NUMERO: 1088

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Di Paolo

MATERIA: Geometria

Prof. Musso

PRODOTTO SCALARE

IL PRODOTTO SCALARE DI VETTORI VERIFICA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $V \cdot W = W \cdot V$ ← IL PRODOTTO SCALARE È SIMMETRICO
- $V \cdot (W + U) = V \cdot W + V \cdot U$ ← DISTRIBUTIVITÀ DEL PRODOTTO SCALARE RISPETTO ALLA SOMMA.
- $(\lambda V) \cdot W = V \cdot (\lambda W)$ ← OMOGENEITÀ
- $V \cdot V \geq 0$ E $V \cdot V = 0$ SE E SOLO SE $V = 0$ ← IL PRODOTTO SCALARE È UN VALORE SEMPRE POSITIVO E AL MASSIMO ZERO.

DUE VETTORI HANNO LA STESSA DIREZIONE QUANDO ESISTE UNO SCALARE λ: $V = \lambda W$ (λ FATTORE DI DILATAZIONE O CONTRAZIONE).
(CIOÈ SONO PARALLELI)

DATO UN VETTORE NON-NULLO $\vec{V}$ INDICHEREMO CON $\vec{u}_V$ IL VERSORE PARALLELO A $\vec{V}$, OTTENUTO DIVIDENDO $\vec{V}$ PER LA LUNGHEZZA $\|V\|$ DI $\vec{V}$:

VERSORE DI UN VETTORE $\vec{V}$ → $\boxed{\vec{u}_V = \frac{\vec{V}}{\|V\|}} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{1+4+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

ES:

$\vec{V} = (1,-1,3) \qquad \vec{W} = (3,-3,9)$

$3\vec{V} = \vec{W} \rightarrow \vec{V}$ E $\vec{W}$ SONO PARALLELI.

LEMMA:

$$\|V + W\|^2 = \|V\|^2 + 2(V \cdot W) + \|W\|^2$$
$$\|V - W\|^2 = \|V\|^2 - 2(V \cdot W) + \|W\|^2$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\|V+W\|^2 = (V+W)\cdot(V+W) = V(V+W) + W(V+W) = V \cdot V + V \cdot W + W \cdot V + W \cdot W = \|V\|^2 + 2(V \cdot W) + \|W\|^2$$

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ

SIANO $\vec{V}$ E $\vec{W}$ DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^n$, ALLORA:

$$(V \cdot W)^2 \leq \|V\|^2 \cdot \|W\|^2$$

DIMOSTRAZIONE:

SE $\vec{W} = 0$ NON C'È NULLA DA DIMOSTRARE.

SUPPONIAMO $\vec{W} \neq 0$ E $\lambda = \|W\|^2 = W \cdot W > 0$ E $\mu = -V \cdot W$. ALLORA

$$0 \leq (\lambda V + \mu W)\cdot(\lambda V + \mu W) = \lambda^2 V \cdot V + \lambda\mu V \cdot W + \mu\lambda V \cdot W + \mu^2 W \cdot W = \lambda^2 V \cdot V + 2\mu\lambda V \cdot W + \mu^2 W \cdot W =$$

$$= \|W\|^4 \cdot \|V\|^2 - 2\|W\|^2 (V \cdot W)^2 + (V \cdot W)^2 \|W\|^2 = \underbrace{\|W\|^2}_{\text{STRETTAMENTE POSITIVO}} \left(\|V\|^2 \|W\|^2 - (V \cdot W)^2\right)$$

QUINDI $\vec{v}'$ E PERPENDICOLARE A $\vec{w}$. INOLTRE, PER COSTRUZIONE SI HA:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$$

SE $\vec{u}'$ È PERPENDICOLARE A $\vec{w}$ E $\vec{u}''$ È PARALLELO A $\vec{w}$ E SE $\vec{v} = \vec{u}' + \vec{u}''$, ALLORA DALL'UGUAGLIANZA $\vec{v}' + \vec{v}'' = \vec{u}' + \vec{u}''$ SI RICAVA

$$\vec{v}' - \vec{u}' = \vec{u}'' - \vec{v}''$$

SO CHE $\vec{u}'' - \vec{v}''$ È PARALLELO A $\vec{w}$ PERCHÈ LO SONO ENTRAMBI.

POSSO QUINDI SCRIVERE $\vec{u}'' - \vec{v}'' = \alpha \vec{w}$, CON $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOSTITUENDO CIÒ CHE HO APPENA OTTENUTO VIENE $\vec{v}' - \vec{u}' = \alpha \vec{w}$, DATO CHE $\vec{u}'$ E $\vec{v}'$ SONO ENTRAMBI $\perp$ A $\vec{w}$, ANCHE $\alpha\vec{w}$ È $\perp$ A $\vec{w}$; QUINDI DEVO AVERE $\alpha \vec{w} \cdot \vec{w} = 0$, QUESTA UGUAGLIANZA È VERA SOLO QUANDO $\alpha = 0$ (DATO CHE HO PRESUPPOSTO $\vec{w} \neq 0$) $\Longrightarrow \vec{u}'' - \vec{v}'' = 0 \rightarrow \underline{\vec{u}'' = \vec{v}''}$

TORNANDO SOPRA SE $\vec{u}'' = \vec{v}''$ NECESSARIAMENTE $\underline{\vec{v}' = \vec{u}'}$

CON QUESTO <u>ABBIAMO DIMOSTRATO L'UNICITÀ DI $\vec{v}'$ E $\vec{v}''$</u>.

ORA OSSERVANDO CHE

$$\|\vec{v}''\|^2 = \alpha^2 \|\vec{w}\|^2 = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)^2 \cancel{\|\vec{w}\|^2} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\right)^2 = \cos^2(\theta)\, \|\vec{v}\|^2$$

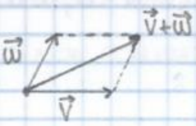
DEDUCIAMO CHE

$$\boxed{\|\vec{v}''\| = |\cos(\theta)| \cdot \|\vec{v}\|} \qquad \text{c.v.d.}$$

TEOREMA DELLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

SIANO $\vec{v}$ E $\vec{w}$ DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^n$, ALLORA:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$



(IN UN TRIANGOLO UN LATO È SEMPRE MINORE DELLA SOMMA DEGLI ALTRI DUE).

DIMOSTRAZIONE:

OSSERVIAMO CHE ENTRAMBI I TERMINI DELLA DISUGUAGLIANZA SONO NON-NEGATIVI, BASTA DIMOSTRARE CHE

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w}) \leq (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\,(\vec{v}\cdot\vec{w}) \leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| = (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2$$

PER LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ.

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 \leq (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2$$

POSSO TOGLIERE I QUADRATI PERCHÈ SONO QUANTITÀ POSITIVE:

$$\boxed{\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|} \qquad \text{c.v.d.}$$

PRODOTTO VETTORIALE

DEFINIZIONE:

DATI DUE VETTORI $\vec{u}=(u^1,u^2,u^3)$ E $\vec{v}=(v^1,v^2,v^3)$ DI $\mathbb{R}^3$, IL LORO PRODOTTO VETTORIALE È IL VETT

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u^2v^3-u^3v^2,\ -u^1v^3+u^3v^1,\ u^1v^2-u^2v^1) \leftarrow$$

CHE SI RICAVA CALCOLANDO:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u^1 & u^2 & u^3\\ v^1 & v^2 & v^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u^2 & u^3\\ v^2 & v^3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u^1 & u^3\\ v^1 & v^3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u^1 & u^2\\ v^1 & v^2\end{vmatrix}\vec{k}=(u^2v^3-u^3v^2,-u^1v^3+u^3v^1,u^1v^2+u^2v^1)$$

SE IL RISULTATO DEL PRODOTTO VETTORIALE È UN VETTORE NULLO SIGNIFICA CHE I DUE VETTORI SONO PARALLEL

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\underbrace{\sin\theta}\quad \text{SE I VETTORI SONO } /\!/,\ \theta=0 \rightarrow \sin\theta=0 \rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=(0,0,0)$$

IL PRODOTTO VETTORIALE VERIFICA LE SEGUENTI <u>PROPRIETÀ</u>:

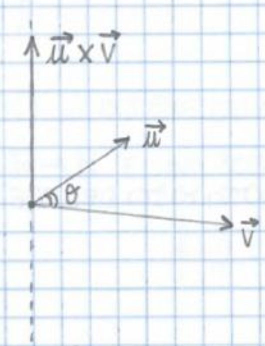
- $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ ⟵ PROPRIETÀ ALTERNANTE
- $(\lambda\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(\lambda\vec{v})=\lambda\,\vec{u}\times\vec{v}$ ⟵ PROPRIETÀ DI OMOGENEITÀ
- $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$ ⟵ PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

PER OGNI $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ E PER OGNI $\lambda\in\mathbb{R}$

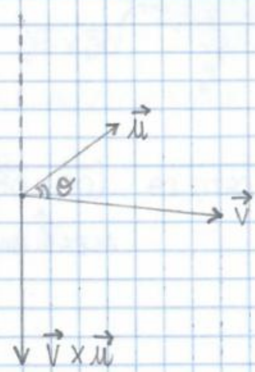
<u>CARATTERISTICHE</u> DEL PRODOTTO VETTORIALE:

- $\vec{u}\times\vec{v}$ È PERPENDICOLARE AI VETTORI $\vec{u}$ E $\vec{v}$.
- SE I VETTORI $\vec{u}$ E $\vec{v}$ SONO PARALLELI ALLORA $\vec{u}\times\vec{v}=0$.
- $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cdot\sin\theta$, DOVE θ È L'ANGOLO COMPRESO TRA $\vec{u}$ E $\vec{v}$
- SE $\vec{u}=\vec{AB}$ E $\vec{v}=\vec{AC}$, DOVE A,B,C SONO 3 PUNTI NON COLLINEARI, ALLORA $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ È IL DOPPIO DELL'AREA DEL TRIANGOLO $\overset{\triangle}{ABC}$.

1



2



IL MODULO È UGUALE IN ENTRAMBI I CASI E VALE $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{v}\times\vec{u}\|=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\sin\theta$.

SPAZI VETTORIALI

DEFINIZIONE:

SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO. UN INSIEME NON-VUOTO $\mathbb{V}$ MUNITO DI UN'OPERAZIONE DI SOMMA, CHE AD OGNI COPPIA ORDINATA (v, w) DI ELEMENTI DI $\mathbb{V}$ ASSOCIA UN'ALTRO ELEMENTO DI $\mathbb{V}$, DENOTATO CON $v+w$; E DI UN'OPERAZIONE DI PRODOTTO PER SCALARI, CHE ASSOCIA AD UN ELEMENTO $v \in \mathbb{V}$ E AD UNO SCALARE $\lambda \in \mathbb{K}$ UN ELEMENTO DI $\mathbb{V}$, DENOTATO CON λv E DETTO PRODOTTO DI v PER λ. DIREMO CHE $\mathbb{V}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$ SE VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $v+w=w+v$ ← PROPRIETÀ COMMUTATIVA
- $(v+w)+u=v+(w+u)$ ← PROPRIETÀ ASSOCIATIVA
- $\exists$ ALMENO UNO ZERO (DETTO VETTORE NULLO): $v+0=v$
- $\forall v \in \mathbb{V}$ $\exists$ UN ELEMENTO, DENOTATO CON $-v$, E DETTO OPPOSTO DI v : $v+(-v)=0$
- $\lambda(\mu v)=(\lambda\mu)v$
- $\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$ ← I PROPRIETÀ ASSOCIATIVA
- $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$ ← II PROPRIETÀ ASSOCIATIVA
- $1_{\mathbb{K}} v=v$

ESEMPIO 1

SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO, L'INSIEME $\mathbb{K}^n$ DELLE n-PLE ORDINATE $(z^1, \ldots, z^n)$ DI ELEMENTI DI $\mathbb{K}$ MUNITO DELLE OPERAZIONI DI SOMMA:

$$(v^1, \ldots, v^n)+(w^1, \ldots, w^n)=(v^1+w^1, \ldots, v^n+w^n)$$

E PRODOTTO PER SCALARI

$$\lambda(v^1, \ldots, v^n)=(\lambda v^1, \ldots, \lambda v^n)$$

È UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$. NEL CASO IN CUI $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ SI RITROVANO GLI SPAZI VETTORIALI REALI $\mathbb{R}^n$ CONSIDERATI PRECEDENTEMENTE.

ESEMPIO 2

SIA $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, L'INSIEME DELLE FUNZIONI REALI, DI UNA VARIABILE REALE C^k.
DATE $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E UNO SCALARE $\lambda \in \mathbb{R}$, DEFINIAMO

$$f+g: x \in \mathbb{R} \to f(x)+g(x) \in \mathbb{R}$$

E

$$\lambda f: x \in \mathbb{R} \to \lambda f(x) \in \mathbb{R}$$

SE f, g SONO DI CLASSE $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ANCHE $f+g$ E λf SONO DI CLASSE C^k E L'INSIEME $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ MUNITO DI TALI OPERAZIONI È UNO SPAZIO VETTORIALE REALE. IL VETTORE NULLO DI $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ È LA FUNZIONE NULLA.

2) SE $d=0$ E $P(x,y)$, $P'(x',y')$ APPARTENGONO ALLA RETTA, LE COMPONENTI $x+x'$ E $y+y'$ DI $P+P'$ VERIFICANO L'EQUAZIONE (*) E QUINDI $P+P'$ APPARTIENE ALLA RETTA. IL VETTORE λP HA COMPONENTI $(\lambda x, \lambda y)$ CHE VERIFICANO L'EQUAZIONE (*).

ALLORA LE RETTE CHE PASSANO PER L'ORIGINE SONO UNO SPAZIO VETTORIALE.

PROPRIETÀ:

L'INTERSEZIONE DI DUE SPAZI VETTORIALI È UNO SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

DIMOSTRAZIONE:

SE W_1 E W_2 SONO DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI DI V, IL VETTORE NULLO 0 APPARTIENE AD ENTRAMBI I SOTTOSPA E QUINDI È UN ELEMENTO DI $W_1 \cap W_2$; ALLORA $W_1 \cap W_2$ NON È L'INSIEME VUOTO. CONSIDERIAMO UN VETTORE $v \in W_1 \cap W_2$ E UNO SCALARE $\lambda \in K$; SICCOME ENTRAMBI I SOTTOSPAZI SONO CHIUSI RISPETTO AL PRODOTTO PER SCALARI, IL PRODOTTO λv APPARTIENE A W_1 E A W_2 ED È QUINDI UN ELEMENTO DI $W_1 \cap W_2$ PERTANTO $W_1 \cap W_2$ È CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA; ANALOGAMENTE SE $v, w \in W_1 \cap W_2$ ALLORA PER LA PROPRIETÀ DI CHIUSURA DEI SOTTOSPAZI RISPETTO ALLA SOMMA, IL VETTORE $v+w$ APPARTIENE SIA A W_1 CHE A W_2 ED È QUINDI UN ELEMENTO DI $W_1 \cap W_2$. DUNQUE L'INTERSEZIONE È UN'INSIEME NON-VUOTO, CHIUSO RISPET ALLA SOMMA E AL PRODOTTO PER SCALARI, CIOÈ $W_1 \cap W_2$ È UN SOTTOSPAZIO DI V.

COROLLARIO:

L'INTERSEZIONE DI UN NUMERO FINITO DI SOTTOSPAZI VETTORIALI È ANCORA UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

ESEMPIO:

UNA RETTA DI $\mathbb{R}^3$ È DATA DALL'INTERSEZIONE DI DUE PIANI NON PARALLELI π E π' DI $\mathbb{R}^3$ ED È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE SE E SOLO SE PASSA PER L'ORIGINE. SE I PIANI SONO DEFINITI RISPETTIVAMENTE DALLE EQUAZIONI $ax+by+cz+d=0$ E $a'x+b'y+c'z+d'=0$ ALLORA LA RETTA $\pi \cap \pi'$ È DEFINITA DAL SEGUENTE SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI NELLE INCOGNITE x, y, z:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

I PIANI NON SONO PARALLELI SE I VETTORI $n=(a,b,c)$ E $n'=(a',b',c')$ NON SONO PARALLELI, CIOÈ SE E SOLO SE $n \times n' \neq 0$. PIÙ IN GENERALE, CONSIDERIAMO I SOTTOSPAZI VETTORIALI $W_1, W_2, \dots, W_m$ DI $\mathbb{R}^n$ DEFINITI DALLE EQUAZIONI

$$a_1^J x^1 + a_2^J x^2 + \dots + a_n^J x^n \quad , \quad J=1,\dots,m$$

LA LORO INTERSEZIONE $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_m$ È IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^n$ DEFINITO DAL SEGUENTE SISTEMA DI m EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE (CON I TERMINI NOTI d E d' NULLI) NELLE n INCOGNITE $x^1, \dots, x^n$.

DIPENDENZA ED INDIPENDENZA LINEARE

DEFINIZIONE:

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$. DIREMO CHE I VETTORI $V_1, \dots, V_m$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE L'UNICA LORO COMBINAZIONE LINEARE, CHE DÀ IL VETTORE NULLO 0, È QUELLA CON TUTTI I COEFFICIENTI NULLI. IN CASO CONTRARIO I VETTORI SI DIRANNO LINEARMENTE DIPENDENTI.

OSSERVAZIONE:

SE I VETTORI $V_1, \dots, V_m$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E SE $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_m V_m = 0$ ALLORA I COEFFICIENTI $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ SONO TUTTI NULLI. IN CASO DI VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI, ESISTERANNO DEGLI SCALARI $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ NON TUTTI NULLI, TALI CHE $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_m V_m = 0$.

PROPOSIZIONE:

I VETTORI $V_1, \dots, V_m$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE E SOLO SE ALMENO UNO DI ESSI È COMBINAZIONE LINEARE DEI RIMANENTI.

DIMOSTRAZIONE:

SE $V_1, \dots, V_m$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI ALLORA ESISTONO DEGLI SCALARI $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ NON TUTTI NULLI TALI CHE

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_m V_m = 0$$

SIA AD ESEMPIO $\lambda_1 \neq 0$. ALLORA

$$\lambda_1 V_1 = -\lambda_2 V_2 - \dots - \lambda_m V_m$$

MOLTIPLICANDO ENTRAMBI I MEMBRI DELL'IDENTITÀ PER $(\lambda_1)^{-1}$ OTTENIAMO

$$V_1 = -(\lambda_1)^{-1} \lambda_2 V_2 - \dots - (\lambda_1)^{-1} \lambda_m V_m$$

QUINDI V_1 È COMBINAZIONE LINEARE DI $V_2, \dots, V_m$. VICEVERSA SUPPONIAMO CHE

$$V_1 = \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_m V_m$$

ALLORA

$$V_1 + (-\lambda_2) V_2 + \dots + (-\lambda_m) V_m = 0$$

ABBIAMO COSÌ TROVATO UNA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $V_1, \dots, V_m$ CON COEFFICIENTI NON TUTTI NULLI CHE HA COME RISULTATO IL VETTORE NULLO. PERTANTO I VETTORI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI.

COROLLARIO:

I VETTORI $V_1, \dots, V_m$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE E SOLO SE NESSUNO DI ESSI È COMBINAZIONE LINEARE DEI RIMANENTI.

PROPOSIZIONE:

SIA $(v_1, \dots, v_n)$ UNA n-PLA ORDINATA DI VETTORI DELLO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{V}$. SE PER OGNI $v \in \mathbb{V}$ ESISTE UN'UNICA n-PLA ORDINATA $(x_1, \dots, x_n)$ DI SCALARI TALI CHE $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, ALLORA $(v_1, \dots, v_n)$ È UNA BASE DI $\mathbb{V}$.

DIMOSTRAZIONE:

SE $(v_1, \dots, v_n)$ VERIFICA LE IPOTESI, ALLORA OGNI VETTORE DI $\mathbb{V}$ È COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1, \dots, v_n$ E QUINDI $\{v_1, \dots, v_n\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI. SE $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$, ALLORA PER L'IPOTESI DI UNICITÀ TUTTI I COEFFICIENTI $x_1, \dots, x_n$ SONO NULLI. QUESTO DIMOSTRA LA LINEARE INDIPENDENZA DEI VETTORI $v_1, \dots, v_n$.

ESEMPIO:

VERIFICHIAMO CHE $v_1 = (1,2)$ E $v_2 = (-1,3)$ FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$ DIMOSTRANDO CHE PER OGNI $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ESISTE UN'UNICA COPPIA (x_1, x_2) DI NUMERI REALI TALI CHE

$$(a,b) = x_1(1,2) + x_2(-1,3) = (x_1 - x_2,\ 2x_1 + 3x_2)$$

EGUAGLIANDO LE COMPONENTI SI VEDE CHE x_1, x_2 SONO SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} a = x_1 - x_2 \\ b = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

CHE HA COME <u>UNICA</u> SOLUZIONE

$$x_1 = \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b$$

$$x_2 = -\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b$$

TEOREMA DI ESISTENZA DELLA BASE:

UN INSIEME FINITO $J = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ DI VETTORI DI $\mathbb{V}$ SI DICE LIBERO SE $v_1, \dots, v_p$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI. OVVIAMENTE, OGNI SOTTOINSIEME NON VUOTO DI UN INSIEME LIBERO È LIBERO.

PROPRIETÀ:

SE $J = \{v_1, \dots, v_p\}$ È UN INSIEME LIBERO E SE $v_{p+1} \notin L(v_1, \dots, v_p)$ ALLORA $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}\}$ È LIBERO.

DIMOSTRAZIONE:

SUPPONIAMO CHE $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} v_{p+1} = 0$. SE $\lambda_{p+1} \neq 0$ ALLORA

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0$$

POICHÉ J È LIBERO, I COEFFICIENTI $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ SONO NULLI. SE $\lambda_{p+1} \neq 0$ ALLORA

ORA ANALIZZO I VETTORI w_2 E w_3, E VEDO CHE SONO LINEARMENTE DIPENDETI DA w_1 ($w_2 = 4w_1$, $w_3 = -3w_1$)

DATO CHE w_4 È LINERMENTE INDIPENDENTE DA w_1, PONGO $V_2 = w_4$.

ORA VEDO CHE w_5 E w_6 SONO LINEARMENTE DIPENDENTI DA w_4 ($w_5 = -2w_4$, $w_6 = -7w_4$) QUINDI LI ESCLUDO

DATO CHE w_7 E w_8 SONO ENTRAMBI LINEARMENTE INDIPENDENTI DA V_1 E V_2 LI PRENDO E ASSEGNO $V_3 = w_7$ E $V_4 = w_8$.

A QUESTO PUNTO OTTENGO CHE $I = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ È UN INSIEME LIBERO DI GENERATORI ED È UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$.

PER VERIFICARE CON I CALCOLI CHE, AD ESEMPIO, w_7 NON È LINEARMENTE DIPENDENTE DA V_1 E V_2 FACCIO IL PRODOTTO MISTO, E VERIFICO CHE SIA $\neq 0$.

$$\begin{array}{c|ccc|cc} V_1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ V_2 & -6 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ w_7 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} = 1 - 18 - 1 + 12 = -6 \neq 0 \longrightarrow \text{POSSO PRENDERE } w_7.$$

LEMMA:

SIANO $V_1, \dots, V_p$ DEI VETTORI DI $\mathbb{V}$ E SIA $w = x_1V_1 + \dots + x_JV_J + \dots + x_pV_p$ UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE CON $x_J \neq 0$, ALLORA $L(V_1, \dots, V_p) = L(V_1, \dots, V_{J-1}, w, V_{J+1}, \dots, V_p)$

PROPRIETÀ:

SE $B = (V_1, \dots, V_n)$ È UNA BASE DI $\mathbb{V}$ E SE $J = \{w_1, \dots, w_p\}$ È UN INSIEME LIBERO, ALLORA $p \leq n$.

COROLLARIO:

TUTTE LE BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO $\mathbb{V}$ HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI.

DEFINIZIONE:

IL NUMERO DEGLI ELEMENTI DI UNA BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO $\mathbb{V}$, SI DICE "LA DIMENSIONE" DI $\mathbb{V}$ E VIENE INDICATO CON $\dim(\mathbb{V})$. SE $\mathbb{V} = \{0\}$ SI PONE $\dim(\mathbb{V}) = 0$. IN TUTTI GLI ALTRI CASI $\dim(\mathbb{V}) > 0$

ESEMPI:

- LA BASE CANONICA DI $\mathbb{K}^n$ HA n ELEMENTI, QUINDI $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- I MONOMI $1, x, x^2, \dots, x^m$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E GENERANO LO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}[x]_{(m)}$ DEI POLINOMI DI GRADO $\leq m$. QUINDI $\dim(\mathbb{R}[x]_{(m)}) = m+1$.

PROPRIETÀ:

SIA $\mathbb{V}$ UNO SPAZIO VETTORIALE n-DIMENSIONALE. OGNI SOTTOSPAZIO $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ È FINITAMENTE GENERATO E HA DIMENSIONE $\leq n$. L'UGUAGLIANZA VALE SE E SOLO SE $\mathbb{W} = \mathbb{V}$.

TEOREMA:

SIA $\mathbb{V}$ UNO SPAZIO VETTORIALE n-DIMENSIONALE E SIA $J = \{V_1, \dots, V_p\}$ UN INSIEME LIBERO CON $p < n$ ELEMENTI. ALLORA ESISTONO $V \dots V \in \mathbb{V}$ TALI CHE $(V \dots V \dots V)$ È UNA BASE DI $\mathbb{V}$.

ALLORA $U = L(a_1, \dots, a_m)^\perp$, DOVE $a_1 = (a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$.

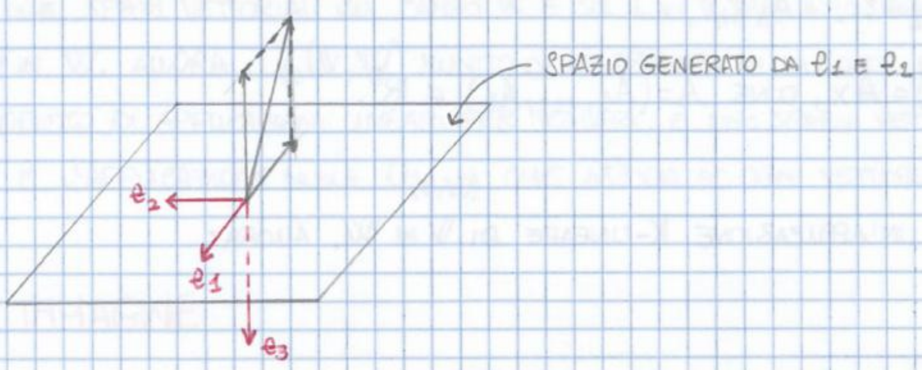
TEOREMA:

SE $\mathbb{W}$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^n$, ALLORA $\mathbb{W}^\perp$ È ANCORA UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE E $\mathbb{R}^n = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$ ($\oplus$ = SOMMA DIRETTA).

DEFINIZIONE:

SIA $\mathbb{W}$ UN SOTTOSPAZIO PROPRIO DI $\mathbb{R}^n$. PER OGNI VETTORE $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ESISTONO E SONO UNICI $\vec{v}' \in \mathbb{W}$ E $\vec{v}'' \in \mathbb{W}^\perp$ TALI CHE $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$. IL VETTORE $\vec{v}'$, DENOTATO ANCHE CON IL SIMBOLO $P_W(V)$, SI DICE PROIEZIONE ORTOGONALE DI V SUL SOTTOSPAZIO $\mathbb{W}$.

AD ESEMPIO, NEL CASO IN CUI $\mathbb{W} = L(u)$ CON $u \neq 0$, LA PROIEZIONE ORTOGONALE $P_W(V)$ COINCIDE CON LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI $\vec{v}$ SU u.



DEFINIZIONE:

SIA $\mathbb{W}$ UN SOTTOSPAZIO PROPRIO DI $\mathbb{R}^n$. UNA BASE ORTONORMALE $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ DI $\mathbb{R}^n$ TALE C

$$\mathbb{W} = L(e_1, \dots, e_p) \qquad \mathbb{W}^\perp = L(e_{p+1}, \dots, e_n)$$

SI DICE ADATTATA ALLA SOMMA DIRETTA $\mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$.

APPLICAZIONI LINEARI

DEFINIZIONE:

SIANO $\mathbb{V}$ E $\mathbb{W}$ DUE SPAZI VETTORIALI SUL CAMPO $\mathbb{K}$, UN'APPLICAZIONE $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ DI $\mathbb{V}$ IN $\mathbb{W}$ SI DICE LINEARE SE:

- $f(v+u) = f(v) + f(u) \quad \forall v, u \in \mathbb{V}$ (f COMPATIBILE RISPETTO ALLA SOMMA)
- $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$. ($f$ OMOGENEA RISPETTO AL PRODOTTO PER SCALARI)

LE APPLICAZIONI LINEARI DI $\mathbb{V}$ IN $\mathbb{V}$ SONO DETTI ENDOMORFISMI DELLO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{V}$. L'INSIEME DI TUTTE LE APPLICAZIONI LINEARI DA $\mathbb{V}$ IN $\mathbb{W}$ VIENE INDICATO CON $L_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, MENTR CON LA NOTAZIONE $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ DENOTIAMO L'INSIEME DEGLI ENDOMORFISMI DI $\mathbb{V}$.

PROPOSIZIONE:

SIANO $f, g: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ E $h, i: \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ DELLE APPLICAZIONI $\mathbb{K}$-LINEARI E SIANO λ, μ DUE SCALARI, ALLORA:

- $f+g: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ È LINEARE
- $\lambda f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ È LINEARE
- $h \circ f: \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ È LINEARE
- $h \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda (h \circ f) + \mu (h \circ g)$
- $(\lambda h + \mu i) \circ f = \lambda (h \circ f) + \mu (i \circ f)$

PROPOSIZIONE:

SIANO $\mathbb{V}$ E $\mathbb{W}$ DUE SPAZI VETTORIALI SUL CAMPO $\mathbb{K}$ E SIA $L_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ L'INSIEME DELLE APPLICAZIO $\mathbb{K}$-LINEARI DA $\mathbb{V}$ IN $\mathbb{W}$. ALLORA $L_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ MUNITO DELLE OPERAZIONI DI SOMMA DI APPLICAZIONI LINEARI E DI PRODOTTO DI APPLICAZIONI LINEARI PER SCALARI, È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$.

IL VETTORE NULLO È L'APPLICAZIONE NULLA $O_{(\mathbb{V},\mathbb{W})}$ CHE ASSOCIA AD OGNI VETTORE DI $\mathbb{V}$ IL VETTORE NULLO DI $\mathbb{W}$.

NUCLEO ED IMMAGINE

DEFINIZIONE:

SIA $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ UN'APPLICAZIONE $\mathbb{K}$-LINEARE. IL NUCLEO DI f, DENOTATO CON $Ker(f)$ È IL SOTTOINSIEME FORMATO DAI VETTORI $v \in \mathbb{V}$, AVENTI COME IMMAGINE IL VETTORE NULLO DI $\mathbb{W}$.

L'IMMAGINE DI f, INDICATA CON $Im(f)$, È IL SOTTOINSIEME DI $\mathbb{W}$ COMPOSTO DAI VETTORI DI $\mathbb{W}$ CHE SONO IMMAGINE DI ALMENO UN VETTORE DI $\mathbb{V}$:

$$Ker(f) = \{v \in \mathbb{V} : f(v) = 0_{\mathbb{W}}\} \subseteq \mathbb{V}$$

$$Im(f) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V} \text{ TALE CHE } f(v) = w\} \subseteq \mathbb{W}$$

PROPOSIZIONE:

SIA $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ UN'APPLICAZIONE LINEARE. ALLORA $Ker(f)$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{V}$ E $Im(f)$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{W}$.

PROPOSIZIONE:

SIA $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ UN'APPLICAZIONE LINEARE, ALLORA:

- f È INIETTIVA SE E SOLO SE $Ker(f) = \{0_{\mathbb{V}}\}$
- f È SURIETTIVA SE E SOLO SE $Im(f) = \mathbb{W}$
- f È BIETTIVA SE E SOLO SE $Im(f) = \mathbb{W}$ E $Ker(f) = \{0_{\mathbb{V}}\}$
- SE f È BIETTIVA ALLORA L'APPLICAZIONE INVERSA $f^{-1}: \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ È LINEARE

PROPOSIZIONE:

SIA $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ UN ISOMORFISMO DI $\mathbb{V}$ IN $\mathbb{W}$. SE $\mathbb{V}$ HA DIMENSIONE FINITA n ALLORA ANCHE $\mathbb{W}$ È FINITAMENTE GENERATO ED HA DIMENSIONE n.

PROPOSIZIONE:

SIANO $\mathbb{V}$ E $\mathbb{W}$ DUE SPAZI VETTORIALI SUL CAMPO $\mathbb{K}$. SUPPONIAMO CHE $\mathbb{V}$ SIA FINITAMENTE GENERATO, DI DIMENSIONE n. SIA $B=(V_1,\dots,V_n)$ UNA BASE DI $\mathbb{V}$ E $B'=(W_1,\dots,W_n)$ UNA n-PLA ORDINATA DI VETTORI DI $\mathbb{W}$, ALLORA ESISTE UN'UNICA APPLICAZIONE LINEARE $f_{(B',B)}(V_1)=W_1,\dots,f_{(B',B)}(V_n)=W_n$.

APPLICAZIONI LINEARI (PARTE 3)

PROPOSIZIONE:

SIANO $\mathbb{V}$ E $\mathbb{W}$ DUE SPAZI VETTORIALI SUL CAMPO $\mathbb{K}$. SUPPONIAMO CHE $\mathbb{V}$ SIA FINITAMENTE GENERATO, DI DIMENSIONE n. SIA $B=(V_1,\dots,V_n)$ UNA BASE DI $\mathbb{V}$ E SIA $B'=(w_1,\dots,w_n)$ UNA n-PLA ORDINATA DI VETTORI DI $\mathbb{W}$, ALLORA ESISTE UN'UNICA APPLICAZIONE LINEARE $f_{(B',B)}: \mathbb{V}\to\mathbb{W}$ TALE CHE

$$f_{(B',B)}(V_1)=w_1,\dots,f_{(B',B)}(V_n)=w_n$$

COROLLARIO:

DUE SPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI SUL CAMPO $\mathbb{K}$ SONO <u>ISOMORFI</u>, SE E SOLO SE HANNO LA STESSA DIMENSIONE. IN PARTICOLARE, OGNI SPAZIO VETTORIALE n-DIMENSIONALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$ È ISOMORFO A $\mathbb{K}^n$.

OSSERVAZIONE:

PER COSTRUIRE UN ISOMORFISMO TRA DUE SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE n SUL CAMPO $\mathbb{K}$, OCCORRE FISSARE UNA BASE B DI $\mathbb{V}$ E UNA BASE B' DI $\mathbb{W}$, E CONSIDERARE L'ISOMORFISMO $f_{B',B}: \mathbb{V}\to\mathbb{W}$, CHE MANDA GLI ELEMENTI DI B NEI CORRISPONDENTI ELEMENTI DI B'. OGNI ISOMORFISMO DI $\mathbb{V}$ IN $\mathbb{W}$ PUÒ ESSERE COSTRUITO CON QUESTA PROCEDURA.

IN PARTICOLARE SE VOGLIAMO STABILIRE UN ISOMORFISMO $\mathbb{V}\to\mathbb{K}^n$, È SUFFICIENTE SCEGLIERE UNA BASE B DI $\mathbb{V}$ E PRENDERE L'APPLICAZIONE LINEARE $f_{B_0,B}$, CHE MANDA GLI ELEMENTI DI B NEI CORRISPONDENTI ELEMENTI DELLA BASE CANONICA B_0 DI $\mathbb{K}^n$.

TEOREMA:

SIANO $\mathbb{V}$ E $\mathbb{W}$ DUE SPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI SU $\mathbb{K}$ E SIA $f: \mathbb{V}\to\mathbb{W}$ UN'APPLICAZIONE LINEARE. ALLORA

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim\left[\operatorname{Im}^{f}(\mathbb{V})\right] + \dim\left[\ker^{f}(\mathbb{V})\right]$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \\ \vdots \\ A_1^n \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} A_2^1 \\ A_2^2 \\ \vdots \\ A_2^n \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots \quad A_m = \begin{pmatrix} A_m^1 \\ A_m^2 \\ \vdots \\ A_m^n \end{pmatrix}$$

OPPURE, AL CONTRARIO, POSSIAMO PENSARE LA MATRICE A COME UNA COLONNA:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

FORMATA DA n VETTORI RIGA CON m ELEMENTI:

$$A_1 = (A_1^1 \ A_2^1 \ \ldots \ A_m^1)$$
$$A_2 = (A_1^2 \ A_2^2 \ \ldots \ A_m^2)$$
$$\vdots$$
$$A_n = (A_1^n \ A_2^n \ \ldots \ A_m^n)$$

NOTAZIONI:

UN' ACCORGIMENTO UTILE PER EFFETTUARE CERTI TIPI DI CALCOLI È LA NOTAZIONE A BLOCCHI, CHE CONSISTE NELLO SCRIVERE UNA MATRICE $A \in \mathbb{K}(n,m)$ NELLA FORMA

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}$$

CON

$$B \in \mathbb{K}(p,q) \qquad C \in \mathbb{K}(p, m-q) \qquad D \in \mathbb{K}(n-p, q) \qquad F \in \mathbb{K}(n-p, m-q)$$

DOVE

$$1 \leq p \leq n \quad , \quad 1 \leq q \leq m.$$

AD ESEMPIO LA MATRICE 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

POSSO SCRIVERLA COME

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}$$

LA SOMMA A+B È:

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 8 & 8\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

LA MATRICE 3A È:

$$3A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ -3 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE:

IL TRASPOSTO DI UN VETTORE RIGA $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, CHE SI INDICA CON ${}^tX$, È IL VETTORE COLONNA

$${}^tX=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}_m$$

ANALOGAMENTE, IL TRASPOSTO DI UN VETTORE COLONNA $Y=\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}_m$, CHE SI INDICA CON ${}^tY$, È IL VETTORE RIGA

$${}^tY=(y^1, y^2,\dots, y^n)\in\mathbb{K}^n$$

PIÙ IN GENERALE LA TRASPOSTA DI UNA MATRICE $A\in\mathbb{K}(n,m)$ DI TIPO (n,m), È LA MATRICE ${}^tA$ DI TIPO (m,n) OTTENUTA INVERTENDO IL RUOLO DELLE RIGHE E DELLE COLONNE DI A.

AD ESEMPIO, SE $A_1,\dots,A_m$ SONO LE COLONNE DI A, ALLORA

$${}^tA=\begin{pmatrix}{}^tA_1\\ {}^tA_2\\ \vdots\\ {}^tA_m\end{pmatrix}$$

ESEMPI:

LA ~~M.~~TRASPOSTA DELLA MATRICE 2X3

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\in\mathbb{K}(n,m)\quad \mathbb{R}(2,3)$$

È LA MATRICE 3X2

$${}^tA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\in\mathbb{K}(m,n)\quad \mathbb{R}(3,2)$$

ESEMPI:

LA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3,3)$$

È SIMMETRICA.

LA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3,3)$$

È ANTISIMMETRICA.

LA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3,3)$$

È DIAGONALE.

DEFINIZIONE:

CHIAMIAMO CONTRAZIONE DEL VETTORE RIGA $Y \in \mathbb{K}_n$ CON IL VETTORE COLONNA $X \in \mathbb{K}^n$, LO SCALARE DEFINITO NEL MODO SEGUENTE

$$\langle Y|X\rangle = Y_1X^1 + Y_2X^2 + \dots + Y_nX^n$$

N.B: POSSO MOLTIPLICARE UNA MATRICE A PER UNA MATRICE B SOLO SE IL NUMERO DI COLONNE DI A È PARI AL NUMERO DI RIGHE DI B.

PROPRIETÀ:

i) $\langle Y|X\rangle = \langle {}^tX|{}^tY\rangle$

ii) $\langle Y|\lambda X+\mu X'\rangle = \lambda\langle Y|X\rangle + \mu\langle Y|X'\rangle$

iii) $\langle \lambda Y+\mu Y'|X\rangle = \lambda\langle Y|X\rangle + \mu\langle Y'|X\rangle$

PER OGNI $Y, Y' \in \mathbb{K}_n$, PER OGNI $X, X' \in \mathbb{K}^n$ E PER OGNI $\lambda, \mu \in \overset{\mathbb{K}}{\mathbb{R}}$

INOLTRE SI HA:

iiii) SE $\langle Y|X\rangle = 0 \ \forall X \in \mathbb{K}^n$ ALLORA $Y=0$.

iiiii) SE $\langle Y'|X'\rangle = 0 \ \forall Y' \in \mathbb{K}_n$ ALLORA $X'=0$.

IL SISTEMA VIENE DETTO <u>SISTEMA ASSOCIATO ALLA MATRICE A</u>.

- LA DIMENSIONE DI $N(A)$ È DETTA <u>INDICE DI NULLITÀ</u>, E VIENE INDICATO CON $\nu(A)$.
- INDICHIAMO CON $C(A)$ IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{K}^m$ GENERATO DAI VETTORI COLONNA $A_1, \dots, A_n$ DI A.
- LA DIMENSIONE DI $C(A)$ VIENE DETTA <u>RANGO DELLA MATRICE</u> ED È INDICATA CON $\rho(A)$
- CON LA NOTAZIONE $R(A)$ DENOTIAMO IL SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{K}_n$ GENERATO DAI VETTORI RIGA $A^1, \dots, A^m$ DELLA MATRICE A.

PROPRIETÀ:

SIA $A \in \mathbb{K}(m,n)$ UNA MATRICE CON m RIGHE ED n COLONNE. L'APPLICAZIONE $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ DEFINITA DA

$$L_A : X \in \mathbb{K}^n \to A \cdot X \in \mathbb{K}^m$$

È LINEARE.

COROLLARIO:

PER OGNI $A \in \mathbb{K}(m,n)$ VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ

i) $N(A) = \mathrm{Ker}(L_A)$
ii) $C(A) = \mathrm{Im}(L_A)$
iii) $\rho(A) = n - \nu(A)$

OSSERVAZIONE:

DALLA PROPRIETÀ PRECEDENTE SI VEDE CHE LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE OMOGENEO $A \cdot X = 0$ HA DIMENSIONE $n - \rho(A)$. SE IL RANGO DI A È MASSIMO, IL SISTEMA HA SOLO LA SOLUZIONE TRIVIALE $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$. SUPPONIAMO CHE $\rho(A) < n$ E SIANO

$$N_1 = \begin{bmatrix} N_1^1 \\ N_1^2 \\ \vdots \\ N_1^n \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} N_2^1 \\ N_2^2 \\ \vdots \\ N_2^n \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad N_\nu = \begin{bmatrix} N_\nu^1 \\ N_\nu^2 \\ \vdots \\ N_\nu^n \end{bmatrix}$$

DEI GENERATORI L.I. DI $N(A)$. ALLORA DIREMO CHE $(N_1, \dots, N_\nu)$ È UN <u>SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI</u> DEL SISTEMA OMOGENEO $A \cdot X = 0$.

PER COSTRUZIONE $N_1, \dots, N_\nu$ SONO SOLUZIONI DEL SISTEMA ED OGNI ALTRA SOLUZIONE È COMBINAZIONE LINEARE DI $N_1, \dots, N_\nu$.

DOMANDA 2:

SCRIVERE IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO ASSOCIATO ALLA MATRICE.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{cases} X_2 + 9X_4 = 0 \\ X_3 + X_4 = 0 \\ X_5 = 0 \\ 0 \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} X_2 + 9X_4 = 0 \\ X_3 + X_4 = 0 \\ X_5 = 0 \end{cases}$$

DOMANDA 3:

TROVARE LA SOLUZIONE GENERALE DEL SISTEMA OMOGENEO E CALCOLARE UN SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI.

$$\begin{cases} X_2 = -9X_4 \\ X_3 = -2X_4 \\ X_5 = 0 \end{cases}$$

IL SISTEMA HA DUE PARAMETRI LIBERI: X_1 E X_4 QUINDI

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ -9X_4 \\ -2X_4 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + X_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$\Longrightarrow \quad N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \text{SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI.}$$

OGNI SOLUZIONE È COMBINAZIONE LINEARE DI N_1 E N_2.

DOMANDA 4:

TROVARE UNA BASE DEL NUCLEO DELLA MATRICE A.

IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^5$ GENERATO DAI VETTORI N_1 E N_2, È UNA BASE DEL NUCLEO DELLA MATRICE.

DOMANDA 5:

L'APPLICAZIONE LINEARE L_A ASSOCIATA ALLA MATRICE VÀ DA DOVE A DOVE? COME AGISCE?

LA MATRICE A HA 5 COLONNE E 4 RIGHE, QUINDI L'APPLICAZIONE LINEARE ANDRÀ DA $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$.

DEFINIZIONE:

UNA MATRICE NON-NULLA $A \in \mathbb{K}(m,n)$ TALE CHE

R1) LE RIGHE NULLE STANNO AL DI SOTTO DELLE RIGHE NON-NULLE.

R2) SE $A^1, \dots, A^r$ SONO LE RIGHE NON-NULLE E SE $A^a_{h(a)}$ È IL PRIMO ELEMENTO NON-NULLO DI A^a, CON $a = 1, \dots, r$; ALLORA $1 \leq h(1) < h(2) < \dots < h(r) \leq n$.

SI DICE <u>RIDOTTA A GRADINI RISPETTO ALLE RIGHE</u>. SE VALGONO ANCHE LE CONDIZIONI

R3) $A^a_{h(a)} = 1_{\mathbb{K}}$, PER OGNI $a = 1, \dots, r$.

R4) $A^b_{h(a)} = 0_{\mathbb{K}}$, PER OGNI $a = 1, \dots, r$ E PER OGNI $b < a$.

ALLORA A SI DICE <u>NORMALIZZATA RISPETTO ALLE RIGHE</u>. L'ELEMENTO $A^a_{h(a)}$ DI UNA MATRICE RIDOTTA A GRADINI SI DICE L'ELEMENTO PRINCIPALE DELLA a-ESIMA RIGA DI A.

ESEMPIO 1:

LA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NON È RIDOTTA A GRADINI PERCHÉ ABBIAMO UNA RIGA NULLA CHE SI TROVA TRA DUE RIGHE NON-NULLE.

ESEMPIO 2:

LA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NON È RIDOTTA A GRADINI PERCHÉ IL PRIMO ELEMENTO NON-NULLO DELLA SECONDA RIGA DI A, SI TROVA A SINISTRA DEL PRIMO ELEMENTO NON-NULLO DELLA PRIMA RIGA DI A, CIÒ NON PUÒ SUCCEDERE NELLE MATRICI RIDOTTE A GRADINI, PER LA CONDIZIONE (R2).

ESEMPIO 3:

LA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

È RIDOTTA A GRADINI RISPETTO ALLE RIGHE

COROLLARIO:

SIA $A \cdot X = b$ UN SISTEMA LINEARE DI m-EQUAZIONI IN n-INCOGNITE, CON MATRICE DEI COEFFICIENTI $A \in \mathbb{K}(m,n)$ NORMALIZZATA RISPETTO ALLE RIGHE, CON RANGO ρ. IL SISTEMA È COMPATIBILE SE E SOLO SE

$$b^a = 0, \quad \rho < a \leq m$$

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO IL SISTEMA LINEARE $A \cdot X = b$, CON MATRICE DEI COEFFICIENTI

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E TERMINE NOTO

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VEDO CHE IL SISTEMA È COMPATIBILE PERCHÉ LA MATRICE A HA RANGO 3, E NELLA COLONNA DEI COEFFICIENTI TUTTI GLI ELEMENTI SOTTO AL TERZO SONO ZERO. SE NON FOSSE STATO COSÌ, CIOÈ IL QUARTO ELEMENTO DELLA COLONNA b FOSSE STATO NON-NULLO, IL SISTEMA SAREBBE STATO INCOMPATIBILE.

IL SISTEMA È DATO DALLE TRE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_6 = 3 \\ x_3 + x_4 + 2x_6 = 1 \\ x_5 + 3x_6 = 1 \end{cases}$$

PONENDO UGUALI A ZERO TUTTE LE VARIABILI LIBERE (CIOÈ x_1, x_4, x_6) OTTENIAMO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE

$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 1 \end{cases} \Longrightarrow X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TENENDO PRESENTE QUANTO DETTO IN UN ESEMPIO PRECEDENTE, SI DEDUCE CHE LA SOLUZIONE GENERALE DEL SISTEMA È DATA DA

COSÌ FACENDO OTTENGO

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & -16 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

CHE È RIDOTTA A GRADINI RISPETTO ALLE RIGHE.

PROPRIETÀ:

SE A' È OTTENUTA DA A CON UN NUMERO FINITO DI OPERAZIONI ELEMENTARI (NORMALIZZAZIONE INCLUSA) ALLORA

$$R(A') = R(A)$$

IN PARTICOLARE A E A' HANNO LO STESSO RANGO.

ESEMPIO:

SI CONSIDERI IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE $W \subset \mathbb{R}^5$ GENERATO DAI VETTORI

$$w_1 = (1, 3, 2, -3, 1)$$
$$w_2 = (6, 3, 1, 2, 1)$$
$$w_3 = (19, 12, 5, 3, 4)$$

PER DETERMINARE UNA BASE DI W SI PROCEDE NEL MODO SEGUENTE:

i) SI CONSIDERA LA MATRICE A CON VETTORI RIGA w_1, w_2, w_3.

ii) SI AGISCE SU A CON IL METODO DI RIDUZIONE OTTENENDO UNA MATRICE A' RIDOTTA A GRADINI RISPETTO ALLE RIGHE.

iii) I VETTORI NON NULLI DI A' FORMANO UNA BASE DEL SOTTOSPAZIO.

IL PROCEDIMENTO FUNZIONA IN GENERALE, QUALUNQUE SIA IL NUMERO DI GENERATORI E PER OGNI CAMPO DEGLI SCALARI.

NEL CASO CONSIDERATO LA MATRICE A È DATA DA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 19 & 12 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -15 & -11 & 20 & -5 \\ 19 & 12 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow R^2 - 6R^1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow R^2 - R^1 \\ \leftarrow R^3 + R^1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow R^3 - 6R^2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow R^1 - 2R^2 \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 5/11 & 5/11 \\ 0 & 0 & -11 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow R^1 - \frac{5}{11} R^3 \\ \leftarrow R^2 + \frac{2}{11} R^3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 5/11 & 5/11 \\ 0 & 0 & 1 & -8/11 & -8/11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow -\frac{1}{11} R^3 \end{matrix} \Longrightarrow (A'|b') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 5/11 & 5/11 \\ 0 & 0 & 1 & -8/11 & -8/11 \end{pmatrix}$$

È LA MATRICE NORMALIZZATA CHE SI OTTIENE DA $(A|b)$ CON IL METODO DI RIDUZIONE.

ALLORA IL SISTEMA ORIGINARIO È EQUIVALENTE AL SISTEMA RIDOTTO

$$\begin{cases} x_1 - \frac{7}{11} x_4 = \frac{4}{11} \\ x_2 + \frac{5}{11} x_4 = \frac{5}{11} \\ x_3 - \frac{8}{11} x_4 = -\frac{8}{11} \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} x_4 + \frac{4}{11} \\ -\frac{5}{11} x_4 + \frac{5}{11} \\ \frac{8}{11} x_4 - \frac{8}{11} \\ x_4 \end{pmatrix}$$

IMPOSTAZIONE PROBLEMA:

CONSIDERIAMO DUE MATRICI $A \in \mathbb{K}(m,n)$ E $X \in \mathbb{K}(n,h)$ TALI CHE

$$A \cdot X = B$$

PONIAMO

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^m & A_2^m & \dots & A_n^m \end{pmatrix}$$

DI X E B METTIAMO IN EVIDENZA LE RIGHE

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \dots \\ X^n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \dots \\ b^m \end{pmatrix}$$

NOTA:

$X \in \mathbb{K}(n,h)$ E $B \in \mathbb{K}(m,h) \Longrightarrow$ LE RIGHE DI B E QUELLE DI X HANNO LO STESSO NUMERO DI

TEOREMA:

i) $A \cdot X = B$ È COMPATIBILE SE E SOLO SE $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|B)$.

ii) SE $A \cdot X = B$ È COMPATIBILE, ALLORA LA SOLUZIONE GENERALE DIPENDE DA $n - \ell$ VARIABILI VETTORIALI LIBERE.

iii) OGNI SISTEMA CON INCOGNITE VETTORIALI È EQUIVALENTE AD UN SISTEMA LA CUI MATRICE DEI COEFFICIENTI È NORMALIZZATA RISPETTO ALLE RIGHE.

iv) SE A È NORMALIZZATA RISPETTO ALLE RIGHE ALLORA $A \cdot X = B$ È COMPATIBILE SE E SOLO SE $b^a = 0$, $\forall a$ TALE CHE $\text{Rango}(A) < a \leq m$.

v) SE IL SISTEMA È COMPATIBILE E A È NORMALIZZATA RISPETTO ALLE RIGHE ALLORA LA MATRICE $X' \in \mathbb{K}(n,h)$ TALE CHE $X'^{h(a)} = b^a$, $a = 1, \dots, \ell$; $X'^J = 0$, $J = 1, \dots, n$ E $J \neq h(1), \dots, h(\ell)$ È UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA.

vi) SE A È NORMALIZZATA RISPETTO ALLE RIGHE E SE IL SISTEMA È COMPATIBILE E $\text{Rango}(A) = n$, ALLORA X' È L'UNICA SOLUZIONE DEL SISTEMA.

ESEMPIO:

ILLUSTRIAMO IL PROCEDIMENTO DI RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI AD INCOGNITE VETTORIALI CON UN ESEMPIO. IL SISTEMA È FORMATO DA DUE EQUAZIONI NELLE TRE INCOGNITE VETTORIALI $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^2$.

$$2X_1 + X_2 - X_3 = (3,0)$$
$$-X_1 + 3X_2 + 2X_3 = (0,1)$$

LA MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA È

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow R^2 + 2R^1 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5/7 & -9/7 & 1/7 \\ 0 & 7 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow R^1 - \frac{3}{7}R^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/7 & 9/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & 3/7 & 2/7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -R^1 \\ \leftarrow \frac{1}{7}R^2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} X_1 - \frac{5}{7}X_3 = \left(\frac{9}{7}, -\frac{1}{7}\right) \\ X_2 + \frac{3}{7}X_3 = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right) \end{cases}$$

$$X_1 = \left(\frac{9}{7}, -\frac{1}{7}\right) + \frac{5}{7}X_3$$

$$X_2 = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right) - \frac{3}{7}X_3$$

CON X_3 UN ARBITRARIO VETTORE DI $\mathbb{R}^2$.

LA MATRICE IDENTITÀ I_n APPARTIENE A $GL(\mathbb{K},n)$. QUINDI, $GL(\mathbb{K},n)$ È UN INSIEME NON VUOTO SU CUI È DEFINITA UN'OPERAZIONE DI MOLTIPLICAZIONE

$$(A,B) \in GL(\mathbb{K},n) \times GL(\mathbb{K},n) \longrightarrow A \cdot B \in GL(\mathbb{K},n)$$

DEFINIZIONE:

UNA MATRICE $A \in \mathbb{K}(n,n)$ SI DICE ORTOGONALE SE $A \cdot {}^tA = I_n$. L'INSIEME DELLE MATRICI ORTOGONALI È DENOTATO CON $O(\mathbb{K},n)$. OGNI MATRICE $A \in O(n,\mathbb{K})$ È INVERTIBILE E $A^{-1} = {}^tA$. LA MATRICE UNITÀ I_n È ORTOGONALE. QUINDI $O(n,\mathbb{K})$ È UN SOTTOINSIEME NON VUOTO DI $GL(\mathbb{K},n)$. VERIFICHIAMO CHE $O(\mathbb{K},n)$ È CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO E CHE L'INVERSA DI UNA MATRICE ORTOGONALE È ORTOGONALE. SE $A,B \in O(n,\mathbb{K})$, ALLORA

$$(A \cdot B) \cdot {}^t(A \cdot B) = (A \cdot B)({}^tB \cdot {}^tA) = A(B \cdot {}^tB) \cdot {}^tA = A \cdot I_n \cdot {}^tA = A \cdot {}^tA = I_n$$

INOLTRE, SE $A \cdot {}^tA = I_n$ ALLORA

$${}^tA \cdot A = {}^t(A \cdot {}^tA) = {}^t(I_n) = I_n$$

QUINDI $O(n,\mathbb{K})$ È UN GRUPPO DI MATRICI DETTO GRUPPO ORTOGONALE DI ORDINE n CON ELEMENTI NEL CAMPO $\mathbb{K}$.

ESEMPIO:

UNA MATRICE REALE 2X2

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}$$

È ORTOGONALE SE E SOLO SE

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix}}_{{}^tA} = \begin{pmatrix} (A_1^1)^2 + (A_2^1)^2 & A_1^1 A_1^2 + A_2^1 A_2^2 \\ A_1^2 A_1^1 + A_2^2 A_2^1 & (A_1^2)^2 + (A_2^2)^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_n}$$

CIOÈ, A È ORTOGONALE SE E SOLO SE I VETTORI RIGA FORMANO UNA BASE ORTOGONALE DI $\mathbb{R}^2$.
SCAMBIANDO IL RUOLO DELLE RIGHE E DELLE COLONNE (CIOÈ IMPONENDO LA CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ DELLA MATRICE TRASPOSTA), I VETTORI COLONNA DI A FORMANO UNA BASE ORTOGONALE DI $\mathbb{R}^2$.
LE UGUAGLIANZE

$$(A_1^1)^2 + (A_2^1)^2 = 1 \quad , \quad (A_1^2)^2 + (A_2^2)^2 = 1$$

IMPLICANO L'ESISTENZA DI $u, v \in [0, 2\pi)$ TALI CHE

$$(A_1^1, A_2^1) = (\cos(u), \sin(u))$$
$$(A_1^2, A_2^2) = (\cos(v), \sin(v))$$

SCAMBIANDO IL RUOLO DELLE BASI SI DEFINISCE LA MATRICE $M_{B'B}$ DEL CAMBIO DI BASE, DALLA BASE B' ALLA BASE B.

PROPOSIZIONE:

LA MATRICE $M_{BB'}$ DEL CAMBIO DI BASE È INVERTIBILE ED HA COME INVERSA LA MATRICE $M_{B'B}$

$$(M_{BB'})^{-1} = M_{B'B}$$

PROPOSIZIONE:

SIANO $B=(v_1,\dots,v_n)$ E $B'=(v_1',\dots,v_n')$ DUE BASI, ED $M_{BB'}$, $M_{B'B}$ SIANO LE MATRICI DEI CAMBI DI BASE. ALLORA LE COMPONENTI DEI VETTORI RISPETTO ALLE DUE BASI SI TRASFORMANO NEL MODO SEGUENTE:

$$X_{B'}(v) = M_{B'B}\, X_B(v) \qquad X_B(v) = M_{BB'}\, X_{B'}(v)$$

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO I VETTORI DI $\mathbb{R}^3$

$$v_1=(1,1,0) \quad v_2=(0,1,1) \quad v_3=(1,0,1)$$
$$v_1'=(-1,0,1) \quad v_2'=(1,1,-1) \quad v_3'=(1,1,0)$$

E LE BASI

$$B=(v_1,v_2,v_3) \qquad B'=(v_1',v_2',v_3')$$

SE B_0 È LA BASE CANONICA, ALLORA

$$B = B_0 M_{B_0B} \qquad B' = B_0 M_{B_0B'}$$

CON MATRICI DEL CAMBIO DI BASE

$$M_{B_0B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{B_0B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

DA CUI SI OTTIENE

$$B_0 = B\cdot(M_{B_0B})^{-1}$$
$$B_0 = B'(M_{B_0B'})^{-1}$$

TALI IDENTITÀ IMPLICANO

$$B = B'(M_{B_0B'})^{-1}\cdot M_{B_0B}$$

E QUINDI

$$M_{B'B} = (M_{B_0B'})^{-1}\cdot M_{B_0B}$$

SIA $B' = (e_1, e_2, e_3)$ LA BASE FORMATA DAI VETTORI

$$e_1 = (3,1,0) \qquad e_2 = (0,1,1) \qquad e_3 = (0,1,-1)$$

ALLORA

$$F(e_1) = (3,1,0) \times (3,1,0) = (0,0,0)$$
$$F(e_2) = (3,1,0) \times (0,1,1) = (1,-3,3)$$
$$F(e_3) = (3,1,0) \times (0,1,-1) = (-1,3,3)$$

QUINDI

$$M_{B_0 B'}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

È LA MATRICE DI F RISPETTO ALLE BASI B' E B_0.

PROPOSIZIONE:

SIA $F: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE n-DIMENSIONALE E SIANO $B = (v_1, \dots, v_n)$ E $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ DUE BASI CON MATRICI DEL CAMBIAMENTO DI BASE $M_{BB'}$ ED $M_{B'B}$. SE $\phi_B(F)$ E $\phi_{B'}(F)$ SONO LE MATRICI DI F NELLE BASI B E B' RISPETTIVAMENTE, ALLORA

$$\phi_B(F) = M_{BB'}\ \phi_{B'}(F) \cdot M_{B'B} = M_{BB'}\ \phi_{B'}(F)\, (M_{BB'})^{-1}$$

DEFINIZIONE:

DUE MATRICI $A, A' \in \mathbb{K}(n,n)$ SI DICONO SIMILI SE ESISTE $B \in GL(\mathbb{K}, n)$ TALE CHE $A = B \cdot A' \cdot B^{-1}$

COROLLARIO:

DUE MATRICI DI UNO STESSO ENDOMORFISMO $F: V \to V$ RIFERITE A BASI DIVERSE SONO SIMILI TRA LORO

ENDOMORFISMI SIMMETRICI ED ENDOMORFISMI ISOMETRICI

DEFINIZIONE:

UN ENDOMORFISMO $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SI DICE ISOMETRICO SE CONSERVA IL PRODOTTO SCALARE, CIOÈ SE

$$F(v) \cdot F(v') = v \cdot v' \qquad \forall\, v, v' \in \mathbb{R}^n$$

SIGNIFICA QUINDI CHE GLI ENDOMORFISMI ISOMETRICI CONSERVANO LA LUNGHEZZA DEI VETTORI.

PROPOSIZIONE:

UN ENDOMORFISMO $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ È ISOMETRICO SE E SOLO SE LA MATRICE ASSOCIATA AD F IN UNA BASE ORTONORMALE È ORTOGONALE.

- IL VETTORE $V = X^1 V_1 + \dots + X^n V_n = A \cdot X$ APPARTIENE A $Ker(f)$ SE E SOLO SE $A \cdot X = O$. QUINDI LE COMPONENTI DEI VETTORI DEL NUCLEO SONO SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE OMOGENEO $A \cdot X = O$.

- SE IL RANGO DI A È UGUALE ALLA $\dim(V)$ ALLORA IL SISTEMA AMMETTE SOLO LA SOLUZIONE NULLA. QUESTO SIGNIFICA CHE $Ker(f) = \{0_V\}$ CIOÈ L'APPLICAZIONE LINEARE È INIETTIVA.

- SE IL $Rango(A) < n$, ALLORA, USANDO IL METODO DI RIDUZIONE ESPRIMIAMO LE COMPONENTI $X^1, \dots, X^n$ DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO COME FUNZIONI LINEARI DI $\nu = n - \rho$ PARAMETRI LIBERI $t^1, \dots, t^\nu$.

$$X^1 = m^1_1 t^1 + \dots + m^1_\nu t^\nu$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$X^n = m^n_1 t^1 + \dots + m^n_\nu t^\nu$$

CONCLUSIONE: $V = X^1 V_1 + \dots + X^n V_n$ SE E SOLO SE

$$V = (m^1_1 t^1 + \dots + m^1_\nu t^\nu) V_1 + \dots + (m^n_1 t^1 + \dots + m^n_\nu t^\nu) V_n =$$
$$= t^1 (m^1_1 V_1 + \dots + m^n_1 V_n) + \dots + t^\nu (m^1_\nu V_1 + \dots + m^n_\nu V_n)$$

DOVE $t^1, \dots, t^\nu$ SONO PARAMETRI LIBERI.

IL DETERMINANTE DELLE MATRICI QUADRATE

NOTAZIONI:

SIA $A \in \mathbb{K}(n,n)$ UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE n. PER OGNI INDICE $q = 1, \dots, n$ INDICHIAMO CON $A[q]$ LA MATRICE QUADRATA DI ORDINE $(n-1) \times (n-1)$ OTTENUTA CANCELLANDO LA PRIMA RIGA E LA q-ESIMA COLONNA DI A.

DEFINIZIONE:

PER OGNI INTERO POSITIVO n, IL DETERMINANTE DI ORDINE n È L'APPLICAZIONE $Det_n : A \in \mathbb{K}(n,n) \to \mathbb{K}$, DEFINITA DALLA SEGUENTE FORMULA RICORSIVA:

$$Det_n(A) = A^1_1 \, Det_{n-1}(A[1]) - A^1_2 \, Det_{n-1}(A[2]) + \dots = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} A^1_p \, Det_{n-1}(A[p]) \quad , \forall \, n > 1.$$

PROPRIETÀ:

1) $Det_n(I_n) = 1$

2) $Det_n[{}^t(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n)] = -Det_n[{}^t(A^1, \dots, A^j, \dots, A^i, \dots, A^n)]$ (SCAMBIO DUE RIGHE TRA LORO).

3) $Det_n[{}^t(A^1, \dots, A^i + \mu A^j, \dots, A^n)] = Det_n[{}^t(A^1, \dots, A^i, \dots, A^n)]$, $\forall \mu \in \mathbb{K}$; $\forall i, j = 1, \dots, n$ CON $j \neq i$

4) $Det_n[{}^t(A^1, \dots, \mu A^i, \dots, A^n)] = \mu \, Det_n[{}^t(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j)]$

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ -1 & 1-x & 3 \\ 1 & 2 & -1-x \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-x & 1 \\ -1 & 1-x \\ 1 & 2 \end{matrix} = (2-x)(1-x)(-1-x) + \cancel{3} - \cancel{2} + \cancel{x} - \cancel{1} - 6(2-x) - 1 - \cancel{x} =$$

$$= (2-2x-x+x^2)(-1-x) - 12 + 6x - 1 = -2 + \cancel{2x} + x - \cancel{x^2} - \cancel{2x} + 2x^2 + \cancel{x^2} - x^3 - 13 + 6x = -x^3 + 2x^2 + 7x - 15$$

PROPRIETÀ:

SIA $A, A' \in \mathbb{K}(n,n)$ SONO SIMILI ALLORA HANNO LO STESSO POLINOMIO CARATTERISTICO. IN PARTICOLARE, SE $f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ È UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE n-DIMENSIONALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$ E SE B E B' SONO DUE BASI DI $\mathbb{V}$ ALLORA $P_{M_B(f)} = P_{M_{B'}(f)}$.

DEFINIZIONE:

CHIAMIAMO POLINOMIO CARATTERISTICO DI UN ENDOMORFISMO $f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, DENOTANDOLO CON $P_f \in \mathbb{K}[x]$, IL POLINOMIO CARATTERISTICO $P_{M_B}(f)$ DELLA MATRICE CHE RAPPRESENTA f IN UNA BASE DI $\mathbb{V}$.

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

DEFINIZIONE:

SIA $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$. UNO SCALARE λ SI DICE AUTOVALORE DI F SE ESISTE UN VETTORE NON-NULLO v TALE CHE $F(v) = \lambda v$. L'INSIEME DEGLI AUTOVALORI DI F SI DICE ANCHE LO SPETTRO DI F. SE λ È UN AUTOVALORE DI F, L'INSIEME $\mathbb{F}_\lambda$ DEI VETTORI $v \in \mathbb{V}$ TALI CHE $F(v) = \lambda v$ SI DICE AUTOSPAZIO DI F RELATIVO A λ. OGNI ELEMENTO NON NULLO DI $\mathbb{F}_\lambda$ SI DICE AUTOVETTORE DI F RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ. È IMPORTANTE OSSERVARE CHE IN BASE ALLA DEFINIZIONE, UN AUTOSPAZIO NON È MAI RIDOTTO AL SOLO VETTORE NULLO.

PROPOSIZIONE:

SIA $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$, ALLORA VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

i) λ È UN AUTOVALORE DI F SE E SOLO SE $\mathrm{Ker}(F - \lambda \mathrm{Id}_V) \neq \{\vec{0}_V\}$

ii) L'AUTOSPAZIO $\mathbb{F}_\lambda$ È IL NUCLEO DELL'ENDOMORFISMO $F - \lambda \mathrm{Id}_V$ ED È QUINDI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{V}$.

iii) SE $\mathbb{V}$ HA DIMENSIONE FINITA, ALLORA λ È UN AUTOVALORE DI F SE E SOLO SE $F - \lambda \mathrm{Id}_V$ NON HA RANGO MAX

iv) SE $\mathbb{V}$ HA DIMENSIONE FINITA, GLI AUTOVALORI DI F SONO LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO DI F.

v) SE $n = \dim(\mathbb{V})$, F HA AL PIÙ n AUTOVALORI DISTINTI.

DEFINIZIONE:

SIA $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$ E SIA λ UN AUTOVETTORE DI F. LA DIMENSIONE $n(\lambda)$ DELL'AUTOSPAZIO $\mathbb{F}_\lambda$ SI DICE MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DELL'AUTOVALORE. SE

OSSERVAZIONE:

PER IL CALCOLO DEGLI AUTOSPAZI DI UN ENDOMORFISMO $F: V \to V$ DI UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE FINITA n SUL CAMPO $\mathbb{K}$, SI PROCEDE NEL SEGUENTE MODO:

i) SI SCEGLIE UNA BASE $B = (e_1, \dots, e_n)$ DI V E SI CALCOLA LA MATRICE $A \in \mathbb{K}(n,n)$ CHE RAPPRESENTA F NELLA BASE B.

ii) SI CALCOLA IL POLINOMIO CARATTERISTICO $P_A(x) = \mathrm{Det}(A - X \cdot I_n)$ E SI CALCOLANO (QUANDO POSSIBILE) LE RADICI DISTINTE (APPARTENENTI AL CAMPO $\mathbb{K}$) $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

iii) PER OGNI $J = 1, \dots, p$ SI CALCOLA UNA BASE $(v_1^{(J)}, \dots, v_{n(\lambda_J)}^{(J)})$ DEL NUCLEO DELL'APPLICAZIONE LINEARE $F - \lambda_J I_n$.

iv) L'AUTOSPAZIO F_{λ_J} DELL'AUTOVALORE λ_J È GENERATO DAI VETTORI $v_1^{(J)}, \dots, v_{n(\lambda_J)}^{(J)}$.

v) SE LA SOMMA DELLE MOLTEPLICITÀ GEOMETRICHE $n(\lambda_J)$ DEGLI AUTOVALORI $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ È UGUALE ALLA DIMENSIONE DI V ALLORA $B' = (v_1^{(1)}, \dots, v_{n(\lambda_1)}^{(1)}, \dots, v_1^{(p)}, \dots, v_{n(\lambda_p)}^{(p)})$ È UNA BASE FORMATA DA AUTOVETTORI DI F.

vi) NELLE CONDIZIONI DEL PUNTO PRECEDENTE, LA MATRICE CHE RAPPRESENTA L'ENDOMORFISMO NELLA BASE B' È DIAGONALE, CON UNA FORMA DEL TIPO

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n(\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n(\lambda_2)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{p-1} I_{n(\lambda_{p-1})} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda_p I_{n(\lambda_p)} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO LO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}(2,2)$ E SIA

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

PONIAMO IL PROBLEMA DI TROVARE AUTOVALORI ED AUTOSPAZI DELL'ENDOMORFISMO

$$F: A \in \mathbb{R}(2,2) \to g \cdot A \cdot g \in \mathbb{R}(2,2)$$

$\Longrightarrow$ TROVIAMO LA MATRICE $M \in \mathbb{R}(4,4)$ CHE RAPPRESENTA F NELLA BASE CANONICA $(E_1^1, E_1^2, E_2^1, E_2^2)$ DI $\mathbb{R}(2,2)$:

$$F(E_1^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = E_1^1 + E_1^2 + E_2^1 + E_2^2$$

ORA SCEGLIENDO X_3 E X_4 COME PARAMETRI LIBERI SI HA

$$X_1 = 2X_3 + X_4 \ , \quad X_2 = X_3$$

DUNQUE $A \in \mathbb{F}_\lambda$, SE E SOLO SE

$$A = X_4(E^1_1 + E^2_2) + X^3(2E^1_1 + E^2_1 + E^1_2) = \begin{pmatrix} 2X_3+X_4 & X_3 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

CON $X_3, X_4 \in \mathbb{R}$. L'AUTOSPAZIO HA DIMENSIONE 2 E $(E^1_1 + E^2_2, 2E^1_1 + E^2_1 + E^1_2)$ È UNA BASE DI $\mathbb{F}_{\lambda_1}$.

$\Longrightarrow$ PER DETERMINARE UNA BASE DELL'AUTOSPAZIO $\mathbb{F}_{\lambda_2}$ RIDUCIAMO LA MATRICE $M+2I_4$:

$$M+2I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow R^2-3R^1 \\ \leftarrow R^3-R^1 \\ \leftarrow R^4-R^1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow R^4+R^2 \end{matrix}$$

$$R^1+\tfrac{1}{2}R^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow -\frac{1}{2}R^2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

SCELGO COME PARAMETRI LIBERI X_3 E X_4, ED OTTENGO

$$X_1 = -X_4 \ , \quad X_2 = -X_3 + 2X_4$$

QUINDI $A \in \mathbb{F}_\lambda$, SE E SOLO SE

$$A = +X_4(-E^1_1 + 2E^2_1 + E^2_2) + X_3(E^2_1 + E^1_2) = \begin{pmatrix} -X_4 & -X_3+2X_4 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

CON $X_3, X_4 \in \mathbb{R}$. L'AUTOSPAZIO HA DIMENSIONE 2 E $(-E^1_1 + 2E^2_1 + E^2_2, -E^2_1 + E^1_2)$ È UNA BASE DI $\mathbb{F}_{\lambda_2}$.

$\Longrightarrow$ RELATIVAMENTE ALLA BASE $(E^1_1 + E^2_2, 2E^1_1 + E^2_1 + E^1_2, -E^1_1 + 2E^2_1 + E^2_2, -E^2_1 + E^1_2)$ L'ENDOMORFISMO È RAPPRESENTATO DALLA MATRICE DIAGONALE

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

QUESTO È POSSIBILE SOLO NEL CASO IN CUI LA SOMMA DELLE MOLTEPLICITÀ GEOMETRICHE È ESATTAMENTE UGUALE AD n.

ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI E FORME QUADRATICHE

PRELIMINARI:

UN ENDOMORFISMO $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SI DICE AUTOAGGIUNTO SE $f(x) \cdot y = x \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
INOLTRE, SAPPIAMO CHE f È AUTOAGGIUNTO SE E SOLO SE LA SUA MATRICE RISPETTO AD UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ È SIMMETRICA.

$\Rightarrow$ OGNI MATRICE SIMMETRICA REALE $B \in \mathbb{R}(n,n)$ PUÒ ESSERE CONSIDERATA COME MATRICE AD ELEMENTI COMPLESSI TALI CHE

$$B^i_j = B^j_i \,, \quad \overline{B^i_j} = B^i_j \qquad \text{CON } i,j = 1,\dots,n.$$

IN PARTICOLARE B VERIFICA $\overline{B^i_j} = B^j_i$, CIOÈ

$$^t\overline{B} = {}^tB = B$$

$\Rightarrow$ SE $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}_n$ È UN VETTORE RIGA COMPLESSO, PONIAMO $\overline{y} = (\overline{y}^1, \dots, \overline{y}^n)$

$$\overline{y} = (\overline{y^1}, \dots, \overline{y^n})$$

OSSERVIAMO CHE PER OGNI $X \in \mathbb{C}^n$ SI HA

$$\langle {}^t\overline{X} \,|\, X \rangle = \overline{X}^1 \cdot X^1 + \dots + \overline{X}^n \cdot X^n = |X^1|^2 + \dots + |X^n|^2 \geq 0$$

E CHE

$$\langle {}^t\overline{X} \,|\, X \rangle = 0 \iff X = 0$$

$\Rightarrow$ SIA $A \in S(n)$ UNA MATRICE SIMMETRICA REALE E SIANO y, X DUE VETTORI COLONNA DI $\mathbb{C}^n$, ALLORA

$$\langle {}^t\overline{y} \,|\, A \cdot X \rangle = ({}^t\overline{y} \cdot A) \cdot X = ({}^t\overline{y} \cdot {}^t\overline{A}) \cdot X = {}^t\overline{(y \cdot A)} \cdot X = \langle {}^t\overline{(y \cdot A)} \,|\, X \rangle$$

TEOREMA:

OGNI ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO DI $\mathbb{R}^n$ HA UN AUTOVALORE.

TEOREMA:

PER OGNI ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ESISTE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ FORMATA DA AUTOVETTORI. IN PARTICOLARE, OGNI ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO È SEMPLICE (O DIAGONALIZZABILE).

DEFINIZIONE:

SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ UN ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO DI $\mathbb{R}^n$. CHIAMIAMO FORMA QUADRATICA DELL'ENDOMORFISMO f LA FUNZIONE

$$\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\Big|\; \phi(x) = x\, f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DELLE RETTE E PROBLEMI DI INCIDENZA

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA

UNA RETTA DI $\mathbb{R}^2$ È LA TRAIETTORIA DESCRITTA DA UN PUNTO MATERIALE CHE SI MUOVE CON MOTO RETTILINEO UNIFORME. IL MOTO È DETERMINATO DAL PUNTO INIZIALE P_0 E DA UN VETTORE NON-NULLO V DI $\mathbb{R}^2$ ED HA LA SEGUENTE RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow P_0 + Vt$$

DIREMO CHE $P(t) = P_0 + Vt$ È UN' EQUAZIONE VETTORIALE PARAMETRICA DI UNA RETTA DI $\mathbb{R}^2$. SE MOLTIPLICHIAMO V PER UNO SCALARE NON-NULLO λ E SE SCEGLIAMO COME NUOVO PUNTO INIZIALE $P_1 = Vt_1 + P_0$, LA TRAIETTORIA DEL MOTO NON CAMBIA. SE $\lambda > 0$, LA RETTA VIENE PERCORSA NELLO STESSO SENSO, SE INVECE $\lambda < 0$, LA RETTA È PERCORSA IN SENSO OPPOSTO. FISSIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTONORMALE POSITIVO $\mathcal{R}(O, (e_1, e_2))$, SIANO (l, m) LE COMPONENTI DI V NELLA BASE (e_1, e_2) E (x_0, y_0) LE COORDINATE DI P_0. LE COORDINATE $(x(t), y(t))$ DEL PUNTO $P(t)$ SI ESPRIMONO NEL MODO SEGUENTE

$$x(t) = lt + x_0$$
$$y(t) = mt + y_0$$

QUESTE SONO LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA NEL RIFERIMENTO $\mathcal{R}$. I COEFFICIENTI l ED m SI DICONO PARAMETRI DIRETTORI DELLA RETTA. IL VETTORE UNITARIO $u = \frac{V}{\|V\|}$ HA COMPONENTI

$$u_1 = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}} = \cos(\theta), \quad u_2 = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}} = \sin(\theta)$$

DOVE $\theta \in [0, 2\pi)$ È L'AMPIEZZA DELL' ANGOLO FORMATO DAI VETTORI e_1 E u. LA TANGENTE DI θ È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA. SI NOTI CHE IL COEFFICIENTE ANGOLARE È INDETERMINATO $(= \pm\infty)$ QUANDO LA RETTA È PERPENDICOLARE ALL'ASSE COORDINATO Ox. LA DIREZIONE DELLA RETTA PER DUE PUNTI DISTINTI P_1, P_0 È DATA DAL VETTORE $P_1 - P_0$ E QUINDI LA RETTA HA EQUAZIONE VETTORIALE PARAMETRICA

$$P(t) = (P_1 - P_0)t + P_0 \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

SE $t \in [0,1]$, IL PUNTO P DESCRIVE IL SEGMENTO ORIENTATO CON PUNTO INIZIALE P_0 E PUNTO FINALE P_1. L'EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA PER P_1 E P_0 È DATA DA

$$x(t) = (x_1 - x_0)t + x_0$$
$$y(t) = (y_1 - y_0)t + y_0$$

DOVE $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ SONO LE COORDINATE DI P_0 E DI P_1 NEL RIFERIMENTO ASSEGNATO.

FASCI DI RETTE

DATE DUE RETTE DISTINTE r ED r', CON EQUAZIONI CARTESIANE

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

E DUE SCALARI λ, μ INDICHIAMO CON $\lambda r + \mu r'$ LA RETTA

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$$

AL VARIARE DI λ E μ OTTENIAMO LA FAMIGLIA DI RETTE $\{\lambda r + \mu r' : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ A CUI DIAMO IL NOME DI FASCIO DI RETTE. SI NOTI CHE SE (λ, μ) E (λ', μ') SONO PROPORZIONALI, LE CORRISPONDENTI RETTE DELLA FAMIGLIA COINCIDONO. AD ESEMPIO, SE $\mu = 0$ LA RETTA λr COINCIDE CON r, PER OGNI $\lambda \neq 0$, MENTRE SE $\lambda = 0$, ALLORA μr COINCIDE CON r', PER OGNI $\mu \neq 0$. SE r ED r' SONO INCIDENTI ALLORA DIREMO CHE IL FASCIO È PROPRIO. IN TAL CASO OGNI RETTA DEL FASCIO PASSA PER IL PUNTO $P_0 = r \cap r'$ (DETTO ANCHE PUNTO BASE DEL FASCIO). SE $P_1 \neq P_0$ HA COORDINATE (x_1, y_1) ALLORA

$$(a'x_1 + b'y_1 + c')(ax + by + c) - (ax_1 + by_1 + c)(a'x + b'y + c') = 0$$

È UNA RETTA DEL FASCIO CHE PASSA PER P_1. DUNQUE, OGNI RETTA PASSANTE PER P_0 APPARTIENE AL FASCIO DETERMINATO DA r ED r'. SE r ED r' SONO PARALLELE E DISTINTE, ALLORA IL FASCIO SI DICE IMPROPRIO. IN TAL CASO IL FASCIO È FORMATO DA TUTTE LE RETTE DEL PIANO PARALLELE A r.

CIRCONFERENZE

QUINDI, LA CIRCONFERENZA $\Gamma(P_0, r)$ DI CENTRO P_0 E RAGGIO $r > 0$ È DEFINITA DALL'EQUAZIONE

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

SVILUPPANDO I CALCOLI SI OTTIENE

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \longleftarrow \boxed{\text{QUESTA EQUAZIONE RAPPRESENTA UNA CIRCONFERENZA SE E SOLO SE } \alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0}$$

DOVE SI È POSTO

$$\alpha = -x_0, \quad \beta = -y_0, \quad \gamma = (x_0)^2 + (y_0)^2 - r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \rightarrow r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma.$$

VICEVERSA, IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEFINITO DA UN'EQUAZIONE DEL TIPO

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

DISTANZA PUNTO - RETTA

CONSIDERIAMO UNA RETTA DI EQUAZIONE $ax + by + c = 0$ E UN PUNTO $P_0(x_0, y_0)$. LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI P_0 SULLA RETTA, È IL PUNTO $\pi_r(P_0)$ DI INTERSEZIONE DELLA RETTA r CON LA RETTA r' PASSANTE PER P_0 E PERPENDICOLARE A r. POICHE IL VETTORE n CON COMPONENTI

CON LA RETTA $r(\Gamma_1, \Gamma_2)$ (DETTA ANCHE ASSE RADICALE DELLE DUE CIRCONFERENZE) DI EQUAZIONE

$$2(a-a')+2(b-b')+c'-c=0$$

SI POSSONO QUINDI PRESENTARE TRE CASI:

i) $r_1 > d(P_1, r(\Gamma_1,\Gamma_2))$: LE DUE CIRCONFERENZE SI INTERSECANO IN DUE PUNTI DISTINTI.

ii) $r_1 = d(P_1, r(\Gamma_1,\Gamma_2))$: LE DUE CIRCONFERENZE HANNO UN SOLO PUNTO DI INTERSEZIONE. TANGENTI

iii) $r_1 < d(P_1, r(\Gamma_1,\Gamma_2))$: LE DUE CIRCONFERENZE SONO DISGIUNTE.

NEL SECONDO CASO ii) L'ASSE RADICALE È TANGENTE A ENTRAMBE LE CIRCONFERENZE NEL LORO PUNTO DI CONTATTO E DIREMO CHE Γ_1 E Γ_2 SONO TANGENTI L'UNA ALL'ALTRA.

ESEMPIO:

HO L'EQUAZIONE

$$12-4x+x^2-6y+y^2=0$$

CONTROLLO CHE

$$a^2+b^2-c = 4+9-12 = 1 > 0 \implies \text{L'EQUAZIONE È UNA CIRCONFERENZA.}$$

$$\text{CENTRO} = (a,b) = (2,3) \quad , \quad r^2 = a^2+b^2-c = 1$$

HO ANCHE LA RETTA

$$r_1: 2x-y+2=0$$

CALCOLO LA DISTANZA DAL CENTRO DELLA RETTA

$$d(C,r_1) = \frac{|2\cdot 2+(-1)\cdot 3+2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt5} > 1 \implies$$ LA RETTA r_1 NON INTERSECA LA CIRCONFERENZA

PRENDO ORA LA RETTA r_2

$$r_2: 2x-y+1=0$$

E CALCOLO DI NUOVO LA DISTANZA DELLA NUOVA RETTA DAL CENTRO

$$d(C,r_2) = \frac{|2\cdot 2+(-1)\cdot 3+1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt5} < 1 \implies$$ LA RETTA INTERSECA LA CIRCONFERENZA IN DUE PUNTI DISTINTI.

ORA VOGLIO CALCOLARMI LE COORDINATE DEI DUE PUNTI DI INTERSEZIONE.
TROVO I PARAMETRI DIRETTORI $(1,2)$, CIOÈ LE COMPONENTI DEL VETTORE CHE MI DÀ LA DIREZIONE DI r, E PRENDO UN PUNTO APPARTENENTE AD r, AD ESEMPIO METTENDO $x=0$ OTTENGO $P=(0,1)$
ALLORA LA FORMA PARAMETRICA DI r SARÀ: $\begin{cases} x(t)=1t+0 \\ y(t)=2t+1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=2t+1 \end{cases}$

...LARI AL VETTORE (a, b). NEL CASO DI FUNZIONI POLINOMIALI DI SECONDO GRADO NELLE VARIABILI x E y, VALE A DIRE FUNZIONI DEL TIPO

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

DOVE I COEFFICIENTI a_{11}, a_{12}, a_{22} NON SONO TUTTI NULLI, LE CORRISPONDENTI CURVE DI LIVELLO 0 SONO DETTE CONICHE (O CURVE ALGEBRICHE REALI DI GRADO 2). PIÚ IN GENERALE, LE CURVE DI LIVELLO DI FUNZIONI POLINOMIALI DI GRADO n SI DICONO CURVE ALGEBRICHE REALI DEL PIANO EUCLIDEO DI GRADO n.

CONICHE DI TIPO ELLITTICO IN FORMA CANONICA

- ELLISSE REALE IN FORMA CANONICA: È LA CURVA DI LIVELLO 0 DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE DEL TIPO

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1$$

DOVE a, b SONO NUMERI REALI POSITIVI ($\alpha = \sqrt{a}$, $\beta = \sqrt{b}$ = SEMIASSI DELL'ELLISSE)

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1$$

LE ELLISSI IN FORMA CANONICA SONO SIMMETRICHE RISPETTO ALL'ORIGINE E AGLI ASSI COORDINATI. I PUNTI DI INTERSEZIONE DELL'ELLISSE CON GLI ASSI DI SIMMETRIA VENGONO DETTI VERTICI DELL'ELLISSE. È IMMEDIATO RISCONTRARE CHE I PUNTI $(\pm\sqrt{a}, 0)$ E $(0, \pm\sqrt{b})$ SONO I QUATTRO VERTICI DELL'ELLISSE IN FORMA CANONICA. SI NOTI CHE LE ELLISSI IN FORMA CANONICA AMMETTONO UNA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DEL TIPO

$$\left.\begin{array}{l} x(\theta) = \sqrt{a}\cos(\theta) \\ y(\theta) = \sqrt{b}\sin(\theta) \end{array}\right]$$

- EQUAZIONE IN FORMA PARAMETRICA DELL'ELLISSE AL VARIARE DI θ.

IN PARTICOLARE, I PUNTI DELL'ELLISSE VERIFICANO $|x| \leq a$ E $|y| \leq b$. QUINDI LE ELLISSI SONO INSIEMI LIMITATI DEL PIANO.

- ELLISSE IMMAGINARIA IN FORMA CANONICA: È LA CURVA DI LIVELLO 0 DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE DEL TIPO

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 1$$

DOVE a, b SONO NUMERI REALI POSITIVI. DAL MOMENTO CHE NON ESISTONO SOLUZIONI REALI DELL'EQUAZIONE

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 1 = 0$$

LE ELLISSI IMMAGINARIE SONO VUOTE.

- IPERBOLE DEGENERE IN FORMA CANONICA: È LA CURVA DI LIVELLO 0 DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE DEL TIPO

$$f(x,y)=\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}$$

POICHÉ

$$f(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{a}}-\frac{y}{\sqrt{b}}\right)$$

UN IPERBOLE DEGENERE IN FORMA CANONICA È DATA DALL' UNIONE DELLE DUE RETTE (NON PARALLELE) DEFINITE DALLE EQUAZIONI

$$\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{\sqrt{b}}=0\ ,\quad \frac{x}{\sqrt{a}}-\frac{y}{\sqrt{b}}=0$$

CONICHE DI TIPO PARABOLICO IN FORMA CANONICA

- PARABOLA NON-DEGENERE IN FORMA CANONICA: È LA CURVA DI LIVELLO 0 DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE DEL TIPO

$$f(x,y)=y^2-2px$$

DOVE p È UN NUMERO REALE. LA PARABOLA IN FORMA CANONICA È SIMMETRICA RISPETTO ALL' ASSE COORDINATO Oy. LA PARABOLA NON DEGENERE HA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA

$$x(t)=\frac{1}{2p}\cdot t^2\ ,\quad y(t)=t$$

- PARABOLA DEGENERE IN FORMA CANONICA: È LA CURVA DI LIVELLO 0 DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE DEL TIPO

$$f(x,y)=y^2-c=0$$

DOVE c È UN NUMERO REALE. SE $c<0$ LA PARABOLA NON HA PUNTI REALI MENTRE NEL CASO $c>0$ LA PARABOLA DEGENERE SI "SPEZZA" NELL' UNIONE DI DUE RETTE PARALLELE (EVENTUALMENTE COINCIDENTI) DEFINITE DALLE EQUAZIONI

$$y=\pm\sqrt{c}$$

DEFINIZIONE:

CONSIDERIAMO UNA CONICA DI $\mathbb{R}^2$ DEFINITA NELLE COORDINATE (x,y), RIFERIMENTO ORTONORMALE $R(O,(e_1,e_2))$ DALL' EQUAZIONE

$$a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

DENOTIAMO CON $\tilde{A}\in S(3,\mathbb{R})$ E $A\in S(2,\mathbb{R})$ LE MATRICI SIMMETRICHE

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}$$

SE INVECE HO $\mathrm{Det}(A)<0$ $\longrightarrow$ SI TRATTA DI UNA CONICA DI TIPO IPERBOLICO

$$\begin{cases} \mathrm{Det}(\tilde{A}) = I \neq 0 \longrightarrow \text{IPERBOLE NON-DEGENERE} \\ \mathrm{Det}(\tilde{A}) = I = 0 \longrightarrow \text{IPERBOLE DEGENERE} \end{cases}$$

ULTIMO CASO SE HO $\mathrm{Det}(A)=0$ $\longrightarrow$ SI TRATTA DI UNA CONICA DI TIPO PARABOLICO.

$$\begin{cases} \mathrm{Det}(\tilde{A}) = I \neq 0 \longrightarrow \text{PARABOLA NON-DEGENERE} \\ \mathrm{Det}(\tilde{A}) = I = 0 \longrightarrow \text{PARABOLA DEGENERE} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE:

SIA $R' = (O', (e_1', e_2'))$ UN NUOVO RIFERIMENTO ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^2$, CON COORDINATE CARTESIANE (x', y'). CONSIDERIAMO LA MATRICE P DEL CAMBIO DI BASE, DALLA BASE $B = (e_1, e_2)$ ALLA BASE $B' = (e_1', e_2')$ CIOÈ LA MATRICE ORTOGONALE TALE CHE

$$(e_1', e_2') = (e_1, e_2) \cdot P \qquad (P \text{ È UNA MATRICE ORTOGONALE})$$

E SIANO (p_1, p_2) LE COORDINATE DI O' NEL RIFERIMENTO B, ALLORA SI HANNO LE SEGUENTI TRASFORMAZIONI DELLE COORDINATE

$$x = P_1^1 x' + P_2^1 y' + p_1$$
$$y = P_1^2 x' + P_2^2 y' + p_2$$

È UTILE SCRIVERE LE EQUAZIONI DEL CAMBIO DI COORDINATE NEL MODO SEGUENTE

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

DOVE $\tilde{P} \in GL(3, \mathbb{R})$ E

$$P = \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \end{pmatrix} \in O(2), \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

SOSTITUENDO $(*)$ NELL'EQUAZIONE MATRICIALE DELLA CONICA RISPETTO AL RIFERIMENTO R SI OTTIENE

$$(x', y', 1) \cdot \underbrace{\tilde{A}'} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ORA SOSTITUISCO $(*)$ IN $\binom{*}{*}$

VEDO CHE DEVE NECESSARIAMENTE ESSERE

$$\tilde{A}' = {}^t(\tilde{P}) \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{P}$$

$$(x', y', 1) \cdot \overline{{}^t(\tilde{P}) \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{P}} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

LE CONICHE DI TIPO ELLITTICO O IPERBOLICO SONO DETTE CONICHE A CENTRO.

TEOREMA:

SIA C UNA CONICA A CENTRO ALLORA ESISTE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTONORMALE R DI $\mathbb{R}^2$ NEL QUALE L'EQUAZIONE DELLA CONICA È IN UNA DELLE SEGUENTI FORME CANONICHE:

ELLISSE: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$

ELLISSE IMMAGINARIA: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 1 = 0$

ELLISSE DEGENERE: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0$

IPERBOLE: $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 1 = 0$

IPERBOLE DEGENERE: $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 0$

DOVE a, b SONO NUMERI REALI POSITIVI.

ESEMPIO:

SI CONSIDERI LA CONICA DI EQUAZIONE

$$2x^2 + xy + y^2 - 2x + y - 1 = 0$$

CALCOLO GLI INVARIANTI

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow I = Det(\tilde{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{matrix} = -2 - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{4}} = -\frac{15}{4}$$

$$II = Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$III = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}$$

$Det(A) > 0$, $Det(\tilde{A}) \neq 0$, $III \cdot I < 0 \Longrightarrow$ ELLISSE NON-DEGENERE.

CALCOLIAMO IL CENTRO DELLA CONICA:

$$C = -\frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = -\frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}$$

ORA CALCOLIAMO GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE A:

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1/2 \\ 1/2 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)(1-x) - \frac{1}{4} = x^2 - 3x + \frac{7}{4} \longrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-7}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2} = \begin{cases} \frac{3+\sqrt{2}}{2} = \lambda_1 \\ \frac{3-\sqrt{2}}{2} = \lambda_2 \end{cases}$$

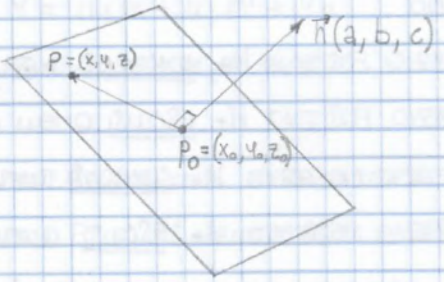
QUINDI TROVO NUOVAMENTE CHE L'EQUAZIONE CANONICA DELLA CONICA È

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a'_{33} = 0$$

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

IL PIANO

PER DESCRIVERE UN PIANO ABBIAMO BISOGNO DI UN PUNTO DELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$, E DI UN VETTORE PERPENDICOLARE AL PIANO.



IL VETTORE $P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ APPARTIENE AL PIANO SE E SOLO SE

$$n \cdot (P - P_0) = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (0, 0, 0)$$ ← QUESTO PRODOTTO SCALARE MI DÀ L'EQUAZ DEL PIANO.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz + \underbrace{[-ax_0 - by_0 - cz_0]}_{d} = 0$$

(È UN VALORE COSTANTE)

$$ax + by + cz + d = 0$$ E DEVO AVERE $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

ESEMPIO:

$n = (2, 3, 1)$ $P_0 = (0, -1, 0)$ TROVARE IL PIANO PASSANTE PER P_0 E PERPENDICOLARE AD n.

$$2(x - 0) + 3(y + 1) + 1(z - 0) = 0$$

$$\alpha: \ 2x + 3y + z + 3 = 0$$

DUE NUMERI u_1, u_2 TALI CHE $P - P_0 = u_1 e_1 + u_2 e_2$ QUINDI DOVRÀ ESSERE

$$P = P_0 + u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} \quad \leftarrow \text{EQUAZIONI VETTORIALI PARAMETRICHE DEL PIANO}$$

AL VARIARE DI u_1 E u_2 IN $\mathbb{R}$, IL PUNTO P DESCRIVE IL PIANO.

PER DETERMINARE I PUNTI DI UN PIANO ABBIAMO <u>DUE PARAMETRI LIBERI</u>, NON UNO SOLO COME NEL CASO DELLA RETTA.

ORA SCRIVO LA RELAZIONE PRECEDENTE IN COMPONENTI:

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{e_1} = (l, m, n)$, $\vec{e_2} = (l', m', n')$

$$\begin{cases} x = u_1 l + u_2 l' + x_0 \\ y = u_1 m + u_2 m' + y_0 \\ z = u_1 n + u_2 n' + z_0 \end{cases} \quad \text{CON } u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

È SEMPLICE PASSARE DALL'EQUAZIONE PARAMETRICA $P = P_0 + u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2}$ A QUELLA CARTESIANA PERCHÉ HO GIÀ IL PUNTO P_0 E MI MANCA SOLO IL VETTORE PERPENDICOLARE n, MA SO CHE IL PIANO È PARALLELO ALLA GIACITURA, QUINDI MI BASTA TROVARE UN VETTORE PERPENDICOLARE AD $\vec{e_1}$ E/O $\vec{e_2}$:

$$n = \vec{e_1} \times \vec{e_2}$$

ORA POSSO SCRIVERE L'EQUAZIONE CARTESIANA: $(P - P_0) \cdot n = 0$

LA RETTA

PER DESCRIVERE UNA RETTA NELLO SPAZIO, HO BISOGNO DI UN PUNTO P_0 E DI UNA DIREZIONE DATA DA UN VETTORE $\vec{v} = (l, m, n)$. AVREMO QUINDI L'EQUAZIONE PARAMETRICA:

$$P(t) = t\vec{v} + P_0 \longrightarrow \begin{cases} x(t) = lt + x_0 \\ y(t) = mt + y_0 \\ z(t) = nt + z_0 \end{cases} \leftarrow \text{RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA}$$

L'EQUAZIONE CARTESIANA INVECE SARÀ:

LA PENSO COME INTERSEZIONE DI DUE PIANI CHE LA CONTENGONO

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

OVVIAMENTE NON DEVO PRENDERE DUE PIANI PARALLELI, QUINDI DEVE ESSERE

$$\underbrace{(a, b, c) \times (a', b', c')}_{\text{MI DÀ LA DIREZIONE DELLA RETTA.}} \neq 0$$

VOGLIO TROVARE UN PIANO PASSANTE PER UNA RETTA E PER UN PUNTO DATI:

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{RETTA IN FORMA CARTESIANA.}$$

- SE $(al+bm+cn) \neq 0$ SIGNIFICA CHE LA RETTA NON È PARALLELA AL PIANO.

ALLORA MI RICAVO CHE $t = -\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{al+bm+cn}$, SOSTITUISCO QUESTA t NELL'EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA E MI RICAVO LE COORDINATE x, y, z DEL PUNTO DI INTERSEZIONE.

ESEMPIO:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t+1 \\ z = t \end{cases} \qquad \alpha: 2x+y-z-3=0$$

$$(1,2,1)\cdot(2,1,-1) = 2+2-1 \neq 0 \implies \text{LA RETTA NON È PARALLELA AL PIANO.}$$

$(1,2,1)$ ↑ DIREZIONE RETTA; $(2,1,-1)$ ↑ VETTORE $\perp$ AL PIANO

$$2t+2t+1-t-3=0$$
$$3t-2=0 \rightarrow t = \frac{2}{3} \implies \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 7/3 \\ z = 2/3 \end{cases} \qquad P = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

P ↓ PUNTO DI INTERSEZIONE.

MUTUA POSIZIONE DI DUE RETTE

$$r: \begin{cases} x = lt+x_0 \\ y = mt+y_0 \\ z = nt+z_0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x' = l'+x_1 \\ y' = m'+y_1 \\ z' = n'+z_1 \end{cases}$$

r HA LA DIREZIONE DI $\vec{v} = (l,m,n)$ E PASSA PER $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

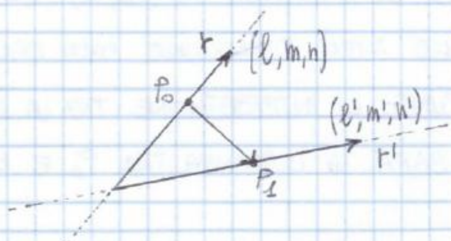
r' HA LA DIREZIONE DI $\vec{v}' = (l', m', n')$ E PASSA PER $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

- LE DUE RETTE SONO PARALLELE SE I VETTORI DIREZIONE $\vec{v}$ E $\vec{v}'$ SONO PARALLELI, CIOÈ SE

$$\vec{v} \times \vec{v}' = 0 \qquad (l,m,n)\times(l',m',n') = \vec{0}$$

- LE DUE RETTE SI INTERSECANO IN UN PUNTO SE

$$((l,m,n)\times(l',m',n'))\cdot(P_1-P_0) = 0$$



- LE RETTE SONO SGHEMBE SE

$$((l,m,n)\times(l',m',n'))\cdot(P_1-P_0) \neq 0$$

$$r: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

INTERSECO r CON IL PIANO α:

$$a(at + x_0) + b(bt + y_0) + c(ct + z_0) + d = 0$$

$$a^2 t + a x_0 + b^2 t + b y_0 + c^2 t + c z_0 + d = 0$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)\,t + (a x_0 + b y_0 + c z_0 + d) = 0$$

$$t = -\frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

SOSTITUENDO t NELL'EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA OTTENIAMO LE COORDINATE DEL PUNTO DI INTERSEZIONE Q:

$$Q = \left(-a\,\frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} + x_0,\ -b\,\frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} + y_0,\ -c\,\frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} + z_0\right)$$

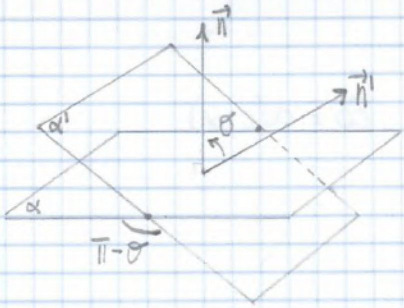
QUINDI

$$d(P_0, \alpha) = \| Q - P_0 \| = \left\| \left(-a\,\frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2},\ -b\,\frac{a x_0 + b y_0 + c z_0}{a^2 + b^2 + c^2},\ -c\,\frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)\right\|$$

$$= \left\| \frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\,(-a, -b, -c) \right\| = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$$

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ANGOLI FORMATI TRA PIANI



$$\vartheta = \widehat{n n'} = \cos^{-1} \frac{n \cdot n'}{\|n\| \cdot \|n'\|}$$