



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1092

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Nappo

MATERIA: Fondam. di Meccanica Strutturale + Eserc.

Prof. Cornetti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

INDICE

TEORIA

Appunti delle lezioni
prof. Pietro Cornetti

- Introduzione 1
- Cinematica 4
- Statica 7
- Principio dei lavori virtuali 10
- Analisi delle deformazione 12
- Caratteristiche della sollecitazione interna 19
- Equazioni indefinite per travi rettilinee 21
- Convenzioni di segno 21/24
- Relazione di Cauchy e Cerchi di Mohr 28
- Tensioni e direzioni principali 31
- Equazioni indefinite di equilibrio 33 (per il solido elastico)
- Principio dei lavori virtuali per il corpo deformabile 36
- Potenziale elastico 37
- Corpi elastici, lineari - legge costitutive 39
- Teoremi energetici (Clepyron, Betti) 40
- Legge costitutive elastica, lineari e isotrope (V, E, ν) 43
- Criteri di resistenza tensionali ed energetici (Tresca, Von Mises) 47
- Ipotesi di De Saint Venant 52
- Sforzo normale 54
- Flessione - formule di Navier 56
- Sforzo normale eccentrico 62
- Nucleo centrale d'inerzie 65
- Torsione - formule di Jouransky 66

FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE

Definizione.

Un corpo si definisce rigido se tutti i suoi punti nel corso del moto rimangono a distanze invariate.

Formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi piani.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OP} \quad \forall P, O$$

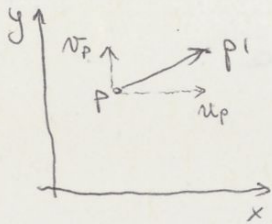
Moto di rototraslazione:

- pura traslazione: $\vec{\omega} = 0 \rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_O$

- pura rotazione attorno al CR: $\vec{v}_C = 0 \rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OC} = 0$

$$\text{ossia } \vec{v}_O = \vec{\omega} \wedge \vec{OC} \quad (\vec{OC} \perp \vec{v}_O)$$

$$\|\vec{OC}\| = \frac{\|\vec{v}_O\|}{\|\vec{\omega}\|}$$



Definiamo $\vec{\eta}_P = \vec{PP}'$ il vettore spostamento

$$\frac{d\vec{s}_P}{dt} = \frac{d\vec{s}_O}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \hat{k} \wedge \vec{OP}$$

Per piccoli spostamenti, $d\vec{s}_P$ si può approssimare come

$$d\vec{s}_P \cong u_P \hat{i} + v_P \hat{j} = \vec{\eta}_P \quad e$$

$$d\vec{s}_O \cong u_0 \hat{i} + v_0 \hat{j} = \vec{\eta}_O \quad e$$

$d\alpha \cong \varphi_z$ allora

$$\vec{\eta}_P = \vec{\eta}_O + \varphi_z \hat{k} \wedge \vec{OP}$$

$$\vec{\eta}_P - \vec{\eta}_O = \varphi_z \hat{k} \wedge \vec{OP}$$

Notazione. Indichiamo con $g = 3 \times n$ i gradi di libertà della struttura;

indichiamo con $v = \sum_i v_i$ i gradi di vincolo della struttura.

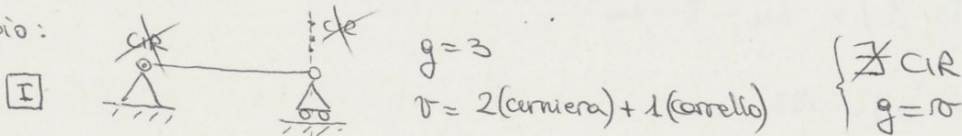
* Se $g > v$ la struttura si dice LABILE ($g-v$) volte o cinematicamente INDETERMINATA; gli spostamenti ammessi sono detti cinematismi;

* Se $g = v$ la struttura si dice ISOSTATICA o cinematicamente DETERMINATA; la struttura è bloccata, fissa;

* Se $g < v$ la struttura si dice IPERSTATICA o cinematicamente IMPOSSIBILE; ossia i vincoli sono sovrabbondanti.

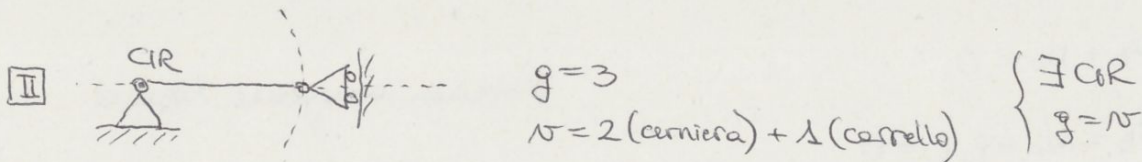
Eccezioni per MALDISPOSIZIONE VINCOLARE

Esempio:



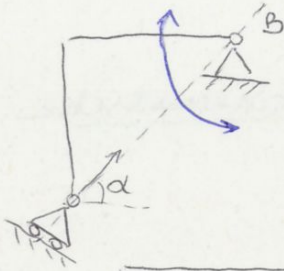
Il CIR deve appartenere sia alla retta-asse verticale del carrello che alla cerniera, quindi non può esistere un CIR - centro di rotazione istantanea.

La struttura è bloccata \Rightarrow STRUTTURA ISOSTATICA.



Il CIR deve appartenere sia alla retta-asse perpendicolare al piano di scorrimento del carrello che alla cerniera, quindi il punto di intersezione è proprio nella cerniera. Esiste un CIR - centro di istantanea rotazione e la struttura si muove (può ruotare) \Rightarrow STRUTTURA 1-volta LABILE.

Se $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, allora la struttura è isostatica.



Se $\alpha = \frac{\pi}{4}$, allora $\exists CIR \equiv B$ e la struttura può ruotare

CEDIMENTI VINCOLARI

Condizioni di vincolo:

$$[C] \begin{Bmatrix} \eta_0 \\ \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

$n \times g \quad g \times 1 \quad n \times 1$

$[C]$ matrice cinematica

$\begin{Bmatrix} \eta_0 \end{Bmatrix}$ vettore dei parametri lagrangiani da un punto qualsiasi

$\begin{Bmatrix} \eta_x \end{Bmatrix}$ vettore dei cedimenti vincolari

$\begin{Bmatrix} \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$ se non ci sono cedimenti vincolari

Se $n=g$ basta risolvere il determinante

Definiamo $[C]$ la matrice cinematica

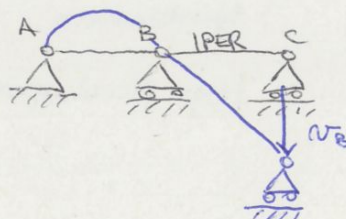
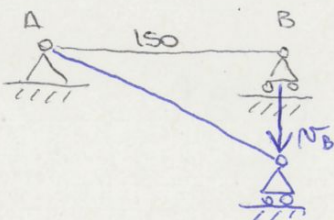
- Se $n < g$ il sistema ha ∞^{g-n} soluzioni e la struttura è labile o cinematicamente indeterminata.
- Se $n = g$ il sistema ha un'unica soluzione e la struttura è isostatica o cinematicamente determinata.
- Se $n > g$ il sistema non ha soluzione e la struttura è iperstatica o cinematicamente ~~determinata~~ impossibile.

$\begin{Bmatrix} \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ unica soluzione è la soluzione nulla (non ci sono cedimenti)

$\begin{Bmatrix} \eta_x \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ non c'è soluzione

Le strutture isostatiche possono assorbire i cedimenti vincolari attraverso dei moti rigidi, mentre le strutture iperstatiche no.

Esempio:



Corollario.

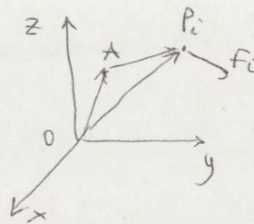
Se $C_{ij} \equiv C_j$ e $C_{ij} \neq C_i$, allora i non si muove.

STATICA

Equazioni cardinali nella statica

Affinché un corpo soggetto a forze \vec{F}_i e momenti \vec{M}_j sia in equilibrio, devono essere soddisfatte le equazioni cardinali della statica; devono cioè essere nullo sia la risultante delle forze, quanto il momento risultante (rispetto a un polo O qualsiasi).

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_O = \sum_{j=1}^m \vec{M}_j + \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i = 0 \end{cases}$$



$$\vec{AP}_i = \vec{AO} + \vec{OP}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_i - \sum \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{M}_i + \vec{AO} \wedge \sum \vec{F}_i + \sum \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_i$$

$\vec{R} = 0$

Condizione di equilibrio.

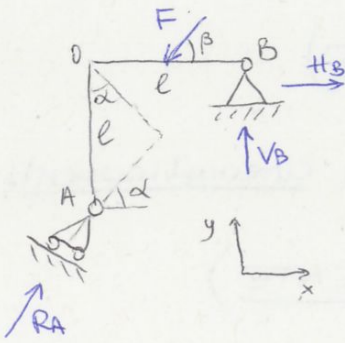
È la condizione necessaria e sufficiente affinché due sistemi di forze siano equivalenti, cioè si possa passare da uno all'altro facendo scorrere le forze lungo le loro rette d'azione e sommandole con la regola del parallelogramma, e che essi abbiano uguale risultante e uguale momento risultante rispetto a un polo O qualsiasi.

Riduzione ad un punto.

Qualunque sistema di forze è equivalente alla risultante applicata in un punto arbitrario O più una coppia di momento uguale al momento risultante rispetto a O del sistema dato.

Studio algebrico delle statica:

Equazioni cardinali della statica:



$$\begin{cases} \rightarrow R_A \cos \alpha + H_B - F \cos \beta = 0 \\ \uparrow R_A \sin \alpha + V_B - F \sin \beta = 0 \\ \odot R_A l \cos \alpha + V_B \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} \sin \beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} g=3 \\ r=3 \end{matrix} \Rightarrow \text{unica soluzione}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 1 \\ l \cos \alpha & 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_A \\ H_B \\ V_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F \cos \beta \\ -F \sin \beta \\ -F \frac{l}{2} \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[A] \{x\} + \{F_0\} = \{0\}$$

[A] matrice statica

{x} vettore reazioni vincolari

{F₀} vettore forze esterne ridotte al polo 0

Dualità statico-cinematica:

$$[A] = [C]^T$$

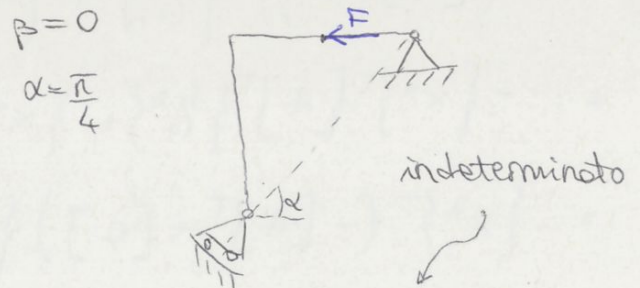
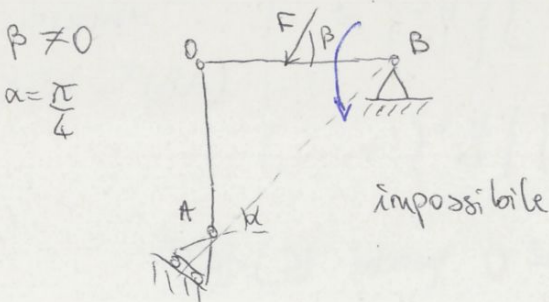
~ PROPRIETÀ: $\det A = \det C$

$$\det A = 0 \iff \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ unica soluzione}$$

$$\text{Se } \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \begin{cases} \beta \neq 0 \text{ impossibile} \\ \beta = 0 \text{ indeterminato} \end{cases}$$

Teorema di Rouché-Capelli

infatti la seconda e la terza riga sono linearmente dipendenti



il sistema non si muove, ma non si riescono a calcolare le reazioni vincolari

Teorema degli spostamenti virtuali.

↳ Corollario/Conseguenza PLV

* Sia (a) un sistema qualsiasi di forze e reazioni vincolari: $\{F_0^a\}, \{x^a\}$.

* Sia (b) un sistema congruente di spostamenti e cedimenti vincolari:

$$[C] \{v_0^b\} = \{v_x^b\}. \quad (*)$$

* Sia $\mathcal{L} = 0$ per ipotesi.

→ Allora il sistema (a) è equilibrato.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{F_0^a\}^T \{v_0^b\} + \{x^a\}^T \{v_x^b\} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \{F_0^a\}^T \{v_0^b\} + \{x^a\}^T [C] \{v_0^b\} = \end{aligned}$$

$$= \left(\{F_0^a\}^T + \{x^a\}^T [C] \right) \{v_0^b\} \stackrel{1}{=}$$

$$= \left(\{F_0^a\}^T + ([C]^T \{x^a\})^T \right) \{v_0^b\} \stackrel{2}{=}$$

$$= \left(\{F_0^a\} + [C]^T \{x^a\} \right)^T \{v_0^b\} =$$

$$= \left([A] \{x^a\} + \{F_0^a\} \right)^T \{v_0^b\} = 0 \text{ per ipotesi}$$

$$\Rightarrow [A] \{x^a\} + \{F_0^a\} = \{0\} \Rightarrow \text{il sistema (a) è equilibrato.}$$



PROPRIETÀ DELLE
MATICI:

$$^1 A^T B = (B^T A)^T$$

$$^2 (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P (x_Q - x_P) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P (y_Q - y_P) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P (z_Q - z_P) + \dots$$

$$v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P (x_Q - x_P) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P (y_Q - y_P) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_P (z_Q - z_P) + \dots$$

$$w_Q = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_P (x_Q - x_P) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_P (y_Q - y_P) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_P (z_Q - z_P) + \dots$$

$$\boxed{\{v_Q\} = \{v_P\} + [J_P] \{Q-P\} + \dots}$$

ESPRESSIONE GENERALE DEL CORPO DEFORMABILE

dove $[J_P]$ è la matrice jacobiana:

$$[J_P] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Poiché $[J_P]$ è una matrice quadrata, la si può scrivere come somma di una

matrice simmetrica e una antisimmetrica. Ossia,

vale la seguente identità:

$$[J_P] = \frac{1}{2}([J_P] + [J_P]^T) + \frac{1}{2}([J_P] - [J_P]^T)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{3 \times 3} = \mathcal{A}^{3 \times 3} \oplus \mathcal{S}^{3 \times 3} \\ \mathcal{A} = \text{spazio delle matrici antisimmetriche} \\ \mathcal{S} = \text{spazio delle matrici simmetriche} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A^T = -A \\ A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A^T = A \end{array} \right.$$

La matrice antisimmetrica $\frac{1}{2}([J_P] - [J_P]^T)$ corrisponde alla matrice

$[\Psi_P]$ legata alle rotazioni rigide del corpo.

La matrice simmetrica $\frac{1}{2}([J_P] + [J_P]^T)$ viene indicata come

$[\varepsilon_P]$ ed è legata alle deformazioni del corpo.

È quindi possibile scrivere l'espressione generale del corpo deformabile

$$\boxed{\{v_Q\} = \{v_P\} + [\Psi_P] \{Q-P\} + [\varepsilon_P] \{Q-P\}}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 Traslazione rotazione deformazione

La dilatazione specifica lungo l'asse x vale:

$$\epsilon_x = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P dx + dx \right] - dx}{dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P$$

La dilatazione specifica lungo l'asse y vale:

$$\epsilon_y = \dots = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_P$$

Analogamente, estendendo la dilatazione allo spazio si ha:

$$\epsilon_z = \dots = \frac{\partial w}{\partial z}$$

NOTA: per piccole deformazioni, le dilatazioni $\epsilon_i \ll 1$.

Gli scorrimenti angolari $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ rappresentano le diminuzioni o variazioni negative che gli angoli retti subiscono nella deformazione. Per le direzioni X e Y si ha infatti:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_P}_{\alpha} \frac{dy}{dx} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P}_{\beta} \frac{dx}{dx} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P$$

NOTA: per piccole deformazioni, gli scorrimenti angolari $\gamma_{ij} \ll 1$

Pura deformazione.

$$\{ \eta_a \} = [\epsilon_P] \{ a-P \}$$

Attraverso un endomorfismo simmetrico si può normalizzare $\{ a-P \}$:

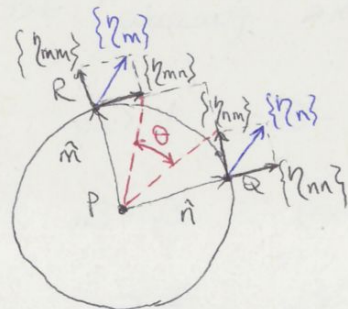
$$\boxed{ \{ \eta_n \} = [\epsilon] \{ n \} } \quad (*)$$

Dilatazioni:

$$\epsilon_n = \eta_{nn} = \hat{n} \cdot \vec{\eta}_n = \{ n \}^T \{ \eta_n \} \stackrel{(*)}{=} \{ n \}^T [\epsilon] \{ n \}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \{ n \}^T [\epsilon] \{ n \}$$

$$\epsilon_m = \dots = \{ m \}^T [\epsilon] \{ m \}$$



L'equazione caratteristica sarà del tipo:

$$E_n^3 - J_I E_n^2 - J_{II} E_n - J_{III} = 0$$

dove J_I, J_{II}, J_{III} si chiamano invarianti del tensore di deformazione, poiché non variano a seconda del sistema di riferimento.

$$\left\{ \begin{array}{l} J_I = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \text{ (traccia)} \\ J_{II} = \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz}\right)^2 - \epsilon_x \epsilon_z - \epsilon_x \epsilon_y - \epsilon_y \epsilon_z \\ J_{III} = \det [E] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A\vec{n} = \lambda\vec{n} \text{ dove } \lambda \text{ non dipende} \\ \text{delle basi scelte per descrivere} \\ A \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

Poiché $E_n [11]$ è simmetrica, si otterranno tre soluzioni reali

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathbb{R} \text{ dette } \underline{\text{DILATAZIONI PRINCIPALI}}$$

che corrispondono agli autovalori del tensore $[E]$. $A\vec{n} = \lambda\vec{n}$

Se si sostituiscono gli autovalori nelle relazione $[E]\{n\} = \epsilon_n \{n\}$,
 si ottengono gli autovettori $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$ detti $([E] - \epsilon_n [I])\{n\} = \{0\}$

DIREZIONI PRINCIPALI delle deformazioni.

Poiché $[E_n]$ è simmetrica, gli autovettori sono tra loro ORTOGONALI.

Si distinguono tre casi:

3 direzioni principali

1) $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \rightarrow \{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$ distinti e ortogonali;

2) $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \rightarrow \{n_3\}$ direzione principale con le ∞^1 direzioni ad esse ortogonali;

3) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \rightarrow \infty^2$ direzioni tutte principali.

Equazioni di compatibilità: pag. 216

Per definire le deformazioni occorre rispettare le eq. di compatibilità, poiché le deformazioni sono legate agli spostamenti. Avendo tre componenti per gli spostamenti e sei per le deformazioni, posso ricavarmi le seconde dalle prime ma non viceversa. Le deformazioni non sono indipendenti tra di loro.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}; \dots \left\{ \begin{array}{l} \vec{\gamma}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

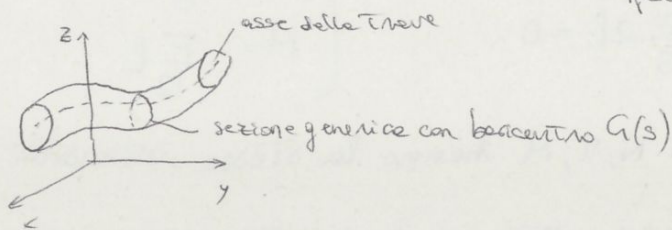
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \left\{ \begin{array}{l} [\epsilon]: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Caratteristiche della sollecitazione interna.

Definizione.

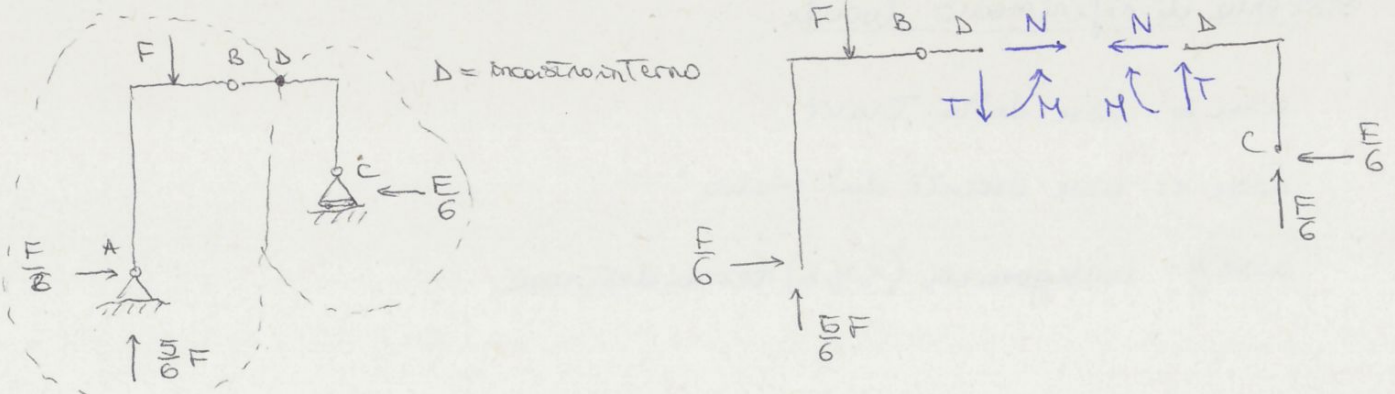
Una trave è un solido generato da una figura piana S , detta sezione, che si muove nello spazio mantenendosi ortogonale alle traiettorie descritte dal suo baricentro.



Ipotesi: $l \gg s$

dove l è la lunghezza delle trave

L'equilibrio si deve mantenere per qualsiasi punto della trave, che si può vedere come un incastro interno:



Ossia, quando:

$$\int_{z_a}^{z_b} \left[\frac{dM}{dz} - \frac{dT}{dz} \cdot z - T \frac{dz}{dz} - m - qz \right] dz = 0$$

non si avranno casi di momenti concentrati

$$\int_{z_a}^{z_b} \left[\frac{dM}{dz} - \left(\frac{dT}{dz} + q \right) z - T - m \right] dz = 0 \iff \boxed{\frac{dM}{dz} - T + m = 0} \quad (3)$$

$\rightarrow = 0$ per (2)

$$\frac{dN}{dz} = -p(z) \quad \text{NOTA}_1: \text{ il taglio è la derivata del momento}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= -q(z) \\ \frac{dM}{dz} &= T \end{aligned} \right\} \frac{d^2M}{dz^2} = -q(z)$$

NOTA₂: per disegnare N, T, M bisogna imporre le C.C. (condizioni al contorno)

Proprietà dei diagrammi delle sollecitazioni:

- 1) Dove $T=0 \Rightarrow M$ è max/min;
- 2) Se $q=0 \Rightarrow \frac{dM}{dz} = T$ è costante ed M è lineare;
- 3) Se $q = \text{costante} \Rightarrow T$ è lineare e M è parabolico;

la concavità è stabilita da q carico esterno

$$\frac{d^2M}{dz^2} = -q \begin{cases} q \text{ verso il basso } \Downarrow \Downarrow \Downarrow \\ q \text{ verso l'alto } \Uparrow \Uparrow \Uparrow \end{cases} \text{ ecc. } \left(\Leftarrow \Leftarrow \Leftarrow \right)$$

- 4) dove q è discontinuo, $\Rightarrow T$ ha un punto angoloso;
- 5) in presenza di forze concentrate $F \Rightarrow T$ è discontinuo con salto pari a F e M ha un punto angoloso;
- 6) in presenza di coppie concentrate $m \Rightarrow M$ è discontinuo

OSSERVAZIONE.

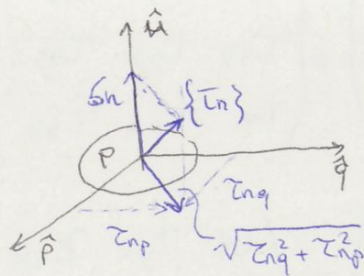
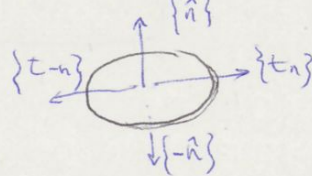
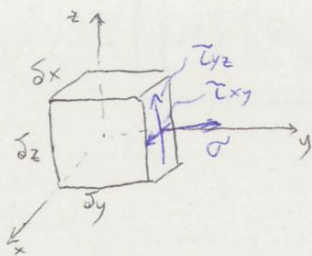
Il vettore tensione $\{t_n\}$ si ha solo se ci sono carichi non concentrati.

Altrimenti ΔR è finito \Rightarrow per $\Delta R \rightarrow 0, \{t_n\} \rightarrow \infty$

$$\{t_n\} = T_{nx} \hat{i} + T_{ny} \hat{j} + T_{nz} \hat{k} \text{ scomposto nel S.R globale } (x, y, z)$$

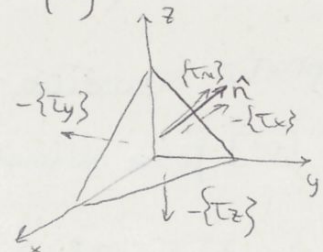
Scomposizione di $\{t_n\}$ nel sistema di riferimento locale:

$$\{t_n\} = \underbrace{\sigma_n \hat{n}}_{\text{componente normale}} + \underbrace{\tau_{np} \hat{p} + \tau_{nq} \hat{q}}_{\text{componenti tangenziali}} \quad \leftarrow \text{normale alla superficie}$$



$$\{t_n\} d\Omega_n - \{t_x\} d\Omega_x - \{t_y\} d\Omega_y - \{t_z\} d\Omega_z = \{0\}$$

area faccine inclinate



Per scrivere l'equilibrio delle parti e dei momenti, bisogna moltiplicare la tensione per l'area. Si ottiene così le forze di pressione che crea la tensione.

Riconosciamo che:

$$d\Omega_x = d\Omega_n \cos(\hat{n}\hat{x}) = n_x d\Omega_n$$

$$\Rightarrow \hat{n}\hat{x} = \cos \hat{n}\hat{x} = n_x$$

$$d\Omega_y = d\Omega_n \cos(\hat{n}\hat{y}) = n_y d\Omega_n$$

componente di \hat{n} lungo x

$$d\Omega_z = d\Omega_n \cos(\hat{n}\hat{z}) = n_z d\Omega_n$$

Quindi:

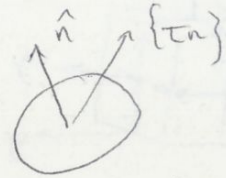
$$\{t_n\} d\Omega_n = \{t_x\} n_x d\Omega_n + \{t_y\} n_y d\Omega_n + \{t_z\} n_z d\Omega_n$$

$$\{t_n\} = \{t_x\} n_x + \{t_y\} n_y + \{t_z\} n_z$$

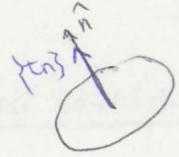
Tensioni principali

Esiste \hat{n} tale che $\{\tau_n\} \parallel \{n\}$?

Relazione generale: $\{\tau_n\} = [\sigma] \{n\}$
 isomorfismo simmetrico
 di \mathbb{R}^3



Relazione di parallelismo: $\{\tau_n\} = \alpha_n [I] \{n\}$
 $\hat{=}$ Trovare gli autovalori e
 autovettori



$$([\sigma] - \alpha_n [I]) \{n\} = \{0\}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_x - \alpha_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \alpha_y - \alpha_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \alpha_z - \alpha_n \end{vmatrix} = 0$$

INVARIANTI

$$\begin{cases} J_I = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z \\ J_{II} = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_z + \alpha_x \alpha_z) \\ J_{III} = \det [\sigma] \end{cases}$$

Equazione caratteristica:

$$\alpha_n^3 - J_I \alpha_n^2 - J_{II} \alpha_n - J_{III} = 0$$

Soluzioni: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ autovalori di $[\sigma]$, dette TENSIONI PRINCIPALI

Sostituendo gli autovalori si ottengono gli autovettori:

$\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$ detti DIREZIONI PRINCIPALI delle tensioni

Si distinguono tre casi:

1) $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \Rightarrow \{n_1\} \perp \{n_2\} \perp \{n_3\}$ direzioni principali

2) $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3 \Rightarrow \{n_3\}$ è direzione principale con le α_1 direzioni
 ad esso ortogonali

3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \Rightarrow \infty^2$ direzioni tutte principali

↳ STATO IDROSTATICO, caso dei liquidi perfetti.

Ossia non ci sono tensioni tangenziali

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = [\sigma]$$

(Ad esempio un solido immerso in un fluido è soggetto alle stesse pressioni lungo ogni direzione



Soluzione analitica del sistema: metodo di Cramer

$$n_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_n^2 + \tau_n^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_n & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_n^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_n & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_n^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)} =$$

1 proprietà dei determinanti per la somma

$$= \frac{(\alpha_n - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_n - \alpha_3) + \tau_n^2(\alpha_2 - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)} = \frac{(\alpha_n - \alpha_2)(\alpha_n - \alpha_3) + \tau_n^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} \geq 0$$

² devo imporre che sia positivo perché n_1 è al quadrato

$$n_2^2 = - \frac{(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_3) + \tau_n^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)} \geq 0$$

se scelgo $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$,

ottergo l'equazione di

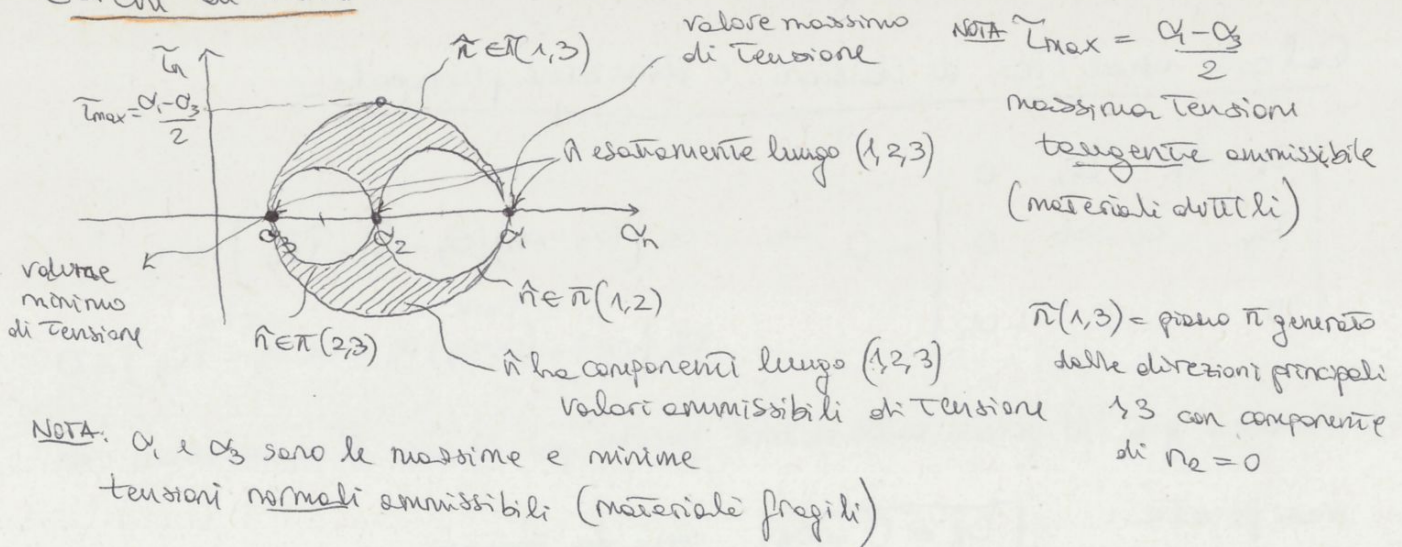
$$n_3^2 = \frac{(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2) + \tau_n^2}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)} \geq 0$$

tre circonferenze:

$$\begin{cases} (\alpha_n - \alpha_2)(\alpha_n - \alpha_3) + \tau_n^2 \geq 0 & C_1 \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}, 0 \right) & R_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} \\ (\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_3) + \tau_n^2 \leq 0 & C_2 \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}, 0 \right) & R_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} \\ (\alpha_n - \alpha_2)(\alpha_n - \alpha_1) + \tau_n^2 \geq 0 & C_3 \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, 0 \right) & R_3 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \end{cases}$$

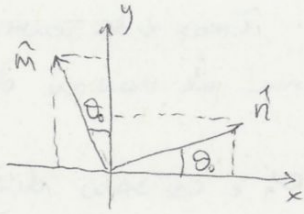
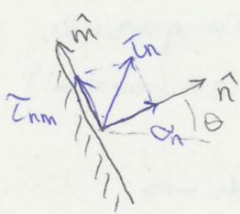
Piano $\alpha_3 = 0$

Cerchi di Mohr:



$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 4\tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Calcolo \hat{n}



$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \hat{m} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

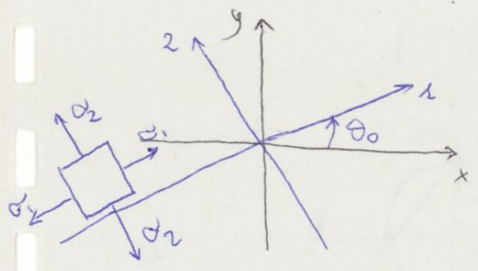
Affinché \hat{n} sia direzione principale τ_{nm} deve essere nullo, ossia:

$$\tau_{nm} = \hat{m} \cdot \vec{T} \hat{n} = \{m\}^T \{Tn\} = \{m\}^T [C] \{n\} = 0 \quad \text{Sostituendo:}$$

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{pmatrix} =$$

$$= -\sigma_x \sin\theta \cos\theta - \tau_{xy} \sin^2\theta + \tau_{xy} \cos^2\theta + \sigma_y \sin\theta \cos\theta = (\sigma_y - \sigma_x) \frac{\sin 2\theta}{2} + \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

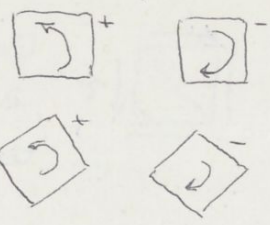
$$\Rightarrow \tan 2\theta = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} \cdot 2 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \theta_0$$



Se $\sigma_x > \sigma_y \Rightarrow \sigma_1 > \sigma_2$

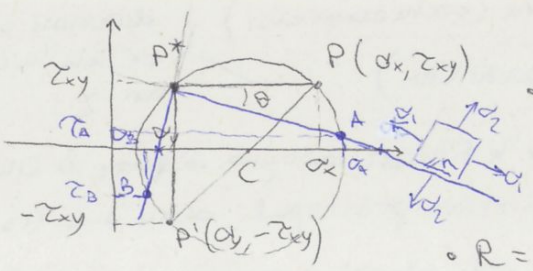
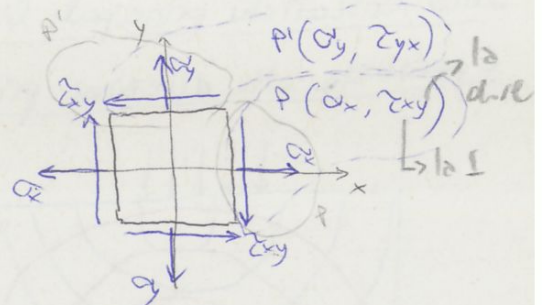
Se $\sigma_x < \sigma_y \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2$

Se $\sigma_x = \sigma_y \Rightarrow \theta_0 = \pm \frac{\pi}{4}$



Convenzione.

- $\sigma > 0$ se di trazione;
- $\tau > 0$ se fa ruotare l'elemento in senso ORARIO



$$C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$$

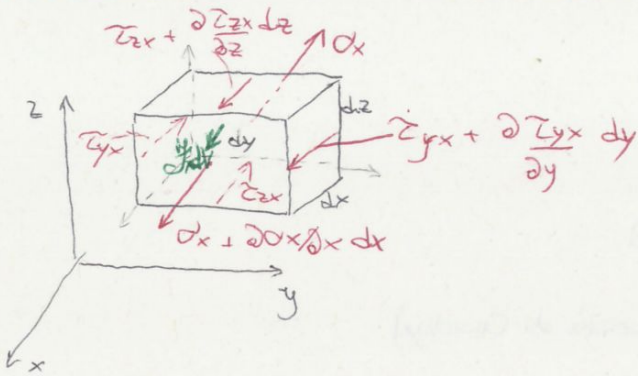
è il punto medio di PP' , nonché il centro del cerchio

$$R = CP' = CP = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

• P^* = polo: traccia da P (l'orizzontale) e da P' la verticale

• Le componenti di $\vec{T} \hat{n}$ sono date dalle coordinate del punto di intersezione tra il cerchio e la retta per P^* e parallela a \hat{n} . $\vec{T} \hat{n} = \begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau_n \end{pmatrix}$

Equazioni indefinite di equilibrio - SOLIDO ELASTICO



1° pedice: derivazione
 2° pedice: direzione
 γ : forze di volume

Dimostrazione per via analitica

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \gamma_x dx dy dz = 0$$

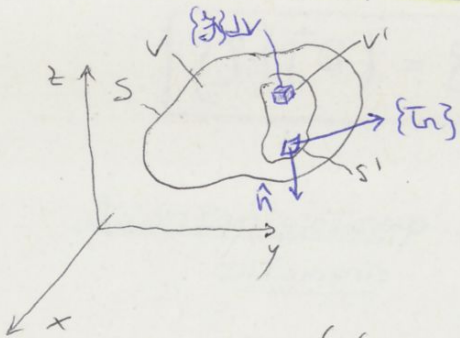
1°)
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \gamma_x = 0$$

ripetendo il procedimento per σ_y e σ_z si ha:

2°)
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \gamma_y = 0$$

3°)
$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \gamma_z = 0$$

Dimostrazione per via integrale



TEOREMA DI GAUSS

$$\vec{F} = f(x, y, z) \hat{i} + g(x, y, z) \hat{j} + h(x, y, z) \hat{k}$$

$$\int_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) dS = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV$$

$$\int_S (f_nx + g_ny + h_nz) dS = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dV$$

RELAZIONE DI CAUCHY

$$\{T_n\} = [C] \{n\}$$

Come varia la Tensione per effetto delle forze di volume.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \\ Y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3×6 6×1 3×1 3×1

$[a]^T \{ \sigma \} + \{ Y \} = \{ 0 \}$

 $\forall P \in V$

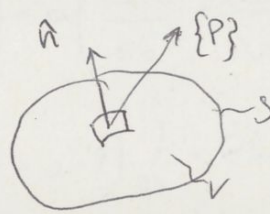
Equazioni statiche: $[A] \{ x \} + \{ F_0 \} = \{ 0 \}$ $\{ x \} \leftrightarrow \{ \sigma \}$

Equazioni cinematiche: $[C] \{ \eta_0 \} = \{ \eta_x \}$ $\{ \eta \} \leftrightarrow \{ \epsilon \}$

Dualità statico-cinematica: $[A]^T = [C]$

Come varia la Tensione per effetto delle forze di superficie.

$\{ T_n \} = \{ P \} \quad \forall P \in S$



Cauchy: $[a] \{ n \} = \{ P \}$

- 1°) $\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = P_x$
- 2°) $\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = P_y$
- 3°) $\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = P_z$

$[N]^T \{ \sigma \} = \{ P \}$

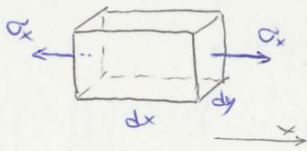
$$\begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

Condizioni di equivalenze al contorno

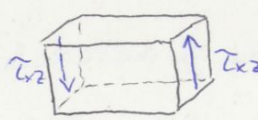
$$L_{r, est} = \int_V \{\sigma_b\}^T \{\epsilon_b\} dV + \int_S \{P_b\}^T \{\eta_b\} dS = \int_V \{\sigma_a\}^T \{\epsilon_b\} dV = L_{r, int}$$

OSSERVAZIONE

Se lo spostamento congruente è rigido: $\{\epsilon_b\} = \{0\} \Rightarrow L_{r, int} = 0 \Rightarrow L_{r, est} = 0$



$$\alpha_x dy dz \epsilon_x dx = \alpha_x \epsilon_x dV$$

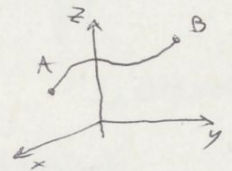


$$\tau_{xz} dy dz \gamma_{xz} dx = \tau_{xz} \gamma_{xz} dV$$

Campi conservativi.

Un campo di forza $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ è detto conservativo e la forma differenziale $\vec{F} \cdot d\vec{p}$ è detta esatta ($d\vec{p} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$) se esiste una funzione scalare $f(x, y, z)$ detta potenziale, tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = F_z. \quad \text{Allora}$$



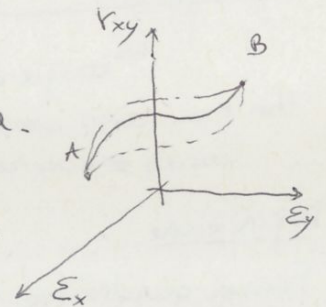
$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{p} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{p} = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

Comportamento del materiale.

Legame tra tensioni e deformazioni a seconda del materiale.

$$\{\epsilon_A\} \rightarrow \{\epsilon_B\} \quad L_{A \rightarrow B} = \int_{\epsilon_A}^{\epsilon_B} \{\sigma\}^T \{d\epsilon\} = L_{A \rightarrow B}$$



Definizione.

Un corpo è detto ELASTICO (conservativo) se il lavoro di deformazione non dipende dal percorso di carico. Ossia se esiste $\Phi = \Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$

tale che $\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} = \sigma_x, \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y} = \sigma_y, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz}$. Φ è detto

potenziale elastico.

Corpi elastici lineari.

Affinché il legame $\{\sigma\} \leftrightarrow \{\varepsilon\}$ sia lineare, Φ deve essere una forma quadratica nelle componenti di deformazione -

Elasticità lineare $\rightarrow \Phi = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\}$ dove $[H]$ è una matrice simmetrica di coefficienti 6×6 con 21 termini liberi (15 + 6 diagonali) che caratterizza il materiale.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \vdots \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} \end{pmatrix} = [H] \{\varepsilon\} = \{\sigma\} \quad \begin{array}{l} \text{legame lineare} \\ \{\sigma\} \leftrightarrow \{\varepsilon\} \end{array}$$

$$\rightarrow \{\varepsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [H]^{-1} \{\sigma\}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \vdots \\ \gamma_{zy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{zy}} \end{pmatrix} = [H]^{-1} \{\sigma\} = \{\varepsilon\}$$

Struttura 3 volte strettamente iperstatica

$$\begin{cases} [\sigma]^T \{\sigma\} + \{Y\} = \{0\} \\ \{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\} \\ \{\varepsilon\} = [\sigma] \{\eta\} \end{cases}$$

$$[\sigma]^T \{\sigma\} = ([\sigma]^T [H] [\sigma]) \{\eta\} = -\{Y\}$$

introduco l'operatore di Lamé:

$$[L] = [\sigma]^T [H] [\sigma] \Rightarrow$$

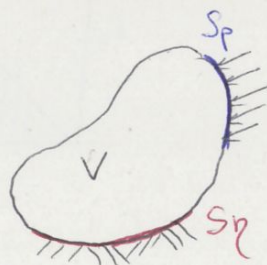
$$[L] \{\eta\} = -\{Y\} \quad \forall P \in V$$

Condizioni al contorno:

$$\{\eta\} = \{\eta_0\} \quad \forall P \in S_\eta$$

$$[X]^T \{\sigma\} = \{P\} \quad \forall P \in S_P$$

$$([X]^T [H] [\sigma]) \{\eta\} = \{P\}$$



Teorema di Betti

Sancisce l'uguaglianza tra i lavori mutui.

Se ho un sistema formato dalla somma di due sistemi (a) e (b), allora esiste un lavoro dato dall'influenza di entrambi i sistemi.

$$(a+b) \rightsquigarrow L_{a+b} = L_{a\text{ def}} + L_{b\text{ def}} + L_{ab} \quad \text{dove:}$$

$$\begin{cases} L_{a\text{ def}} = \frac{1}{2} \int_V \{y_a\}^T \{z_a\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_a\}^T \{z_a\} dS \\ L_{b\text{ def}} = \frac{1}{2} \int_V \{y_b\}^T \{z_b\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_b\}^T \{z_b\} dS \\ L_{ab} = \frac{1}{2} \int_V \{y_a\}^T \{z_b\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_a\}^T \{z_b\} dS \end{cases}$$

$$(b+a) \rightsquigarrow L_{b+a} = L_{b\text{ def}} + L_{a\text{ def}} + L_{ba} \quad \text{dove:}$$

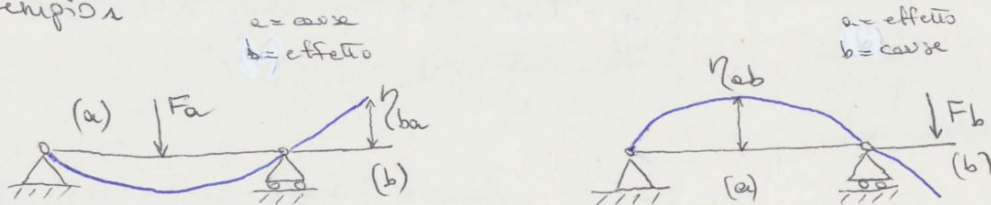
$$L_{ba} = \frac{1}{2} \int_V \{y_b\}^T \{z_a\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_b\}^T \{z_a\} dS$$

L_{ab} è il lavoro che le forze di (a) compiono sul sistema (b);
 L_{ba} è il lavoro che le forze di (b) compiono sugli spostamenti di (a).

$$\left. \begin{aligned} L_{a+b} &= L_{b+a} \\ L_a + L_b + L_{ab} &= L_b + L_a + L_{ba} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{L_{ab} = L_{ba}}$$

Se $L_{ab} = L_{ba} = 0$ i sistemi (a) e (b) sono detti energeticamente ortogonali.

Esempio 1



T. di Betti $\boxed{F_a z_{ab} = F_b z_{ba}}$ se $F_a = F_b = 1 \Rightarrow z_{ab} = z_{ba}$ cedevolezza

Esempio 2



Legge costitutiva elastica, lineare, isotropa

C_1, C_2 sono parametri del materiale e non dipendono dalla direzione.

Definiamo $G_1 := \frac{1}{2E}$ e $G_2 := \frac{1}{2G}$ dove $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ $\rightarrow C_2 = \frac{1+\nu}{E}$

L'equazione quindi diventa: $\Phi = \frac{1}{2E} J_I^2 + \frac{1}{2G} J_{II}$.

I coefficienti della matrice $[H]$ dipendono da 2λ e 2μ (E, G)

$$\Phi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) + \frac{1}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) +$$

$$- \frac{1+\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) =$$

$$\Phi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

Φ è una forma quadratica nelle componenti della tensione.

NOTA: scambiando x con y o y con z o x con z , Φ non cambia valore (\rightarrow isotropia)

Quindi possiamo scrivere le componenti delle deformazioni come:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x - \nu \sigma_z)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xz}} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

equazioni costitutive

ν è definito il coefficiente di Poisson o di contrazione trasversale

E è definito il modulo di Young o di elasticità normale e rappresenta

la rigidità del materiale: tanto più E è grande \rightarrow ϵ è piccolo

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

E : coefficiente angolare di σ_x lineare

$E \rightarrow \infty \sim$ corpo rigido

$$[\nu] = \begin{bmatrix} -\epsilon_y \\ \epsilon_x \end{bmatrix} = [\text{adim.}] \text{ numero puro}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{N}{m^2} \end{bmatrix} = [\text{adim.}] \text{ numero puro}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N}{m \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N}{m^2} \end{bmatrix}$$

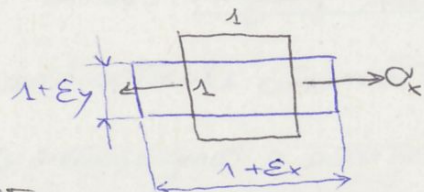
Dilatazione volumica

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} + (-\nu \frac{\sigma_x}{E}) - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{(1-2\nu)}{E} \sigma_x$$

Per $0 < \nu < \frac{1}{2}$

$\epsilon_y < 0$ (contrazione lungo y)

se tiro da un lato restringo l'altro



$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\nu)}{E} \sigma_x \quad \begin{cases} \frac{\Delta V}{V} < 0 & \text{CONTRAZIONE (diminuisce il volume)} \\ \frac{\Delta V}{V} > 0 & \text{DILATAZIONE (aumenta il volume)} \end{cases}$$

$\frac{\Delta V}{V}$ e σ_x sono concordi $\forall \nu < \frac{1}{2}$

Se $\nu \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} \rightarrow 0 \forall \sigma_x$: il volume rimane costante per qualsiasi

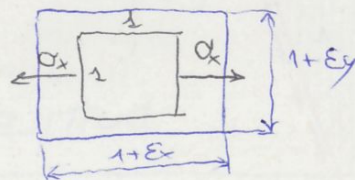
tensione (deformazione a volume costante, esempio nelle gomme)

Per $-1 < \nu < 0$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} > 0, \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} > 0$$

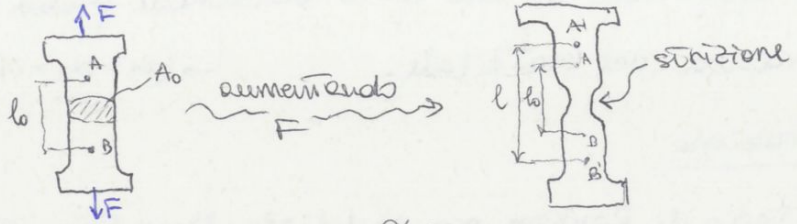
dilatazione lungo x e lungo y : se tiro da un lato si dilata anche l'altro

esempio nel stagno, zinco



Attraverso una macchina che controlla i parametri di F e Δl si può studiare il comportamento del materiale:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

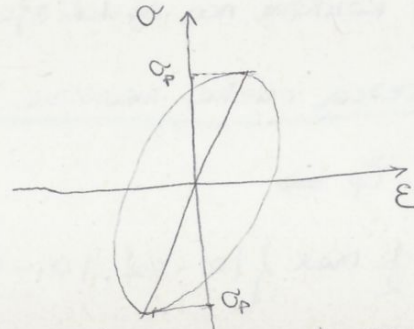


Criteri di resistenza

Se lo stato tensionale è uniaxiale:

$$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$|\sigma_1| < \sigma_p$$



Come passare da risultati di prove uniaxiali a sollecitazioni bi-triaxiali.

- Si identifica una grandezza ritenuta "responsabile" della crisi del materiale:

Tensione equivalente moniaxiale $\sigma_{eq}(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}) < \sigma_p$

Se il materiale è isotropo $\sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_p$

I criteri di resistenza variano al variare delle grandezza "responsabile", sono criteri puntuali e si dividono in criteri tensionali ed energetici.

CRITERI TENSIONALI:

• Criterio di Rankine o delle massime Tensione normale

Se $\sigma_{max} < K$ non si ha rottura

$$\sigma_{max} = \max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \}$$

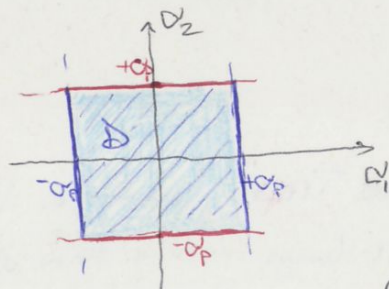
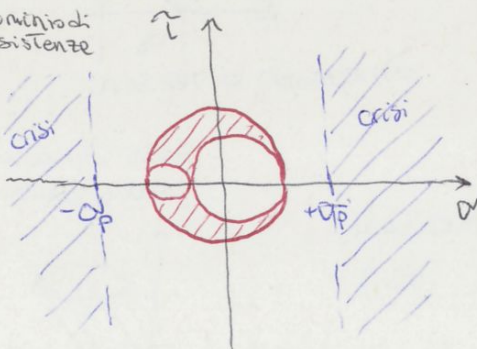
$$\sigma_{eq} = \max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \} < \sigma_p$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_{max} < \sigma_p$$

Se $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$: $\sigma_{max} = |\sigma_1| < K$ } $K = \sigma_p$
 $|\sigma_1| < \sigma_p$

~ buono per i materiali fragili

Domini di resistenza



Stato tensionale piano ($\sigma_3 = 0$)

CRITERI ENERGETICI:

- Criterio di Beltrami o delle massime energie di deformazione

$$\Phi < \Phi_p$$

Non soddisfa l'evidenza sperimentale

- Criterio di von Mises o della massima energia di distorsione

von Mises scompone il tensore degli sforzi nella componente idrostatica e in quella deviatorica:

$$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d] \quad \text{dove} \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \text{Tensione media.}$$

$$[\sigma^i] = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [\sigma^d] = \begin{pmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{pmatrix}$$

Oramai, il "colpevole" delle crisi dei materiali è $[\sigma^d]$, così che soddisfa l'evidenza sperimentale. Quindi:

$$\Phi^d < \Phi_p^d$$

$$\epsilon_x^i = \frac{1-2\nu}{E} \bar{\sigma} = \epsilon_y^i = \epsilon_z^i; \quad \gamma_{xy}^i = \gamma_{xz}^i = \gamma_{yz}^i = 0 \quad \text{perché} \quad \tau_{ij} = 0 = G\gamma_{ij}$$

La componente idrostatica non è responsabile delle variazioni di forma.

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E} J_I \quad \left. \vphantom{\frac{\Delta V}{V}} \right\} \bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^i = \frac{1-2\nu}{E} J_I^i = \frac{1-2\nu}{E} 3\bar{\sigma} = \frac{1-2\nu}{E} J_I = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^d = \frac{1-2\nu}{E} J_I^d = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_I^d = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\bar{\sigma} = 0 \end{array} \right.$$

La componente deviatorica non è responsabile delle variazioni di volume.

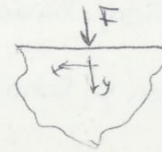
$[\sigma^i]$ = responsabile solo delle variazioni di volume

$[\sigma^d]$ = responsabile solo delle variazioni di forma

Soluzioni ESATTE per il problema elastico.

1. Flament:

applicare una forze concentrata sulla superficie

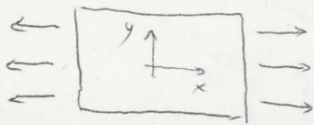


2. Kirsch:

applicare un foro su una lastre piane indefinite



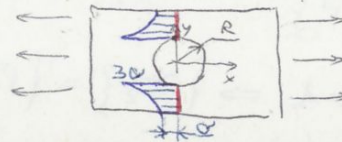
lastre senza foro:



$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

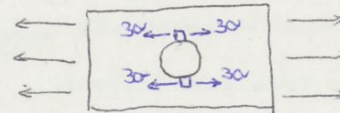
$$\sigma_x = \sigma < \sigma_p$$

lastre con foro:



Soluzioni con foro sull'asse y (x=0):

$$\sigma_x = \sigma \left(1 + \frac{R^2}{2y^2} + \frac{3R^4}{2y^4} \right)$$



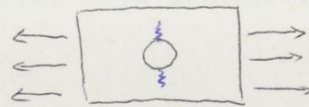
• Se $y \rightarrow \infty$, ossia molto distante del foro, $\sigma_x = \sigma$

• Se $y = R$, $\sigma_x = 3\sigma < \sigma_p \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_p}{3}$ la resistenza si riduce a $\frac{1}{3}$

3: fattore di concentrazione degli sforzi

Esempio evidente:

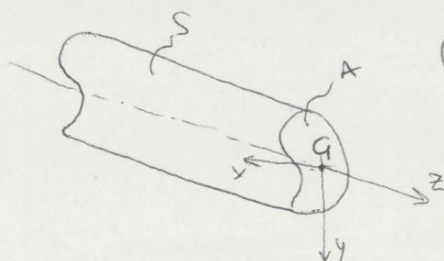
Se tiriamo un foglio di carta con un buco al centro dalle due estremità, il foglio si strapperà esattamente nei punti estremi del cerchio $(0, R)$, $(0, -R)$.



3. De Saint Venant:

cilindro retto caricato sulla base di geometria arbitraria (~trave)

Solido di De Saint Venant (DSV)



(x, y) sistema centrale di inerzie

$$\vec{R} = \int_A \vec{t}_z dA = \hat{i} \int_A \tilde{\tau}_{zx} dA + \hat{j} \int_A \tilde{\tau}_{zy} dA + \hat{k} \int_A \alpha_z dA = T_x \hat{i} + T_y \hat{j} + N \hat{k}$$

$$\textcircled{1} \quad T_x = \int_A \tilde{\tau}_{zx} dA \quad \textcircled{2} \quad T_y = \int_A \tilde{\tau}_{zy} dA \quad \textcircled{3} \quad N = \int_A \alpha_z dA$$

$$\vec{M} = \int_A \{r\} \wedge \{t_z\} dA = \hat{i} \int_A \alpha_z y dA - \hat{j} \int_A \alpha_z x dA + \hat{k} \int_A (\tilde{\tau}_{zy} x - \tilde{\tau}_{zx} y) dA$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \alpha_z \end{vmatrix} = \hat{i}(\alpha_z y) - \hat{j}(\alpha_z x) + \hat{k}(\tilde{\tau}_{zy} x - \tilde{\tau}_{zx} y)$$

$$\textcircled{4} \quad M_x = \int_A \alpha_z y dA \quad \textcircled{5} \quad M_y = - \int_A \alpha_z x dA \quad \textcircled{6} \quad M_z = \int_A (\tilde{\tau}_{zy} x - \tilde{\tau}_{zx} y) dA$$



Ipotesi semi-inversa: cerco soluzioni che abbiano $\alpha_x = \alpha_y = \tau_{xy} = 0$.

Fisicamente significa assumere che le fibre parallele all'asse del solido di DSV si scambiano solo tensioni tangenziali longitudinali (lungo z)

$$\begin{pmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \\ T_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{\tau}_{zx} \\ 0 & 0 & \tilde{\tau}_{zy} \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \alpha_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Se \hat{n} è tale che $n_z = 0$, allora $T_{nx} = T_{ny} = 0$

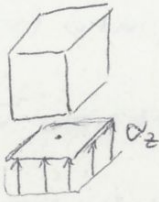
Imporre la bidimensionalità:

affinché uno stato tensionale sia piano, una tensione principale normale deve essere nulla.

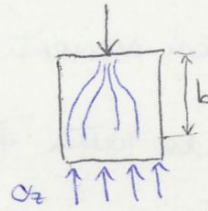
$$\alpha_n^3 - I_I \alpha_n^2 - I_{III} = 0$$

$$I_{III} = \det[\sigma] = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \text{lo stato tensionale del solido di DSV è LOCALMENTE PIANO}$$

La soluzione con soli sforzi normali si ritrova nei pilastri:



$$\sigma_z = \frac{N}{A} = -\frac{F}{A}$$



distanze di estrazione
↓
la soluzione vale solo dopo una certa distanza

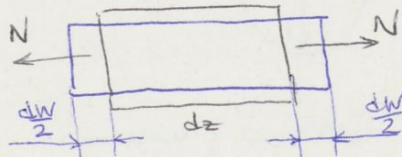
Dilatazioni: (Deformazioni)

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA}, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{N}{EA}$$

EA: rigidità del materiale x rigidità geometrica

$$\epsilon_z = \frac{dw}{dz} \Rightarrow w(z) = \int_0^z \epsilon_z(z') dz' = \frac{N}{EA} z \Rightarrow w(l) = \frac{N}{EA} l$$



lavoro di deformazione.

* Dal Teorema di Clapeyron:

$$dL = \frac{1}{2} N dw \quad \text{dove } N \text{ è la forza finale e } dw \text{ lo spostamento finale}$$

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} N \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} N \epsilon_z = \frac{1}{2} N \frac{N}{EA} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \quad \text{energia elastica per unità di lunghezza}$$

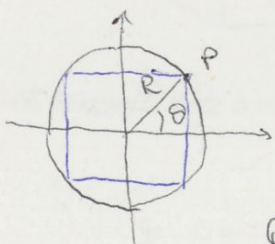
* Integrando direttamente il potenziale elastico:

$$\Phi = \frac{\sigma_z^2}{2E} \Rightarrow \frac{dL}{dz} = \int_A \Phi dA = \frac{\sigma_z^2}{2E} A = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA}$$

Esempio: ricavare una trave rettangolare da un cilindro

Per ottimizzare la soluzione, bisogna minimizzare la tensione σ_z ,

$\sigma_z = \frac{N}{A}$ ossia massimizzare l'area.



$$P(R \cos \theta, R \sin \theta) = P(x_p, y_p)$$

$$A = (2x_p)(2y_p) = 4R^2 \sin \theta \cos \theta = 2R^2 \sin 2\theta$$

$$\text{Questa è massima quando } \frac{dA}{d\theta} = 0 \Rightarrow 4R^2 \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

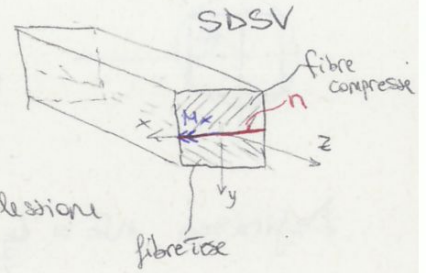
$$\text{Ossia, quando } A = 2R^2 \text{ e } \sigma_z = \frac{N}{2R^2}$$

Definizione

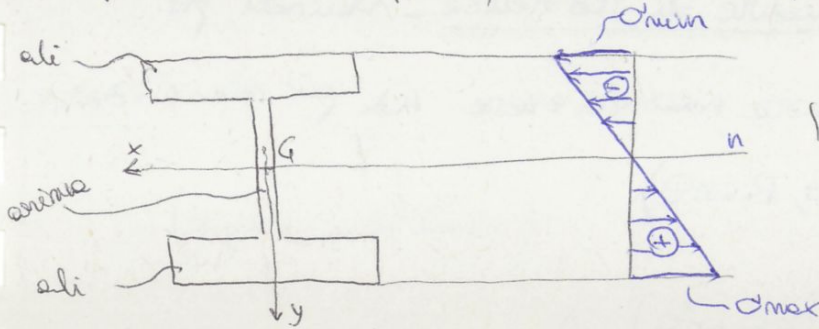
Si definisce asse neutro n la retta che identifica le fibre con tensione nulla.

Quindi per trovare n si pone $\sigma_z = 0 \Rightarrow \epsilon_z = 0$.

NOTA - Nella flessione retta M_x , $\sigma_z = 0$ se $y = 0 \Rightarrow n \equiv x$

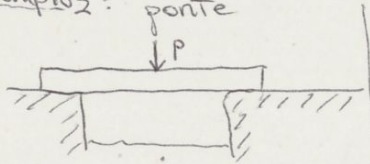


Esempio 1: Trave a doppia T, sezione ottimale per resistere a flessione



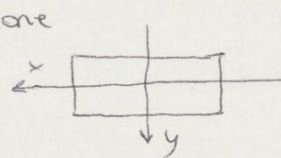
$|\sigma_{min}| = |\sigma_{max}|$ per doppie simmetriche

Esempio 2: ponte



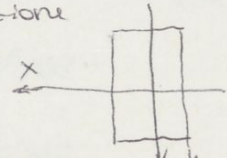
Configurazione ①

①



Configurazione ②

②

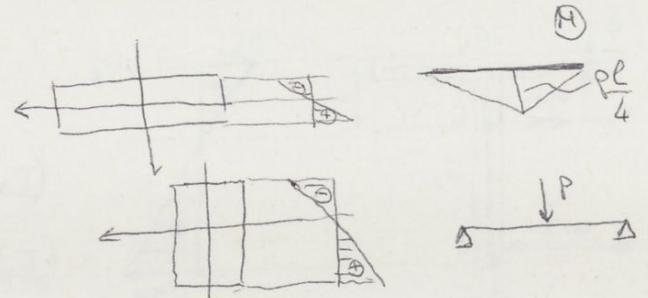


La configurazione ② è migliore per sopportare carichi maggiori perché ha un'inerzia più grande e quindi una σ_{max} minore.

$$I_x^{①} = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{1}{6} a^4 \quad \left| \quad I_x^{②} = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} = \frac{2}{3} a^4$$

$$\sigma_{max}^{①} = \frac{M_{max}}{I_x} y = \frac{M_{max}}{\frac{1}{6} a^4} \cdot \frac{a}{2} = 3 \frac{M_{max}}{a^3}$$

$$\sigma_{max}^{②} = \frac{M_{max}}{I_x} y = \frac{M_{max}}{\frac{2}{3} a^4} \cdot a = \frac{3}{2} \frac{M_{max}}{a^3}$$



La tensione massima nel caso ① è il doppio di quella nel caso ② e poiché σ_{max} manda in crisi la struttura per valori elevati, è preferibile una configurazione con σ_{max} minore.

Ricordiamo che $\sigma_{max} < \sigma_p$ affinché non ci sia crisi.

Asi significativi del SSSV per le flessioni rette:

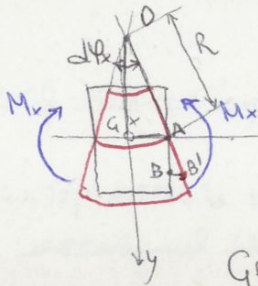
- s asse di sollecitazione (\perp vettore momento \vec{M}_x)
- n asse neutro ($\sigma_z = 0$)
- f asse di flessione ($\perp h$) (→ segue σ_{max})

Corpo deformato della flessione - (Deformazione)

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Definisco un conco di Trave la porzione ^{infinitesima} compresa tra due sezioni.

Considero un conco di de Saint Venant:



- le fibre con $y > 0$ si allungano;
- le fibre con $y < 0$ si accorciano

OSSERVAZIONE:

Gli angoli devono rimanere retti poiché $\gamma_{ij} = 0$!

→ le sezioni non sono più parallele, ma sono formate da archi.

Definisco R il raggio di curvatura dell'asse deformato, e $d\phi_x$ l'angolo infinitesimo di deformazione del conco, tale che $R d\phi_x = dz$

Rotazione attorno a X

Definiamo la curvatura χ_x il reciproco del raggio di curvatura:

$$\chi_x = \frac{1}{R} = \frac{d\phi_x}{dz}$$

Definiamo ancora $\overline{BB'}$ l'allungamento del conco (dilatazione):

$$\overline{BB'} = \frac{\epsilon_z(B) dz}{2} = \frac{\sigma_z dz}{2E}$$

Poiché $\triangle OGA$ è simile a $\triangle ABB'$ ne segue la proporzione:

$$\overline{OG} : \overline{GA} = \overline{AB} : \overline{BB'} \quad \text{sostituendo:}$$

$$R : \frac{dz}{2} = y : \frac{\sigma_z(B) dz}{2E} \Rightarrow R = \frac{y}{\frac{\sigma_z(B)}{E}} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\sigma_z(B)}{Ey} = \chi_x$$

$$\chi_x = \frac{M_x}{I_x E} \Leftrightarrow \chi_x = \frac{1}{R} = \left(\frac{M_x y}{I_x} \right) \cdot \frac{1}{Ey}$$

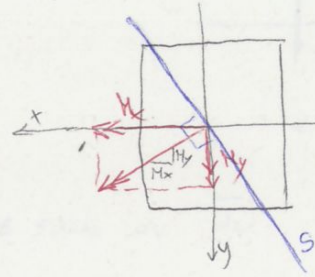
Ricapitolando:

	SPORZO NORMALE	FLESSIONE RETTA
parte tensionale	$\sigma_z = \frac{N}{A}$	$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$
parte deformative	$\epsilon_z = \frac{N}{EA}$ dilatazioni	$\chi_x = \frac{M_x}{EI_x}$ curvatura

Flessione deviata

Vali il principio di sovrapposizione degli effetti - si può vedere una flessione deviata come la somma di due flessioni rette:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$



s) $y = m_s x$ dove $m_s = -\frac{M_x}{M_y}$ coeff. ang.
 (S.L.R.) \rightarrow opposto del reciproco di H

n) $\sigma_z = 0 \Rightarrow y = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} x$

$y = m_n x$ dove $m_n = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y}$ coeff. ang.

nota: due direzioni sono ortogonali se i loro coefficienti angolari sono uno l'opposto del reciproco dell'altro

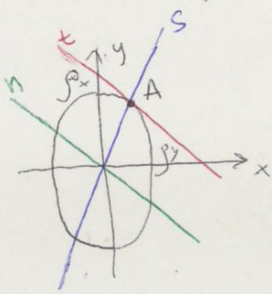
Osservazioni

$n \perp s \Leftrightarrow m_n = -\frac{1}{m_s}$ (per nota¹), quindi $\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} = \frac{M_y}{M_x}$

ossia quando: $\begin{cases} I_x = I_y \text{ sezione giroscopica (cerchio, quadrato)} \\ M_x = 0 \\ M_y = 0 \end{cases} \rightarrow$ flessioni rette \rightarrow ogni S.R. è baricentrico!

Ellisse centrale d'inerzie

$\sum \frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = 1$ dove $\rho_x^2 = \frac{I_x}{A}$ e $\rho_y^2 = \frac{I_y}{A}$



s) $y = m_s x$, $A \in S \Rightarrow y_A = m_s x_A$

t) $\frac{x_A x}{\rho_x^2} + \frac{y_A y}{\rho_y^2} = 1$ tangente E in A

$m_t = -\frac{\rho_x^2}{y_A} \frac{x_A}{\rho_y^2} \cdot A = -\frac{I_x}{I_y} \frac{x_A}{m_s x_A} = +\frac{I_x}{I_y} \frac{M_y}{M_x} = m_n$

Tracciando la tangente in A $\in S$ all'ellisse centrale d'inerzie, otteniamo la direzione dell'asse neutro. $n \perp t$

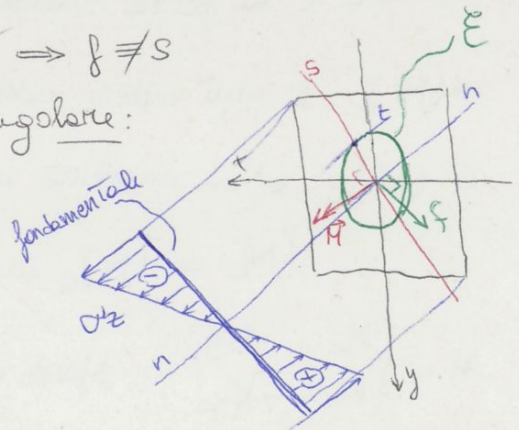
Concludiamo che nella flessione deviata $S \perp n \Rightarrow f \neq S$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

In una sezione rettangolare:

$$\begin{cases} \rho_x \approx 0,289h \\ \rho_y \approx 0,289b \end{cases}$$

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3/12}{bh} = \frac{h^2}{12}$$

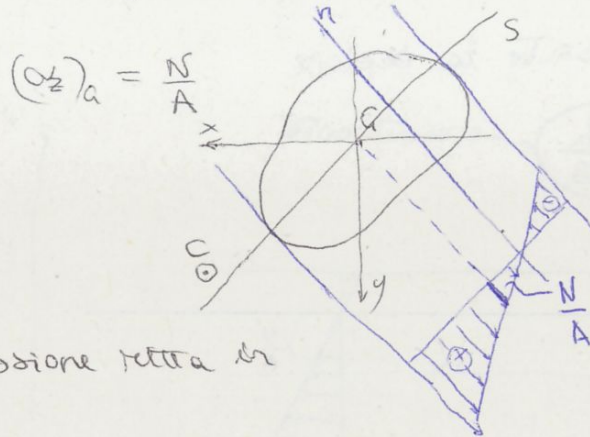
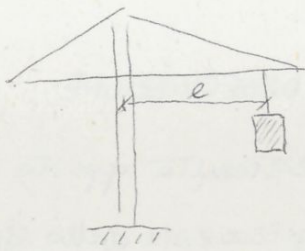


$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N y_c}{I_x} y + \frac{N x_c}{I_y} x \Rightarrow \left[\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_c y}{\rho_x^2} + \frac{x_c x}{\rho_y^2} \right) \right] \begin{cases} I_x = A \rho_x^2 \\ I_y = A \rho_y^2 \end{cases}$$

n) $\sigma_z = 0 \Rightarrow 1 + \frac{y_c y}{\rho_x^2} + \frac{x_c x}{\rho_y^2} = 0$ Relazione di similitudine rispetto all'ellisse centrale d'inertie

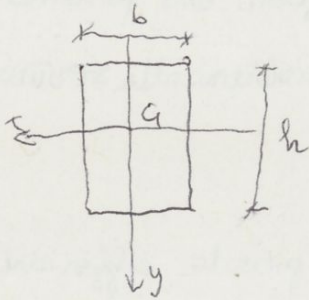
Il punto C è detto centro di pressioni e si trova sempre dalle parti opposte rispetto a G di n. (→ va dimostrato)

S) $\equiv \overline{Cg}$ → può cadere anche fuori dalle sezioni, ed esempio nelle gru:



$$(\sigma_z)_a = \frac{N}{A}$$

Caso particolare: Tensoflessione retta in sezione rettangolare



supponiamo $C = \begin{cases} x_c = 0 \\ y_c > 0 \text{ variabile} \end{cases}$

n) $1 + \frac{y_c y}{\rho_x^2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{\rho_x^2}{y_c} = \text{costante} < 0$
 perché opposte a y_c

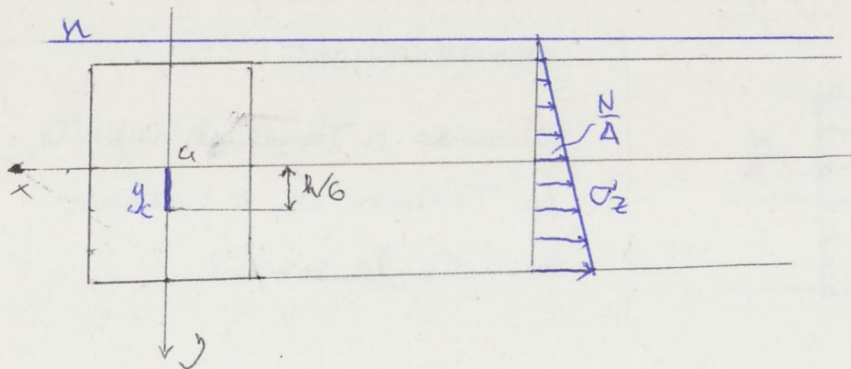
Caso 1) n esterno alla sezione (n "virtuale")

$$\sigma < -\frac{\rho_x^2}{y_c} < -\frac{h}{2} \Rightarrow y_c < \frac{2}{h} \rho_x^2$$

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} \Rightarrow y_c < \frac{2}{h} \cdot \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6}$$

$$\left(y_c < \frac{h}{6} \right)$$

eccentricità



Conseguenze:

σ_z solo di un segno

Nocciolo centrale d'inerzia

Definizione

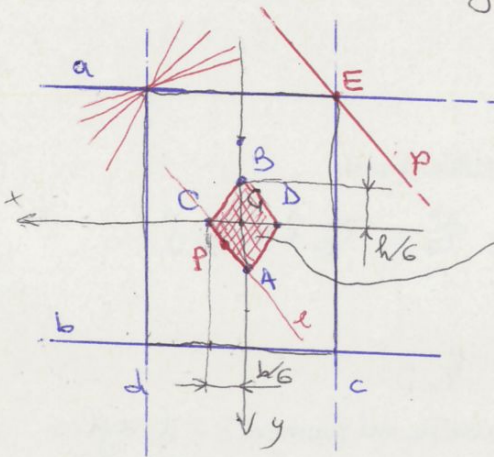
È il luogo dei punti del piano delle sezioni in cui deve cadere il centro di pressione affinché le tensioni d_z abbiano tutte lo stesso segno.

Il contorno del nocciolo centrale d'inerzia è il luogo dei punti in cui i centri di pressione generano assi neutri tangenti e non secanti la sezione.

↳ danno luogo a un fascio di rette tangenti le sezioni nei suoi vertici.

Il nocciolo centrale d'inerzia è una proprietà geometrica del sistema.

Per una sezione rettangolare:



deve appartenere alla regione di nocciolo al fine di non far comparire una trazione subito dal materiale

A: centro di pressione

a: asse neutro corrispondente

Il nocciolo centrale d'inerzia corrisponde al rombo di diagonali $h/3$ e $b/3$.

REGOLA DEL TERZO MEDIO

"il centro di pressione deve cadere nel Terzo centrale della sezione."

- Se P è centro di pressione e Contorno, p-asse neutro deve passare per E.
- Se E è centro di pressione, e-asse neutro cade sul contorno del nocciolo.

Assia: $PEe \iff EEp$

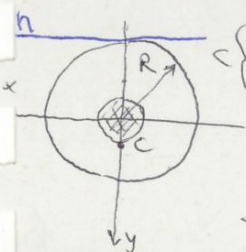
Altrimenti: $\begin{cases} Eea \implies Aee \\ Eee \implies Cee \\ PEE \implies EEp \end{cases} \implies e \equiv \bar{AC}$

Proprietà: $Aeb \iff BeA$

prove: $\frac{x_B x_A}{j_y^2} + \frac{y_B y_A}{j_x^2} - 1 = 0$ è verificata

Centro di pressione	Asse neutro
$A(x_A, y_A)$	a) $\frac{x_A x}{j_y^2} + \frac{y_A y}{j_x^2} - 1 = 0$
$B(x_B, y_B)$	b) $\frac{x_B x}{j_y^2} + \frac{y_B y}{j_x^2} - 1 = 0$
⋮	⋮

Esempio: sezione circolare



$\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C > 0 \end{cases} \rightarrow n) 1 + \frac{y_C y}{j_x^2} = 0 \rightarrow y = -\frac{j_x^2}{y_C}$ poiché voglio che n sia tangente

la sezione, impongo $y = -R : -\frac{j_x^2}{y_C} = -R \implies y_C = \frac{j_x^2}{R}$

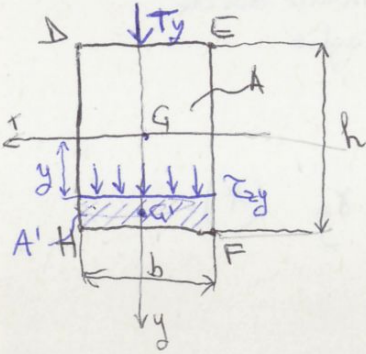
$y_C = \frac{I_x}{AR} = \frac{\pi R^4}{4\pi R^2 R} = \frac{R}{4}$ ossia $C \in$ archio di raggio $\frac{R}{4}$

Otengo un valor medio di τ_{zn} , con n =direzioni ortogonale alle corde e b =lunghezze delle corde

$$\tau_{zn} = - \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x \cdot b}$$

FORMULA DI JOURAWSKY

Taglio netto in sezione rettangolare



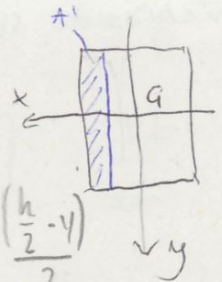
$$\int_A \tau_{zy} dA = T_y$$

$$q = - \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x} \text{ flusso}$$

$$\int_A \tau_{zx} dA = T_x = 0$$

τ_{zx} conta poco, quindi si può trascurare

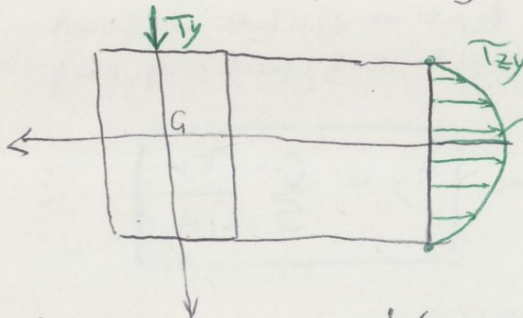
- $\tau_{zx} = 0$ nei tratti DH e EF
- $\tau_{zx} = 0$ lungo y
- τ_{zx} ha risultante nulla su ogni corda // y
- τ_{zx} ha risultante nulla su A



$$\tau_{zy} = \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x b} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_x = \frac{bh^3}{12} \\ S_x^{A'} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{h/2 + y}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{array} \right.$$

$$\tau_{zy} = \frac{T_y \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2 \cdot \frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{6 T_y (h^2 - 4y^2)}{4bh^3} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

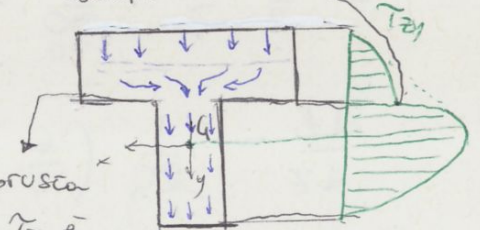
$$(\tau_{zy})_{max} = \tau_{zy}(y=0) = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A} \quad \rightsquigarrow \text{valor medio!}$$



$$\tau_{max} = \tau_G = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A}$$

Non c'è una brusca discontinuità perché τ_{zy} è un valor medio

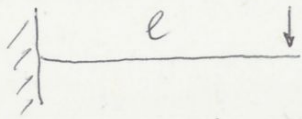
esempio a.T:



$$\int_A \tau_{zy} dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}(y) dy = b \cdot h \frac{2}{3} \tau_{max} = T_y$$

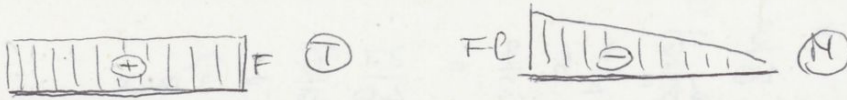
NOTA. Se le τ fossero uniformi sulle sezioni, allora τ sarebbe costante con valore pari a $\frac{T_y}{A}$.

• Domanda: chi è più gravoso tra il taglio e il momento flettente?



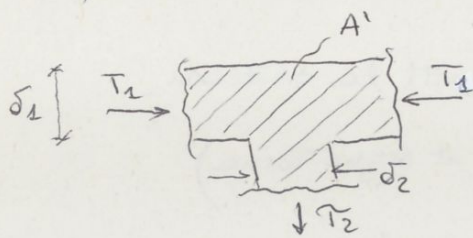
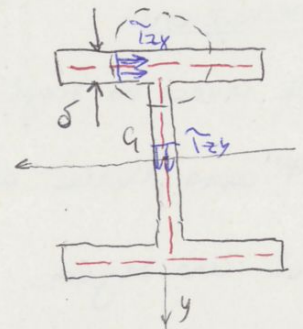
Se si aumenta la lunghezza della mensola, il taglio rimane costante, mentre il momento aumenta con l.

- Il momento flettente è importante per travi snelle;
- Il taglio è importante per travi tozze e per sezioni sottili



Taglio netto in sezioni sottili simmetriche - Proprietà

- 1) Spessore piccolo $\Rightarrow \tau_{medie} \approx \tau_{puntuale}$:
 τ_{zs} dirette secondo le linee medie;
- 2) le τ_{zs} sono lineari sui tratti // x e sono paraboliche sui tratti // y;
- 3) le τ hanno un massimo a livello del baricentro;
- 4) nei punti in cui convergono più tratti, le τ si sommano/sottraggono.



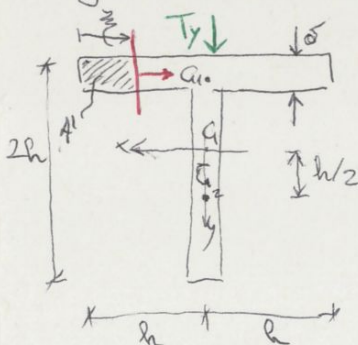
$$q = -\frac{\tau_y S_x^{A'}}{I_x} \xrightarrow{A' \rightarrow 0} 0, \text{ ossia}$$

entra tanto flusso, quanto ne esce.

$$2\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$$

$$\text{Se } \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow 2\tau_1 = \tau_2$$

Taglio netto in sezioni sottili e T:

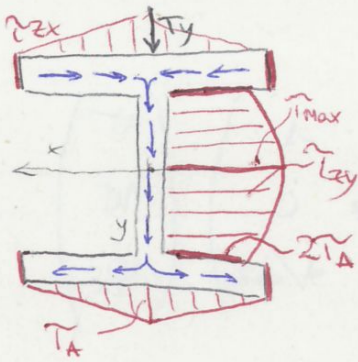


$$I_x = \frac{5}{3} \delta h^3 \quad S_x^{A'} = -\delta z \frac{h}{2}$$

$$\tau_{zx} = \frac{\tau_y S_x^{A'}}{I_x b} = \frac{\tau_y \delta z \frac{h}{2}}{\frac{5}{3} h^3 \delta \delta} = \frac{3}{10} \frac{\tau_y z}{\delta h^2}$$

è lineare in z perché la distanza di A' da x è costante

Taglio in sezioni sottili con spessore costante



Sulle superficie laterale $\tau = 0$

Lungo y il flusso è concorde con T_y ,

lungo x si ripartisce secondo $q = -\frac{T_y S_x^{A'}}{I_x}$

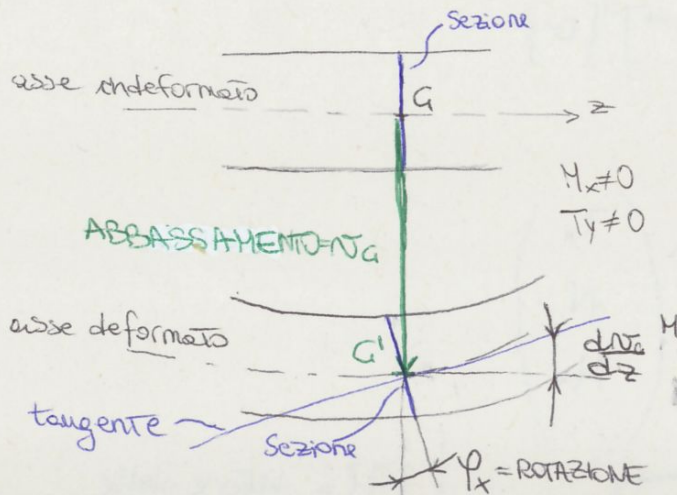
• Perché c'è un massimo nel baricentro?

Perché $\tau_{zy} \propto S_x^{A'}$ ($\tau_{zy} = \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x b}$), man mano che mi

avvicino al baricentro q , aumenta in modulo il momento statico

perché aumenta l'area A' . Quando oltrepassiamo G , $S_x^{A'}$ diminuisce.

Equazioni cinematiche per Travi rettilinee



$\tan \varphi_x = \frac{dw_g}{dz}$

$\frac{dw_g^M}{dz}$ = per spostamenti infinitesimi
 con fondo l'angolo con la tangente.

è la variazione di w_g lungo z ,
 nonché il coefficiente angolare
 delle rette tangente, dovute
 alla flessione M .

Perché le sezioni rimane piane e \perp all'asse deformato:

$\varphi_x = -\frac{dw_g^M}{dz}$

$\gamma_y = \frac{dw_g^T}{dz}$

M : componente dovuta alle flessione
 T : componente dovuta al taglio

$\frac{dw}{dz} = \frac{d(w^M + w^T)}{dz} = \frac{dw^M}{dz} + \frac{dw^T}{dz} = -\varphi_x + \gamma_y$

Relazione che lega lo scorrimento medio per taglio γ_y
 alla rotazione φ_x :

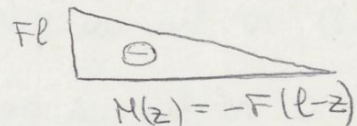
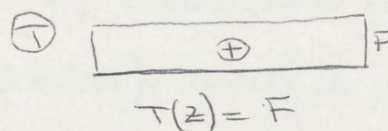
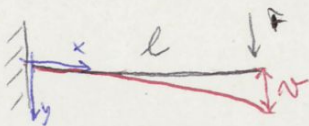
$\gamma_y = \frac{dw}{dz} + \varphi_x$

Travi rettilinee piane

	Equazioni statiche	Equazioni costitutive	Equazioni cinematiche
ASSIALE	$\frac{dN}{dz} + p = 0$	$\epsilon = \frac{N}{EA}$	$\epsilon = \frac{dw}{dz}$
FLESSIONALE	$\frac{dT}{dz} + q = 0$	$\gamma_y = t_y \frac{I}{GA}$	$\gamma_y = \frac{dw}{dz} + \varphi$
	$-T + \frac{dM}{dz} + m = 0$	$\chi = \frac{M}{EI}$	$\chi = \frac{d\varphi}{dz}$

Il problema è "disaccoppiato": ciò che troviamo nelle equazioni assiali, non compare in quelle flessionali; sono indipendenti.

Esempio: mensola



$$\frac{d\varphi}{dz} = \chi = \frac{M}{EI} = -\frac{F(l-z)}{EI} \Rightarrow \varphi = -\frac{1}{EI} \int F(l-z) dz$$

$$\varphi = \left(-Flz + \frac{1}{2} Fz^2 \right) \frac{1}{EI} + C_1$$

c.c. $\rightarrow C_1 = 0$ per $\varphi(0) = 0$

c.c. $v(0) = \varphi(0) = 0$
condizioni a contorno: in castro

$$\frac{dw}{dz} = \gamma_y - \varphi = t_y \frac{I}{GA} - \varphi \Rightarrow w = \int \left(t_y \frac{F}{GA} + \frac{Flz}{EI} - \frac{Fz^2}{2EI} \right) dz$$

$$w = t_y \frac{F}{GA} z + \frac{1}{2} \frac{Flz^2}{EI} - \frac{1}{6} \frac{Fz^3}{EI} + C_2$$

c.c. $\rightarrow C_2 = 0$ per $w(0) = 0$

¹ $w(l) = w_M + w_T$
² $I = A \rho^2$; $\lambda = l/\rho$;
 $G = E/2(1+\nu)$

$$w_{Max} = w(l) = \left(\frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI} + t_y \frac{Fl}{GA} \right) = \frac{Fl^3}{3EI} \left(1 + t_y \frac{3EI}{GA l^2} \right)$$

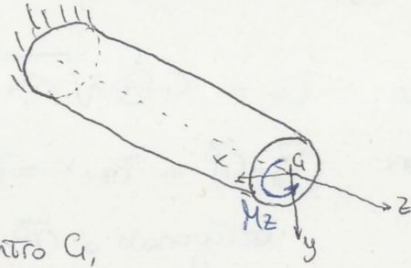
Definisco il parametro λ la snellezza della Trave, $\lambda = \frac{l}{\rho}$.

$$w_{MAX} \stackrel{SEI}{=} \frac{Fl^3}{3EI} \left[1 + \frac{6(1+\nu)t_y}{\lambda^2} \right] \rightarrow \text{Trascurabile per } \lambda \gg 1, \text{ ossia per Travi molto snelle}$$

\Rightarrow FRECCIA

④ TORSIONE in Travi a sezione circolare

$$\vec{\eta} = \vec{AP} = \begin{cases} u = -\varphi_z(z) y \\ v = +\varphi_z(z) x \\ w = 0 \end{cases}$$



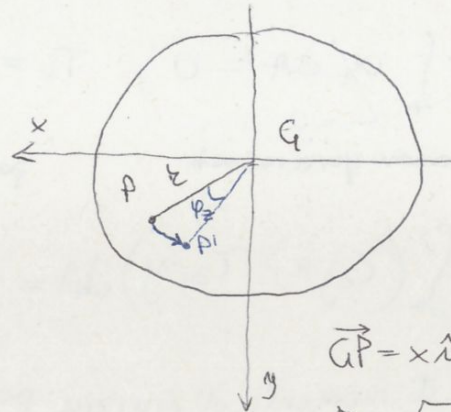
Ipotesi cinematiche: le sezioni ruotano attorno al baricentro G ,
ma rimangono piane. φ_z dipende solo da z -asse di rotazione

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = \epsilon_z = 0$$

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{d\varphi_z}{dz} y \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} = +\frac{d\varphi_z}{dz} x \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G \gamma_{zx} = -G \frac{d\varphi_z}{dz} y \\ \tau_{zy} = G \frac{d\varphi_z}{dz} x \end{cases}$$



$$\vec{GP} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Equazione indefinita lungo x :

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\gamma}{\delta} = 0$$

$= 0 \quad f(z) \cdot y$

Rimane: $-G_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} = 0$. Integrando due volte:

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = C_1, \quad \varphi_z(z) = C_1 z + C_2$$

di incastro $\varphi_z(0) = 0$ si ricava che $C_2 = 0$, mentre rimane

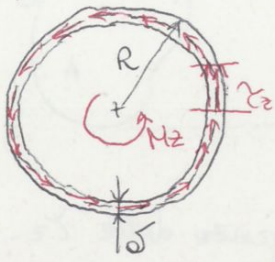
$$\dot{\theta} = \frac{d\varphi_z}{dz} = C_1 \text{ definito come l'ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE} = \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Il campo tensionale può quindi essere scritto come:

$$\begin{cases} \tau_{zx} = -G \dot{\theta} y \\ \tau_{zy} = G \dot{\theta} x \end{cases}$$



Sezione Tubolare sottile ($\delta \ll R$)



$$I_p = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{2} \underbrace{(R_e^2 + R_i^2)}_{\approx 2R^2} \underbrace{(R_e + R_i)}_{\approx 2R} \underbrace{(R_e - R_i)}_{=\delta}$$

dove R è il raggio medio (τ_z uniforme in δ)

$$I_p = 2\pi R^3 \delta \implies \tau_z = \frac{M_z}{2\pi R^3 \delta} R = \frac{M_z}{2\pi R^2 \delta}$$

Lavoro di deformazione

* Dal Teorema di Clepeyron:

$$dL = \frac{1}{2} M_z d\varphi_z \text{ dove } M_z \text{ è la forza finale e } \varphi_z \text{ lo spostamento finale}$$

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} M_z \frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{1}{2} M_z \dot{\theta} = \frac{M_z^2}{2GI_p}$$

* Integrando il potenziale:

$$\phi = \frac{\tau_{zs}^2}{2G} \implies \frac{dL}{dz} = \int_A \phi dA = \int_A \frac{\tau_{zs}^2}{2G} dA = \frac{M_z^2}{2G I_p^2} \int_A (x^2 + y^2) dA$$

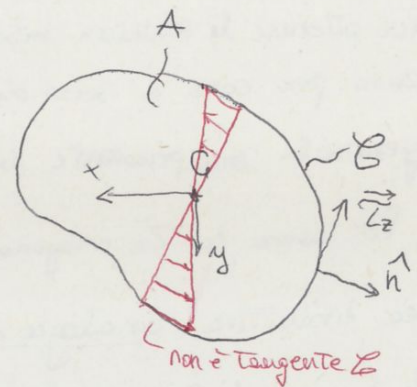
$$\frac{dL}{dz} = \frac{M_z^2}{2G I_p^2} \int_A r^2 dA = \frac{M_z^2}{2G I_p^2} I_p = \frac{M_z^2}{2G I_p}$$

Torsione in sezione generica

$$\begin{cases} u = -\dot{\theta}_z(z) y \\ v = +\dot{\theta}_z(z) x \\ w = \dot{\theta}_z(z) w(x, y) \end{cases}$$

Supponiamo che le sezioni ruotino attorno a G.

Le $\vec{\tau}_z$ generate sono sempre radiali e tangenti \mathcal{C} .



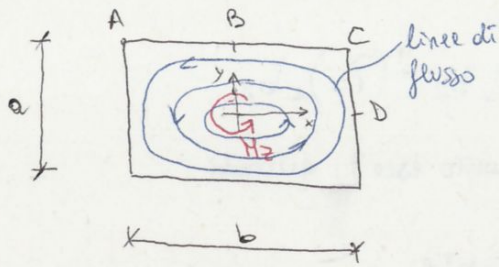
⇒ Evidenze sperimentali:

le sezioni non restano più piane come nel cilindro, ma si ingobbano.

Ossia si ha uno spostamento $w = \dot{\theta}_z \cdot f(x, y) = \dot{\theta}_z w(x, y)$

dove $w(x, y)$ è definita come funzione ingobbamento.

Torsione in sezione rettangolare -

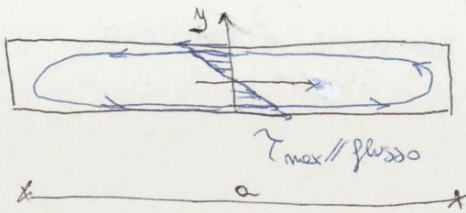


$\tau_{max} = \tau_B$ (n fluidi: sezione minore ha velocità maggiore)
 $\tau_{max} = \alpha \frac{M_z}{ab^2}$ dove $\alpha = \alpha\left(\frac{a}{b}\right)$ è stato calcolato per a e b trascurando il laplaciano

$\theta = \frac{M_z}{G I_t}$ dove $I_t = \beta ab^3$ FATTORE DI RIGIDEZZA TORSIONALE
 con $\beta = \beta\left(\frac{a}{b}\right)$

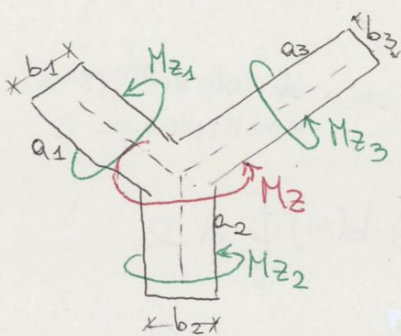
($I_t \equiv I_p$ per sezioni circolari) $I_t \leq I_p$

Sezione rettangolare allungata ($\frac{a}{b} \rightarrow \infty$, di solito $\frac{a}{b} \geq 20$)



$\alpha = 3$ $\beta = \frac{1}{3}$ NOTI per sezioni rettangolari
 $I_t = \frac{1}{3} ab^3 \Rightarrow \tau_{max} = 3 \frac{M_z}{ab^2} = \frac{M_z b}{I_t}$

Torsioni in sezioni sottili APERTE (ossie quando le linee medie non forma un percorso chiuso come nelle sezioni Tubolari o scatolari)



Equazioni di equilibrio:

(1) $M_z = \sum_{i=1}^n M_{zi}$ - la somma dei tre momenti ci dà M_z

Equazioni di congruenze:

(2) $\theta = \theta_i$ - gli angoli di rotazione sono tutti uguali -

(2) $\Rightarrow \frac{M_z}{G I_t} = \frac{M_{zi}}{G I_{ti}} \rightarrow M_{zi} = \frac{I_{ti}}{I_t} \cdot M_z$
 suppongo siano dello stesso materiale

Sostituendo in (1): $M_z = \frac{M_z}{I_t} \sum_{i=1}^n I_{ti} \Rightarrow I_t = \sum_{i=1}^n I_{ti}$

$\tau_{max i} = \frac{M_{zi}}{I_{ti}} \cdot b_i \stackrel{(2)}{=} \frac{M_z}{I_t} \cdot b_i$

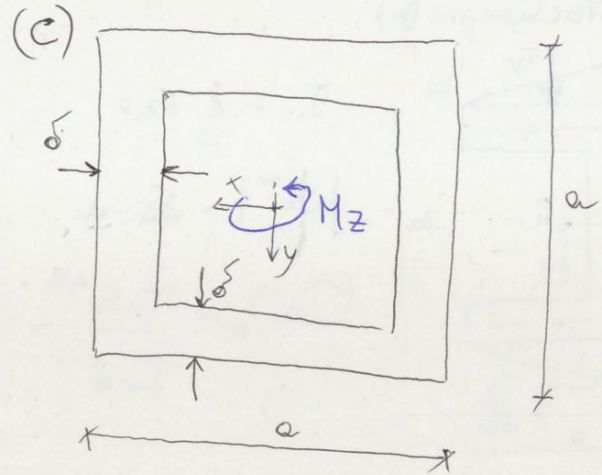
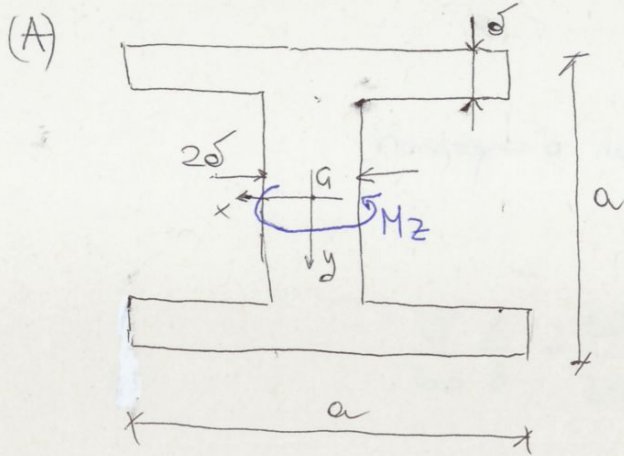
Osservazione.

$\tau_{max} \propto b$, ossia, la tensione tangenziale è massima sul tratto più spesso (nelle sezioni aperte).

Se lo spessore $b(s)$ è costante, allora $I_t = \frac{4 \Omega^2 b}{S}$ dove S è la lunghezza delle linee medie.

Per le sezioni circolari cave $I_t = \frac{\frac{1}{4} (\pi R^2)^2 \delta}{2\pi R} = 2\pi R^3 \delta \equiv I_p$

Confronto sezioni aperte/sezioni chiuse:



* FLESSIONE:

Poiché $(I_x)_A = (I_x)_C$, dal punto di vista flessionale hanno lo stesso comportamento e quindi le stesse resistenze.

* TORSIONE:

$$(I_t)_A = \left(\frac{1}{3} a \delta^3\right) \times 2 + \left(\frac{1}{3} a (2\delta)^3\right) = \frac{10}{3} a \delta^3$$

$$(\tau_{max})_A = \frac{M_z}{I_t} 2\delta = \frac{M_z}{\frac{10}{3} a \delta^3} 2\delta = \frac{3}{5} \frac{M_z}{a \delta^2}$$

È opportuno fare sezioni
scatolari per "assorbire"
la torsione.

$$(I_t)_C = \frac{4 \Omega^2 \delta}{S} = \frac{4 a^4 \delta}{4a} = a^3 \delta$$

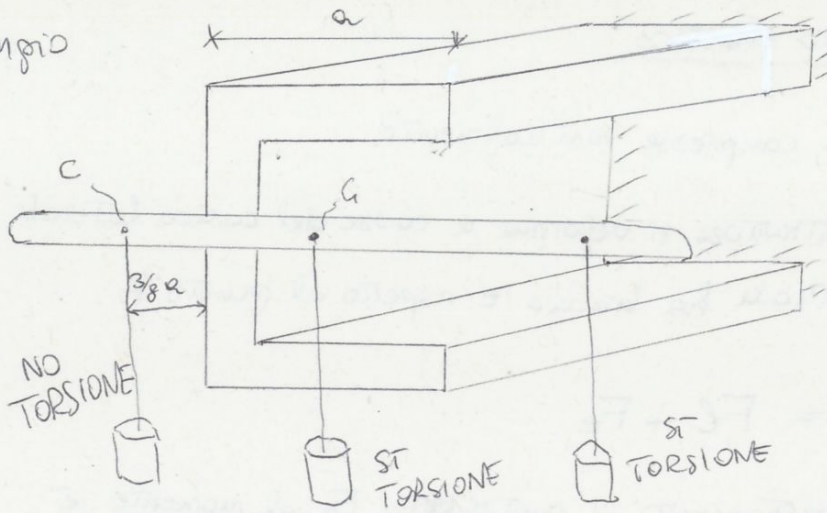
$$(\tau_{zs})_C = \frac{M_z}{2S\delta} = \frac{M_z}{2a^2\delta} \quad (\text{costante})$$

$$\frac{(\tau_z)_A}{(\tau_z)_C} = \frac{\frac{3}{5} \frac{M_z}{a \delta^2}}{\frac{M_z}{2a^2\delta}} = \frac{a}{\delta} \frac{6}{5} \gg 1 \Rightarrow (\tau_z)_A \gg (\tau_z)_C$$

es. se $\frac{a}{\delta} \approx 10 \Rightarrow (\tau_z)_A = 12 (\tau_z)_C$

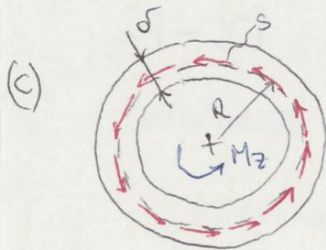
$$\frac{(\theta)_A}{(\theta)_C} = \frac{M_z}{I_t)_A} \cdot \frac{I_t)_C}{M_z} = \frac{(I_t)_C}{(I_t)_A} = \frac{a^3 \delta}{\frac{10}{3} a \delta^3} = \frac{3}{10} \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 \Rightarrow (\theta)_A \gg (\theta)_C$$

Esempio



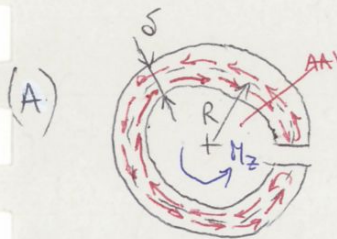
Confronto sezioni aperte/chiose.

Sezione Tubolare



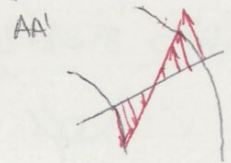
$$(I_{zs})_c = \frac{Mz}{2\Omega\delta} = \frac{Mz}{2(\pi R^2)\delta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \text{lunghezze delle} \\ \text{linee medie} \end{array} \right.$$

$$(I_t)_c = \frac{4\Omega^2\delta}{s} = \frac{4(\pi R^2)^2\delta}{2\pi R} = 2\pi R^3\delta$$



$$(I_{zs})_A = \frac{Mz}{\frac{2}{3}\pi R\delta} \delta = \frac{3}{2} \frac{Mz}{\pi R\delta^2}$$

$$(I_t)_A = \frac{1}{3} 2\pi R\delta^3$$



$$\frac{(I_{zs})_A}{(I_{zs})_c} = \frac{\frac{3}{2} \frac{Mz}{\pi R\delta^2}}{\frac{Mz}{2\pi R^2\delta}} = \frac{3}{2} \frac{R}{\delta}$$

(A) è molto più deformabile

$$\frac{(\theta)_{A'}}{(\theta)_{c'}} = \frac{Mz}{G(I_t)_A} \cdot \frac{G(I_t)_c}{Mz} = \frac{(I_t)_c}{(I_t)_A} = \frac{2\pi R^3\delta}{\frac{2}{3}\pi R\delta^3} = 3 \left(\frac{R}{\delta}\right)^2$$

Mentre per la flessione (A) e (C) sono identici, per la torsione è meglio una sezione chiusa (C).

- Se $M_s > M_i$ l'equilibrio è stabile;
- Se $M_s < M_i$ l'equilibrio è instabile;
- Se $M_s = M_i$ l'equilibrio è indifferente.

Consideriamo l'equilibrio indifferente, ossia $M_s = M_i$.

$$-EI \frac{d^2 v}{dz^2} = Nv \rightarrow \frac{d^2 v(z)}{dz^2} + \frac{N}{EI} v(z) = 0 \quad (\text{ODE})$$

introducendo il parametro $\alpha^2 \stackrel{(*)}{=} \frac{N}{EI}$ si ottiene:

$$v''(z) + \alpha^2 v(z) = 0 \quad \text{dove la soluzione è del tipo}$$

$$v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z. \quad \text{Imponendo le condizioni al}$$

contorno si ricavano A e B:

$$\text{c.c.} \begin{cases} v(0) = 0 \rightarrow A = 0 \\ v(l) = 0 \rightarrow B \sin \alpha l = 0 \end{cases} \begin{cases} B = 0 \text{ banale} \\ \sin \alpha l = 0 \rightarrow \alpha l = n\pi \rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \end{cases} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

$$\alpha_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{N_n}{EI} \rightarrow \boxed{N_n = EI \frac{\pi^2}{l^2} n^2}$$

N_n alle quali corrisponde l'equilibrio indifferente

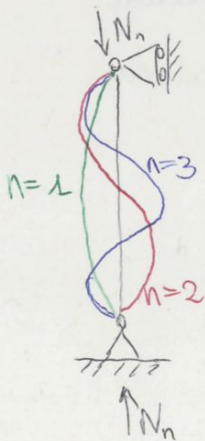
↓
esistono infiniti valori di N , cioè $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v(z) = B \sin \alpha z = B \sin \left(\frac{n\pi}{l} z \right)$$

Poiché N è lo sforzo che manda in crisi la struttura, basta

Scegliere il valore minimo, quindi per $n=1$. Le altre soluzioni

sono n^2 -volte maggiori, quindi aumente il "livello" di crisi.



$$N(n=1) = N_{\text{critico}} = \text{carico critico}$$

$$\boxed{N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}}$$

CARICO DI PUNTA

o CARICO DI EULERO

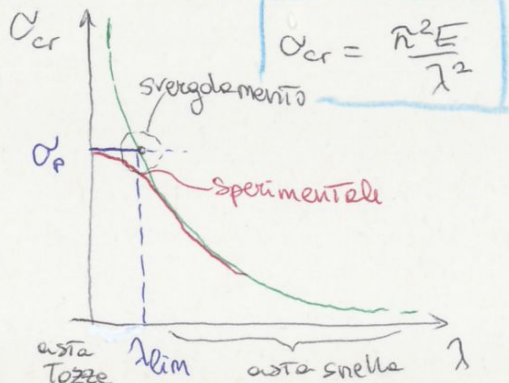
Per $n=2$ str. iperstatica:



Tensioni critiche.

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E A \rho^2}{AL^2} = \frac{\pi^2 E \left(\frac{l^2}{\lambda^2}\right)}{l^2 \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2}\right)} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \ I = A \rho^2 \\ 2 \ \lambda = \frac{l}{\rho} \end{array} \right\}$$



L'asintoto verticale $\lambda=0$ non può esistere perché σ non può tendere all'infinito, ma quando raggiunge il punto di snervamento le strutture si spezzano. Ossia se:

$$\sigma_{cr} = \sigma_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{lim}^2} \Rightarrow \lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \text{ [adim.]}$$

Snellezza limite $\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$

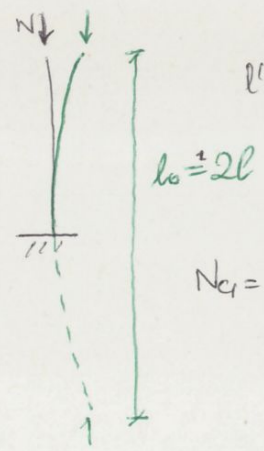
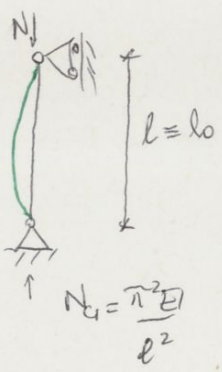
- $\lambda > \lambda_{lim}$ carico minore = carico di instabilità
- $\lambda < \lambda_{lim}$ l'asta si rompe in $\sigma_{cr} = \sigma_p$

La curva di σ_{cr} viene in base al materiale e la si ricava sperimentalmente. L'interazione tra snervamento e instabilità si chiama SVERGOLAMENTO.

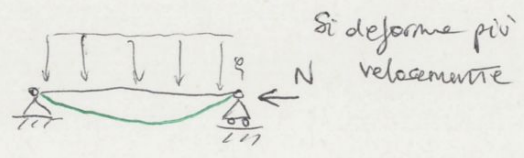
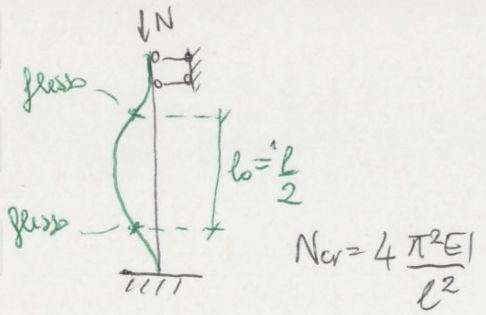
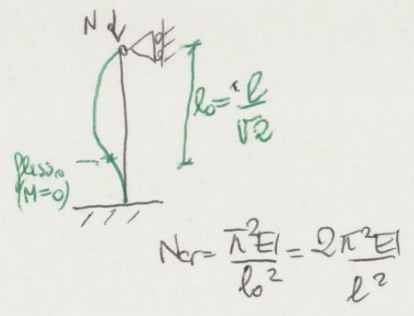
Per altre strutture.

Ci si riconduce sempre al caso precedente sostituendo l con l_0 , dove l_0 è la distanza tra due punti di flesso.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$



l'incastro è un punto di simmetria



Si dimostra

Teorema di Huygens o degli assi paralleli

Noti i momenti d'inerzia baricentrici $I_{x_a}, I_{y_a}, I_{x_y a}$, posto calcolare I_x, I_y, I_{xy} attraverso le formule

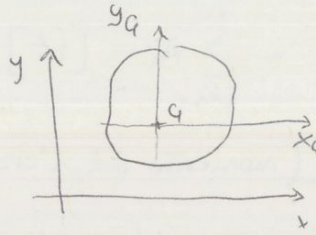
$$I_x = I_{x_a} + A(y_a)^2$$

punto-baricentro

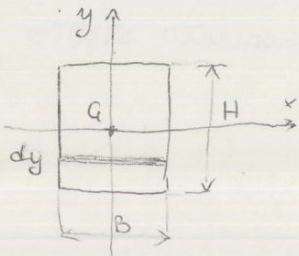
$$I_y = I_{y_a} + A(x_a)^2$$

presi con segno

$$I_{xy} = I_{x_a y_a} + A x_a \cdot y_a$$



Esempio: calcolo del momento d'inerzia in un rettangolo

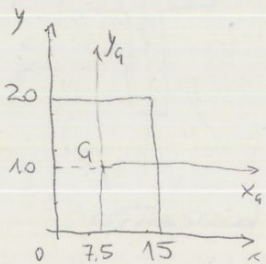


$I_{xy} = 0$ perché (x, y) assi di simmetria

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} y^2 b dy = \left(\frac{1}{3} b y^3 \right)_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \frac{bH^3}{12}$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \dots = \frac{B^3 H}{12} \quad I_x > I_y$$

Esempio numerico:



$$I_{x_a} = \frac{15 \cdot 20^3}{12} = 10000 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_a} = \frac{15^3 \cdot 20}{12} = 5625 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_y} = 0$$

$$I_x = 10000 + (15 \cdot 20) 10^2 = 40000 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 5625 + (15 \cdot 20) 7,5^2 = 22500 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0 + (15 \cdot 20) \cdot 7,5 \cdot 10 = 22500 \text{ cm}^4$$

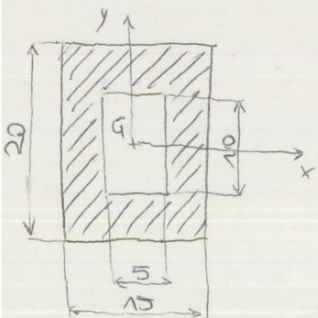
Esempio:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i \quad I_{xy} = 0$$

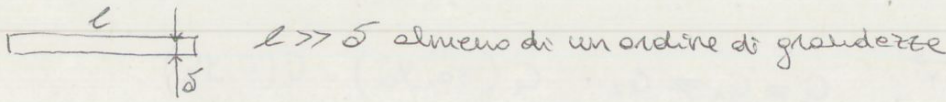
$$I_x = \frac{15 \cdot 20^3}{12} - \frac{5 \cdot 10^3}{12} = 9583,33 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{15^3 \cdot 20}{12} - \frac{5^3 \cdot 10}{12} = 5520,83 \text{ cm}^4$$

momenti di inerzia esterni - momenti di inerzia interni



Caso di sezioni sottili

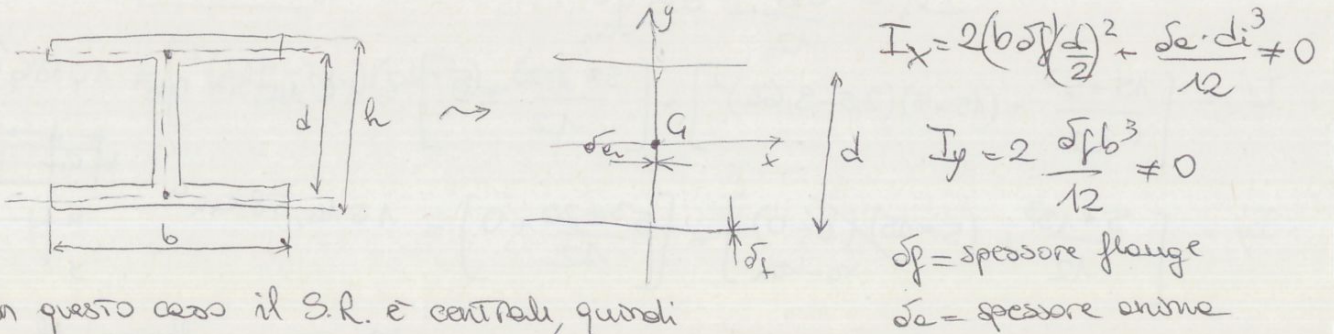


esempio

$$I_x = \frac{l\delta^3}{12} + l\delta y_g^2 \quad (\delta^3 \ll \delta)$$

$$I_y = \frac{\delta l^3}{12} + l\delta x_g^2$$

Le strutture si possono approssimare con le linee medie



In questo caso il S.R. è centrale, quindi

$$I_x \equiv I_z \quad I_y \equiv I_\eta \quad (x, y) \text{ sono già assi principali d'inerzia,}$$

infatti $I_{xy} = 0$

Legge di Trasformazione per rotazione del S.R.

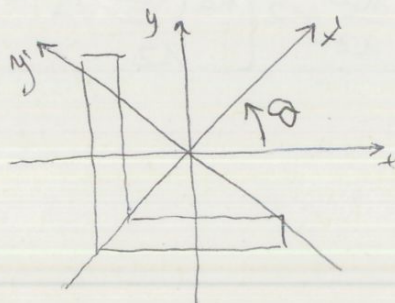
Noti I_x, I_y, I_{xy} rispetto al S.R. baricentrico, calcolarsi

$I_{x'}, I_{y'}, I_{x'y'}$ rispetto agli assi ruotati (per annullare $I_{x'y'}$)

(1) $I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$

(2) $I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$

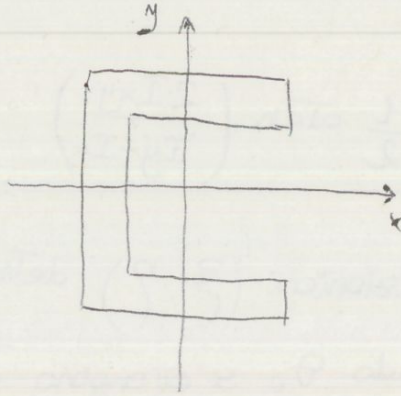
(3) $I_{x'y'} = I_{xy} \cos 2\theta + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\theta = I_{y'x'}$



Caso 2) $I_x \neq I_y$

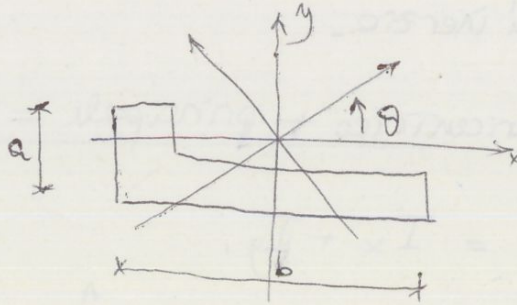
(a) $I_{xy} = 0$

$$\begin{cases} I_x = I_{\xi} \\ I_y = I_{\eta} \end{cases} \quad \theta_0 = 0$$



(b) $I_{xy} \neq 0$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right)$$



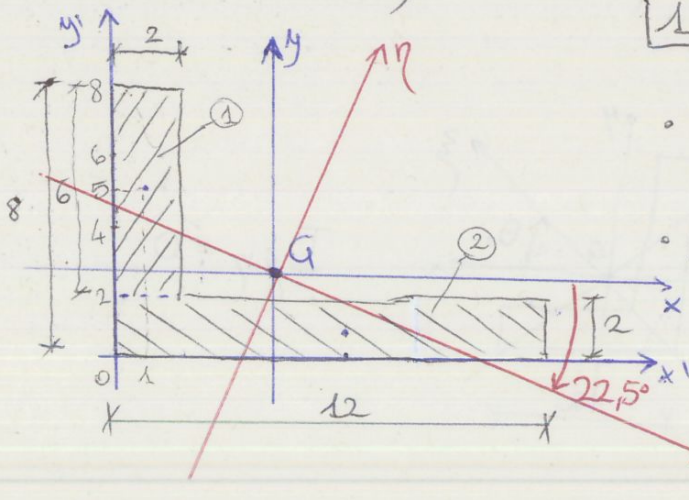
$$\begin{cases} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{cases} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (\sim \text{centro} \pm \text{raggio})$$

quando $I_x > I_y \Rightarrow I_{\xi} > I_{\eta}$

$$\begin{cases} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{cases} = \frac{I_x + I_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

quando $I_x < I_y \Rightarrow I_{\xi} < I_{\eta}$

Esercizio Caso 2b)



1) Calcolo del baricentro:

$$x'_G = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{(2 \cdot 6) \cdot 1 + (12 \cdot 2) \cdot 6}{12 + 24} = 4,33 \text{ cm}$$

$$y'_G = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{(5 \cdot 12) \cdot 1 + 24 \cdot 1}{36} = 2,33 \text{ cm}$$