



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 1095**

**DATA: 16/09/2014**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Foschini**

**MATERIA: Plasticità e Frattura**

**Prof. Corrado**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



**CORSO DI**

**PLASTICITÀ & FRATTURA**

**TEORIA**

**Prof. M. Corrado**

ne di una fessura, della resistenza e della scala.

Definiti questi 3 elementi possiamo definire la durezza strutturale.

Concentrazione delle tensioni: si può dire di avere una lamina soggetta a trazione unilaterale, in una generica sezione si avranno delle tensioni  $\sigma$ .



se la sezione presenta un foro, l'andamento delle  $\sigma$  non sarà

più costante. Le tensioni infatti crescono in prossimità

del foro. Si ha quindi una

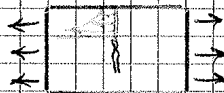
CONCENTRAZIONE DELLE TENSIONI



Si ha invece una INDETERMINAZIONE delle tensioni quando

in prossimità del foro le tensioni

sono indefinite (vanno all'infinito).



Iniziamo ora a vedere il comportamento dei materiali:

Essi in genere, in base alle caratteristiche della curva sforzo-deformazione, possono essere catalogati in due categorie:

- materiali duttili
- materiali fragili

Innanzitutto i materiali duttili presentano grandi deformazioni sino al limite elastico prima di giungere al punto di rottura, mentre i materiali fragili presentano piccole deformazioni al di fuori del regime elastico.

Una seconda caratteristica che li contraddistingue è il rapporto tra resistenza a trazione ed a compressione.

I materiali duttili hanno più o meno lo stesso comportamento a trazione ed a compressione, quindi tale rapporto è prossimo all'unità. Nei materiali fragili, invece, tale rapporto oscilla tra  $10^{-1}$  e  $10^{-2}$ .

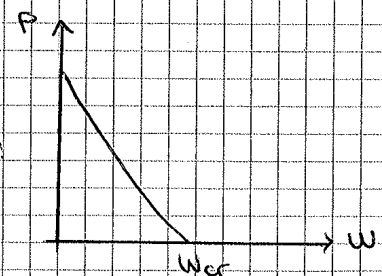
Le differenze nel comportamento dipendono da meccanismi

Se giunti in A scarichiamo il materiale, il ramo di scarico mantiene la pendenza del tratto elastico. Si avrà quindi una deformazione permanente. L'area AA'B rappresenta l'energia che viene recuperata nello scarico, mentre l'area OAA' rappresenta l'energia dissipata dallo smorzatore. Quando il provino è ricaricato di nuovo, ~~si~~ viene ripercorso il ramo AA' e quando arriva in A, la sollecitazione è maggiore della  $\sigma_1$ . Questo fenomeno è detto **incrudimento**, o **hardening**. In questo processo di plasticizzazione la  $\sigma_s$  e la  $\epsilon_s$  aumentano fino ad un massimo. Raggiunto il punto U se la prova è a controllo di carico la curva si interrompe in quanto il materiale non è in grado di sopportare ulteriori incrementi di carico. Se invece la prova è a controllo di deformazione, il provino si deforma ancora ma la  $\sigma_s$  diminuisce: fase di **softening**. NB: le curve  $\sigma$ - $\epsilon$  sono nominali in quanto sono riferite ai valori di  $A_0$  ed  $l_0$ , ma in realtà variano durante la prova. (quindi da U ad S nel  $\epsilon$  c'è decresca)  $\Rightarrow$  le curve  $\sigma$ - $\epsilon$  ci danno un comportamento medio del materiale.

### PROVA A TRAZIONE SU MATERIALE FRAGILE

Nel caso di un materiale fragile si avrà una fase iniziale elastica. I microdifetti all'interno del materiale tendono a propagarsi fino alla formazione di macrofessure. Il comportamento è quindi non locale, poiché in realtà la  $\epsilon$  è localizzata nella fessura e non è uniforme su tutta la sezione (come da noi ipotizzato  $\epsilon = \Delta L / l_0$ ).

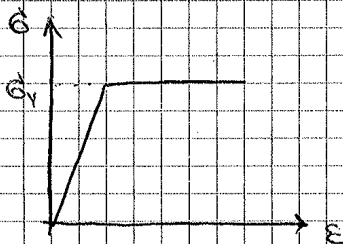
Giunti alla  $P_u$  inizia a propagarsi la fessura, ed in prossimità di quest'ultima si ha una legge di tipo  $w$ : apertura fessura



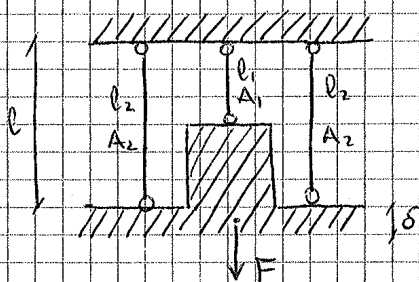
# → TEORIA della PLASTICITÀ

La non linearità del materiale può essere geometrica o meccanica. In ogni caso comunque si esce al di fuori del concetto di linearità e quindi non è più valido il principio di sovrapposizione degli effetti.

Facciamo ora riferimento alla non linearità meccanica, ossia alla non linearità costitutiva del materiale. In generale faremo sempre riferimento ad un comportamento elasto-plastico perfetto, rappresentato qui a lato.



Un primo semplice esempio di comportamento non lineare può essere ottenuto dal sistema di tre barre in parallelo, che si ipotizzano avere un comportamento elastico, perfettamente plastico. Lo schema è perfettamente simmetrico ed aree e lunghezze valgono:



$$l_1 = l/2 \quad l_2 = l$$

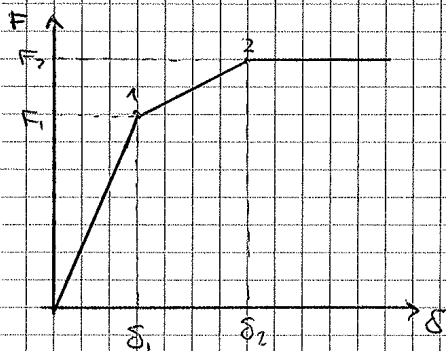
$$A_2 = A/2 \quad A_1 = A$$

Ipotesi che il travetto sia rigido ed applico una forza esterna  $F$ . Per risolvere il problema applico il metodo degli spostamenti, in questo modo ho un'unica incognita, che è lo spostamento  $\delta$ . Definisco le rigidità:

$$k_1 = \frac{EA_1}{l_1} = \frac{2EA}{l}$$

$$k_2 = \frac{EA_2}{l_2} = \frac{EA}{2l}$$

perfettamente plastico. Possiamo costruire il grafico,  $F-\delta$ , che rappresenta la risposta



strutturale all'aumentare del carico esterno. Si possono identificare tre tratti. Nel primo tratto la struttura ha comportamento perfettamente elastico. Nel secondo tratto si ha incrudimento

(hardening) e nell'ultimo tratto la risposta della struttura è perfettamente plastica.

Nella soluzione elastica abbiamo imposto una certa congruenza e perciò abbiamo trovato una sola soluzione. In campo plastico il concetto di congruenza viene meno.

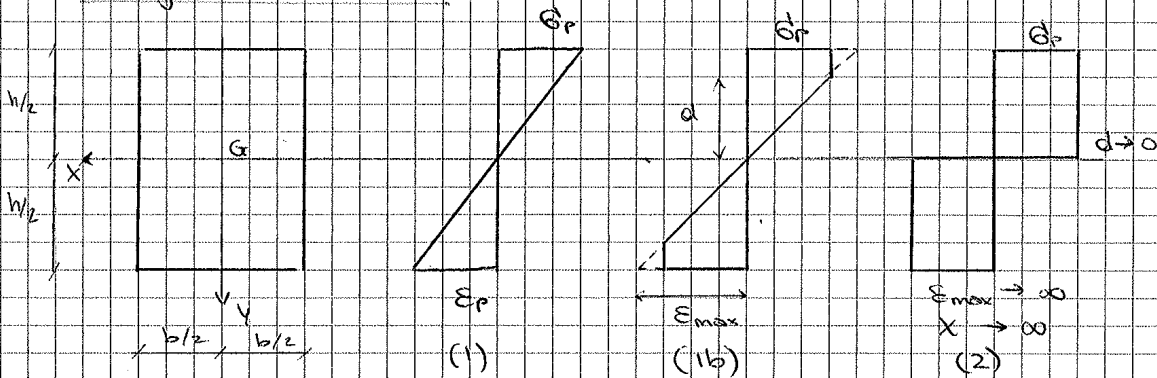
Supponiamo ora che di queste tre travi, la trave centrale sia più lunga dello spazio imposto dal blocco. Quando unisco il sistema di travi, a causa di ciò la trave centrale subirà una compressione e le travi laterali una trazione. Abbiamo quindi una deformazione imposta iniziale  $\delta_i$ . Il tratto centrale risulta essere più lungo di un valore  $\delta_i$ , ma si accorcia di un tratto  $\bar{\delta}$ . Le travi laterali invece si allungano di un valore  $\delta_i - \bar{\delta}$ , per cui abbiamo:

$$l_1 = \frac{l}{2} + \delta_i = \frac{l}{2} + \overbrace{\frac{1}{6} \frac{\sigma_p l}{E}}^{\text{arbitrario}}$$

per l'equilibrio:

$$-\frac{2EA}{l} \bar{\delta} + 2 \cdot \frac{EA}{2l} \left( \frac{1}{6} \frac{\sigma_p l}{E} - \bar{\delta} \right) = 0 \quad (\text{ho imposto } F=0)$$

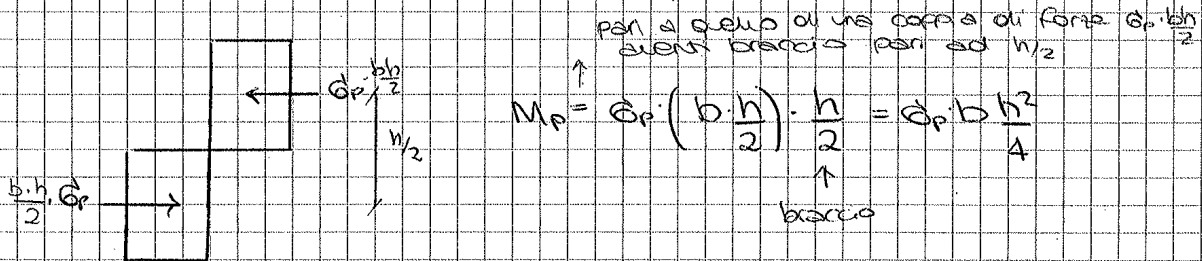
seguito modo:



Quando il diagramma delle tensioni è bi-retangolare si è giunti a completa plasticizzazione e la curvatura tende ad infinito. Quindi è come se idealmente la sezione si fosse trasformata in una cerniera plastica. Nella situazione (1) si identifica il momento limite elastico, detto anche equazione di Navier:

$$M_e = \sigma_p \cdot \frac{bh^2}{6}$$

Nella situazione (2) si identifica il momento plastico (o di prima plasticizzazione):



pari al peso di una coppia di forze  $\sigma_p \cdot \frac{bh}{2}$  aventi braccio pari ad  $\frac{h}{2}$

$$M_p = \sigma_p \left( \frac{b \cdot h}{2} \right) \cdot \frac{h}{2} = \sigma_p b \frac{h^2}{4}$$

↑  
braccio

Il rapporto  $\frac{M_p}{M_e}$  è quindi pari a  $\frac{3}{2}$ , quindi le tensioni plastiche tendono circa la metà di quelle elastiche.

Andiamo ora a definire il legame tra la curvatura e le deformazioni <sup>elastiche</sup> in generale:

$$\epsilon_x = \frac{M}{EI} y = \chi_x y$$



Il rapporto tra  $M_x$  ed  $M_e$  risulta quindi esprimibile come:

$$\frac{M_x}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{X_e}{X_x} \right)^2 \quad \text{legame momento-curvatura}$$

dove  $X_e$ : curvatura limite elastica  
 $X_x$ : generica curvatura

Graficizzando tale equazione si ottiene il seguente diagramma; costituito da un tratto lineare per  $X_x < X_e$  (ovvero  $M_x < M_e$ ) ed iperbolico per  $X_x > X_e$ . Al



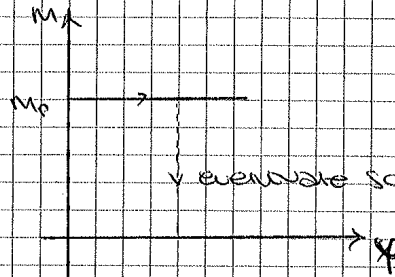
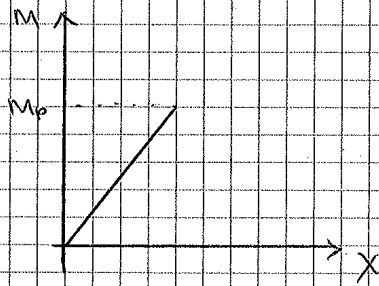
variare della sezione, varia l'andamento del secondo tratto. Se ci riferiamo ad una sezione ideale fatta da due aree concentrate e due estremità, abbiamo una prima fase elastica e la partecipazione è istantanea, quindi noi si hanno riserve plastiche in quanto il carico limite ultimo coincide con il carico limite elastico. La sezione a doppio T si avvicina molto a quella ideale in quanto l'area è concentrata alle estremità, ma presenta comunque delle riserve plastiche. Tale sezione è ottimizzata in campo elastico, ma presenta riserve plastiche inferiori rispetto alla sezione rettangolare, che invece è scadente in campo elastico.

Se rivolgeremo un'occhiata nel dettaglio la curva si andrebbe ad

ottenere:

$\frac{X_x = \frac{E_{max}}{E_0}}{X_e}$	Limite elastico		Fase plastica		
	1	2	3	5	10
$\frac{M_x}{M_e}$	$\frac{2}{3} = 0,667$	0,917	0,963	0,997	→ in pd. oltre che si raggiunge $M_e$

osserviamo quindi, leggi continue di pieno n.p.o.



→ modello di cerniera plastica

la seconda legge si applica solo dove si raggiunge il valore di  $M_p$ .

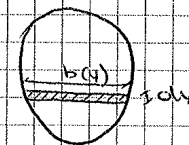
NB: la cerniera plastica è unidirezionale perché permette rotazioni  $\varphi$  solo nella direzione in cui si è formata.

Quando la sezione reticolare è a doppia simmetria, per non essere rettangolare, gran parte delle argomentazioni che precedono possono venir riprese. Il momento limite elastico è:

$$M_e = \sigma_p \cdot W_x = \sigma_p \cdot I_x / h/2$$

il momento plastico ha invece la seguente espressione

$$M_p = \lim_{x \rightarrow \infty} M_x = 2\sigma_p \int_0^{h/2} \underbrace{y \cdot b(y)}_{\text{area rettilinea}} \cdot dy$$



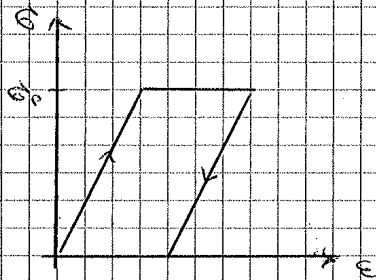
Momento statico di metà area rispetto all'asse x =  $S_x^{h/2}$

Il rapporto

$$\frac{M_p}{M_e} = \frac{2 \cdot S_x^{h/2}}{I_x / h/2}$$

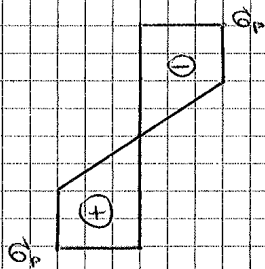
vale 1,5 nel caso di sezione rettangolare e valgono le considerazioni fatte in precedenza

Vediamo ora cosa succede se ricarichiamo la sezione: lo scarico avviene sempre in regime elastico:

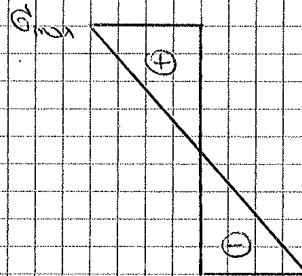


→ il tratto di scarico è parallelo al tratto elastico

Supponiamo di avere una sezione rettangolare e di non aver raggiunto una completa plasticizzazione. Al diagramma delle  $\sigma$  bisogna aggiungere però dovuto allo scarico:

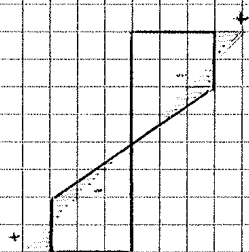


+



dovuto allo scarico:  $-M_1$

Quando sommo i due grafici noto una condizione che è diversa da quella dell'avere una sezione completamente scarica, poiché  $\sigma_{max} > \sigma_p$ .



ci sono quindi delle tensioni residue, questi risultano e momento nullo.

Se la sezione non fosse rettangolare, il punto di nullo del diagramma delle  $\sigma$  dovuto allo scarico è diverso da quello del diagramma delle  $\sigma_p$ .

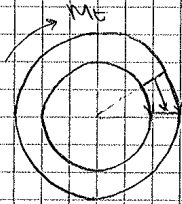
→

Il momento torcente plastico risulta uguale al prodotto della tensione di snervamento  $\sigma_p$  per il momento statico polare della sezione:  $\tau_p$

$$M_{T_p} = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \tau_p$$

Il rapporto  $M_{T_p} / M_{T_e}$  vale pertanto  $4/3$

Nel caso di una sezione circolare cava, ma non sottile, si ha una distribuzione trapezoidale delle  $\tau$  <sup>In regime ELASTICO</sup> (se la sezione fosse sottile, la distribuzione delle  $\tau$  potrebbe essere considerata costante): il passaggio



al diagramma rettangolare delle  $\tau$ , quindi, è più rapido rispetto a quello della sezione piena. Si ha dunque un incremento

del momento plastico rispetto ad  $M_e$  più piccolo  $\rightarrow$  minore è il rapporto  $M_{T_p} / M_e$  e minori sono le riserve plastiche.

Il caso dello sforzo normale centrato è banale in quanto il diagramma delle tensioni in campo elastico è rettangolare, quindi lo sforzo normale limite elastico è pari a quello plastico:

$$N_p = \sigma_p \cdot A \quad \rightarrow \text{non si hanno riserve plastiche}$$

Per quanto riguarda le sollecitazioni composte, analizziamo il caso della precompressione ( $N+M$ ). Per una sezione rettangolare sollecitata dallo sforzo normale  $N$  applicato sull'asse  $y$  con eccentricità  $e'$ , si susseguono quattro diverse fasi all'aumentare di  $N$ :

- (a): elastica;
- (b): elastico-plastica, con snervamento solo ad un lato;

Se averei solo M:

$$M_p = \sigma_p \cdot b \frac{h^2}{4}$$

si possono definire i seguenti rapporti adimensionali:

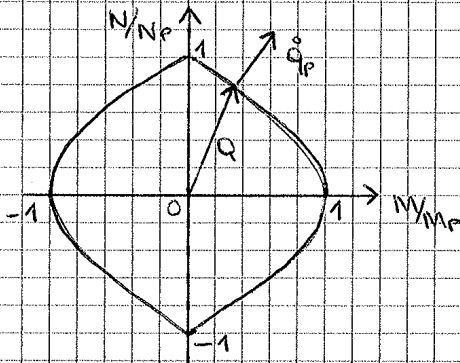
$$\frac{N}{N_p} = 1 - 2 \left( \frac{h'}{h} \right)$$

$$\frac{M}{M_p} = 4 \left( \frac{h'}{h} \right) \cdot \left( 1 - \frac{h'}{h} \right)$$

possiamo trovare un'unica equazione che lega N e M:

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left( \frac{N}{N_p} \right)^2$$

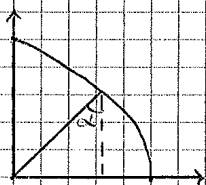
Il dominio di partecipazione nel piano M-N è fornito dalla seguente curva chiusa:



Le coppie M-N interne al dominio rappresentano stati elasto-plastici, mentre le coppie che si trovano sulla frontiera rappresentano condizioni ultime di completa plasticazione. Non è

possibile che il punto sia al di fuori perché la sezione non può sopportare la coppia M-N.

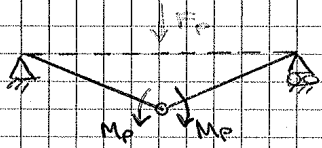
Dato un generico punto sulla curva, l'eccentricità è rappresentata dalla pendenza della curva che parte dall'origine e collega il punto. Questo grafico mi



$$e = \tan \alpha$$

dice anche il tipo di deformazione che otteniamo quando si giunge alla plasticazione, attraverso il vettore  $q_p$  normale alla curva nel punto.

Quando si raggiunge il carico di collasso, in mezz'aria si forma una cerniera plastica, una cerniera cioè dotata di una reazione rotazionale costante e uguale ad  $M_p$ . I momenti  $M_p$  si oppongono al

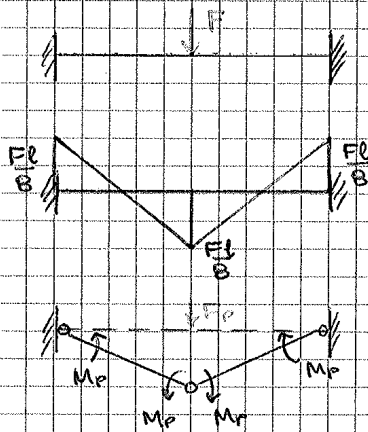


cinematismo, quindi il meccanismo è in equilibrio per quella particolare condizione di carico.

Se la struttura è iperstatica non appena nasce la prima cerniera plastica diventa labile e quindi non può più sopportare ulteriori incrementi di carico.

Se è iperstatica, in generale, la struttura può sopportare la formazione di più cerniere plastiche. L'incremento di capacità portante è quindi maggiore.

Si consideri ora una trave doppiamente incastata soggetta ad un carico in mezz'aria. Nella soluzione



elastica i momenti d'incastro e in mezz'aria sono pari a  $\frac{Fl}{8}$  e tendono rispettivamente le

fibre superiori e inferiori.

Abbiamo lo stesso valore di  $M$

in tre punti quindi si formeranno

3 cerniere plastiche esattamente

per lo stesso valore del carico  $F$ .

La struttura diventa labile,

quindi il carico di collasso equivale a:

$$\frac{Fl}{8} = M_p \quad \Rightarrow \quad F_p = \frac{8M_p}{l}$$

per sezioni rettangolari:

$$\frac{F_p}{F_e} = \frac{3}{2}$$

La normativa permette di fare un calcolo elastico con ridistribuzione ma pone dei limiti sulla quantità del momento ridistribuito, quindi sul rapporto tra il momento che si avrebbe se la risposta fosse elastica e quella ridistribuita. Il limite posto è un limite superiore. Questo limite equivale a porre un limite alla rotazione della struttura  $\rightarrow$  si limitano quindi le deformazioni massime ammissibili.

Cerchiamo di rappresentare il diagramma carico-spostamento adimensionalizzato. L'abbattimento in metateria per  $q=q_1$  è dato dai contributi del carico esterno  $q_1$  e dei momenti plastici  $M_p$ :

(1)   $\delta_{(1)} = \frac{5}{384} \frac{q_1 l^4}{EI}$

(2)   $\delta_{(2)} = \frac{M_p l^2}{8EI}$

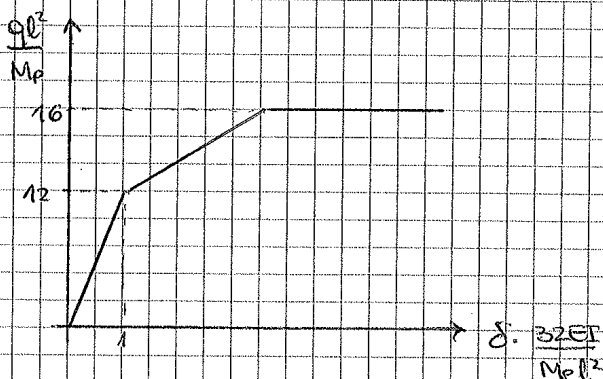
Il cedimento in metateria è quindi pari a:

$$\delta_{(q_1)} = \delta_{(1)} - \delta_{(2)} = \frac{5}{384} \frac{q_1 l^4}{EI} - \frac{M_p l^2}{8EI} = \frac{M_p l^2}{32EI}$$

Analogamente, lo spostamento in metateria dato da  $q_p$  è:

$$\delta_{(q_p)} = \frac{M_p l^2}{12EI}$$

Il grafico quindi è:



Si sono ottenuti tre tratti rettilinei. Ogni volta che si forma una nuova cerniera plastica la pendenza si riduce. Raggiunto il massimo il tratto è orizzontale.

In questa sezione il momento sarà massimo e pari a:

$$M_{\max}(z = \bar{z}) = \frac{1}{8} q l \left( 1 - \frac{2M_p}{q l^2} \right)^2$$

quando  $M_{\max} = M_p$  si formerà la seconda ed ultima cerniera plastica. Ponendo  $M_{\max} = M_p$  si ricava un'equazione algebrica di secondo grado nell'incognita  $q_2$ :

$$\left( 1 - \frac{2M_p}{q_2 l^2} \right)^2 = 4 \frac{2M_p}{q_2 l^2}$$

che risolta fornisce le due radici:

$$\frac{2M_p}{q l^2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

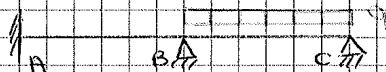
Mentre la prima radice è da scartarsi, poiché implicherebbe  $q_2 < q_1$ , la seconda fornisce il carico di collasso:

$$q_2 = q_p = \frac{M_p}{l^2} \frac{2}{3 - 2\sqrt{2}}$$

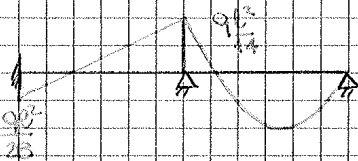
ovvero  $q_p \approx 11,66 \frac{M_p}{l^2}$

Il fattore di sicurezza vale pertanto:  $\frac{q_p}{q_e} \approx 2,19$

Consideriamo ora il seguente schema:



Il massimo momento plastico si raggiunge nella campata di destra; e sarà pertanto in tale sezione che si formerà la prima cerniera plastica.



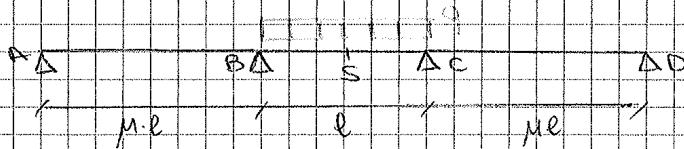


Si noti che il carico di collana  $q_2$  è superiore al carico di collana dello schema precedente di una quantità ingegneristicamente trascurabile ( $\approx 1\%$ ).  
 Il fattore di sicurezza risulta pertanto inferiore, anche se la  $\mu$  in questo caso è 2 volte iperbolico:

$$\frac{q_p}{q_e} = 1,807$$

Ciò è dovuto al fatto che è sufficiente la formazione di due cerniere plastiche per provocare il meccanismo di collana, anziché tre, come richiederebbe l'isotaticità globale in prossimità del collana.

Consideriamo ora il seguente schema:



Nella situazione ultima le cerniere saranno nella sezione B, C ed S. Si realizza quindi un collana parziale. Indipendentemente dal valore di  $\mu$ , il valore di  $q_p$  che si trova è  $\frac{16\mu q}{l^2}$  che è esattamente lo stesso trovato per la trave doppiamente incastrata soggetta al carico distribuito,  $q$ . Per  $\mu \rightarrow 0$  posso infatti immaginare che in B e C ci siano due incastri.

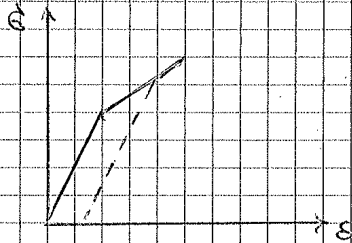
Se  $\mu \rightarrow \infty$  posso invece immaginare di semplificare lo schema con una trave semplicemente appoggiata di lunghezza  $l$ , soggetta a  $q$ . Questo perché il contributo delle campate laterali è quasi nullo. Per questo schema abbiamo trovato  $q_p = \frac{8\mu q}{l^2}$ .

Per  $\mu < 0,5$  si trova che prima le cerniere si formano in B e C, e poi in maniera, S.



può essere ottenuto nell'ambito dei criteri di Tresca o Von Mises

ha molta importanza, perché se scarico il materiale e lo ricarico, la tensione di snervamento è sempre la stessa, quindi  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ . Se invece avessi un comportamento inelastico. Quando ricarico non ho più la stessa condizione precedente, quindi devo tener conto della storia tensionale.



non ho più la stessa condizione precedente, quindi devo tener conto della storia tensionale

Quando il problema è bidimensionale o tridimensionale mi devo rifare a dei domini di plasticizzazione.

Criteri di snervamento dei metalli:

- Il limite di snervamento  $\sigma_p$  è uguale in valore assoluto a trazione e compressione;
- le deformazioni permanenti, puramente deviatoriche, avvengono a volume costante.

I criteri di snervamento più usati sono il criterio di Tresca ed il criterio di Von Mises.

Nel criterio di Tresca il materiale si plasticizza quando la  $\tau$  raggiunge un certo valore limite. La legge individua un dominio cilindrico con sezione esagonale.

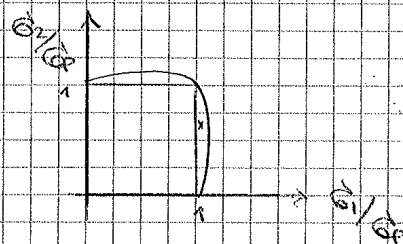
Von Mises tiene conto della deformazione deviatorica, quindi a volume costante. La legge individua un dominio cilindrico a sezione circolare. Se si sezionano tali dominio si può ottenere che l'equazione di Von Mises è circonscritta all'esagono di Tresca, quindi da un punto di vista applicativo il criterio di VM è meno conservativo in quanto permette di applicare carichi maggiori.

Se avessimo il seguente stato biassiale:

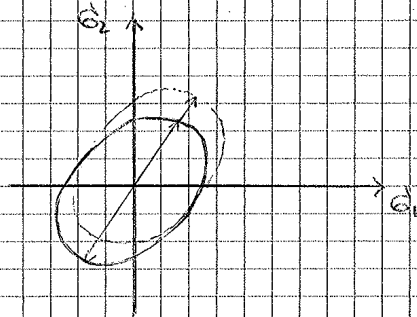
$$\sigma_1 = 1/3 \sigma_p$$

$$\sigma_2 = 0,6 \sigma_p$$

$$\sigma_{eq}^2 = 0,91 \sigma_p^2 < \sigma_p^2 \text{ per V.M.}$$



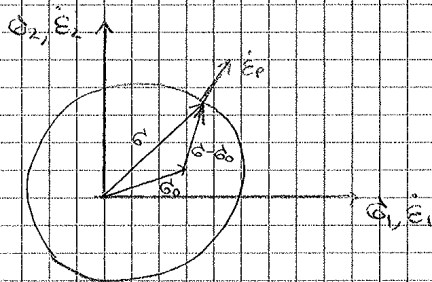
Nel piano delle tensioni principali questo equivale ad una traslazione del dominio di Von Mises:



Si consideri ora un elemento solido bidimensionale soggetto ad un generico stato di sollecitazione iniziale:

$$\{\sigma_0\} = [\sigma_1, \sigma_2]^T$$

Applichiamo un incremento di sollecitazione  $\{\sigma\} - \{\sigma_0\}$  che porta il materiale a plasticizzazione. Una volta



raggiunto questo punto (contorno della curva) si hanno delle deformazioni plastiche indefinite,  $\epsilon_p$ .

Il lavoro speso è solo quello legato alle deformazioni plastiche.

Il FORMULAZIONE di DRUCKER afferma

che il materiale può definirsi stabile se il lavoro compiuto nel ciclo di carico risulta NON-NEGATIVO.

Per uno stato tensionale  $\{\sigma\}$  giacente sulla superficie di plasticizzazione  $F(\{\sigma\}) = 0$ , e per ciascuno stato tensionale ammissibile e punti contenuti nel dominio elastico o giacente sulla frontiera, il lavoro deve essere  $\geq 0$  quindi:

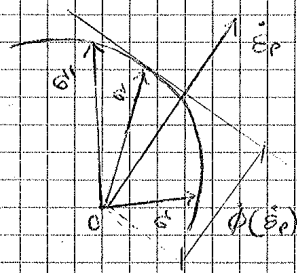
$$(\{\sigma\} - \{\sigma_0\})^T \cdot \{\dot{\epsilon}_p\} \geq 0$$

essendo  $\{\dot{\epsilon}_p\}$  la deformazione incrementale plastica che si manifesta quando lo stato tensionale raggiunge  $\{\sigma\}$ .

Ora supponiamo che lo stato tensionale iniziale sia nullo:  $\{\sigma_0\} = 0$ , la disuguaglianza del postulato di Drucker diventa:

$$\{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} = \dot{\phi}(\{\dot{\epsilon}_p\}) \geq 0$$

che  $\dot{\phi}$  rappresenta l'energia dissipata nell'unità di volume e risulta essere una funzione soltanto della deformazione incrementale plastica. Questa considerazione resta valida anche quando la superficie di plasticizzazione presenta punti angolosi o tratti lineari. Da questa equazione è possibile dedurre la legge di normalità e la convessità della superficie di plasticizzazione. Tale eq. mostra infatti che ciascuno stato tensionale  $\{\sigma\}$  capace di produrre la deformazione incrementale plastica  $\{\dot{\epsilon}_p\}$



deve trovarsi sul piano normale a  $\{\dot{\epsilon}_p\}$  e distante  $\phi(\{\dot{\epsilon}_p\})$  dall'origine.

Facendo ruotare  $\{\dot{\epsilon}_p\}$  attorno a l'origine, tutti questi piani inviluppano la superficie di plasticizzazione, che risulta quindi essere convessa.

Supponiamo che la  $\{\sigma_0\} = \{\sigma\}$ , quindi che ci troviamo già sulla superficie di plasticizzazione, ed applichiamo una variazione di carico tale da rimanere nel dominio. Se il materiale è elastico-perfettamente plastico, quindi il dominio non cambia, per rimanervi sopra devo applicare una variazione di stato tensionale che sia tangente alla curva stessa, quindi:

$$\{\sigma\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}_p\} = 0$$

dove  $\{\sigma\}$  è il vettore incrementale di tensione corrispondente alla deformazione incrementale plastica  $\{\dot{\epsilon}_p\}$ .

Se invece il materiale è incrudente, abbiamo visto

l'equazione è valida in ciascun pts del solido e perciò si può riscrivere come:

$$\int_V \dot{\varphi}(\{\dot{\epsilon}_p\}) dV \geq \int_V \{\sigma^*\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} dV$$

### (B) TEOREMA STATICO (o del LIMITE SUPERIORE)

Il moltiplicatore dei carichi  $\lambda^*$  corrispondente ad un qualsiasi campo tensionale staticamente ammissibile è minore o uguale al moltiplicatore di collano  $\lambda_0$ .

Sia quindi  $\{\sigma^*\}$  un campo tensionale staticamente ammissibile e  $\lambda^*$  il corrispondente moltiplicatore dei carichi esterni. E sia  $\{\sigma\}$  il campo tensionale di collano e  $\{\eta\}$ ,  $\{\dot{\epsilon}_p\}$  i campi incrementali rispettivamente di spostamento e di deform. plastica subito del collano. Applichiamo il P.V. scegliendo un sistema di forze reale statico ammissibile e come sistema di spostamenti quel reale:

$$\int_V \{\sigma^*\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} dV = \sum_i \lambda^* P_i \dot{\eta}_i$$

riscriviamo ora il P.V. invertendo i sistemi di forze e spostamenti; e otterremo:

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} dV = \sum_i \lambda_0 P_i \dot{\eta}_i$$

dove con  $P_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , sono indicati i carichi est. applicati al solido.

Per il teorema dell'energia massima dissipata il 2° integrale è pari a:

$$\int_V \dot{\varphi}(\{\dot{\epsilon}_p\}) dV = \int_V \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} dV$$

tale integrale, quindi è sicuramente  $\geq$  del primo. Analogamente quindi:

$$\sum_i \lambda_0 P_i \dot{\eta}_i \geq \sum_i \lambda^* P_i \dot{\eta}_i$$

Il primo integrale è sicuramente maggiore del secondo, poiché si riferisce a sistemi di stati e deformazioni corrispondenti tra di loro, quindi sarà maggiore per di qualsiasi suo valore di  $\lambda^*$ . Per le (1) dunque

$$\sum_i \lambda^* p_i q_i^* \leq \sum_i \lambda^* p_i q_i^*$$

da cui

$$\lambda^* \geq \lambda_p$$

Il teorema cinematico quindi è a nuovo di sicurezza in quanto si trovano valori del carico di collasso maggiori di quello reale.

### (10) TEOREMA MISTO

Se il moltiplicatore dei carichi esterni  $\lambda$  corrisponde ad un campo tensionale staticamente ammissibile e, contemporaneamente, ad un meccanismo di collasso cinematicamente ammissibile, allora si ha:

$$\lambda = \lambda_p$$

Questo in quanto sono soddisfatte entrambi i teoremi precedenti.

oss: Nel teorema misto non è richiesta nessuna condizione o verifica sua conseguenza

(vicinanza in questo cinematico?)

NB: le proprietà di convettività del dominio elastico, di normalità della def incrementale plasticità ed i teoremi dell'analisi limite possono essere estesi ad

Solidi 3D a 2D e 1D  $\left( \begin{array}{l} \{ \sigma \} \rightarrow \{ \rho \} \text{ caratteristiche sollec.} \\ \{ \dot{\epsilon} \} \rightarrow \{ \dot{\rho} \} \text{ caratteristiche def.} \end{array} \right)$

$$M(x) = M_1 + M_2$$

$$M_1 = -x$$

$$M_2 = \frac{\lambda F l}{4}$$

da cui

$$M_A = -x$$

$$M_S = -x + \frac{\lambda F l}{4}$$

le disequazioni in questo caso sono:

$$-M_p \leq -x \leq M_p$$

$$-M_p \leq \left(-x + \frac{\lambda F l}{4}\right) \leq M_p$$

dalle quali si ricavano:

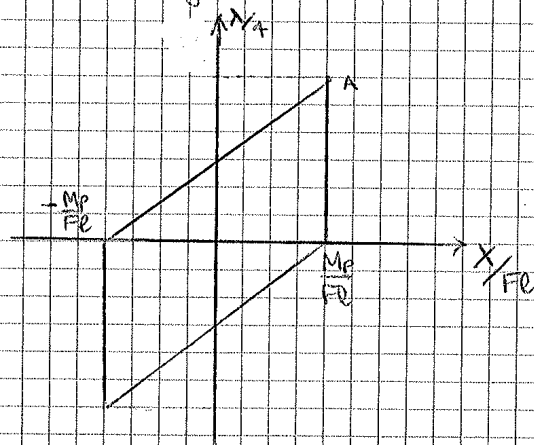
$$x \geq -M_p$$

$$x \leq M_p$$

$$x \leq M_p + \frac{F l}{4} \lambda$$

$$x \geq -M_p + \frac{F l}{4} \lambda$$

Tali disequazioni, sul piano  $x-\lambda$  delimitano il seguente poliedrologramma:



Il massimo valore in tale dominio è dato dall'ordinata del punto A:

$$\lambda_{max} = 8 \frac{M_p}{F l}$$

da cui si ricorre il carico di collaudo:

$$F_p = \lambda_{max} \cdot F = 8 \frac{M_p}{l}$$





Vediamo ora come varia la soluzione al variare del rapporto tra  $h$  ed  $l$ .

Consideriamo i tre possibili cinematici:

(a)  $F \cdot l \cdot \varphi = 4M_p \varphi$   
 $\hookrightarrow \frac{F \cdot l}{M_p} = 4$  non dipende da  $h$

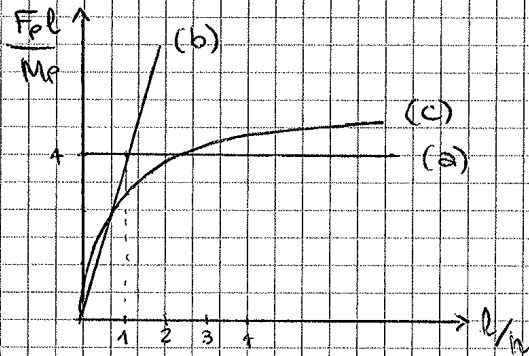
(b)  $F \cdot h \cdot \varphi = 4M_p \varphi$   
 $\hookrightarrow \frac{F \cdot h}{M_p} = 4$   
 moltiplico e divido per  $l$  e ottengo:

$$\frac{F \cdot l}{M_p} = 4 \cdot \frac{l}{h}$$

(c)  $F \cdot h \cdot \varphi + F \cdot l \cdot \varphi = 6M_p \varphi$

$$\hookrightarrow \frac{F \cdot l}{M_p} = \frac{6}{\frac{h}{l} + 1}$$

Riportiamo su un grafico queste tre soluzioni:



la soluzione (a) è una retta orizzontale. la soluzione (b) interseca la soluzione (a) per  $\frac{l}{h} = 1$ . la soluzione (c) interseca la (a) per  $\frac{l}{h} = 2$  ed interseca la (b) quando  $\frac{l}{h} = 0,5$ .

Dunque:

Per  $0 < \frac{l}{h} < 0,5$  (telajo nuovo zero) il cinematico di collasso è (b)

Per  $0,5 < \frac{l}{h} < 2$  (range intermedio) il cinematico di collasso è il tipo (c)

Per  $\frac{l}{h} > 2$  (telajo nuovo tozzo) si ha collasso verticale, dato dal caso (a).

In modo analogo, sapendo che  $M(s) = M_p$  per l'equilibrio possiamo scrivere:

$$M(s) = M_p - Hl + Vl - \frac{1}{2}ql^2 = M_p$$

Sottraendo  $q = \frac{2M_p}{l^2}$  troviamo:

$$V = \frac{3M_p}{l}$$

La funzione momento sul traliccio B-C è data dalla somma di quattro contributi:

$$M(z) = M_p + \underbrace{\frac{3M_p}{l} \cdot z}_{\text{contributo di } V} - \underbrace{2M_p \frac{z}{l}}_{\text{contributo di } H} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{2M_p}{l^2} z^2}_{\text{contributo di } q} =$$

$$= -M_p + \frac{3M_p}{l} z - \frac{M_p}{l^2} z^2$$

mentre il taglio è dato da:

$$T(z) = \frac{dM}{dz} = \frac{3M_p}{l} - 2 \frac{M_p}{l^2} z$$

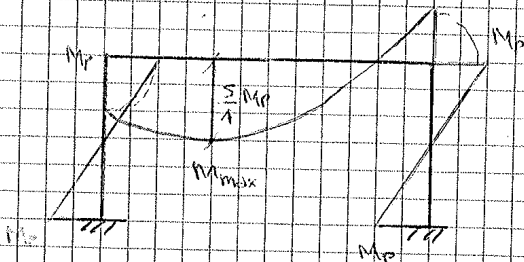
Vogliamo capire dove si trova il momento massimo (se ho scelto il cinematico reale in nessun altro punto si raggiungerà  $M_p$ ) quindi cerco dove si annulla il taglio. Imponendo  $T(z) = 0$  si trova:

$$z = \frac{3}{2} l$$

quindi il momento massimo non è in B come avevo ipotizzato, e vale:

$$M_{\max}(z = \frac{3}{2} l) = \frac{5}{4} M_p$$

quindi il diagramma di momento corrispondente a prf cinematico è qualitativamente il seguente:



Il momento massimo risulta maggiore di  $M_p$ , quindi il cinematico ipotizzato non è quello reale.

Il momento e il taglio sul traveso sono pertanto rappresentati dalle seguenti funzioni:

$$M(z) = M_p + \left(\frac{41}{15} \frac{M_p}{l}\right)z - 2 \frac{M_p}{l} z - \frac{1}{2} \left(\frac{28}{15} \frac{M_p}{l^2}\right)z^2$$

$$T(z) = \frac{dM}{dz} = \frac{41}{15} \frac{M_p}{l} - \frac{28}{15} \frac{M_p}{l^2} z$$

Il taglio si annulla per  $z = \frac{41}{28} l$  (poco distante da  $z = \frac{3}{2} l$ ) ed il momento massimo vale quindi:

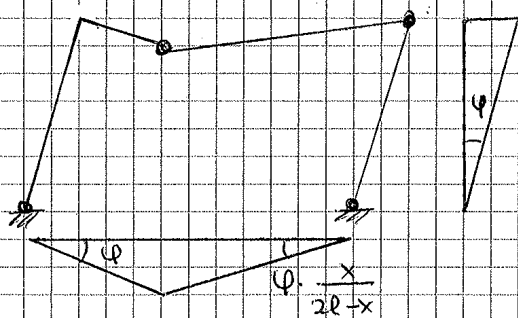
$$M_{max}(z = \frac{41}{28} l) = \frac{841}{840} M_p \quad (\text{poco superiore al precedente})$$

Dividendo il carico  $q = \frac{28}{15} \frac{M_p}{l^2}$  per  $\frac{841}{840}$  si ottiene uno schema staticamente ammissibile e quindi posso dire che l'intervallo di appartenenza per il carico di collasso effettivo è:

$$\frac{840}{841} \cdot \frac{28}{15} \frac{M_p}{l^2} < q_p < \frac{28}{15} \frac{M_p}{l^2}$$

Tale intervallo è estremamente ristretto e, ai fini ingegneristici, fornisce il carico di collasso effettivo con sufficiente approssimazione ( $\approx 1\%$ )

Per determinare la posizione corretta della cerniera scrivo il PLV in funzione di  $x$ . la soluzione



reale è quella che mi dà il  $q_{min}$ , quindi impongo la derivata su  $x$  uguale a zero e trovo:

$$x = 2l(2 \pm \sqrt{3})$$

la radice maggiore è da scartare. il carico di collasso effettivo è:

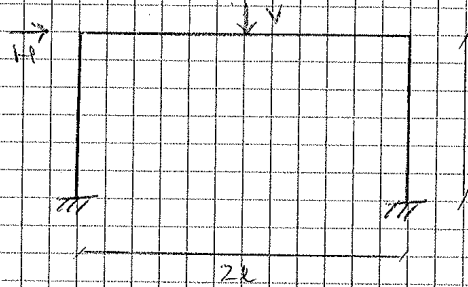
$$q_p = \frac{M_p}{l^2} \frac{3}{12 - 6\sqrt{3}}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{PLV:} \\ q x \cdot \left(\frac{x}{2} \varphi\right) + \frac{1}{2} q (2l-x)^2 \varphi - \frac{x}{2l-x} - 2ql(l\varphi) - 4M_p\varphi - 2M_p\varphi \cdot \frac{x}{2l-x} = 0 \end{array} \right)$$

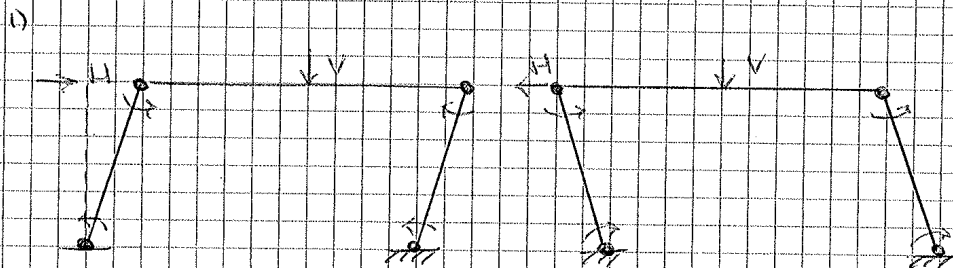
$$\hookrightarrow q(x) = 2 \frac{M_p}{l} \cdot \frac{12-x}{4l^2-x^2}$$

conservata della superficie e di normalità della deformazione incrementale plastica.

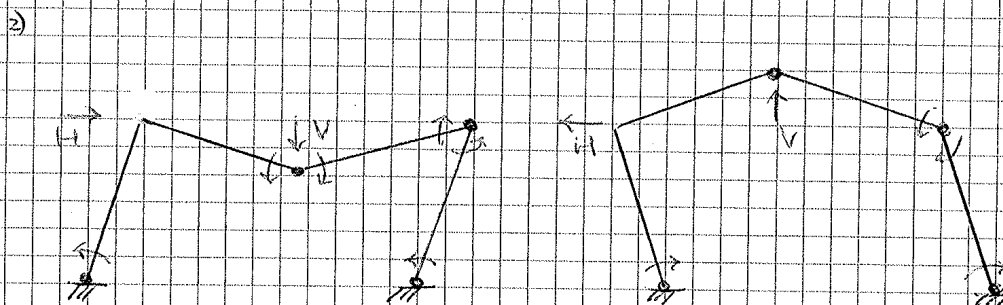
Un secondo esempio può essere fornito dal seguente portale, caricato da due forze concentrate H e V indipendenti tra di loro:



L'introduzione di cinque cerniere plastiche nelle sezioni critiche permetterà definizione di quattro diversi meccanismi di collasso.

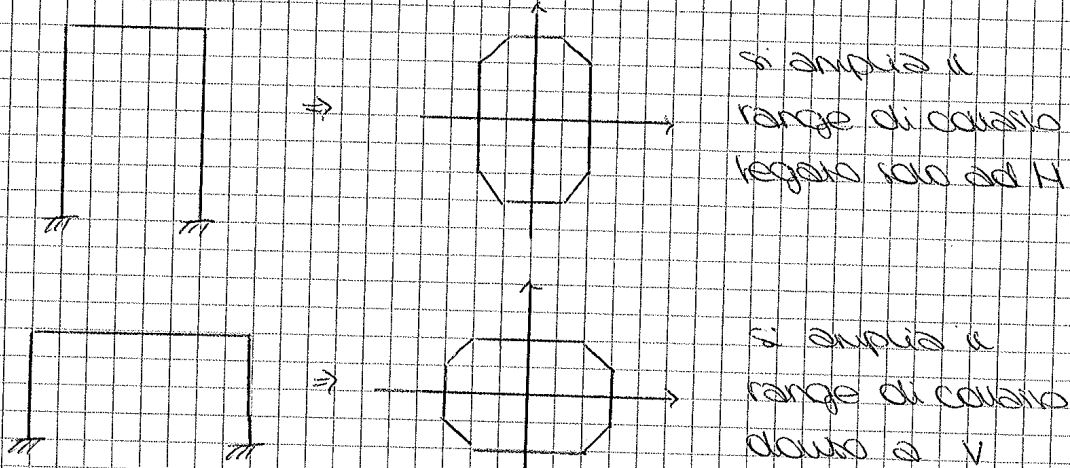


$$P.V.: -4M_p\psi + Hl\psi = 0$$



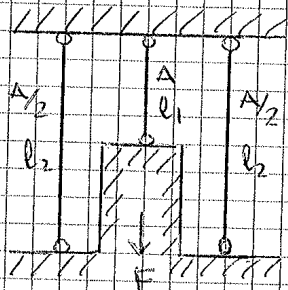
$$P.V.: -6M_p\psi + (Hl\psi + Vl\psi) = 0$$

Se ipotizziamo di variare la geometria, i materiali sono sempre gli stessi, variano le lunghezze in gioco. Il dominio di plasticizzazione rimane sempre in contatto, ma non sarà più regolare.

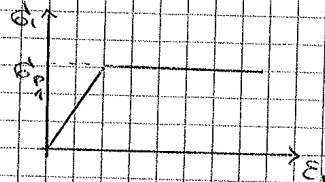


### → CARICHI CICLICI (SHAKE-DOWN)

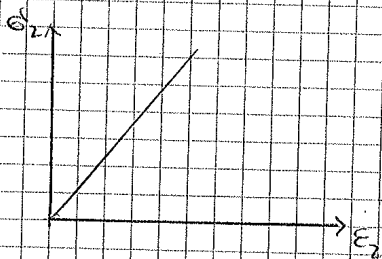
Consideriamo il seguente sistema di travi parallele:



ed ipotizziamo che la trave centrale abbia comportamento elastico perfettamente plastico:



mentre per le travi laterali ipotizziamo un comportamento indefinitamente elastico:



quindi assumiamo che solo la trave centrale possa plasticizzarsi.

Concludiamo ripentinamente il travetto rigido con una

porta pulsante:



siccome le travi laterali sono sempre in fase elastica  
 posso risolvere  $\epsilon_2$  attraverso il legame continuo:

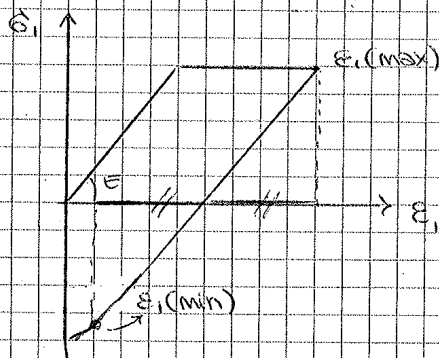
$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{F_2(\max)}{\frac{A}{2} E}$$

quindi l'uguaglianza diventa:  $\epsilon_1(\max) = \frac{l_2}{l_1} \frac{F_2(\max)}{\frac{A}{2} E}$  (\*)  
 lo stesso ragionamento posso farlo

nella fase di scarico:

$$\epsilon_1(\min) = \frac{l_2}{l_1} \epsilon_2(\min) = \frac{l_2}{l_1} \frac{F_2(\min)}{\frac{A}{2} E} \quad (**)$$

la dilatazione della trave centrale, quando la forza est  
 è nulla e nel caso in cui si verifichi la plasticizzazione  
 inversa può essere scritta come:



$$\epsilon_1(\min) = \epsilon_1(\max) - 2 \frac{\sigma_p}{E}$$

come si osserva dal  
 grafico a lato.

sovrapposto all'interno di  
 questa equazione i valori  
 di  $\epsilon_1(\max)$  ed  $\epsilon_1(\min)$

si ottiene:

$$\frac{l_2}{l_1} \frac{F_2(\min)}{\frac{A}{2} E} = \frac{l_2}{l_1} \frac{F_2(\max)}{\frac{A}{2} E} - 2 \frac{\sigma_p}{E}$$

da cui si ricava la reazione delle travi laterali al  
 carico massimo:

$$F_2(\max) = F_2(\min) + \sigma_p A \frac{l_1}{l_2} \quad (***)$$

dall'equazione di equilibrio quando  $F_{ext} = 0$  risulta

$$F_2(\min) = \frac{F_1(\min)}{2}$$

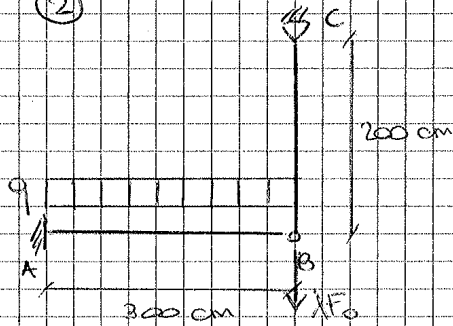
la  $F_1(\min)$  è nota e vale:  $F_1(\min) = \sigma_p \cdot A$

quindi

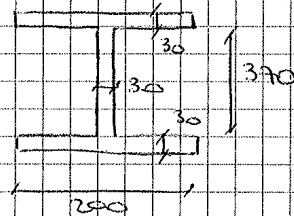
$$F_2(\min) = \frac{\sigma_p \cdot A}{2}$$



②



BC è una pila con diametro  $\phi_F = 8 \text{ mm}$   
 AB è un trave con sezione  
 a doppio T:



$$q = 100 \text{ kN/m}$$

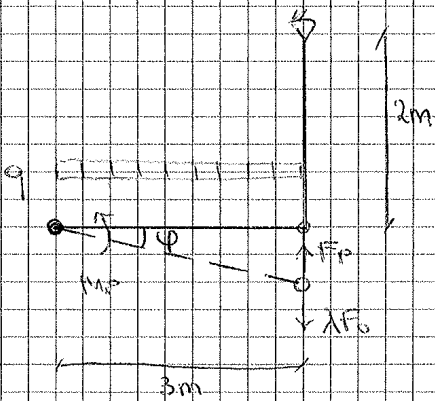
$$F_0 = 70 \text{ kN}$$

$$\sigma_{p, \text{trave}} = 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p, \text{pile}} = 500 \text{ MPa}$$

Determinare  $\lambda$  che porta al collasso il sistema:

Applico il teorema cinematico



$F_p$ : reazione plastica della pile

Scrivo PLV:

$$q \cdot 3 \left( \frac{\phi \cdot 3}{2} \right) + \lambda F_0 (3\phi) - F_p (3\phi) - M_p \phi = 0$$

calcoliamo  $M_p$  ed  $F_p$  e

sostituendo nell'eq. del PLV si

ricava il valore di  $\lambda$  di collasso:

$$F_p = A_p \cdot \sigma_{p, \text{pile}} = \pi \cdot \frac{\phi_F^2}{4} \cdot 500 = 25,13 \text{ kN}$$

$$M_p = \sigma_{p, \text{trave}} \cdot \frac{A_{\text{trave}}}{2} \cdot \frac{h}{2} = 685,35 \text{ kN}$$

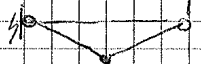
↑  
 braccio  
 1m7

sostituendo nel PLV si trova:  $\lambda = 1,48$

Se questi ipotizzavo il seguente meccanismo non avrei

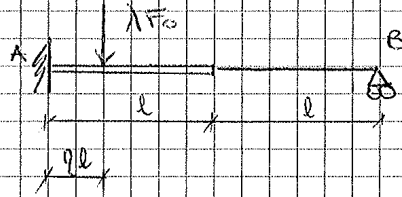
risolto il problema perché  $F_0$  non

solge lavoro!





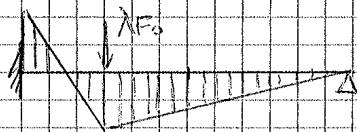
④



trave con sezione variabile  
 Nel tratto di sinistra il  
 momento plastico vale  $\frac{3}{2}M_p$   
 e nel tratto di destra  
 vale  $M_p$ .

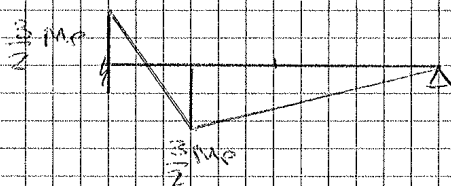
Determinare il massimo valore di  $l$  al variare di  $\eta$ .  
 Solgimento:

Partiamo dal diagramma di momento in fase elastica.



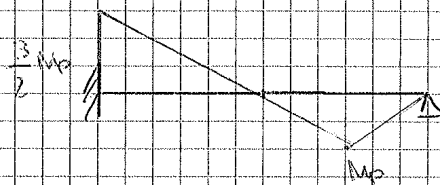
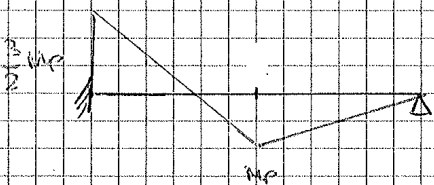
Potrebbe nascere un cerniera  
 all'incastro ed una nel punto  
 di applicazione del carico.

In questa ipotesi una possibile soluzione del diagramma  
 di momento plastico sarebbe:

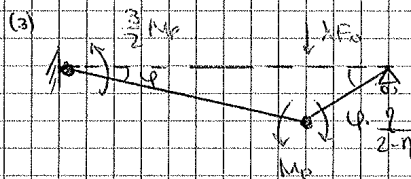
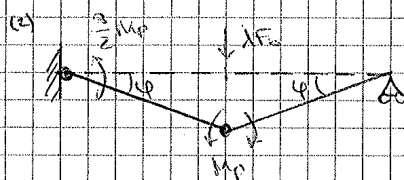
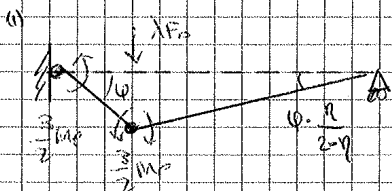


NB: se dalla nettona in poi  
 il momento è maggiore di  $M_p$   
 la soluzione non è valida perché  
 il momento plastico del secondo  
 tratto è  $M_p$ .

Altri due possibili diagrammi sono i seguenti:



I tre possibili cinematici da considerare sono quindi:

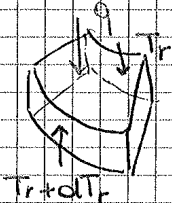


## → LASTRE PIANE INFLESSE

Si consideri il caso di una lamina circolare inflessa, costituita da materiale elastico-perfettamente plastico. Le equazioni indefinite di equilibrio sono:

$$\frac{dT_r}{dr} + \frac{T_r}{r} = q \quad (\text{equilibrio lungo la normale})$$

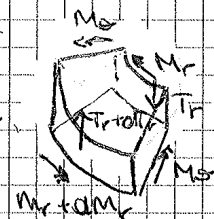
$$\left( \frac{?}{r} \right) - T_r + \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\theta}{r} = 0 \quad (\text{equilibrio alla rotazione attorno parallelo})$$



che si possono scrivere come:

$$\frac{d}{dr} (r \cdot T_r) = qr$$

$$\frac{d}{dr} (r \cdot M_r) - M_\theta - r \cdot T_r = 0$$



derivando la seconda equazione e troviamo

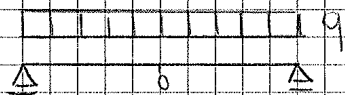
$$\frac{d^2}{dr^2} (r \cdot M_r) - \frac{dM_\theta}{dr} = \frac{d}{dr} (r \cdot T_r)$$

scartando nelle 1° eq. di equilibrio si ottiene un'unica equazione differenziale:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r \cdot M_r) - \frac{dM_\theta}{dr} - qr = 0$$

valida per  $0 \leq r \leq R$ , con  $R$  = raggio della lamina.

Se la lamina è appoggiata sui bordi, le condizioni al contorno sono:



$$M_r(R) = 0$$

$$M_r(0) = M_\theta(0) \rightarrow \text{per isotropia dello stato tensionale al centro}$$

Siamo in uno stato tensionale biassiale. Dobbiamo capire per quale combinazione di  $M_r$  ed  $M_\theta$  si giunge a plasticizzazione. Ci riferiamo al criterio di Tresca.

Il momento presente radiale diventa quindi:

$$M_r = -M_p \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right]$$

mentre il momento presente circonferenziale è stato assunto costante e pari a:  $M_\theta = M_p$ .

Il carico trovato, in virtù del teorema statico, rappresenta un limite inferiore del carico di collasso. Proviamo a dimostrare che questa soluzione soddisfa anche il teorema cinematico:

se siamo nel tratto BC abbiamo che:  $\dot{\chi}_r = 0$  e  $\dot{\chi}_\theta \geq 0$ .  
le variazioni delle curvature devono essere

tramite le equazioni cinematiche:

$$\dot{\chi}_r = \frac{dw}{dr} + \varphi_r$$

$$\dot{\chi}_r = \frac{d\varphi_r}{dr}$$

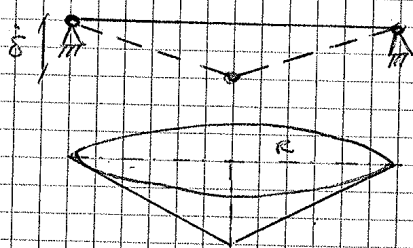
$$\dot{\chi}_\theta = \frac{1}{r} \cdot \varphi_r$$

si ottengono le corrispondenti condizioni sull'abbassamento:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = 0, \quad -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \geq 0$$

Adesso cerchiamo di trovare un meccanismo che soddisfi queste due soluzioni. Se tale meccanismo è cinematicamente ammissibile, significa che la soluzione trovata con il teorema statico è quella reale.

Si può verificare che il seguente meccanismo:



$$\dot{w} = \dot{\delta} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)$$

è cinematicamente ammissibile e soddisfa le condizioni sull'abbassamento.

Il carico corrispondente a tale meccanismo è pari a quello trovato con il teo. statico, quindi per il teo. unico è quello reale.

La potenza (energia per unità di tempo) dissipata per unità di area, estendendo lo spessore pari a  $2H$ , è:

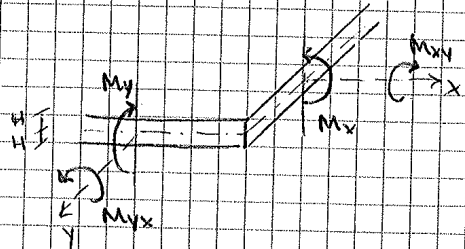
$$D = \int_{-H}^{+H} (\sigma_x \cdot \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \cdot \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \cdot \dot{\gamma}_{xy}) \cdot dz = \int_{-H}^{+H} (\sigma_x \cdot z \dot{\chi}_x + \sigma_y \cdot z \dot{\chi}_y + \tau_{xy} \cdot z \dot{\chi}_{xy}) dz$$

essendo

$$M_x = \int_{-H}^{+H} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

$$M_y = \int_{-H}^{+H} \sigma_y \cdot z \cdot dz$$

$$M_{xy} = \int_{-H}^{+H} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz$$



si ottiene:

→ le curvane posso portarle fuori dall'integrale perché sono costanti sullo spessore.

$$D = M_x \cdot \dot{\chi}_x + M_y \cdot \dot{\chi}_y + M_{xy} \cdot \dot{\chi}_{xy}$$

dunque l'energia dissipata (x unità di tempo e superficie) può essere scritta come prodotto tra momento e curvatura. Andiamo ad adimensionalizzare i momenti rispetto a  $M_p$ :

$$m_x = \frac{M_x}{M_p} \quad m_y = \frac{M_y}{M_p} \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_p}$$

$$\dot{\chi}_x = \dot{\chi}_x H \quad \dot{\chi}_y = \dot{\chi}_y H \quad \dot{\chi}_{xy} = \dot{\chi}_{xy} H$$

considerando che  $M_p = \sigma_p \cdot H^2$



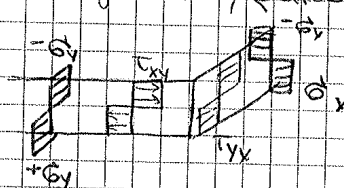
l'eq. dell'energia dissipata si trasforma:

$$D = \frac{M_p}{H} (m_x \dot{\chi}_x + m_y \dot{\chi}_y + m_{xy} \dot{\chi}_{xy})$$

Prima di applicare i teoremi sui particolari, facciamo alcune premesse. Consideriamo una distribuzione delle tensioni di particelle rettangolare, quindi:

$$M_x = \sigma_x \cdot H^2 \quad M_y = \sigma_y \cdot H^2$$

$$M_{xy} = \tau_{xy} \cdot H^2$$



Approcciamo il teorema statico. Bisogna ipotizzare una distribuzione dei momenti che soddisfi l'equilibrio e la condizione di compatibilità plastica. Per determinare il limite inferiore del carico di collasso.

Ipotizziamo una distribuzione dei momenti che soddisfi innanzi tutto le condizioni al contorno:

$$m_x = C_1 (1 - x^2)$$

$$m_y = C_2 \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)$$

$$m_{xy} = C_3 xy$$

distribuzione parabolica di  $m_x$  e  $m_y$

talí distribuzioni devono pure soddisfare l'eq. differenziale di equilibrio (\*) adimensionalizzata somministrandoci all'interno i valori di  $m_x, m_y, m_{xy}$  si trova:

$$p = 2 \left( C_1 + \frac{C_2}{\beta^2} - C_3 \right)$$

con  $C_1, C_2, C_3$  costanti arbitrarie.

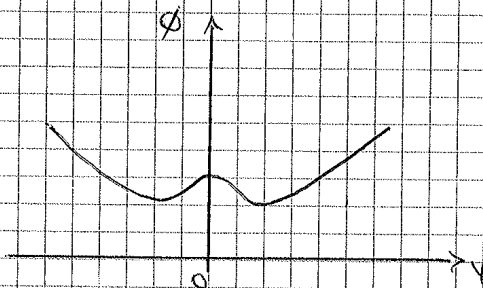
Imponiamo ora la condizione di compatibilità plastica. Ogni punto non deve oltrepassare il dominio di plasticità, quindi in ogni punto deve essere verificato:

$$F(m_x, m_y, m_{xy}) \leq 1$$

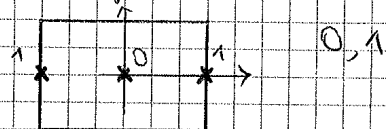
e in accordo con il criterio di V.M. si ha:

$$F = C_1^2 (1 - x^2)^2 + C_2^2 \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^2 - C_1 C_2 (1 - x^2) \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right) + 3C_3^2 x^2 y^2$$

supponendo di avere una sezione con un piano  $x=const$ , la funzione assume la seguente forma:



ha un picco in  $x=0$  e cresce agli estremi, quindi i P.M. critici critici dove deve verificarsi  $F \leq 1$  sono:



Applichiamo ora il teorema cinematico. Dobbiamo definire un meccanismo di colasso cinematicamente ammissibile, determinare la potenza dissipata sull'intera superficie, applicare il P.V. e determinare il limite superiore del carico di colasso.

Considerato il dominio di plasticizzazione

$$F = m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3m_{xy}^2$$

Per la legge di normalità:

$$\dot{\chi}_x = \frac{\partial F}{\partial m_x} \dot{\lambda} \quad \dot{\chi}_y = \frac{\partial F}{\partial m_y} \dot{\lambda} \quad \dot{\chi}_{xy} = \frac{\partial F}{\partial m_{xy}} \dot{\lambda}$$

dunque:

$$\dot{\chi}_x = \dot{\lambda}(2m_x - m_y) \quad \dot{\chi}_y = \dot{\lambda}(2m_y - m_x) \quad \dot{\chi}_{xy} = 6\dot{\lambda}m_{xy}$$

con  $\dot{\lambda}$  fattore positivo arbitrario.

Esprimendo i momenti:

$$m_x = \frac{1}{3\dot{\lambda}}(2\dot{\chi}_x + \dot{\chi}_y) \quad m_y = \frac{1}{3\dot{\lambda}}(2\dot{\chi}_y + \dot{\chi}_x) \quad m_{xy} = \frac{1}{6\dot{\lambda}}\dot{\chi}_{xy}$$

l'insieme  $m_x, m_y, m_{xy}$  deve verificare  $F=1$  quindi sostituendo nell'equazione di  $F$  si ricava  $\dot{\lambda}$  e così si può esprimere la potenza unitaria dissipata in funzione della velocità di deformazione.

$$D = \frac{2m_0}{H} \dot{\lambda} = \frac{2m_0}{H\sqrt{3}} \left( \dot{\chi}_x^2 + \dot{\chi}_x \dot{\chi}_y + \dot{\chi}_y^2 + \frac{\dot{\chi}_{xy}^2}{4} \right)^{1/2}$$

la potenza può esprimersi anche solo in funzione di  $w$ , scrivendo:

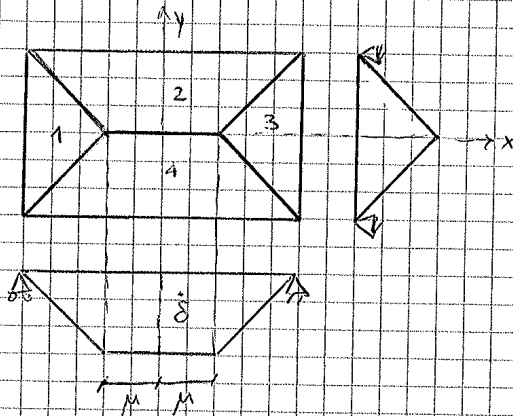
$$\dot{w} = \frac{\dot{w}}{H} \quad h = \frac{H}{A}$$

$$\dot{\chi}_x = -h^2 \frac{\partial \dot{w}}{\partial x^2} \quad \dot{\chi}_y = -h^2 \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \quad \dot{\chi}_{xy} = -2h^2 \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial xy^2}$$

Quindi l'espressione del carico diventa:

$$p^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_i \theta_i \dot{\theta}_i$$

Analizziamo ad ipotizzare un meccanismo cinematicamente ammissibile:



Le linee rappresentano le cerniere cilindriche

2M: lunghezza cerniera cilindrica centrale

r: raggio di abbinamento

Le componenti di rotazione rispetto al vincolo eterno sono:

1)  $\dot{\theta}_x = \frac{\dot{\theta}}{1-\mu}$        $\dot{\theta}_y = 0$

2)  $\dot{\theta}_x = 0$        $\dot{\theta}_y = -\frac{\mu}{\beta} \dot{\theta}$

3)  $\dot{\theta}_x = -\frac{\dot{\theta}}{1-\mu}$        $\dot{\theta}_y = 0$

4)  $\dot{\theta}_x = 0$        $\dot{\theta}_y = \frac{\dot{\theta}}{\beta}$

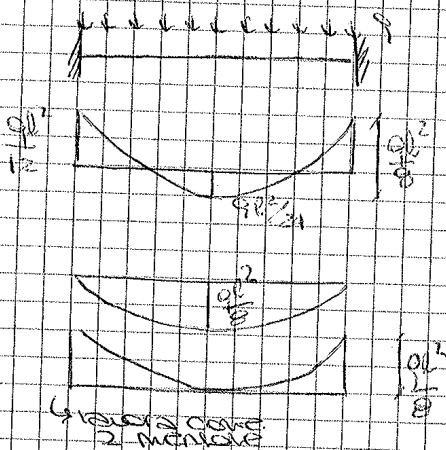
la rotazione relativa della cerniera centrale è:  $\dot{\theta}_{2-4} = 2 \frac{\dot{\theta}}{\beta}$   
 mentre la rotazione relativa delle 4 cerniere oblique è:

$$\dot{\theta}_{1-2} = \sqrt{(\dot{\theta}_x^1 - \dot{\theta}_x^2)^2 + (\dot{\theta}_y^1 - \dot{\theta}_y^2)^2}$$

sommando in  $L_i$  si trova  $p^*$

I valori di  $p^*$  e  $\bar{p}$  non coincidono mai quindi non è possibile trovare la soluzione in forma chiusa, ma si trova un range di valori

Consideriamo una lastra doppiamente incastata

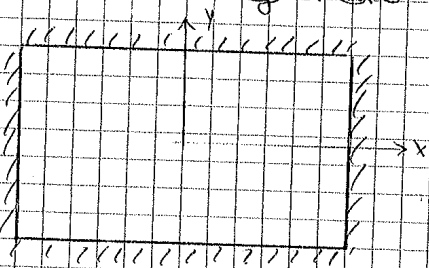


Se la armatura riferendoci al primo diagramma, la armatura sotterrandoci al comportamento elastico. Possiamo però decidere di armare riferendoci al 2° diagramma. In questo caso l'armatura sarà sempre in grado di portare il carico, ma ci saranno evidenti fessure all'incastro. Possiamo ancora

armare riferendoci al 3° diagramma, in questo caso ci saranno fessure in compressione. Ciò che rimane invariato in queste tre configurazioni è il valore assoluto del momento (che è  $\frac{qL^2}{8}$ ), in per modo ho garantito l'equilibrio.

Attenzione: il simple strip Method vale solo per casi solo in flessione. Non vale in caso né il momento torcente, né il taglio, né il pincamento. Nel caso quindi in cui ci siano colonne che esplicano una forza pincante, si usa l'Advanced strip Method.

Iniziamo a ragionare su una lastra rettangolare.



Si suppone che il carico sia portato da strisce parallele alla armatura in direzione x, e strisce parallele alla armatura in

direzione y. Queste strisce, dal punto di vista statico vengono poi analizzate come delle travi. La predefinita di un ordine di strisce rispetto all'altro in una zona è individuata da linee di discontinuità statiche, lungo le quali il taglio è nullo in qualunque direzione. Tali strisce sono tracciate in modo quasi del tutto arbitrario.

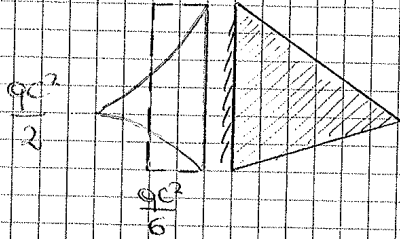


Nel tratto di sinistra  $m_p - m_s = \frac{q_c^2}{2}$ , il valore di  $m_p$  è influenzato dal tratto centrale ed è pari a  $\frac{q_c^2}{2}$ .  
 Il diagramma è quindi il seguente:



Un calcolo rigoroso, richiederebbe che si calcolasse il momento in ciascuna striscia. Naturalmente dal punto di vista pratico questo non è possibile e si ragiona sulla media dei momenti distribuiti lungo i bordi.

Nel caso di regioni triangolari, l'andamento di  $m_p - m_s$  lungo il lato è:



potremo semplificare tale profilo con un profilo rettangolare medio con:

$$m_p - m_s = \frac{q_c^2}{6} = \text{cost}$$

Al variare della forma della regione laterale anche la distribuzione dei momenti, che può essere così mediata:

La tab. ci fornisce i valori di  $m$  medio in base alla forma della regione.

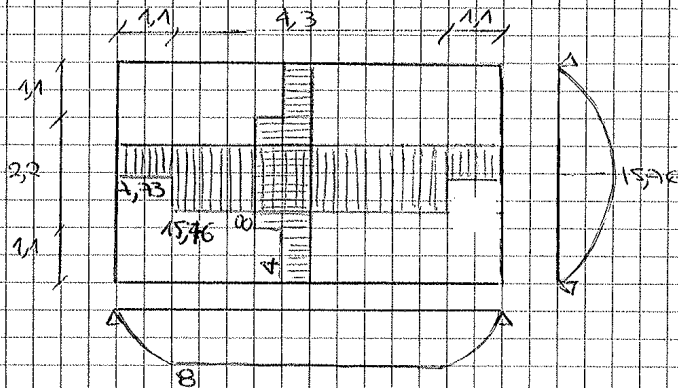
Ora bisogna ridistribuire i profili. Si assume  $m_{d2} = 0,5$   
 Per le sniscie orizzontali:

$$m_x = \frac{6}{8} = 0,75 \rightarrow m_{d2} = 4$$

$$m_{d1} = \frac{3,2}{4,4} + 0,5 \left( \frac{1-2,2}{4,4} \right)$$

Per le sniscie verticali:

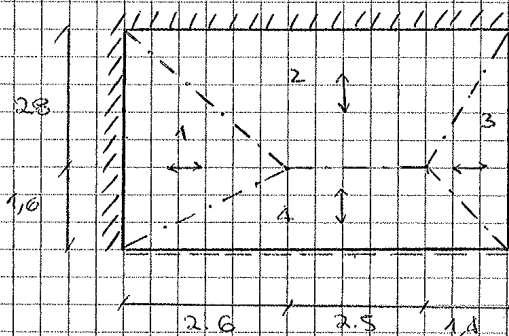
$$m_{d1} = m_y = \frac{13,84}{\frac{4,3}{0,5} + 0,5 \left( \frac{1-4,3}{0,5} \right)} = 15,76 \rightarrow m_{d2} = 3,73$$



Si arma ora la pila come se fosse una trave. Questo vale per verifiche di SLU, però non è garantito un buon comportamento in esercizio.

**ESEMPIO 2:**

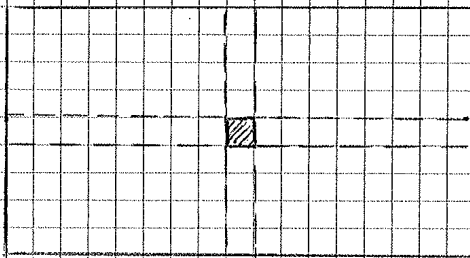
Si consideri una lastra avente dimensioni pari alla precedente, caricata sempre con un carico  $q = 8 \text{ kN/m}^2$ . Il lato sinistro e quello superiore risultano incastrati, mentre gli altri semplicemente incernierati. Carica



quindi la distribuzione delle linee di discontinuità. In pratica, la linea critica sarà la più bassa in piano sul lato superiore ha un maggior carico che quindi assorbe maggior carico.

Se questi tracciano un'area (3) più grande aerei trovano un momento in campata più alto e di conseguenza un momento all'incastro più basso. Bisogna fare in modo che il rapporto tra il momento all'incastro e quello in campata sia compreso tra 1,5 e 3. In questo modo si ottiene un comportamento ottimale in esercizio.

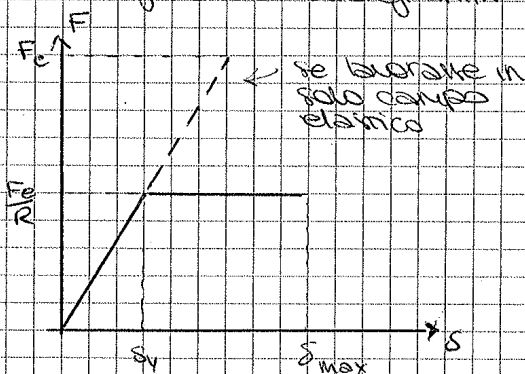
Nel caso di un piano centrale, si individuano le 4 strisce che ottimizzano direttamente il carico sugli estremi.



Le strisce possono essere unite come degli appoggi che dividono la pila in quattro sottoregioni. In ognuna di queste sottoregioni si può risolvere

il problema come appena visto (simple strip method).

(vediamo ora come ultimo aspetto della plasticità), la risposta delle strutture in ambito sismico. Sotto effetto di un'azione sismica non è possibile realizzare un'opera che si comporti solo in campo elastico, sia per motivi economici sia pratici. Questo perché se una struttura, o in generale un oscillatore, rimane in campo elastico è soggetto ad azioni maggiori, mentre se si plasticizza la forza equivalente si riduce. Si assume quindi il seguente diagramma forza - spostamento:



Si osserva che se ammetto che si plasticizza, si riduce la forza sismica.

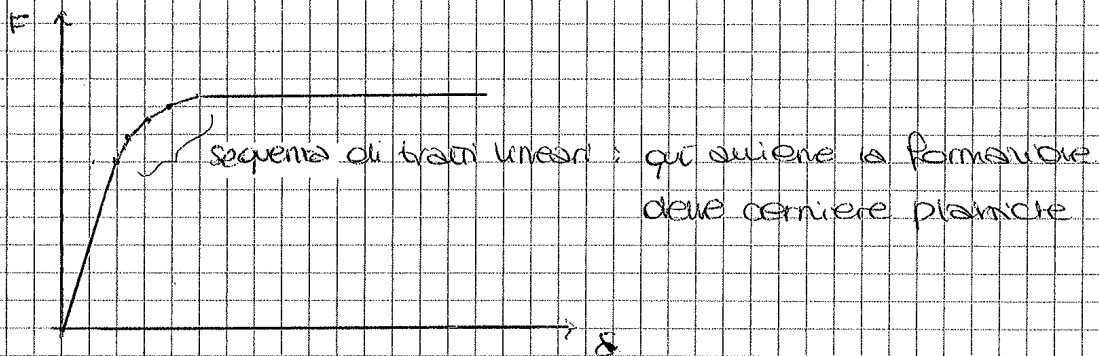
Si definisce il seguente

rapporto:

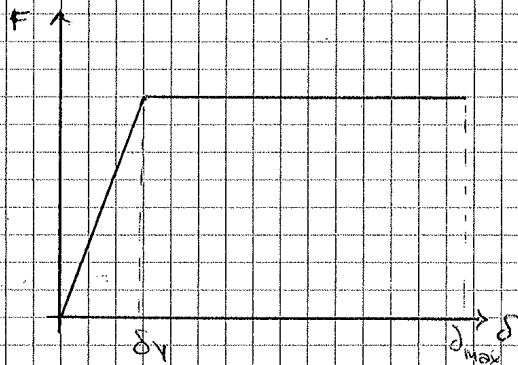
$$\mu = \frac{s_{max}}{s_y}$$

Vediamo meglio come definire il coeff. legato alla duttilità:  $R_{\mu}$ .

Il comportamento reale della struttura è il seguente:

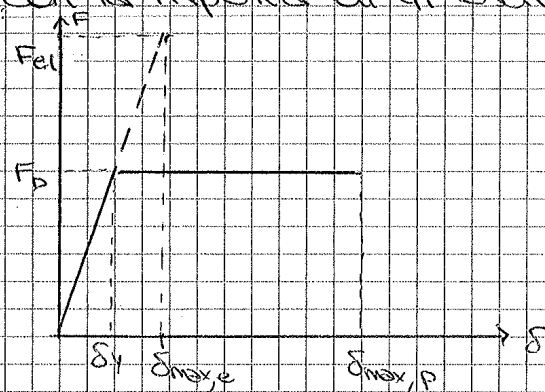


questo però viene approssimato con un comportamento elastico-perfettamente plastico:



in questo grafico si definisce  $\mu = \frac{\delta_{max}}{\delta_y}$  che valuta la duttilità sulla base degli spostamenti.

Il coeff.  $R_{\mu}$  viene valutato confrontando la risposta di un oscillatore elastico ad una sollecitazione sismica con la risposta di un oscillatore elastico-plastico.



$$R_{\mu} = \frac{F_{el}}{F_p}$$

tale coeff. valuta la duttilità sulla base delle forze

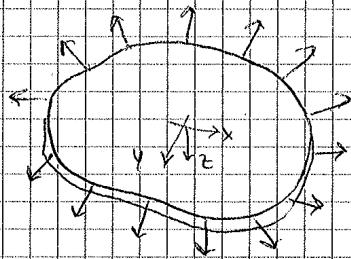
Buone considerazioni a memoria di legare  $\mu$  e  $R_{\mu}$ .

Questa ipotesi lavora bene all'interno del campo dello spettro a velocità costante.

Facendo riferimento al comportamento reale, dobbiamo essere sicuri che raggiunti ad un certo valore di  $F$  non si sviluppi un altro tipo di cedimento, ad esempio di tipo fragile. Dato quindi verificare che la struttura sia effettivamente in grado di sviluppare il c.c.e.  $\mu$  che ho stabilito! Per farlo devo applicare il criterio di gerarchia delle resistenze, che tra tutti i meccanismi possibili ci dice quali sono i più critici e da lì bisogna partire nella progettazione.

## → ELASTICITÀ PIANA

Uno stato tensionale in un punto si dice PIANO se la risultante delle tensioni (vettore tensore) appartiene sempre alla medesima giacitura indipendentemente dalla sezione scelta. Questo comportamento si ha per esempio negli elementi sottili caricati nel loro piano



medio. Lo stato tensionale è piano:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  ( $\sigma_z = 0$ ) mentre lo stato deformativo in genere non sarà piano:  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z (= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y))$

Uno stato deformativo, analogamente, si dice piano se in un punto il vettore spostamento appartiene alla medesima giacitura indipendentemente dalla sezione o direzione prescelta. Questa situazione si verifica per esempio nel caso di elementi cilindrici vincolati agli estremi e caricati ortogonalmente ai meridiani.

Abbiamo due equazioni in tre incognite, quindi il problema è un problema iperstatico. Introduciamo una condizione di compatibilità (su come la materia si deforma). Scrivo il campo delle deformazioni:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Derivo la  $\varepsilon_x$  due volte su  $dy$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

Derivo la  $\varepsilon_y$  due volte su  $dx$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Derivo  $\gamma_{xy}$  su  $dx$  e su  $dy$ :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Sostituendo in quest'ultima equazione le due precedenti si ricava l'eq. di congruenza in termini deformativi:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (2)$$

tale equazione mette in relazione le componenti deformative e si dice che non sono indipendenti tra di loro.

Introduciamo ora le equazioni costitutive elastiche dalle quali ho già ricavato  $\sigma_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

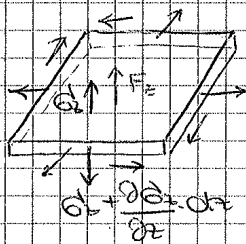
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

Le caratteristiche elastiche,  $E$  e  $\nu$ , del materiale non appaiono nelle equazioni risolventi. Si deduce quindi che il campo tensionale piano non dipende in alcun modo dal materiale, ma solo dalle condizioni al contorno. La stessa cosa ovviamente non si può dire del campo deformativo e degli spostamenti elastici da esso indotti.

→ STATO DEFORMATIVO PIANO

Per quanto riguarda le equazioni indefinite di equilibrio, quelle in direzione  $x$  ed  $y$  sono uguali a quelle valide per lo stato tensionale <sup>piano</sup>, si aggiunge però una terza equazione alla trazione lungo l'asse  $z$ :



$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -F_z$$

questa equazione ci dice che la  $\sigma_z$  o varia sua base del carico  $F_z$  o è costante se  $F_z = 0$ , ma non ci permette

di calcolare il valore della  $\sigma_z$ . Vediamo quindi come ricavarlo.

La condizione di annullamento della dilatazione assiale è la seguente:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y) = 0$$

Da questa condizione si ottiene la tensione assiale in funzione delle altre due tensioni normali:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \rightarrow \text{note } \sigma_x \text{ e } \sigma_y \text{ trova } \sigma_z$$

Inserendo tale espressione nelle equazioni costitutive elastiche si ricava il campo deformativo in funzione delle sole  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ : →

→ x risoluzione problema tensionale piano

→ FUNZIONE di AIRY (o funzione delle tensioni)

Si può introdurre una funzione delle tensioni,  $\phi(x,y)$ , tale che il campo tensionale sia ottenibile per derivazione della sola funzione incognita  $\phi$ :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Se sostituisco queste equazioni in quelle indefinite di equilibrio ottengo che quest'ultime sono identicamente soddisfatte:

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \left( \text{lo stesso si ottiene con la 2. eq. indef. di equilibrio} \right)$$

Se uso  $\phi$ , quindi, non devo imporre le condizioni di equilibrio ma solo la congruenza. Ho quindi un'equazione nella sola incognita  $\phi$ .

Sommando le  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  sopra definite nell'equazione di congruenza ottengo:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\nabla^4 \phi = 0}$$

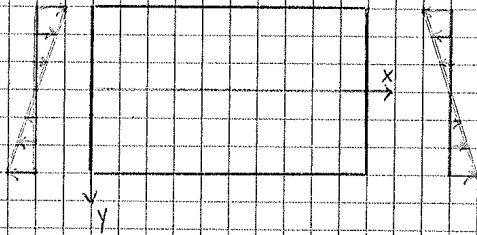
|| Dunque la funzione  $\phi$  per soddisfare l'eq. di congruenza deve essere biharmonica.

|| Per risolvere il problema, dunque, devo trovare una funzione di Airy biharmonica e che soddisfi le condizioni al contorno di tipo statico.

Vediamo alcune funzioni  $\phi$  polinomiali e che tipo di campo sono in grado di descrivere.



La  $e$  varia linearmente lungo  $x$  ed  $y$ . Supponiamo che solo  $d_3$  sia diverso da zero:

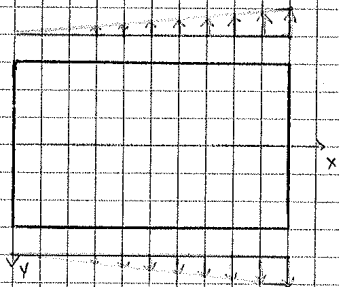


$$e_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

$$e_x = d_3 y$$

↳ varia linearmente lungo  $y$

Supponiamo che solo  $a_3$  sia diverso da zero:

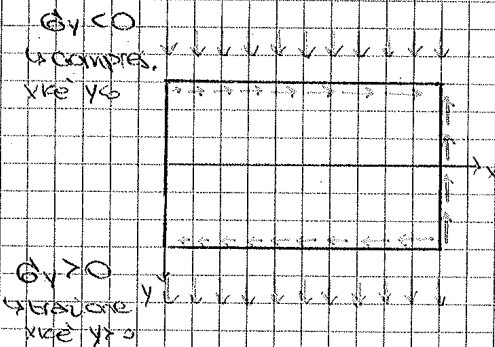


$$e_x = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

$$e_y = a_3 x$$

↳ varia linearmente lungo  $x$ . Per tener conto della presenza di un momento flettente

Supponiamo, infine, che solo  $b_3$  sia diverso da zero:



$$e_x = 0$$

$$e_y = b_3 y \rightarrow \text{varia linearmente lungo } y \text{ ed } e \text{ costante sui lati } \parallel \text{ ad } x.$$

$$\tau_{xy} = -b_3 x \rightarrow \text{varia linearmente lungo } x \text{ ed } e \text{ costante lungo } y.$$

$\tau_{xy} = 0$  lungo  $x = 0$ .

Consideriamo ora una funzione polinomiale di 5° grado:

$$\phi_5 = \frac{a_5}{20} x^5 + \frac{b_5}{12} x^4 y + \frac{c_5}{6} x^3 y^2 + \frac{d_5}{6} x^2 y^3 + \frac{e_5}{12} x y^4 + \frac{f_5}{20} y^5$$

obbiamo verificare se è soddisfatta la congruenza

$$\nabla^4 \phi_5 = 0$$

Se modifico il campo degli spostamenti aggiungendo  $b \cdot y$ :

$$u = a + by$$

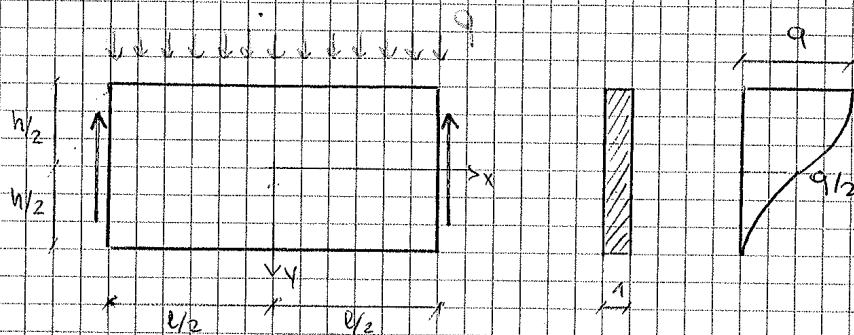
il campo deformativo ( $\epsilon_x$ ) non varia. Analogamente se scrivo:

$$v = c - bx$$

Aggiungere  $by$  o  $bx$  significa aggiungere una rototraslazione rigida al campo degli spostamenti. Dunque se aggiungo una rototraslazione rigida il campo delle deformazioni non varia  $\Rightarrow$  devo aggiungere le condizioni al contorno di tipo cinematico (date dai vincoli)

### → TRAVE-PARETE (DEEP-BEAM)

Si consideri una trave-parete con sezione rettangolare a base unitaria, in cui il rapporto tra lunghezza  $l$  ed altezza  $h$  non sia elevato: non validità della teoria di S. Venant. Sia tale trave appoggiata agli estremi laterali e soggetta ad un carico uniformemente distribuito sul lato superiore:



Vogliamo studiare questo problema con la funzione di Airy. Le condizioni al contorno che dobbiamo soddisfare si i due terminali superiore ed inferiore