



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1086

DATA: 16/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Chiesa

MATERIA: Idraulica

Prof. Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

1 FLUIDI E IL LORO MOVIMENTO

1) DEFINIZIONE DI FLUIDO

IL FLUIDO È UN CORPO MATERIALE CHE, A CAUSA DELLE DEBOLI INTERAZIONI TRA LE PARTICELLE CHE LO COMpongONO, PUÒ SUBIRE GRANDI VARIAZIONI DI FORMA SOTTO L'AZIONE DI FORZE DI MINIMA ENTITÀ E CHE TENDONO A DIVENTARE TRASCURABILI QUANDO LA VELOCITÀ CON CUI AVVIENE LA DEFORMAZIONE SI ANNULLA.

LE VARIAZIONI DI FORMA SONO PERMANENTI; NON SI ESTINGUONO QUINDI AL CESSARE DELLE FORZE. INOLTRE, SE IL FLUIDO È UN LIQUIDO OPpone GRANDE RESISTENZA ALLE VARIAZIONI DI VOLUME; COSÌ NON AVVIENE INVECE PER UN GAS. DICHIAMO QUINDI CHE UN LIQUIDO È POCO COMPRESSIBILE, O ADDIRITTURA INCOMPRESSIBILE, MENTRE UN GAS È COMPRESSIBILE.

2) I FLUIDI COME SISTEMI CONTINUI

NELLA PRATICA I FLUIDI VENGONO TRATTATI COME SISTEMI CONTINUI, OSSIA INSIEMI DI INFINITE PORZIONI INFINITESIME UNITE FRA LORO. CIÒ ACCADE PERCHÉ LE DISTANZE TRA LE SINGOLE PARTICELLE DI UN GENERICO FLUIDO SONO NOTEVOLI RISPETTO ALLE DIMENSIONI DI QUESTE ULTIME.

3) GRANDEZZE DELLA MECCANICA DEI FLUIDI E UNITÀ DI MISURA

GEOMETRICHE :

LUNGHEZZA $[L] = [m]$

AREA $[A] = [m^2]$

VOLUME $[W] = [m^3]$

CINEMATICHE :

TEMPO $[t] = [s]$

VELOCITÀ $[v] = [m/s]$

ACCELERAZIONE $[a] = [m/s^2]$

PORTATA $[Q] = [m^3/s]$

VISCOSITÀ CINEMATICA $[v] = [m^2/s]$

DINAMICHE :

MASSA $[m] = [kg]$

FORZA $[F] = [N]$

SFORZO $[\sigma, \tau] = [N/m^2]$

DENSITÀ $[\rho] = [kg/m^3]$

PESO SPECIFICO $[\gamma] = [N/m^3]$

VISCOSITÀ $[\mu] = [N \cdot s/m^2]$

PRESSIONE $[p] = [N/m^2]$

MODULO DI ELASTICITÀ $[E, E] = [N/m^2]$

TENSIONE SUPERFICIALE $[\sigma] = [N/m]$

POTENZA $[P] = [W]$

ENERGIA $[E] = [J]$

4) SFORZI NEI SISTEMI CONTINUI

FORZE DI MASSA : FORZE ESTERNE CHE SI ESERCITANO SU PORZIONI FINITE DI FLUIDO CON INTENSITÀ PROPORZIONALE ALLA LORO MASSA. SI ESPRIMONO IN $[N/kg]$ POICHÉ VENGONO INTESE COME FORZE PER UNITÀ DI MASSA (ES: FORZA DI GRAVITÀ).

7) TENSIONE SUPERFICIALE

$$\sigma = \frac{F}{L} \quad [\sigma] = [N/m]$$

FORZE DI COESIONE TRA LE PARTICELLE
LUNGEREZZA DELLA MEMBRANA

TENDENZA AD OPPOSI AL DISTACCO DI DUE SUPERFICI A CONTATTO RECIPROCO MEDIANTE UN COMPORTAMENTO ELASTICO (MEMBRANA TESA)

RENDE MINIMA, A PARITÀ DI VOLUME, L'AREA DELLA SUPERFICIE DI CONTORNO, OSSIA DEL MENISCO.

$$\sigma = f(\text{TIPO DI FLUIDO}, \vartheta)$$

$\vartheta \uparrow \rightarrow \sigma \downarrow$

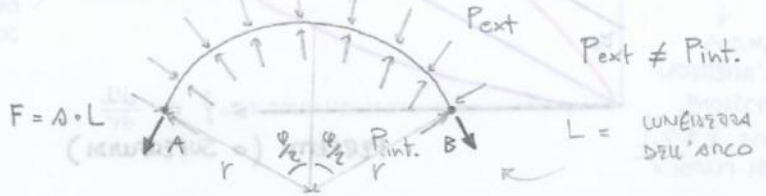
LEGGE DI LAPLACE:

(Hp) SUPERFICIE DI FORMA QUALSIUNQUE

R_1, R_2 : RAGGI PRINCIPALI DI CURVATURA, IN UN GENERICO PUNTO DELLA SUPERFICIE, DELL'ELISSOIDE OSCULATORE DEL MENISCO

$$\Delta P = P_i - P_e = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$\begin{cases} 2r [\cos(\frac{\vartheta}{2})] / L \\ 2\sigma [\cos(\frac{\vartheta}{2})] / L \end{cases}$



$P_{int} > P_{ext}$
SUP. CURVA CONVESSA

DISTANZA TRA IL VERTICE DI UN MENISCO NEL CAPILLARE DI DIAMETRO d E LA SUPERFICIE LIBERA DI UN FLUIDO DI PESO SPECIFICO γ , CON ANGOLO DI CONTATTO β TRA FLUIDO E CONTENITORE, E CON TENSIONE SUPERFICIALE σ : $h = \frac{4\sigma \cos(\beta)}{\gamma d} \rightarrow \Delta P = \gamma h$

8) VISCOSITÀ

LEGGE DI NEWTON: $\tau = \frac{T}{\Omega}$

N.B. \rightarrow SUPERFICIE DI APPLICAZIONE DI T

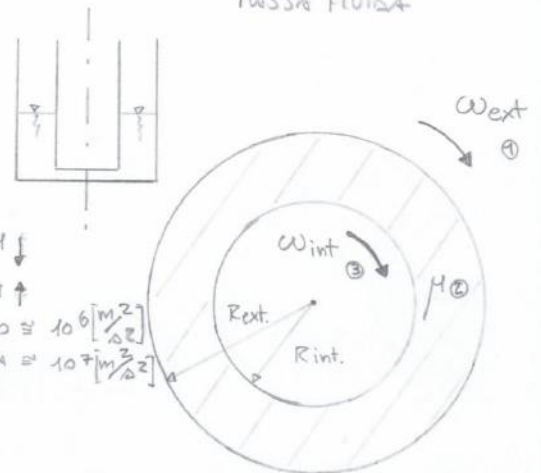
(Hp) T/τ : FORZE / SFORZI TANGENZIALI DI UN FLUIDO VISCOSO IN MOVIMENTO LUNGO UN GENERICO ASSE (O ASCISSA CURVILINEA).

$\frac{du}{dr} / \frac{dn}{dn}$: GRADIENTE DI VELOCITÀ TRA LE SUPERFICI ESTERNE DEL FLUIDO VISCOSO (SULLE QUALI SONO REGISTRATI I VALORI MINIMO E MASSIMO DI VELOCITÀ)

(Th) $T = \mu \frac{du}{dr} \quad \tau = \mu \frac{du}{dn} \rightarrow \tau = \mu \frac{d\vartheta}{dt}$

$\frac{d\vartheta}{dt}$ = VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE ANGOLORE DELLA MASSA FLUIDA

$[\mu] = [N \cdot s / m^2] \rightarrow$ TENDENZA DI UN FLUIDO SOTTOPOSTO AL MOTO A PROPAGARE AL PROPRIO INTERNO TENSIONI TANGENZIALI DIRETTE COME IL MOTO.



VISCOSITÀ DINAMICA (NON COMPARE LA MASSA): $\gamma = \mu / \rho$

Liquidi: $\vartheta \uparrow \rightarrow \mu \downarrow$
gas: $\vartheta \uparrow \rightarrow \mu \uparrow$

$[\nu] = [m^2 / s]$
 $\rightarrow H_2O \cong 10^{-6} [m^2 / s]$
 $\rightarrow Air \cong 10^{-5} [m^2 / s]$

TIPOLOGIE DI FLUIDI (IN BASE AI GRAFICI REOLOGICI):

1) FLUIDI NEWTONIANI: $\mu = \text{cost.} \rightarrow \tau = \mu \dot{\gamma}$ (RETTA)

2) FLUIDI NON NEWTONIANI: $\tau = f(\dot{\gamma}) \rightarrow$ DIPENDENTI DAL TEMPO, INSIPENDENTI DAL TEMPO NON LINEARI

STATICA DEI FLUIDI

1) SFORZI INTERNI NEI FLUIDI IN QUIETE

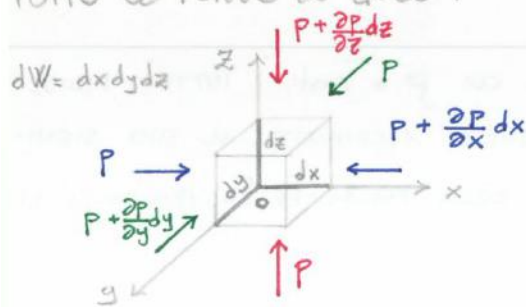
NEI FLUIDI IN QUIETE LE SINGOLE PARTICELLE NON SUBISCONO SPOSTAMENTI RELATIVI, SIA CHE SI CONSIDERI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE AL FLUIDO, SIA CHE SE NE CONSIDERI UNO ASSOLUTO.

CIO' COMPORTA CHE IL FLUIDO NON SI DEFORMA, POICHE' LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE AGENTI SU DI ESSO E' SEMPRE NULLA. INOLTRE, QUALUNQUE PUNTO SI SCELEGA PER STUDIARE LA DIREZIONE DEGLI SFORZI SUBITI DALLA MASSA FLUIDA SARAN' TALE CHE, RISPETTO AD ESSO, SI OSSERVANO SOLO COMPONENTI NORMALI: IL FLUIDO E' QUINDI ISOTROPO RISPETTO ALLA PRESSIONE, IL CUI VALORE RAPPRESENTA IN UN DATO PUNTO LO SFORZO DERIVANTE DA OGNI DIREZIONE RADIALE; TALE VALORE CAMBIA SOLO DA UN PUNTO AD UN ALTRO ($\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = P$).

LO STATO DI SFORZO DI UN QUALSIASI FLUIDO IN QUIETE RISULTA COMPLETAMENTE INDIVIDUATO QUANDO SI CONOSCE LA DISTRIBUZIONE DELLE PRESSIONI NELLA MASSA FLUIDA, IL CHE COME VEDREMO E' POSSIBILE QUANDO SU NOTA LA PRESSIONE IN UN DATO PUNTO DELLA MASSA STESSA.

2) EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA DEI FLUIDI (VOLUME INFINITESIMO)

QUESTA EQUAZIONE, SEMPLICE MA IMPORTANTE, SI OTTIENE APPLICANDO AD UN VOLUME INFINITESIMO DI FLUIDO $dxdydz$, AVENTE DENSITA' ρ , IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO, SECONDO IL QUALE LA RISULTANTE DELLE FORZE AGENTI SUL VOLUME DI FLUIDO DEVE ESSERE NULLA. SCRIVIAMO ALLORA ANZITUTTO LE FORZE IN GIOCO.



FORZE DI MASSA) $dP = \rho \bar{F} dxdydz = \rho \bar{F} dW$
 FORZE DI SUPERFICIE) $dS = dS_x + dS_y + dS_z$
 DOVE \bar{F} = FORZA-PESO PER UNITA' DI MASSA

x)
$$\left. \begin{matrix} p\bar{i} \\ - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx)\bar{i} \end{matrix} \right\} \rightarrow \cdot (dydz) \rightarrow \begin{cases} p dydz \bar{i} \\ - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) dydz \bar{i} \end{cases} \xrightarrow{\Sigma} \overset{\text{SPINTA TOTALE LUNGO } \bar{x}}{dS_x} = - \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz \bar{i}$$

y)
$$\left. \begin{matrix} p\bar{j} \\ - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy)\bar{j} \end{matrix} \right\} \rightarrow \cdot (dxdz) \rightarrow \begin{cases} p dxdz \bar{j} \\ - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy) dxdz \bar{j} \end{cases} \xrightarrow{\Sigma} \overset{\text{SPINTA TOTALE LUNGO } \bar{y}}{dS_y} = - \frac{\partial P}{\partial y} dxdydz \bar{j}$$

z)
$$\left. \begin{matrix} p\bar{k} \\ - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz)\bar{k} \end{matrix} \right\} \rightarrow \cdot (dxdy) \rightarrow \begin{cases} p dxdy \bar{k} \\ - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz) dxdy \bar{k} \end{cases} \xrightarrow{\Sigma} \overset{\text{SPINTA TOTALE LUNGO } \bar{z}}{dS_z} = - \frac{\partial P}{\partial z} dxdydz \bar{k}$$

QUESTA EQUAZIONE STA A SIGNIFICARE CHE IL VETTORE GRADIENTE DEL CAMPO SCALARE $z + \frac{p}{\gamma}$ HA COMPONENTI NULLE LUNGO CASCUN ASSE; PERTANTO TALE CAMPO SI MANTIENE COSTANTE OVUNQUE.

$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost.} = h$ LEGGE DI STEVIN $([z] = [p/\gamma] = [h] = m) \quad \forall A, B \in W_h \rightarrow z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$

LA LEGGE AFFERMA CHE PER QUALUNQUE FLUIDO PESANTE, INCOMPRESSIBILE, IN QUIETE, IL "CARICO PIEZOMETRICO" h (O QUOTA PIEZOMETRICA) E' COSTANTE IN OGNI PUNTO ED E' DATO DALLA SOMMA DI DUE CONTRIBUTI, LA "QUOTA GEODETICA" z E L'"ALTEZZA PIEZOMETRICA" (O DI PRESSIONE) p/γ .

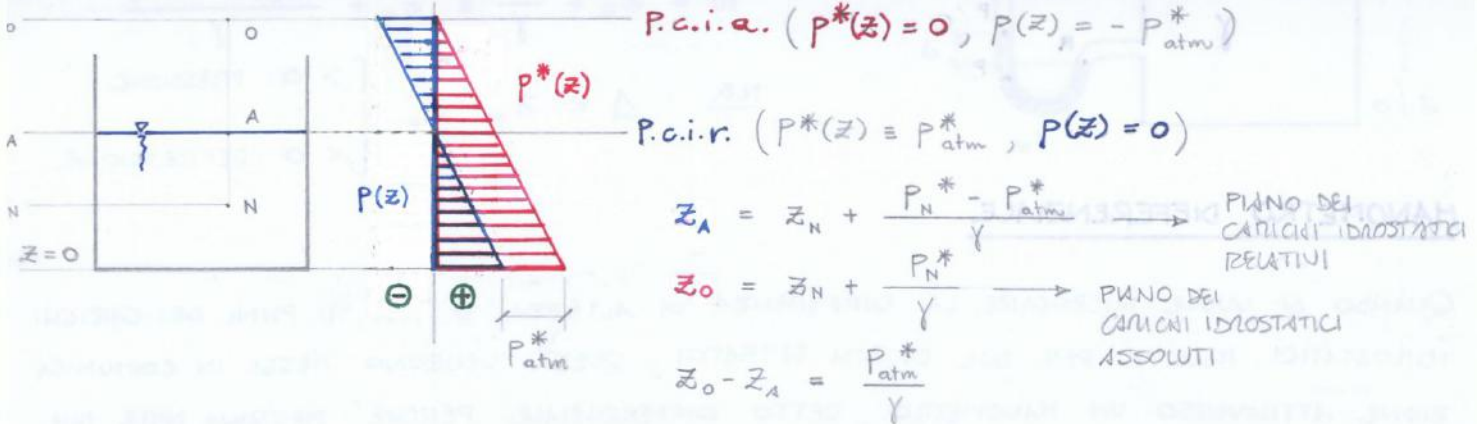
SI DICE "PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI RELATIVI" (P.C.I.R.) QUELLO POSIZIONATO AD UN'ALTEZZA VARIABILE A SECONDA DELLA QUOTA ARBITRARIA DI RIFERIMENTO $z = 0$, DOVE SI ANNULLA IL TERMINE p/γ , OSSIA DOVE LA QUOTA PIEZOMETRICA COINCIDE CON LA SOLA QUOTA GEODETICA ($h \equiv z$). SI NOTI CHE p STA AD INDICARE LA PRESSIONE "RELATIVA", OSSIA QUELLA ASSOLUTA p^* DIMINUITA DI UN VALORE ASSUNTO COSTANTE OVUNQUE PER CONVENZIONE, LA PRESSIONE ATMOSFERICA p_{atm}^* : $p = p^* - p_{atm}^*$.

N.B.

SI NOTI CHE, MENTRE p^* PUO' SOLO ESSERE POSITIVA, O AL PIU' NULLA ($p^* \geq 0$), p E' IN GRADO DI ASSUMERE VALORI DI ENTRAMBI I SEGNI ($p \geq 0$), IN QUANTO PUO' ACCADERE CHE LOCALMENTE SIA $p^* < p_{atm}^*$; QUANDO SI VERIFICA QUEST'ULTIMO CASO SI PARLA DI FLUIDO IN "DEPRESSIONE", RELATIVAMENTE ALLA PORZIONE CHE NE E' INTERESSATA.

IL "PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTI" (P.C.I.A.) E' QUELLO PER CUI VALE CHE $p^* = 0$, OVVERO $p = -p_{atm}^*$.

DA QUESTO MOMENTO IN POI CI RIFERIREMO SEMPRE, SALVO DIVERSE SEGNALAZIONI, ALLA PRESSIONE COME PRESSIONE RELATIVA p , ASSUMENDO PERCIO' $p_{atm}^* = 0$.



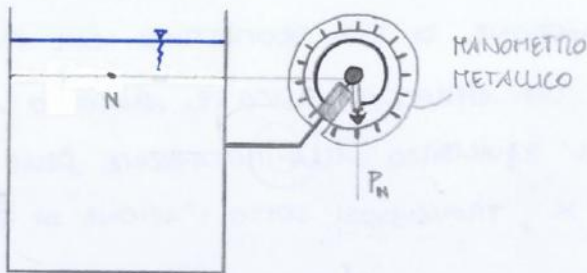
SUPPONIAMO DI CONOSCERE LA POSIZIONE DEI DUE PUNTI E DI VOGLER RICAVARE IL VALORE DELLA PRESSIONE RELATIVA E ASSOLUTA IN UN PUNTO DI QUOTA GENERICA z_N . E' SUFFICIENTE CONSIDERARE L'AFFONDAMENTO DI TALE PUNTO SOTTO IL RISPETTIVO PIANO DEI CARICHI.

$p_N = \gamma (z_A - z_N) = \gamma h_N$ PRESSIONE RELATIVA

$p_N^* = \gamma (z_0 - z_N) = \gamma h_N^*$ PRESSIONE ASSOLUTA

MANOMETRO METALLICO (TUBO A MOLLA DI BOURDON)

CONSISTE IN UNA SPECIE DI SPIRALE METALLICA CHE TENDENDOSI MUOVE UN LEVERISMO A CUI È COLLEGGATA UNA FRECCIA CHE INDICA SU UN QUADRANTE LA PRESSIONE NEL PUNTO AVENTE LA STESSA QUOTA DEL BARICENTRO DELLO STRUMENTO, CHE IN GENERALE NON COINCIDE CON IL PUNTO DI APPLICAZIONE.



1.2) SPINTA SU UNA SUPERFICIE PIANA

PARTIAMO DALLA SPINTA AGENTE SU UN ELEMENTO INFINITESIMO DI SUPERFICIE dA DI NORMALE \vec{n} :

$$d\vec{S} = p\vec{n}dA \quad \text{CON } p = \text{cost. IN OGNI DIREZIONE, OSSIA LUNGO QUALSIASI } \vec{n}.$$

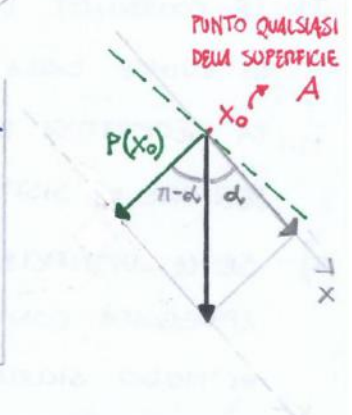
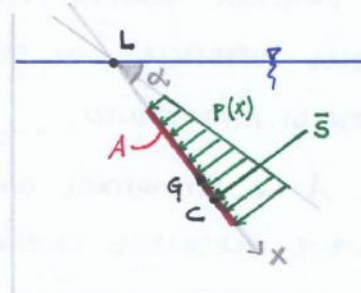
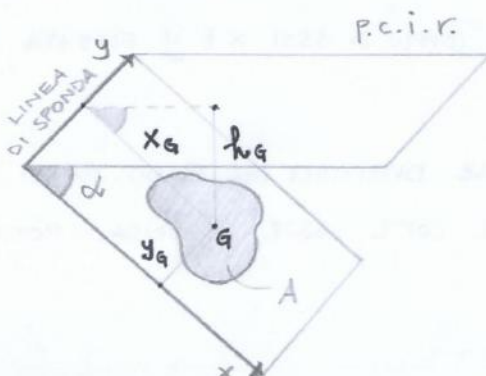
IN PARTICOLARE AVREMO CHE $p = \gamma h$, DOVE γ È IL PESO SPECIFICO DEL FLUIDO E h È L'AFFONDAMENTO DELL'ELEMENTO DI SUPERFICIE SOTTO IL PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI RELATIVI.

IL CALCOLO DELLA SPINTA TOTALE SI ESEGUE INTEGRANDO $d\vec{S}$ SU TUTTA LA SUPERFICIE A .

$$\vec{S} = \int_A d\vec{S} = \int_A p\vec{n}dA = p_G \int_A \vec{n}dA = \gamma h_G \vec{n} A \quad \rightarrow \quad |\vec{S}| = p_G A$$

POICHÉ LA SUPERFICIE È PIANA, LA DIREZIONE DELLA NORMALE \vec{n} IN UN GENERICO PUNTO È LA STESSA ANCHE PER TUTTI GLI ALTRI PUNTI. INOLTRE LA PRESSIONE AGENTE SULLA SUPERFICIE PUÒ ESSERE ESPRESSA COME QUELLA AGENTE SUL SUO BARICENTRO $p_G = \gamma h_G$, DETTO h_G L'AFFONDAMENTO DI QUESTO SOTTO IL P.C.I.R..

SUPPONENDO LA SUPERFICIE POSTA SU UN PIANO INCLINATO DI UN ANGOLO α RISPETTO AL P.C.I.R., DATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO (x, y) AVENTE L'ASSE x PARALLELO AL PRIMO E L'ASSE y AL SECONDO CON DIREZIONI ORTOGONALI, POSSIAMO ESPRIMERE h_G COME $x_G \cdot \sin \alpha$.



III) PER QUALSIASI POSIZIONE DI A, DETTO L UNO DEI PUNTI DI INTERSEZIONE TRA IL PIANO DI A E IL P.C.I.R., AVREMO SEMPRE $\overline{CL} > \overline{GL}$. IN PRATICA VOGLIAMO EVIDENZIARE CHE IL CENTRO DI SPINTA PRESENTA UN AFFONDIAMENTO RISPETTO AL P.C.I.R. SEMPRE MAGGIORE DI QUELLO DEL BARICENTRO. LA DIMOSTRAZIONE È PIUTTOSTO SEMPLICE E RISIEDA NELLA DEFINIZIONE DI QUESTI STESSI PUNTI:

$$G) \quad \overline{GL} = x_G = \frac{M_y}{A} = \frac{Ax_G}{A}$$

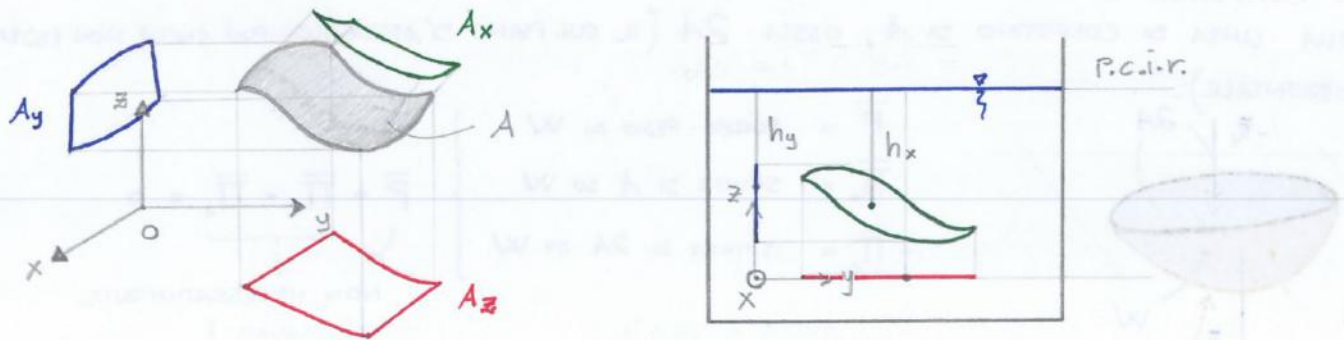
$$C) \quad \overline{CL} = y_{Gc} = \frac{I_y}{M_y} = \frac{(I_{ay} + Ax_G^2)}{Ax_G} = \frac{I_{ay}}{Ax_G} + x_G > x_G$$

PER IL TEOREMA
DI HUYGENS-STEINER

4.3) SPINTA SU UNA SUPERFICIE CURVA

L'ESPRESSIONE DELLA SPINTA ELEMENTARE $d\bar{S}$ È DEL TUTTO IDENTICA AL CASO PRECEDENTE, MA LA DIREZIONE DELLA SPINTA TOTALE \bar{S} AGENTE SU UNA SUPERFICIE FINITA A CURVA, NON È PIÙ INDIVIDUATA DA QUELLA DELLA NORMALE IN UN GENERICO PUNTO.

PER RISOLVERE IL PROBLEMA DELLA DIREZIONE DI \bar{S} , ANZICHÉ CONSIDERARE LA SUPERFICIE CURVA A LA SI PROIETTA SUI TRE PIANI COORDINATI GENERATI DA UN CONVENIENTE SISTEMA DI RIFERIMENTO, OTTENENDO E ADOPERANDO COSÌ A_x, A_y E A_z .



OVVVVIAMENTE QUESTO APPROCCIO VALE ANCHÉ A LIVELLO INFINITESIMALE:

$$\begin{array}{l}
 dA \begin{cases} \rightarrow dA_x \\ \rightarrow dA_y \\ \rightarrow dA_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dS_x = p \cos(n^{\hat{x}}) dA = p dA_x \\ dS_y = p \cos(n^{\hat{y}}) dA = p dA_y \\ dS_z = p \cos(n^{\hat{z}}) dA = p dA_z \end{cases} \\
 A \begin{cases} \rightarrow A_x \\ \rightarrow A_y \\ \rightarrow A_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_x = \int_A p dA_x = \gamma h_x A_x \\ S_y = \int_A p dA_y = \gamma h_y A_y \\ S_z = \int_A p dA_z = \gamma h_z A_z = \gamma W \end{cases}
 \end{array}$$

DOVE h_x, h_y, h_z SONO GLI AFFONDIAMENTI DEI BARICENTRI DI A_x, A_y, A_z SOTTO IL PUNTO DEI CARICHI IDROSTATICI RELATIVI CHE, COME NEL DISEGNO PRECEDENTE, SI TROVA AD UNA CERTA ALTEZZA SOPRA AD A. SI NOTI PERÒ CHE SE NOI FISSASSIMO UN S.R. COME QUELLO VISTO POC'ANZI, IL

N.B.

NEL CALCOLO DELLA SPINTA PRODOTTA DAL VOLUME ② SULLA SUPERFICIE DI LATO \overline{AB} NON È IMPORTANTE CONOSCERE L'ESATTO VALORE DI W_2 , PERCHÉ IN REALTÀ $|\overline{S}| = P_g A = (\gamma h_g)(H \cdot 1)$, AVENDO IN QUESTO PARTICOLARE CASO CHE $h_g = h - z_g = h - \frac{H}{2} = H - \frac{h}{2} = \frac{H}{2}$, QUINDI IN DEFINITIVA $|\overline{S}| = \gamma \frac{H^2}{2}$.

NON SI STUDIANO INOLTRE LE SPINTE AGENTI SULLE SUPERFICIE LATERALI PERCHÉ SONO TRA LORO IDENTICHE ED OPPOSTE, QUINDI I LORO EFFETTI SI ELIDONO.

5) SPINTA SUI CORPI IMMERSI

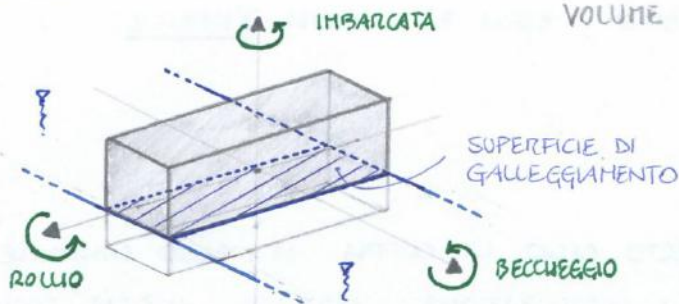
SI TRATTA DEL CELEBRE PRINCIPIO DI ARCHIMEDE, SECONDO CUI UN CORPO IMMERSO ANCHE SOLO PARZIALMENTE IN UN FLUIDO RICEVE UNA SPINTA VERSO L'ALTO PARI AL PESO DEL VOLUME DI FLUIDO SPOSTATO DAL CORPO STESSO. IL FATTO CHE IL CORPO AFFONDI O MUOVI NEL FLUIDO DIPENDE DA QUALE CONDIZIONE GARANTISCE L'EQUILIBRIO STATICO PER IL SISTEMA FORMATO DA CORPO E FLUIDO: TALE CONDIZIONE È LEGATA AL RAPPORTO TRA I PESI SPECIFICI (O LE DENSITÀ) DELLE DUE COMPONENTI DEL SISTEMA.

$$\overline{S} = -\overline{P}_{fl} \quad \text{PRINCIPIO DI ARCHIMEDE}$$

- 1) $\gamma_c < \gamma_{fl} \rightarrow \overline{P}_c < \overline{P}_{fl} \rightarrow \overline{S} > -\overline{P}_c \rightarrow$ PREVALE LA SPINTA (VERSO L'ALTO)
- 2) $\gamma_c = \gamma_{fl} \rightarrow \overline{P}_c = \overline{P}_{fl} \rightarrow \overline{S} = -\overline{P}_c \rightarrow$ NON PREVALE NE' LA SPINTA NE' IL PESO (IL CORPO NON SI MUOVE)
- 3) $\gamma_c > \gamma_{fl} \rightarrow \overline{P}_c > \overline{P}_{fl} \rightarrow \overline{S} < -\overline{P}_c \rightarrow$ PREVALE IL PESO (VERSO IL BASSO)

6) TEORIA DEI CORPI GALLEGGIANTI

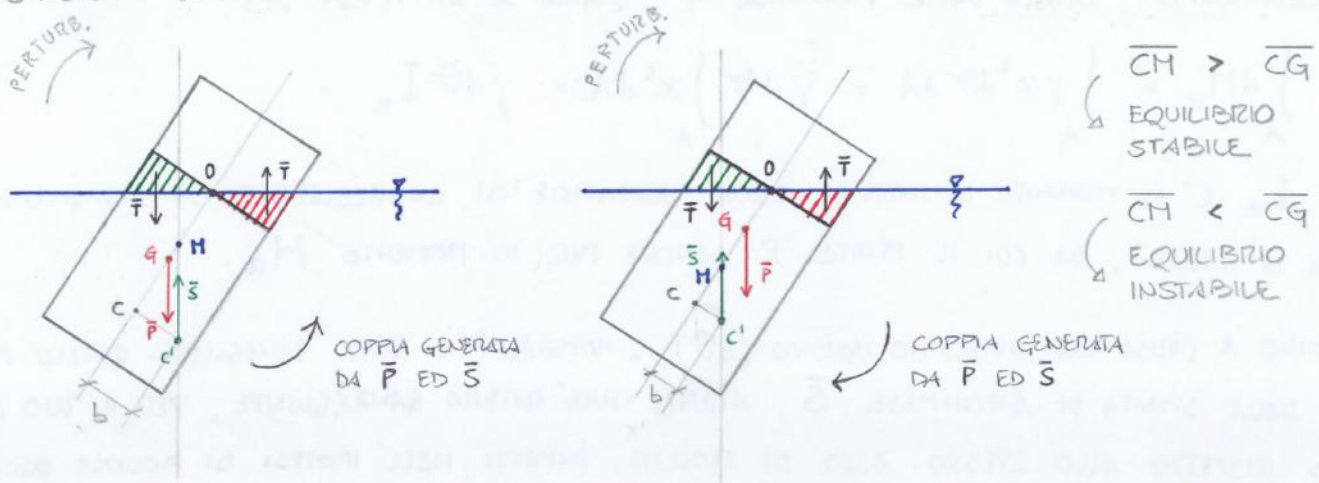
UN CORPO CHE GALLEGGI A CAVALLO DELLA SUPERFICIE LIBERA DI UN FLUIDO, ESSENDONI QUINDI IMMERSO SOLO PARZIALMENTE, PUÒ SUBIRE DELLE PERTURBAZIONI DI ENTITÀ VARIABILE CHE SONO IN GRADO DI INNESCIARE TRE DIVERSI TIPI DI ROTAZIONI: ROLLIO, BECCHEGGIO E IMBARCATA.



VOLUME DI CARENA: PARTE IMMERSA DEL CORPO

PER OGNI CORPO DI QUESTO TIPO OCCORRE STUDIARE LA RISPOSTA ALLE PICCOLE PERTURBAZIONI DELLO STATO DI EQUILIBRIO, OSSIA VALUTARE LA STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO. IL GALLEGGIANTE PUÒ INFATTI RITORNARE SENZA PROBLEMI NELLA POSIZIONE INIZIALE, MA POTREBBE ANCHE RISCHIARE

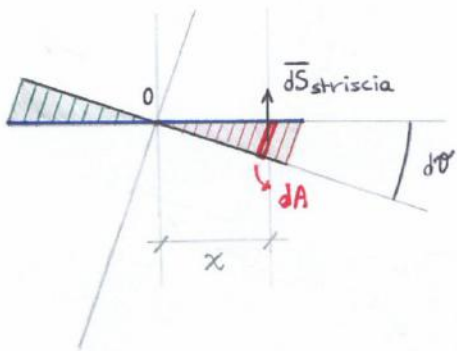
PER ESSERE PIÙ PRECISI, SI PUÒ OSSERVARE CHE L'INTERSEZIONE TRA LA RETTA D'AZIONE DI \bar{S} E L'ASSE BARICENTRICO DEL GALLEGGIANTE GENERA UN PUNTO, DETTO "META-CENTRO", M , LA CUI POSIZIONE È INEQUIVOCAMENTE INDICATIVA DELLA STABILITÀ O DELLA INSTABILITÀ DELLA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO PRECEDENTE ALLA PERTURBAZIONE.



LA DISTANZA \overline{CM} È DETTA "ALTEZZA METACENTRICA" DEL GALLEGGIANTE, MENTRE b È LO SPOSTAMENTO DEL CENTRO DI CARINA, CONSEGUENTE ALLA PERTURBAZIONE DEL SUO STATO DI EQUILIBRIO.

COME SI VEDE DAI DUE DISEGNI POCO PIÙ IN ALTO, L'EFFETTO DELLA PERTURBAZIONE È ANCHE QUELLO DI SOLEVARE UN TRINQUELO E AFFONDERNE UN'ALTRO, A CAUSA DELLA ROTAZIONE DI ROLLO ATTORNO ALL'ASSE DI TRACCA O : IL TRINQUELO SOLEVATO AVRÀ UN PESO \bar{T} CHE TENDE A RIPORTARLO GIÙ, MENTRE QUELLO AFFONDATO SUBISCE UNA SPINTA DI ARCHIMEDE \bar{T} CHE TENDE A RIPORTARLO SU. IN REALTÀ È PROPRIO LA COPPIA GENERATA DALLE DUE \bar{T} CHE SPOSTA C IN C' .

PER CAPIRE SE SIAMO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO STABILE O INSTABILE, SUPPONENDO NOTE DA CALCOLI ESAUSTIVI LE COORDINATE DI C E DI G E QUINDI LA DISTANZA \overline{CG} , DOBBIAMO CALCOLARE ANCHE \overline{CM} , IN FUNZIONE DEI PARAMETRI FISICO-GEOMETRICI DEL GALLEGGIANTE LIEVEMENTE PERTURBATO.



SI CONSIDERI UNA STRISCIOLA LUNGA $x \text{ sen } d\theta \cong x d\theta$ E LARGA dA . PER UNA ROTAZIONE INFINITESIMA INFATTI $\text{sen } d\theta \cong \text{tg } d\theta \cong d\theta$, QUINDI OGNI ARCUETTO DI RAGGIO GENERICO x PUÒ CONFONDERSI CON IL CATETO MINORE DEL TRINQUELO RETTANGOLO DA ESSO INDIVIDUATO.

POSSIAMO ALLORA TRATTARE LA STRISCIOLA COME UN PARALLELEPIPEDO ALTO $x d\theta$, LARGO dA E PROFONDO 1

PER MAGGIORE COMODITÀ. IL SUO VOLUME È DUNQUE DATO DA $dV = x d\theta dA$, MENTRE LA SPINTA ELEMENTARE DI ARCHIMEDE CHE LA INTERESSA È $dS_{\text{striscia}} = \gamma dV = \gamma x d\theta dA$, DOVE γ È IL PESO SPECIFICO DEL FLUIDO IN CUI È IMMERSO IL GALLEGGIANTE CHE SI SUPPONE PARI A

CINEMATICA DEI FLUIDI

1) VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

VEETTORE VELOCITÀ \vec{v} DI UN FLUIDO
COME FUNZIONE DEI PUNTI (x, y, z)
DELO SPAZIO OCCUPATO DAL FLUIDO E
DEGLI ISTANTI DI TEMPO t :

$$\vec{v} = \vec{v}[x(t), y(t), z(t), t] \quad \begin{cases} u = u(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt} \\ v = v(x, y, z, t) = \frac{dy}{dt} \\ w = w(x, y, z, t) = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

DEFINISCONO PUNTO PER PUNTO E ISTANTE PER ISTANTE IL CAMPO DI MOTO

VEETTORE ACCELERAZIONE \vec{a} DI UN FLUIDO
COME DERIVATA DI \vec{v}

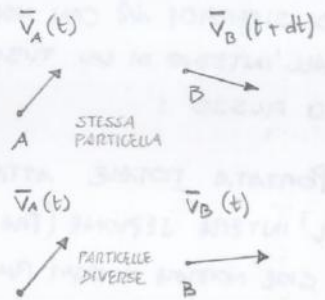
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{(REGOLA DI DERIVAZIONE LAGRANGIANA)} \rightarrow \text{VA BENE PER I SOLIDI, MA NON PER I FLUIDI!}$$

$\hookrightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (IL PRINCIPIO DELLA DINAMICA)

APPROCCIO LAGRANGIANO NELLO STUDIO DEI PROCESSI DI MOTO:

SOGGETTO: TRAIETTORIA DELLA SINGOLA PARTICELLA (CONSEGUENZA DELLA CINEMATICA)

OGGETTO: EVOLUZIONE DI $\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$ NEL TEMPO



APPROCCIO EULERIANO NELLO STUDIO DEI PROCESSI DI MOTO:

SOGGETTO: CAMPO DI MOTO DELL'INTERO FLUIDO \rightarrow SEGUENDO QUESTO APPROCCIO PERCHÉ PIÙ ADATTO A RISOLVERE I PROBLEMI CHE TRATTIAMO

OGGETTO: EVOLUZIONE DI $\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases}$ NEL TEMPO E NELLO SPAZIO

(CAUSA DELLA CINEMATICA)

ACCELERAZIONE LOCALE: $\vec{a}_{L,P}$

(VARIAZIONE DI VELOCITÀ NEL SINGOLO PUNTO, AL PASSARE DEL TEMPO)

ACCELERAZIONE CONVETTIVA: $\vec{a}_{C,P}$

(VARIAZIONE DI VELOCITÀ DA PUNTO A PUNTO, IN UN ISTANTE DI TEMPO FISSATO)

$$\vec{a}_P = \frac{D\vec{v}_P}{dt} = \frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t) + \vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s}$$

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \left[\frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right] =$$

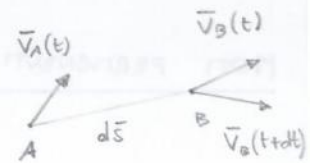
$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot |\vec{v}| = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] + \left[u \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right]$$

ACCELERAZIONE TOTALE: $\vec{a}_P = \vec{a}_{L,P} + \vec{a}_{C,P} = \frac{D\vec{v}_P}{dt}$

(DERIVATA SOSTANZIALE DELLA VELOCITÀ RISPETTO AL TEMPO)

(REGOLA DI DERIVAZIONE EULERIANA)

\hookrightarrow DEFINISCE COME VARIA IL CAMPO DI MOTO NEL TEMPO E DA PUNTO A PUNTO (A PRESUPPORRE DALLA SINGOLA PARTICELLA!)



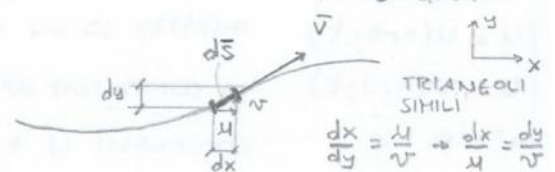
2) ELEMENTI CARATTERISTICI DEL MOTO

TRAIETTORIA: LINEA LUOGO DEI PUNTI SUCCESSIVAMENTE OCCUPATI DA UNA SINGOLA PARTICELLA DI FLUIDO.

$$\begin{cases} dx = u dt \\ dy = v dt \\ dz = w dt \end{cases} + [t_0 \rightarrow (x_0, y_0, z_0)]$$

CONDIZIONE INIZIALE

\rightarrow INTEGRA E TROVO $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



LINEA DI CORRENTE: CURVA TANGENTE IN CIASCUNO DEI SUOI PUNTI AL VETTORE VELOCITÀ IN QUEL PUNTO.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} + [t_0]$$

COINCIDE CON LA TRAIETTORIA DI UNA PARTICELLA SOLO SE ESSA HA MOTO PERMANENTE, OSSIA QUANDO $\vec{v} = (u, v, w) \neq f(t)$.

4.2) EQUAZIONE GLOBALE DI CONTINUITÀ (VOLUME FINITO)

W = VOLUME FINITO DI FLUIDO

A = SUPERFICIE DI CONTORNO DI W (CHIUSA)

\vec{v}, ρ = VELOCITÀ E DENSITÀ DEL FLUIDO IN CORRISPONDENZA DELL'ELEMENTO INFINITESIMO DI SUPERFICIE dA CON NORMALE \vec{n}



$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA dt = \int \rho v_n dA dt \quad \text{MASSA PASSANTE PER } dA \text{ DURANTE } dt$$

$$\int_A \rho v_n dt dA = dt \int_A \rho v_n dA \geq 0 \quad \text{MASSA PASSANTE PER } A \text{ DURANTE } dt$$

(POS. \rightarrow MASSA ENTRANTE, NEG. \rightarrow MASSA USCENTE)

$\frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho dW$ VARIAZIONE SUBITA DELLA MASSA DURANTE dt PER EFFETTO DELLA VARIAZIONE DELLA DENSITÀ

$$\int_A \rho v_n dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho dW = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW$$

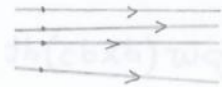
N.B.

SE SI TRATTANO FLUIDI INCOMPRESSIBILI ($\rho = \text{cost.}$) $\rightarrow \rho \int_A v_n dA = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW = 0$ (FIUSSO DELLA VELOCITÀ ATTRAVERSO A CHIUSA NULLO)

$\rightarrow (Q_e - Q_u) = \left[\int_{A_e} v_n dA_e + \int_{A_u} v_n dA_u \right] = \int_A v_n dA = 0$ (PORTATA TOTALE ATTRAVERSO A CHIUSA NULLA)

$\rightarrow Q_e = Q_u$

4.3) EQUAZIONE DI CONTINUITÀ APPLICATA ALE CORRENTI



DICESI CORRENTE IL MOTO DI UN FLUIDO IN CUI TUTTE LE TRAIETTORIE DELLE SINGOLE PARTICELLE SONO "SOSTANZIALMENTE" PARALLELE TRA LORO.

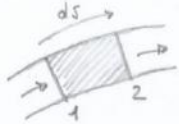
QUANDO SI STUDIO I MOTI PERMANENTI, LE CORRENTI E I TUBI DI FLUSSO COINCIDONO. PERCIÒ, COSÌ COME AVEVAMO CONSIDERATO UNA SEZIONE TRASVERSALE DEL TUBO DI FLUSSO PER OSSERVARE LA SUA PORTATA, ORA RIPETIAMO LO STESSO PRINCIPIO PER LA CORRENTE.

DATI IL TEMPO t E L'ASCISSA CURVILINEA s CHE DEFINISCE LA DIREZIONE DELLA CORRENTE, QUANDO Q, A (OPPURE $U = Q/A$) SONO FUNZIONI NOTE DI t E s , ED EVENTUALMENTE ANCHE ρ QUALORA IL FLUIDO SIA COMPRESSIBILE (IN TAL CASO ρ INDICHERÀ IL VALORE MEDIO DELLA DENSITÀ DEL FLUIDO SULLA SEZIONE TRASVERSALE A), LA CORRENTE RISULTA DETERMINATA.

SE ORA CONSIDERIAMO DUE SEZIONI POSTE A UNA DISTANZA INFINITESIMA ds , ESSE SARANNO TALI CHE NEL TEMPO dt SI VERIFICHI UN'ENTRATA DI MASSA E UN'USCITA DI MASSA RISPETTIVAMENTE IN CORRISPONDENZA DELLA PRIMA E DELLA SECONDA IN ORDINE DI ARRIVO:

$$\left. \begin{array}{l} (\rho Q) dt \\ \left[\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \right] dt \end{array} \right\} \left[\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \right] dt \quad \text{ECCESSE DI MASSA IN TRANSITO DURANTE } dt = - \left[\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} ds \right] dt \quad \text{DIMINUIZIONE DELLA MASSA } \rho A ds \text{ RACCHIUSA NEL TRATTO CONSIDERATO DURANTE } dt$$

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0$$



N.B. SE SI TRATTANO FLUIDI INCOMPRESSIBILI ($\rho = \text{cost.}$) $\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$

N.B. SE IL MOTO È PERMANENTE ($\partial A / \partial t = 0$) $\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \Rightarrow Q = UA = \text{cost.}$

NEL CASO DI FLUIDI INCOMPRESSIBILI IN MOTO PERMANENTE LA PORTATA NON CAMBIA LUNGO LA LINEA DI CORRENTE E IL SUO VALORE RAPPRESENTA IL FATTORE DI PROPORZIONALITÀ INVERSA TRA LA GENERICA SEZIONE DEL TUBO DI FLUSSO IN CUI SCORRE LA CORRENTE E LA VELOCITÀ MEDIA CON CUI LA CORRENTE PASSA ATTRAVERSO LA SEZIONE STESSA.

N.B.

DA QUI IN AVANTI FAREMO USO SEMPRE PIÙ RICORRENTE DELLE VARIABILI GLOBALI Q, A, U , ANZICHÉ CONTINUARE A TRATTARE VARIABILI O PARAMETRI COME \vec{v}, p CHE SONO FUNZIONI DEL PUNTO $\{x, y, z\}$. QUESTO PERCHÉ I PROBLEMI INGEGNERISTICI SONO ALLA SCALA MACROSCOPICA E INOLTRE, SPESSE, È MOLTO COMPLICATO TROVARE LE EQUAZIONI DI CAMPO PER \vec{v}, p, \dots

IPOTESI DI SEMPLIFICAZIONE: FLUIDO PERFETTO → LO STATO DI SFORZO È IDENTICO A

QUELLO DEI FLUIDI IN QUIETE: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$, $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$. COSÌ FACENDO SI AGGIUNGONO 5 RELAZIONI NECESSARIE A RENDERE BEN POSTO IL PROBLEMA DINAMICO, POICHÉ SI ESPRIME LO STATO DI SFORZO MEDIANTE UNA SOLA VARIABILE, LA PRESSIONE p , ANZICHÉ 6 COMPONENTI DIVERSE. DEFINIAMO LE EGUALIANZE PER I FLUIDI PERFETTI:

$$\frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \bar{i}, \quad \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j}, \quad \frac{\partial \bar{\phi}_z}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k}$$

ADESSO IL PROBLEMA È BEN POSTO E SI PUÒ RISOLVERE!

CHE INSERITE NELL'EQUAZIONE INDEFINITA DEL MOVIMENTO DANNO LUOGO ALLA RELAZIONE

$$\rho(\bar{F} - \bar{A}) = \text{grad}(p) \quad \text{EQUAZIONE DI EULERO} \\ \text{(EQ. INDEFINITA DEL FLUIDO PERFETTO)}$$

N.B. IN GENERALE, OGNI CASO REOLOGICO DI FLUIDI PRESENTA VINCOLI DINAMICI PROPRI → B.C. DIVERSE!

ESSENDO QUESTO UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI, POTREMO TROVARE UNA SUA PARTICOLARE SOLUZIONE SOLO INSERENDO LE OPPORTUNE CONDIZIONI AL CONFINO E, SE IL FOTON È VARIO, QUELLE INIZIALI (VELOCITÀ $\bar{v} = (u, v, w) = (0, 0, 0)$ ALLE PARETI SOLIDE FISSE CHE CIRCONDANO IL FLUIDO; PRESSIONE $p = \text{cost.}$ SULLE SUPERFICI LIBERE DEL FLUIDO, ECC...)

2) EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO DINAMICO

W = VOLUME FINITO DI FLUIDO

\bar{n} = NORMALE ENTRANTE RISPETTO AD A

A = SUPERFICIE DI CONFINO DI W (CHIUSA)



SI INTEGRA L'EQUAZIONE INDEFINITA DEL MOVIMENTO PER ELIMINARE ALCUNE INFORMAZIONI CONSERVANDO COMUNQUE I CARATTERI GENERALI DI QUESTA LEGGE (INDIPENDENTI DAL TIPO DI FLUIDO):

$$\int_W \rho \bar{F} dW - \int_W \rho \bar{A} dW = \int_W \left(\frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\phi}_z}{\partial z} \right) dW$$

REGOLA DI DENOMINAZIONE DI EULERO TEOREMA DI GREEN

PER IL TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY

$$\Rightarrow \int_W \left(\frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\phi}_z}{\partial z} \right) dW = - \int_A (\bar{\phi}_x \cos \hat{n}_x + \bar{\phi}_y \cos \hat{n}_y + \bar{\phi}_z \cos \hat{n}_z) dA = - \int_A \bar{\phi}_n dA$$

$$\Rightarrow \rho \bar{A} = \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \left[\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial(\rho u \bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \bar{v})}{\partial z} \right] - \bar{v} \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right]$$

$\text{div}(\rho \bar{v})$

PER L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$= - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

$$= \left[\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial(\rho u \bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \bar{v})}{\partial z} \right]$$

$$= \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u \bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \bar{v})}{\partial z} \right]$$

TEOREMA DI GREEN

$$\int_W \rho \bar{A} dW = \int_W \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} dW - \int_A \rho \bar{v} (u \cos \hat{n}_x + v \cos \hat{n}_y + w \cos \hat{n}_z) dA = \int_W \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} dW - \int_A \rho \bar{v} v_n dA$$

SE $\rho = \rho_m$ PERCHÉ IL FLUIDO È INCOMPRESSIBILE SANÒ:

$$\beta = \frac{\int_A v^2 dA}{U^2 A}$$

COMUNEMENTE β HA VALORI PROSSIMI ALL'UNITÀ, MA SEMPRE MAGGIORI AD ESSO DI QUALCHE CENTESIMO (IN MOLTE APPLICAZIONI PRATICHE SI ASSUME $\beta \approx 1$).

④ $\bar{I} = - \int_W \frac{\partial(p\bar{v})}{\partial t} dW = - \frac{\partial}{\partial t} \int_W p \bar{v} dW =$ RISULTANTE DELLE INERZIE LOCALI (DOWUTE ALL'ACCELERAZIONE LOCALE: $\bar{a}_L = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$) = VARIAZIONE (NEGATIVA) NELL'UNITÀ DI TEMPO DELL'QUANTITÀ DI MOTO DELL'INTERA MASSA FLUIDA CONTENUTA NEL VOLUME W

N.B.
IN CASO DI MOTO PERMANENTE: $\bar{I} \equiv 0$

DIMENSIONALMENTE TUTTI QUESTI TERMINI SI POSSONO INTENDERE COME FORZE: ALCUNE DIPENDONO DALLA DISTRIBUZIONE DELLE GRANDZZE COINVOLTE SU TUTTO IL VOLUME DEL FLUIDO CONSIDERATO (\bar{P}, \bar{I}), ALTRE INVECE TENGONO CONTO SOLO DELLE CONDIZIONI CHE SI VERIFICANO ALLA SUPERFICIE DI CONFINO (\bar{F}_c, \bar{M}). SCRIVEREMO

$$\bar{P} + \bar{F}_c + (\bar{M}_e - \bar{M}_u) + \bar{I} = 0$$

N.B.

NON ESISTONO PROBLEMI PRATICI AI QUALI NON PUÒ ESSERE APPLICATA: SI USA INFATTI PER STUDIARE FLUIDI COMPRESSIBILI O INCOMPRESSIBILI E MOTI LAMINARI O TURBOLENTI.

OGNI PROBLEMA DINAMICO SI RICONDUCE A UN PROBLEMA DI EQUILIBRIO STATICO PUNCHÉ ALLE FORZE EFFETTIVAMENTE AGENTI SUL FLUIDO (\bar{P}, \bar{F}_c) SI AGGIUNGA UN SISTEMA DI FORZE FITTIZIE CHE METTA IN CONTO LE INERZIE (\bar{M}, \bar{I}).

IN CASO DI MOTO PERMANENTE L'EQUAZIONE RISULTA DEL TUTTO INDIPENDENTE DALLE CARATTERISTICHE DEL MOTO INTERNO DEL VOLUME CONSIDERATO, MA DIPENDE SOLTANTO DALLA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI E DELLE VELOCITÀ SULLA SUPERFICIE DI CONFINO ($\bar{I} = 0$). NATURALMENTE IL PESO \bar{P} NON PUÒ ESSERE ESCLUSO DALL'EQUAZIONE ($\bar{P} \neq 0$).

N.B.

LA COMPLESSITÀ DELLA DINAMICA DEI FLUIDI RISIÈDE PRINCIPALMENTE NELLA NON LINEARITÀ DEGLI OPERATORI CHE DANNO CORPO AL MODELLO MATEMATICO DELL'EQUAZIONE DI EULERO, PRECISAMENTE NELLA COMPONENTE LEGATA ALL'ACCELERAZIONE \bar{A} (PARTE CONVETTIVA). I MODELLI NON LINEARI SONO INFATTI MOLTO DIFFICILI (E IN ALCUNI CASI IMPOSSIBILI) DA CAPIRE E DA UTILIZZARE PER FORNIRE RISPOSTE PRATICHE.

$$\begin{cases} -\frac{a_t}{g} = \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{DV}{Dt} \right) & \text{ACCELERAZIONE CENTRIFUGA (TANG.)} \rightarrow \text{VARIAZIONE DELLA VELOCITÀ INTENSIVA (OSSIA DEL MODULO DELLA VELOCITÀ) LUNGO LA TRAIETTORIA} \\ -\frac{a_n}{g} = \frac{\partial}{\partial n} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{V^2}{R} \right) & \text{ACCELERAZIONE CENTRIFUGA (RAD.)} \rightarrow \text{SI ANNULLA PER } R \rightarrow \infty \text{ (MOTO RETTILINEO } \rightarrow \text{ CURVATURA NULLA)} \\ -\frac{a_b}{g} = \frac{\partial}{\partial b} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 & \text{ACCELERAZIONE BINORMALE} \rightarrow \text{IN OGNI PUNTO DELLA TRAIETTORIA ESISTE UNA DIREZIONE LUNGO LA QUALE } h = \text{cost. (COME I FLUIDI IN QUIETE)} \text{ ED È QUELLA INDIVIDUATA DALLA BINORMALE} \end{cases}$$

LA VARIAZIONE DI $h = z + \frac{p}{\gamma}$ CAMBIA DA PUNTO A PUNTO, MA OGNI VARIAZIONE INFINITESIMA AVVIENE SU UN PIANO LOCALE, QUINDI MAI LUNGO LA BINORMALE RIFERITA AD UNA GENERICA POSIZIONE. SI NOTI CHE NELLA SECONDA COMPONENTE È PRESENTE IL RAGGIO DI CURVATURA R DELLA TRAIETTORIA DISSEGNA DA UNA PARTICELLA IN MOTO: SE TALE RAGGIO TENDESSE ALL'INFINITO E FOSSIMO QUINDI IN ASSENZA DI CURVATURA, LA VARIAZIONE DEL CARICO PIEMONETRICO SAREBBE DIVERSA DA ZERO SOLO LUNGO L'ASCISSE CURVILINEA \bar{s} , IN QUANTO LA TANGENTE SAREBBE IN OGNI PUNTO COINCIDENTE CON LA TRAIETTORIA STESSA.



OSSERVIAMO INOLTRE CHE, DATA UNA CONDOTTA CON SEZIONE CIRCOLARE COSTANTE IN CUI SCORRA UN FLUIDO CON LE CARATTERISTICHE PRECEDENTEMENTE ELENCATE, CHE PRESENTI UNA CERTA CURVATURA $\frac{1}{R}$ E A CUI SONO COLLEGATI DUE PIEMONETRI IN POSIZIONI OPPOSITE RISPETTO AL DIAMETRO DI UNA STESSA SEZIONE, LA QUOTA PIEMONETRICA DA ESSI RILEVATA NON SARÀ LA STESSA, MA SI AVANNO DUE PIANI DEI CARICHI IDROSTATICI RELATIVI DISTINTI. QUESTO SUCCEDER PERCHÉ LA PRESSIONE NEL TUTTO COMPRESO TRA LE DUE ESTREMITÀ NON VARIA IDROSTATICAMENTE, OSSIA LINEARMENTE. LA QUOTA MISURATA DAL PIEMONETRO COLLEGATO ALLA PARTE CONCAVA È SEMPRE MAGGIORE DI QUELLA INDICATA DAL PIEMONETRO COLLEGATO ALLA PARTE CONVESSA ($h_R > h_r$).

QUANDO INVECE NON SI HA CURVATURA, LA PRESSIONE VARIA IDROSTATICAMENTE DA UN ESTREMITÀ ALL'ALTRA, E, IN CONSEGUENZA DI CIÒ, LA QUOTA PIEMONETRICA MISURATA DAI DUE PIEMONETRI PASTI NEQUALMENTE IN CORRISPONDENZA DELLE OPPOSITE PARETI SARÀ LA STESSA, COSÌ COME LO STESSO SARÀ, PER ENTRAMBI I PUNTI DI COLLEGAMENTO TRA CONDOTTA E PIEMONETRO E PER TUTTI GLI ALTRI PUNTI DI QUELLA STESSA SEZIONE, IL PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI RELATIVI.

ENTRAMBI I CASI CHE ABBIAMO EVIDENZIATO RIGUARDANO LE CORRENTI, OSSIA IL MOTO DEI FLUIDI LE CUI PARTICELLE SEGUONO TRAIETTORIE SENSIBILMENTE PARALLELE.

QUANDO LE CONDOTTE PRESENTANO RAGGI DI CURVATURA MOLTO GRANDI, SI TENDE A TRASCURARE LA VARIAZIONE DELLA QUOTA PIEMONETRICA LUNGO LA NORMALE PRINCIPALE E QUINDI LUNGO TUTTO IL PIANO NORMALE CON CUI SEZIONIAMO IDEALMENTE LA CONDOTTA: IN CONSEGUENZA DI CIÒ DIAMO IN QUESTI CASI, FREQUENTI NELLE APPLICAZIONI PRATICHE, CHE LA PRESSIONE NELLE SINGOLE SEZIONI TRASVERSALI DELLA CORRENTE RISULTA SENSIBILMENTE IDROSTATICA; LA CORRENTE SI DICE ALLORA "LINEARE" (O "GRADUALMENTE VARIATA").

4) INTERPRETAZIONE GEOMETRICA ED ENERGETICA

4.1) INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

SI SCEGLIE UNA SERIE DI PUNTI A, B, C SUCCESSIVAMENTE RAGGIUNTI DA UN EVENTO FLUIDO CHE SI MUOVE LUNGO LA PROPRIA TRAIETTORIA. SI FISSI INOLTRE UN PIANO ORIZZONTALE DI RIFERIMENTO ARBITRARIO AL QUALE SIA ASSOCIATA CONVENZIONALMENTE LA QUOTA $z = 0$.

1) $z_A, z_B, z_C, \dots =$ QUOTE GEODETICHE DEI PUNTI CONSIDERATI CORRISPONDENTI ALLE QUOTE LOCALI DELLA TRAIETTORIA PERCORSA DALL'EVENTO FLUIDO.

2) $P_A/\gamma, P_B/\gamma, P_C/\gamma, \dots =$ ALTRE PNEUMATICHE DEI PUNTI CONSIDERATI, CHE, SOMME ALLE RISPETTIVE QUOTE GEODETICHE, INDICANO LE QUOTE PNEUMATICHE LOCALI. ESSE, PER LA CONTINUITÀ DELLE GRANDEREE FISICHE IN GIOCO (IN PARTICOLARE DELLA PRESSIONE), SI TROVANO LUNGO UNA LINEA CONTINUA, DETTA "LINEA PNEUMATICA" DELLA TRAIETTORIA. LA DISTANZA DEI SUOI SINGOLI PUNTI DAL PIANO DI RIFERIMENTO $z = 0$ EQUIVALE SEMPLICEMENTE ALLA QUOTA PNEUMATICA DEI CORRISPONDENTI PUNTI DELLA TRAIETTORIA.

3) $\frac{v_A^2}{2g}, \frac{v_B^2}{2g}, \frac{v_C^2}{2g}, \dots =$ ALTRE ONETICHE DEI PUNTI CONSIDERATI, CHE, SOMME ALLE RISPETTIVE QUOTE PNEUMATICHE, INDICANO I CARICHI TOTALI. ESSI, PER LA CONTINUITÀ DELLE GRANDEREE FISICHE IN GIOCO (PRESSIONE E VELOCITÀ), SI TROVANO LUNGO UNA LINEA CONTINUA, DETTA "LINEA DEI CARICHI TOTALI" DELLA TRAIETTORIA.

$$H_A = H_B = H_C = \text{const.}$$

IL TEOREMA DI BERNOULLI CI ASSICURA CHE, NELLE PRESSE IPOTESI, QUESTA LINEA APPARTIENE A UN PIANO ORIZZONTALE.

4.2) INTERPRETAZIONE ENERGETICA

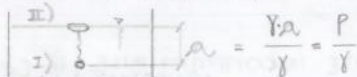
IL CARICO TOTALE H RAPPRESENTA L'ENERGIA MECCANICA COMPRESSIVA POSSEDUTA DALL'UNITÀ DI PESO DEL FLUIDO IN MOVIMENTO: LA DIRETTA "ENERGIA SPECIFICA".

ESSA PUÒ ESSERE SCOMPOSTA IN BASE AL CONTRIBUTO PORTATO DA CIASCUNO DEI SUOI TRE ADDENDI (N.B. NELLA MECCANICA DEI SOLIDI ESISTONO SOLO DUE ADDENDI NEL BILANCIO ENERGETICO: E_p, E_k):

1) $z =$ ENERGIA POSIZIONALE \rightarrow ENERGIA POTENZIALE CHE COMPETE ALL'UNITÀ DI PESO LIQUIDO PER IL FATTO CHE ESSA OCCUPA UNA DETERMINATA POSIZIONE NEL CAMPO GRAVITAZIONALE.
 $(E_p = m \cdot g \cdot z)$

2) $\frac{P}{\gamma} =$ ENERGIA DI PRESSIONE \rightarrow ENERGIA CHE COMPETE ALL'UNITÀ DI PESO LIQUIDO PER IL FATTO CHE ESSA SI TROVA IN UN DETERMINATO STATO DI PRESSIONE.
 $\frac{P}{\gamma} = \frac{p}{\gamma}$

E_p QUADRATA PER UNITÀ DI PESO $= \frac{m \cdot g \cdot z}{m \cdot g}$



3) $\frac{v^2}{2g} =$ ENERGIA CINETICA \rightarrow ENERGIA CHE COMPETE ALL'UNITÀ DI PESO LIQUIDO PER IL FATTO CHE ESSA È ANIMATA DA UNA DETERMINATA VELOCITÀ.
 $(E_k = \frac{1}{2} m v^2)$

TEOREMA DI TORRICELLI: " LA VELOCITÀ DI EFFLUSSO DI UN LIQUIDO DA UNA LUCE È PARI A QUELLA CHE ASSUMEREBBE UN GRAVE, INIZIALMENTE IN QUIETE, CADENDO NEL VUOTO PER UN'ALTEZZA PARI AL CARICO DEL LIQUIDO "

L'INFLUENZA DEI FATTI DISSIPATIVI SULLA VELOCITÀ DI EFFLUSSO IMPONE UNA CORREZIONE CHE SI TRADUCE IN UN COEFFICIENTE C_v , DETTO "COEFFICIENTE DI VELOCITÀ", RICAVATO SPERIMENTALMENTE E CHE RAPPRESENTA IL RAPPORTO TRA LA VELOCITÀ EFFETTIVA E LA VELOCITÀ TORRICELLIANA:

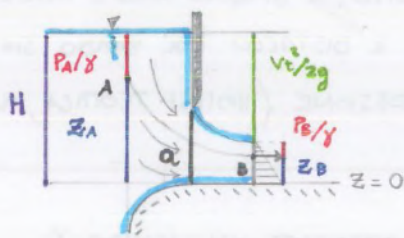
$$C_v = \frac{v_e}{v_t} \approx 0,99 \rightarrow \text{ERRORE MODESTO (} v_e \text{ LEGGERAMENTE MINORE DI } v_t \text{ SE } h \gg d \text{)}$$

CONSEQUENTEMENTE SI POTRÀ CALCOLARE LA PORTATA DELLA VENA EFFLUENTE MOLTIPLICANDO LA VELOCITÀ EFFETTIVA PER L'AREA DELLA SEZIONE CONTRATTA A_c , LA QUALE È UGUALE A QUELLA DELLA LUCE DA CUI FUORISCE IL GETTO A MENO DI UN "COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE" C_c ($\approx 0,62$)

$$C_c = \frac{A_c}{A} \approx 0,62 \rightarrow Q = A_c C_v \sqrt{2gh} = (C_c C_v) A \sqrt{2gh} = \mu A \sqrt{2gh}$$

\hookrightarrow COEFFICIENTE DI KIRCHHOFF (DETERMINATO SPERIMENTALMENTE) N.B. $A = \frac{\pi d^2}{4}$ (SEZIONE CIRCOLARE) \hookrightarrow COEFFICIENTE DI EFFLUSSO ($\approx 0,6$)

2) LUCE RETTANGOLARE SOGGIACENTE AD UNA PARATOIA PIANA PARZIALMENTE APERTA



IN QUESTO CASO LA SEZIONE CONTRATTA È POSIZIONATA POCO A VALLE DELLA LUCE SU UN PIANO VERTICALE E, INOLTRE, APPOCCIA SU UN CONTORNO SOLO, COSTITUENTE IL FONDO DEL CANALE. LA CORRENTE È IVI GRADUALMENTE VANUTA; INFATTI LA DISTRIBUZIONE IDROSTATICA DELLE PRESSIONI È TRIANGOLARE E SI ANNULLA OVVIAMENTE IN PROSSIMITÀ DEL PELO LIBERO DELLA CORRENTE (NON SU TUTTA LA SEZIONE CONTRATTA PERCHÉ ESSA APPOCCIA SULL'ESTREMITÀ INFERIORE).

$$H_A = H_B \rightarrow z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_A = H}$ \hookrightarrow ENERGIA CINETICA IN A TRASCURABILE (SI SUPPONE INIZIALMENTE FERMA) $\underbrace{\frac{v_B^2}{2g}}_{= v^2/2g} = \Delta$ (PELO LIBERO SEZ. B. - PELO LIBERO SEZ. CONT.)

v UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA SU TUTTA LA SEZIONE CONTRATTA PERCHÉ

$b =$ LARGHEZZA PARATOIA } $\rightarrow v_t = \sqrt{2g[H - (z_B + \frac{p_B}{\gamma})]} = \sqrt{2g(H - C_c a)}$ $z_B + \frac{p_B}{\gamma} =$ ALTEZZA SEZ. CONTRATTA

$H, b \gg a$ } $Q = \underbrace{\mu(a)}_A \underbrace{b \sqrt{2g(H - C_c a)}}_v$ N.B. $a \uparrow \Rightarrow \begin{cases} v \downarrow \\ a \cdot b \uparrow \\ Q \uparrow \end{cases}$

$$H_A = H_B \rightarrow z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} \rightarrow V_B = \sqrt{2g(H - z_B)} = \sqrt{2g\Delta_B}$$

$$h_A = H$$

↳ ENERGIA CINETICA IN A TRASCURSIBILE (SI SUPPONE INIZIALMENTE FINITA)

↳ ENERGIA DI PRESSIONE IN B NULLA (PRESSIONE NULLA SU TUTTO LO SPESORE CONTRATTA)

AFFONDAMENTO DI LIQUIDO "CARICO SU B"

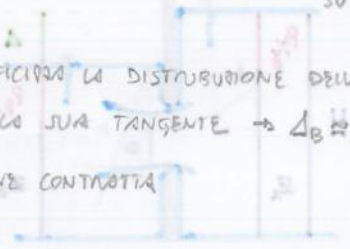
N.B.

$\Delta_{LUCE} \gg \alpha \rightarrow$ SOSTITUIAMO L'ARCO ELEMENTARE DI PARABOLA CHE EFFICACIA LA DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ CORRISPONDENTE ALLA SEZIONE CONTRATTA CON LA SUA TANGENTE $\rightarrow \Delta_B \approx \Delta_{LUCE}$

AFFONDAMENTO DEL BARICENTRO DELLA LUCE SOTTO LO SPECCHIO LIQUIDO = CARICO SUL BARICENTRO DELLA LUCE

\rightarrow VELOCITÀ MEDIA \approx VELOCITÀ NEL BARICENTRO DELLA SEZIONE CONTRATTA

$$Q = \mu A \sqrt{2g\Delta_{LUCE}}$$



N.B.

P R DX DELLA LUCE NON NULLA \rightarrow NO SBOCCO IN ATMOSFERA, MA IN UN SERBATOIO CHIUSO CONTENENTE GAS A PRESSIONE COSTANTE P \rightarrow STESSA PRESSIONE IN TUTTI I PUNTI DELLA SEZIONE CONTRATTA

$$H_A = H_B \rightarrow z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} \rightarrow V_B = \sqrt{2g(H - z_B - \frac{P_B}{\gamma})}$$

$$h_A = H$$

↳ ENERGIA CINETICA IN A TRASCURSIBILE (SI SUPPONE INIZIALMENTE FINITA)

↳ ENERGIA DI PRESSIONE COSTANTE SU TUTTA LA SEZIONE CONTRATTA = $\frac{P}{\gamma}$

$\Delta_{LUCE} \gg \alpha \rightarrow$ " " " " $\rightarrow \Delta_B \approx \Delta_{LUCE}$

\rightarrow VELOCITÀ MEDIA \approx VELOCITÀ NEL BARICENTRO DELLA SEZIONE CONTRATTA

$$Q = \mu A \sqrt{2g(\Delta_{LUCE} - \frac{P}{\gamma})}$$



LA PORTATA, IN QUESTO CASO, DIPENDE DALLA PRESSIONE SECONDO UNA PROPORZIONALITÀ INVERSA:

$P = \gamma \Delta_{LUCE} \rightarrow Q = 0 \rightarrow$ NON ESCE FLUIDO

$P > \gamma \Delta_{LUCE} \rightarrow Q = ? \rightarrow$ EFFOLUZIONE NEL RECIPIENTE LIQUIDO IN PROSSIMITÀ DELLA LUCE
↳ RISALITA DI BOLLE IN SUPERFICIE

$P < 0 \rightarrow Q > Q_{EFFLUSSO}$ URSO IN ATMOSFERA $\rightarrow Q_{MAX} \Delta_{LUCE} = \text{const.}$ PER $P_{ASS} = P^* = 0$

$$Q_{MAX} = \mu A \sqrt{2g(\Delta_{LUCE} + \frac{P_{ATH}^*}{\gamma})} \quad (P = -P_{ATH}^*)$$

5.2) TUBI CONVERGENTI (VENTURIMETRO)

COME AVREMO FODD DI VERIFICARE IN SEGUITO, IL TEOREMA DI BERNOULLI, DATE LE IPOTESI PIÙ VOLTE RIMANENTI, PUÒ ESSERE ESTESO DA UNA SINGOLA TRANSITORIA A UN COMPRESSO DI TRANSITORIE PARALLELE, OSSIA AD UNA CORRENTE, DI SEZIONE FINITA E GRADUALMENTE VARIATA. PER ADATTARE IL CONCETTO METRICO ED ENERGETICO DEL TEOREMA A QUESTA CLASSE DI MOTI DI FLUIDI

5.5) TUBO DI PITOT

QUEST'ALTRO STRUMENTO CONSENTE DI EFFETTUARE MISURE LOCALI DI VELOCITÀ NELLE CORRENTI FLUIDE. IL FUNZIONAMENTO PREVEDE CHE UNA CORRENTE INVESTA UN OSTACOLO COSTITUITO DA UN CORPO DI RIVOLUZIONE A TESTA TONDEGGIANTE. TALE CORRENTE ABBIÀ, A DISTANZA SUFFICIENTE DAL CORPO SUL VERSANTE DI MONTE, TRAIETTORIE RETTILINEE, PARALLELE E DIRETTE COME L'ASSE DI SIMMETRIA DELL'OSTACOLO. AVVICINANDOSI ALL'OSTACOLO LE TRAIETTORIE DIVERGONO PER POTERLO AGGIRARE, MA LA TRAIETTORIA ASSIALE, CIOÈ COINCIDENTE IN OGNI PUNTO CON IL PROLUNGAMENTO DELL'ASSE DI SIMMETRIA DEL CORPO, SARÀ TAÙE CHE, INVESTENDO IL CORPO SPESSE NEL PUNTO B, LE TRAIETTORIE DIVERGENTI DA QUESTO PUNTO SONO INFINITE E DIRETTE LUNGO LE LINEE MERIDIANE DELL'OSTACOLO. IL PUNTO B, IN CUI SI REGISTRA UNA BRUSCA DEVIAZIONE AD ANGOLO RETTO, AVEENDO VELOCITÀ LOCALE IDENTICAMENTE NULLA, SARÀ DETTO "PUNTO DI RISTAGNO". SE IL PUNTO A, DA CUI PROVIENE LA PARTICELLA CHE INVESTE L'OSTACOLO IN B, È ABBASTANZA LONTANO DA B STESSO PERCHÈ LA CORRENTE VI SI POSSA RITENERE INDISTURBATA, VALE IL TEOREMA DI BERNOULLI:

BERNOULLI:

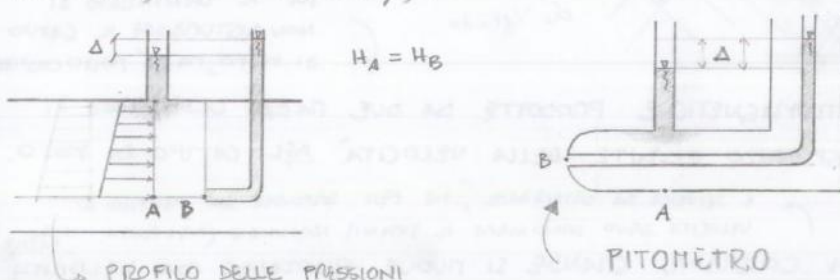
$$H_A = H_B \rightarrow z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g}$$

ENERGIA CINETICA IN B NULLA (VELOCITA' IN B NULLA)

LA VELOCITÀ IN A PUÒ ESSERE RICAVATA QUANDO SIA NOTA LA DIFFERENZA TRA LE QUOTE PIETOMETRICHE IN A E IN B, $h_B - h_A = \Delta h$: PER PERMETTERE CIÒ BASTA COLLEGARE DUE PIETOMETRI ALLA CORRENTE IN CORRISPONDENZA DELLE SEZIONI TRASVERSALI CHE CONTENGONO I PUNTI A E B E MISURARE IL DISlivELLO PIETOMETRICO Δh . IL PIETOMETRO IN B SARÀ INSERITO APPLICANDO UN FONDO ALL'ESTREMITÀ DELL'OSTACOLO; SI NOTI INFATTI CHE IL LIQUIDO NEL PIETOMETRO È IN QUIETE, SICCHÈ LA PRESENZA DEL FONDO NON IMPEDISCE LA BRUSCA DEVIAZIONE DELLE TRAIETTORIE E QUINDI L'ANNULLAMENTO DELLA VELOCITÀ. TROVATO DUNQUE $\Delta h = h_B - h_A$ SI OTTIEN

$$U_A = \sqrt{2g\Delta h}$$

SE DECIDIAMO DI INCORPORARE I DUE TUBI PIETOMETRICI IN UN UNICO APPARECCHIO (DI VARIE FORME POSSIBILI, ES: PRANDTL), QUESTO SARÀ genericamente chiamato "TUBO DI PITOT", o "PITOMETRO".



- VANTAGGIO:
- CONCETTUALMENTE SEMPLICE
- SVANTAGGI:
- NON PUÒ ESSERE TROPPO PICCOLO
 - ALTRI METTI È DIFFICILE COLLEGARE I PIETOMETRI
 - RILEVA LA VELOCITÀ DI FLOTTA DISTURBATA DALL'OSTACOLO CHE CREA

$$\alpha = \frac{\int_A \frac{v^3}{2g} v dA}{\frac{U^2}{2g} U A} = \frac{\int_A v^3 dA}{U^3 A}$$

$U =$ VELOCITÀ MEDIA NELLA SEZIONE TRASVERSALE A PER LA CORRENTE

$$P_c = \gamma \alpha \frac{U^2}{2g} Q \rightarrow P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) Q = \gamma H Q$$

$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} =$ TRINOMIO DI BERNOULLI = CARICO TOTALE = ENERGIA SPECIFICA MEDIA DEL FLUIDO CHE ATTRAVERSA LA SEZIONE A

POICHE' P SIA Q , SONO COSTANTI LUNGO LA CORRENTE DEVE VALERE CHE $H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = \text{cost.}$ SU TUTTA LA CORRENTE, ANOLOGAMENTE A QUANTO ACCADE PER UNA SINGOLA TRAIETTORIA, IL CHE SIGNIFICA CHE NON VARIA LUNGO L'ASCISSA CURVILINEA DELLA CORRENTE S , NE' SU UNA STESSA SEZIONE (IPOTESI SEMPLIFICATIVA)

$\alpha = 1,06 \approx 1$
 ERRORE TRASCURSIBILE PER NOTI UNIFORMI TURBOLENTI
 POCO SENSIBILE ALLA FORMA DELLA SEZIONE

7) RELAZIONE FRA I COEFFICIENTI DI RAGGUAGLIO PER CORRENTI GRADUALMENTE VARIATE

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha =$ COEFFICIENTE DI RAGGUAGLIO PER LE POTENZE CINETICHE $\beta =$ COEFFICIENTE DI RAGGUAGLIO PER LE QUANTITA' DI MOTO | $\rightarrow \alpha - 1 = 3(\beta - 1)$ | MOTO UNIFORME TURBOLENTO (ERRORE PICCOLO) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1,06 \\ \beta = 1,02 \end{array} \right.$ MOTO LAMINARE (ERRORE SENSIBILE) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 4/3 \end{array} \right.$ |
|---|---|---|

SEZIONE CIRCOLARE

8) SCAMBIO DI ENERGIA TRA UNA CORRENTE E UNA MACCHINA.

IL CONCETTO DI POTENZA DI UNA CORRENTE E' IMPORTANTE SOPRATTUTTO, PER SCOPI PRATICI, IN RAPPORTO AI POSSIBILI SCAMBI DI ENERGIA FRA UNA CORRENTE LIQUIDA E UNA MACCHINA IDRAULICA. LE MACCHINE SI SUDDIVIDONO IN DUE CATEGORIE:

- 1) MACCHINE MOTRICI (TURBINE) \rightarrow RICEVONO ENERGIA DALLA CORRENTE IDRICA (L.C.T. \downarrow)
- 2) MACCHINE OPERATRICI (POMPE) \rightarrow CEDONO ENERGIA ALLA CORRENTE IDRICA (L.C.T. \uparrow)

④ $Y = H_A - H_B =$ SALTO DISPONIBILE \rightarrow DIFFERENZA DI ENERGIA POTENZIALE SPECIFICA, CIOE' RIFERITA ALL'UNITA' DI PESO DEL LIQUIDO.

$Q \neq f(Y) \rightarrow Q = f(Y)$ FUNZIONAMENTO MACCHINA

\rightarrow TENDE A TRASFORMARSI IN ENERGIA CINETICA (SALVO IMPEDIMENTI) E NE DERIVA, NEL SISTEMA DI CONDOTTE COLLEGATO, IL MOVIMENTO DELLA CORRENTE.

$$\Delta H = H_{\text{MONTE}} - H_{\text{VALLE}} = \text{SALTO UTILE} > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c = \gamma Q (H_{\text{MONTE}} - H_{\text{VALLE}}) = \text{POTENZA CEDUTA DALLA CORRENTE ALLA TURBINA} \quad (\Delta H > Y) \\ P_d = \gamma Q Y = \text{POTENZA DISPONIBILE DELL'IMPIANTO} \end{array} \right.$$

$P_e = \eta \gamma Q \Delta H =$ POTENZA EFFETTIVA NELLA TURBINA

EQUAZIONI DEL MOTO DEI FLUIDI REALI

1) INTRODUZIONE E 2) EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES PER I FLUIDI VISCOSI

FINO AD ORA ABBIAMO STUDIATO LE PROPRIETÀ DEL MOTO E DELLA TRASFORMAZIONE DELL'ENERGIA NELLE SUE VARIE FORME PER I FLUIDI PERFETTI, OSSIA TALI CHE L'INFLUENZA DELLA VISCOSITÀ E DEI SUOI EFFETTI PUÒ ESSERE TRASCURATA RISPETTO A QUELLA DELLE FORZE DI SUPERFICIE E DI VOLUME CHE INTERESSANO QUESTO TIPO DI FLUIDI. IN REALTÀ, PERÒ, ESISTE UNA VASTA CATEGORIA DI PROCESSI DI MOTO, DI NOTEVOLE IMPORTANZA PRATICA, IN CUI GLI SFORZI TANGENZIALI HANNO EFFETTI DETERMINANTI E NON POSSONO PERTANTO ESSERE TRASCURATI.

CI OCCUPEREMO QUINDI ADESSO DI INDIVIDUARE LE EQUAZIONI DEL MOTO DI UN FLUIDO REALE, ESPlicitANDO LE COMPONENTI DEGLI SFORZI IN FUNZIONE DELLE SUE PROPRIETÀ FISICHE; QUESTO ESAME VIENE LIMITATO AL CASO DEI FLUIDI NEWTONIANI, CARATTERIZZATI, COME GIÀ VISTO, DA UN VALORE DELLA VISCOSITÀ INDIPENDENTE DAGLI SFORZI E QUINDI DAL MOTO.

LO STATO DI SFORZO È DEFINITO DALLE TRE COMPONENTI TANGENZIALI τ_x, τ_y, τ_z E DALLE TRE COMPONENTI NORMALI $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$; QUESTE ULTIME IN GENERALE ASSUMONO VALORI DIFFERENTI, MA LA LORO SOMMA È UN'INVARIANTE, CIOÈ È IDENTICA PER TUTTE LE TERNE DI ASSI CON VERTICE NEL GENERIC PUNTO CONSIDERATO. CONSEGUENZA IMMEDIATA DI QUESTA PROPRIETÀ È L'ESTENSIONE DEL CONCETTO DI PRESSIONE PER IL CASO ISOTROPO DEI FLUIDI PERFETTI: $p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$. CIOÈ È VERO ESSENDO p UNA QUANTITÀ SCALARE FUNZIONE SOLTANTO DEI PUNTI DEL CAMPO E DEL TEMPO.

POSSIAMO ALLORA CONSIDERARE LO STATO DI SFORZO COME LA SOMMAPOSIZIONE DI DUE PARTI:

- 1) SFORZI NORMALI DOVUTI ALLA PRESSIONE p (UNICA COMPONENTE NELLO STATO DI SFORZO DEI FLUIDI PERFETTI)
- 2) 6 COMPONENTI CHE NASCONO DURANTE IL MOVIMENTO A CAUSA DELLA VISCOSITÀ (COMPONENTE AGGIUNTIVA NELLO STATO DI SFORZO DEI FLUIDI REALI)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y - p & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z - p \end{bmatrix}$$

TENSORE DEGLI SFORZI
COMPONENTE IDROSTATICA
COMPONENTE DEVIATORIA

N.B. QUALORA IL MOTO CESSI IL TENSORE SI RIDUCE ALLA COMPONENTE IDROSTATICA PERCHÈ

$$\begin{matrix} \sigma_x \rightarrow & \tau_x \rightarrow \\ \sigma_y \rightarrow & p & \tau_y \rightarrow 0 \\ \sigma_z \rightarrow & & \tau_z \rightarrow 0 \end{matrix}$$

IN UN FLUIDO VISCOSO UNA FILA DI PARTICELLE AB SI MUOVE IN MODO PERTANENTE PIANO (NEL PIANO x, y) CON DIREZIONE SECONDO L'ASSE $x \rightarrow \vec{v} \equiv u \equiv u(z)$. DOPO UN CERTO INTERVALLO DI TEMPO dt LA PARTICELLA CHE INIZIALMENTE OCCUPAVA LA POSIZIONE A SI È SPOSTATA DI UN TRATTO $\overline{AD} = u dt$, MENTRE QUELLA PARTITA DA B HA PERCORSO IL TRATTO $\overline{BC} = (u + \frac{\partial u}{\partial z} dz) dt$. ESSENDO CHE IN GENERALE PER I FLUIDI VISCOSI VALE $\overline{AD} \neq \overline{BC}$, LA LINEA CD AVrà SUBITO UNA VARIA-

$$\frac{d\gamma_x}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d}{dt}(\epsilon_y - \epsilon_z)$$

$$\frac{d\gamma_y}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d}{dt}(\epsilon_x - \epsilon_z)$$

$$\frac{d\gamma_z}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d}{dt}(\epsilon_x - \epsilon_y) \quad \otimes$$

PER UN QUADRATO ABCD INFINITESIMO NEL PIANO xy LO SFORZO NORMALE $\sigma_y - p$ AGENTE SULLA DIAGONALE $\overline{AC} \perp y$ E' ORIGINATO SOLO DALLA FORZA PRODOTTA DALLA TENSIONE TANGENZIALE τ_z . SE ISOLAMO IL TRIANGOLO ACD LE FORZE AGENTI SUI TRE LATI SARANNO DATE DA

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} \cdot \tau_z \\ \overline{CD} \cdot \tau_z \\ \overline{AC} \cdot (\sigma_y - p) \end{array} \right\} \rightarrow \text{PER L'EQUILIBRIO} \quad 2\left(\tau_z \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(\sigma_y - p) \Rightarrow \sigma_y - p = \tau_z$$

ANALOGAMENTE, SUL TRIANGOLO ABD, ESSENDO LO SFORZO NORMALE DIRETTO NEL VERSO OPPOSTO, AVREMO

$$\begin{aligned} \sigma_x - p = -\tau_z &\rightarrow \sigma_y - \sigma_x = 2\tau_z \quad \otimes \otimes \\ \epsilon_x = \Delta\gamma_z/2 &\rightarrow \frac{d\epsilon_x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\gamma_z}{dt} \\ \epsilon_y = -\Delta\gamma_z/2 &\rightarrow \frac{d\epsilon_y}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d\gamma_z}{dt} \\ \frac{d\gamma_z}{dt} = \frac{d}{dt}(\epsilon_x - \epsilon_y) &\rightarrow \mu \frac{d\gamma_z}{dt} = \tau_z \quad \otimes \otimes \\ \sigma_x - \sigma_y = -2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) & \end{aligned}$$

ANALOGAMENTE

$$\sigma_x - \sigma_z = -2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = -2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

SOMMANDO SI OTTIENE

$$3\sigma_x - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -6\mu \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad \curvearrowright$$

$$\sigma_x - p = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\vec{v})$$

$$\sigma_y - p = -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\vec{v})$$

$$\sigma_z - p = -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\vec{v})$$

N.B.

PER FLUIDI INCOMPRESSIBILI ($\rho = \text{const.}$) LA DIVERGENZA DI \vec{v} SI ANNULLA ENTRA ALL'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA QUANTITÀ DI MOTO $\rightarrow \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$.

L'INTERVENTO DELLA VISCOSITÀ È RAPPRESENTATO DALL'ULTIMO TERMINE $\bar{T} = \mu \int_A \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dA$, DA CUI RISULTA CHE L'EQUILIBRIO DINAMICO DELLA MASSA FLUIDA CONTENUTA IN W È INDIPENDENTE DALLE AZIONI DI VISCOSITÀ CHE SI ESERCITANO ALL'INTERNO DEL VOLUME STESSO, MA È LEGATO UNICAMENTE ALLA RISULTANTE DEGLI SFORZI AGENTI SULLA SUPERFICIE DI CONFINAMENTO. CIRCOLARMENTE PER UN FLUIDO PERFETTO ($\mu = 0$) QUESTO TERMINE SI ANNULLA.

4) AZIONI DI TRASCINAMENTO DI UNA CORRENTE

LA VISCOSITÀ DEI FLUIDI REALI FA SÌ CHE GLI SFORZI CHE AGISCONO SULLA PARETE DEL CONDOTTO IN CUI SI MUOVE LA CORRENTE PRESENTINO COMPONENTI TANGENZIALI: DEFINIAMO "AZIONE DI TRASCINAMENTO" DELLA CORRENTE SULL'INVOLUCRO LA RISULTANTE DI QUESTE COMPONENTI TANGENZIALI; LA FORZA CHE SI OPPONE A QUESTA AZIONE È LA "RESISTENZA" DELL'INVOLUCRO. SUI A LA SUPERFICIE DELL'INVOLUCRO; L'AZIONE DI TRASCINAMENTO SARÀ:

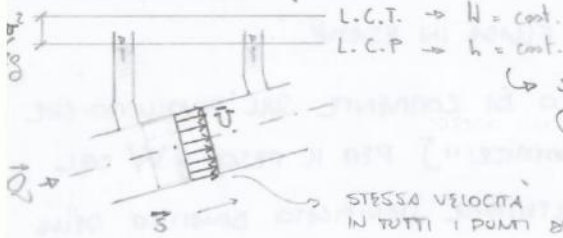
$$\bar{T} = \mu \int_A \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dA \quad \bar{n} = \text{DIREZIONE DELLA NORMALE INTERNA NEI SINGOLI PUNTI DELLA PARETE (ENTRANTE NEL FLUIDO)}$$

N.B. NOI TRATTIAMO SOLO PROBLEMI IN CUI LA VISCOSITÀ $\mu = \text{cost.}$, MA NELLA REALTÀ, SOPRATTUTTO CHE μ PUÒ VARIARE, IN FUNZIONE AD ESAMPIO, DELLA TEMPERATURA.

VANTAGGIO COME PER \bar{T} , ΔH ; NON PER \bar{P} , I !

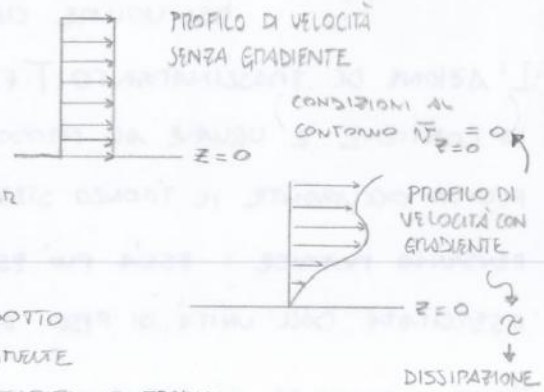
ESSA SI PUÒ CALCOLARE AGEVOLMENTE, IN TERMINI FINITI, PER IL MOTO UNIFORME IN UN CONDOTTO CILINDRICO.

FLUIDO PERFETTO ($\mu = 0$)

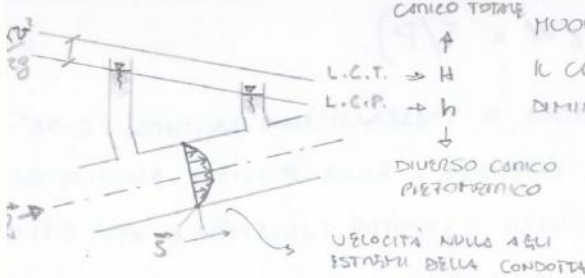


STESSO CARICO TOTALE (TEORIA DI BERNOULLI)

STESSO CARICO PIEZOMETRICO (TERMINI CINETICI COSTANTE, QUINDI $H - \frac{\rho v^2}{2g} = h = \text{const.}$)
 $H = \text{const. PER}$



FLUIDO VISCOSO ($\mu > 0$)



(NON VALE PIÙ IL TEOREMA DI BERNOULLI)
MOVENDOSI LUNGO IL CONDOTTO IL CARICO ID. DEVE NECESSARIAMENTE DIMINUIRE A CAUSA DELLA DISSIPAZIONE TERMICA

FLUIDI VISCOSI SONO DISSIPATIVI: È POSSIBILE METTERLI IN MOVIMENTO SOLAMENTE SE SI È DISPOSTI A CEDERGLI ENERGIA.

$$H(s) = H_0 - \int_0^s J(s) ds \quad H_0 \text{ a } s=0$$

$$= H_0 - J \cdot s \quad (\text{SE } J = \text{const.})$$

UN MODO PER CARATTERIZZARE LA DISSIPAZIONE, OSSIA LA PERDITA DI ENERGIA MECCANICA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA, È DERIVARE IL CARICO:

$$J = - \frac{\partial H}{\partial s} \Rightarrow \text{PER SEZIONI COSTANTI} \Rightarrow = - \frac{\partial h}{\partial s}$$

INDICA SEMPLICEMENTE CHE SARA' SEMPRE NEGATIVA (H, h ↓)

PENDENZA MOTTRICE (O CADENTE LOCALE PIEZOMETRICA)

PUÒ VARIARE (\rightarrow CURVE ANCHE PERTE)



POSSIAMO IMMAGINARE CHE LA PARETE SPINGA IL FLUIDO NEL VERSO OPPOSTO A QUELLO DEL SUO CAMPO DI MOTO, OPPURE CHE LA PARETE SIA TRASCINATA INDIETRO DAL FLUIDO. CIÒ AVVIENE PER LA DIFFUSIONE DEL CAMPO DI MOTO $\nabla^2(\bar{v})$ SULLA PARETE, LA QUALE PERÒ DEVE CIRCOLARMENTE OPPOSTI AL MOTO.

CORRENTI IN PRESSIONE

1) GENERALITÀ SUL MOTO UNIFORME E ESPERIENZA DI REYNOLDS

LO STUDIO DEL MOTO UNIFORME DI UNA CORRENTE IN PRESSIONE COSTITUISCE UNA DELLE QUESTIONI FONDAMENTALI DELL'IDRAULICA TECNICA, ED È INOLTRE DI NOTEVOLE IMPORTANZA CONCETTUALE; PER GIUNGERE INFATTI AD UNA SUA RISOLUZIONE NON COMPLETAMENTE EMPIRICA SI È COSTRETTI AD UN'ANALISI DI DETTAGLIO DEL MOTO FLUIDO ED IN PARTICOLARE DEL FENOMENO TURBOLENTO. IL PROBLEMA, COME AVREMO MODO DI INDICARE, È DI ESTREMA COMPLESSITÀ; NELLA SUA ESSENZA ESSO PUÒ ESSERE POSTO COME SEGUE: INDIVIDUARE LA RELAZIONE ESISTENTE FRA LA PENDENZA MOTTRICE (CADENTE) J DELLA CORRENTE E TUTTE LE ALTRE GRANDERZE DA CUI QUESTA PUÒ DIPENDERE. UNA SEMPLICE ANALISI QUALITATIVA PORTA A RICONOSCERE CHE QUESTE GRANDERZE POSSONO SUDDIVIDERSI IN TRE CATEGORIE:

- 1) GRANDERZE RELATIVE AL CONDOTTO IN CUI LA CORRENTE SI MUOVE E IN PARTICOLARE AREA E FORMA DELLA SEZIONE TRASVERSALE, SCABINEZZA DELLA PARETE INTERNA;
- 2) GRANDERZE CINEMATICHE, IN PARTICOLARE LA PORTATA DELLA CORRENTE O LA SUA VELOCITÀ MEDIA;
- 3) GRANDERZE FISICHE RELATIVE AL FLUIDO DALLE QUALI IL MOVIMENTO PUÒ DIPENDERE, E CIOÈ ESSENZIALMENTE VISCOSITÀ E DENSITÀ.

SI ASSUMA INOLTRE CHE LA FORMA DELLA GENERICA CONDOTTA CHE ANDREMO A STUDIARE SIA CILINDRICA, IN MODO DA SFRUTTARE LA SUA SIMMETRIA RADIALE INTORNO ALL'ASSE CENTRALE COME CONDIZIONE SEMPLIFICATIVA NELL'AMBITO DELLE NOSTRE POTENZIALI APPLICAZIONI TECNICHE. PROPRIO IN MERITO ALLA DIPENDENZA DEL MOTO DI UNA CORRENTE IN PRESSIONE DAL TIPO DI SEZIONE DELLA SUA CONDOTTA DICHIAMO FIN DA SUBITO CHE ESSA VALE SOPRATTUTTO NEL CASO DI MOTO LAMINARE, MENTRE È TRASCURABILE QUANDO IL MOTO SA TURBOLENTO. IN OGNI CASO BASTERÀ UN'UNICA GRANDEZZA LINEARE, OSSIA IL "RAGGIO IDRAULICO" $R = \frac{A}{\uparrow P}$, A DEFINIRE GEOMETRICAMENTE LA FORMA DELLA SEZIONE TRASVERSALE E QUINDI A QUANTIFICARE L'INCIDENZA SULLE PROPRIETÀ CINEMATICHE DELLA CORRENTE CHE LA ATTRAVERSA.

3) MOTO TURBOLENTO: LA VELOCITÀ DEL FLUIDO AUMENTA NOTEVOLMENTE E SI RIDUCE IL TRATTO DELLA CONDOTTA IN CUI AVVIENE LA MISCELAZIONE CROMATICA, LA QUALE TESTIMONIA L'ANDAMENTO DEL CAMPO DI MOTO DEL FLUIDO STESSO CHE NON SARÀ PIÙ REGOLARE.

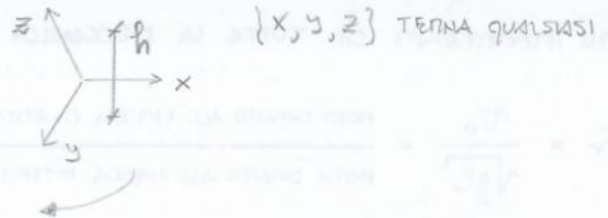
CERCHEREMO DI INTRODURRE MODELLI MATEMATICI, IL PIÙ POSSIBILE SEMPLICI, PER DESCRIVERE QUESTI DUE TIPI DI MOTI.

DOBBIAMO INNANZITUTTO DOMANDARCI SE LE EQUAZIONI CARATTERISTICHE SIANO LINEARI O NO E CERCARE POI DI ADIMENSIONALIZZARLE (PIÙ AVANTI VEDREMO COME E PERCHÉ...). PARTIAMO DAL RICHIAMARE L'EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES SULLA DINAMICA DEI FLUIDI GENERICI (QUINDI VISCOSI):

$$\rho(\bar{F} - \bar{A}) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2(\bar{v})$$

$$\bar{F} = \text{grad}(gh)$$

h NON NECESSARIAMENTE COINCIDENTE CON z PUNCHÉ INDICHI LA QUOTA GEODETICA IN SENSO ASSOLUTO



LA SI PROIETTI LUNGO I TRE ASSI DELLA TERNA CARTESIANA SCELTA:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(gh - p) = \rho \frac{DU}{Dt} - \mu \nabla^2(u) \\ \frac{\partial}{\partial y}(gh - p) = \rho \frac{Dv}{Dt} - \mu \nabla^2(v) \\ \frac{\partial}{\partial z}(gh - p) = \rho \frac{Dw}{Dt} - \mu \nabla^2(w) \end{cases}$$

VARIABILI INDIPENDENTI: x, y, z, t
 VARIABILI DIPENDENTI: $p; h; u, v, w$
 COSTANTI: $\rho (\rightarrow \gamma), \mu$

PER SEMPLIFICARE LO STUDIO DOVREMO VALUTARE QUALI DI QUESTE EQUAZIONI SONO PIÙ IMPORTANTI DELLE ALTRE E PER FARE QUESTO FISSIAMO LA SCALA APPROPRIATA AL CAMPO DELLE VELOCITÀ DEL FLUIDO, IN BASE ALLA PORTATA DEL FENOMENO; IN SEQUITO FAREMO LO STESSO PER LA LUNGHEZZA.

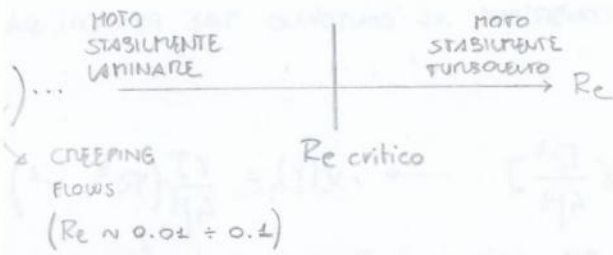
$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{u}{v_0}; v' = \frac{v}{v_0}; w' = \frac{w}{v_0} \\ x' &= \frac{x}{l}; y' = \frac{y}{l}; z' = \frac{z}{l}; h' = \frac{h}{l} \end{aligned} \right\} \in [0,1] \text{ PERCHÉ MISURE RELATIVE (AD UNA SCALA } v_0, l \text{ FISSATA)}$$

CONSEQUENTEMENTE RICAVIAMO LA SCALA TIPICA DEL TEMPO E QUELLA TIPICA DELLA PRESSIONE.

$$t' = \frac{t}{l/v_0}; p' = \frac{p}{\rho v_0^2} \rightarrow \in [0,1] \text{ PERCHÉ MISURE RELATIVE (AD UNA SCALA } v_0, l \text{ FISSATA)}$$

UNA VOLTA SCELTE LE SCALE, IMPONIAMO LE NUOVE GRANDEZZE ADIMENSIONALIZZATE CHE ABBIAMO RICAVATO ($u', v', w'; x', y', z', h'; t', p'$) NELLE EQUAZIONI DI PARTENZA PER COPRIRE SE, RISPETTO ALLA SCALA DI RIFERIMENTO DI OGNI PARTICOLARE GRANDEZZA FISICA, I VALORI MISURATI SONO

SI PUÒ RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE IL COMPORTAMENTO DEL FLUIDO DIVERSIFICANDO TRA MOTO "STABILMENTE LAMINARE" E "STABILMENTE TURBOLENTO".



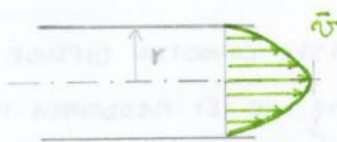
PER CONDOTTE CIRCOLARI
 $Re_{cr} \approx 2000 \div 2500$

POSSIAMO SCRIVERE Re COME $Re = \frac{\rho v_0 d}{\mu} = \frac{\rho v_0}{\mu}$ → VISCOSITÀ CINEMATICA

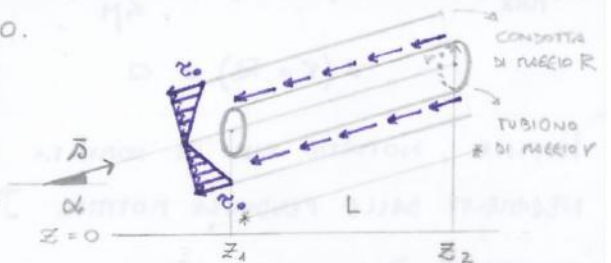
$\begin{cases} \mu_{H_2O} > \mu_{aria} \\ \nu_{H_2O} < \nu_{aria} \end{cases}$

2) MOTO LAMINARE

RIGUARDA DIVERSI FENOMENI NATURALI TRA CUI MOTI ALL'INTERNO DEI MEZZI POROSI, PROCESSI DI LUBRIFICAZIONE, SISTEMA CARDIOCIRCOLATORIO.



PROFILO DI VELOCITÀ RELATIVO ALLA CORRENTE NELLA CONDOTTA DI RAGGIO r



LE TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE SONO PARALLELE ALLE GENERATRICI DELLA CONDOTTA. L'EQUAZIONE GLOBALE DELLA FLUIDODINAMICA PUÒ ESSERE CONVENZIONALMENTE SCRITTA NELLA FORMA CHE DERIVA DALL'EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES:

$$\bar{P} + \bar{I} + (\bar{M}_c - \bar{M}_v) + \bar{\Pi} - \mu \int_S \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dS = 0 \quad \text{DOVE } \bar{T} = \mu \int_S \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dS = \text{RISULTANTE DELLE COMPONENTI TANGENZIALI DELLE SPINTE}$$

PER LE PROPRIETÀ DEL MOTO UNIFORME:

$$T = -\gamma (\pi r^2 L) \frac{(z_2 - z_1)}{L} + (\pi r^2)(P_1 - P_2) = \gamma \pi r^2 \left[\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \right] = \gamma \pi r^2 L J$$

$$\tau = \frac{T}{2\pi r L} = \frac{\text{RISULTANTE DELLE COMPONENTI TANGENZIALI DELLE SPINTE}}{\text{SUPERFICIE LATERALE DELLA CONDOTTA CILINDRICA DI RAGGIO GENERICO r}} = \frac{\gamma \pi r^2 L J}{2\pi r L} = \gamma \frac{r}{2} J \begin{cases} r=0 \rightarrow \tau=0 \\ r=R \rightarrow \tau=\tau_0 \\ \tau_0 = \gamma \frac{R}{2} J = \gamma R_0 J \end{cases}$$

LE TENSIONI TANGENZIALI τ HANNO ANDAMENTO LINEARE PER $r \in [0, R]$. PER QUANTO RIGUARDA \bar{T} , SE SI INDIVIDUA UN VETTORE \bar{n} NORMALE ALL'ASSE DELLA CONDOTTA CILINDRICA DI SEZIONE A , QUINDI CON DIREZIONE RADIALE PER TALE CONDOTTA, SI OTTERRÀ LA SEGUENTE UGUAGLIANZA, CHE PERMETTE A DEFINIRE LA

FUNZIONE VELOCITÀ CHE ESPRIME IL CAMPO DI MOTO IN FUNZIONE DEL RAGGIO r :

PER LA SIMMETRIA

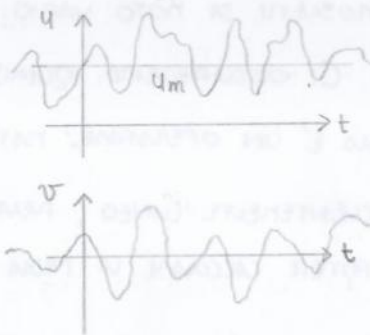
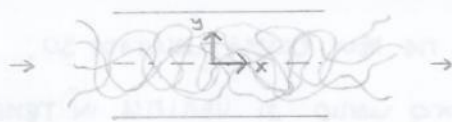
$$T = \mu \int_S \frac{\partial v}{\partial n} dS = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_S dS = -\mu \frac{dv}{dr} (2\pi r L) = \gamma \pi r^2 L J \rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma}{2\mu} r J$$

↳ SUPERFICIE LATERALE CONDOTTA CILINDRICA

3) MOTO TURBOLENTO

3.1) CARATTERISTICHE GENERALI ED EQUAZIONE DI NAVIER-STOCKES MEDIATA

SI VERIFICA QUANDO LA VELOCITÀ MEDIA DI UNA CORRENTE FLUIDA, IN UNA CONDOTTA ASSEGNATA, OLTREPASSA UN CERTO VALORE CRITICO; IL MOTO PERDE COSÌ QUEI CARATTERI DI REGOLARITÀ CHE LO CONTRADDISTINGUONO PER VELOCITÀ PICCOLE: FACENDO RIFERIMENTO AL MOTO UNIFORME IN UNA CONDOTTA CILINDRICA, SI RICONOSCE A PRIMA VISTA CHE LE TRAIETTORIE DELLE SINGOLE PARTICELLE FLUIDE NON SONO PIÙ RIGOROSAMENTE PARALLELE ALL'ASSE DEL CONDOTTO, AL MOTO DI TRASPORTO, CORRISPONDENTE ALE TRAIETTORIE RETTILINEE, VIENE A SOMMAPPORSI UN MOTO DISORDINATO DI AGITAZIONE, DI NATURA APPARENTEMENTE CASUALE, DETTO "TURBOLENZA".



$u_m =$ VALORE DEL MOTO MEDIO

$u(t) =$ VALORE DEL MOTO TURBOLENTO

$v_m = 0 =$ VALORE DEL MOTO MEDIO

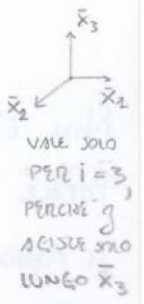
$v(t) =$ VALORE DEL MOTO TURBOLENTO

TUTTE LE GRANDEZZE FISICHE RIFERITE AI FLUIDI CHE SI MUOVONO IN QUESTO MODO POSSONO ESSERE DESCRITTE ANALITICAMENTE TRAMITE SERIE DI FUNZIONI (TIPO LE SERIE TRIGONOMETRICHE ALLA FOURIER), MA NON SAREBBE FACILE IN PRATICA INDIVIDUARE IL GIUSTO ARGOMENTO NE' AL VARIARE DEGLI ISTANTI DI TEMPO, NE' AL VARIARE DEI PUNTI DELLO SPAZIO CONSIDERATI. NON DEVE PERCIÒ SORPRENDERCI IL FATTO CHE LE TURBOLENZE PRESENTINO LE SEGUENTI CARATTERISTICHE GENERALI:

- 1) NON LINEARITÀ
- 2) APPARENTE CASUALITÀ (CAOS)
- 3) INCREMENTO DEI FENOMENI DI TRASPORTO
- 4) AUMENTO DELLE DISSIPAZIONI DI CARICO
- 5) VORTICITÀ → MOTI ROTATORI SOMMAPPSTI CON SCALE DI VELOCITÀ VARIABILI
- 6) TRIDIMENSIONALITÀ

SE E' PREVEDIBILE CHE NON E' NE' NECESSARIO NE' OPPORTUNO ADDENTRARSÌ NELLO STUDIO DELLE OSCILLAZIONI GRAFICHE DELLE MISURE RIFERITE AI MOTI TURBOLENTI, CONVIENE LIMITARSI A RICEVERE LE INFORMAZIONI UTILI PER FINALITÀ PRATICHE, OSSIA I VALORI MEDI. SI PROVA ALLORA A SCRIVERE DELLE EQUAZIONI CHE TENGANO CONTO SOLO DEI VALORI MEDI DELLE GRANDEZZE FISICHE DI RILIEVO.

QUESTO PORTA A CONCLUDERE CHE LA DIVERGENZA DELLA COMPONENTE MEDIA E QUELLA DELLA COMPONENTE TURBOLENZA SONO ENTRAMBE NULLE. RIPRENDIAMO ORA L'EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES:



$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2(\vec{v}) \quad \nu = \text{viscosità cinematica}$$

$$\frac{D\tilde{v}_i}{Dt} = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} - g \delta_{i3}$$

(1) (4) (2) (3)

INDICE DI KRONECKER: $\delta_{i3} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
VALE SOLO PER $i=3$, PERCHÉ g AGISCE SOLO LUNGO \vec{x}_3

SI ESEGUE LA MEDIA SU TUTTI I MEMBRI (TRAMITE $g \delta_{i3}$ PERCHÉ NON PRESENTE NELLA TURBOLENZA → QUANTITÀ SEMPRE COSTANTE)

1) $\frac{\partial(\overline{v_i + v_i})}{\partial t} = \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t}$

2) $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{p+p})}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}$

3) $\nu \frac{\partial^2(\overline{v_i + v_i})}{\partial x_j \partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \overline{v_i}}{\partial x_j \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v_i}}{\partial x_j \partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \overline{v_i}}{\partial x_j \partial x_j}$

4) $(\overline{v_j + v_j}) \frac{\partial(\overline{v_i + v_i})}{\partial x_j} = \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} =$
 $\overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} = \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial(\overline{v_i v_j})}{\partial x_j} - \overline{v_i} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_j} \right] = \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{v_i v_j})}{\partial x_j}$
 = 0 → PER L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

GENERALI CONTINUE INFORMAZIONI NON PERMETTONO DI TROVARE UN T ADATTO PER CALCOLO (•)

QUINDI ANCHE SE SIAMO INTERESSATI SOLO AL TOTALE MEDIO NON SI PUÒ FILTRARE UN PROBLEMA COMPLESSO TRASCURANDO L'INFLUENZA DELLE TURBOLENZE.

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{v_i v_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v_i}}{\partial x_j \partial x_j} - g \delta_{i3}$$

ACCELERAZIONE MEDIA CORRELAZIONE TRA LE OSCILLAZIONI TURBOLENTE (NOTO TURBOLENTO NON PURAMENTE COSINUS) DONATA ALLA COMPONENTE DETERMINISTICA DELLA TURBOLENZA (NON NULLA)

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES DEL MOTO MEDIO (O DI REYNOLDS)

RISCRIVENDO IN FORMA COMPATTA L'ACCELERAZIONE MEDIA:

$$\frac{D\overline{v}_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

CON $\overline{\tau}_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v_i v_j}$

↓ ↓ ↓
 TENSIONI OPPORTUNE TENSIONI VISCOSE TENSIONI DI REYNOLDS

E CINETICA E POTENZIALE

MOTO LAMINARE MOTO TURBOLENTO

LA QUANTITÀ DI MOTO DI UN FLUIDO VARIA NEL TEMPO SECONDO QUATTRO TERMINI CON PESO DIVERSO A SECONDA DEL TIPO DI MOTO.

LA DIFFICOLTÀ DELLO STUDIO DELLE TURBOLENZE STA NEL FATTO CHE IN ESSO SONO DA VALUTARE SIA ASPETTI DETERMINISTICI SIA ASPETTI STOCASTICI.

3.2) TEORIA DELLE CASCADE DI VORTICI DI LANDAU

LA TURBOLENZA PUÒ ESSERE STUDIATA COME SOVRAPPOSIZIONE DI VORTICI IN SCALE DIMENSIONALI DIVERSE, I QUALI INTERAGISCONO TRA LORO RENDENDO IL MOTO DI UN FLUIDO FORTEMENTE IRREGOLARE. QUESTO FATTO SI RIFLETTE ANCHE SULL'AMBIENTE IN CUI IL FLUIDO SI MUOVE, IN QUANTO QUESTO VIENE MODELLO E ALTERNATO NELLE SUE FORME CARATTERISTICHE IN BASE ALLA RESISTENZA CHE È IN GRADO DI OPPORRE ALLA CAPACITÀ PERTURBATIVA DELLO STESSO FLUIDO VALUTATA SIA SU TEMPI BREVI SIA SU PERIODI LUNGH.

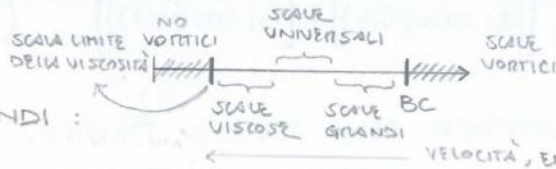


I VORTICI RICEVONO L'ENERGIA NECESSARIA ALLA LORO FORMAZIONE E AL LORO SVILUPPO DAL MOTO MEDIO DEL FLUIDO, SOLO SE QUESTO STESSO MOTO VIENE A SUA VOLTA ALIMENTATO DALL'ESTERNO PER LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (EQUILIBRIO DI BILANCIO). ALLA BASE DELL'ENERGIA ESISTONO I GRADIENTI DELLA QUANTITÀ DI MOTO: ASSUMENDO COSTANTE LA MASSA ($\rho = \text{cost.}$), DI FATTO QUESTI GRADIENTI COINCIDONO CON QUELLI DEL CAMPO DI MOTO. POICHÉ TALE ENERGIA PROVIENE DAL MOTO MEDIO PARLEREMO DI GRADIENTI DI VELOCITÀ MEDIA.



GLI UNICI VORTICI CHE POSSONO ALIMENTARSI CON L'ENERGIA SOTTIATTA AL MOTO MEDIO SONO QUELLI CHE "VEDONO" I GRADIENTI DI VELOCITÀ, OSSIA QUELLI ABBASTANZA GRANDI DA RISCONTINARE VARIAZIONI LOCALI DEL CAMPO DI MOTO AVENDO LA STESSA SCALA DI TALI GRADIENTI. L'ENERGIA ACCUMULATA DAI GRANDI VORTICI VIENE POI TRASPRESA A QUELLI IMMEDIATAMENTE PIÙ PICCOLI E COSÌ VIA FINO AD UN DATO LIMITE DI SCALA OLTRE IL QUALE LA VISCOSITÀ HA IL SOPRAVVENTO SULL'ENERGIA CHE GENERA I VORTICI, PER CUI NON SE NE FORMANO ALTRI.

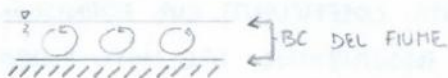
QUESTO PROCESSO DI INNESCO DI VORTICI A CASCATA FU OSSERVATO PROPRIO DA LANDAU CHE FISSÒ TRE FAMIGLIE DI SCALE DI VORTICI CON PROPRIETÀ DIFFERENTI:



1) SCALE GRANDI:

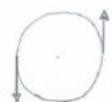
→ ENERGETICHE → SOTTORREGONO ENERGIA AL MOTO MEDIO;

→ DETTATE DALLE CONDIZIONI AL CONTORNO (BC) → NON POSSONO VIOLARE LE BC IN QUANTO ESSE FISSANO L'AMPIEZZA DEL DOMINIO IN CUI POSSONO PRODURSI LE VORTICITÀ;



→ NON VISCLOSE → LA VISCOSITÀ NON CONDIZIONA MINIMAMENTE LO SVILUPPO DI QUESTI VORTICI;

→ LENTE → I VORTICI PIÙ GRANDI RUOTANO E SI ALIMENTANO CON VELOCITÀ PERIFERICA CONTENUTA, PER UN DELLA LORO FUNZIONE INERZIA AL MOTO.



ANTICIPIAMO UN ASPETTO CHE SARÀ SENZ'ALTRO PIÙ CHIARO ALLA LUCE DEL PARAGRAMFO INEVITANTE UN PARTICOLARE TEOREMA, DETTO TEOREMA "T", CHE VERRÀ TRATTATO FRA BREVE, INSIEME AD ALCUNE DELLE SUE MAGGIORI APPLICAZIONI IN FLUIDODINAMICA.

ABBIAMO DETTO CHE I VORTICI DELLA TURBOLENZA NON POSSONO ESSERE INFINITAMENTE PICCOLI, PERCHÉ NASCONO TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE ALLA VISCOSITÀ CHE BLOCCANO LA FORMAZIONE DEI VORTICI TROPPO PICCOLI. POSSIAMO QUINDI DIRE CHE LA MICROSCOPICA LUNGHEZZA η DEI VORTICI DIPENDE DALLA VISCOSITÀ, MA NON DA QUELLA DINAMICA μ , SENSI DA QUELLA CINETICA ν , DOVE LA DENSITÀ DEL FLUIDO NON INTERVIENE. L'ALTRA GRANDEZZA CHE INCIDE SUL VALORE DI η È IL FLUSSO DI ENERGIA ϵ , OSSIA L'ENERGIA TRASPORTATA PER UNITÀ DI VOLUME E DI TEMPO DAL VORTICE:

$$\eta = \eta(\nu, \epsilon) \quad \text{SCALA DEI VORTICI PIÙ PICCOLI} \quad [m]$$

PROVIAMO AD ADIMENSIONALIZZARE η RISPETTO ALLE SUE VARIABILI, DIVIDENDOLA PER OPPORTUNE POTENZE DELLE STESSA, SICCHÉ IL DENOMINATORE CONTIENI UNA LUNGHEZZA, PROPRIO COME È η :

$$\frac{\eta}{\nu^\alpha \epsilon^\beta} = A = \text{cost.} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = -\frac{3}{4} \\ \beta = -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \frac{\eta}{\nu^{-3/4} \epsilon^{1/4}} = A \rightarrow \eta = A \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\epsilon}} \approx \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\epsilon}} \quad \text{DA ESPERIMENTI}$$

CONSIDERANDO CHE $\nu^{3/4} \approx 1$ PER QUASI TUTTI I FLUIDI, TANTO PIÙ ϵ CRESCE, TANTO PIÙ SI OTTENGONO VORTICI PICCOLI, COME D'ALTRA PARTE CI SI POTREVA ASPETTARE.

3.3) EQUAZIONE GLOBALE DELLA DINAMICA MEDIATA

$$\langle \vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \Delta \vec{M} \rangle = 0$$

① ② ③ ④

① $\langle \vec{P} \rangle = \vec{P}$ TERMINE IMMUTATO

② $\vec{F}_c = \int_A \vec{\Phi}_n dA = \int_A (\vec{\Phi}_n + \vec{\varphi}_n) dA$ TERMINE LINEARE

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}_c \rangle &= \langle \int_A (\vec{\Phi}_n + \vec{\varphi}_n) dA \rangle = \int_A \langle (\vec{\Phi}_n + \vec{\varphi}_n) \rangle dA = \int_A \langle \vec{\Phi}_n \rangle dA + \int_A \langle \vec{\varphi}_n \rangle dA = \\ &= \int_A \vec{\Phi}_n dA = \int_{A_{tr}} p dA_{tr} - \mu \int_{A_{lat}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dA_{lat} = \vec{\Pi} - \vec{T} \end{aligned}$$

③ $\vec{I} = - \int_w \frac{\partial (p \vec{V})}{\partial t} dW = - \int_w \frac{\partial [p(\vec{V} + \vec{v})]}{\partial t} dW$ TERMINE LINEARE

$$\begin{aligned} \langle \vec{I} \rangle &= - \left\langle \int_w \frac{\partial [p(\vec{V} + \vec{v})]}{\partial t} dW \right\rangle \xrightarrow{\text{FLUIDO INCOMPRESSIBILE}} - \rho \int_w \left\langle \frac{\partial (\vec{V} + \vec{v})}{\partial t} \right\rangle dW = \\ &= - \rho \int_w \frac{\partial \langle (\vec{V} + \vec{v}) \rangle}{\partial t} dW = - \rho \int_w \frac{\partial \langle \vec{V} \rangle}{\partial t} dW - \rho \int_w \frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} dW = - \rho \int_w \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dW \end{aligned}$$

3.4) TEOREMA "π" DI BUCKINGHAM

È UN TEOREMA CHE TROVA DIVERSE APPLICAZIONI PRATICHE SULLE QUALI NON CI SOFFER-
MEMO SE NON A TITOLO DI ESEMPIO PER I CASI DI INTERESSE FLUIDO-MECCANICO.

SI CONSIDERINO LE TRE GRANDEZZE FISICHE FONDAMENTALI: LUNGHEZZA, TEMPO, MASSA.
QUESTE INFATTI SONO LE DIMENSIONI CARATTERISTICHE CON LE QUALI L'UOMO ORGANIZZA,
STUDIA E CLASSIFICA IL MONDO IN CUI VIVE, PER RAGIONI CHE SFONDANO IL CONFINE
TRA SCIENZA E FILOSOFIA E DI CUI NON CI OCCUPIAMO. DI SICURO ABBIAMO CHE QUESTE
SONO MOLTO CONODE PER INQUADRARE QUASI TUTTI I PROBLEMI TECNICI E NON SOLO PER
CUI L'UOMO DIMOSTRA INTERESSE.

TUTTE LE GRANDEZZE FISICHE DERIVATE CHE USANO CON MAGGIORE FREQUENZA SONO
PARTICOLARI COMBINAZIONI DI QUESTE TRE DIMENSIONI CHE INDICHEREMO SINTETICAMENTE
COME L, T, M. DETTE Q₁, Q₂, Q₃ TRE GENERICHE GRANDEZZE DERIVATE SI AVRÀ

$$\begin{aligned} [Q_1] &= [L^{\alpha_1} T^{\beta_1} M^{\gamma_1}] & \text{ES: } [V] = [\text{VELOCITÀ}] &= [L^1 T^{-1} M^0] \\ [Q_2] &= [L^{\alpha_2} T^{\beta_2} M^{\gamma_2}] & [F] = [\text{FORZA}] &= [L^1 T^{-2} M^1] \\ [Q_3] &= [L^{\alpha_3} T^{\beta_3} M^{\gamma_3}] \end{aligned}$$

DOVE GLI ESPONENTI α_i, β_i, γ_i SONO IL GRADO DI DIPENDENZA DI CIASCUNA Q_i
DALLE TRE GRANDEZZE FONDAMENTALI L, T, M.

SE CAMBIO L'UNITÀ DI MISURA DI UNA STESSA GRANDEZZA FONDAMENTALE, PRESO
COSÌ DA L A λ, DA T A τ, DA M A μ, IL LEGAME CHE ESPRIME UNA DATA GRAN-
DEZZA DERIVATA CAMBIA ANCH' ESSO SOTTO IL PROFILO DELLA SCALA, CHE TIENE CONTO
DELLE UNITÀ DI MISURA UTILIZZATE, MA NON CAMBIA ASSOLUTAMENTE PER QUANTO RIGUARDA
IL LEGAME DIMENSIONALE DEFINITO DAGLI ESPONENTI.

$$\begin{aligned} [q_1] &= [\lambda^{\alpha_1} \tau^{\beta_1} \mu^{\gamma_1}] \\ [q_2] &= [\lambda^{\alpha_2} \tau^{\beta_2} \mu^{\gamma_2}] \\ [q_3] &= [\lambda^{\alpha_3} \tau^{\beta_3} \mu^{\gamma_3}] \end{aligned}$$

PUNTO DI VISTA CONVENZIONALE

$$\begin{aligned} [Q_1] &= [L^{\alpha_1} T^{\beta_1} M^{\gamma_1}] \\ [Q_2] &= [L^{\alpha_2} T^{\beta_2} M^{\gamma_2}] \\ [Q_3] &= [L^{\alpha_3} T^{\beta_3} M^{\gamma_3}] \end{aligned}$$

PUNTO DI VISTA NON CONVENZIONALE

$$\begin{aligned} [L] &= [Q_1^{\delta_1} Q_2^{\epsilon_1} Q_3^{\omega_1}] \\ [T] &= [Q_1^{\delta_2} Q_2^{\epsilon_2} Q_3^{\omega_2}] \\ [M] &= [Q_1^{\delta_3} Q_2^{\epsilon_3} Q_3^{\omega_3}] \end{aligned}$$

ESEMPIO: PORTATA DELLA VENA DI DISTACCO DA UNA LUCE A STRAMAZZO



$$Q = f(H, L, g)$$

$$\{L, T\} \rightarrow \text{BASE 2D}$$

(LA VISCOSITÀ μ NON INCIDE SU Q , PERCHÉ IL MOTO È ASSUNTO TURBOLENTO; INOLTRE È UN MOTO A SUPERFICIE LIBERA QUINDI NON SI HA UNA CONDOTTA CHE OPpone RESISTENZA AL TRASCIAMAMENTO DA PARTE DEL FLUIDO $\rightarrow \tau = 0 \rightarrow \mu = 0$)

ADIMENSIONALIZZO Q RISPETTO ALLE SUE VARIABILI H, g :

$$[H] = [L^1 T^0]$$

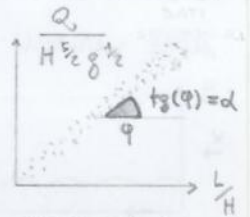
$$[g] = [L^1 T^{-2}]$$

$$[Q] = [L^3 T^{-1}]$$

$$\begin{cases} 3 = \alpha + \beta \\ -1 = -2\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{5}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{Q}{H^{\frac{5}{2}} g^{\frac{1}{2}}} = \alpha \left(\frac{L}{H} \right)$$

CON $\alpha = \text{const.}$ DA ESPERIENZA \rightarrow



$Q = f(3 \text{ VARIABILI}) \rightarrow$ SPAZIO A 4 DIMENSIONI
 $Q' = f(1 \text{ VARIABILE}) \rightarrow$ SPAZIO A 2 DIMENSIONI

$$Q = \alpha \frac{L}{H} (H^{\frac{5}{2}} \sqrt{gH}) = \alpha HL \sqrt{gH} \quad \text{DOVE } \alpha \text{ DIPENDE DAL TIPO DI STRAMAZZO (VALORI TABULATI)}$$

3.5) PROFILO DI VELOCITÀ IN UNA CORRENTE TURBOLENTO ($V = U$ NELLA DIREZIONE DELLA CORRENTE)

SE NEL CASO DI MOTO LAMINARE NON È STATO PARTICOLARMENTE DIFFICILE ARRIVARE A DEFINIRE IL PROFILO DI VELOCITÀ DI UN FLUIDO, NON POSSIAMO DIRE LA STESSA COSA NEL CASO DI MOTO TURBOLENTO. POTEVAMO INFATTI ASSUMERE RAGIONEVOLMENTE CHE, NEL MOTO LAMINARE, L'UNICA COMPONENTE DI VELOCITÀ NON NULLA FOSSE QUELLA DIRETTA COME LA TRAIETTORIA DEL MOTO x , OSSIA u , MENTRE AVEVAMO $v = w = 0$. INOLTRE IL GRADIENTE DI VELOCITÀ ERA GENERALMENTE MOLTO PRONUNCIATO SOPRATTUTTO ALLE ESTREMITÀ DEL DOMINIO, OSSIA DOVE LE CONDIZIONI AL CONTORNO MANIFESTAVANO IL LORO EFFETTO.

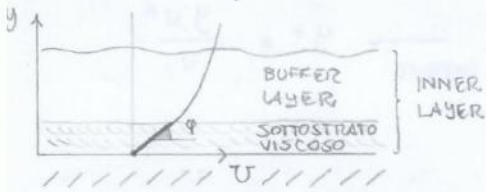
INTUITIVAMENTE POSSIAMO SUPPORRE CHE LA COMPLESSITÀ DELLE LEGGI DEL MOTO IN PRESENZA DI TURBOLENZE PRODUCA UNO SMOSSAMENTO DEI GRADIENTI DI VELOCITÀ RENDENDO IL PROFILO DI VELOCITÀ PIÙ OMOGENEO RISPETTO AL CASO DI MOTO LAMINARE. QUESTO, È BENE SOTTOLINEARLO, VALE SOLO PER LA COMPONENTE DEL CAMPO DI MOTO CHE È RESPONSABILE DEL TRASPORTO DI MASSA, NON PER LA QUOTAPARTE TURBOLENTO, E CI PORTA A DIRE CHE LE CONSIDERAZIONI CHE FAREMO DA QUI IN AVANTI SONO VALIDE UNICAMENTE PER IL PROFILO DELLA VELOCITÀ MEDIA DI UN FLUIDO IN MOTO TURBOLENTO.

TRA I DUE FENOMENI POSSIAMO COMUNQUE OSSERVARE CHE ESISTE UN ASPETTO IN COMUNE: LADDOVE IL FLUIDO ENTRA IN CONTATTO CON UNA PARETE, LA VELOCITÀ DELLE PARTICELLE SI ASSUME IDENTICAMENTE NULLA.

AD OSSERVARE E STUDIARE IL PROFILO DI VELOCITÀ DI UN FLUIDO IN MOTO TURBOLENTO FU UN CERTO MILLIKAN, IL QUALE EVIDENZIÒ CHE NON TUTTI GLI STRATI, DETTI "LAYER", DI UNA CORRENTE TURBOLENTO PRESENTINO LO STESSO COMPORTAMENTO, NE' IN TEORIA NE' NELLA PRATICA.

TALI STRATI SONO SOVRAPPosti GLI UNI AGLI ALTRI E PARTONO DA UNA PARETE SUPPOSTA LOGICAMENTE FERMA, RISPETTO ALLA QUALE LA CORRENTE È IN CONDIZIONE DI MOTO RELATIVO.

DA CIÒ SI CAPISCE COME LA VISCOSITÀ SIA IMPORTANTE IN QUESTO SOTTOSTRATO, IN QUANTO COSTITUISCE UN OSTACOLO ALLE TURBOLENZE E LA CHIAVE PER DEFINIRE IL PROFILO DI VELOCITÀ MEDIA, CHE, COME APPARE CHIARO DALLA PRECEDENTE RELAZIONE, È PROPORZIONALE AD y IN MODO LINEARE CON UN FATTORE $\frac{\tau_0}{\mu}$. VA DA SÈ CHE IN TUTTO CIÒ ABBIAMO ASSUNTO $\mu = \text{cost.}$.

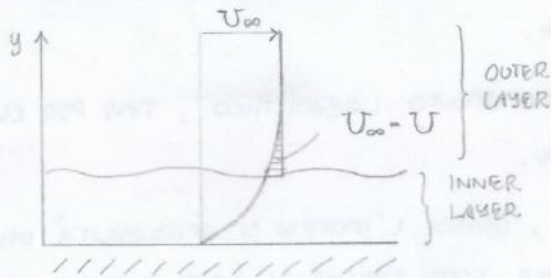


$$\phi = \arctg\left(\frac{\tau_0}{\mu}\right)$$

OUTER LAYER (STRATO PIÙ ESTERNO)

SPOSTIAMO L'ATTENZIONE SULLO STRATO DI FLUIDO PIÙ LONTANO DALLA PARETE SOLIDA, OSSIA OLTRE L'INNER LAYER. NELL' OUTER LAYER LA VISCOSITÀ μ NON CONTA PIÙ PERCHÉ SIAMO IN PIENA TURBOLENZA E LA SCALA DELLA CORRENTE δ NON È PIÙ TRASCURABILE.

IN QUESTO CASO, VISTO CHE, SPERIMENTALMENTE (A FINE DI CORRENTE IN CONDOTTA CHIUSA → DOPPIA PARETE DI CONFINAMENTO), PER $y \rightarrow \infty$ SI HA CHE $U \rightarrow U_\infty \cong \text{cost.}$, ANZICHÉ CERCARE L'ESPRESSIONE DI U CERCHEREMO QUELLA DELLA DIFFERENZA $U_\infty - U$, ANCHE DETTA "DIFETTO DI VELOCITÀ".



$$U_\infty - U = g(y, \delta, \rho, \tau_0)$$

$$\mu^* = \sqrt{\frac{\tau_0 \rho}{\rho}}$$

VELOCITÀ DI ATTRITO

$$\frac{U_\infty - U}{\mu^*} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F(\xi)$$

A QUESTO PUNTO MILLIKAN SI DOMANDA SE NON POSSA ESISTERE UNA ZONA DI SOVRAPPOSIZIONE TRA INNER E OUTER LAYER, OSSIA UNA FASCE ANCHE PIUTTOSTO SOTTILE NELLA QUALE SIANO PERÒ ENTRAMBE VALIDE LE ESPRESSIONI CHE DEFINISCONO IL PROFILO DI VELOCITÀ MEDIA DEL FLUIDO.

IN QUESTO MODO, SE FOSSE VERIFICATA L'ESISTENZA DI UNA ZONA DI QUESTO TIPO, SI POTREBBERO IVI TRASCURARE GLI EFFETTI SIA DI ν SIA DI δ .

OVERLAP (ZONA DI SOVRAPPOSIZIONE)

MOLTIPLICANDO PER $\frac{y}{\mu^*}$

N.B. $\frac{dy_+}{dy} = \frac{\mu^*}{\nu}$

$\frac{d\xi}{d\xi} = \frac{1}{\delta}$

$$\left. \begin{aligned} \text{I) } \frac{dU}{dy} &= \frac{\mu^{*2}}{\nu} \frac{d\xi}{dy_+} \\ \text{II) } \frac{dU}{dy} &= \frac{\mu^*}{\delta} \frac{dF}{d\xi} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\mu^{*2}}{\nu} \frac{d\xi}{dy_+} = \frac{\mu^*}{\delta} \frac{dF}{d\xi}$$

$(\mu^* \cdot \frac{dy_+}{dy}) \quad (\mu^* \cdot \frac{d\xi}{dy})$

$$y_+ \frac{d\xi}{dy_+} = \xi \frac{dF}{d\xi} = \frac{1}{K} = \text{cost.}$$

↳ COSTANTE DI VON KÁRMÁN

PERCHÉ DUE FUNZIONI $\frac{d\xi}{dy_+} = \frac{dF}{d\xi}$ DI DUE DIVERSE VARIABILI y_+ E ξ POSSANO ESSERE UGUALI DEVONO INFATTI ESSERE COSTANTI; INTEGRANDO SI OTTENGONO LE SEGUENTI ESPRESSIONI:

| | | | |
|-------------------------------------|------------------|---|---|
| $f(y_+) = \frac{1}{k} \ln(y_+) + A$ | INNER LAYER → | $\frac{U}{\mu^*} = \frac{1}{k} \ln(y_+) + A$ | |
| $F(\xi) = \frac{1}{K} \ln(\xi) + B$ | OUTER LAYER → | $\frac{U_\infty - U}{\mu^*} = \frac{1}{K} \ln(\xi) + B$ | CON $A \cong 5$ OTTENUTE $B \cong 1$ PER VIA $K \cong 0,4$ EMPIRICA |

RICHIAMIAMO ORA BREVEMENTE GLI STRUMENTI TEORICI CHE ABBIAMO CHIESTO IN CAUSA NELLO STUDIO DELLA TURBOLENZA, RICORDANDO CHE QUESTA È UN PARTICOLARE TIPO DI MOTO:

- ⊗ EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES MEDIATA → TERMINE NON LINEARE: $\rho \overline{v_i v_j}$ = TENSIONI DI REYNOLDS
- ⊗ EQUAZIONE GLOBALE DELLA DINAMICA MEDIATA → TERMINE NON LINEARE: $\Delta \bar{H}$ ⊗ ⊗
- ⊗ ESPERIMENTI + TEOREMA DI BUCKINGHAM (o "π") ✓

3.6) CORRENTI CILINDRICHE A SEZIONE CIRCOLARE

ABBANDONIAMO LE EQUAZIONI TEORICHE PER RICAVALRE SOLUZIONI SPERIMENTALI DA CUI DEDURRE LE DISSIPAZIONI DA RESISTENZA AL MOTO DEI FLUIDI.


POICHÉ LA TENSIONE ALLA PARETE VALE $\tau_0 = \gamma R J$, AVENDO SCELTO DI ADOTTARE SOLO SEZIONI CIRCOLARI ($R_0 = \frac{D}{4}$), L'UNICA VARIABILE CHE INDUCE UNA VARIAZIONE DI τ , γ A PARTE, È LA PENDENZA MOTTRICE $J = -\frac{\partial H}{\partial s}$. ESSA RAPPRESENTA LA VARIAZIONE NEGATIVA DI ENERGIA LUNGO LA TRAIETTORIA DI UNA CORRENTE PER UNITÀ DI PESO DI FLUIDO. L'ENERGIA SPECIFICA CEDUTA DAL FLUIDO ALLA PARETE SI TRASFORMA COSÌ IN CALORE.

J È UN PARAMETRO DELLA CORRENTE CHE DIPENDE DA MOLTE VARIABILI: ALCUNE SONO GEOMETRICHE, ALTRE SONO FISICHE, ALTRE ANCORA IDRAULICHE. PER OGNUNA DI QUESTE FISSIAMO LA CONDIZIONE CHE SONO VARIABILI GLOBALI. E PROVIAMO A INTUIRNE ALCUNE:

$$J = J(Q, U, D, \dots) \text{ PER ESPERIENZA EMPIRICA}$$

POICHÉ NON SIAMO IN GRADO DI STABILIRE A PRIORI TUTTE LE VARIABILI DI J , PROVVEDIAMO A DESCRIVERE LA DISSIPAZIONE IN TERMINI DI "INDICE DI RESISTENZA" λ , IL QUALE SI RIFERISCE AD UNA CORRENTE CIRCOLARE DI DIAMETRO D , VELOCITÀ MEDIA U E CADENTE J :

$$\lambda = \frac{JD}{U^2/2g} \quad \text{CON} \quad U = \frac{Q}{A} \quad \left[\lambda \right] = [-]$$



$\lambda \approx 1$ NEL MOTO TURBOLENTO

ABBIAMO USATO IL TEOREMA π PER ADIMENSIONALIZZARE IL TERMINE JD CON UNA MISURA METRICA CARATTERISTICA DELLA CORRENTE, LA QUALE È BASATA SU DATI NOTI DELLA CORRENTE: $Q, A \rightarrow U \rightarrow \frac{U^2}{2g}$

JD = ENERGIA DISSIPATA PER UNITÀ DI PESO

$U^2/2g$ = ENERGIA CINETICA PER UNITÀ DI PESO

L'IPOTESI DI SEZIONE CIRCOLARE È FRUTTO DI UNA SCELTA DI COMODO PERCHÉ CONSENTE DI OTTIMIZZARE IL RAGGIO IDRAULICO E QUINDI AUMENTARE LA PORTATA DI FLUIDO; TUTTAVIA POSSIAMO UTILIZZARE LA FORMULA CHE ESPRIME λ ANCHE PER ALTRE SEZIONI SENZA COMMITTERE ERRORI GROSSOLANI.

TORNIAMO PER UN ATTIMO AL MOTO LAMINARE E RICORDIAMO L'ESPRESSIONE DELLA VELOCITÀ MEDIA PER LE SEZIONI CON IL RAGGIO IDRAULICO MIGLIORE, OSSIA IL CERCHIO, E PEGGIORE, OSSIA IL RETTANGOLO SOTTILE:

CERCHIO $U = \frac{1}{32} \frac{\gamma J}{\mu} D^2 \rightarrow J = \frac{32 \mu}{\gamma D^2} U \rightarrow \lambda = \left(\frac{32 \mu}{\gamma D^2} U \right) \cdot D / \frac{U^2}{2g} = \frac{64 \mu}{\rho U D} =$

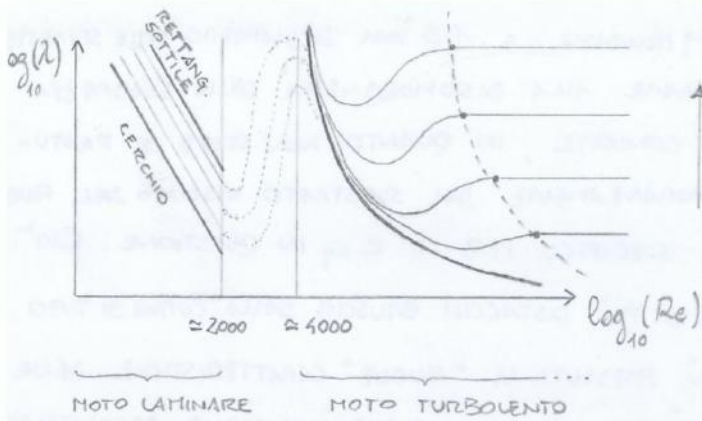


DIAGRAMMA DI NIKURADSE (1930)

CURVA DI TRANSIZIONE DA $\lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$
 A $\lambda = \lambda(\frac{\epsilon}{D})$

VELOCITÀ DI ATTRITO
 $Re^* = \frac{\epsilon u^*}{\nu} = 70$

SE Re NON È PARTICOLARMENTE ALTO (≤ 2000) LA VISCOSITÀ DELL' OMONIMO SOTTOSTRATO DI FLUIDO INIBISCE L' EFFETTO DELLA SCABREZZA SULLA VELOCITÀ MEDIA, LA QUALE È UGUALMENTE MODESTA.

MAN MANO CHE Re SALE LA VISCOSITÀ PERDE LA PROPRIA IMPORTANZA E LE RESISTENZE AL MOTO PASSANO GRADATAMENTE ALLA SCABREZZA CHE ROMPE IL SOTTOSTRATO VISCOSO E LO TRASCINA VIA.

SE $Re \geq 4000$ INIZIALMENTE TUTTO PROCEDE COME SE LA CONDOTTA FOSSE LISCIA (CURVA DI TUBO LISCIO); ANALITICAMENTE POSSIAMO DIRE CHE $\frac{\epsilon}{D} \rightarrow 0$, QUINDI $\lambda \equiv \lambda(Re)$.

SE Re CRESCE ANCORA, MAN MANO DIVENTA SEMPRE PIÙ SIGNIFICATIVO IL CONTRIBUTO DELLA SCABREZZA ED IN PARTICOLARE DEL RAPPORTO TRA QUESTA E IL DIAMETRO DELLA CONDOTTA, $\frac{\epsilon}{D}$; CI

SI ALLONTANA DALLA CURVA DI TUBO LISCIO E SI ENTRA IN UNA ZONA DI TRANSIZIONE IN CUI VALE CHE $\lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$. PER ULTIMO ASSIEME IL CASO IN CUI SE Re TRENDE A VALORI MOLTO ELEVATI,

LE CURVE DI λ PERDONO LA LORO DIPENDENZA DAL NUMERO DI REYNOLDS OLTRE UNA CERTA SOGLIA CHE È PROPORZIONALE AL RAPPORTO $\frac{\epsilon}{D}$; IN BREVE, QUANDO IL

TUBO SI COMPORTA COME SE FOSSE TOTALMENTE E SIGNIFICATIVAMENTE SCABRO $\lambda = \text{cost.}$ RISPETTO A Re , TANTO PIÙ $\lambda \equiv \lambda(\frac{\epsilon}{D})$; SI PARLA DI MOTO PURAMENTE TURBOLENTO.

RICORDANDO IL SIGNIFICATO DEL NUMERO DI REYNOLDS, IL QUALE PER QUALSIASI TIPO DI MOTO INDICA IL RAPPORTO TRA L'EFFETTO DELLE FORZE INERZIALI E QUELLO DELLE FORZE VISCOSE, POSSIAMO DIRE CHE TANTO PIÙ SONO PREVALENTI LE PRIME TANTO MENO LA RESISTENZA AL MOTO DIPENDE DALLA TURBOLENZA IN SE', BENÌ PIUTTOSTO DALLA SCABREZZA DELLA CONDOTTA IN CUI SI MUOVE IL FLUIDO.

QUANTO DETTO FINO AD ORA VALE SE CONSIDERIAMO UN TIPO DI SCABREZZA ARTIFICIALE. MOODY CONVERTE LA SCABREZZA DI OGNI MATERIALE IN UN NUMERO EQUIVALENTE CHE È MULTIPLO DEI DIAMETRI DELLE SFERETTE USATE DA NIKURADSE. IN SOSTANZA, ANZICHÈ USARE LA SCABREZZA ARTIFICIALE E, MOODY RIFORMULA LE CURVE DEL TUBO SCABRO IMPIEGANDO LA SCABREZZA EFFETTIVA UEGALE A QUELLA CHE SI SANEBBE POTUTA OTTENERE APPLICANDO AL TUBO LISCIO UNA CERTA SCABREZZA EQUI-

TUBO SCABRO : $\lambda = \lambda \left(\frac{\epsilon}{D} \right)$

NIKURADSE $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,71 D} \right)$

IN MOLTI PROBLEMI DI INGEGNERIA CIVILE SI LAVORA QUANDO Re NON INFLUISCE PIÙ SUL VALORE DI λ , OSSIA NELLA ZONA DI MOTO PURAMENTE TURBOLENTO. PER VENIRE INCONTRO ALLE ESIGENZE PRATICHE DEI PROGETTISTI SONO STATE RICAVATE ALCUNE FORMULE EMPIRICHE CHE DISCENDONO DA UN'UNICA ESPRESSIONE MOLTO SEMPLICE DELLA VELOCITÀ MEDIA DI UNA CORRENTE IN MOTO UNIFORME PURAMENTE TURBOLENTO ALL'INTERNO DI UNA CONDOTTA SCABRA.

$V = \chi \sqrt{R J}$ FORMULA DI CHEZY
 ↳ COEFFICIENTE CHE RACCHIUDE LA SCABREZZA

$\chi = \frac{87}{1 + \frac{Y}{\sqrt{R}}}$ BAZIN $\chi = c R^{1/6}$ GAUCKLER - STRICKLER

$\chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}}$ KUTTER $\chi = \frac{1}{n} R^{1/6}$ MANNING (γ, m, c, n : COEFFICIENTI TABULATI)

PER CONCLUDERE QUESTO PARagraFO, RICORDIAMO CHE SIAMO PARTITI VOLENDO TROVARE UNA ESPRESSIONE DELLA PERDITA DI CARICO J PRINCIPALMENTE RISPETTO ALLE VARIABILI Q, V, D , LE QUALI RIASSUMONO IL CARATTERE GEOMETRICO (D), CINEMATICO (V) E IDRAULICO (Q) CHE SI ASSOCIA AL VALORE DI J . ORA È POSSIBILE DETERMINARE CON QUALI LEGGI DI PROPORZIONALITÀ J SEGUA LE VARIAZIONI DELLE SUDETTE GRANDEZZE NELLE DIVERSE ZONE DEL DIAGRAMMA DI MOODY:

MOTO LAMINARE $\rightarrow \lambda = \frac{c}{Re} \rightarrow \frac{2gDJ}{U^2} = \frac{cV}{UD} \rightarrow J \propto \frac{U}{D^2} = \frac{Q}{D^4}$

MOTO TURBOLENTO SU SUPERFICIE LISCIA $\rightarrow \lambda = \frac{c}{Re^{1/4}} \rightarrow J \propto \frac{U^{1,75}}{D^{1,25}} = \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}}$

MOTO TURBOLENTO SU SUPERFICIE SCABRA $\rightarrow \lambda = \text{cost.} \rightarrow J \propto \frac{U^2}{D} = \frac{Q^2}{D^5} \rightarrow J = \beta \frac{Q^2}{D^5}$ DARCY
 (VARIA SOLO IN FUNZIONE DI ϵ/D)
 DOVE $\beta = \beta \left(\frac{1}{D^{0,33}} \right)$
 $J = \beta' \frac{Q^2}{D^{5,33}}$

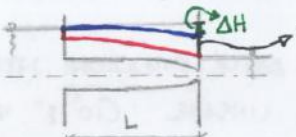
QUALORA A QUESTO PROBLEMA SI AGGIUNGA L'EFFETTO DELLA SCORREZZA, BISOGNERÀ RISCRIVERE LA PERDITA DI CARICO J COME $J = \beta \frac{Q^2}{D^5}$ (IN CASO DI MOTO PURAMENTE TURBOLENTO). NE SEGUE CHE

$$\Delta z = \left(\beta \frac{Q^2}{D^5} \right) L + \alpha \frac{U^2}{2g} \rightarrow 5 \text{ GRANDENZE COINVOLTE} \begin{cases} \beta, R, D, L \\ U \end{cases} \rightarrow \text{NOTE 4 RICOVO LA QUINTA!}$$

$\beta \uparrow, D = \text{cost.}, L = \text{cost.}, Q \downarrow \Rightarrow U \downarrow \Rightarrow \alpha \frac{U^2}{2g} \downarrow \Rightarrow \text{L.C.T.} \downarrow$
 $\Rightarrow \text{L.C.P.} = \text{cost.}$

AL LIMITE PER $\beta \rightarrow \infty \Rightarrow Q \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \frac{U^2}{2g} \rightarrow 0 \Rightarrow H \equiv h!$

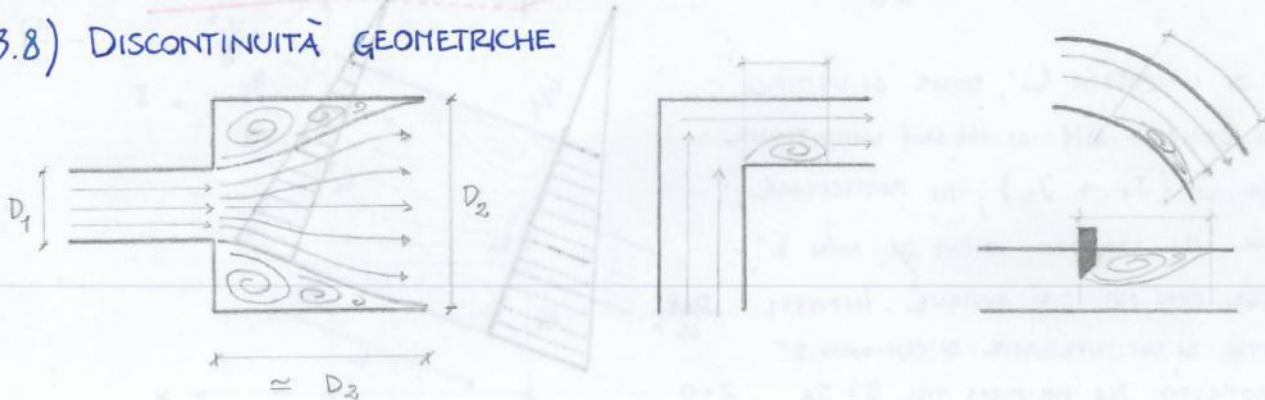
IN GENERALE QUALSiasi SITUAZIONE CHE COMPORTI UNA VARIAZIONE DEL TERMINE CINETICO $\alpha \frac{U^2}{2g}$ FA SÌ CHE LA DISSIPAZIONE DI ENERGIA J NON SIA COSTANTE, BENSÌ UNA FUNZIONE DELLA POSIZIONE LUNGO IL PERCORSO DELLA CORRENTE:

$$\Delta H = \int_0^L J(x) dx$$


$\alpha \frac{U^2}{2g} \neq \text{cost.}$ N.B. IN CASO DI MOTO UNIFORME $\begin{cases} J = \text{cost.} \\ \Delta H = LJ \end{cases}$

È IMPORTANTE SOTTOLINEARE INVECE CHE, A PARITÀ DI LUNGHERA L , INTESA COME LUNGHERA EFFETTIVA (E NON COME PROIEZIONE SU UN PIANO ORIZZONTALE!), LA PENDENZA DELLA CONDOTTA NON CONTA, IN QUANTO ΔH , CHE NEL CASO DI COMPORTAMENTO LINEARE VADE LJ , SI DISTRIBUIREBBE SOLO IN MODO DIVERSO TRA IL CONTRIBUTO POTENZIALE (α) E DI PRESSIONE (β/g), MA IL BILANCIO TOTALE, E QUINDI LE DUE UNDE DI CARICO, NON CAMBIANO.

3.8) DISCONTINUITÀ GEOMETRICHE



LE DISCONTINUITÀ GEOMETRICHE INNESCANO LE DISSIPAZIONI ENERGETICHE LOCALI, LE QUALI AL DI LÀ DELL'ESATTO MODO IN CUI SI SVILUPPANO, COMPORTANO, COME CI ASPETTIAMO, UNA PERDITA DI CARICO.

$$\Delta H = \xi \frac{U_v^2}{2g}$$

ξ = COEFFICIENTE LEGATO ALLA GEOMETRIA DEL CASO
 U_v = VELOCITÀ MEDIA → CONVENZIONALMENTE SI ADOTTA QUESTA PER ESPRIMERE ΔH VALLE DELLA DISCONTINUITÀ

BRUSCO ALLARGAMENTO - DISSIPAZIONE DI BORDA

LA DISSIPAZIONE ΔH SI CONCENTRA NELLE ZONE DOVE LA CORRENTE È COSTRETTA AD ALLARGARSI. IN TALI ZONE LA VELOCITÀ MEDIA SI ABBASSA E, FOCALIZZANDO IL COMPORTAMENTO DELLE PARTICELLE DI FLUIDO, SI PUÒ OSSERVARE CHE IN PROSSIMITÀ DELLA DISCONTINUITÀ GEOMETRICA QUESTE PRESENTANO UNA DIVERSA QUANTITÀ DI ROTAZIONE: ESSA INFATTI DIMINUISCE MAN MANO CHE SI OSSERVANO QUELLE POSIZIONATE OLTRE L'ALLARGAMENTO DELLA CORRENTE. LA CONSEGUENZA IMMEDIATA E VISIBILE HA-

$$-A_1 \left[(z_2 - z_1) - \frac{(P_1 - P_2)}{\gamma} \right] + \left(\frac{A_1}{g} \right) [Q(U_1 - U_2)] = 0$$

$$\left[\underbrace{\left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right)}_{h_2} - \underbrace{\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right)}_{h_1} \right] = Q \left[\frac{U_1 - U_2}{g} \right] > 0 \text{ PERCHÉ } U_1 > U_2 \Rightarrow h_2 - h_1 > 0 \Rightarrow h_2 > h_1$$

IL CARICO PIEZOMETRICO RISALE LUNGO L

$$\Delta H = \left[\underbrace{\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right)}_{H_1} + \underbrace{\left(\alpha \frac{U_1^2}{2g} \right)}_{\approx -1 \text{ TURBOLENTO}} \right] - \left[\underbrace{\left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right)}_{H_2} + \underbrace{\left(\alpha \frac{U_2^2}{2g} \right)}_{\approx -1 \text{ TURBOLENTO}} \right] =$$

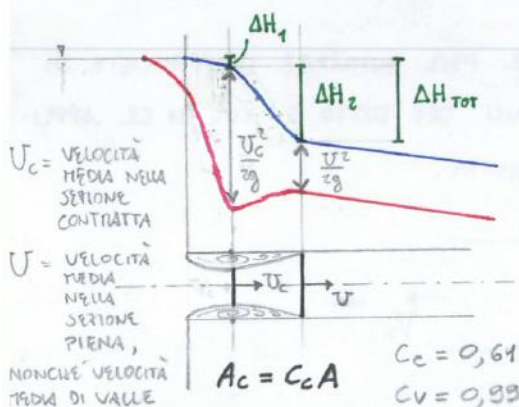
$$= (h_1 - h_2) + \left[\frac{1}{2g} (U_1^2 - U_2^2) \right] = \frac{Q}{Ag} (U_2 - U_1) + \left[\frac{1}{2g} (U_1^2 - U_2^2) \right] =$$

$$\Delta H = \frac{U_2}{g} (U_2 - U_1) + \frac{1}{2g} (U_1^2 - U_2^2) = \frac{1}{2g} (2U_2^2 - 2U_1U_2 + U_1^2 - U_2^2) = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \xi \frac{U_2^2}{2g}$$

DOVE ξ È UN COEFFICIENTE CHE PERMETTE DI ESPRIMERE ΔH IN FUNZIONE DELLA VELOCITÀ DI VALLE, CIOÈ DI U_2 , DIPENDENTE COME È NATURALE DALLA GEOMETRIA DEL SINGOLO CASO.

ABBIAMO COSÌ DIMOSTRATO, COME AVEVAMO IMPLICATO INIZIALMENTE, CHE ΔH , OVVERO IL CARICO DISSIPATO NEL BRUSCO ALLINEAMENTO, DIPENDE UNICAMENTE DA UNA VARIATIONE DELLA VELOCITÀ TRA LE DUE SEZIONI ESTERNE CHE DELIMITANO IL TRATTO L IN CUI SI CONCENTRA LA DISSIPAZIONE. COME ABBIAMO GIÀ SOTTOLINEATO, QUESTA RELAZIONE TRA ΔH E $\frac{U_2^2}{2g}$ NON È RIGOROSAMENTE VALIDA, MA LO È A FINI DI INTERESSE INGEGNERISTICO.

BRUSCO RESTRINGIMENTO



LA PERDITA DI CARICO COMPRESSIVA ΔH_{TOT} È COMPOSTA DA DUE SUCCESSIVE DISSIPAZIONI LOCALIZZATE:

$\Delta H_1 \Rightarrow$ DISSIPAZIONE DOVUTA ALLE RESISTENZE INCONTINUE DALLA CORRENTE ALL'INBOCCO

$\Delta H_2 \Rightarrow$ DISSIPAZIONE DI BORDA

RICORDIAMO CHE LA VELOCITÀ DI UN FLUIDO CARATTERIZZATO DAL CARICO TOTALE H È DA UN MOTO DI EFFLUSSO DA UNA LUCE A BATTENTE, COME QUELLA DELLA CONDOTTA QUI RAPPRESENTATA VALE $U_c = C_v \sqrt{2gH}$, DOVE C_v È IL COEFFICIENTE DI VARIATIONE DELLA VELOCITÀ CHE TIENE CONTO DEGLI ATTRITI VICINO ALL'INBOCCO, MENTRE LA RADICE IDENTIFICA LA VELOCITÀ TORRICELLIANA U_{torr} .

$$\Delta H_1 = \frac{U_{torr}^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g}$$

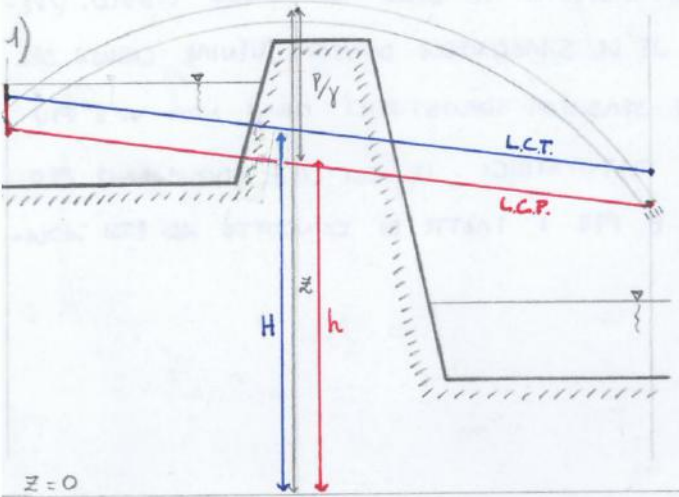
$$= \frac{U_c^2}{2g} \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \approx \frac{U_c^2}{2g} (1 - C_v^2)$$

$$= \frac{U^2}{2g} \frac{(1 - C_v^2)}{C_c^2} = 0,1 \frac{U^2}{2g}$$

$$\Delta H_2 = \frac{(U_c - U)^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \approx 0,4 \frac{U^2}{2g}$$

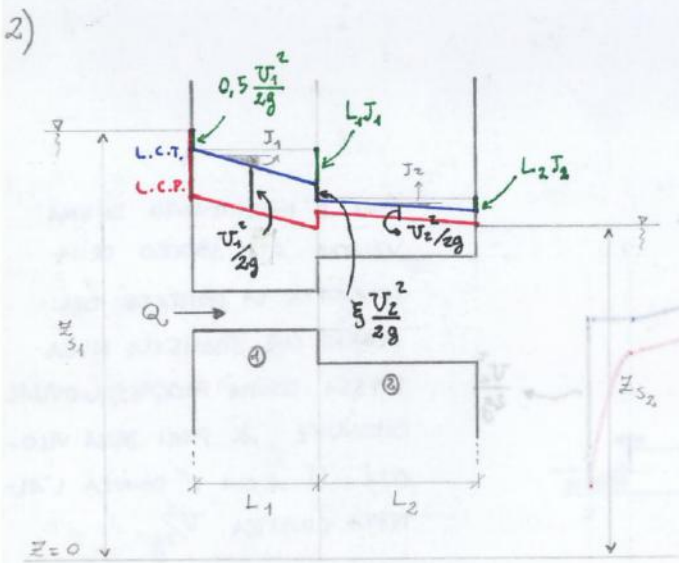
$$\Delta H_{TOT} = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0,5 \frac{U^2}{2g}$$

APPLICAZIONI



L'ACQUA NECESSITA DI UN INNESCO, POI SI MUOVE SPONTANEAMENTE.

NELLA CONDOTTA L'ACQUA E' IN DEPRESSIONE PERCHE' IN TUTTI I PUNTI E' $h < \bar{z}$, CIOE' $P/Y < 0$. SE $P < 0$ LA CONDOTTA INIZIA A RISUCCHIARE ANCHE ARIA E QUESTO PRODUCE LA FORMAZIONE DI BOLLE.

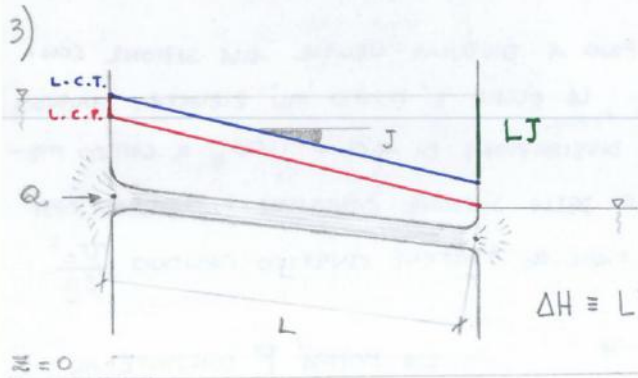


$$U_1 = \frac{Q}{A_1}, \quad J_1 = \beta_1 Q^2 D_1^{-n}$$

$$U_2 = \frac{Q}{A_2}, \quad J_2 = \beta_2 Q^2 D_2^{-n}$$

$$\Delta z_s = z_{s1} - z_{s2} = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + L_1 J_1 + \xi \frac{U_2^2}{2g} + L_2 J_2 + \frac{U_c^2}{2g}$$

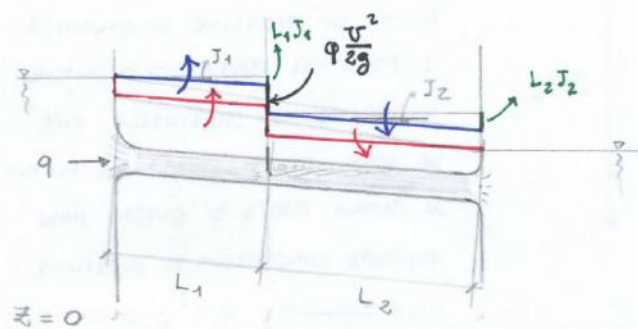
$$= \Delta H + \frac{1}{2g} [0,5 U_1^2 + (\xi + 1) U_c^2]$$



TRASCURIAMO LE DISSIPAZIONI LOCALIZZATE ALL'IMBOCO DELLA CONDOTTA CON I DUE SERBATOI. PER QUESTO LI RAPPRESENTIAMO CON GLI SPIGOLI STUSSATI.

LA PORTATA INIZIALE Q , OSSIA LA MASSIMA POSSIBILE IN DATE CONDIZIONI DI CARICO, FA SI CHE IL FLUIDO SCORRA NELLA CONDOTTA LIBERAMENTE, DISSIPANDO ENERGIA SOLO PER VIA DELLA SCABERIZIA, DEL DIAMETRO DELLA CONDOTTA E DELLA PORTATA STESSA.

INSERIAMO PARZIALMENTE UNA SARACINESCA PER REGOLARE LA PORTATA CHE PASSA NELLA CONDOTTA. ESSA, OLTRE A RIDURRE LOCALMENTE LA SEZIONE INDUCE UNA DISSIPAZIONE LOCALE CHE, COME SAPPIAMO, DIPENDE DA $\frac{U^2}{2g}$. IL TERMINE CINETICO COMPRESSIVO DIMINUISCE PERCHE' LA PORTATA PASSANTE SI E' ABBASSATA, QUINDI $\frac{U^2}{2g}$ SCENDE NON MENO CHE LA SARACINESCA OCCLUDE LA CONDOTTA SEMPRE DI PIU'. MA LA PERDITA DI CARICO LOCALE AUMENTA SIGNIFICATIVAMENTE IN VIRTU' DELLA INERZIONE VELOCITA' CHE SI REGISTRA IMMEDIATAMENTE A VALLE DELLO STROZZAMENTO.



INDICHIAMO CON ϕ IL COEFFICIENTE CHE LEGA L'ALTEZZA CINETICA ALLA DISSIPAZIONE LOCALE.

$$\Delta H = L_1 J_1 + \phi \frac{U^2}{2g} + L_2 J_2$$

PROBLEMI PRATICI RELATIVI ALLE LUNGHE CONDOTTE

1) GENERALITÀ

NELLA PRATICA DEGLI IMPIANTI IDRAULICI CAPITA SOVENTE DI INCONTRARE DELLE CONDOTTE IN PRESSIONE DI LUNGHEZZA RILEVANTE RISPETTO AL DIAMETRO (DELL'ORDINE CIOE' DI QUALCHE MIGLIAIO DI DIAMETRI): E' IL CASO DELLE ADUTTRICI DEGLI ACQUEDOTTI PER IL TRASPORTO DELL'ACQUA DALLA FONTE DI APPROVVIGIONAMENTO AL CENTRO DI UTILIZZAZIONE, OPPURE DEGLI OLEODOTTI PER IL CONVOGLIAMENTO DEI PRODOTTI PETROLIFERI DAL LUOGO DI PRODUZIONE A QUELLO DI CONSUMO.

IN QUESTE CHE VENGONO USUALMENTE DENOMINATE "LUNGHE CONDOTTE", LE PERDITE LOCALIZZATE (ALL'INBOCCO, PER CAMBIAMENTO DI DIAMETRO O DI DIREZIONE, ALLO SBocco, ...) RISULTANO, DI REGOLA, DI ENTITÀ TRASCURVABILE SE CONFRONTATE CON QUELLE CONTINUE, DOVUTE ALLA RESISTENZA DELLE PARETI, COSÌ CHE NEI CALCOLI E' SUFFICIENTE TENERE CONTO ESCLUSIVAMENTE DI QUESTE ULTIME.

LA RELATIVAMENTE MODESTA VELOCITÀ DEL LIQUIDO DEFLENTE IN QUESTE CONDOTTE (NON SUPERIORE A QUALCHE METRO AL SECONDO) RENDE INOLTRE UECITO TRASCURVARE L'ALTEZZA CINETICA RISPETTO AI DISLIVELLI PIEZOMETRICI E, PERCIO', CONSIDERARE COINCIDENTI FRA LORO LA LINEA DEI CARICHI TOTALI E LA LINEA DEI CARICHI PIEZOMETRICI: L'UNICA LINEA COSÌ OTTENUTA, IN BASE ALLA QUALE VENGONO MISURATE LE PRESSIONI NEI SINGOLI PUNTI DELLA CONDOTTA, VIENE CHIAMATA SEMPLICEMENTE "PIEZOMETRICA".

E' OPPORTUNO RICAVARE, A MEZZO DI UN CALCOLO ELEMENTARE DI PRIMA APPROSSIMAZIONE, LA LUNGHEZZA EFFETTIVA CHE UNA CONDOTTA DEVE AVERE PER POTER ESSERE INSERITA IN QUESTA CATEGORIA DELLE LUNGHE CONDOTTE. ACCETTANDO UN ERRORE DEL 4%, GIUSTIFICATO, TRA L'ALTRO, DALLE INCERTEZZE INSITE NELLA VALUTAZIONE DELLE PERDITE DI CARICO CONTINUE.

$$\frac{V^2}{2g} \leq 0.04 L J$$

$$L = nD$$

$$J = \frac{\lambda V^2}{2gD}$$

$$\frac{V^2}{2g} \leq 0.04(nD) \left(\frac{\lambda V^2}{2gD} \right)$$

$$\rightarrow 1 \leq 0.04 \lambda n \rightarrow n \geq \frac{25}{\lambda}$$

$$\langle \lambda \rangle = 0.025 \downarrow$$

$$L \geq 1000 D$$

INDICE DI RESISTENZA (NIKURADSE, MOODY)

ASSUMENDO QUINDI UN VALORE MEDIO PER L'INDICE DI RESISTENZA λ PARI A $\langle \lambda \rangle = 0.025$, SI RICHIEDE DI VERIFICARE CHE IL FATTORE DI PROPORZIONALITÀ TRA DIAMETRO E LUNGHEZZA SIA

QUALORA LA PORTATA IN ARRIVO Q SIA COMPLETAMENTE DISTRIBUITA LUNGO IL PERCORSO ($Q = P$) SI OTTIENE:

$$H_B = H_A - \frac{1}{3} \beta Q^2 D^{-n} L = H_A - \frac{1}{3} L J_A \quad \text{CONDOTTA "CIECA" (PORTATA FINALE } Q-P=0)$$

IN QUESTO CASO LA PERDITA LUNGO IL TRONCO AB È PARI AD UN TERZO DI QUELLA CHE SI VERIFICHEREBBE NELLA STESSA CONDOTTA PERCORSA PER TUTTA LA SUA LUNGHEZZA DALLA PORTATA INIZIALE Q .

ALLO SCOPO DI RENDERE PIÙ SEMPLICI E RAPIDI I CALCOLI SIA DI VERIFICA SIA DI DIMENSIONAMENTO DELLE RETI, È IN GENERALE CONVENIENTE SOSTITUIRE AL TRONCO CON DISTRIBUZIONE LUNGO IL PERCORSO UN TRONCO EQUIVALENTE DI EGUAL LUNGHEZZA E DIAMETRO CON EROGAZIONI CONCENTRATE AI DUE ESTREMI, DI VALORE TALE DA COMPORTARE UNA PERDITA DI CARICO COMPRESSIVA IDENTICA A QUELLA EFFETTIVA.

INDICATA CON $Q - \alpha P$ LA PORTATA CONCENTRATA ALL' ESTREMO DI MONTE DEVE ESSERE:

$$Q^2 + \frac{P^2}{3} - QP = (Q - \alpha P)^2$$

DA CUI SI RICOVA, SCARTANDO LA SOLUZIONE PER CUI RISULTA $\alpha > 1$ E PONENDO $\frac{Q}{P} = \delta$:

$$\alpha = \delta - \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{3} - \delta} \quad \forall \delta \geq 5 \rightarrow \alpha \cong 0,5$$

IN CIÒ CHE SEGUE AMMETTEREMO CHE DETTA SOSTITUZIONE SIA SEMPRE GIÀ STATA EFFETTUATA E PERCIÒ TRATTEREMO SOLTANTO LE SITUAZIONI CON EROGAZIONI CONCENTRATE AI NODI DI OGNI RETE.

3) PROBLEMI DI VERIFICA DEL FUNZIONAMENTO DEI SISTEMI DI CONDOTTE

SIA ASSEGNATO UN QUALSIASI SISTEMA DI CONDOTTE PER IL QUALE SONO NOTI I SEGUENTI ELEMENTI:

- LE QUOTE H_i (CHE SI AMMETTONO COSTANTI) DEI PELI LIBERI NEI SERBATOI CHE ALIMENTANO IL SISTEMA O SONO ALIMENTATI DA ESSO;
- LE LUNGHEZZE L_i , I DIAMETRI D_i E LA SCABINEZZA, INTESA AD ESEMPIO NEI PARAMETRI DELL'ESPRESSIONE MONOTONIA DI J , OSSIA β_i E n_i , DEGLI m RAMI DI CONDOTTE CHE FORMANO IL SISTEMA; SI NOTI CHE CON IL TERMINE "RAMO" SI VUOLE ESPRIMERE UN TRATTO DI CONDOTTA AVENTE PORTATA Q_i E DIAMETRO D_i COSTANTI, AVEENDO INFATTI AGENITO CHE LA PORTATA NON CAMBIA LUNGO IL PERCORSO TRA DUE NODI SUCCESSIVI, POICHÉ NON SI HANNO EROGAZIONI DISTRIBUITE, BENSÌ CONCENTRATE AGLI ESTREMI (TRONCO EQUIVALENTE);
- LE PORTATE Q_i EROGATE AGLI n NODI DELLA RETE, INTENDENDOSI PER "NODO" QUALSIASI PUNTO OVE CONFLUISCONO DUE O PIÙ RAMI DI CONDOTTA CON DIVERSI VALORI DI Q_i , D_i , β_i , n_i OPPURE IN CORRISPONDENZA DEL QUALE SI ABBIAMO UNA EROGAZIONE CONCENTRATA. TALI PORTATE, AL PARI DI QUELLE DA RICERCARE, Q_i , SI ASSUMONO PER SEMPLICITÀ COSTANTI NEL TEMPO.

Ci si propone allora di individuare il funzionamento di tale rete, e cioè di determinare i valori delle m portate Q_i che percorrono i rami della rete e degli n carichi H_j ai nodi della rete stessa.

È evidente che per ottenere una soluzione che soddisfi il problema nelle $m+n$ sudette incognite, dovremo scrivere altrettante relazioni in cui compaiano anche i valori noti del sistema di condotte.

Fissiamo anzitutto preventivamente un senso di percorrenza delle condotte, per attribuire in modo arbitrario il segno alle portate incognite Q_i , salvo poi doverlo cambiare al termine del calcolo in caso di ipotesi errata.

Per risolvere il problema sono disponibili le seguenti relazioni:

$$Q_j = \underbrace{\sum Q_e}_{\text{INCOGNITE}} - \underbrace{\sum Q_u}_{\text{NOTA}}$$

Q_e = PORTATE ENTRANTI NEL NODO j
 Q_u = PORTATE USCENTI NEL NODO j
 N.B. SE $Q_j = 0 \rightarrow \sum Q_e = \sum Q_u$

IL EQUAZIONI DI CONTINUITÀ (UNA PER CIASCUN NODO j)
 SONO LE Q_i CHE CONVERGONO NEL NODO j

$$H_j - H_{j+1} = \underbrace{\beta_i L_i D_i^{-n_i}}_{\text{NOTO}} \underbrace{Q_i^2}_{\text{INCOGNITA}}$$

$H_j - H_{j+1}$ = INCOGNITI
 $\beta_i L_i D_i^{-n_i}$ = NOTO
 Q_i^2 = INCOGNITA

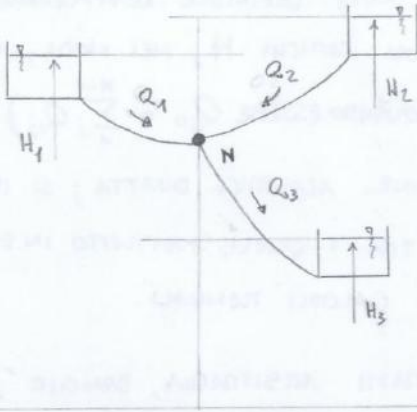
m EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (UNA PER CIASCUN RAMO i)

Questo sistema di $m+n$ equazioni definisce completamente il problema e la sua soluzione conduce alla determinazione dei valori incogniti Q_i e H_j . Se i prefissati sensi di percorrenza dei rami non sono tutti corrispondenti al funzionamento reale, alcuni dei risultati saranno costituiti da valori immaginari; in tal caso ovviamente risulta necessario ripetere il calcolo dopo aver modificato opportunamente tali sensi. Questo inconveniente deriva dal fatto che il sistema sopra indicato di $m+n$ equazioni non è lineare nella variabile generica Q_i (si veda il secondo gruppo di equazioni dove compare il termine incognito Q_i^2): anziché avere soluzioni di primo grado caratterizzate da un segno "-", quando il senso di percorrenza ipotizzato non è corretto, questo segno compare davanti ad un termine di secondo grado e ciò non ha senso fisico.

Quando la rete di condotte è piuttosto complessa, la soluzione del problema diventa notevolmente laboriosa e conviene usufruire di un elaboratore elettronico, che sfrutta metodi di approssimazione numerica delle soluzioni reali.

In ogni caso possiamo dire che i problemi di verifica del funzionamento dei sistemi di condotte sono sempre "idraulicamente determinati": ciò significa che, impiegando le grandezze fisiche tipiche della meccanica dei fluidi sia come valori noti sia come incognite del problema, le equazioni che le includono sono sempre numericamente sufficienti.

2)



$m = 3$
 $n = 1$

| DATI | INCOGNITE |
|--------------------------|-----------------|
| D_1, L_1, β_1, n_1 | Q_1, Q_2, Q_3 |
| D_2, L_2, β_2, n_2 | H_N |
| D_3, L_3, β_3, n_3 | |
| H_1, H_2, H_3 | |

3 EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$H_1 - H_N = (\beta_1 L_1 D_1^{-n_1}) Q_1^2$$

$$H_2 - H_N = (\beta_2 L_2 D_2^{-n_2}) Q_2^2$$

$$H_N - H_3 = (\beta_3 L_3 D_3^{-n_3}) Q_3^2$$

1 EQUAZIONE DI CONTINUITÀ:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (Q_N = \text{PORTATA EROGATA DAL NODO N} = 0)$$

\downarrow
 VERSO IPOTIZZATO (SI PUÒ ANCHE IPOTIZZARE "-")

$\sum Q_{ie} = \sum Q_u$

RICAVIAMO Q_1, Q_2, Q_3, H_N

N.B. METODO DI CROSS PER RISOLVERE I PROBLEMI DI VERIFICA DEI SISTEMI DI CONDOTTE

SI TRATTA DI UN METODO CONCETTUALMENTE SEMPLICE CHE CONSENTE DI PERVENIRE ALLA SOLUZIONE DI UN SISTEMA CHIUSO DI CONDOTTE, ALTREMENTE DETTO "MAGLIA", TRAMITE UNA SERIE DI TENTATIVI ITERATIVI. OCCORRE PERÒ DESCRIVERE OPPORTUNAMENTE IL PROBLEMA.

SI DA APPUNTO UNA MAGLIA CHIUSA COMPOSTA DA UN GENERICO NUMERO n DI RAMI, I QUALI EFFETTUANO UN SERVIZIO DI EROGAZIONE LUNGO IL PERCORSO. DEL SISTEMA, COMPLETATO DAI NODI CHE UNISCONO I RAMI FRA LORO CONVERGENTI, SONO NOTI:

- LA PORTATA Q_0 IMMESSA NELLA MAGLIA E IL CARICO H_0 NEL PRIMO NODO (PUNTO DI IMMISSIONE);
- LE PORTATE Q_j EROGATE NEGLI ALTRI $n-1$ NODI.

NATURALMENTE DEVE ESSERE SODDISFATTA LA SEGUENTE RELAZIONE: $Q_0 = \sum_{j=1}^{n-1} Q_j$.

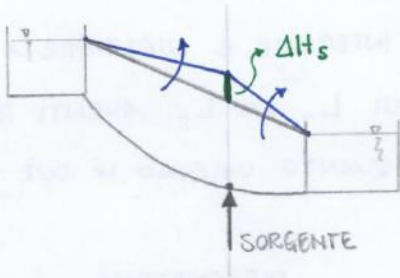
- LE LUNGHEZZE L_i , I DIAMETRI D_i E LE CARATTERISTICHE DI SCORRENZA β_i E n_i DI CASCUN RAMO DELLA MAGLIA;

IL SEGNO DEL PRODOTTO GLOBALE CHE QUESTI PARAMETRI DEFINISCONO È ASSUNTO POSITIVO SE LA PORTATA Q_i CHE PERCORRE IL RAMO HA SEGNO CONCORDE CON IL VERSO DI PERCORRENZA IPOTIZZATO INIZIALMENTE (ORARIO / ANTIORARIO) IN BASE ALLA PROPRIA PERCEZIONE DEL FUNZIONAMENTO, ALTREMENTE RISULTERÀ NEGATIVO. LO STESSO SEGNO È ASSUNTO COME VALE ANCHE PER Q_i .

LE $m=n$ EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA SI POSSONO SCRIVERE PER TUTTI GLI n RAMI DELLA MAGLIA, E SOPRATTE TTA DI LORO DEVONO DARE LUOGO ALLA SEGUENTE ESPRESSIONE:

$$\Delta H_{TOT} = (H_0 - H_1) + (H_1 - H_2) + \dots + (H_{n-2} - H_{n-1}) + (H_{n-1} - H_0) = \sum_{i=1}^n (\beta_i L_i D_i^{-n_i}) Q_i^2 = 0 \rightarrow \text{MAGLIA CHIUSA NO DISSIPAZIONE GLOBALE}$$

3) PORTATE DI EMERGENZA

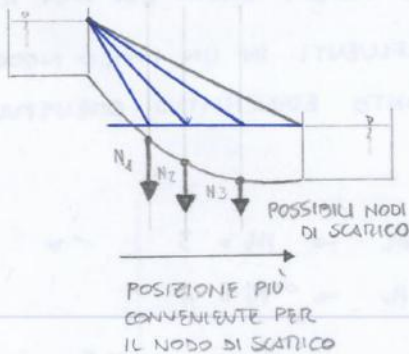


SE NON È POSSIBILE ALZARE IL LIVELLO DEL SERBATOIO DI MONTE, È MEGLIO INSERIRE UNA SORGENTE PIÙ VICINA AL SERBATOIO DI MONTE, COSÌ RIDUCO LA DISSIPAZIONE TRA L'BOCCO DI MONTE E NODO E LA PIEZOMETRICA NON SI "SPEZZA" TROPPO (ΔH_s CONTENUTA).

QUANDO SERVE UNA PORTATA MAGGIORE IN CASO DI EVENTI ECCEZIONALI, QUALI GLI INCENDI, BISOGNA RIFLETTERE SU QUALE SIA L'OPERAZIONE PIÙ CONVENIENTE PER SODDISFARE LA DOMANDA. QUESTA INFATTI NON È SCONTATA PERCHÉ AUMENTARE LA PORTATA A MEZZO DI UNA SORGENTE NON SERVE IN QUANTO AUMENTANDO LA PORTATA LA PIEZOMETRICA SI "SPEZZA" E SI ALZA SIA A MONTE SIA A VALLE ($J_H \downarrow, J_V \uparrow$). LA SUCCESSIVA PERDITA DI CARICO CONCENTRATA ΔH_s FA ABBASSARE LA PORTATA NEL TRATTO DI MONTE DELLA CONDOTTA, CIOÈ PRIMA DELLA SORGENTE, COSÌ CHE AD ESSA NON PERVIENE PIÙ LA PORTATA INIZIALE A CUI DEVE SOMMARSISI QUELLA DELLA SORGENTE STESSA.

MOLTO MEGLIO SAREBBE ALZARE IL CARICO DEL SERBATOIO DI MONTE COSÌ CHE LA DIFFERENZA TOTALE DI CARICO AUMENTI E LA PORTATA DELLA CONDOTTA PURE.

4) CHIUSURA DELLA CONDOTTA



PERCHÉ LA PORTATA EFFLUENTE A VALLE DELLA CONDOTTA SIA NULLA, LA PIEZOMETRICA NEL SUO TRATTO DI VALLE DEVE ESSERE ORIZZONTALE ($Q = 0 \rightarrow J = 0 \rightarrow H \equiv H_V = \text{cost.}$). POSSIAMO SCEGLIERE SOLO DOVE SISTEMARE IL NODO DI SCARICO DELLA CONDOTTA SICCHÉ QUESTA ESAURISCA IVI TUTTA LA PORTATA PROVENIENTE DA MONTE. IN QUESTO CASO È PREFERIBILE POSIZIONARLO PIÙ VICINO AL SERBATOIO DI VALLE PERCHÉ SI SFRUTTA MEGLIO LA DISSIPAZIONE DISTRIBUITA DELLA CONDOTTA E, AVENDO UNA PIEZOMETRICA DI MONTE POCO INCLINATA, OCCORRE FARE DEFUIRE UNA PORTATA MINORE PER ARRIVARE AD OTTENERE UN'ASSEVERA TOTALE DI FLUSSO DOPO IL NODO DI SCARICO.

4) PROBLEMI DI DIMENSIONAMENTO DEI SISTEMI DI CONDOTTE

DOBBIAMO ORA AFFRONTARE UN ALTRO TIPO DI PROBLEMI PER I SISTEMI DI CONDOTTE, CIOÈ QUELLO CHE FA RIFERIMENTO AL PROGETTO DI TALI SISTEMI. INIZIAMO DA UN CASO SEMPLICE COSTITUITO DA DUE SERBATOI COLLEGATI DA UN'UNICA CONDOTTA, LA QUALE SE SI RICHIÈDE UNA CERTA PORTATA Q , COSTANTE SU TUTTA LA LUNGHERA L NOTA, COSÌ COME $\Delta H = H_1 - H_2$, β ED n , AVrà UN DIAMETRO CHE RISULTA DALL'UNICA EQUAZIONE IN GIOCO, OSSIA DALLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA: $H_1 - H_2 = \beta L D^{-n} Q^2$.

SOLA COMBINAZIONE CHE SODDISFI IL PROBLEMA IDRAULICO, BENSÌ NE ESISTONO INFINITE. È CHIARO CHE A QUESTO PUNTO DOBBIAMO AGGIUNGERE NUOVE CONDIZIONI, CIOÈ NUOVE EQUAZIONI, TALI CHE IL PROBLEMA RISULTI DETERMINATO (NUM. EQUAZIONI = NUM. INCOGNITE). CIÒ COMPORTA PERÒ CHE SI ESTENDA IL PROBLEMA AD UN AMBITO CHE PRESCINDE DA VALUTAZIONI DI CARATTERE IDRAULICO. SOLITAMENTE, PER OVVERE RAGIONI, TALE ESTENSIONE POTRÀ A CONSIDERARE IL CRITERIO ECONOMICO.

CRITERIO ECONOMICO - COSTO DI UN SISTEMA DI CONDOTTE

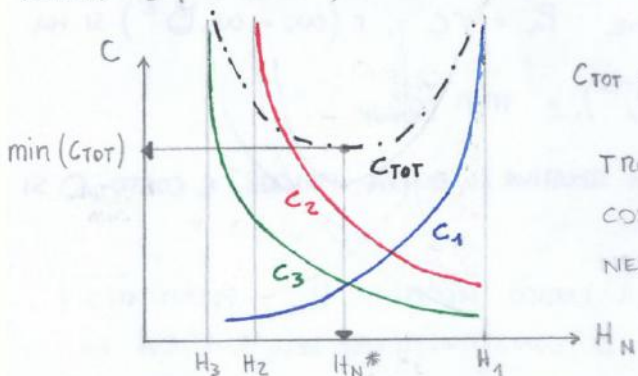
PER "COSTO" DELLA CONDOTTA SI INTENDE LA SPESA COMPLESSIVA NECESSARIA PER OTTENERE LA CONDOTTA FUNZIONANTE E COMPRENDE PERCIÒ SIA LE SPESE PER LA FORNITURA DEI MATERIALI SIA PER LA LORO POSA IN OPERA. ESSO VIENE DI NOTTA ESPRESSO PER UNITÀ DI LUNGHEZZA DELLA CONDOTTA, ED È COSTITUITO DA UNA PARTE COSTANTE (COSTO DI SCAVO E RIPIEPI- MENTO DELLA TRINCEA) E DA UN'ALTRA CHE INVECE È FUNZIONE DEL DIAMETRO DELLA TUBA- ZIONE E DELLA PRESSIONE INTERNA AD ESSA.

I TUBI COSIDDETTI "COMMERICALI" VENGONO COSTRUITI IN CLASSI DI PRESSIONE, CIASCUNA DELLE QUALI È IN GRADO DI SOPPORTARE UNA PRESSIONE INTERNA MASSIMA BEN DEFINITA; NEGLI AC- QUEDOTTI E NEGLI OLEODOTTI CIASCUN TRONCO DI CONDOTTA È DI REGOLA COSTITUITO DA TUBI TUTTI DELLA STESSA CLASSE DI PRESSIONE E PERCIÒ IL COSTO RELATIVO ($\frac{€}{m \text{ lineare}}$) PUÒ CONSIDERARSI DIPENDENTE ESCLUSIVAMENTE DAL DIAMETRO; L'ANALISI DEI COSTI DELLE CONDOTTE DI DIVERSO TIPO E CLASSE MOSTRA CHE IN GENERALE IL COSTO UNITARIO PUÒ ESSERE SEMPRE ESPRESSO DA UNA RELAZIONE DEL TIPO:

$$C = \underbrace{c_0}_{\text{SCAVO E POSA}} + \underbrace{c_1 D^E}_{\text{DIAMETRO}} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0, c_1 = \text{COEFFICIENTI COSTANTI PER OGNI TIPO DI TUBO} \\ \text{E PER OGNI CLASSE DI PRESSIONE} \\ E > 1 \text{ PERCHÈ TIENE CONTO DELLO SPESSORE DELLA} \\ \text{CONDOTTA CHE AUMENTA CON IL DIAMETRO} \end{array} \right.$$

SI CONSIDERI IL PROBLEMA DEI TRE SERBATOI VISTO IN PRECEDENZA CON $H_3 < H_N < H_1$.

SE SI VERIFICA CHE IL CARICO H_N TENDE AD H_1 , LA CONDOTTA CHE COLLEGA L'OMONIMO SERBATOIO 1 AL NODO N, ANCH'ESSA DI PEDICE 1, DEVE AVERE UN DIAMETRO D_1 ELEVATO ($|H_N - H_1| \downarrow, J_1 \downarrow, D_1 \uparrow$), POICHÈ D_1 CRESCE, ANCHE IL COSTO C_1 SARÀ PIÙ ELEVATO. LO STESSO VALE PER D_3 E C_3 SE $H_N \rightarrow H_3$.



$$C_{TOT} = \sum_1^3 C_i \rightarrow \min C_{TOT} : \frac{\partial C_{TOT}}{\partial H_N} = 0 \rightarrow H_N^*$$

TROVANDO L' H_N^* CHE CONSENTE DI RAGGIUNGERE LA CONDIZIONE DI MINIMO COSTO TOTALE E SOSTITUENDOLO NELLE $m=3$ EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA CHE DEFINISCONO LA SEZIONE IDRAULICA DEL PROBLEMA DI DIMENSIONAMENTO, SIAMO IN GRADO DI DETERMINARE I DIAMETRI D_i DELLE CONDOTTE.

PRIMA NULLA E LA DERIVATA SECONDA POSITIVA. DA CIÒ SI OTTIENE LA RELAZIONE CHE SEGUE :

$$\sum_1^{N_{IN}} \frac{r_i L_i \omega_j \epsilon_i}{\lambda_i n_i Q_i^2} D_i^{n_i + \epsilon_i} = \sum_1^{N_{OUT}} \frac{r_j L_j \omega_j \epsilon_j}{\lambda_j n_j Q_j^2} D_j^{n_j + \epsilon_j}$$

CONDIZIONE DI MINIMA PASSIVITÀ

SE LE CONDOTTE DEL SISTEMA SONO TUTTE FORMATE DA TUBI DELLO STESSO TIPO, LE GRANDENZE $r, \omega, \epsilon, \beta, n$ RISULTANO UGUALI PER TUTTI I RAMI E LA PRECEDENTE RELAZIONE ASSUME LA FORMA SEMPLIFICATA CHE SEGUE, RICORDANDO CHE $\lambda = \beta L$:

$$\sum_1^{N_{IN}} \frac{D_i^{n+\epsilon}}{Q_i^2} = \sum_1^{N_{OUT}} \frac{D_j^{n+\epsilon}}{Q_j^2}$$

NEI SISTEMI PIÙ COMPLESSI CHE COMPREDONO PIÙ DI UN NODO, PER OGNUNO DI QUESTI È POSSIBILE SCRIVERE UNA RELAZIONE COME QUELLA APPENA VISTA. MA IL NUMERO DEI NODI, IN QUESTE RETI, COINCIDE ANCHE CON IL NUMERO DELLE PORTATE NELLE CONDOTTE CHE NON FANNO CAPO AI SERBATOI. DETTO p TALE NUMERO, SI INTUISCE CHE IL NUMERO DI INCOGNITE AUMENTA. FORTUNATAMENTE PERÒ LE RELAZIONI, SEPPUR NON SOLO IDRAULICHE, CONSENTONO DI RISOLVERE IL PROBLEMA: CONTINUITÀ (n), CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (m), MINIMA PASSIVITÀ (p). NON CI OCCUPEREMO DI RISOLVERE QUESTI PROBLEMI, NE' ALTRI PIÙ COMPLESSI CHE CHIAMANO IN CAUSA, AD ESEMPIO, COPPIE DI NODI COLLEGATE DA PIÙ CONDOTTE. RISULTANDO CHIARO DA QUANTO È STATO DETTO FINO A QUESTO MOMENTO, RIBADIAMO SOLO IL CONCETTO CHE ALL'AUMENTARE DELLE INCOGNITE, DEVE INCREMENTARSI ANCHE IL NUMERO DI VINCOLI, NON SOLO DI NATURA IDRAULICA, CHE FORMANO INSIEME UN SISTEMA LA CUI SOLUZIONE VIENE SOVENTE AFFIDATA A MODERNI ELABORATORI DEDICATI. L'INGEGNERE DEVE LIMITARSI A VALUTARE LA BONTÀ DEI RISULTATI DI CALCOLO IN BASE ALLE SPECIFICHE ESIGENZE A CUI BISOGNA FAR FRONTE, E NEL CASO, CAMBIARE I METODI DI STIMA DEI VALORI OTTENUTI, SENZA PERÒ ATTENDERSI MAI UNA PRECISIONE ASSOLUTA, BENSÌ APPROSSIMAZIONI RAGIONEVOLI.

VEDIAMO SEMPLICEMENTE DUE ESEMPI SEMPLICI DI RETI AD UN SOLO NODO: DUE / TRE SERBATOI.

2 SERBATOI)

DATI : $H_1, H_2, \beta_1 = \beta_2 = \beta$
 $Q_1 = Q_2 = Q$
 $L_1, L_2, \omega_1 = \omega_2 = \omega$
 $n_1 = n_2 = n, \omega_{11} = \omega_{12} = \omega_1$
 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon, r_1 = r_2 = r$

INCOGNITE : D_1, D_2, H_N

$$\left. \begin{aligned} H_1 - H_N &= \beta_1 L_1 D_1^{-n_1} Q_1^2 \\ H_N - H_2 &= \beta_2 L_2 D_2^{-n_2} Q_2^2 \end{aligned} \right\} \Delta H = \sum_1^2 (\beta_i L_i D_i^{-n_i}) Q_i^2$$

↓

TROVIAMO D_1 E D_2

↓

SOSTITUENDO IN (*) TROVIAMO ANCHE H_N

$$\frac{D_1^{n+\epsilon}}{Q^2} = \frac{D_2^{n+\epsilon}}{Q^2}$$

3 SERBATOI)

DATI : $H_i, \beta_i, Q_i, L_i, n, \epsilon, \omega_0, \omega_1, r$

INCOGNITE : D_i, H_N } $i = (1, 2, 3)$

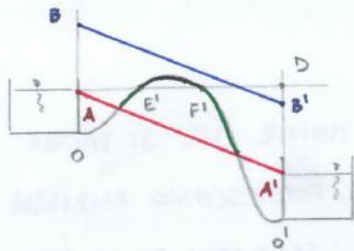
$$\left. \begin{aligned} H_1 - H_N &= \beta_1 L_1 D_1^{-n_1} Q_1^2 \\ H_N - H_2 &= \beta_2 L_2 D_2^{-n_2} Q_2^2 \\ H_N - H_3 &= \beta_3 L_3 D_3^{-n_3} Q_3^2 \end{aligned} \right\}$$

H_{MAGGIORE}
↓ Q_i
 H_{MINORE}

$$\frac{D_1^{n+\epsilon}}{Q_1^2} = \frac{D_2^{n+\epsilon}}{Q_2^2} + \frac{D_3^{n+\epsilon}}{Q_3^2}$$

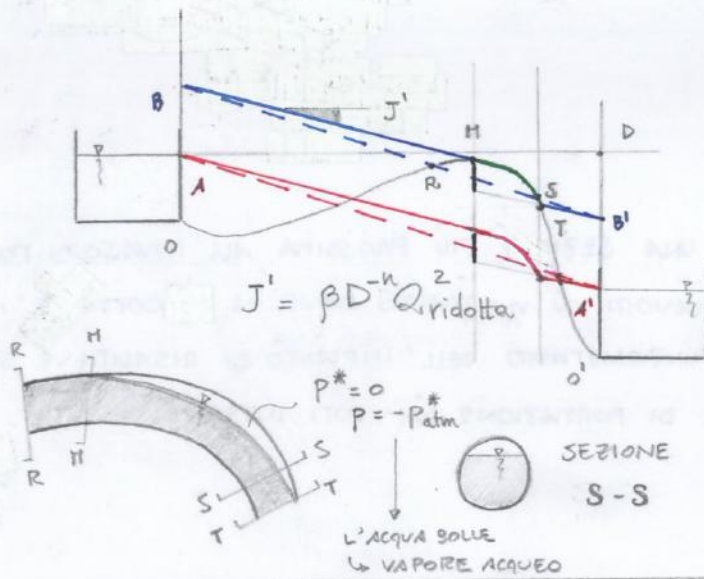
TROVIAMO D_1, D_2 E D_3 → SOSTITUENDO E TROVIAMO ANCHE H_N

III)



LA CONDOTTA E' TUTTA INFERIORE ALLA PIEZOMETRICA ASSOLUTA, MA SOVRISTA, PER UN TRATTO, IL PIANO DEI CARICII IDROSTATICI IN SI; NEL TRONCO E'F' LE PRESSIONI ASSOLUTE SONO OVUNQUE POSITIVE E LE CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE SONO ANCORA IDENTICHE A QUELLE DEL PROFILO II, MENTRE RISULTANO DIFFERENTI QUELLE DI AVVIAMENTO, PERCHE', OVVIAMENTE, IN QUESTO CASO E' NECESSARIO L'ADESCAMENTO DELLA CONDOTTA.

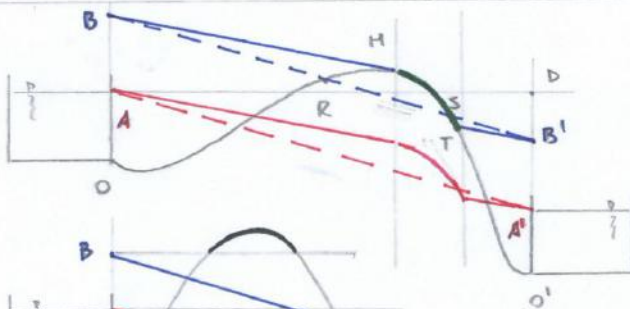
IV)



LA PRESSIONE ASSOLUTA NON PUÒ MAI ESSERE NEGATIVA QUINDI LA PIEZOMETRICA ASSOLUTA SI SPOSTA MANTENENDO FISSI SOLO GLI ESTREMI, FORMANDO UN GEMINO IN CORRISPONDENZA DELLA SEZIONE H-H. LA PIEZOMETRICA RELATIVA SI ADATTA DOVENDO RIMANERE PARALLELA ALLA PRIMA OVUNQUE, POICHE' IL RAPPORTO $\frac{P_{atm}^*}{\gamma}$ SI MANTIENE COSTANTE IN OGNI PUNTO.

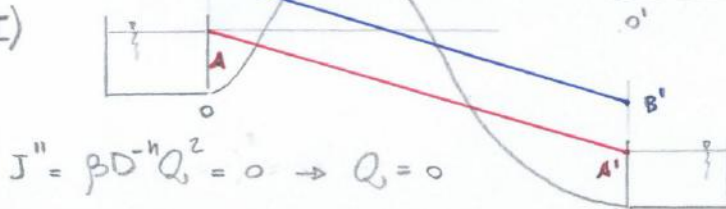
LA PORZIONE RS DELLA CONDOTTA E' PIU' ELEVATA DELLA PIEZOMETRICA ASSOLUTA BB' CHE PERCIO' NON E' PIU' CORRISPONDENTE AL FUNZIONAMENTO EFFETTIVO, AL QUALE INVECE CORRISPONDE LA PIEZOMETRICA ASSOLUTA BH OTTENUTA TRACCIANDO LA RETTA PER B TANGENTE IN M ALLA CONDOTTA. A QUESTA PIEZOMETRICA CORRETE UNA NUOVA CADENTE J' INFERIORE A J: A PARITA' DI DIAMETRO E DI SCABREZZA, CIO' SIGNIFICA UNA MINORE PORTATA CONVOLUTA DALLA CONDOTTA. NEI DUE TRONCHI OH E TO' LA CORRENTE OCCUPA L'INTERA SEZIONE DELLA TUBAZIONE, MENTRE LUNGO IL TRATTO MT SI VERIFICA IL "MOTO A CIGALUZZA". POICHE' TUTTA LA CONDOTTA SI TROVA AL DI SOTTO DELL'ORIZZONTALE AD (LIVELLO DEL PRIMO SERBATOIO) L'AVVIAMENTO DEL MOTO E' SPONTANEO, OSSIA NON OCCORRE L'ADESCAMENTO.

V)



QUESTA SITUAZIONE DIFFERISCE DALLA PRECEDENTE SOLTANTO PER QUANTO RIGUARDA L'AVVIAMENTO DEL MOTO CHE ORA NECESSITA DI UN ADESCAMENTO.

VI)



ESSENDO UNA PARTE DELLA CONDOTTA SUPERIORE ALL'ORIZZONTALE PER B, NESSUNA CONDIZIONE DI MOTO E' POSSIBILE, DATA L'IMPOSSIBILITA' DI OTTENERE L'ADESCAMENTO DEL MOVIMENTO.

CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA

1) GENERALITÀ

SI TRATTA ESSENZIALMENTE DELLE CORRENTI IDRICHE CHE PERCORRONO I CORSI D'ACQUA NATURALI (FIUMI, TORRENTI) O I CANALI ARTIFICIALI (DI BONIFICA, DI IRRIGAZIONE, DI FOGNATURA, DI IMPIANTI IDROELETTRICI, DI NAVIGAZIONE INTERNA); IL LORO STUDIO, SOPRATTUTTO SE INDIREZZATO A FINI APPLICATIVI, COSTITUISCE PERTANTO UN IMPORTANTE CAPITOLO DELL'IDRAULICA TECNICA.



QUESTE CORRENTI SONO CARATTERIZZATE DALL' AVERE UNA PARTE DELLA LORO SUPERFICIE DI CONTATTO, E PRECISAMENTE QUELLA SUPERIORE, NON A CONTATTO CON UNA PARETE SOLIDA, MA CON UN GAS, CHE NELLA PIÙ GRANDE GENERALITÀ DEI CASI È L'ARIA; QUESTA SUPERFICIE, CHE SI DICE APPUNTO "SUPERFICIE LIBERA" (O "PELO LIBERO"), È PERTANTO UNA SUPERFICIE ISOBARICA ($p = \text{cost.}$): DI NORMA, MA NON SEMPRE, IL VALORE COSTANTE DELLA PRESSIONE È QUELLO ATMOSFERICO, QUINDI NULLO NEL CLASSICO RIFERIMENTO RELATIVO, A NOI PIÙ FUNZIONALE.

CI RIFERIREMO QUASI ESCLUSIVAMENTE A CORRENTI LINEARI, OSSIA PRIVE DI CURVATURA, LE QUALI SONO PERALTRÒ LE PIÙ RICORRENTI NELL'IDRAULICA APPLICATA AI PROBLEMI INGEGNERISTICI.

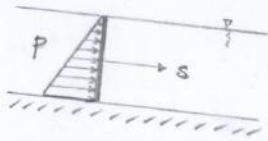
GLI UNICI FLUIDI CHE POSSONO ESSERE INTERESSATI DA QUESTO TIPO DI MOTO SONO, COME DOVREBBE ESSERE GIÀ PIUTTOSTO EVIDENTE, I LIQUIDI. INOLTRE, IL FATTO EVIDENZIATO POCO SOPRA DELLA SUPERFICIE ISOBARICA CI SUGGERISCE CHE, OLTRE A NON AVERE UN DOMINIO SEMPRE ED OVUNQUE DEFINITO, QUESTE CORRENTI NON PRESENTANO FORTI GRADIENTI DI PRESSIONE INTERNI ALLA MASSA FLUIDA, OSSIA HANNO UNA PRESSIONE "IMPOSTA": POSSONO CAMBIARE GEOMETRIA (ONDE E INCRESPATURE), MA NON SI LASCIANO IMPORRE VARIAZIONI DI PRESSIONE.

IN CASO DI TALI GRADIENTI, TRASMESSI DALL' AMBIENTE ESTERNO ALLA MASSA FLUIDA, QUESTA REAGISCE CREANDO ZONE DI MOTO NON PIÙ UNIFORME ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial}{\partial s} \neq 0$), BENSÌ PERMANENTE O VARIO, STIUSSANDO E DISTRIBUENDO COSÌ SU TUTTI PIÙ LUNGENE LE VARIAZIONI DI PRESSIONE. QUESTA È ANCHE LA REGIONE PRINCIPALE CHE RENDE LE CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA COSÌ DIFFICILI DA STUDIARE. DOVREBBE APPAIRE CIARLO QUINDI CHE LE DIFFERENZE SOSTANZIALI RISPETTO ALLE CORRENTI IN PRESSIONE SONO MOLTE E ANCHE PIUTTOSTO GRANDI. (DOMINIO DEFINITO / NON DEFINITO, PRESSIONE RELATIVA SUPERFICIALE NON NULLA / NULLA, TUTTI I FLUIDI / SOLO I LIQUIDI, GEOMETRIA IMPOSTA - PRESSIONE VARIABILE / GEOMETRIA VARIABILE - PRESSIONE IMPOSTA).

PUR NON OCCUPANDOCI DI MOTI ONDOSI È BENE PRECISARE CHE LE ONDE SONO CLASSIFICABILI IN DUE CATEGORIE DISTINTE: 1) ONDE CHE SI FORMANO PER PROPAGAZIONE DI FORMA (ONDE DEL MARE, MOTI A POTENZIALE), 2) ONDE CHE SI FORMANO PER PROPAGAZIONE DI MASSA

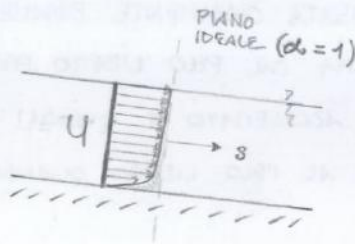
2) APPLICAZIONE DEL MODELLO FISICO DI DE SAINT VENANT (APPROCCIO SEMPLIFICATO RISPETTO A NAVIER-STOKES):

2.1) CORRENTI GRADUALMENTE VARIATE →



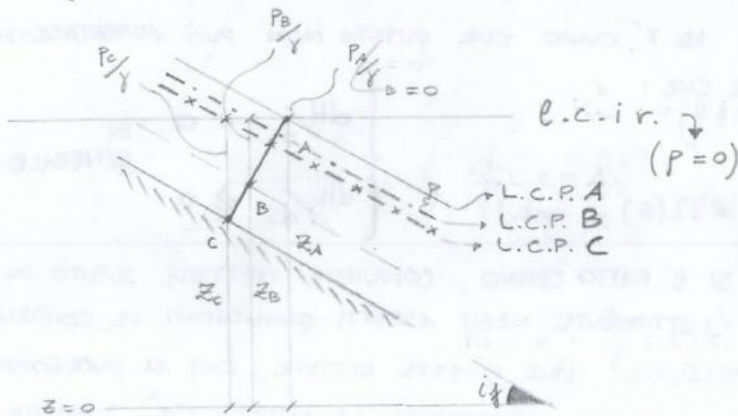
IL CARICO PIEZOMETRICO RIMANE COSTANTE PER TUTTI I PUNTI DI UNA CERTA SEZIONE TRASVERSALE; CIÒ IMPLICA CHE LE ONDE ASSUNO UNA AMPIEZZA VERTICALE α MOLTO MINORE RISPETTO ALLA LORO LUNGHEZZA L ($\alpha/L \ll 1 \rightarrow$ ONDE POCO "RIPIDE").

2.2) MOTO FORTEMENTE TURBOLENTO ($Re \sim O(10^6 \div 10^8)$) →



IL PROFILO DELLA VELOCITÀ DEL MOTO MEDIO È SOSTANZIALMENTE OMOGENEO, QUINDI PIATTO, PER TUTTI I PUNTI DI UNA CERTA SEZIONE TRASVERSALE; ESSO INFATTI È DEBOLMENTE CRESCENTE VERSO L'ALTO. CIÒ IMPLICA CHE IL COEFFICIENTE DI RAGGUGLIO DELLE VELOCITÀ α SIA PRATICAMENTE UNITARIO. ASSUMIAMO ALLORA COME UNICA VELOCITÀ QUELLA MEDIA \bar{U} , VALIDA OVUNQUE SULLA SEZIONE.

2.3) CORRENTI A BASSISSIMA PENDENZA RISPETTO AL PIANO ORIZZONTALE ($< 10\%$) →



SUPPONIAMO DI AVERE LA SITUAZIONE OPPOSTA, CIOÈ UN ALVEO A FORTE PENDENZA; PRENDIAMO UNA SEZIONE TRASVERSALE QUALSIASI E DI ESSA CONSIDERIAMO I PUNTI A, B, C.

PERCHÈ h SIA COSTANTE PER TUTTI I PUNTI DELLA STESSA SEZIONE, COME STABILITO CON LA CONDIZIONE (2.1), DOVREMMO VISUALIZZARE UNA LINEA DEI CARICHI PIEZOMETRICI DIVERSA PER OGNI PUNTO P CHE SI DISTACCHI DI UNA CERTA MISURA DAL FONDO DELL'ALVEO.

$$h = z + \frac{P}{\gamma} = \text{cost.}$$

SI DOVREBBE PORRE A QUESTO PUNTO UNA DOMANDA CRUCIALE, OVVERO QUALI SIA LA LINEA DA CONSIDERARE PER LE APPLICAZIONI PRATICHE. LA RISPOSTA NON È UNIVOCA, PERTANTO NON TRATTIAMO QUESTO CASO E IMPONIAMO SEMPLICEMENTE CHE LA CORRENTE SIA DEBOLMENTE INCLINATA ($i_f < 10\%$). COSÌ FACENDO OBBLIAMMO LE DIVERSE LINEE A SCHIACCIARSI LE UNE CONTRO LE ALTRE A RIDOSSO DI QUELLA PASSANTE PER IL PUNTO A IN SUPERFICIE CHE DIVENTA COSÌ PRESSOCHE ORIZZONTALE E CHE SARÀ L'UNICA DA NOI CONSIDERATA. DUNQUE, PER FINALITÀ INGEGNERISTICHE, LA PIEZOMETRICA COINCIDE CON LA SUPERFICIE LIBERA.