



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1087

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Di Paolo

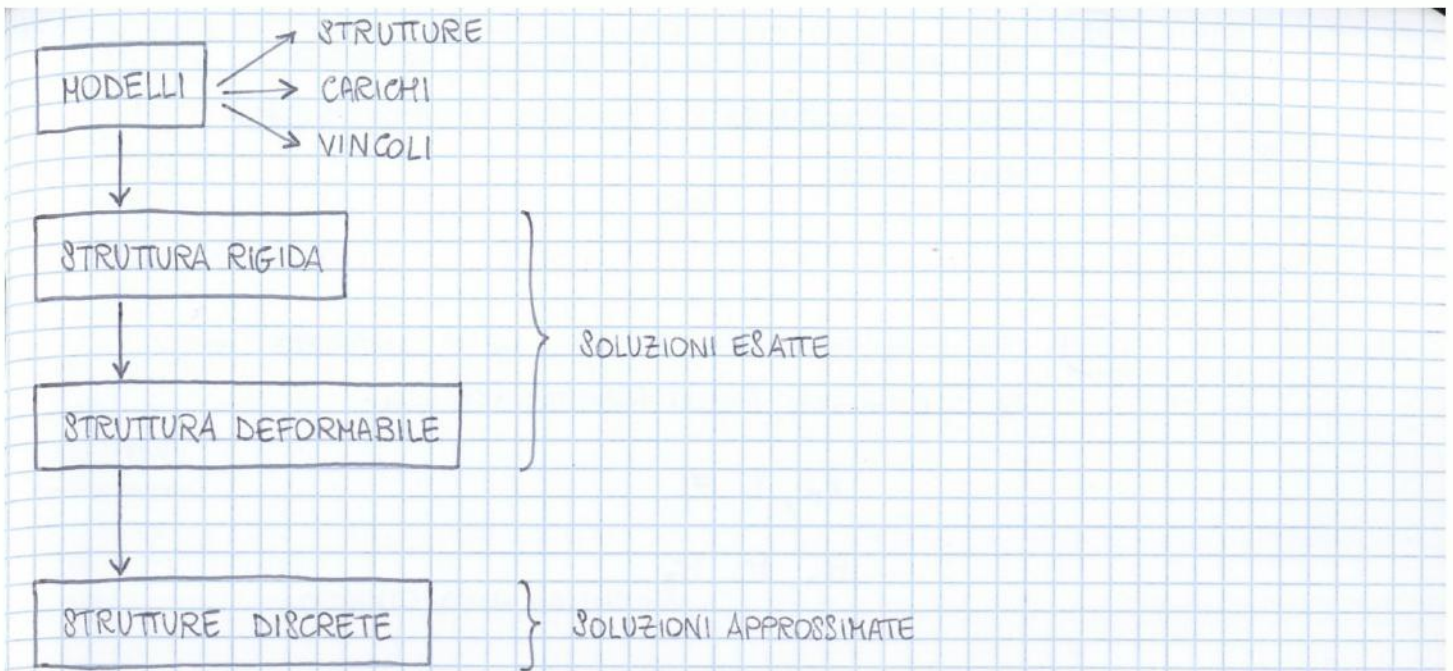
MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale

Prof. Curà

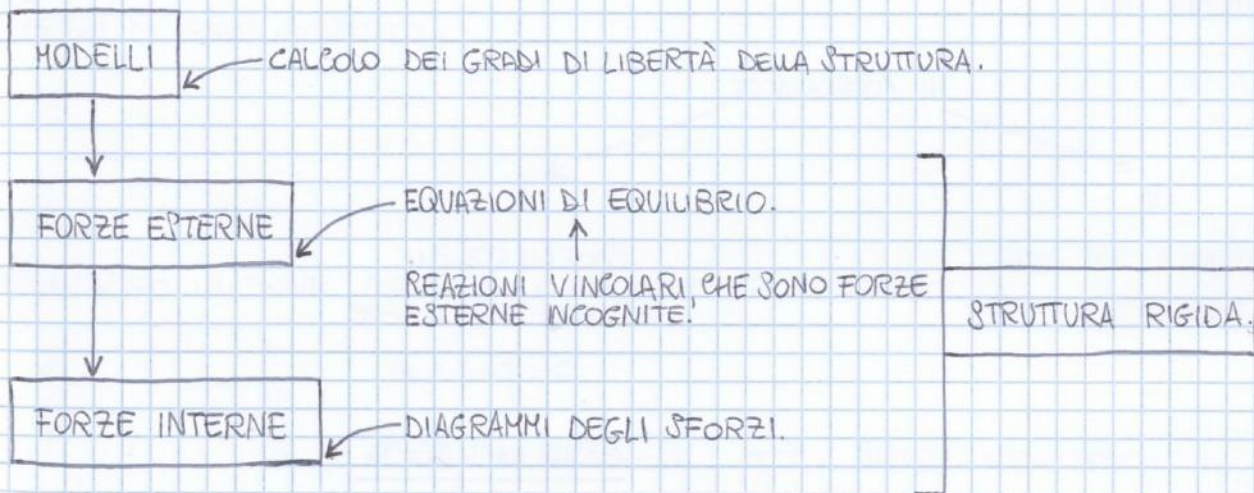
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

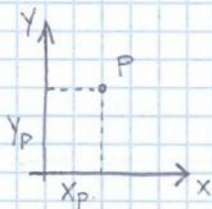
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



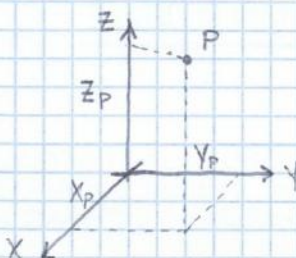
NEL DETTAGLIO:



GRADI DI LIBERTÀ DI UNA STRUTTURA



PER DEFINIRE UN PUNTO IN DUE DIMENSIONI, HO BISOGNO DI $m=2$ COORDINATE.



PER DEFINIRE UN PUNTO IN TRE DIMENSIONI, HO BISOGNO DI $m=3$ COORDINATE.

POSSO SCRIVERE TANTE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO QUANTE SONO LE COORDINATE:

$$m \text{ COORDINATE} \longrightarrow m \text{ EQUAZIONI DI EQUILIBRIO} \begin{pmatrix} 3 \text{ NEL PIANO} \\ 6 \text{ NELLO SPAZIO} \end{pmatrix}$$

MODELLI DI VINCOLO

$$\textcircled{2D} \longrightarrow m=3$$

INCASTRO



(CEMENTO, COLA, SALDATURA, ...)

L'INCASTRO VINCOLA TUTTE E TRE LE COORDINATE $\longrightarrow m=3$

$$l = m - m = 3 - 3 = 0 \longrightarrow \text{SISTEMA ISOSTATICO.}$$

ESEMPIO DI TRAVE INCASTRATA:



SE INCASTRO LA TRAVE ANCHE ALL'ALTRA ESTREMITA' OTTENGO



$$m = 3 + 3 = 6$$

$$l = m - m = 3 - 6 = -3 \longrightarrow \text{SISTEMA IPERSTATICO.}$$

CERNIERA

ESTERNA: VINCOLA LA STRUTTURA AL MONDO ESTERNO

INTERNA: VINCOLA TRA LORO DUE PORZIONI DELLA STESSA STRUTTURA.

SIMBOLI PER INDICARLA:



} CERNIERA ESTERNA.

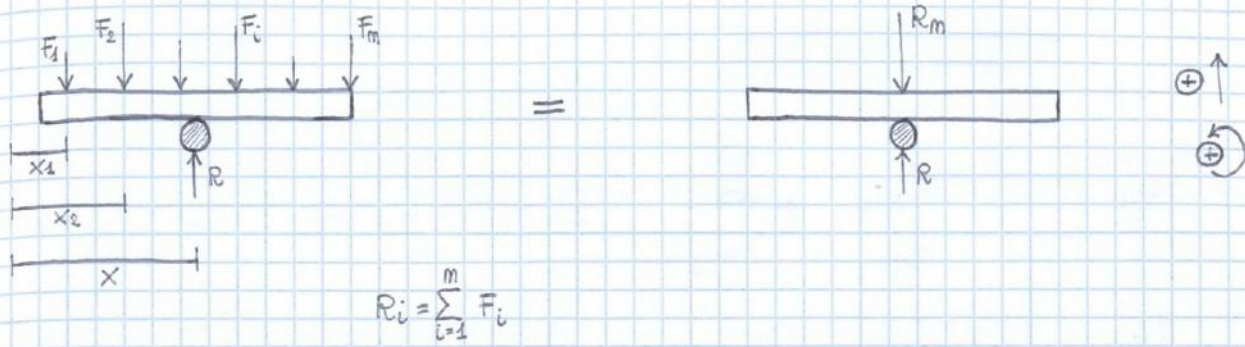


} CERNIERA INTERNA.

LA CERNIERA VINCOLA SOLO 2 MOVIMENTI (NON VINCOLA LA ROTAZIONE) $\longrightarrow m=2$.

RISULTANTE DI FORZE PARALLELE

10/10/13



HO TROVATO IL MODULO DELLA RISULTANTE, ORA DEVO TROVARE LA POSIZIONE:

$$R \cdot X = \sum_{i=1}^m F_i \cdot X_i$$

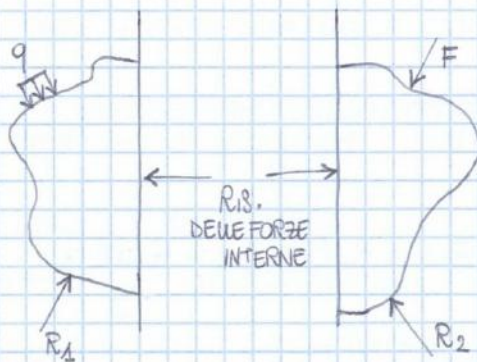
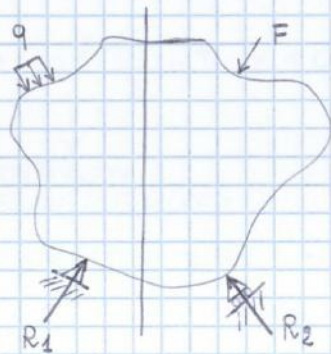
$$X = \frac{\sum_{i=1}^m F_i \cdot X_i}{R}$$

FORZE INTERNE

UNITA' DI MISURA: [N], [N·m]

(2D) → m=3 FORZE INTERNE (COME QUELLE ESTERNE) → 2 [N]
→ 1 [N·m]

(3D) → m=6 FORZE INTERNE → 3 [N]
→ 3 [N·m]



SPEZZONE DESTRO:

$$N + F_0 = 0 \rightarrow \boxed{N = -F_0}$$

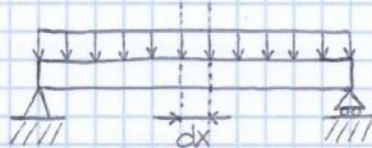
$$T - F_v = 0 \rightarrow \boxed{T = F_v}$$

$$M_f - F_v \cdot x' = 0 \rightarrow \boxed{M_f = F_v x'}$$

$x' = 0$
 \downarrow
 $x' = L$

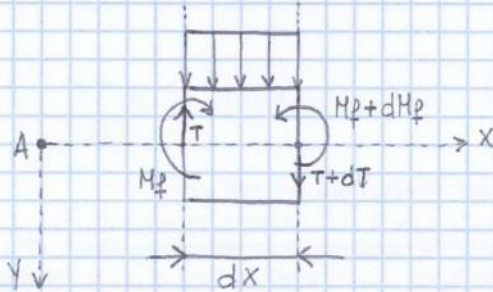
STESSO RISULTATO!

DIMOSTRAZIONE



PRENDO dx NELLA ZONA IN CUI M_f CRESCE.

ZOOM DI dx :



$$\oplus \downarrow \quad T + dT - T + q dx = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dT}{dx} = -q}$$

SCRIVO L'EQUAZIONE DI MOMENTO RISPETTO ALLA FACCE DESTRA:

$$\cancel{M_f + dM_f} - \cancel{M_f} + q dx \cdot \frac{dx}{2} - T dx = 0 \implies \boxed{\frac{dM_f}{dx} = T}$$

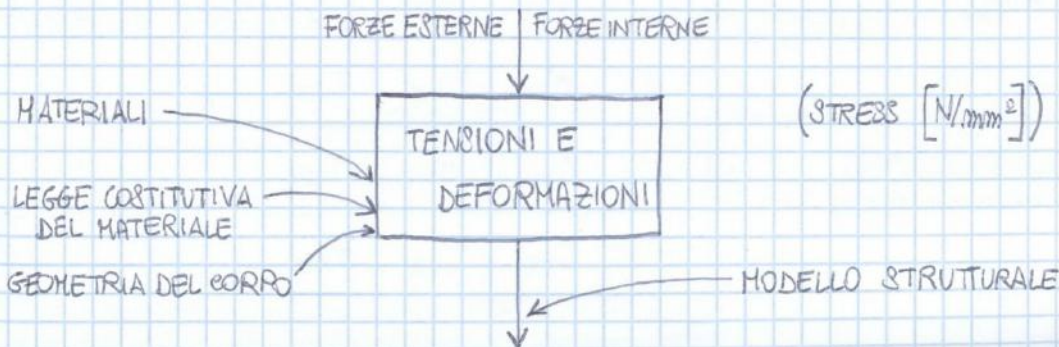
CONTRIBUTO DI ORDINE SUPERIORE = 0.

IL TAGLIO È LA DERIVATA DEL MOMENTO FLETTENTE, RISPETTO ALLO SPAZIO.

TENSIONI E DEFORMAZIONI

18/10/13

SONO NOTE SIA LE FORZE INTERNE CHE QUELLE ESTERNE.



ORA DEVO METTERE IN EQUILIBRIO IL PUNTO APPENA CONSIDERATO:

\vec{x} $\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dz dy - \sigma_{xx} dz dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + F_x = 0$

$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz = 0$ $\text{se } F_x = 0$

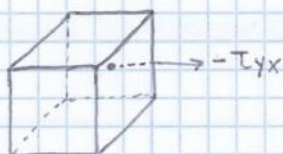
AORA GUARDANDO IL TENORE DEDUCO CHE:

\vec{y} $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$ $\text{se } F_y = 0.$

\vec{z} $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$ $\text{se } F_z = 0.$

HO APPENA SCRITTO LE 3 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO AUA TRASLAZIONE.

DEVO ORA SCRIVERE LE 3 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO AUA ROTAZIONE: (ATTORNO ALO SPIC



$\tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dx dz dy = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$

LO STESSO VALE PER LE ALTRE 2 T.

$\tau_{ij} = \tau_{ji}$

24/10/18

TENSIONI (STRESS)

DEFORMAZIONI (STRAIN)

σ_i



ϵ_i (ADIMENSIONALE)

NON MODIFICA LA FORMA

τ_{ij}



γ_{ij}

DEFORMAZIONE ANGOLARE

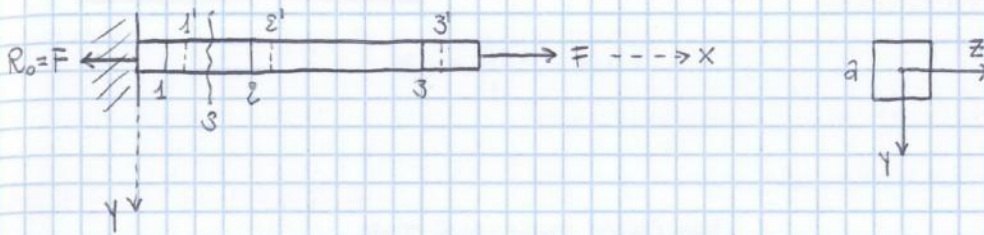


NON MODIFICANO L'ORIENTAMENTO DELLE PARTICELLE TRA LORO (NON ROMPONO) CONGRUENTI.

SFORZO	TENSIONI	DEFORMAZIONI	SPOSTAMENTI FINITI
N	$\sigma_x = \frac{N}{A}$	$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$	$\Delta L = \frac{N}{AE} \cdot L$
M_f	$\sigma_x = \frac{y}{R} = \frac{M_f}{I_z} \cdot y$	$\epsilon_x = \frac{y}{ER} = \frac{M_f}{EI_z} \cdot y$	$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M_f}{EI_z}$
M_t	$\tau_{ij} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r$	$\chi_{ij} = \frac{r}{G} = \frac{M_t}{I_p \cdot G} \cdot r$	$\Delta \theta = \frac{M_t}{I_p \cdot G} \cdot L$
T	$\tau_{ij} = \frac{T \cdot \delta z}{I_z \cdot corda}$	$\chi_{ij} = \chi \frac{r}{G}$	TRASCURABILE

TRAVE:

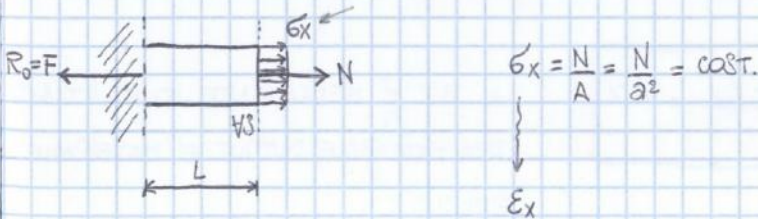
SEZIONE:



SE PRENDO PIANI \perp ALLA TRAVE (1, 2, 3, ...), E TIRO LA TRAVE CON UNA FORZA F, I PIANI SI SPOSTANO MA RESTANO \perp ALLA TRAVE.

NELLA TRAVE, NELLA SEZIONE LO SFORZO CHE IO VADO A TROVARE È LA RISULTANTE DELL'ANDAMENTO DELLE TENSIONI.

DISTRIBUZIONE DI TENSIONI σ_x



$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{N}{a^2} = \text{const.}$$

25/10/18

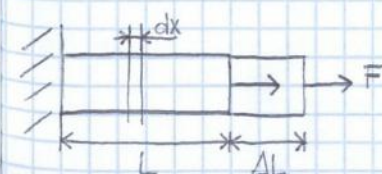
PER SCOPRIRE QUALE SARÀ LA DEFORMAZIONE DEVO INTRODURRE IL TIPO DI MATERIALE.

SE MI TROVO NELLA 1° CONDIZIONE CIOÈ LINEARE ELASTICA, VALE LA LEGGE DI HOOKE:

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

MODULO ELASTICO DI YOUNG.

$$E \approx 210'000 \text{ N/mm}^2$$

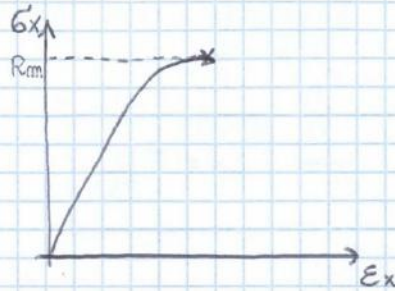


$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta L}{L}$$

DEVO INTRODURRE E PER CARATTERIZZARE IL MATERIALE

$$\Delta L = \int_L^L \epsilon_x dx = \int_L^L \frac{\sigma_x}{E} dx = \int_L^L \frac{N}{EA} dx = \frac{N}{EA} \int_L^L dx = \frac{N}{EA} L$$

MATERIALE FRAGILE (GHISA):



QUI L'IMPORTANTE È IL CARICO DI ROTTURA R_m .

SE VOGLIO CALCOLARE LA DILATAZIONE DOVUTA ALL'AUMENTO DI TEMPERATURA:

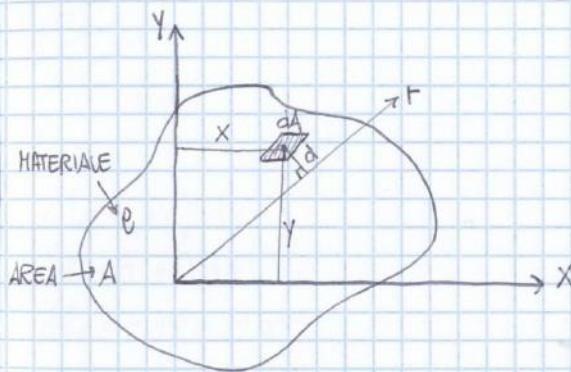
$$\Delta L = \alpha \Delta T L$$

$$\alpha = 0,000012 \text{ (RIFERITO AL } ^\circ\text{C)}$$

$$\epsilon_{xT} = \frac{\Delta L_T}{L} = \alpha \Delta T$$

MOMENTI D'INERZIA

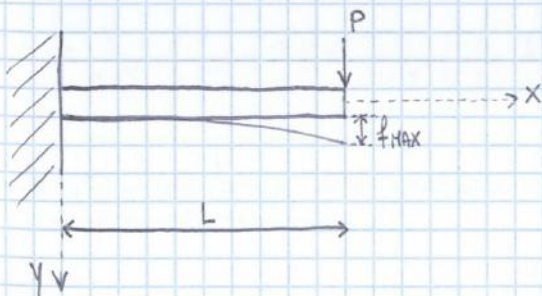
05/11/13



$$I_x = \int_A y^2 dA \quad \leftarrow \text{MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE X}$$

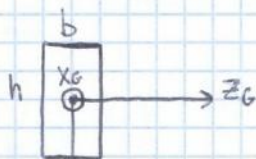
$$I_y = \int_A x^2 dA \quad \leftarrow \text{" " RISPETTO ALL'ASSE Y}$$

$$I_t = \int_A d^2 dA \quad \leftarrow \text{" " RISPETTO AD UN ASSE}$$

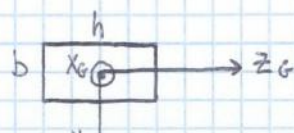


$$f_{\text{MAX}} = \frac{PL^3}{3EI_z}$$

SEZIONE TRAVE:



$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

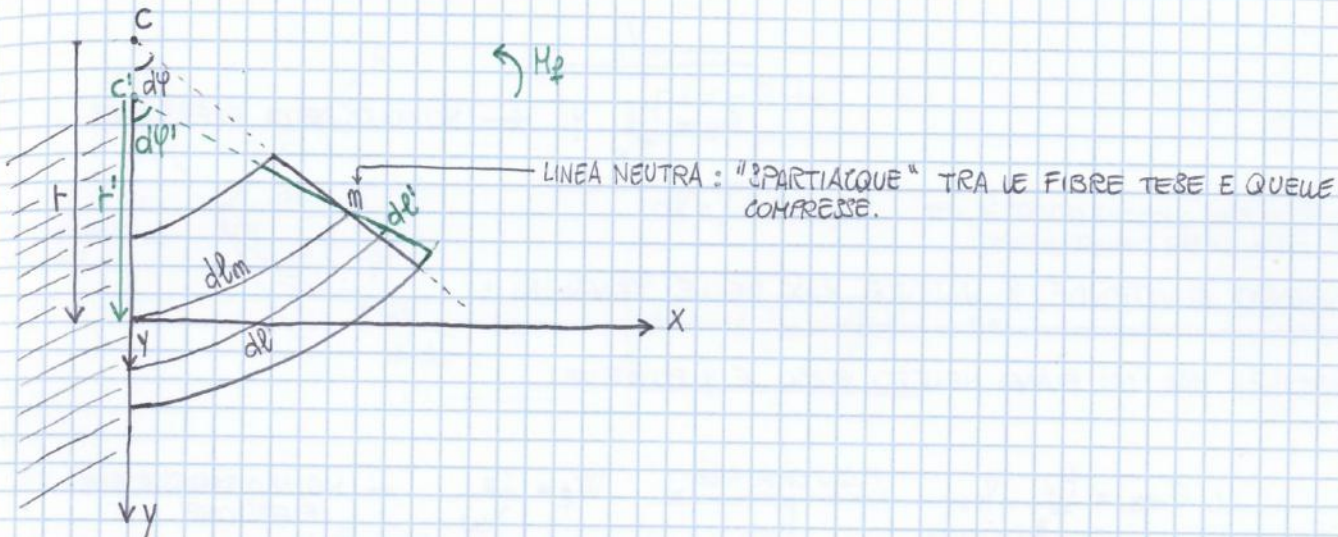


$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b \cdot dy = b \int_0^h y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3} \rightarrow \boxed{I_x = \frac{bh^3}{3}} \quad \boxed{I_y = \frac{hb^3}{3}}$$

$$I_{x_G} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \cdot dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12} \rightarrow \boxed{I_{x_G} = \frac{bh^3}{12}} \quad \boxed{I_{y_G} = \frac{hb^3}{12}}$$

DEFORMAZIONI E FLESSIONI



$$dl = (r+y) d\varphi$$

$$dl' = (r'+y) d\varphi'$$

$$dl_m = r d\varphi = r' d\varphi'$$

$$\epsilon_x = \frac{dl' - dl}{dl} = \frac{(r'+y)d\varphi' - (r+y)d\varphi}{(r+y)d\varphi} = \frac{\cancel{r}d\varphi' + y d\varphi' - \cancel{r}d\varphi - y d\varphi}{(r+y)d\varphi} = \frac{y}{(r+y)} \left(\frac{d\varphi'}{d\varphi} - 1 \right) = \frac{y}{(r+y)} \left(\frac{d\varphi'}{d\varphi} - 1 \right)$$

$$= \frac{y}{r+y} \cdot \left(\frac{r}{r'} - 1 \right) = \frac{ry}{r+y} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{\epsilon_x = \frac{ry}{r+y} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)} \leftarrow \text{DEFORMAZIONI DELLE FIBRE LONGITUDINALI}$$

NOI TRATTIAMO LA TRAVE INIZIALMENTE RETTILINEA, QUINDI $r \rightarrow \infty$:

$$\epsilon_x = \frac{ry}{r+y} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \underset{r \rightarrow \infty}{=} \frac{y}{1 + \frac{y}{r}} \cdot \frac{1}{r'} \underset{r \rightarrow \infty}{=} \frac{y}{r'}$$

$$R = r' \rightarrow \boxed{\epsilon_x = \frac{y}{R}}$$

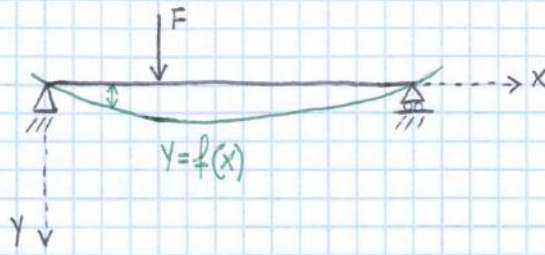
$$\downarrow$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{E}{R} \cdot y}$$

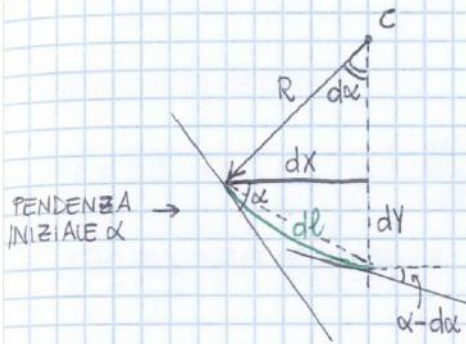
DIMOSTRAZIONE:

AVEVAMO GIÀ RICAVATO LA RELAZIONE:

$$M_f = \frac{E}{R} \cdot I_z$$



PRENDO UN ELEMENTO dl DI TRAVE DEFORMATA:



$$dl = -R d\alpha \quad *$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \leftarrow \text{È TANTO PICCOLO CHE POSSO CONSIDERARLO RETTILINEO.}$$

$$dl = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad **$$

ORA CONSIDERO

$$\alpha \approx \text{tg} \alpha$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d(\text{tg} \alpha)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

POSSO SCRIVERE ANCHE

$$\frac{d(\text{tg} \alpha)}{dx} = [1 + \text{tg}^2 \alpha] \cdot \frac{d\alpha}{dx} = [1 + \text{tg}^2 \alpha] \cdot \frac{d\alpha}{dl} \cdot \frac{dl}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [1 + \text{tg}^2 \alpha] \cdot \frac{d\alpha}{dl} \cdot \frac{dl}{dx}$$

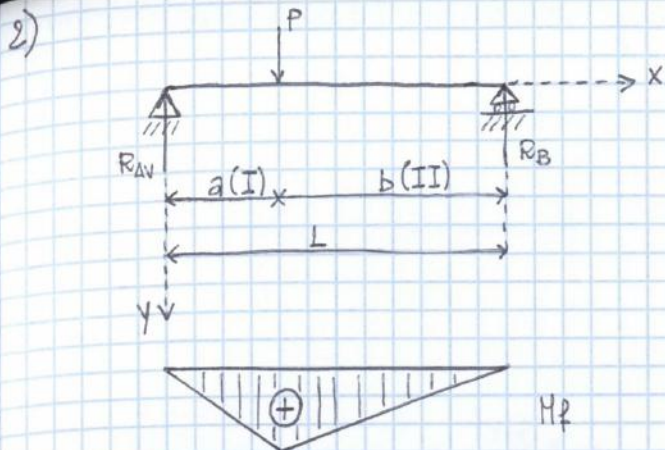
$$\frac{d^2y}{dx^2} = [1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2] \cdot \left(-\frac{1}{R}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

\uparrow * \uparrow **

$$-\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \implies -\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA.

$\leftarrow = 0 \leftarrow$ PER PICCOLI ANGOLI $\rightarrow 0$.



$$R_A = \frac{Pb}{L}$$

$$R_B = \frac{Pa}{L}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{EI_z}$$

EQUAZIONI DI SFORZO:

$$M_f^I = \frac{Pb}{L} \cdot x \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y^I}{dx^2} = -\frac{Pb}{EI_z L} x \quad (1)$$

$$M_f^{II} = \frac{Pb}{L} x - P(x-a) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y^{II}}{dx^2} = -\frac{Pb}{EI_z L} x + \frac{P(x-a)}{EI_z} \quad (2)$$

$$(1) \quad \frac{dy^I}{dx} = -\frac{Pb x^2}{2EI_z L} + A_1$$

$$y^I = -\frac{Pb x^3}{6EI_z L} + A_1 x + B_1$$

$$(2) \quad \frac{dy^{II}}{dx} = -\frac{Pb x^2}{2EI_z L} + \frac{P(x-a)^2}{2EI_z} + A_2$$

$$y^{II} = -\frac{Pb x^3}{6EI_z L} + \frac{P(x-a)^3}{6EI_z} + A_2 x + B_2$$

QUESTA VOLTA HO 6 INCOGNITE MA SOLO 2 CONDIZIONI AL CONTORNO:

$$x=0 \rightarrow y^I=0 \rightarrow \underline{B_1=0}$$

$$x=L \rightarrow y^{II}=0$$

DEVO USARE DUE CONDIZIONI DI CONGRUENZA ("LA NATURA NON FA SALTI")

IL M_f È UGUALE POCO PRIMA E POCO DOPO a :

$$x=a \rightarrow -\frac{Pba^2}{2EI_z L} + A_1 = -\frac{Pba^2}{2EI_z L} + A_2 \Rightarrow \underline{A_1=A_2}$$

$$x=a \rightarrow -\frac{Pba^3}{6EI_z L} + A_1 a + B_1 = -\frac{Pba^3}{6EI_z L} + \frac{P(a-a)^3}{6EI_z} + A_2 a + B_2 \Rightarrow \underline{B_1=B_2=0}$$

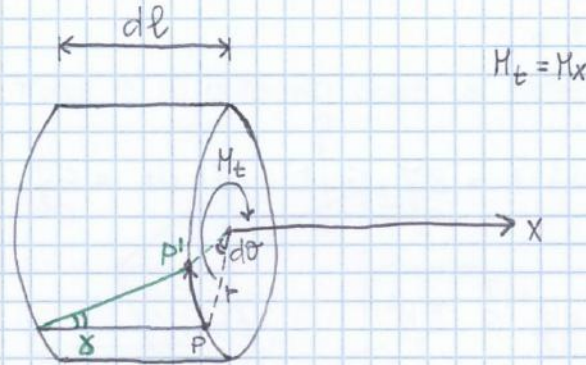
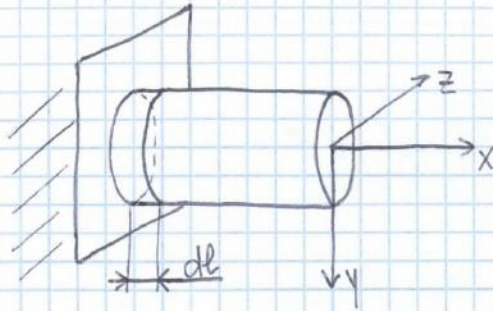
RIPRENDO LA CONDIZIONE $x=L \rightarrow y^{II}=0$:

$$-\frac{PbL^3}{6EI_z L} + \frac{P(L-a)^3}{6EI_z} + A_2 L = 0 \rightarrow A_2 L - \frac{P L^2}{6EI_z} + \frac{Pb^3}{6EI_z} = 0$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{Pb(L-b^2)}{2EI_z}$$

TORSIONE

14/11/13



APPLICO UN MOMENTO TORCENTE
E LA FIBRA P TENDE A SPSTARSI
IN P'.

PRENDO $\widehat{PP'}$ APPARTENENTE ALLA SUPERFICIE DEL CILINDRO:

$$\widehat{PP'} = \gamma dl$$

PRENDO $\widehat{PP'}$ APPARTENENTE ALLA CIRCONFERENZA DELLA SEZIONE:

$$\widehat{PP'} = r d\theta$$

POSSO QUINDI SCRIVERE

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{\gamma}{r}$$

NEVA TORSIONE HO

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \leftarrow \text{LEGGE DI HOOKE PER LA TORSIONE}$$

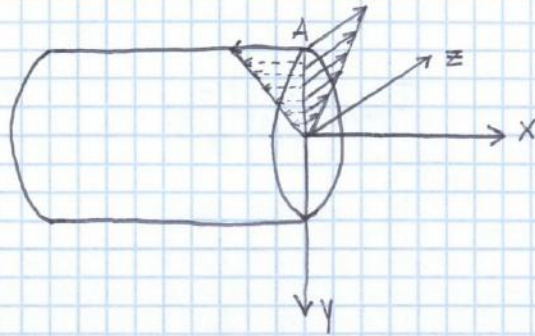
↑
MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE.

$$G \approx 83 \cdot 000 \text{ N/mm}^2 \quad \leftarrow \text{SI PUÒ CALCOLARE COME } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

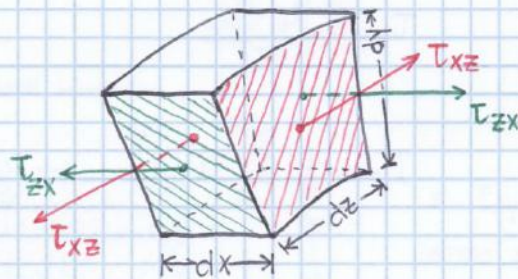
$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{\tau}{Gr}$$

DIMOSTRAZIONE: RECIPROCIITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$



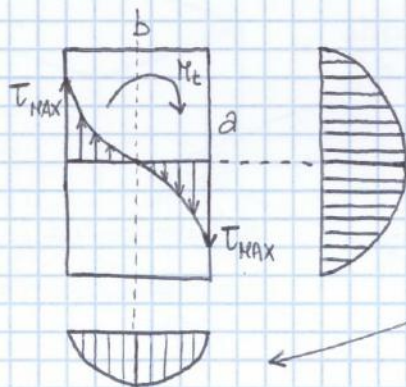
STACCO IL PUNTO A DALLA TRAVE E LO DISEGNO COME UN CUBETTO INFINITESIMO:



$$\cancel{\tau_{xz} dz dy \cdot dx} - \cancel{\tau_{zx} dx dy \cdot dz} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx}}$$

TRAVE A SEZIONE RETTANGOLARE:

15/11/13



L'ANDAMENTO DELLE τ ALL'INTERNO NON È LINEARE, AGLI SPIGOLI È 0.

INDICA L'INTENSITÀ IN SCALA, DELLA τ NEL PUNTO CORRISPONDENTE.

FORMULE SPERIMENTALI RELATIVE ALLA SEZIONE RETTANGOLARE:

$$\tau_{MAX} = \alpha \frac{M_t}{ab^2}$$

DA TABELLA

$$\vartheta = \beta \frac{M_t}{G a b^3}$$

DA TABELLA

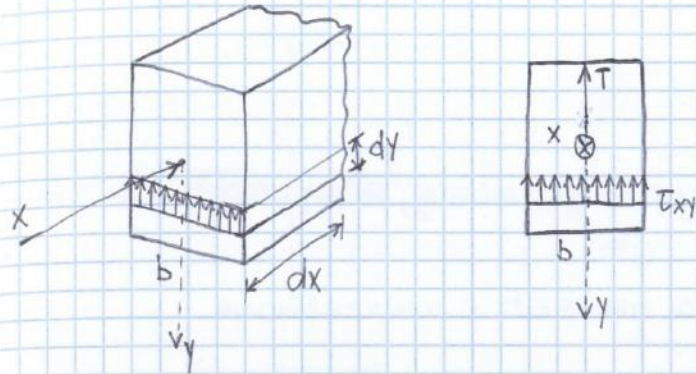
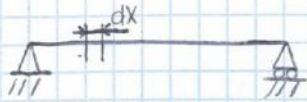
$$m = \frac{a}{b}$$

$$m = \infty \longrightarrow \alpha = 3$$

$$m = \infty \longrightarrow \beta = 3$$

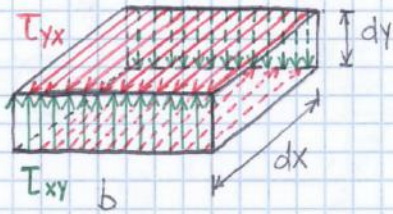
CONSIDERO LA TRAVE A SEZIONE RETTANGOLA CON UN LATO COSTANTE E L'ALTRO CHE $\rightarrow \infty$

IPOTESI:



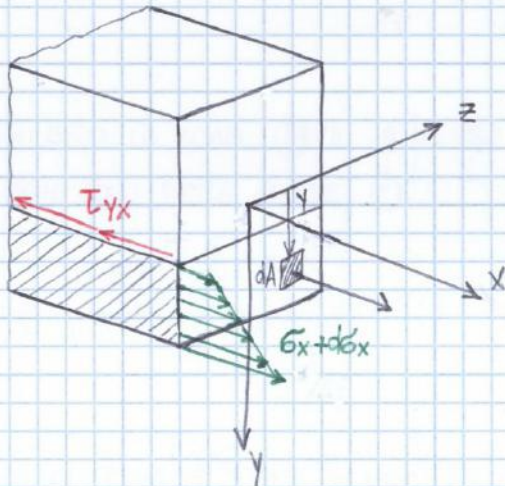
- LE T SONO TUTTE PARALLELE E DIRETTE NELLA STESSA DIREZIONE E VERSO DELLO SFORZO DI TAGLIO.
- LE T SONO COSTANTI LUNGO LA STESSA CORDA.

PRENDO:



LE T_{xy} GENERANO UNA ROTAZIONE \curvearrowright , ALLORA METTO DELLE DISTRIBUZIONI T_{yx} PER EQUILIBRARE

$$T_{xy} \cdot b \cdot dy \cdot dx = T_{yx} \cdot b \cdot dx \cdot dy \implies T_{xy} = T_{yx} \leftarrow \text{RECIPROCIITÀ}$$



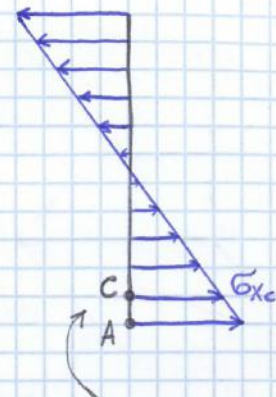
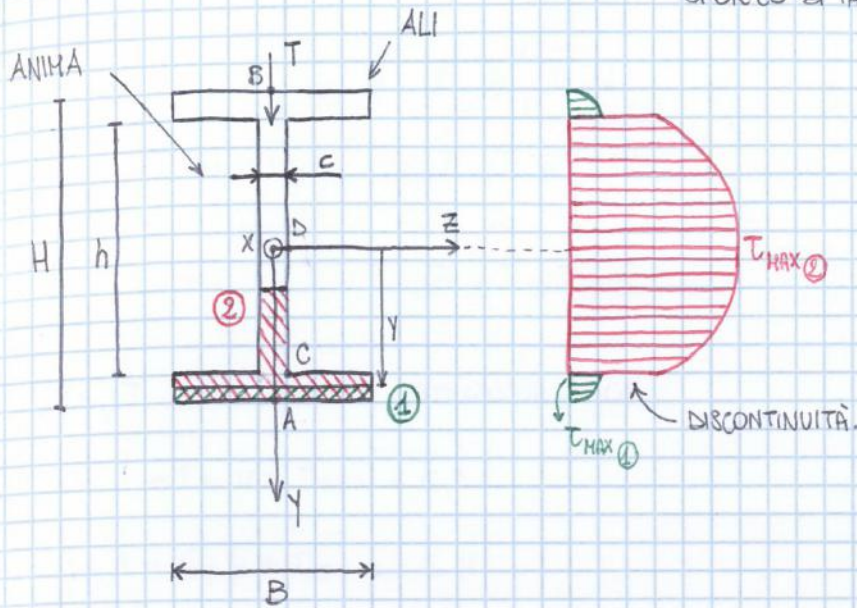
FACCO L'EQUILIBRIO LUNGO L'ASSE X:

$$\int_A (\sigma_x + d\sigma_x) dA - \int_A \sigma_x dA - T_{yx} b dx = 0$$

$$\int_A d\sigma_x dA = T_{yx} b dx$$

ESEMPIO: (SEZIONE APERTA, PROFILATO I)

QUESTO PROFILATO HA DUE CORDE DIVERSE. TUTTO LO SFORZO DI TAGLIO È SOPPORTATO DALL' ANIMA.



IN QUESTE SEZIONI C È IL PUNTO PIÙ DOLENTE, RESTA COMUNQUE PERICOLOSO IL PUNTO A. SENZA VALORI NON RIUSCIAMO A STABILIRE QUALE DEI DUE È PIÙ PERICOLOSO.

$$\tau_{xy①} = \tau_{yx①} = \frac{T}{BI_z} \cdot \int_y^{\frac{H}{2}} B \cdot y \, dy = \frac{T}{BI_z} \cdot \left(\frac{B}{2} \cdot \left[\frac{H^2}{4} - y^2 \right] \right)_{y/h/2}$$

$$y = \frac{H}{2} \rightarrow \tau_{xy①} = \tau_{yx①} = 0$$

$$y = \frac{h}{2} \rightarrow \tau_{xy① \text{ MAX}} = \tau_{yx① \text{ MAX}} = \frac{T}{BI_z} \cdot \underbrace{\left(\frac{B}{2} \cdot \left[\frac{H^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right] \right)}_{S_{0z}}$$

QUANDO CONSIDERO LA ZONA ② IL MOMENTO STATICO È QUELLO DI TUTTO IL PROFILATO CHE C'È SOTTO, NON SOLO DELLA PARTE ②.

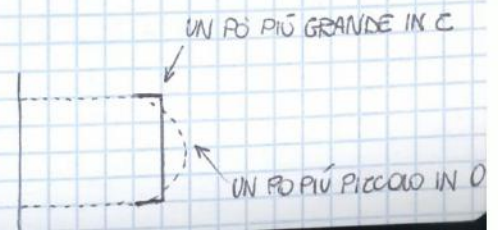
$$\tau_{xy②} = \tau_{yx②} = \frac{T}{c I_z} \left(S_{0z} + \int_y^{\frac{h}{2}} c \cdot y \, dy \right) = \frac{T}{c I_z} \cdot \left(S_{0z} + \frac{c}{2} \left[\frac{h^2}{4} - y^2 \right] \right)_0$$

$$y = \frac{h}{2} \rightarrow \tau_{xy②} = \tau_{yx②} = \frac{T}{c I_z} \cdot S_{0z}$$

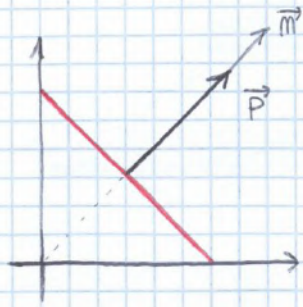
$$y = 0 \rightarrow \tau_{xy② \text{ MAX}} = \tau_{yx② \text{ MAX}} = \frac{T}{c I_z} \cdot \left(S_{0z} + \underbrace{\frac{c}{2} \cdot \frac{h^2}{4}}_{S_{0z}} \right)$$

τ_{xy} MEDIA APPROSSIMATA:

$$\tau_{xy} = \frac{T}{ch} \leftarrow \text{IGNORO LE ALI PERCHÉ LO SFORZO CHE SOPPORTANO È BASSO.}$$



PER COME ABBIAMO SCELTO IL PIANO ABC AVREMO:



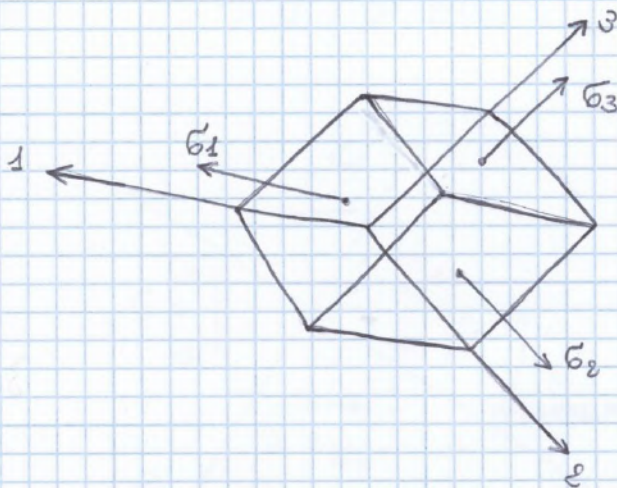
$$\vec{p} \perp ABC \rightarrow \vec{p} \equiv \vec{c}$$

ALLORA:

$$\sigma_x \lambda + \tau_{yx} \mu + \tau_{zx} \nu = \sigma \lambda$$

$$\tau_{xy} \lambda + \sigma_y \mu + \tau_{zy} \nu = \sigma \mu$$

$$\tau_{xz} \lambda + \tau_{yz} \mu + \sigma_z \nu = \sigma \nu$$

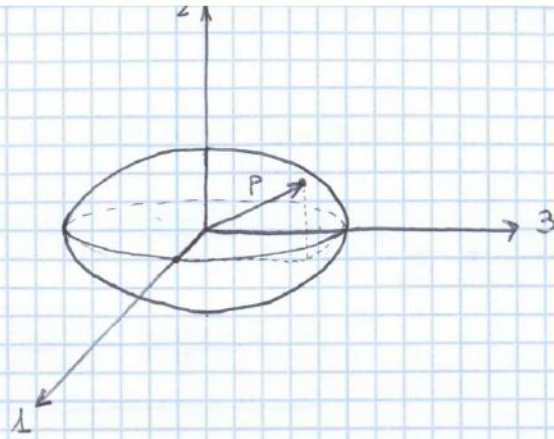


DEVO CALCOLARE GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

28/11/13

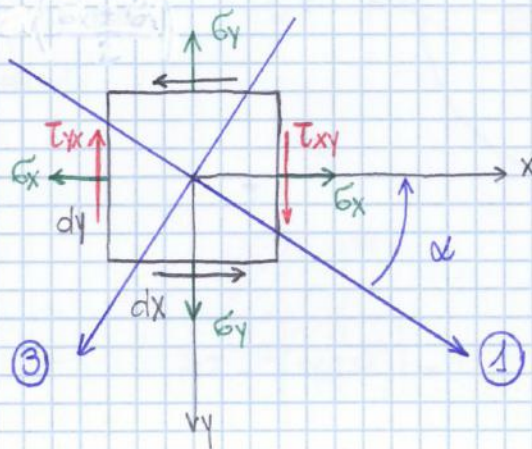
$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$



OTTENGO COSÌ P CHE È LA DIREZIONE DELLA TENSIONE PRINCIPALE, P È UNA TENSIONE PRINCIPALE.
NON TROVERO' MAI UNA DIREZIONE IN CUI LA TENSIONE È MAGGIORE DI QUELLA NELLA DIREZIONE P.

VEDIAMO IL CASO DELLA PIASTRA:

$$\begin{array}{l} \sigma_x \neq 0 \\ \sigma_y \neq 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \neq 0 \end{array} \quad \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



AVRO' QUINDI:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(-\sigma) + \tau_{yx}^2 \sigma = 0$$

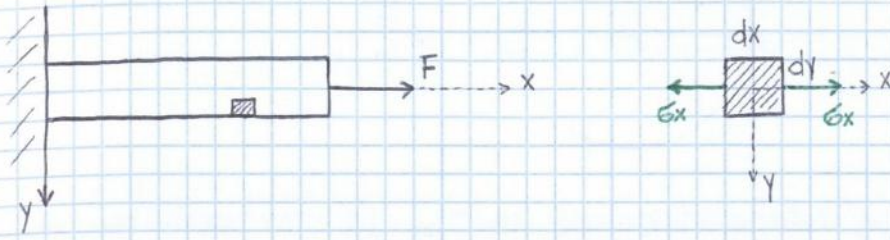
$$(\sigma_x - \sigma)(-\sigma\sigma_y + \sigma^2) + \tau_{yx}^2 \sigma = 0$$

$$-\sigma\sigma_x\sigma_y + \sigma^2\sigma_y + \sigma^2\sigma_x - \sigma^3 + \tau_{yx}^2 \sigma = 0$$

APPLICAZIONI DEI CERCHI DI MOORE

29/11/13

TRAVE IN TRAZIONE:

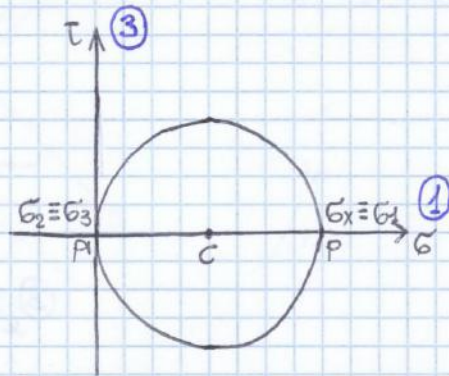


$$\sigma_a = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_x \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

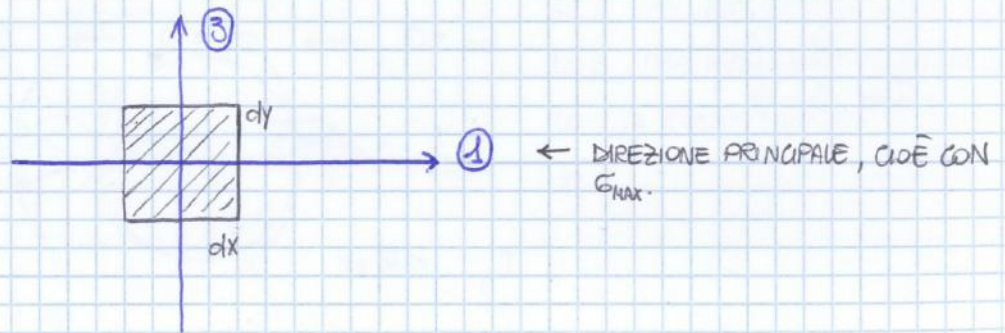
$$\sigma_{b,c} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

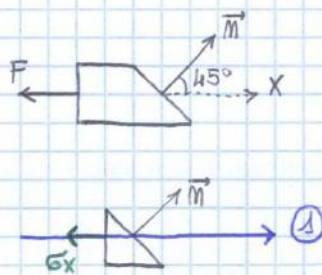


$$P = (\sigma_x, \tau_{xy}) = (\sigma_x, 0)$$

$$P' = (\sigma_y, -\tau_{xy}) = (0, 0)$$



PROVA DI TRAZIONE:



SOTTOPOSTO A TRAZIONE, L'ACCIAIO DURO, SI ROMPERA' A 45° RISPETTO ALLA DIREZIONE X.

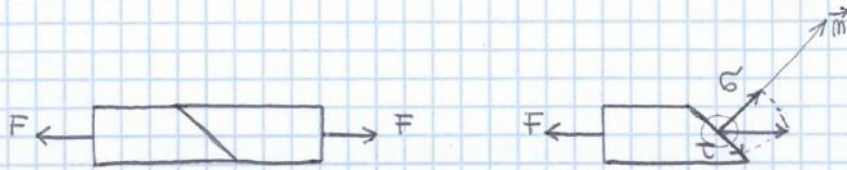
CASO GENERALE:

05/12/13

$$\sigma_{b,c} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

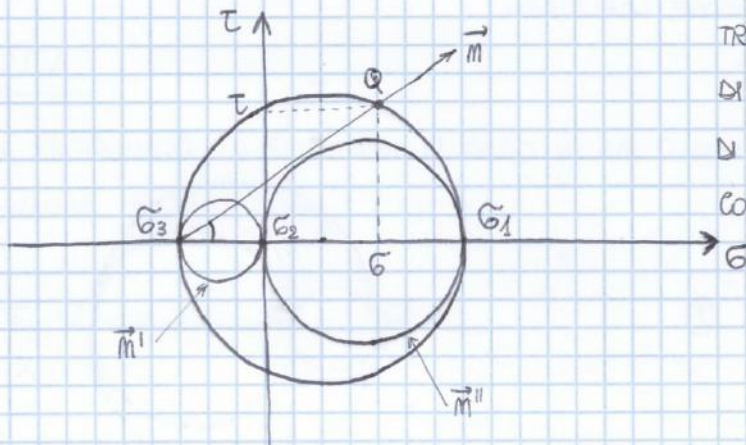
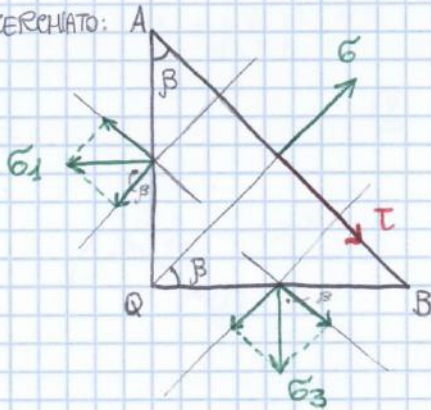
$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\sigma_a = 0$$



HO σ E τ QUALSIASI:

INGRANDISCO IL PUNTO CERCHIATO:



TROVO IL PUNTO Q, DALL'INCROCIO DI \vec{m} CHE SO ESSERE INCLINATA DI β , CHE TROVO SPERIMENTALMENTE, CON LA CIRCONFERENZA.

$$AQ = AB \cos \beta$$

$$BQ = AB \sin \beta$$

EQUILIBRIO NELLA DIREZIONE \vec{m} :

$$\sigma \cdot AB = \sigma_1 \cos^2 \beta AB + \sigma_3 \sin^2 \beta AB$$

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_3 (1 - \cos^2 \beta)$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma = \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \beta}$$

CI SONO 3 IPOTESI DI ROTTURA, A SECONDA DEL MATERIALE IN QUESTIONE:

IPOTESI DI GALILEO O DELLA TENSIONE MASSIMA. (MATERIALI FRAGILI)

IPOTESI DI TRESCA O DELLA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA. (MATERIALI NON DUTILI)

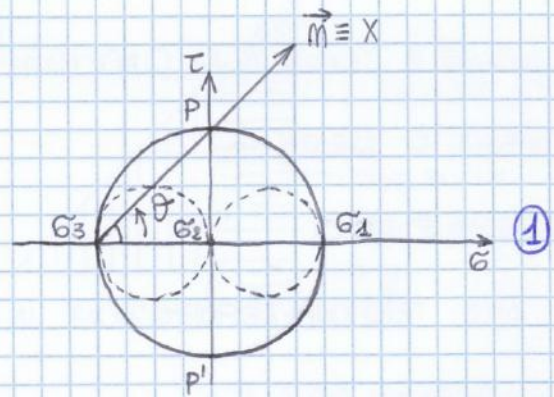
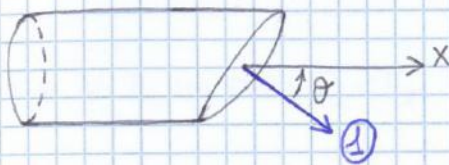
IPOTESI DI VON MISES O DELL'ENERGIA DI DISTORSIONE MASSIMA. (MATERIALI DUTILI)

IPOTESI DI GALILEO:

RAGGIUNGO LA ROTTURA QUANDO, IN UN QUALSIASI PIANO, RAGGIUNGO LA TENSIONE MASSIMA.

$$\sigma_{eq} = \sigma_1$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

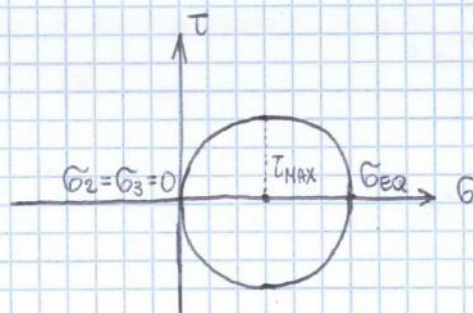


IPOTESI DI TRESCA:

06/12/13

IN UNA STRUTTURA RAGGIUNGO LA ROTTURA, QUANDO IN UN QUALSIASI PUNTO RAGGIUNGO LA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA τ_{MAX} .

τ_{MAX}	\equiv	τ_{MAX}
1D		3D
$\sigma_{eq}, 0, 0$		$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

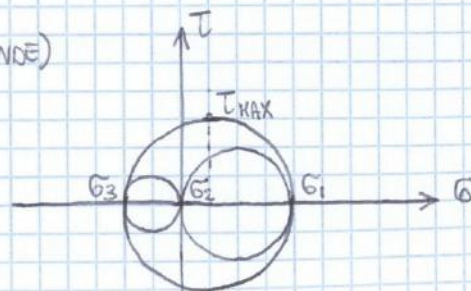


$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (\text{DIAMETRO DEL CERCHIO GRANDE})$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_{eq}}{2}$$

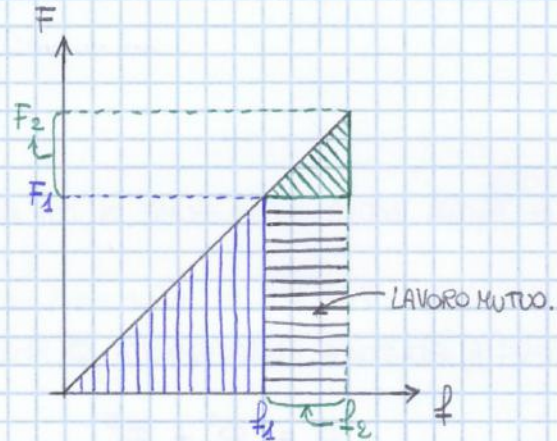
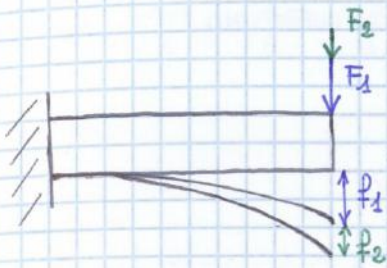
$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{eq}}{2}$$



SE HO PIÙ TIPI DI FORZE AGENTI, NON POSSO DIRE CHE L'ENERGIA IMMAGAZZINATA È LA SOMMA DELLE ENERGIE, PERCHÈ NON VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI; C'È UN PEZZO IN PIÙ CHE NON VEDIAMO, LAVORO MUTUO, CHE SI CALCOLA CON IL TEOREMA DI BETTI.

②

$L_e = L_i = \Phi$
 SU TUTTA LA STRUTTURA SU UN PUNTO INFINITESIMO E INTEGRO SU TUTTO IL VOLUME.



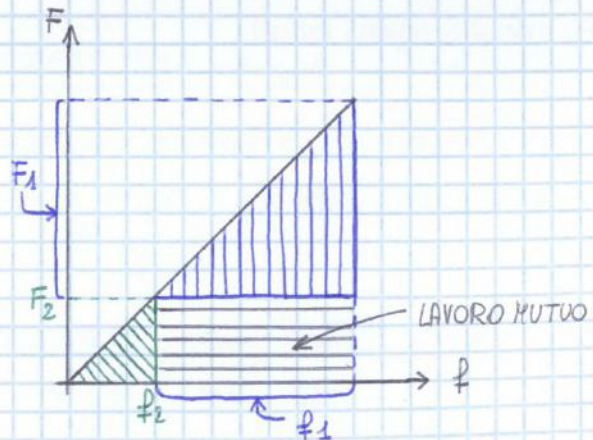
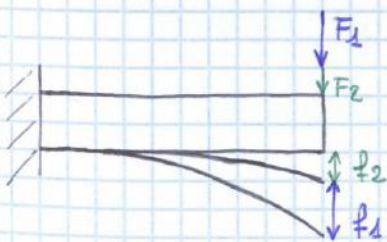
APPESO OLTRE AD F_1 UN PESO $F_2 < F_1$.

$$L_{e,2} = \frac{1}{2} F_1 f_1 + \frac{1}{2} F_2 f_2 + \underbrace{F_1 \cdot f_2}_{\text{LAVORO MUTUO O LAVORO DI BETTI}}$$

↳ LAVORO MUTUO O LAVORO DI BETTI

VEDO CHE NON VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PERCHÈ MANCA IL RETTANGOLO IN NERO.

ORA CAMBIO L'ORDINE CON CUI APPESO LE STESSO FORZE F_1 E F_2 :



$$L_{e,1} = \frac{1}{2} F_2 f_2 + \frac{1}{2} F_1 f_1 + \underbrace{F_2 \cdot f_1}_{\text{LAVORO MUTUO}}$$

↳ LAVORO MUTUO.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad \leftarrow \text{LEGALE TENSIONI-DEFORMAZIONI NEL CASO DI TENSIONI PRINCIPALI.}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{3D} = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}$$

③

12/12/13

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 = \frac{1}{2E} \left\{ \underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}_A - 2\nu \underbrace{[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3]}_B \right\}$$

$$\rightarrow \Phi = \frac{1}{2E} (A - 2\nu B)$$

RICORDIAMO CHE DOBBIAMO RICAVARE L'ENERGIA DI DISTORSIONE MASSIMA NELLE 3 DIMENSIONI, PER POI UGUAGLIARLA ALLA DISTORSIONE MASSIMA IN 1D:

$$\Phi''_{\text{MAX}} = \Phi'_{\text{MAX}}$$

3D 1D

$$\Phi'' = \Phi - \Phi'$$

↑ ENERGIA NELLA QUALE LE σ SONO TUTTE UGUALI (NON MODIFICO LA FORMA).

$$\sigma_m = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \leftarrow \text{ASSUNZIONE DI VON MISES.}$$

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{1}{2E} \left\{ 3\sigma_m^2 - 3\nu\sigma_m^2 \right\} = \frac{1}{2E} \left\{ \frac{3}{9} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]^2 - 2\nu \frac{3}{9} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2E} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left\{ (1-2\nu) \underbrace{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2]}_A + 2 \underbrace{(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}_B \right\} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \Phi' = \frac{1}{2E} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left\{ (1-2\nu)(A + 2B) \right\}$$

	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\sigma \neq 0, \tau \neq 0$	$\sigma \neq 0, \tau = 0$	$\sigma = 0, \tau \neq 0$
GALILEO	$\sigma_{EQ} = \sigma_1$	$\sigma_{EQ} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$	$\sigma_{EQ} = \sigma$	$\sigma_{EQ} = \tau$
TRESCA	$\sigma_{EQ} = \sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_{EQ} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\sigma_{EQ} = \sigma$	$\sigma_{EQ} = 2\tau$
VON MISES	$\sigma_{EQ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	$\sigma_{EQ} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$	$\sigma_{EQ} = \sigma$	$\sigma_{EQ} = \sqrt{3} \tau$

COEFFICIENTE DI SICUREZZA

IL COEFFICIENTE DI SICUREZZA È UN NUMERO PURO.



$$\begin{aligned} \sigma_{AM} &= \sigma_{ADM} \\ \tau_{AM} &= \tau_{ADM} \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{matrix} \sigma, \tau \\ \text{AMMISSIBILE} \end{matrix}$$

$\sigma_{CALC.} \leq \sigma_{AM}$
 $\tau_{CALC.} \leq \tau_{AM}$

VENGONO SEMPRE DAI MATERIALI; MA DATO CHE IL MATERIALE È CARATTERIZZATO A TRAZIONE ($\tau = 0$), SE HO BISOGNO DELLA τ_{AM} DEVO UTILIZZARE LA COLONNA DELLA TABELLA CON $\sigma = 0, \tau \neq 0$; OTTENENDO A SECONDA DEL MATERIALE IN QUESTIONE:

$$\sigma_{EQ} = \sigma_{AM} = \tau_{AM} \quad \leftarrow \text{ACCIAIO MOME (GALILEO)}$$

$$\sigma_{EQ} = \sigma_{AM} = 2\tau_{AM} \quad \leftarrow \text{ACCIAIO DURO (TRESCA)}$$

$$\sigma_{EQ} = \sigma_{AM} = \sqrt{3} \tau_{AM} \quad \leftarrow \text{ACCIAIO DA CARPENTERIA (VON MISES)}$$

SE UN INGEGNERE NON SA COSA FARE, SI CALCOLA LA σ_{AM} COME:

$$\sigma_{AM} = \frac{R_{p0.2}}{\dots}$$

SI DEFINISCE FATTORE DI FORMA: (È TOTALMENTE ANALITICO, NON C'È NULLA DI SPERIMENTALE).

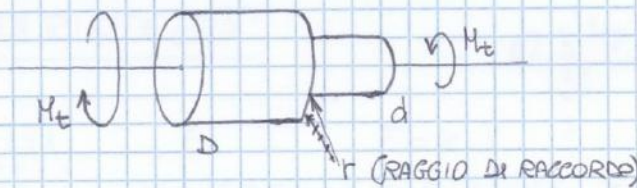
$$K_t = \frac{\sigma_{MAX}}{\sigma_m}$$

← DIPENDE SOLO DALLA FORMA DEL COMPONENTE E NON DALLA SOLLECITAZIONE

σ_m È LA SIGMA NOMINALE, CIOÈ $\sigma_m = \frac{F}{A_m}$ DOVE A_m È L'AREA NETTA DATA DA

$$A_m = h_m \cdot s.$$

UN CASO DI ROTTURA MOLTO FREQUENTE, È DATO DA UN RACCORDO TROPPO PICCOLO DEVE PARTI MECCANICHE (NON BISOGLIA LASCIARE SPIGOLI TROPPO VIVI):



L'EFFETTO DI INTAGLIO STATICO HA SENSO SOLO NEI MATERIALI FRAGILISSIMI (TIPO IL VETRO).
 UN MATERIALE DUTTILE NON SI ROMPERÀ A TRAZIONE, ANCHE IN PRESENZA DI INTAGLIO, PERCHÈ IN VICINANZA DELL'INTAGLIO IL MATERIALE SUPERA IL LIMITE DI ELASTICITÀ ED ARRIVA A PLASTICITÀ; NELLA VOLTA SUCCESSIVA CHE TIRO IL MATERIALE LA PLASTICIZZAZIONE RENDE PIÙ "MORBIDO" L'EFFETTO DI INTAGLIO E QUINDI IL MATERIALE NON ARRIVERÀ A ROTTURA.

QUINDI NEL MATERIALE DUTTILE RAPPRESENTO L'EFFETTO DI INTAGLIO CON K_f , ED AVRÒ:

$$K_t > K_f > 1$$

↑ ↑

DEFINITO DALLA CURVA CHE HO SOPRA

CALCOLO MATRICIALE

07/01/14

Si fa perché la maggior parte delle strutture reali sono calcolabili altrimenti solo in maniera molto lunga e complicata.

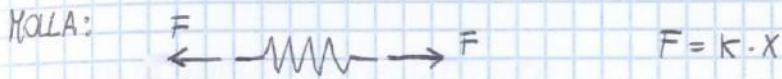
Noi faremo:

- FORMULAZIONE DI RIGIDEZZA PER ASTA, MOLLA, BARRA DI TORSIONE, (TRAVE)
 ↑
 RAPPORTO TRA FORZE E SPOSTAMENTI

NO A'ORALE

- COORDINATE LOCALI E GLOBALI.
- ASSEMBLAGGIO DELLA STRUTTURA E SOLUZIONI.

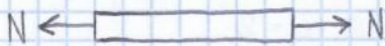
FORMULAZIONE DI RIGIDEZZA:



$$k = \frac{F}{x}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA (TEORICA),
 POSSO CALCOLARLA IN 2 MODI

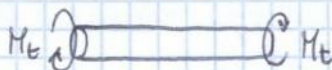
ASTA:



$$\Delta L = \frac{N}{EA} \cdot L \quad \rightarrow \quad N = \frac{EA}{L} \cdot \Delta L$$

MATRICE DI RIGIDEZZA, COSTANTE.

BARRA DI TORSIONE:



$$M_t = \frac{GI_P}{L} \cdot \Delta \theta$$

MATRICE DI RIGIDEZZA, COSTANTE.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{u_1} \\ f_{u_2} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

$[a] \quad \{s\} \quad [b] \quad \{f\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{u_1} \\ f_{u_2} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

$[a] \quad \{s\} \quad [b] \quad \{f\}$

PER OTTENERE UNA FORMULA DI RIGIDEZZA DEVO
DIVIDERE PER $[b]$:

$$[a] \cdot [b]^{-1} \cdot \{s\} = [b] \cdot [b]^{-1} \cdot \{f\}$$

↑
 $[k]$

$$\rightarrow [k] = [a] \cdot [b]^{-1}$$

FORMULA DI INVERSIONE DELLA MATRICE:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

INVERTO ADORA LA MATRICE $[b]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{EA}{L} \\ 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$[k] = [b]^{-1} \cdot [a] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{EA}{L} \\ 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k] = [b]^{-1} \cdot [a] = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} =$$

$$= k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

POSSO ADORA SCRIVERE:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_1} \\ f_{u_2} \end{Bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_1} \\ f_{u_2} \end{Bmatrix}$$

ELEMENTO TRAVE: (PIANO XY)

09/01/14



$i = 2$
 $m_i = 2 \rightarrow m = m_i \cdot i = 4$

2m VARIABILI \rightarrow 8 VARIABILI (ALCUNE NOTE ALTRE INCOGNITE)
 m EQUAZIONI \rightarrow EQUAZIONI

$$\begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} s \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} f \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

2 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO.
 2 EQUAZIONI AGU SPOSTAMENTI

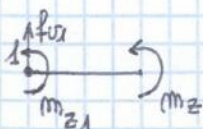
$$\begin{Bmatrix} s \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \alpha_{z1} \\ v_2 \\ \alpha_{z2} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} f \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ m_{z1} \\ f_{v2} \\ m_{z2} \end{Bmatrix}$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\begin{cases} f_{u1} + f_{u2} = 0 & \leftarrow \text{TRASLAZIONE VERTICALE} \\ m_{z1} + m_{z2} - f_{v1} \cdot L = 0 & \leftarrow \text{ROTAZIONE ATTORNO AL NODO 2.} \end{cases}$$

EQUAZIONI AGU SPOSTAMENTI:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{m_z}{EI_z} \quad \leftarrow \text{EQUAZIONE LINEA ELASTICA.}$$



$$m_z = f_{v1} \cdot X - m_{z1}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI_z} (m_{z1} - f_{v1} \cdot X)$$

ELEMENTO TRAVE NEL PIANO, COMPLETO:

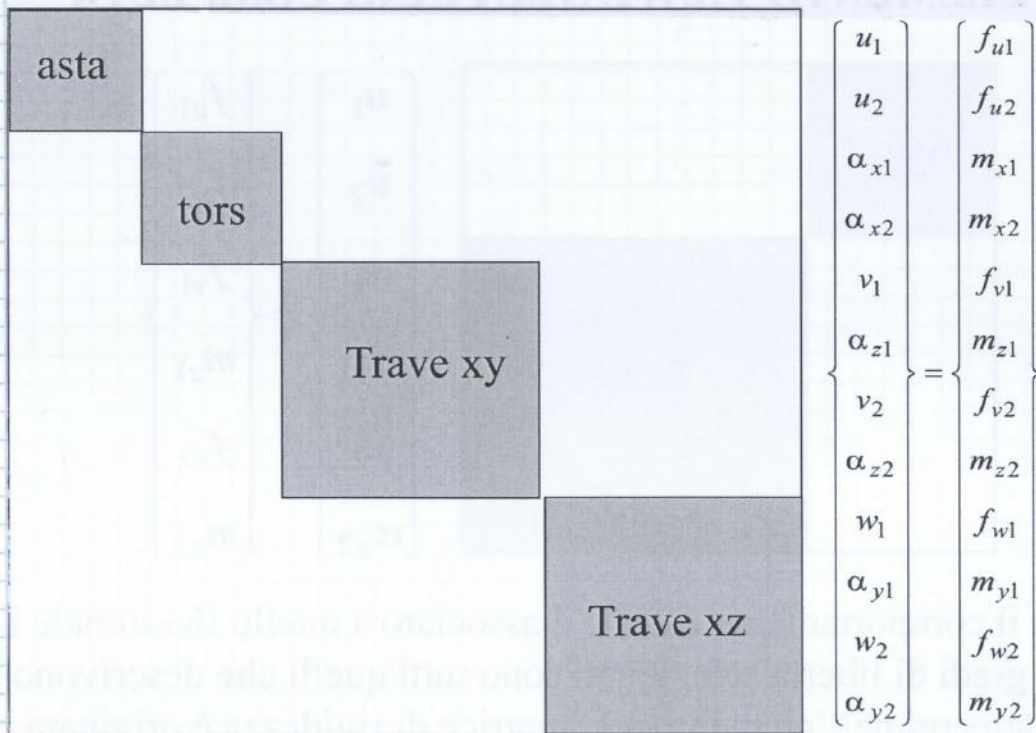
CONSIDERO ANCHE GLI SPOSTAMENTI ORIZZONTALI CHE AVEVO TRASCURATO, IN QUANTO ERANO IL CASO DELL'ASTA:

$$\begin{bmatrix} \text{ASTA} & 0 \\ 0 & \text{TRAVE} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ \alpha_{z1} \\ v_2 \\ \alpha_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \\ f_{v1} \\ m_{z1} \\ f_{v2} \\ m_{z2} \end{Bmatrix}$$

$$[K] \cdot \{s\} = \{f\}$$

ELEMENTO TRAVE NELLO SPAZIO:

ELEMENTO TRAVE NELLO SPAZIO



y e z assi principali di inerzia – sezione circolare

$$[K]_{ASTA} \cdot \{S\} = \{F\} + \{f_e\}$$

RESTA TUTTO COME AVEVAMO CALCOLATO.

STO IPOTIZZANDO CHE AGISCONO TUTTI I TIPI DI CARICO, SOVRAPPONGO GLI EFFETTI.

$$+ \frac{qL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + EA \cdot \alpha T_m \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{f_u}{l} \begin{Bmatrix} x^* \\ l-x^* \end{Bmatrix}$$

①
②
③

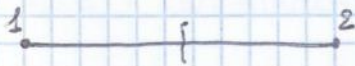
DILATAZIONE TERMICA: ②



$$f_{u1} + f_{u2} = 0$$

$$f_{u1} + f_{u2} + f_{e1} + f_{e2} = 0$$

$$\boxed{f_{e1} + f_{e2} = 0} \quad \text{EQ. ALL'EQUILIBRIO.}$$



$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

$$N = f_{u2}$$

$$u_2 - u_1 = \frac{f_{u2}}{EA} l + \alpha T_m l$$

$$u_2 - u_1 = \frac{f_{u2}}{EA} l + \frac{f_{e2}}{EA} l$$

$$\frac{f_{u2}}{EA} l + \alpha T_m l = \frac{f_{u2}}{EA} l + \frac{f_{e2}}{EA} l$$

$$\boxed{f_{e2} = \alpha T_m EA} \quad \text{EQ. ALLO SPOSTAMENTO}$$

$$\Rightarrow f_{e1} = -\alpha T_m EA$$

$$\mu_{1X} = \mu_{1X} \cos\theta$$

$$\mu_{2Y} = \mu_{2Y} \sin\theta$$

$$\mu_{1X} = \mu_{1X} \cos\theta + \mu_{1Y} \sin\theta$$

$$\mu_{2X} = \mu_{2X} \cos\theta + \mu_{2Y} \sin\theta$$

$$\begin{Bmatrix} \mu_{1X} \\ \mu_{2X} \end{Bmatrix}_{X,Y,Z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_{1X} \\ \mu_{1Y} \\ \mu_{2X} \\ \mu_{2Y} \end{Bmatrix}_{X,Y,Z}$$

MATRICE DI ROTAZIONE

$$[R]$$



MATRICE ORTOGONALE, PERCHÉ FUNZIONE LINEARE

⇒ INVERSA = OPPOSTA.

$$[K]_{X,Y,Z} \cdot \{s\}_{X,Y,Z} = \{p\}_{X,Y,Z}$$

$$[K]_{X,Y,Z} \cdot \{s\}_{X,Y,Z} = \{p\}_{X,Y,Z}$$

$$\{s\}_{X,Y,Z} = [R] \{s\}_{X,Y,Z}$$

$$\{p\}_{X,Y,Z} = [R] \{p\}_{X,Y,Z}$$

$$\rightarrow [K]_{X,Y,Z} \cdot [R] \cdot \{s\}_{X,Y,Z} = [R] \cdot \{p\}_{X,Y,Z}$$

$$[R]^{-1} = [R]^T$$



$$\boxed{[R]^T \cdot [K]_{X,Y,Z} \cdot [R] \cdot \{s\}_{X,Y,Z} = \{p\}_{X,Y,Z}}$$



$$[K]_{X,Y,Z}$$

$$[K]_{X,Y,Z}^I = [R]^T \cdot [k]_{x,y,z} \cdot [R]$$

$$[K]_{X,Y,Z}^I = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c & -c \\ s & -s \\ -c & c \\ -s & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

← SOSTITUISCO ORA I SENI E COSENI DI θ CORRISPONDENTI ALL'ELEMENTO.

IN TOTALE ABBIAMO 6 POSSIBILI SPOSTAMENTI CHE ABBIAMO NUMERATO, QUINDI IN TOTALE AVREMO UNA MATRICE DI RIGIDITÀ 6x6:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}$$

$$[K]_{X,Y,Z} \quad \{S\}$$

* LA √2 A DENOMINATORE È PER LA LUNGHEZZA DELL'ELEMENTO CHE NON È L MA L√2.

ORA VADO A SOSTITUIRE SPOSTAMENTI E FORZE NOTI:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ -F \\ R_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DOVE HO GU 0, CI SONO I VINCOLI QUINDI NON HO SPOSTAM.
 PERCHÈ È UN GRADO DI LIBERTÀ, NON C'È NESSUNA FORZA APPLICATA.

• SOLUZIONE PARTICOLARE:

$$Y = \text{cost.} \rightarrow Y = \delta$$

⇒ SOLUZIONE GENERALE:

$$Y = A \cos \sqrt{\frac{P}{EI_z}} X + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI_z}} X + \delta$$

CONDIZIONI AL CONTOURNO:

$$Y(0) = 0 \rightarrow 0 = A + \delta \rightarrow A = -\delta$$

$$\left. \frac{dY}{dX} \right|_0 = 0 \rightarrow B = 0$$

$$Y(l) = \delta \rightarrow \delta = -\delta \cos \sqrt{\frac{P}{EI_z}} l + \delta$$

$$\delta = \delta \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI_z}} l \right)$$

$$\Rightarrow \cos \sqrt{\frac{P}{EI_z}} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI_z}} l = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

A ME INTERESSA IL MINIMO CARICO CRITICO QUINDI PRENDO $k=0$:

$$\sqrt{\frac{P}{EI_z}} l = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{P}{EI_z} l^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4 l^2}$$

IN QUESTO CASO P_{cr} :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{l_0^2}$$