE (ESATTA)



$N = 4, 8, 16, 32, 64, \dots$

$h = \frac{\pi/2}{N} = \frac{\pi}{2N}$

↳ passo h costante

Collochiamo l'equazione in nodi interni:

$$\begin{cases} y''(x_n) + y(x_n) = x & n = 1 : N-1 \\ y(x_0) = 1 \\ y(x_N) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$

NB: collocare l'equazione se non sono condizioni di Dirichlet!

CONDIZIONI DI DIRICHLET AGLI ESTREMI (NO NODI FITTIZI)

$$\begin{cases} \frac{y(x_{n-1}) - 2y(x_n) + y(x_{n+1})}{h^2} + O(h^2) + y(x_n) = x_n & \text{con } y \in C^4\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad n = 1 : N-1 \\ y(x_0) = 1 \\ y(x_N) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$

↳ PER AVERE 30 ESPLICITARE i PASSAGGI INTERMEDI!

Poiché $O(h^2)$ non lo conosco, lo trascuro. A seguito di questa cancellazione:

$y_m \approx y(x_n)$ → SOSTITUZIONE VALORI ESATTI CON QUELLI APPROSSIMATI

$$\begin{cases} \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + y_m = x_m \\ y_0 = 1 \\ y_n = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$

UTILIZZO DEL METODO IMPLICITO PER RISOLVERE PROBLEMI E PER DISCRETIZZ. UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right]$$

↓ METODO DEI TRAPEZI

$$y' = f(x,y)$$

$$\begin{cases} y'(x) = \overbrace{A(x)\,y(x) + r(x)}^{f(x,y)}, & a \le x \le b \\ B_a\, y(a) + B_b\, y(b) = \alpha \end{cases}$$

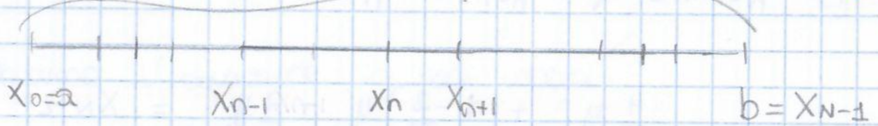
SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO

B_a, B_b MATRICI DI BOUNDARY

$A(x) \in \mathbb{R}^{M\times M}$ → FUNZ. DI X

$y, \alpha, r \in \mathbb{R}^M$

$B_a, B_b \in \mathbb{R}^{M\times M}$ → COSTANTI



→ PARTIZIONE NON UNIFORME

$$\begin{cases} y'(x_n) = \overbrace{A(x_n)\,y(x_n) + r(x_n)}^{f(x,y)} & n = 0:N-1 \\ B_a\, y(x_0) + B_b\, y(x_N) = \alpha \end{cases}$$

APPLICAZIONE METODO:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(i)} = y_n^{(i)} + \frac{h_n}{2}\left[\overbrace{A(x_n)\, y_n^{(i)} + r_n^{(i)}}^{f(x_n, y_n)} + \overbrace{A(x_{n+1})\, y_{n+1}^{(i)} + r_{n+1}^{(i)}}^{f(x_{n+1}, y_{n+1})} \right] & n = 0:N-1, \quad i = 1:M \\ (B_a y_0)^{(i)} + (B_b y_N)^{(i)} = \alpha^{(i)} \end{cases}$$

incognite: $\underbrace{y_0, y_1, \dots, y_N}_{N+1}$

$M(N+1)$ eq. scalari

$$-\left(\overset{I \text{ (se caso vettoriale)}}{1} + \frac{h_n}{2} A(x_n)\right) y_n$$

$$\begin{cases} -\left(I + \frac{h_n}{2} A(x_n)\right) y_n + \left[I - \frac{h_n}{2} A(x_{n+1}) \right] y_{n+1} = \frac{h_n}{2}\left(r_n + r_{n+1} \right) & n = 0:N-1 \\ B_a y_0 + B_b y_N = \alpha \end{cases}$$

METODO DIFF FINITE APPLICATO ALLE DERIVATE PARZIALI

$F(x, y(x), y'(x), ---, y^{(m)}(x)) = 0 \qquad a \leq x \leq b \qquad \text{in } D$

ORDINE DI DERIVAZIONE = grado massimo di derivazione

→ CONTINUE

$F\left(x, y, ---, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, ---\right) = 0 \qquad \text{in } D$

$u = u(x, y ---)$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0$$

$a = a(x,y)$

$\vdots$

$g = g(x,y)$

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + \underbrace{d u_x + e u_y + fu + g}_{f(u, u_x, u_y)} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}$$

- Ogni derivata seconda deve avere potenza 1.

QUASI LINEARE : ? 48 m

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + fu + g = 0$$

$$at^2 + bt + c = 0 \Rightarrow t_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Le due radici sono reali e distinte o complesse e coniugate.

- Se sono reali e distinte, l'equazione viene definita di tipo iperbolico.
- Se t_1, t_2 sono complesse e coniugate, l'equazione è definita ellittica. (situazione stazionaria, non dipendente dal tempo).

$b^2 - 4ac$:
- $> 0 \rightarrow$ iperb
- $= 0 \rightarrow$ parabolica
- $< 0 \rightarrow$ ellittica

- $$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \left.\frac{du(x, y_j)}{dx}\right|_{x=x_i} = \begin{cases} \dfrac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} + O(h) \\[2ex] \dfrac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h} + O(h) \\[2ex] \dfrac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h} + O(h^2) \end{cases}$$

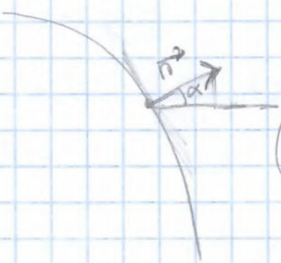
- $$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \left.\frac{du(x_i, y)}{dy}\right|_{y=y_j} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{k} + O(k)$$

$$= \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{k} + O(k)$$

$$= \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2k} + O(k^2)$$

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \begin{cases} \dfrac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \\[2ex] \dfrac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \\[2ex] \dfrac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \end{cases} \qquad u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$$

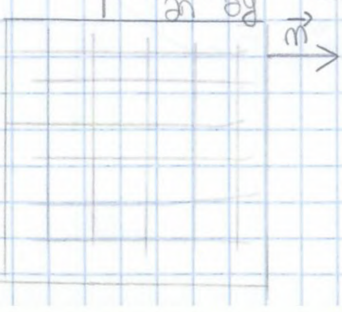
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \begin{cases} \dfrac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} \\[2ex] \dfrac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} \\[2ex] \dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} \end{cases}$$



$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\sin\alpha$$

$\uparrow \vec{n} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

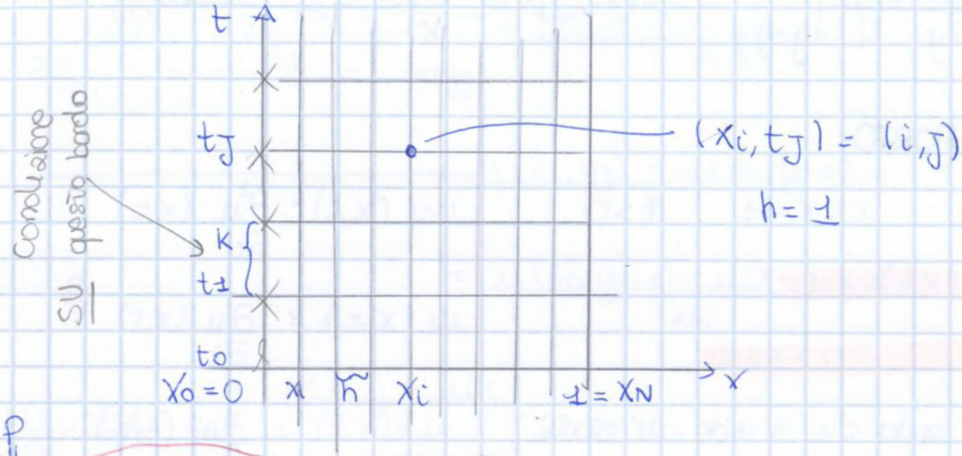


$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

18/11/13 ... Equazione del trasporto

$$\begin{cases} u_t(x,t) + a\,u_x(x,t) = 0 \\ a>0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = g(t) \end{cases}$$

$0 < x < 1$, $t > 0$ → DOMINIO SPAZIALE



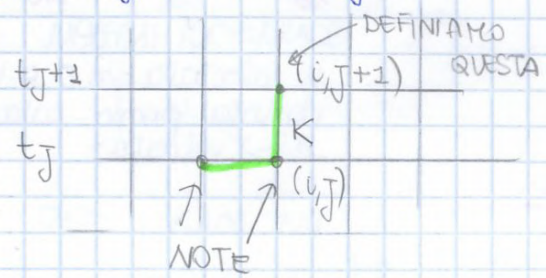
P

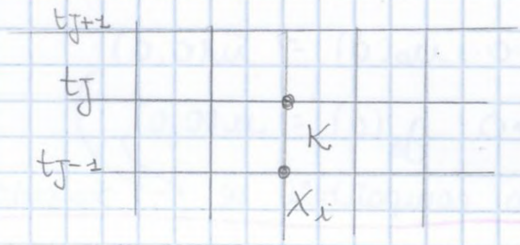
$u(x,t) \Rightarrow \{u(x_i, t_J) \approx u_{iJ}\}$ PROBLEMA DIFFERENZIALE NEI NODI SELEZIONATI E APPROSSIMATI

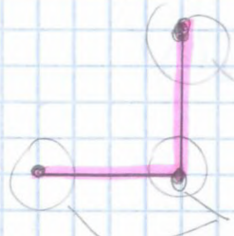
Collocare il problema nei nodi della griglia:

$$\begin{cases} u_t(x_i, t_J) + a\,u_x(x_i, t_J) = 0 & i = 1:N \\ u(x_i, t_0) = u_0(x_i) & i = 0:N \\ u(x_0, t_J) = g(t_J) & j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

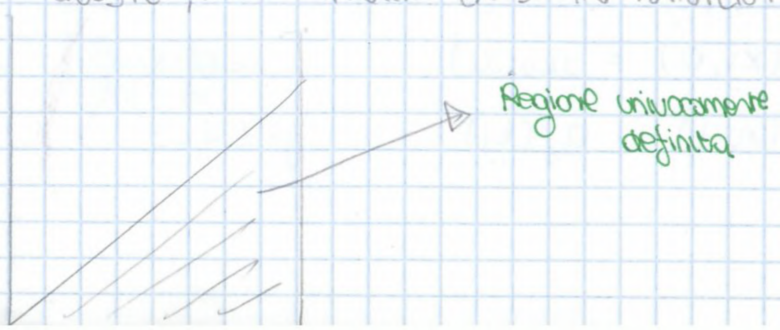
MOLECOLA DI CALCOLO



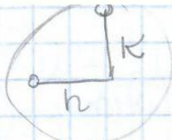




SE SONO NOTE QUESTE, POSSO DEFINIRE LA 3a IN MANIERA UNNOC



--- Continuazione eq. del trasporto 21/11/13

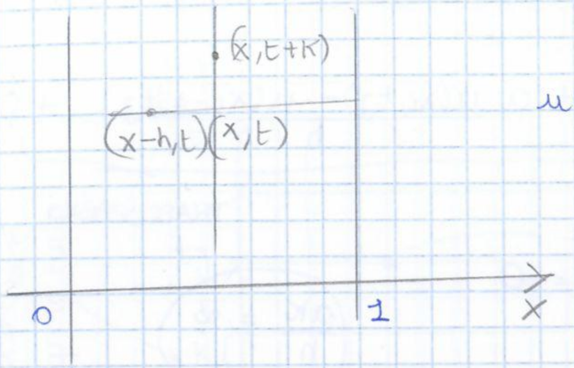


$u_t(x,t) + a u_x = 0 \qquad a>0$

$$\frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} + a\frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} = \underbrace{O(h) + O(h)}$$

IPOTIZZANDOLA QUADRATA

⇒ è il residuo che la formula produce quando i valori esatti sono messi nella formula



$u(x,t+k)$ $\quad u(x,t)$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + a\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = 0$$

$(x_i, t_j) \longrightarrow (x,t)$

$u(x_i, t_j)$ Se facciamo tendere h e k a ∅, il metodo num è consistente con l'equaz. differenziale

il metodo numerico fornisce → u_{ij} (per h e k finito) NEI NODI!

Il metodo è detto convergente se

Essa è una condizione necessaria! (ma non sufficiente) occorre una altra proprietà → STABILITÀ NUMERICA DEL METODO

$$\boxed{\text{CONSISTENZA} + \text{STABILITÀ} = \text{CONVERGENZA}}$$

vuol dire che quando i parametri tendono a ∅ consiste con l'eq. diff. → vuol dire avere discretizzato bene

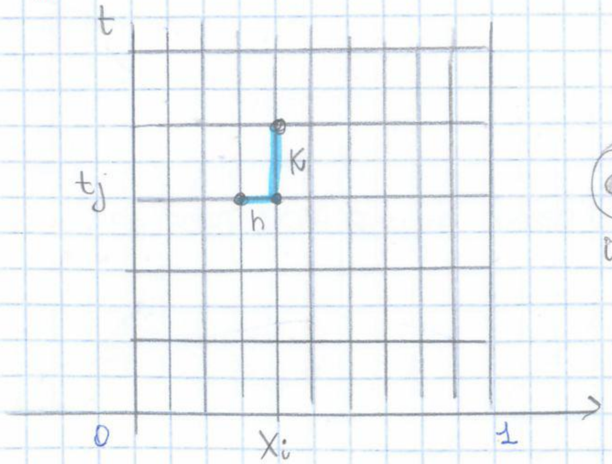
1° modo

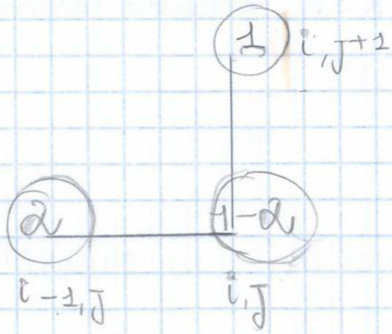
$u_{0,j} = f(t_j) \qquad j = 1,2 \ldots$

$u_{i,0} = u_0(x_i), \quad i = 0:N$

$u_{i,j+1} = (1-\alpha)u_{ij} + \alpha u_{i-1,j} \qquad i = 1:N, \quad j = 0,1,2\ldots$

↳ formula ricorsiva





$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{1,J+1} \\ u_{2,J+1} \\ \vdots \\ u_{N-1,J+1} \\ u_{N,J+1} \end{pmatrix}}_{U_{J+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{1J} \\ u_{2J} \\ \vdots \\ u_{N-1,J} \\ u_{N,J} \end{pmatrix}}_{U_J} + \alpha v_J = \begin{pmatrix} f(t_J) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$U_0 = (u_0(x_1), u_0(x_2), \dots u_0(x_m))^T$

for $j = 0, 1, \dots$

$\quad U_{J+1} = A U_J + \alpha v_J$

end

$\bar{U}_0 = (\bar{u}_0(x_1), \dots, \bar{u}_0(x_N))^T$ ← VALORI PERTURBATI

for $j = 0, 1, \dots$

$\quad \bar{U}_{J+1} = A\bar{U}_J + \alpha v_J$

end

$E_J = U_j - \bar{U}_j$ → errore

$E_0 = (e_{10}, e_{20}, \dots e_{N0})$

for $J = 0, 1, \dots$

$\quad \{ (U_{J+1} - \bar{U}_{J+1}) = E_{J+1} = A\overbrace{(U_J - \bar{U}_J)}^{E_J} \}$

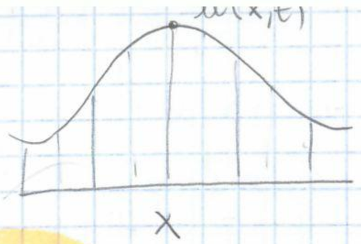
$\quad E_{J+1} = AE_J$

end

★ DE Schemi di cui condiz. stabile o cond. convergente, costruire lo schema 54.20 più efficiente VEDI REGISTRAZ.

25/11/13

$\varphi(x,t)$



$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \qquad 0<x<1$$

↳ eq. del 2° ordine sia nel tempo che nello spazio

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = f(x) & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

CONDIZIONI DI DIRICHLET

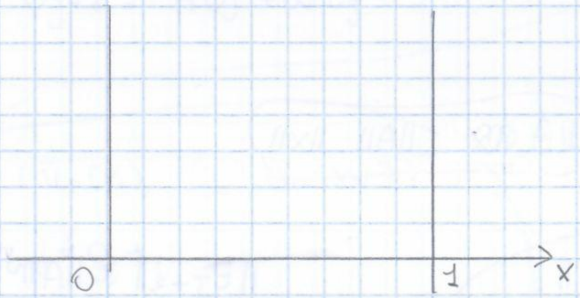
$$\begin{cases} \varphi(0,t) = \alpha(t) \\ \varphi(1,t) = \beta(t) \end{cases} \qquad t>0$$

Com'è fatto il dominio?

condizioni al bordo (nei 2 estremi 0 e 1)

NB: II ordine → 2 equazioni al bordo

Consideriamo $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ come condizioni al bordo.



$t \to y = ct$ SOSTITUZIONE

$$\varphi(x,t) = \varphi\left(x, \frac{y}{c}\right) = u(x,y)$$

$$\frac{1}{c}\overbrace{\varphi_t(x,t)}^{g(x)} = u_y(x,t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 0 & 0<x<1 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_y(x,0) = \dfrac{1}{c} g(x) \\ u(0,y) = \alpha\left(\dfrac{y}{c}\right) \\ u(1,y) = \beta\left(\dfrac{y}{c}\right) \end{cases}$$

$$t = \frac{y}{c}$$

$$\alpha(t) = e^{-t} t^3$$

$$\alpha\left(\frac{y}{c}\right) = e^{-y/c}\left(\frac{y}{c}\right)^3$$

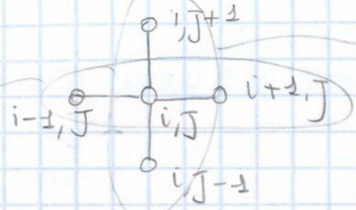
$$\varphi(x_i, t_J) = u(x_i, y_i)$$

$$t_J = \frac{y_J}{c}$$

$$u_{iJ} \approx u(x_i, y_J) \approx \varphi(x_i, t_J), \quad t_J = \frac{y_J}{c}$$

28/11/13

RIPRENDENDO L'ESERCIZIO PRECEDENTE:



APPROSSIMAZIONI DERIVATE 2°

$$\frac{u_{i-1,j}-2u_{ij}+u_{i+1,j}}{h^2}-\frac{u_{i,j-1}-2u_{ij}+u_{i,j+1}}{k^2}=0$$

TRASCURANDO GLI ERRORI:

$u_{i0}=f(x) \quad ; \quad i=0:N$

$u_{0j}=\alpha_1(y_j)$

$u_{Nj}=\beta_1(y_j) \qquad j\geq 1$

Per approssimare le derivate prime invece, inserisco i nodi fittizi:

$$\frac{u_{i,1}-u_{i,-1}}{2k}=g_1(x_i) \quad , \; i=0:N$$

Ponendo: $\lambda=\frac{k}{h}$

$u_{i,j+1}=2u_{ij}-u_{i,j-1}+\lambda^2(u_{i-1,j}-2u_{ij}+u_{i+1,j})$

$u_{i,j+1}=-u_{i,j-1}+[\lambda^2u_{i-1,j}+2(1-\lambda^2)u_{ij}+\lambda^2u_{i+1,j})$

$$\begin{cases} u_{i,j+1}=\lambda^2u_{i-1,j}+2(1-\lambda^2)u_{ij}+\lambda^2u_{i+1,j}-u_{i,j-1} & j=1:N-1 \\ \left.\begin{array}{l} u_{i,0}=f(x_i) \\ \star\; u_{i,-1}=u_{i1}-2kg_1(x_i) \end{array}\right\} i=0:N & j=0,1,\dots \\ u_{0j}=\alpha_1(y_j) & \\ u_{Nj}=\beta_1(y_j) & j\geq 1 \end{cases}$$

Con $j=0$:
$$\begin{cases} u_{i,1}=\lambda^2u_{i-1,0}+2(1-\lambda^2)u_{i0}+\lambda^2u_{i+1,0}-u_{i,-1} \\ \hookrightarrow \text{NON RISOLUTIVA, HO BISOGNO DI QUEST'ALTRA} \star: \\ u_{i,-1}=u_{i1}-2kg_1(x_i) \end{cases}$$

INCOGNITE

Quindi:

$$2u_{i1}=\lambda^2u_{i-1,0}+2(1-\lambda^2)u_{i0}+\lambda^2u_{i+1,0}-2kg_1(x_i)$$

$U_0, U_1 \Rightarrow \quad U_{j+1} = AU_j - U_{j-1} + \lambda^2 b_j \quad , j = 1, 2, \dots$

$\bar{U}_0, \bar{U}_1 \Rightarrow \quad \bar{U}_{j+1} = A\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1} + \lambda^2 b_j$

$E_{j+1} = AE_j - E_{j-1} \quad , \quad j = 1, 2, \dots$

↳ legge che definisce la propagazione dell' errore

IL SISTEMA È STABILE QUANDO:

$\|E_j\| \leq C$

$E_j = E_j(h, k)$ $\qquad \lambda = \frac{ck}{h}$ (se la discretizziamo sin dall' inizio)

$\lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda = \frac{k}{h} \leq 1 \Rightarrow \boxed{k \leq h}$

↳ CONDIZIONE

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) - c\,u_{tt}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = g(x) & t > 0 \\ u(0,t) = \alpha(t) \\ u_x(1,t) = \beta(t) \end{cases}$$

OPPURE

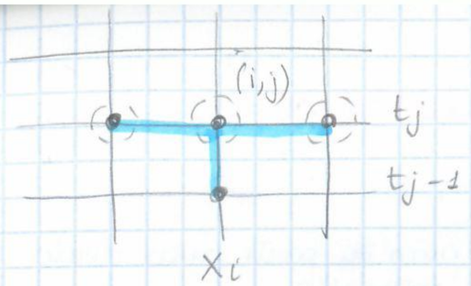
$u(1,t) + 2u_x(1,t) = \beta(t)$

Equazione del calore

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 & t > 0 \\ u(0,t) = \alpha(t) \\ u(1,t) = \beta(t) \end{cases}$$

$u_x(1,t) = 0$

↳ ESTREMO TERMICAMENTE ISOLATO



$i = 1 : N-1$

$j = 1 : \dots$

RISOLUZIONE COL METODO ALL' INDIETRO

$N-1$ eq, $N-1$ incognite, sistema tridiagonale. Provare a risolvere con questa metodo

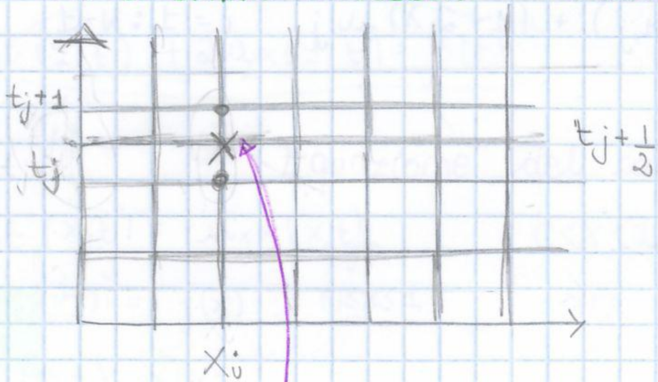
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = \alpha(t) \\ u(1,t) + 2u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

Risolvere e costruire lo schema

implicito / esplicito

(NB: nell' eq. del calore non ci sono 3 livelli (come in quella del trasporto) perche' ho solo una condizione iniziale.

SCHEMA DI CRANK - NICOLSON ← metodo risolutivo (INCONDIZ. STABILE)



Schema a 2 livelli

$u_t(x_i, t_j) = u_{xx}(x_i, t_j)$

Voglio approssimare le derivate prima con un rapporto incrementale simmetrico: (CON UNA FORMULA DEL 2° ORDINE)

$$u_t(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + O$$

$$u_t(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = u_{xx}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\left[u_{xx}(x_i, t_{j+1}) + u_{xx}(x_i, t_j)\right] + O(k^2)$$

$u_{ij} \approx u(x_i, t_j)$ ← INCOGNITE! Nel pto medio l'errore e' $O(k^2)$

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + O(k^2) = \frac{1}{2}\left[\frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1})}{h^2}\right.$$

$$+ O(h^2) + \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2}$$

$$\left. + O(h^2)\right]$$

NB: La somma non altera l' ordine della funzione.

ERRORE COMPLEX TOT: $O(h^2) + O($

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{k}{2h^2}\left[u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1}\right.$$

↳ Metodo di Crank-Nicolson

Discretizzando col rapporto incrementale:

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + O(k^2) = v(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$$

NB: $v(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\left[v(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + v(x_i, t_j)\right] + O(k^2)$

↳ CALCOLO MEDIA ARITMETICA

$$v(x_i, t_{j+1}) = v(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{k}{2} v_t(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(k^2)$$

↳ SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR (CENTRATO IN $j+\frac{1}{2}$)

$$v(x_i, t_{j+1}) + v(x_i, t_j) = 2v(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + O(k^2)$$

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + \cancel{O(k^2)} = \frac{1}{2}\left[v(x_i, t_j) + v(x_i, t_{j+1})\right] + \cancel{O(k^2)}$$

$j = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} u_{i,j+1} - u_{ij} = \frac{k}{2}\left[v_{ij} + v_{i,j+1}\right] \\ v_{i,j+1} - v_{i,j} = \frac{k}{2h^2}\left[u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1}\right] \\ u_{i0} = f(x_i) \\ v_{i0} = g(x_i) \\ u_{0j} = \alpha(t_j) \\ u_{Nj} = \beta(t_j) \end{cases}$$

↳ FORMULA DI CRANK - NICOLSON

$i = 1 : N-1$

$2(N-1)$

↳ INCOGNITE

Abbiamo un sistema incondiz. instabile, ma il numero di incognite è raddoppiato.

COSTRUIRE METODO ESPLICITO SU QUESTA EQ.

$$\begin{cases} u_t(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) - \alpha u_{xx}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \beta u_x(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \gamma u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) & 0 < x < 1, \ t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

$\alpha > 0, \ \beta, \gamma \geq 0$

*

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} - \frac{\alpha}{2h^2}\left[u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}\right]$$

$\frac{\alpha}{2h^2} \to \lambda$; $\left[u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}\right] \approx u_{xx}(x_i, t_j)$

$$+ \frac{\beta}{2}\left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h}\right]$$

$\frac{\beta}{2} \to \mu$; $\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \to u_x(x_i, t_j)$; $\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} \to u_x(x_i, t_{j+1})$

Nei nodi interni scelti;

Perché

$$\begin{cases} -\nabla^2 u(P_i) = f(P_i) & , i = 1:12 \\ u(x,y)_{P_i} = g(x,y)_{P_i} & , (x,y) \in \mu \end{cases}$$

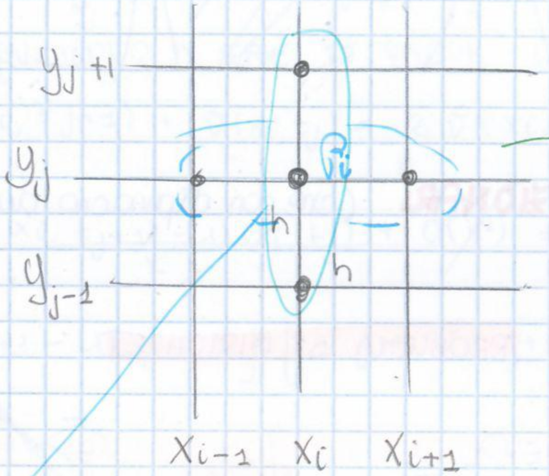
$P_i = (x_{k_i}, y_{k_i})$

$u(P_i) = u(x_{J_i}, y_{K_i})$

$u(P_i) \approx u_i$ $\quad g(P_i) \approx g_i$

$$-\nabla^2 u(P_i) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_i)\right)$$

MAGLIA QUADRATA



MOLECOLA A 5 PUNTI

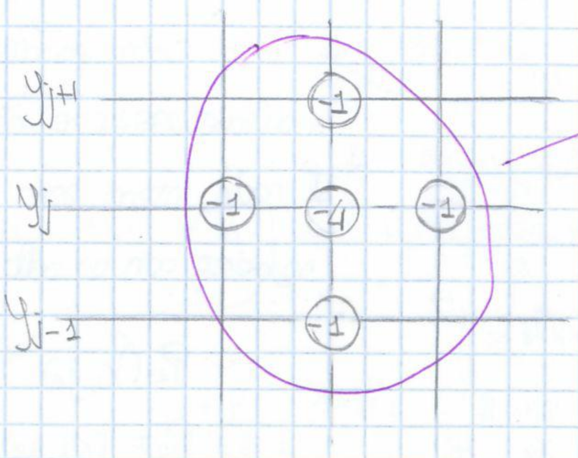
$$-\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} = \frac{-u(x_{i-1},y_j) \overset{+}{-} 2u(x_i,y_j) \overset{-}{+} u(x_{i+1},y_j)}{h^2} + O(h^2)$$

↳ DISCRETIZZAZIONE DELLA DERIVATA II LUNGO X CHE COINVOLGE 3 NODI

NB: i 2 indici sono un promemoria, in realtà dovrò fa utilizzare una nuova notazione

$$-\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2} = \frac{-u(x_i,y_{j-1}) \overset{+}{-} 2u(x_i,y_j) \overset{-}{+} u(x_i,y_{j+1})}{h^2} + O(h^2)$$

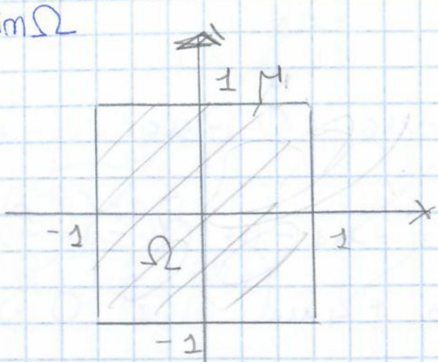
$$\frac{1}{h^2}\left[-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{ij} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j+1}\right]$$



SIGNIFICATO DELLA FORMULA

9/12/13

$$\begin{cases} -\nabla^2 u(x,y) = 1 & \text{in } \Omega \\ u(x,y) = x^2+y^2 \end{cases}$$



DE Risolvere il problema con le differenze finite

Si può risolvere il problema sfruttando LA SIMMETRIA. I dati sono simmetrici rispetto all'origine.

Se $u(x,y)$ è soluzione, allora lo è anche: ~~u(-x,-y)~~

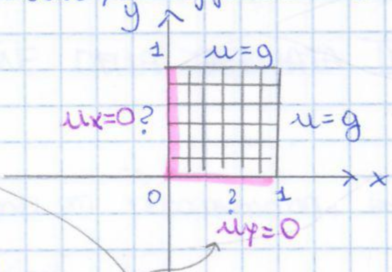
valgono le proprietà:

$u(-x,y) = u(x,y)$

$u(x,-y) = u(x,y)$

$u(-x,-y) = u(x,y)$

Quindi, per questo motivo, è sufficiente discretizzare un quadrante:



$u(x,y) = x^2+y^2$

su $x=1,\ 0 \le y \le 1$

$y=1,\ 0 \le x \le 1$

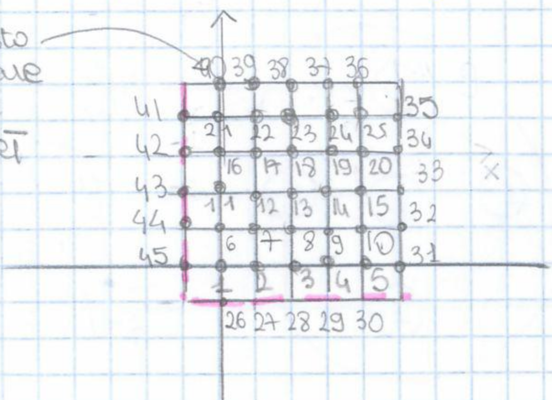
? $x=0,\ 0 \le y \le 1$

? $y=0,\ 0 \le x \le 1$

Le altre due condizioni sono un punto di massimo o minimo e quindi con derivata nulla: $u_x=0,\ u_y=0$

Introduco quindi un livello fittizio:

in qsto bordo vale la condiz di Dirichlet



SUCCESSIVO PRECEDENTE

$$u_y(P_1) \approx \frac{u(P_6) - u(P_{26})}{2h} = 0 \Rightarrow u(P_{26}) = u(P_6)$$

$4u(P_1) - u(P_2) - u(P_6) - u(P_{26}) - u($

SUCC PREC

$$u_x(P_1) \approx \frac{u(P_2) - u(P_{45})}{2h} = 0$$

$u(P_{26}) = u(P_6)$

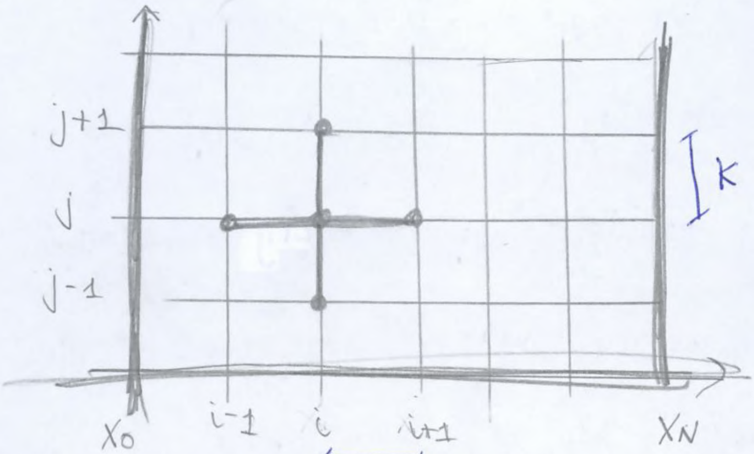
$u(P_{45}) = u(P_2)$

$4u(P_1) - 2u(P_2) - 2u(P_6) - \cancel{u(P_6)} - \cancel{u(P_2)} =$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1$$

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial \varphi(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(0,t) = \alpha(t) \\ \varphi(1,t) = \beta(t) \end{cases}$$

Discretizzazione del dominio $[a,b] \Rightarrow \{ x_n = 1 : N-1 \}$



Posizionamento nei nodi scelti:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\varphi(x_i, t_{j+1}) - 2\varphi(x_i, t_j) + \varphi(x_i, t_{j-1})}{k^2} + O(k^2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi(x_{i+1}, t_j) - 2\varphi(x_i, t_j) + \varphi(x_{i-1}, t_j)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\downarrow \quad \varphi(x_i, t_j) \approx \varphi_{ij}$$

APPROSSIMAZIONE VALORI ESATTI CON VALORI APPROSSIMATI

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i,j-1}}{k^2} - c^2 \dfrac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} = 0 \\ \varphi_{i0} = f_i \\ \dfrac{\varphi_{ij+1} - \varphi_{ij-1}}{2k} = g_i \\ \varphi_{0j} = \alpha_j \\ \varphi_{1j} = \beta_j \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi(x_i, t_0)}{\partial t} = g(x_i)$$

$$\frac{\varphi_{i,1} - \varphi_{i,-1}}{2k} = g(x_i)$$

$y' \rightarrow y \in C^2[a,b]$

$\rightarrow y \in C^3[a,b]$ se pto medio

$y'' \rightarrow y \in C^4[a,b]$

12/11/13

Trovare $u \in C^2[0,1]$ tale che:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

EQUIVALENTI

$V = H_0^1(0,1) \subset H^1(0,1)$

trovare $u \in V$ tale che $\underbrace{\int_0^1 u' v' \, dx}_{a(u,v)} = \int_0^1 f v \, dx, \quad \forall v \in V$

FORMA BILINEARE

NB: formula debole perchè compare la derivata prima.

Cosa vuol dire bilineare?

$a(\alpha u + \beta w, v) = \alpha a(u,v) + \beta a(w,v)$

$a\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j, v\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j a(\varphi_j, v)$

LINEARE SU ENTRAMBI I MEMBRI

METODO DI GALERKIN

Dato che V contiene un numero infinito di elementi, definisco un sottospazio V_h:

($\dim V = \infty$ → non posso risolvere un sistema ad eq. infinite!)

$V_h \subset V \quad \dim V_h = N_h$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{N_h}$ → definiscono una base

$\forall v_h \in V_h : v_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} c_j \varphi_j(x)$ → ogni elemento della base è rappresentato come combinazione lineare

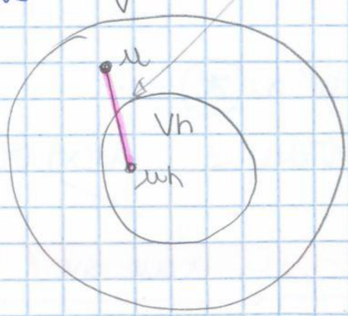
$V_h = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}\}$

Quindi:

$V \Rightarrow V_h$

$u \Rightarrow u_h$

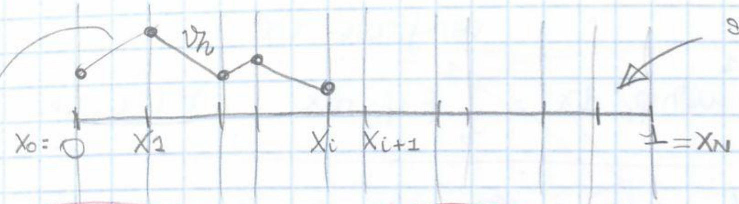
L'errore è la distanza



Il metodo di Galerkin ci permette di trovare la u_h che approssima meglio u. (Quindi teoricamente si trova sul bordo)

E, se $n \to \infty$, $u_h \to u$

Tale metodo sceglie particolari sottoinsiemi che mi consentono di individuare sottoinsiemi di funzioni con supporti molto piccoli.



sottointervalli non necessariamente uguali

N sottointervalli

$h_i = x_{i+1} - x_i$, $h = \max\limits_i h_i$

↳ massima ampiezza

$V_h = \{$ poligonali continue associate alla partizione di $[0,1]\}$ nulla in $x = 0,1$ $(\dim = N-1)$

esempio di funzione poligonale: funz. polinomiali a tratti, continue di grado 1 (in un tratto)

← funz. polinomiale di grado 2)

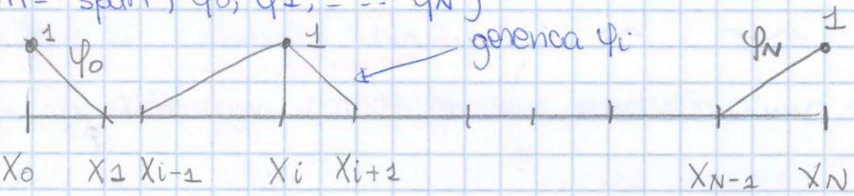
I gradi di libertà sono i nodi:

$\dim V_h = N + 1$ esistono N+1 funzioni (poligonali) linearm. indip.

NB: Se sono nulli agli estremi; la dimensione diminuisce. (caso particolare)

Qual è la scelta di funzioni che mi consentono di ottenere il supporto minimo?

$V_h = \mathrm{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_N\}$



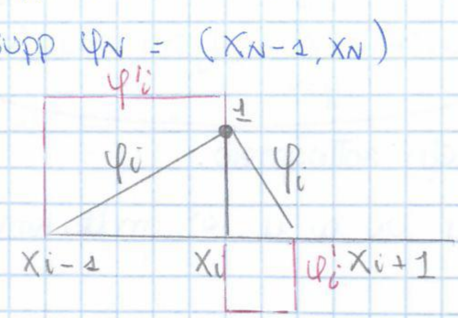
φ_i, $i = 1:N-1$

supporto $\varphi_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$

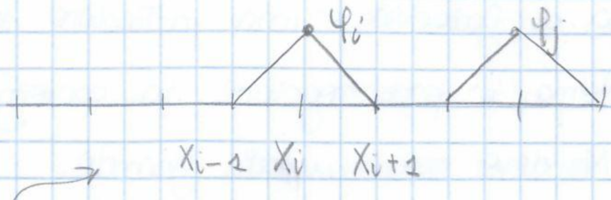
φ_i è 1 in x_i e 0 negli altri 2.

supp $\varphi_0 = (x_0, x_1)$

supp $\varphi_N = (x_{N-1}, x_N)$



$\forall i \quad \varphi_i \varphi_j \neq 0 \quad j = i-1, i, i+1$



in questo caso il loro prodotto è nullo

Riprendendo l'equaz. di Helmotz: TROVARE $u \in C^2[0,1]$ tale che: 16/12/13

Helmholtz

$$\begin{cases} -u''(x) + \delta(x)\, u = 1 & , 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 1 \end{cases}$$

$$\delta(x) = 1 + H\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$V \subset H^1(0,1)$

V coincide con H^1 quando agli estremi non ho condizioni di Dirichlet.

Nel nostro caso abbiamo una sola condizione di Dirichlet, quindi:

$V = H^1_{\Gamma_D}(0,1)$, $\Gamma_D = \{0\}$ → INSIEME IN CUI SI ANNULLA u

(NB: $H_0^1 = H^1_{\Gamma_D}$, $\Gamma_D = \{0,1\}$)

$V = \{ v \in H^1(0,1) : v(0) = 0 \}$

I) $-u'' \cdot v + \delta u v = v$ ← moltiplico per le funzioni test

II) $-\int_0^1 u'' v\, dx + \int_0^1 \delta u v\, dx = \int_0^1 v\, d\cancel{x}$ $\quad \forall v \in V$ ← integro

$$-u' v \Big|_0^1 + \int_0^1 u' v'\, dx + \int_0^1 \delta u v\, dx = \int_0^1 v\, dx$$

→ $-u'(1)\, v(1) + \cancel{u'(0)\, v(0)}$ 0

(Se due funz. sono quadrato integrabili, allora anche il loro prodotto è quadrato integrabile → TEOREMA DI CAUCHY SW...)

$f, g \in L^2(0,1)$ $\qquad \int_0^1 f^2\, dx < \infty \qquad \int_0^1 g^2\, dx < \infty$

$\Downarrow$

$$\left| \int_0^1 fg\, dx \right| \le \int_0^1 |fg|\, dx < \infty$$

→ $-v(1)$

$$\int_0^1 u'_h N_i' \, dx + \int_0^1 \delta u_h N_i \, dx = \int_0^1 N_i \, dx + N_i(1)$$

$$i = 1 : M$$

N_i : elementi della base

Se la relaz. e' soddisfatta per N_i allora lo sarà per tutti gli elementi della base.

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j N_j(x) \approx u(x)$$

i coefficienti sono le vere incognite!

Sostituendo:

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{M} c_j N_j'(x) \cdot N_i'(x) dx + \int_0^1 \delta(x) \left(\sum_{j=1}^{M} c_j N_j(x) \right) \cdot N_i(x) \, dx = \int_0^1 N_i(x) dx + \delta_{Mi}$$

$$i = 1 : M$$

$N_i(1) = \delta_{Mi}$ → VALE 1 QUANDO $i = M$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{M} c_j \underbrace{\left[\int_0^1 N_j'(x) N_i'(x) \, dx + \int_0^1 \delta(x) N_j(x) N_i(x) \, dx \right]}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_0^1 N_i(x) dx + \delta_{Mi}}_{f_i}$$

$a_{ij} \neq 0$ solo per $|i-j| \leq 1$, cioe' solo per $j = i-1, j = i, j = i+1$

$$\begin{cases} j = 1, \; i+1 & i = 1 \\ j = i-1, \; i, \; i+1 & 1 < i < M \\ j = i-1, \; i, & i = M \end{cases}$$

Quindi il problema diventa:

Trovare $c_1, c_2, \dots c_M$ tali che:

$$\sum_{j=1}^{M} a_{ij} c_j = f_i \; , \quad i = 1 : M$$

19/12/13

$u(x)$

a —————————— b

1. $u(a) = \alpha \qquad u(b) = \beta$

$$V = H_0^1(a,b) = \{ v \in H^1(a,b) : v(a) = v(b) = 0 \}$$

2. No Dirichlet in $x = a, b$

$$V = H^1(a,b)$$

3. $u(a) = \alpha$ e NO DIRICHLET in $x = b$

$$V = H_{\Gamma_D}(a,b) = \{ v \in H^1(a,b) : v(a) = 0 \}$$

$$H_0^1 = H_{\Gamma_D}^1 \quad , \quad \Gamma_D = \{a, \cancel{b}\}$$

contorno del dominio: in questo caso l'insieme dei due punti

Ritorniamo al problema iniziale:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$$

$$-\int_0^1 v \, dx = \int_0^1 f v \, dx \qquad \forall v \in V$$

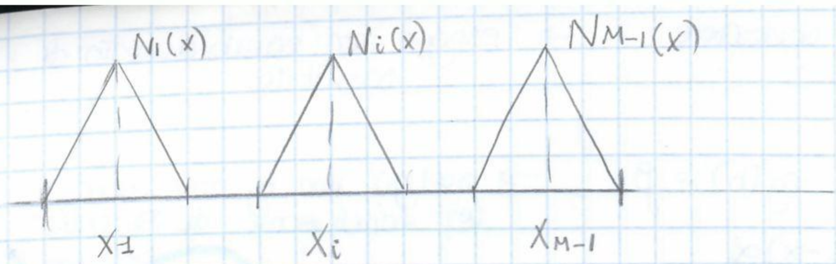
$$\int_0^1 u' v' \, dx - u' v \Big|_0^1 = \int_0^1 f v \, dx$$

$$-u'(1)\underbrace{v(1)}_{=0} + u'(0)\underbrace{v(0)}_{=0}$$

TROVARE $u \in H^1(0,1)$ 1

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 u' v' \, dx = \int_0^1 f v \, dx \quad , \forall v \in V = H_0^1(0,1) \quad 2 \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

$u \in H^1(a,b) \Rightarrow u \in C[a,b]$ se una funzione è quadrato integrabile sarà certamente continua (anche agli estremi



$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{M-1} a_j N_j(x)$$

$$\dim(V_h) = M-1$$

Trovare $\bar{u}_h \in V_h$

$$\int_0^1 \bar{u}_h' v_h' \, dx = \int_0^1 f v_h \, dx - \int_0^1 r_g' v_h' \, dx, \qquad \forall v_h \in V_h$$

$$u \approx u_h = \bar{u}_h + r_g$$

Non posso ancora risolverlo perché $\dim V_h = \infty$

$$\int_0^1 \bar{u}_h' N_i' \, dx = \int_0^1 f N_i \, dx - \int_0^1 r_g' N_i' \, dx \qquad \bar{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{M-1} c_j N_j(x)$$

$$u(x) = \bar{u}(x) + r_g(x)$$

$$\sum_{j=1}^{M-1} c_j \underbrace{\int_0^1 N_j'(x) N_i'(x) \, dx}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_0^1 f N_i \, dx - \int_0^1 r_g' N_i' \, dx}_{f_i} \qquad i = 1:M-1$$

$$\begin{cases} a_{11} c_1 + a_{12} c_2 + \dots + a_{1,M-1} c_{M-1} = f_1 \\ a_{21} c_1 + a_{22} c_2 + \dots + a_{2,M-1} c_{M-1} = f_2 \\ \dots \\ a_{M-1,1} c_1 + a_{M-1,2} c_2 + \dots + a_{M-1,M-1} c_{M-1} = f_{M-1} \end{cases}$$

$a_{ij} \neq 0$ solo per $j = i-1, i, i+1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & \\ & & & & a_{M-2,M-1} \\ 0 & & & a_{M-1,M-2} & a_{M-1,M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{M-1} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

2° PROBLEMA:

RIFARE

$$\begin{cases} -u''(x) + \gamma(x)u(x) = 1, & 0<x<1 \\ u(0) = \alpha & \Gamma_D = \{0\} \\ u'(1) = 1 & V = H^1_{\Gamma_D} \end{cases}$$

$u = \bar{u} + \alpha$

$u(0) = \bar{u}(0) + \alpha \Rightarrow \bar{u}(0) = u(0) - \alpha = \alpha - \alpha = 0$

In questo modo: $u' = \bar{u}' \Rightarrow u'' = \bar{u}''$

$$-\bar{u}''(x) + \gamma(x)\bar{u}(x) = \underbrace{1 - \alpha\gamma(x)}_{f(x)}$$

$u(x) = \bar{u}(x) + \alpha \leftarrow$ RICORDA QUESTO

Costruendo la formulazione debole:

Trovare $\bar{u} \in V$ tale che:

$$\int_0^1 \bar{u}'v'dx - \bar{u}'v\Big|_0^1 + \int_0^1 \gamma\bar{u}v\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \quad \forall v \in V$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\bar{u}'(1)}_{\hookrightarrow 1}v(1) - \cancel{\bar{u}'(0)v(0)} = v(1)$$

Sì

(Il termine di Neumann viene inserito nell' integraz. per parti)

$\hookrightarrow$ oppure di Robin; e' la stessa cosa!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 106

Consideriamo il caso in cui non abbiamo più problemi con valori al limite (non più stazionari quindi).

APPLICAZIONE ELEMENTI FINITI ALL' EQ. DEL CALORE

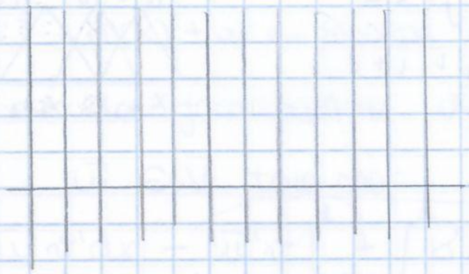
$u(x,t)$, $a \leq x \leq b$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = \alpha(t) \qquad t > 0 \\ u(1,t) = \beta(t) \end{cases}$$

NB: Se applichiamo il metodo degli elementi finiti la partizione potrebbe essere non uniforme.

Ignorando il tempo, la risolvo rispetto a x, considerando ad esempio t cost.



1° FORMULAZIONE DEBOLE

V → spazio delle funzioni test $\quad V = H_0^1(0,1)$

$= \{ v \in H^1(0,1), v(0) = v(1) = 0 \}$

↳ quadrato integrabile

deriv. prima quadr. integrabile

funz. test che si annullano dove sono imposte le condiz di Dirichlet

INTEGRO RISPETTO A X

$$\boxed{\int_0^1 u_t v \, dx - \int_0^1 u_{xx} v \, dx = \int_0^1 f v \, dx}$$

$\dot{u}(x,t) = u_t(x,t)$ → definiamo questa sostituzione

$u'(x,t) = u_x(x,t)$

$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Il sistema ammette una e una sola soluzione $\bar{u}(x,t)$

Se aggiungo $r(x,t)$:

$$\bar{u}(x,t) + r(x,t)$$

ottengo $u(x,t)$ che è la soluzione del problema di partenza.

In realtà, inizialmente bisogna fare queste ipotesi:

$u(x,t)$ continua in $t \in (0,1)$

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ " " "

Applicazione all' equaz. di Poisson:

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases} \Rightarrow \text{Analogia con il problema precedente}$$

---

④ $V_h \subset V$

$V_h = \text{span}\{\varphi_1, ---, \varphi_{N-1}\}$

$$\boxed{\bar{u} \approx \bar{u}_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j(t)\varphi_j(x)}$$

$$\dot{\bar{u}}_h = \sum \dot{c}_j(t)\,\varphi_j(x)$$

$\boxed{\varphi_i = N_i}$ ← NOTAZIONE USATA PRIMA

Sostituisco $\bar{u} \to \bar{u}_h$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \dot{\bar{u}}_h \varphi_i \, dx + \int_0^1 \bar{u}_h' \varphi_i' \, dx = \overbrace{\int_0^1 \left[(f - \dot{r})\varphi_i - r'\varphi_i'\right] dx}^{F_i(t)} \qquad i = 1 : N-1 \\ \bar{u}_h(x_i, 0) = \bar{g}(x_i), \quad i = 1 : N-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{N-1} \dot{c}_j(t) \underbrace{\int_0^1 \varphi_j \varphi_i \, dx}_{m_{ij}} + \sum_{j=1}^{N-1} c_j(t) \underbrace{\int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' \, dx}_{a_{ij}} = F_i(t) \qquad i = 1 : N-1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N-1} c_j(0) \cdot \underbrace{\varphi_j(x_i)}_{\neq 0 \text{ SOLO PER } j = i} = \bar{g}(x_i) \Rightarrow c_j(0) \cdot 1 = \bar{g}(x_j) \qquad j = 1 : N- \end{cases}$$

$\{c_i(0) = \bar{g}(x_i)\}$

13/01/14

RIPRENDENDO IL PROBLEMA NON DIPENDENTE DAL TEMPO: esso si risolve in 2 fasi: una 1° fase in cui t è una costante (parametro fissato); quindi il problema dipende dalla variab. spaziale → problema ellittico

Ad esempio:

POISSON: $\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ -\Delta u = f \end{cases}$ → è ad una dimensione

HELMOTZ: $\begin{cases} -u'' + \delta u = f \\ -\Delta u + \delta u = f \end{cases}$

entrambi problemi ellittici

Nei problemi dipendenti dal tempo.

$$u = u(x,t)$$

Le equaz. paraboliche si ottengono aggiungendo alle eq. ellittiche una derivata parziale di u:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t)$$

Invece per l'equaz. di tipo iperbolico: si aggiunge derivata seconda:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t)$$

Se ovviamente l'eq è stazionaria, (1) e (2) spariscono e diventa di tipo ellittico.
non dipende dal tempo

Se applichiamo il metodo degli elementi finiti con questo tipo di equazioni non ho più un sistema di eq. algebriche, ma ad un sistema di equazioni differenziali