NUMERO: 1076

DATA: 09/09/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Iannizzi

MATERIA: Fisica II + Eserc.

Prof. Barbero

Brevi richiami di topologia di $\mathbb{R}^n$

Premessa: A, B insiemi $f : A \to B$ oppure $A \xrightarrow{f} B$

Si intende una funzione che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B. Quindi A è il dominio della funzione. B è detto codominio della funzione.

es: $[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, vuol dire che è continua in tutti i punti compresi tra a e b.

Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$.

$\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$

$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots 0)$

$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$

$\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$

L'insieme $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è detto base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Se $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ allora $v = (v_1, \ldots, v_n) = (v_1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, v_n) =$

$$= v_1 (1, 0, \ldots 0) + \ldots + v_n (0, \ldots, 0, 1) =$$

$$= v_1 \vec{e}_1 + \ldots + v_n \vec{e}_n$$

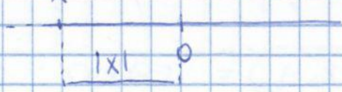
Se $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R} \qquad \text{PRODOTTO SCALARE}$$

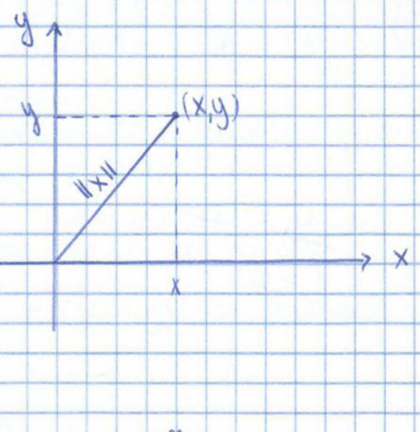
NORMA di x: $\|x\| = |x|$ modulo $= \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

$0 \in \mathbb{R}^n$ $0 = (0, \ldots, 0)$ $x - 0 = x \Rightarrow \|x\| = \|x - 0\|$

$n = 1 \Rightarrow \|x\| = |x|$ valore assoluto di x $= \sqrt{x^2}$



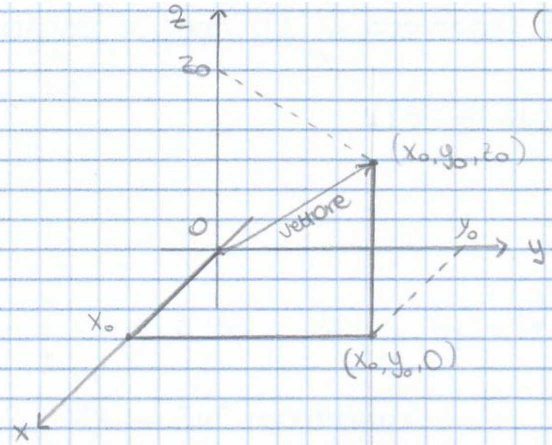
$n = 2 \Rightarrow \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Analogamente per $n \geq 3$

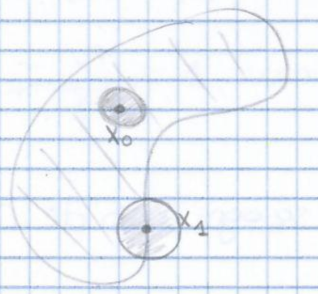
In $\mathbb{R}^n$, $\|x\|$ è la distanza di x da 0 di $\mathbb{R}^n$

Def: Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Si chiama INTORNO (SFERICO) aperto di centro x_0 e raggio r (oppure palla aperta di centro x_0 e raggio r) l'insieme $B_r(x_0)$ →



fino a p. 7

Def: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che x_0 è un punto interno a Ω se $\exists r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subseteq \Omega$. Evidentemente $x_0 \in \Omega$



x_0 è INTERNO ⚠ $\exists$ non $\forall$! Quindi ne basta uno.

x_1 NON è INTERNO, perchè per qualunque cerchio che disegno, non ne trovo nemmeno uno che $\in$ a Ω

Si chiama PARTE INTERNA di Ω l'insieme dei punti interni di Ω. Notaz: $\text{int}(\Omega)$.
È un sottoinsieme di Ω: $\text{int}(\Omega) \subseteq \Omega$

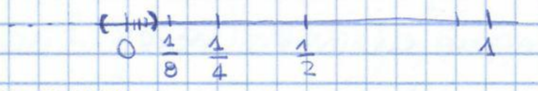
Def: x_0 è un punto isolato di Ω se $\exists r > 0$ tale che $\Omega \cap B_r(x_0) = \{x_0\}$.
Evidentemente $x_0 \in \Omega$.

Def: x_0 è un punto di accumulazione per Ω se $\forall r > 0$ si ha che

$$[\Omega \cap B_r(x_0)] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Cioè se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di Ω diversi da x_0.
Non è detto che x_0 appartenga a Ω.

$$\Omega = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$



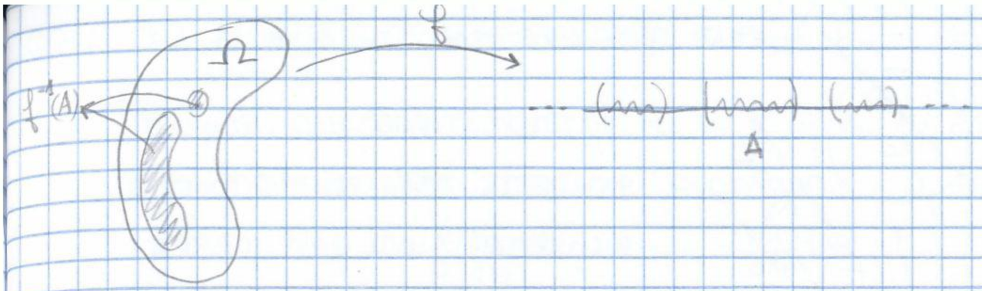
Per quanto piccolo sia, $\frac{1}{n} \neq 0$ sempre.
Quindi 0 è punto di accumulazione.

Def: x_0 è punto di frontiera per Ω se $\forall r > 0$ si ha che

$$\Omega \cap B_r(x_0) \neq \emptyset \quad \complement\Omega \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$$

dove $\complement\Omega$ è il complementare di Ω ($\complement\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$).
Non è detto che x_0 appartenga ad Ω

x_0 P.TO di FRONTIERA
x_1, x_2 NON sono P.TI di FRONTIERA



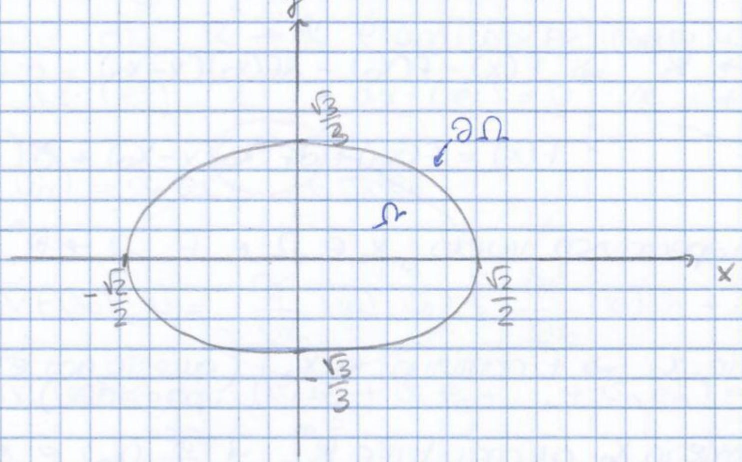
ES: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 < 1\}$ Potrebbe essere la controimmagine di un qualche insieme?

$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ continua
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < 1\}$

$A = (-\infty, 1)$ APERTO $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in A\} = f^{-1}(A) \Rightarrow$ È aperto.

$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} < 1$ con l'uguale è un'ellisse



$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^4 < 1\}$ APERTO

Se invece di $<$ avessimo avuto $\leq$ o $=$:

- $\leq$: l'insieme era chiuso perchè anche il bordo faceva faceva parte dell'insieme
$B = (-\infty, 1]$ chiuso $\Rightarrow$ $\complement B = (1, +\infty)$ APERTO $= f^{-1}(B) \Rightarrow$ chiuso
- $=$: l'insieme è chiuso ! $C = \{1\}$ $\complement C = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Brevi richiami di calcolo differenziale

Siano $n, m \in \mathbb{N}$ $n, m \geq 1$ * se fosse vuoto non potrei prendere x_0

Def. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$, $v \in \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una fnz
Diciamo che f è derivabile in x_0 rispetto a v se esiste in $\mathbb{R}^n$ il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}$$ funzione in una variabile

e in tal caso lo denotiamo con $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ e lo chiamiamo <u>derivata direzionale</u> di f in x_0 rispetto a v.

$\partial\Omega$

* devo fare $x_0 + tv \in \Omega$ →

OSS: $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 \in \Omega \Rightarrow \exists\, df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare.
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{R}^m$ si associa una matrice a $df(x_0)$ una matrice, detta matrice Jacobiana, $J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{m,n}$, che è:

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$f = (f_1, \dots, f_n)$
$f_1, \dots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sono le componenti di f

Si ha che se $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ $df(x_0)(v) = J_f(x_0)\, v =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

CASO SPECIALE: $m = 1$

$\forall i = 1, \dots, m$ sia $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è applicazione lineare così definita

$$dx_i(e_i) = 1 \qquad dx_i(e_j) = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

Sia $v = (v_1, \dots, v_n) = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$

Allora

$$df(x_0)(v) = \nabla f(x_0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(v_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) v_n = *$$

Calcoliamo: $dx_1(v) = dx_1(v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n) = v_1 \overset{1}{dx_1(e_1)} + v_2 \cancel{dx_1(e_2)} + \dots + v_n \cancel{dx_1(e_n)} =$

$$= v_1 \cdot 1 = v_1$$

$$dx_1(v) = v_1$$
$$dx_2(v) = v_2$$
$$dx_n(v) = v_n$$

$$* = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) dx_1(v) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) dx_2(v) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) dx_n(v) =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) dx_n \right](v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) dx_n =$$

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i$$

$\boxed{n=1}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto, $f: I \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in I$. Se f è derivabile in x_0, allora f è differenziabile in x_0 e si ha che $\forall x \in \mathbb{R}$: $df(x_0)(x) = f'(x_0)\, x$
In particolare $df(x_0)(1) = f'(x_0)$

Def: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Diciamo

$\forall i = 1, \dots, n$ Regola della catena

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$

, dove $(f_1, \dots, f_n)$ sono le componenti di f.

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_0)) \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x_0)) \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)$$

CASI SPECIALI:

1) $\boxed{m=1}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

2) $\boxed{n=1}$ $\Rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ $\quad g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)'(x_0) = \sum_{J=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_J}(f(x_0)) f_J'(x_0) = \nabla g(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

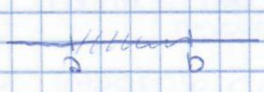
$$\nabla g(f(x_0)) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_0)), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x_0)) \right)$$

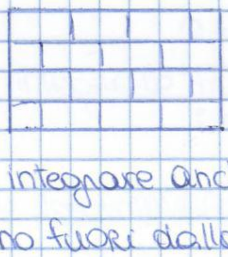
$$f'(x_0) = (f_1(x_0), \dots, f_m(x_0))$$

Inizio corso:

INTEGRALI MULTIPLI

Integrale di una fnz limitata in più variabili, funzione reale. È naturale estensione dell'integrale in una variabile, ma mentre x una variab si integra su un intervallo, in più variabili si pensa di definirlo su tutti gli insiemi.

$n = 1$  $\int_a^b f(x)\,dx$

$n = 2$  $n = 3$ 

Ma vorrei integrare anche su sfere e cerchi. Se suddivido il cerchio in quadratini, alcuni saranno fuori dalla figura da integrare. Quest'operazione di suddivisione è utile? Allora devo suddividere tra gli insiemi suddivisibili e non. Allora divido tra 2

- INSIEMI MISURABILI : in qualche modo posso dire quanto è la sua area, il suo volume ...
- INSIEMI NON MISURABILI

Nel seguito, considereremo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

NOTAZIONE: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato non vuoto. Diciamo che Ω è misurabile se a Ω si può associare una misura, che per $n=2$ è la classica area e per $n=3$ è il classico volume. la $m_n(\Omega) \geq 0$

Si denota con $m_n(\Omega)$ oppure con $m(\Omega)$

misura (o valore) n-dimensionale — misura

Def: Sia Ω contenuto in $\mathbb{R}^n$ misurabile. Diciamo che Ω è **trascurabile** se

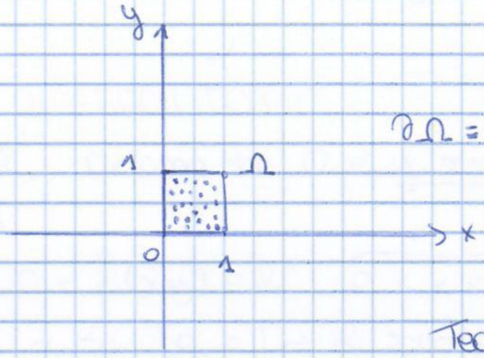
$$m_n(\Omega) = 0$$

TEOREMA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato. Allora Ω è misurabile se e solo se $\partial\Omega$ è trascurabile.

ES:

$$\Omega = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x, y \in \mathbb{Q}\}$$



$\partial\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$m(\partial\Omega) = 1 \neq 0$

$\Downarrow$

Ω NON È MISURABILE

Teoria di Peano-Jordan.

INTEGRALE MULTIPLO di RIEMANN

Notazione: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Si chiama **integrale (multiplo) di Riemann** di f su Ω il numero reale che rappresentiamo con uno dei seguenti simboli:

$$\int_\Omega f \quad ; \quad \int_\Omega f(x)\,dx \quad ; \quad \int_\Omega f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n \quad ; \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\underbrace{\int \dots \int_\Omega}_{n\text{-volte}} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$$

$n = 2 \rightarrow$ integrale doppio $\Rightarrow \displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$

$n = 3 \rightarrow$ integrale triplo $\Rightarrow \displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

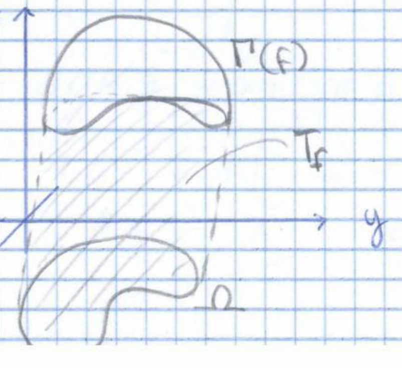
Ω è detto <u>dominio di integrazione</u>

Se $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega \Rightarrow$

$\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ è il VOLUME $n+1$ dimensionale del TRAPEZOIDE di f, cioè:

$$T_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x = (x_1, \dots, x_n)\ \ 0 \leq x_{n+1} \leq f(x)\}$$

PER ES. $n=2$



$\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ è la $\boxed{m_3(f)}$

3) Se $f \geq 0$ su Ω e $A \subseteq \Omega$ è misurabile $\Rightarrow$

$$\int_A f \leq \int_\Omega f$$

Analisi I $\rightarrow$ 2: $\forall c \in [a,b]$ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

3: $\forall c \in [a,b]_{f \geq 0}$: $\int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$ — p. 20 —

11/10/12

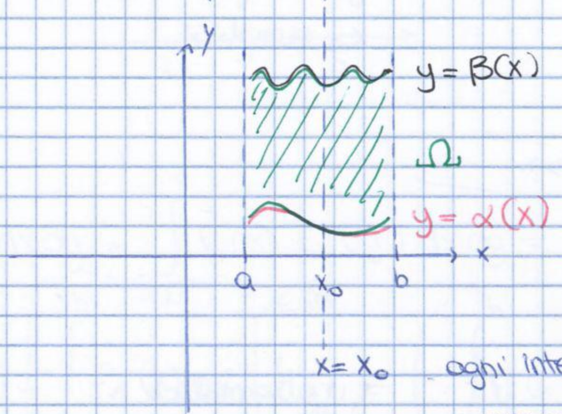
CALCOLO degli INTEGRALI DOPPI

Def.: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Diciamo che Ω è y-semplice (o verticalmente convesso) se Ω è della forma

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \overbrace{a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)}^{*}\} \text{ dove}$$

$\alpha, \beta : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue.

$*$ $\forall x \in [a,b]$ $\alpha(x) \leq \beta(x)$



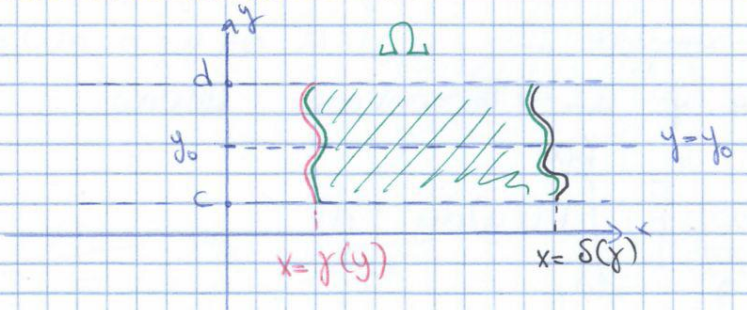
ogni intersezione con la retta verticale è un insieme convesso (= dati due punti e il segmento che li unisce sta tutto nell'insieme).

Def.: Diciamo che Ω è x-semplice (o orizzontalmente convesso) se è della forma:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \overbrace{c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(x)}^{*}\};$$

dove $\gamma, \delta : [c,d]$ sono funzioni continue

Questi insiemi sono misurabili $*$ $\forall y \in [c,d]$ si ha $\gamma(y) \leq \delta(y)$



$$\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{c} \left[\int_{\gamma(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$ $G(y) \to$ lo calcolo nell'integrale

Prima si calcola l'integrale interno in (1) variabile, poi, ottenuta $F(x)$, calcolo l'altro integrale.

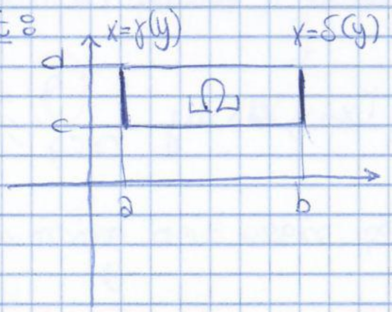
OSS: Se Ω è un rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati, cioè se Ω è della forma: $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ e se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è la funzione $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ con $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue, allora

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega} f_1(x, \dots = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right)$$

f in tutti i casi è limitata in quanto Ω è compatto.

DIMOSTRAZIONE: fai dimostrazione per y-semplice

Ω: x-semplice



$$\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega} f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f_1(x) f_2(y)\,dx \right] dy =$$

parametro, $\in \mathbb{R}$

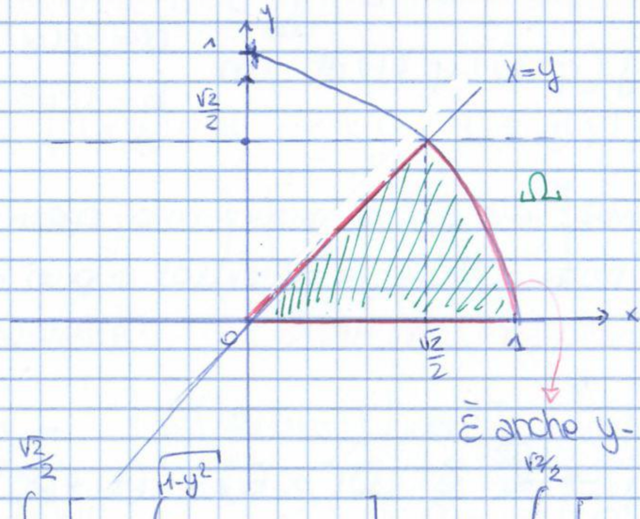
$$= \int_c^d f_2(y) \left[\int_a^b f_1(x)\,dx \right] dy = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right)$$

CVD

ES:

Calcolare $\int_{\Omega} (x+y)\,dx\,dy$, dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ y \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\}$

Ω è x-semplice.



$x = \sqrt{1-y^2}$

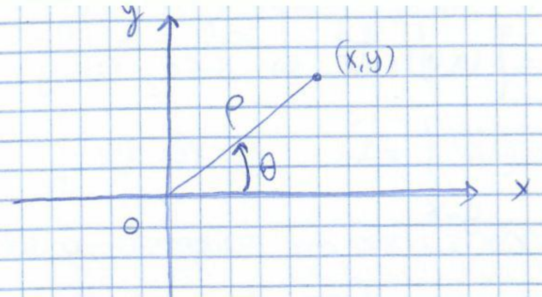
$\begin{cases} x^2 = 1-y^2 & x \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 & x \ge 0 \end{cases}$

È anche y-semplice

$$\int_{\Omega} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx \right] dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

parametro



$$\boxed{J_\Phi(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}(\rho,\theta) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}(\rho,\theta) \end{pmatrix} = *$$

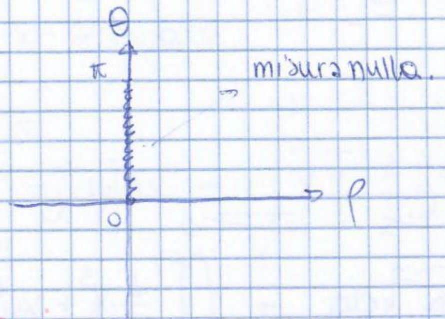
$$\Phi(\rho,\theta) = (\Phi_1(\rho,\theta), \Phi_2(\rho,\theta)) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}, \boxed{|\det J_\Phi(\rho,\theta)|} = |\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta| = |\rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)|$$

$$= |\rho| = \rho$$

$\rho \geq 0$

OSS: Il determinante deve essere $\emptyset \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \det J_\Phi = 0$ su $\{0\} \times [0, \pi]$



12/10/12

ESERCITAZIONI

y-semplici, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

x-semplice, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

CAMBIAMENTO di VARIABILE

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \underset{(x,y) = \Phi(u,v)}{=} \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v))\,|\det J_\Phi(u,v)|\,du\,dv$$

$$(\Omega = \Phi(\Omega'))$$

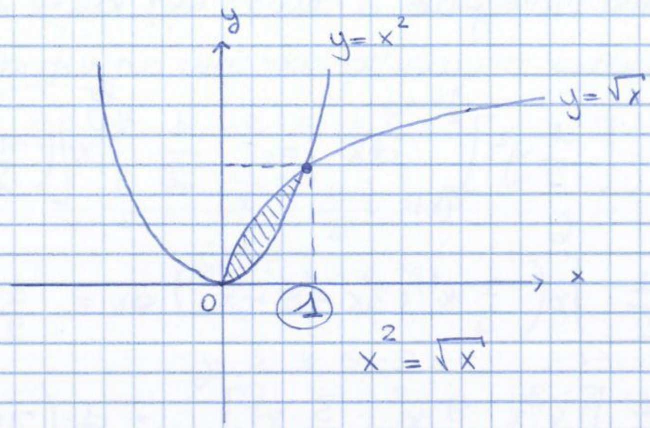
→

$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 \left[3-(-1)\right] - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1 \left[e^y\right]_{-1} = \frac{28}{3} - \frac{3}{2}(e^3 - e^{-1})$$

3) Calcolare $\int_\Omega xy \, dx\, dy$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

Sembrerebbe y-semplice, ma non c'è nulla sulla x. Come lo trovo?

1) metodo algebrico (diseq.)
2) " grafico
3) " misto



Scopriamo così che

$0 \le x \le 1$

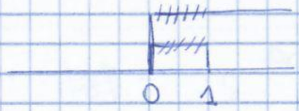
$x^2 = \sqrt{x}$

1) $x^2 \le \sqrt{x}$ $\quad x \ge 0$

$x^4 \le x$

$x^4 - x \le 0$

$\begin{cases} x(x^3-1) \le 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$



$\Rightarrow 0 \le x \le 1$

Ω è y-semplice, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1\}$

Ma è anche x-semplice.

- y semplice:

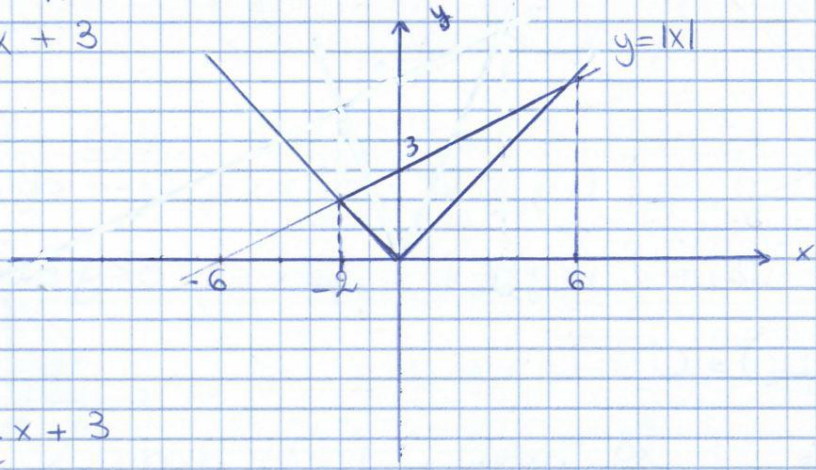
$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\, dy\right] dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x - x^4)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^5)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

4) Calcolare $\int_\Omega xy\, dx\, dy$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le \frac{1}{2}x + 3\}$

Di nuovo non sappiamo dove sta la x.

$|x| \le \frac{1}{2}x + 3$



$|x| = \frac{1}{2}x + 3$

$x > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}x + 3$

$x - \frac{1}{2}x = 3$

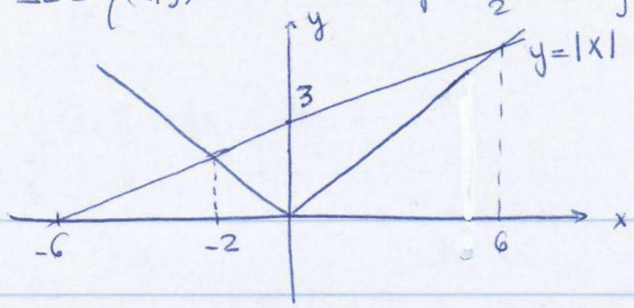
$x = 6$

$\Rightarrow \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le \frac{1}{2}x + 3,\ -2 \le x \le 6\}$

$x < 0 \Rightarrow -x = \frac{1}{2}x + 3$

$x = ...$

④ $\int_{\Omega} xy \, dx\,dy$ $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le \frac{1}{2}x + 3\}$



$y = |x|$

$y = \frac{1}{2}x + 3$

$|x| \le \frac{1}{2}x + 3$

$x > 0$: $x \le \frac{1}{2}x + 3$; $x - \frac{1}{2}x \le 3$; $\frac{2-1}{2}x \le 3$; $\frac{1}{2}x \le 3$; $x \le 6$

$x < 0$: $-x \le \frac{1}{2}x + 3$; $-x - \frac{1}{2}x \le 3$; $\frac{-2-1}{2}x \le 3$; $-\frac{3}{2}x \le 3$; $x \ge -\frac{6}{3}$

$x = 6$ $x = -2$ $x \ge -2$

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 6 , |x| \le y \le \frac{1}{2}x + 3\}$

$$\int_{-2}^{6} \left[\int_{|x|}^{\frac{1}{2}x+3} xy \, dy \right] dx = \int_{-2}^{6} x \left[\int_{|x|}^{\frac{1}{2}x+3} y \, dy \right] dx =$$

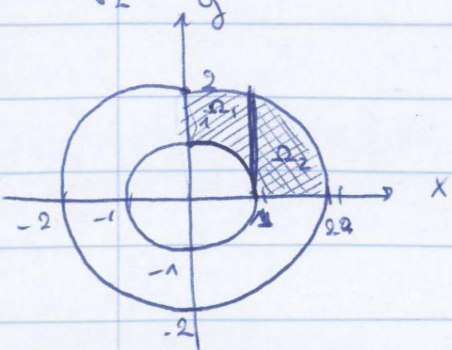
$$= \int_{-2}^{6} x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{|x|}^{\frac{1}{2}x+3} dx = \int_{-2}^{6} x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2 - \frac{1}{2}|x|^2 \right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{6} x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 + 9 + 3x \right) - \frac{1}{2}x^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{6} x \left(\frac{1}{4}x^2 + 9 + 3x - x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{6} \left(\frac{1}{4}x^3 + 9x + 3x^2 - x^3 \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^{6} =$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} \right.$ ooo Ok!

⑤ $\int_{\Omega} \frac{xy}{x^2+y^2} \, dx\,dy$ $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 , x \ge 0 , y \ge 0\}$



$1 - x^2 \le y^2 \le 4 - x^2$

$\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$ $y \ge 0$

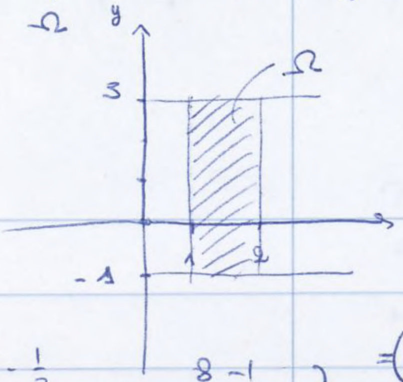
$y = \sqrt{1-x^2}$ $y = \sqrt{4-x^2}$

$y^2 = 1 - x^2$ $y^2 = 4 - x^2$

$x^2 + y^2 = 1$ $x^2 + y^2 = 4$

$\Omega_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 , \sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \}$ $\Omega_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2 , 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$

② $\int_{\Omega} (x^2 - xe^y)\,dx\,dy \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 3\}$



$\cancel{\int_1^2 x^2 - x}\ \left(\int_1^2 x^2\,dx\right)\left(\int_{-1}^3 1\,dy\right) - \left(\int_1^2 x\,dx\right)\left(\int_{-1}^3 e^y\,dy\right)$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 \cdot 2 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \left[e^y\right]_{-1}^3 =$

$= \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)\frac{7}{3} \cdot 2 - \left(\frac{1}{2}4 - \frac{1}{2}\right)\left(e^3 - e^{-1}\right) =$

$= \frac{14}{3} - \frac{3}{2}\left(e^3 - e^{-1}\right)$

$2 - \frac{1}{2}$

$\frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} \qquad \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$

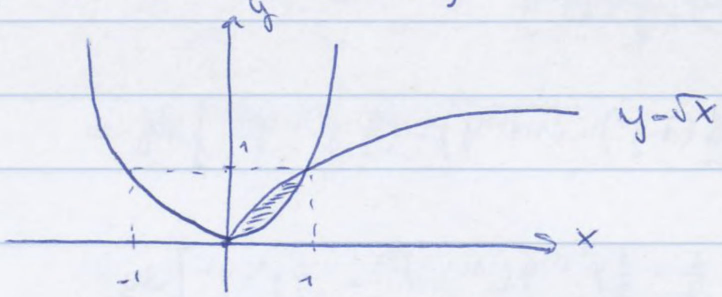
③ $\int_{\Omega} xy\,dx\,dy \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

$y = x^2$

$y = \sqrt{x}$

$y^2 = x$

$x = y^2$



$\boxed{0 \le x \le 1}$

In modo analitico: $x^2 \le \sqrt{x}$

$x^4 \le x$

$x^4 - x \le 0$

$x(x^3 - x) \le 0$

$\begin{cases} x \le 0 \\ x^3 - x \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - 1 \le 0 \end{cases}$

$x \le 0$

x

$x(x^2 - 1) \le 0$

$x^2 - 1 \le 0$

$x^2 \le 1$

$-1 \le x \le 1$

$0 \le x \le 1$

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$ y-semp.

$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\right] dx = \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^4\right] dx =$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}x(x - x^4)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 - x^5\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1 =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2-1}{6}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

coordinate polari nel piano :

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \,, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$|\det J_{\Phi}(\rho,\theta)| = \rho$$

$\Downarrow$

Possiamo fare il cambiamento di coordinate

$$\int_{\Omega} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\,\rho\cdot d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\Omega'} \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}}\,\cancel{\rho}\,d\rho\,d\theta = \int_{\Omega'} \rho^2\cos\theta\sin\theta\,d\rho\,d\theta$$

$$\Omega' = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 1 \leq \rho \leq 2,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

15/10/12

COORDINATE ELLITTICHE nel PIANO

Sia $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e siano $a,b>0$ $\quad \Phi : [0,+\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$$\Phi(\rho,\theta) = (x_0 + a\rho\cos\theta,\; y_0 + b\rho\sin\theta)$$

Se $(x_0,y_0) = (0,0)$ si ha

$$\Phi(\rho,\theta) = (a\rho\cos\theta,\; b\rho\sin\theta)$$

$$J_{\Phi}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\det J_{\Phi}(\rho,\theta)| = |ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\sin^2\theta| = |ab\rho| = ab\rho$$

$\rho = 0 \Rightarrow \det J_{\Phi} = 0 \qquad A\,\{0\}\times[0,2\pi] \Rightarrow m(A) = 0$

$\rho = 0 \Rightarrow \Phi$ non è iniettiva

$\theta = 0 \quad \theta = 2\pi \Rightarrow \Phi$ non è iniettiva $\qquad A' = [0,+\infty)\times\{2\pi\}$ semiretta a misura nulla

$m(A') = 0$

OSS: Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, Ω è simmetrico rispetto all'asse x se $\forall (x,y)\in\Omega$ anche $(x,-y)\in\Omega$

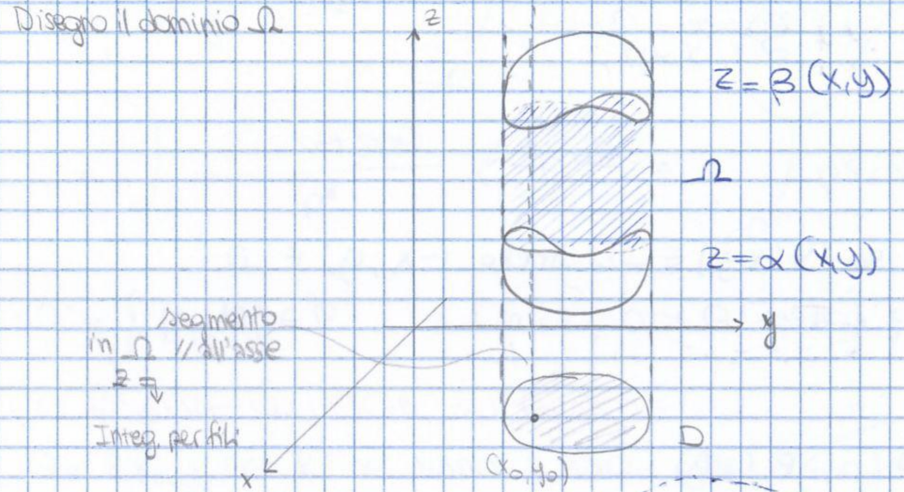
CALCOLO degli INTEGRALI TRIPLI

1. Integrazione per fili paralleli ad un asse

Asse z:

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; (x,y) \in D, \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un compatto non vuoto e $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ sono fnz continue ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione continua.

Disegno il dominio Ω



$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy$$

Integrale in una variabile $= F(x,y)$
A questo punto ci rimane da integrale $F(x,y)$ come integrale doppio.

Asse x:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D, \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right] dy\,dz$$

Asse y:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D, \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\}$$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right] dx\,dz$$

Esempio:

$$\int_\Omega (x^2+y^2) z \, dx\, dy\, dz \; , \quad \text{dove } \Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, \; z \ge 0 \}$$

Integrazione per fili → una delle var tra fnz

" per piani → " " " tra intervallo

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ z \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z^2 \le 1 - x^2 - y^2 \\ z \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \\ z \ge 0 \\ 1-x^2-y^2 \ge 0 \end{cases}$$

≤ 0

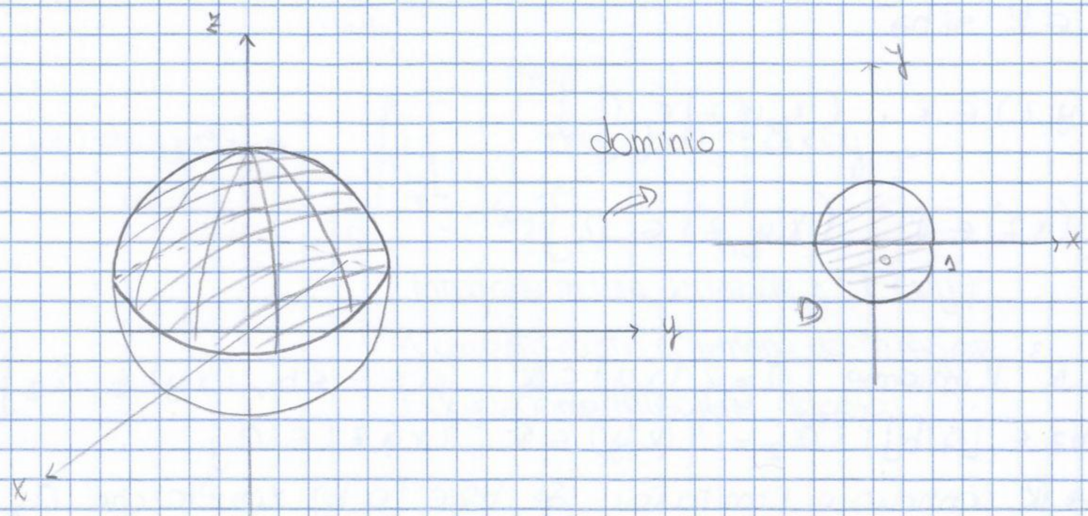
Quindi:

$$0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$$

Condiz. $x^2+y^2 \le 1$

$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \; 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \}$, dove $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1 \}$

A questo punto integro x fili paralleli



$$\int_\Omega (x^2+y^2) z \, dx\, dy\, dz = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2) z \, dz \right] dx\, dy =$$

$$= \int_D x^2+y^2 \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\, dy = \frac{1}{2} \int_D (x^2+y^2)(1-x^2-y^2) \, dx\, dy =$$

⇒ L'insieme D è sia x- che y- semplice. Coordinate polari:

$$\Phi \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \ge 0, \; 0 \le \theta \le 2\pi \qquad |\det J_\Phi(\rho,\theta)| = \rho$$

$$= \frac{1}{2} \int_{D'} \rho^2 (1-\rho^2) \rho \, d\rho\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{D'} (\rho^3 - \rho^5) \, d\rho\, d\theta =$$

⇒ D' : $\Phi(D') = D \quad (x,y) \in D \iff x^2+y^2 \le 1 \iff \{ \rho^2 \le 1 \; (\rho \ge 0 \;\; 0 \le \theta \le 2\pi)$

TEOREMA (del cambiamento di variabile)

Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ aperti misurabili, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata e $\Phi: \Omega' \to \Omega$ una funzione tale che:

1) Φ è iniettiva;
2) Φ è di classe C^1 su Ω' con $\det J_\Phi(u,v,w) \neq 0$, $\forall u,v,w \in \Omega'$

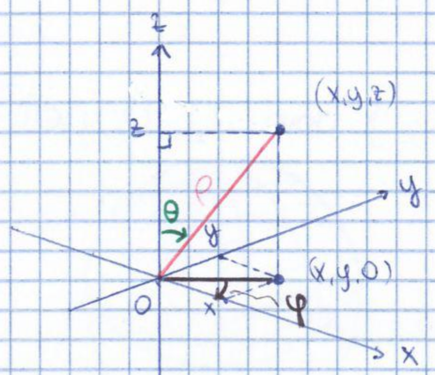
Allora

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v,w))\,|\det J_\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$(x,y,z) = \Phi(u,v,w)$$
$$\Phi(\Omega') = \Omega$$

OSS: Se Φ non è iniettiva su $A \subseteq \Omega'$ con $m(A)=0$ oppure se $\det J_\Phi = 0$ su $A \subseteq \Omega'$ con $m(A)=0$, allora la formula continua a valere.

COORDINATE POLARI nello SPAZIO (SFERICHE)



$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta =$ COLATITUDINE

$\rho\,\mathrm{sen}\theta \to \varphi =$ LONGITUDINE

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

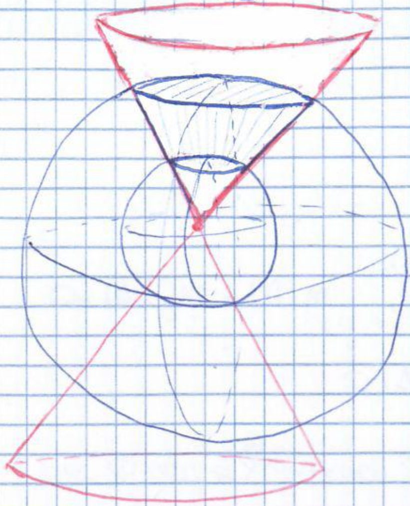
Sia $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\Phi: \underset{\rho}{[0,+\infty)} \times \underset{\theta}{[0,\pi]} \times \underset{\varphi}{[0,2\pi]} \to \mathbb{R}^3$

$$\Phi(\rho,\theta,\varphi) = (x_0 + \rho\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi,\ y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi,\ z_0 + \rho\cos\theta)$$

$$J_\Phi(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi \\ \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi & \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi & \rho\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Per $\rho = 0 \Rightarrow \det J_{\Phi}(\rho, \theta, z) = 0$ Stesse considerazioni precedenti.

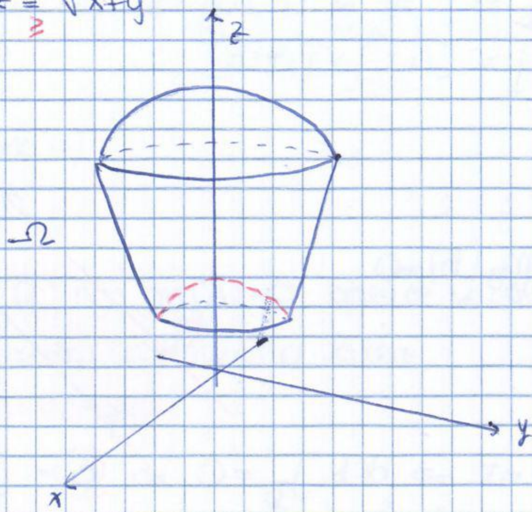
ES: Calcolare $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, dove $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x^2+y^2-z^2 \le 0,\ z \ge 0 \right\}$



$x^2+y^2 = z^2$ CONO

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$\ge$



Quando tagliamo il grafico otteniamo quasi sempre cerchi, al fondo sono corone circolari.

Sarebbe meglio cambiare le coord $\rightarrow$ COORD. POLARI

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad \rho \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$|\det J_{\Phi}(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2 \sin\theta$$

$$\int_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \frac{\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi)+(\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)} \cdot \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_{\Omega'} \frac{\cancel{\rho^2}\cancel{\sin^2\theta}\cos^2\theta}{\cancel{\rho^2}\cancel{\sin^2\theta}}\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_{\Omega'} \rho^2\sin\theta\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

Ω' ? $\Phi(\Omega') = \Omega$

$$(x,y,z) \in \Omega \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2 \\ x^2+y^2 \le z^2 \\ z \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{coord polari}} \begin{cases} 1 \le \rho^2 \le 2 \\ \rho^2\sin^2\theta \le \rho^2\cos^2\theta \\ \rho\cos\theta \ge 0 \end{cases}$$

con $\rho \ge 0$ $\quad 0 \le \theta \le \pi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\begin{cases} 1 \le \rho \le \sqrt{2} \\ \sin^2\theta \le \cos^2\theta \\ \cos\theta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le \rho \le \sqrt{2} \\ \text{sen}\,\theta \le \cos\theta \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \Rightarrow \begin{cases} 1 \le \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \text{ SOLUZ.}$$

ESERCITAZIONI del 19/10/12

1) Calcolare:

$$\int_{\Omega} xy \, dx\,dy \quad , \quad \text{dove } \Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, \ x^2+y^2 \leq 2x, \ y \geq 0 \right\}$$

Cambiamento di coord → polari in $(0,0)$

$$\Phi \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$|\det J_{\Phi}(\rho,\theta)| = \rho$$

$$\int_{\Omega} xy \, dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^2 \cos\theta \sin\theta \ \rho \cdot d\rho\, d\theta = \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\rho\, d\theta \Rightarrow$$

$\Omega' = ?$ $\quad \Phi(\Omega') = \Omega$

$$(x,y) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq 2x \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2 \leq 1 \\ \rho^2 \leq 2\rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \\ \text{sen}\theta \geq 0 \\ \cos\theta \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \iff$$

Δ $\rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\begin{cases} 0 \leq \boxed{\rho \leq 1} \\ 0 \leq \boxed{\rho \leq 2\cos\theta} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Omega'$$

→ per θ $\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ è sempre vera la prima? o la 2°? o entrambe?

$1 \leq 2\cos\theta$ (oppure $1 \geq 2\cos\theta$) se la rix è sempre → è vera la 1^ mai → è vera la 2^ ecc...

$\cos\theta \geq \frac{1}{2}$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \iff \underbrace{\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}}_{\Omega'_1} \cup \underbrace{\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \\ \frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}}_{\Omega'_2}$$

$$\Omega'_1 = \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\Omega'_2 = \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta, \ \frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Avremmo anche potuto fare il disegno → in questo modo controlliamo la correttezza delle soluz.

→

2) Calcolare:

$$\iint_{\Omega} \left(4+4x-3x^2-4y^2\right) dx\,dy \;, \text{ dove } \Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2\sqrt{x^2+y^2} \le x+2 \right\}$$

$2\sqrt{x^2+y^2} \le x+2$ Scriviamo in un altro modo

$$\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ 4x^2+4y^2 \le (x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -2 \\ 4x^2+4y^2 \le x^2+4+4x \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -2 \\ 3x^2+4y^2-4x-4 \le 0 \end{cases}$$

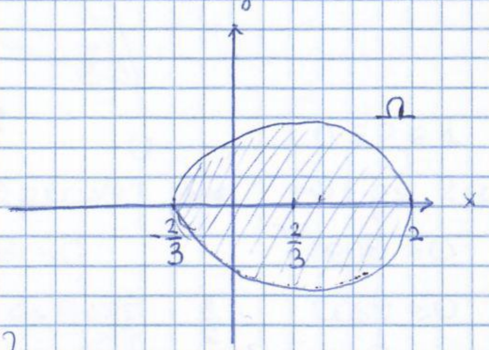
$\underline{3x^2}+4y^2-\underline{4x}-4 \le 0$ Tutto questo uguale a zero $\rightarrow$ ellisse

Obiettivo: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$

$$\left(\sqrt{3}x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4}{3} + 4y^2 - 4 \le 0$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + 4y^2 \le \frac{16}{3}$$

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \le 1 \quad \text{ok!}$$



$a = \frac{4}{3}$

$b = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \le 1 \right\}$$

ELLITTICHE centrate in $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

$$\Phi : \begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\rho\cos\theta \\ y = 0 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases}$$

$\rho \ge 0 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$|\det J_{\Phi}(\rho,\theta)| = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{3}\rho = \frac{8}{9}\sqrt{3}\rho$

$$\iint_{\Omega} \left(4x-4-3x^2-4y^2\right) dx\,dy = \iint_{\Omega} \left[\frac{16}{3} - 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - 4y^2\right] dx\,dy =$$

$$= \iint_{\Omega'} \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{3}\rho^2\cos^2\theta - \frac{16}{3}\rho^2\mathrm{sen}^2\theta\right) \frac{8}{9}\sqrt{3}\rho \, d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{8}{9}\sqrt{3}\,\frac{16}{3} \iint_{\Omega'} (1-\rho^2)\rho \, d\rho\, d\theta \Rightarrow (x,y) \in \Omega \iff \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \le 1 \iff$$

$$\iff \frac{\frac{16}{9}\rho^2\cos^2\theta}{\frac{16}{9}} + \frac{\frac{4}{3}\rho^2\sin^2\theta}{\frac{4}{3}} \le 1 \iff \begin{cases} \rho^2 \le 1 \\ \rho \ge 0 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$\rightarrow$

$= \frac{1}{2} \int_0 (x-1)^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_0 = \frac{1}{6}(0+1) = \boxed{\frac{1}{6}}$

3) Calcolare

$$\int_\Omega \frac{x}{x^2+z^2}\, dx\, dy\, dz \quad , \Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+z^2 < 2x,\ 0 < y < \sqrt{x^2+z^2} \right\}$$

Dobbiamo guardare il dominio. Fili paralleli all'asse y.

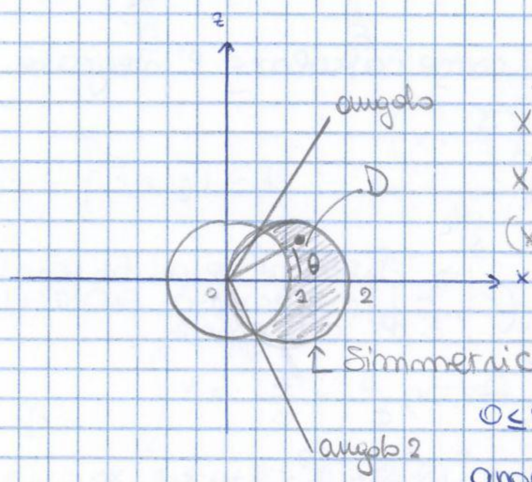
$$\int_\Omega \frac{x}{x^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{x^2+z^2}} \frac{x}{x^2+z^2}\, dy \right] dx\, dz =$$

$$= \int_D \frac{x}{x^2+z^2} \left(\sqrt{x^2+z^2} \right) dx\, dz = \int_D \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\, dx\, dz \quad , D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+z^2 < 2x \right\}$$

Cambriamento di coord $\rightarrow$ polari nel piano xz

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \quad \boxed{0 \leq \theta \leq 2\pi} * \triangle$$

$$|\det J_\Phi(\rho,\theta)| = \rho$$



$x^2+z^2=1$

$x^2+z^2=2x$

$(x-1)^2+z^2=1$

↑ Simmetrico rispetto all'asse x

$0 \leq \theta \leq$ angolo

angolo 2 $\leq \theta \leq 2\pi$

Allora se scegliamo:

$-\pi \leq \theta \leq \pi \implies$ - qualcoso $\leq \theta \leq$ + qualcoso

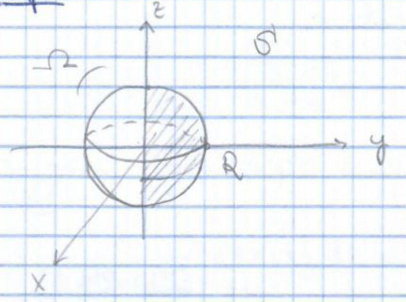
$$\int_{D'} \frac{\rho\cos\theta}{\rho}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{D'} \rho\cos\theta\, d\rho\, d\theta \implies D' \ ?$$

$(x,z) \in D \iff 1 < x^2+z^2 < 2x$

$$\begin{cases} 1 < \rho^2 < 2\rho\cos\theta \\ \rho \geq 0 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases} \iff \begin{cases} 1 < \rho < 2\cos\theta \\ -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3} \end{cases} \qquad 2\cos\theta > 1 \rightarrow -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$$

Se $S' = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : z \geq 0\}$ allora il volume dell'insieme Ω ottenuto dalla rotazione completa di S' attorno all'asse y è $m(\Omega) = 2\pi \int_{S'} z \, dy dz$

Esempio:



$$m(\Omega) = 2\pi \int_{S'} y \, dy dz =$$

polari in yz

$$\Phi : \begin{cases} y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \rho \geq 0 \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$|\det J_\Phi(\rho, \theta)| = \rho$$

$$= 2\pi \int_{S'} \rho\cos\theta \, \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_{S'} \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta$$

$$S' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq R, \ -\tfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\} \ / \ S' = [0, R] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$= 2\pi \left(\int_0^R \rho^2 d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta\right) = 2\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^R \left[\operatorname{sen}\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi R^3 (1+1) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$ Ok! È proprio il volume della sfera.

Esempio:

Volume del TORO: $y_0 > R > 0$ $\quad m(\Omega) = 2\pi y_0 \pi R^2 = 2\pi^2 y_0 R^2$

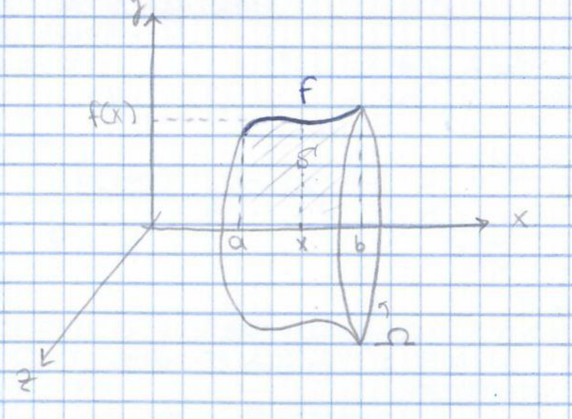
lunghezza della crf descritta dall'ordina : 2π per la y del baricentro

area della sezione S

Esempio:

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$,

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$ e Ω ottenuto dalla rotazione completa di S' attorno all'asse x.



Allora:

$$m(\Omega) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

y-semplici

DIM: $m(\Omega) = 2\pi \int_{S'} y \, dx dy =$

$$= 2\pi \int_a^b \left[\int_0^{f(x)} y \, dy\right] dx = 2\pi \int_a^b \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^{f(x)} dx$$

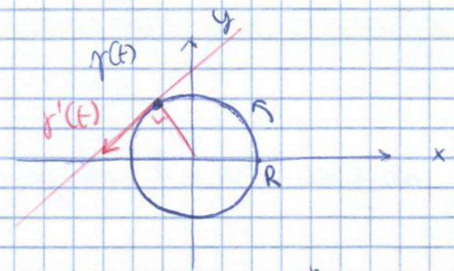
$$= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

C.V.D.

Se $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$

$\gamma'(t) \neq 0 \Rightarrow \gamma'(t) \neq (0, \dots, 0)$

Vettore tangente : $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \rightarrow \gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$



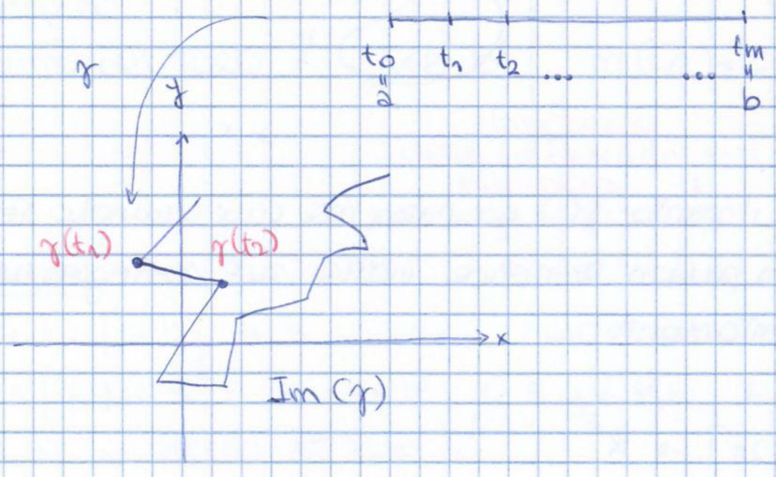
Def: Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrica. Diciamo che γ è regolare a tratti se valgono TUTTI i fatti:

1- γ è derivabile in $[a,b]$ con derivata continua tranne che in un numero finito di punti;

2- dove γ è derivabile si ha che $\gamma' \neq 0$ tranne che in un numero finito di punti;

3- dove γ non è derivabile $\exists$ le derivate laterali (dx e sx).

In altri termini, $\exists\ t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ tale che $\gamma_{|[t_{k-1}, t_k]}$ è regolare $\forall k = 1, \dots, m$



Def: Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\eta: J \rightarrow \mathbb{R}^m$ ~~date~~ due curve param. Diciamo che γ e η sono equivalenti se $\exists\ \alpha: J \rightarrow I$ biettiva di classe C^1 su I con $\alpha'(\tau) > 0 \quad \forall (\tau) \in J$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$

Prop: Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\eta: J \rightarrow \mathbb{R}^m$ ~~come~~ curve parametriche equivalenti e α come nella def. precedente. Allora si ha che:

a) γ e η hanno lo stesso sostegno

b) γ è semplice $\Leftrightarrow$ η è semplice

c) γ è derivabile $\Leftrightarrow$ η è derivabile e in tal caso si ha che $\forall \tau \in J$:

$\eta'(\tau) = \gamma'(\alpha(\tau))\,\alpha'(\tau)$. Inoltre γ è regolare $\Leftrightarrow$ η è regolare

d) γ e η inducono lo stesso verso parametrico sul sostegno

$v(t) = \left[F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\right] \gamma'(t)$

$$\|v(t)\| = \| [\underbrace{F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{\in \mathbb{R}}] \gamma'(t) \| = |F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| \cdot \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{=1} =$$

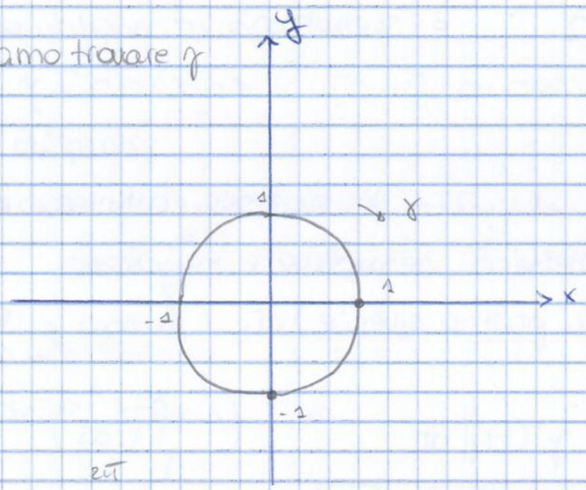
$$= |F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|$$

Funzione integranda.

ES:

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = (y, x^2+y^2)$ lungo la curva γ di che parametrizza la circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio 1 percorsa una sola volta in senso orario.

Dobbiamo trovare γ



Se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è chiusa

$\int_\gamma F \cdot dP$ è detto CIRCUITAZIONE di F lungo γ e si denota $\oint_\gamma F \cdot dP$

oppure $\oint_\gamma F\,dP$ $\oint_\gamma F\,dP$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, -1 \operatorname{sen} t)$ funz derivabili e continue

$\gamma(0) = (1,0)$ $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,-1)$

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, -\cos t) \neq (0,0)$ sempre!

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

Calcoliamo il prodotto scalare

$$F(\gamma(t)) = F(\overset{x}{\cos t}, \overset{y}{-\operatorname{sen} t}) = (-\operatorname{sen} t, \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = (-\operatorname{sen} t, 1)$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, 1) \cdot (-\operatorname{sen} t, -\cos t) = \operatorname{sen}^2 t - \cos t$$

$$= \int_0^{2\pi} (+\operatorname{sen}^2 t - \cos t)\, dt = \left[\frac{1}{2}(t - \operatorname{sen} t \cos t) - \operatorname{sen} t\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Curve equivalenti

$\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\eta(t) = (\overset{x}{\cos(2\pi t)}, \overset{y}{-\operatorname{sen}(2\pi t)})$

Anche η descrive la stessa curva con lo stesso verso

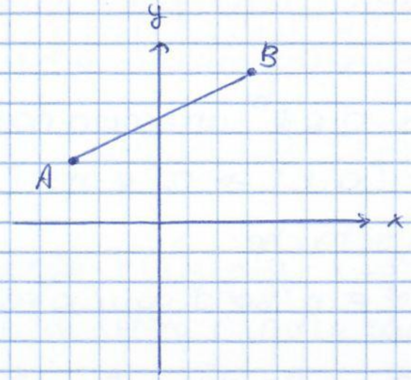
$\eta(0) = (1,0)$ $\eta\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}, -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0,-1)$

$\eta(t) = \gamma(2\pi t)$ quindi è una curva equivalente

$\alpha(t) = 2\pi t$

$\gamma(\alpha(t)) = (\gamma \circ \alpha)(t)$ $0 \leq t \leq 1$

OSS: Se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ una parametrizzazione del segmento AB da A ver
B è: $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$



$$\gamma(t) = \Big(x_A + t(x_B - x_A),\ y_A + t(y_B - y_A)\Big)$$

CASO PARTICOLARE

$x_A \neq x_B \quad y_A \neq y_B$ (la formula vale anche se $x_A = x_B$, $y_A = y_B$)

$(x,y) = \gamma(t) \qquad \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_B + t(y_B - y_A) \end{cases}$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} \\ y = y_A + \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) \end{cases} \Rightarrow \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

eq. della retta passante tra due punti con coord. $\neq$

Dal disegno, $x_A < x_B \quad y_A < y_B$

$0 \leq t \leq 1$

$$x_A \leq x_A + t\underbrace{(x_B - x_A)}_{>0} \leq x_A + 1(x_B - x_A) = x_B$$

$\Rightarrow \forall\ x_A \leq x \leq x_B$

Analogamente $\Rightarrow y_A \leq y \leq y_B$

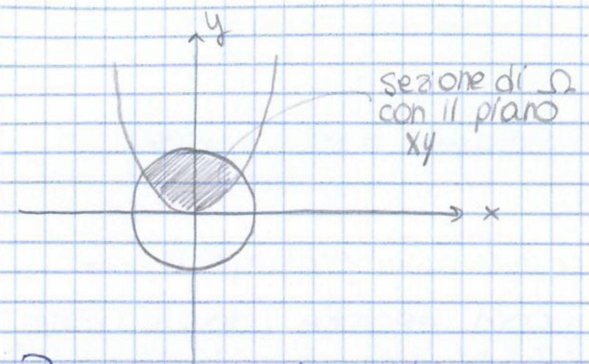
OSS: $A(x_A, y_A, z_A) \qquad B(x_B, y_B, z_B)$

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = \Big(x_A + t(x_B - x_A),\ y_A + t(y_B - y_A),\ z_A + t(z_B - z_A)\Big)$$

$\downarrow$ PARAMETRIZZAZIONE di UN SEGMENTO

PIANO xy $z=0$ Piano yz, $x=0$



Otteniamo lo stesso disegno

⚠ È un solido di rotazione

Possiamo cambiare le coordinate sferiche con colatitudine misurata dall'asse y.

$$\Phi: \begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho\cos\theta \\ z = \rho \sin\theta \sin\varphi \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$|\det J_\Phi(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2 \sin\theta$$

$$\int_\Omega (x^2+y^2+z^2-1)y \, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} (\rho^2-1)\rho\cos\theta \, \rho^2 \sin\theta \, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_{\Omega'} (\rho^5-\rho^3)\cos\theta \sin\theta \, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Omega' = ? \quad \Phi(\Omega') = \Omega, \quad (x,y,z) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 < 2 \\ x^2+z^2 < y \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \rho^2 < 2 \\ \rho^2 \sin^2\theta < \rho\cos\theta \\ \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq \rho < \sqrt{2} \\ \rho\sin^2\theta < \cos\theta \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 0 \leq \rho < \sqrt{2} \\ 0 \leq \rho \leq \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Sarebbe troppo complesso!! Perché dovrei integrare $\dfrac{\cos^7\theta}{sen^{11}\theta}$!!

Allora scegliamo le coordinate cilindriche con asse // asse y.

$$\Phi: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = y \\ z = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad y \in \mathbb{R}$$

$$|\det J_\Phi(\rho,\theta,y)| = \rho$$

$$\int_\Omega (x^2+y^2+z^2-1)y \, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} (\rho^2+y^2-1)y\rho \, d\rho\, d\theta\, dy =$$

$$\Phi(\Omega') = \Omega, \quad (x,y,z) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 < 2 \\ x^2+z^2 < y \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2+y^2 < 2 \\ \rho^2 < y \\ \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad y \in \mathbb{R} \end{cases} \iff$$

$\Omega_3 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq y \leq 2 \}$ $x^2+z^2 \leq 2 \to$ fili //

$\Omega_4 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + x^2 + z^2 \leq y \leq 2 \}$ $x^2+z^2 \leq 1 \to$ fili // con coord

$\boxed{\frac{8}{3}\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi}$ svolgilo.

INTEGRALI CURVILINEI

1) Calcolare $\int_\gamma F \cdot dP$, $F(x,y) = (xy, x-y)$ e $\gamma : \underbrace{[0,1]}_{} \to \mathbb{R}^2$ è $\gamma(t) = (t, t^2)$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \;\text{⊜}$$

$$F(\gamma(t)) = F(\underset{x}{t}, \underset{y}{t^2}) = (t^3, t - t^2)$$

$$\gamma'(t) = (1, 2t)$$

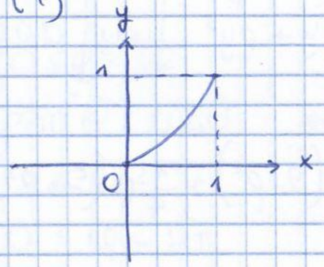
$$F(\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = (t^3, t-t^2) \cdot (1, 2t) = t^3 + (t-t^2)2t = t^3 + 2t^2 - 2t^3 = 2t^2 - t^3$$

$$\text{⊜} \int_0^1 (2t^2 - t^3)\, dt = \left[\frac{2}{3} t^3 - \frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \boxed{\frac{5}{12}}$$

Prendiamo una curva equivalente $\eta(t) = (t^2, t^4)$

$(x,y) = \gamma(t) = t, t^2$

$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow$ ~~xxy~~ $y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$



2) Calcolare $\int_\gamma F \cdot dP$, $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \;\text{⊜}$$

$$F(\gamma(t)) = F(\cos t, \operatorname{sen} t) = \left(\frac{\cos t}{1}, \frac{\operatorname{sen} t}{1} \right) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) = -\sin t \cos t + \operatorname{sen} t \cos t = 0$$

$$= \int_0^{2\pi} 0\, dt = \boxed{0}$$

Il risultato è giusto perché F è un campo conservativo.

la Jacobiana di σ in ogni $(u,v) \in A$ è massimo, cioè è 2.

Si chiama calotta regolare la restrizione di una superficie parametrica σ regolare e semplice ad un compatto $K \subseteq A$, tale che ∂K è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti.

$\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

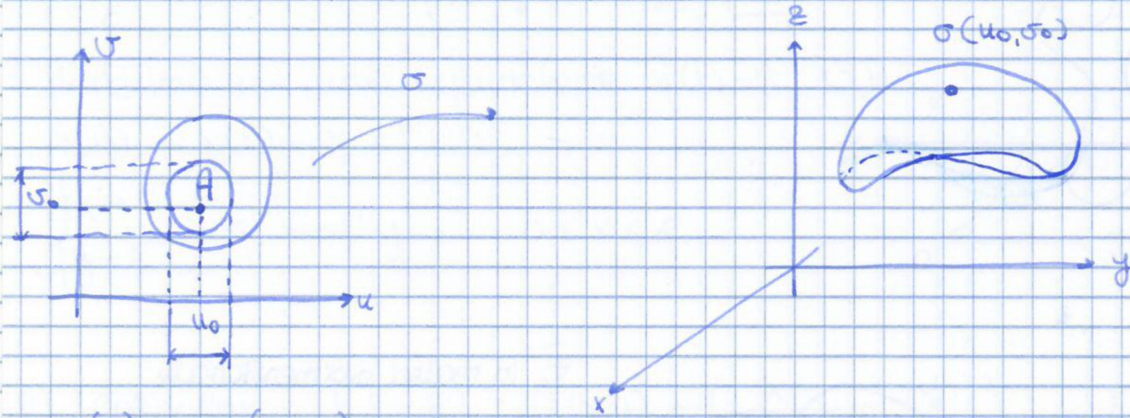
$\sigma(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$

La matrice $J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{\frac{\partial \sigma}{\partial u}\Big|_{u,v}}} & \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{\frac{\partial \sigma}{\partial v}\Big|_{u,v}}} \end{pmatrix}$ $\boxed{3 \times 2}$

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \qquad J_\sigma(u,v) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Il rk = n° max di colonne indipendenti (o righe). Cioè $\boxed{2}$

$rk(J_\sigma(u,v)) = 2 \iff \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$ sono linearm. indip.



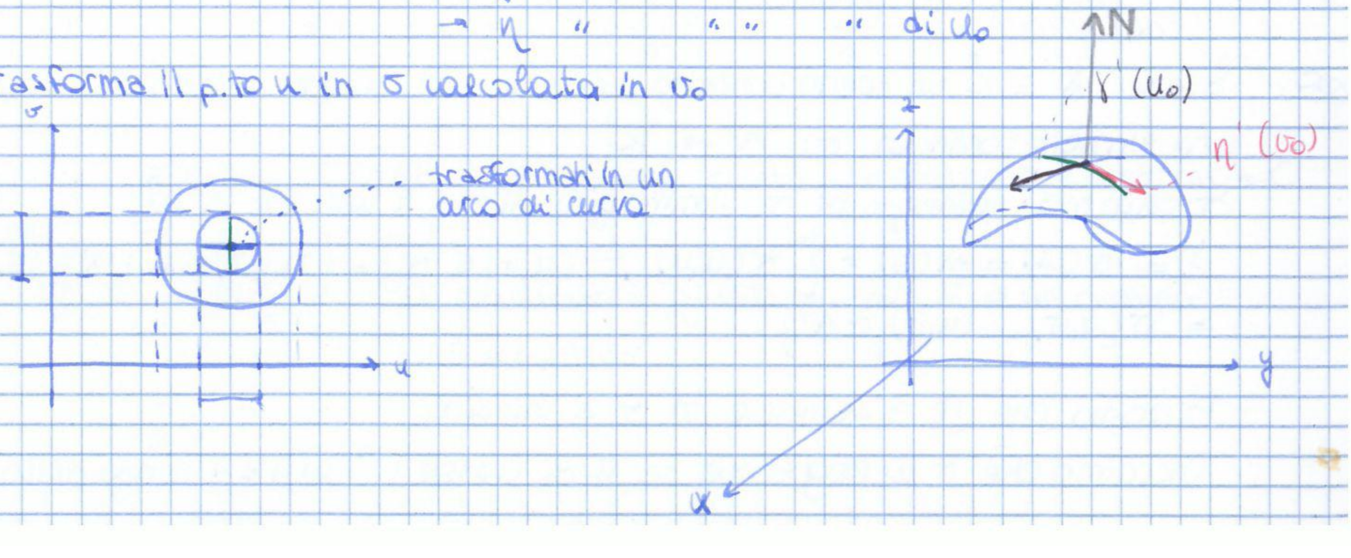
$\Sigma = \sigma(A)$

$\gamma(u) = \sigma(u, v_0)$
$\eta(v) = \sigma(u_0, v)$

γ e η sono 2 curve parametriche:
- γ ha un'unica variabile $\to u$
- η " " " " $\to v$

$\to$ γ definita in un intorno di v_0
$\to$ η " " " " di u_0

γ trasforma il p.to u in σ calcolata in v_0



$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos v \\ y = \rho\sin v \\ z = u \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R} \qquad 0 < v < 2\pi$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2 v + \rho^2\sin^2 v = \rho^2$$

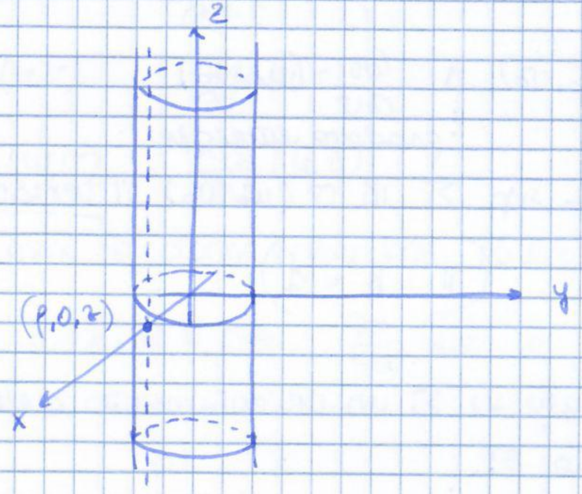
$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \rho^2,\ z \in \mathbb{R}\}$$ Tutto il cilindro retto.

In realtà non proprio tutti (ρ 0)

$$x \neq \rho,\ y \neq 0 \Leftarrow v \neq 0,\ 2\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \rho^2,\ z \in \mathbb{R}\} \setminus \{(\rho,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$$



$\{(\rho,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \end{array} \\ J_\sigma(u,v) = & \begin{pmatrix} 0 & -\rho\sin v \\ 0 & \rho\cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La 1^ colonna non è mai nulla e nemmeno la 2^. Non sono dipendenti.

$\downarrow$

$rk(J_\sigma(u,v)) = 2 \Rightarrow \sigma$ è Regolare.

Provo a calcolare il vettore normale.

ES: $\rho > 0$ fissato. Sia $\sigma : (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u,v) = (\rho\sin u\cos v,\ \rho\sin u \sin v,\ \rho\cos u)$$

$\Sigma = im(\sigma)$? σ è regolare?

$$\Sigma = im(\sigma) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \sigma(u,v),\ 0 < u < \pi,\ 0 < v < 2\pi\}$$

$$\begin{cases} x = \rho\sin u\cos v & 0 < u < \pi \\ y = \rho\sin u \sin v & 0 < v < 2\pi \\ z = \rho\cos u \end{cases}$$

$$J_\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x,y} & \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x,y} \end{pmatrix}$$

Non su nulli e nemmeno multipli $\Rightarrow rk = 2$
$\Downarrow$
σ è regolare.

Fine richiamo

2/11/12

INTEGRALI di SUPERFICIE

__Def__: Siano $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compatto tale che ∂K è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare, $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si chiama integrale superficiale (o di superficie) di f su σ (o su Σ) il numero reale:

$$\int_\sigma f = \int_K f\left(\sigma(u,v)\right) \| N(u,v) \| \, du\, dv; \quad \text{dove } N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}\Big|_{u,v} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}\Big|_{u,v}$$

(Oppure $\int_\Sigma f \quad \int_\sigma f\, d\sigma \quad \int_\Sigma f\, d\sigma$)

Se $f = 1$ su $\Sigma \Rightarrow \int_\sigma f = \text{AREA di } \sigma$

⚠ è un integrale doppio.

__OSS__: Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ connesso per archi, $K \subseteq A$ compatto tale che ∂K è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $g: A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K, z = g(x,y)\}$.
Σ è il grafico di g ristretta all'insieme K, cioè:

$$\Sigma = G_{g|_K}$$

Σ è il sostegno di una sup. $\sigma|_K$, dove $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ è

$$\sigma(x,y) = \left(x, y, g(x,y)\right)$$

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}\Big|_{x,y} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}\Big|_{x,y} = \quad \text{POSSIAMO CALCOLARE il det} =$$

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

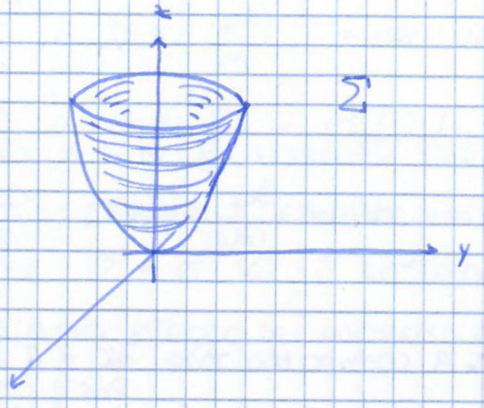
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\Big|_{x,y} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\Big|_{x,y} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}\Big|_{x,y} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}\Big|_{x,y} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}\Big|_{x,y} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}\Big|_{x,y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x,y} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{x,y} \end{vmatrix} =$$

$K = [0, 2\sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$ Rettangolo

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho(1+\rho^2)^{1/2}\, d\rho\right) = 2\pi \left[(1+\rho^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\pi(27-1) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot 26 = \frac{52}{3}\pi$$

$\mathbb{R}^3$:



ES: Calcolare: $\int_\Sigma (x^2+y^2)z \, d\sigma$, dove $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \le 1\right\}$

questo indica il fatto che sia un integrale di sup. Altrimenti avrei $\geq$

$\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è

$\sigma(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$. Poniamo

$f(x,y,z) = (x^2+y^2)z$

$$\int_\Sigma (x^2+y^2)z \, d\sigma = \int_\Sigma f(x,y,z)\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y)) \|N(x,y)\| \, dx\, dy =$$

dove $\|N(x,y)\| = \left\| \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right)\right\| =$

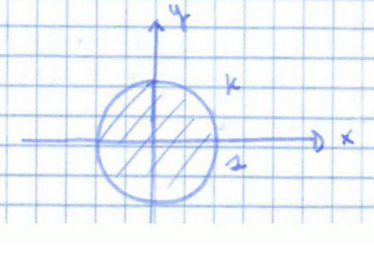
$$= \left\|\left(-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)\right\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \int_K f(x,y,\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \sqrt{2}\, dx\, dy =$$

$f(x,y,z) = (x^2+y^2)z$

$f(x,y,\sqrt{x^2+y^2}) = (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{3/2}$

$= \sqrt{2}\int_K (x^2+y^2)^{3/2}\, dx\, dy$ ORA DOBBIAMO CALCOLARE L'INTEGRALE DOPPIO.



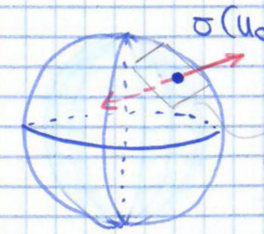
Cambiamo coord → polari

Consideriamo un qualunque punto (u_0, v_0) interno a K e controlliamo se $N(u_0, v_0)$ è entrante o uscente da D. { più zeri ci sono meglio è }

1° METODO:

Grafico. Disegno Σ

$\Sigma = \partial D$



· Prendiamo $\sigma(u_0, v_0)$

· Prendiamo $N(u_0, v_0)$

· Disegniamo N partendo da $\sigma(u_0, v_0)$

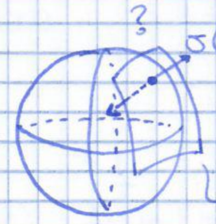
5/11/12

2° METODO:

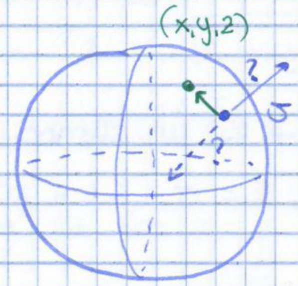
Vettoriale. Se D è convesso, si considera la seguente espressione:

$\forall (x,y,z) \in D$, $\boxed{[(x,y,z) - \sigma(u_0, v_0)] \cdot N(u_0, v_0)}$ Otteniamo un numero reale

Σ

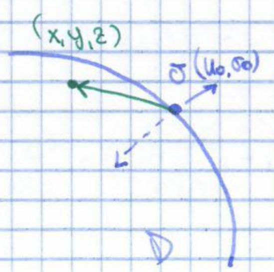


Prendiamo un qualunque punto $(x,y,z) \in \Sigma$



$(x,y,z) - \sigma(u_0, v_0)$

Oppure



Quando il prodotto scalare è

- $\leq 0 \Rightarrow N(u_0, v_0)$ è uscente
- $\geq 0 \Rightarrow N(u_0, v_0)$ è entrante

(Faccio riferimento al coseno)

⚠ È una disequazione a 3 variabili. Cosa migliore: avere dei zeri.

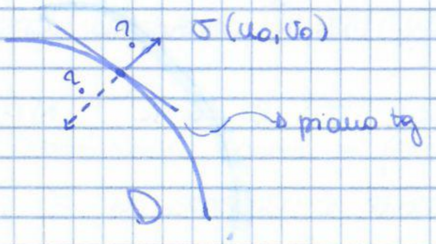
3° METODO:

Analitico. $\forall \varepsilon > 0$ suff. piccolo si considera:

$\sigma(u_0, v_0) + \varepsilon N(u_0, v_0)$

Se $\in D \Rightarrow N(u_0, v_0)$ è entrante;

Se $\notin D \Rightarrow N(u_0, v_0)$ è uscente.



Se mi sposto di ε verso l'interno $\Rightarrow$ N entrante

" " " " " " l'esterno $\Rightarrow$ N uscente

$F(\sigma_1(x,y)) \cdot N_1(x,y) = F(x,y,x^2+y) \cdot (2x, 2y, -1) = (x^2, y^2, x^2+y^2) \cdot (2x, 2y, -1) =$
$= 2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2$

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n = \int_{K_1} F(\sigma_1(x,y)) \cdot N_1(x,y)\, dx\, dy = \int_{K_1} (2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2)\, dx\, dy =$$

Facciamo le coordinate polari

$$= \int_{K_1'} (2\rho^3 \cos^3\theta + 2\rho^3 \sin^3\theta - \rho^2)\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{K_1'} \left[2\rho^4(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - \rho^3\right] d\rho\, d\theta =$$

$K_1' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < \rho < 1,\ 0 < \theta < 2\pi\}$

$$= \left(\int_0^1 2\rho^4\, d\rho\right)\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} (\cos^3\theta + \sin^3(\theta))\, d\theta\right)}_{=0} - \left(\int_0^1 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) =$$

$$= -2\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = -2\pi \cdot \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

OSS: Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari $\rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^n t\, dt = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos^n t\, dt = 0$

$s = t - \pi$

sfruttare il fatto che il seno è dispari

Ora dobbiamo calcolare l'integrale su Σ_2

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n = \int_{K_2} F(\sigma_2(x,y)) \cdot N_2(x,y) \quad \text{, con } N_2 \text{ esterno a } D$$

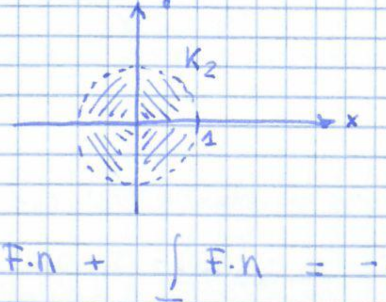
$\Sigma_2 = \sigma_2(K_2)$, $\sigma_2 : K_2 \to \mathbb{R}^2$ è $\sigma_2(x,y) = (x,y,1)$

$N(x,y) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x,y) = (0, 0, 1)$ Vettore uscente

$N_2(x,y) = N(x,y) = (0,0,1)$ (Vettore cost)

$F(\sigma_2(x,y)) \cdot (0,0,1) = F(x,y,1) \cdot (0,0,1) = (x^2, y^2, 1)(0,0,1) = 1$

$$= \int_{K_2} F(\sigma_2(x,y)) \cdot N_2(x,y)\, dx\, dy = \int_{K_2} 1\, dx\, dy = m(K_2) = \boxed{\pi}$$



$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_{\Sigma_1} F \cdot n + \int_{\Sigma_2} F \cdot n = -\frac{\pi}{2} + \pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Finish!

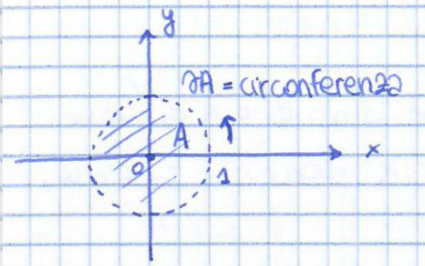
orientamento positivo e $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo di classe C^1, $F=(f_1, f_2)$ tale che

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1 \quad * \qquad \text{Allora } m(A) = \oint_{\partial A} F \cdot dP$$

8/11/12

Teorema di Green svolto senza dim.

Es: Calcolare l'integrale di linea di $F(x,y) = (y^2, x)$ lungo il bordo di $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2$ orientato positivamente.



1° MODO:

Def di integrale di linea: parametrizziamo la circonf.

2° MODO:

Teorema di Green:

$$F(x,y) = (y^2, x) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

$$\oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\, dy =$$

$$= \int_A (1-2y)\, dx\, dy \Rightarrow \text{coord polari} = \int_{A'} (1 - 2\rho \sin\theta)\rho \, d\rho\, d\theta =$$

$$A' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, \ 0 < \theta < 2\pi\} \qquad = \left(\int_0^1 \rho\, d\rho \right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) - 2 \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \right)}_{=0} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^1 \cdot 2\pi = \pi$$

(In senso antiorario $\Rightarrow -\pi$)

APPLICAZIONE COROLLARIO:

Campi che verificano * sono ad es:

$$F(x,y) = (0, x)$$

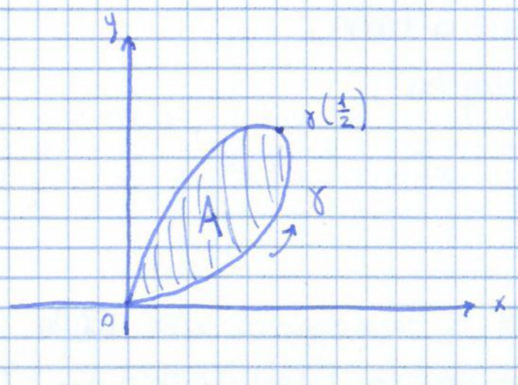
$$G(x,y) = (-y, 0)$$

$$H(x,y) = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x \right)$$

$$L(x,y) = \left(-\frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x \right) \qquad \text{etc...}$$

Calcolare l'area dell'insieme A racchiuso nel sostegno della curva parametr.

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t, \ t - t^3)$$

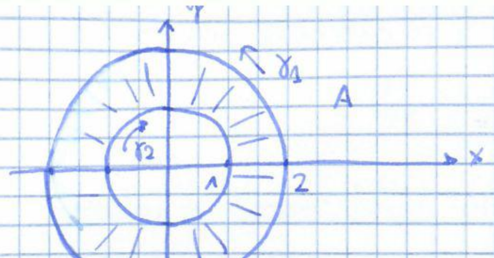


Dovremmo fare:

$$(x,y) = \gamma(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t, \ t - t^3) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t^2 + 2t \\ y = t - t^3 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$\Rightarrow$ TROPPO COMPLESSO!



<u>1° MODO</u>:

$$\int_{\partial A} F\cdot dP = \int_{\partial A} F\cdot dP + \int_{\gamma_2} F\cdot dP$$

<u>2° MODO</u>:

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (x^2y^3, y)$$

$$\int_{\partial A} F\cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\, dy =$$

$$= \int_A (0 - 3x^2y^2)\, dx\, dy = -3\int_A x^2y^2\, dx\, dy \overset{\text{polari}}{=} -3\int_{A'} (\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho^2\sin^2\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta =$$

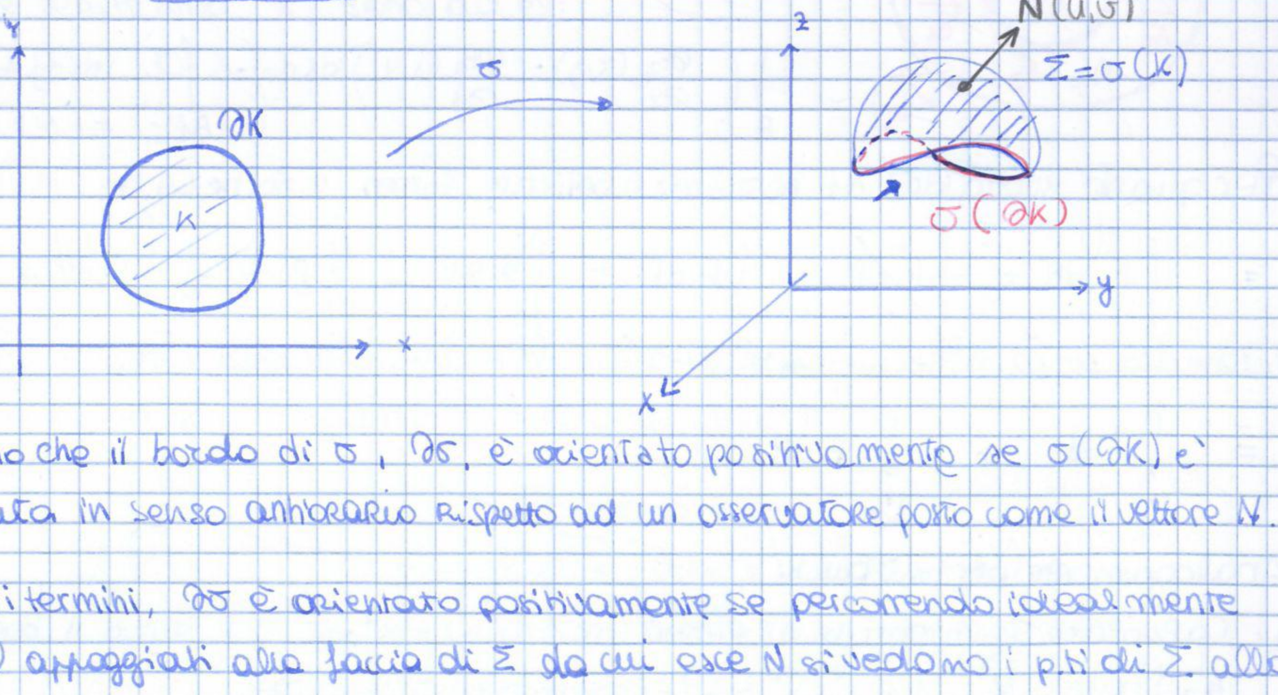
Rettangolo $A' = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 1\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$= -3\left(\int_1^2 \rho^5\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta\sin^2\theta}_{\frac{1}{4}\sin^2(2\theta)}\, d\theta\right) =$$

$$= -3\left[\frac{1}{6}\rho^6\right]_1^2 \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(2\theta - \sin(2\theta)\cos(2\theta)\right)\right]_0^{2\pi} = -\frac{63}{8}\pi$$

<u>Teorema di Stokes</u> (Teorema del Rotore)

<u>Def</u>: Siano $A\subseteq\mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso x archi, tale che ∂A è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $K = \overline{A} = A\cup\partial A$ (questo si dice che K è compatto e $\partial K = \partial A$), $\sigma: K\to\mathbb{R}^3$ una calotta regolare, $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e $N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$ $\forall (u,v)\in K$.
Si chiama <u>bordo di σ</u> la restrizione di σ a ∂K.



Diciamo che il bordo di σ, $\partial\sigma$, è orientato positivamente se $\sigma(\partial K)$ è orientata in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il vettore N.

In altri termini, $\partial\sigma$ è orientato positivamente se percorrendo idealmente $\sigma(\partial K)$ appoggiati alla faccia di Σ da cui esce N si vedono i p.ti di Σ alla propria sx.

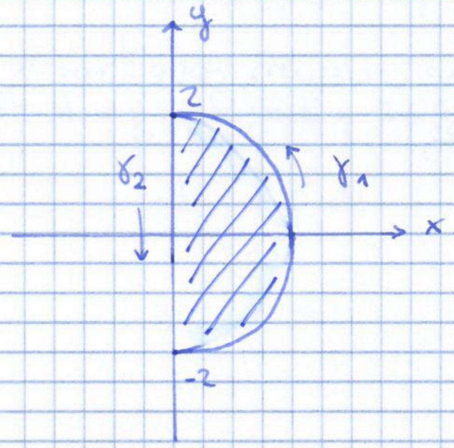
$= (\text{sent}\ \ \text{sent}\cos t,\ \text{sent}\cos t) \cdot (-\sin t,\ \cos t,\ \cos t) =$

$= \quad -\text{sen}^2 t + \text{sent}\cos^2 t + \text{sent}\cos^2 t$

$= \text{sent}\,(-\text{sent} + 2\cos^2 t)$

$$= \int_0^{2\pi} \text{sen}\,(-\text{sent} + 2\cos^2 t)\, dt = \left[-\frac{1}{2}(t - \text{sent}\cos t) - \frac{2}{3}\cos^3 t \right]_0^{2\pi} = \boxed{-\pi}$$

ES. ②: Calcolare l'integrale di linea del campo $F(x,y) = (xy,\ x^2+y^2)$ lungo il bordo del semicerchio di centro $O(0,0)$ e $R=2$ nel semipiano $x \geq 0$ inducendo un percorso antiorario.



γ è regolare a tratti

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

$\gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_1(t) = (2\cos t,\ 2\,\text{sent})$

Controllo

$\gamma_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0,-2)$ $\quad \gamma_1(0) = (2,0) \quad$ Ok!

$\gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,2)$

$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_2(t) = (0,\ 2 + t(-2-2)) = (0,\ 2-4t)$

Controllo:

$\gamma_2(0) = (0,2)$

$\gamma_2(1) = (0,-2)$ $\quad$ Ok!

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt =$$

$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(2\cos t,\ 2\,\text{sent}) \cdot (-2\sin t,\ 2\cos t) =$

$= (4\cos t\sin t,\ 4\cos^2 t + 4\sin^2 t) \cdot (-2\sin t,\ 2\cos t) =$

$= (4\cos t\sin t,\ 4) \cdot (-2\sin t,\ 2\cos t) =$

$= -8\cos t\sin^2 t + 8\cos t$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-8\cos t\sin^2 t + 8\cos t)\, dt = \left[-\frac{8}{3}\sin^3 t + 8\sin t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \;=$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\cos t, -\sin t, 1) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) =$$
$$= (-\sin t, -\cos t, 1) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) =$$
$$= \sin^2 t + \cos^2 t + 0 = 1$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = \boxed{2\pi}$$

Metodo alternativo $\Rightarrow$ Teorema di Stokes

Integrali di superficie

es. 1: Calcolare $\int_\Sigma (x^2+y^2)\, d\sigma$, $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4\}$

$$\int_\Sigma f(x,y,z)\, d\sigma = \int_K f(\sigma(u,v))\, \|N(u,v)\|\, du\, dv$$

$\Sigma = \sigma(K) \quad \sigma : K \to \mathbb{R}^3$

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

Dobbiamo parametrizzare σ

$\sigma : \underset{\theta}{[0,\pi]} \times \underset{\varphi}{[0,2\pi]} \to \mathbb{R}^3$

raggio 2

$$\sigma(\theta,\varphi) = (2\sin\theta\cos\varphi,\ 2\sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$$

$$N(\theta,\varphi) = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta,\varphi) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & -2\sin\theta \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(4\sin^2\theta\cos\varphi,\ -4\sin^2\theta\sin\varphi,\ 4\cos\theta\sin\theta\right)$$

$$\|N(\theta,\varphi)\| = \sqrt{16\sin^4\theta\cos^2\varphi + 16\sin^4\theta\sin^2\varphi + 16\cos^2\theta\sin^2\theta} =$$
$$= \sqrt{16\sin^4\theta + 16\cos^2\theta\sin^2\theta} = \sqrt{16\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} =$$
$$= \sqrt{16\sin^2\theta} = 4|\sin\theta| = 4\sin\theta$$

$[0,\pi]$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2 \Rightarrow = \int_K f(\sigma(\theta,\varphi)) \cdot \|N(\theta,\varphi)\|\, d\sigma =$$

$K : [0,\pi] \times [0,2\pi]$

$$= \int_K (4\sin^2\theta\cos^2\varphi + 4\sin^2\theta\sin^2\varphi) \cdot 4\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_K 16\sin^2\theta\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 16\left(\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\,\text{sen}\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) =$$

$$= 16\left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi 2\pi = \frac{128}{3}\pi$$

Teorema di Stokes

12/11/12

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi tale che ∂A è l'unione di un numero finito di sostegni a 2 a 2 disgiunti di curve parametriche chiuse, semplici e regolari a tratti, $K = \bar{A}$ e $\sigma: K \longrightarrow \Omega$ una calotta regolare con $\partial\sigma$ orientato positivamente. Allora

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \text{rot } F \cdot n \, d\sigma$$

dove $\text{rot } F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è il campo vettoriale definito da

$\forall (x,y,z) \in \Omega$

$$\text{rot } F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \right)$$

Per ricordare

$$\left(\begin{matrix} 3 & 2 \\ y & z \end{matrix} , \begin{matrix} 1 & 3 \\ z & x \end{matrix} , \begin{matrix} 2 & 1 \\ x & y \end{matrix} \right)$$

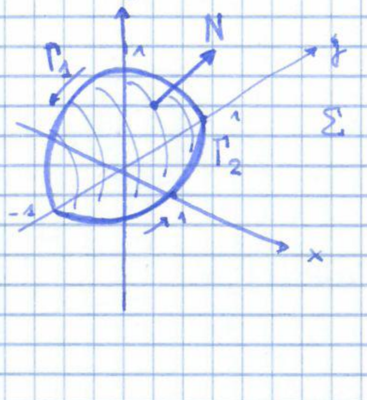
Posso applicare il teorema da dx verso sx o viceversa.

Stokes si applica su una <u>linea in $\mathbb{R}^3$</u>. Però:

$$\int_{\sigma} \text{rot } F \cdot n \, d\sigma \qquad \text{Flusso del } \underline{\text{ROTORE}} \ \triangle!$$

<u>Es</u>:

Calcolare l'integrale di linea di $F(x,y,z) = (x, 0, y)$ lungo il bordo di $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x \geq 0, \ z \geq 0\}$ orientato positivamente rispetto al vettore normale uscente dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$



$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

<u>1° MODO</u>: <u>Con def</u>

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP$$

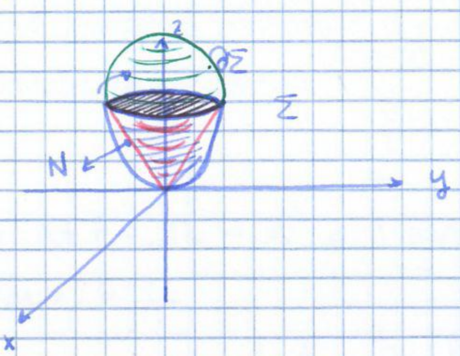
Dobbiamo parametrizzare Γ_1 e Γ_2.

Fallo x es.

$$= \left[\frac{1}{2}(\theta - \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\mathrm{sen}\,\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Il teorema di Stokes va applicato quando il rot è cost e la parametrizzazione è semplice

Supponiamo di avere:



$z = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 \leq R^2$
$R > 0$

Possiamo applicare Stokes calcolando il flusso del attraverso Σ. Però quel bordo è bordo di tante sup. ⇒ ad es. un CONO:

$$S: \left.\begin{array}{l} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 \leq R^4 \end{array}\right\} \text{non è la scelta migliore}$$

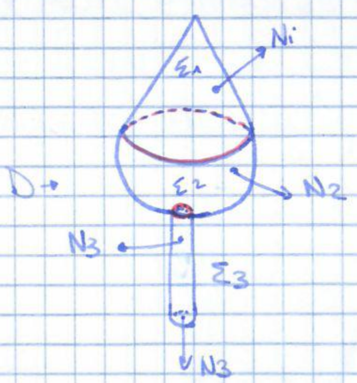
Oppure semisfera ⇒ non è la scelta migliore

Scelta + opportuna ⇒ Oppure CERCHIO ←

Cambio il problema: faccio il flusso attraverso una nuova sup. che ha x bordo lo stesso bordo dato dal problema.

Teorema di Gauss (della divergenza)

Def: Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto limitato connesso x archi. Diciamo che D è un aperto con bordo se ∂D è l'unione di un numero finito di sostegni di calotte semplici e regolari orientate secondo un verso uscente da D e aventi a 2 a 2, al più in comune sostegni di curve parametriche semplici e regolari a tratti.



$\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

Enunciato del Teorema di Gauss

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$ e $D \subseteq \Omega$ un aperto con bordo tale che $\partial D \subset \Omega$. Allora il flusso uscente di F da ∂D è

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \mathrm{div}\, F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

15/11/12

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Def: Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Diciamo che F è conservativo se $\exists$ una funzione differenziabile $f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega$. In tal caso f è detta un POTENZIALE di F su Ω.

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad , \quad \nabla f(x) = F(x) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\right) = (f_1(x), \dots, f_2(x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = f_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) = f_n(x) \end{cases} \quad \forall x \in \Omega$$

OSS: $\forall c \in \mathbb{R}$, $\nabla c = 0$ (c è una costante)

$$\nabla(f + c) = \nabla f + \nabla c = \nabla f$$

Se F è conservativo $\Rightarrow$ F ammette infiniti potenziali.

ES: Il campo vettoriale nullo è sicuramente positivo.

- $F(x,y) = (0,0)$
  $f(x,y) = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

- $G(x,y) = (1,2)$
  $g(x,y) = x + 2y \Leftrightarrow \nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = (1,2) = G(x,y)$

- $F(x,y) = (2xy + y^2, 2xy + x^2)$ è conservativo. Infatti:
  $f(x,y) = x^2 y + xy^2$
  $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2xy + y^2, 2xy + x^2) = F(x,y)$$

Def: Siano $0 \leq a < b \leq +\infty$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq \|x\| < b\}$ e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Diciamo che F è Radiale se F è della forma:

$$F(x) = \varphi(\|x\|)\, x \quad , \text{ dove } \varphi: (a,b) \to \mathbb{R} \text{ è una funzione.}$$

$\|x\|$: distanza di x dall'origine

ES: Il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta in $(0,0,0)$ è:

$$F(x,y,z) = -\frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z) = -\frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, -\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)$$

ES: $F(x,y) = \left((x^2+y^2)x \ , (x^2+y^2)y\right)$ È conservativo?

$F(x,y) = (x^2+y^2)(x,y)$ è della forma $F(x,y) = \text{tot}\ (x,y)$

$= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 (x,y) = \underbrace{\|(x,y)\|^2}_{\varphi(\|x,y\|)} (x,y)$

$F(x,y)$ è RADIALE e CONTINUO $\Rightarrow$ F è CONSERVATIVO

Def: sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto. ~~Di conseguenza~~ diciamo che Ω è connesso per archi se $\forall x,y \in \Omega$ esiste una curva parametrica $\gamma: [a,b] \to \Omega$ tali che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

OSS: Se Ω è connesso per archi $\Rightarrow$ $\forall x,y \in \Omega$ con $x \neq y$ esiste una curva parametrica semplice e regolare a tratti $\gamma: [a,b] \to \Omega$ tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

PROPOSIZIONE (Proprietà dei potenziali)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo e $f,g: \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω.

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - g(x) = c \quad \forall x \in \Omega$

DIM: $f - g: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad$ f,g sono differenziabili in Ω con

$\nabla f(x) = F(x) \quad \nabla g(x) = F(x) \quad \forall x \in \Omega$

$\Rightarrow$ $f-g$ è differenziabile in Ω con $\nabla(f-g)(x) = \nabla f(x) - \nabla g(x) = F(x) - F(x) = 0$ $\forall x \in \Omega$

dimostriamo questo $\to$ Poichè Ω è connesso x archi, risulta che la funzione $f-g$ è costante in Ω. Infatti, siano $x,y \in \Omega$ con $x \neq y$. Proviamo che

$$(f-g)(x) = (f-g)(y)$$

Sia $\gamma: [a,b] \to \Omega$ semplice e regolare a tratti tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

$\exists\ t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b$ tali che γ è di classe C^1 su (t_{k-1}, t_k) $\forall k = 1, \ldots, m$ con $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in (t_{k-1}, t_k)$ e negli estremi esistono le derivate laterali.

Sia $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(t) = (f-g)(\gamma(t))$$

$$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \xrightarrow{f-g} \mathbb{R}$$

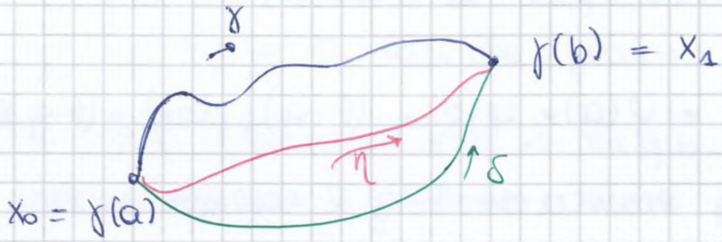
$$t \longmapsto \gamma(t) \longmapsto (f-g)(\gamma(t)) = \varphi(t)$$

TEOREMA sull'integrale di linea di un campo conservativo

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ un potenziale di F su Ω e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti.

Allora
$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Inoltre se γ è chiusa, allora $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$



$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(x_1) - f(x_0) = \int_\eta F\, dP = \int_\delta F\, dP$$

Non dipende dal percorso.

ESERCITAZIONI del 16/11/12

1. Calcolare $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\, d\sigma$, $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \log(x^2+y^2),\ 1 \le x^2+y^2 \le e^2\right\}$

$\Sigma = \sigma(K)$, $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ $\quad g(x,y) = \log(x^2+y^2) \Rightarrow \sigma(x,y) = (x, y, \log(x^2+y^2))$

$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le e^2\right\}$

$$\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\, d\sigma = \int_K \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{4+x^2+y^2}} \|N(x,y)\|\, dx\,dy \ \textcircled{=}$$

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{2x}{x^2+y^2}, -\frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right)$$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1} = \sqrt{\frac{4}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{\frac{4+x^2+y^2}{x^2+y^2}}$$

$$\textcircled{=} \int_K \frac{\log(x^2+y^2)}{\cancel{\sqrt{4+x^2+y^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{4+x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy = \int_K \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy =$$

Vettore sicuramente uscente $\Rightarrow N_n(x,y) = N(x,y)$

$$N(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

Per verificare:

$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4 \}$ Prendiamo un p.to interno a K

$(x,y)=(0,0) \Rightarrow \sigma(0,0) = (0,0,2)$

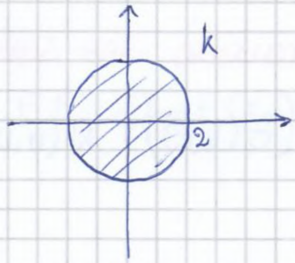
$N_1(0,0) = (0,0,1)$

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x, y, \sqrt{4-x^2-y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1 \right) =$$

$$= \left(3x\sqrt{4-x^2-y^2}, 3y\sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1 \right) =$$

$$= 3x^2 + 3y^2 + x^2 + y^2 = 4(x^2+y^2)$$

$$= \int_K 4(x^2+y^2)\, dx\, dy = \text{polari} =$$



$$= \int_{K'} 4\rho^3\, d\rho\, d\theta =$$

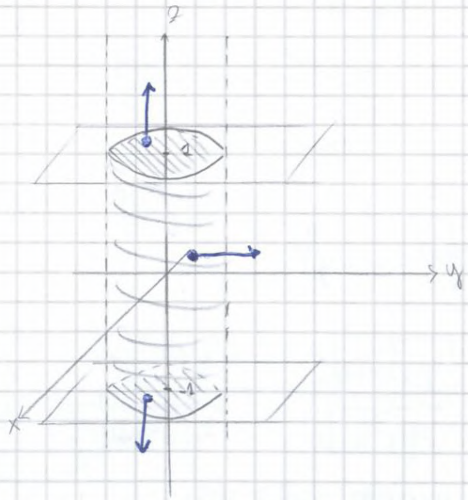
$K' = \{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$

$$= 8\pi \int_0^2 \rho^3\, d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^2 = 8\pi \cdot 16 = \boxed{32\pi}$$

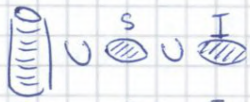
ES 2

Calcolare il flusso uscente di $F(x,y,z) = (x, 0, z^2)$ dal bordo di

$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 9,\ -1 \le z \le 1 \}$



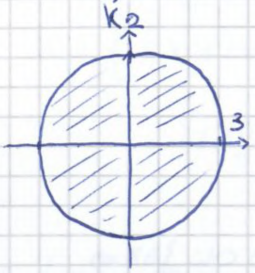
$$\int_{\partial D} F n\, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F n\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F n\, d\sigma + \int_{\Sigma_3} F n\, d\sigma$$

$\partial D =$  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma_2}{\partial y}(x,y) = (0,0,1)$$

$N_2(x,y) = N(x,y)$ $\qquad F(\sigma_2(x,y)) \cdot N(x,y) = F(x,y,1)\cdot(0,0,1) = (x,0,1)\cdot(0,0,1) = 1$

$$= \int_{K_2} 1 \, dx\, dy = m(K_2) = 9\pi$$



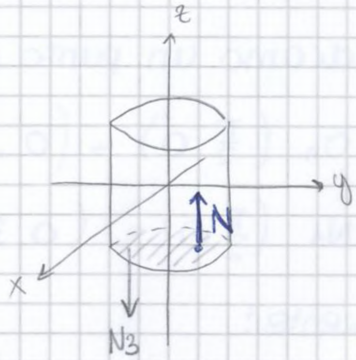
$$\Sigma_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 9, \ z=-1\}$$

$\Sigma_3 = \sigma_3(K_3) \qquad \sigma_3 : K_3 \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma_3(x,y) = (x,y,-1)$

$K_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 9\}$

$$\int_{\Sigma_3} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_3} F(\sigma_3(x,y)) \cdot N_3(x,y)\, dx\, dy =$$

dove N_3 è normale a Σ_3 e uscente dall'insieme D



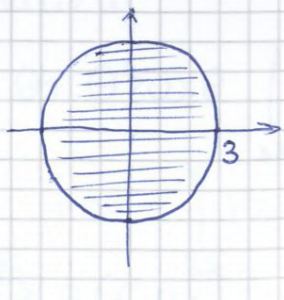
$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma_3}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma_3}{\partial y}(x,y) = (0,0,1)$$

ENTRANTE in D!!

$$N_3(x,y) = -N(x,y) = (0,0,-1)$$

$$F(\sigma_3(x,y)) \cdot N_3(x,y) = F(x,y,-1)\cdot(0,0,-1) = (x,0,1)\cdot(0,0,-1) = -1$$

$$= \int_{K_3} (-1)\, dx\, dy = -\int_{K_3} dx\, dy = -m(K_3) = \boxed{-9\pi}$$



$$\int_{\partial D} F\cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F\cdot n\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F\cdot n\, d\sigma + \int_{\Sigma_3} F\cdot n\, d\sigma =$$

$$= 18\pi + \cancel{9\pi} - \cancel{9\pi} = \boxed{18\pi}$$

Il flusso sulle 2 basi sup e inf. è venuto uguale e opposto, ma è un caso!
Qui diciamo che la motivazione è la simmetria dell'insieme.

Modo migliore è applicare GAUSS!! Infatti la consegna diceva: flusso uscente dal bordo di un insieme!!

Teorema

$F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuo e conservativo, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ potenziale di F su Ω.
$\gamma: [a,b] \to \Omega$ semplice e regolare a tratti

<u>TESI</u>: $$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

L'integrale NON dipende dal sostegno, ma solo dal p.to iniziale e finale.

DIM: Siano $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ tali che γ è di classe C^1 su (t_{k-1}, t_k), $\forall k = 1, \dots, m$ con $\gamma' \neq 0$ e in t_k esistono le derivate laterali di γ $\forall k = 0, \dots, m$

Per def l'integrale su γ $$\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Sia $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(t) = f(\gamma(t))$

$$\begin{array}{ccccc} [a,b] & \xrightarrow{\gamma} & \Omega & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) & \longmapsto & F(\gamma(t)) = \varphi(t) \end{array}$$

F continuo e $\nabla f = F \Rightarrow f$ è di classe C^1. φ è di classe C^1 in ogni intervallo (t_{k-1}, t_k) $\forall k = 1, \dots, m$ con $\varphi'(t) = (f \circ \gamma)'(t)$

$$\varphi'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{\shortparallel} \cdot \gamma'(t)$$
$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad \forall t \in (t_{k-1}, t_k),\ \forall k = 1, \dots, m$$

Torniamo all'integrale

$$\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{m} \Big[\varphi(t)\Big]_{t_{k-1}}^{t_k} = \sum_{k=1}^{m} \Big[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\Big] =$$

poichè $\varphi'(t)$ è continua

$$= \left(\cancel{\varphi(t_1)} - \varphi(t_0)\right) + \left(\cancel{\varphi(t_2)} - \cancel{\varphi(t_1)}\right) + \dots + \left(\cancel{\varphi(t_{m-1})} - \cancel{\varphi(t_{m-2})}\right) + \left(\varphi(t_m) - \cancel{\varphi(t_{m-1})}\right)$$

Semplificherò quasi tutti i termini, tranne:

$$= \varphi(t_m) - \varphi(t_0) = \varphi(b) - \varphi(a) = \boxed{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

In particolare, se γ è chiusa:

$$\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \oint_\gamma F \cdot dP = 0$$

CVD

In realtà vale anche il viceversa con l'ipotesi che Ω sia connesso x archi //

Teorema di equivalenza

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Allora sono fatti equivalenti:

$$= \int_a^c F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt + \int_b^d F(\gamma_2(b+d-t)) \cdot (-\gamma_2'(b+d-t))\, dt =$$

cambiamento di variabile: $\tau = b+d-t$
$d\tau = -dt$

$$= \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_d^c F(\gamma_2(\tau)) \cdot \gamma_2'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_c^d F(\gamma_2(\tau)) \cdot \gamma_2'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

Dimostriamo 2) $\Rightarrow$ 1). Per dimostrare che F è conservativo, proviamo che esiste un potenziale f di F su Ω, cioè una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega$, cioè se

$F(f_1, f_2, \dots, f_n)$ $\quad \forall j = 1, \dots, n$ e $\forall x \in \Omega$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x)$

Sia $x_0 \in \Omega$ fissato e sia $x \in \Omega$ qualunque. Poiché Ω è connesso per archi, sia $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. dipendono da x

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $\forall x \in \Omega$, $f(x) = \int_{\gamma} F \cdot dP$ $\quad \gamma = \gamma_x$ perché

Per l'ipotesi 2) questa def è ben posta, cioè non dipende dalla scelta della curva γ.

Dimostriamo che f è un potenziale di F, cioè che f è diff. in Ω e $\forall j = 1, \dots, n$ e $\forall x \in \Omega$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x)$. Consideriamo $j = 1$.

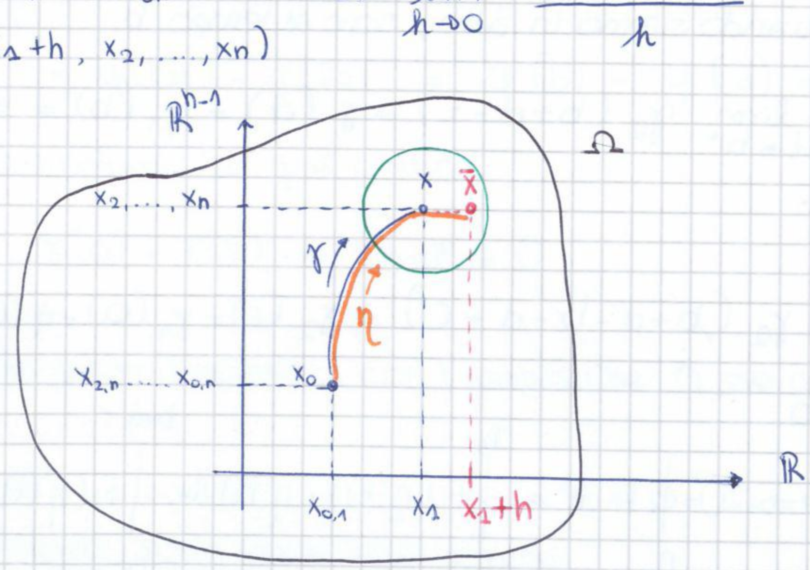
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2 \dots x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ $\quad \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h}$

$\bar{x} = (x_1 + h, x_2, \dots, x_n)$

Ω è aperto e $x \in \Omega$ $\Rightarrow \exists$ (una pallina tutta contenuta in Ω) $r > 0 : B_r(x) \subseteq \Omega$



Sia $0 < h < r$ e consideriamo $\bar{x} = (x_1 + h, x_2, \dots, x_n)$

$\bar{x} \in B_r(x)$

$\stackrel{(=)}{}$ forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow$ uso teorema di De L'Hôpital $=$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{f_1(x_1+h, x_2, \dots, x_n)}{1} \underset{\substack{\uparrow \\ f_1 \text{ è continua}}}{=} f_1(x_1, \dots, x_n) = f_1(x)$$

In modo analogo:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h} = f_1(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^*} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h} = f_1(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1(x)$$

Analogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x) \quad \forall j = 1, \dots n \quad \forall x \in \Omega$$

F continuo $\Rightarrow$ f_j continua $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ continua $\Rightarrow$ f è differenziabile in Ω con

$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = F(x) \Rightarrow f$ è un potenziale di F su Ω $\Rightarrow$ F è conservativo.

CVD

TEOREMA (condizione necessaria per i campi di classe C^1) 22/11/12

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Se F è conservativo, allora $\forall x \in \Omega$ e $\forall i,j = 1, \dots, n$ si ha che

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

DIM: F conservativo $\Rightarrow \exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega$, cioè $\forall i = 1, \dots, n$ e $\forall x \in \Omega$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i(x) \qquad \text{(per hp)}$$

F e $C^1 \Rightarrow f_i$ è C^1 $\forall i \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ è $C^1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ continua $\forall i,j = 1, \dots, n \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ è di classe C^2.

Siano $i, j = 1, \dots, n$ e $x \in \Omega$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Schwartz}}}}{=}$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)}_{f_j(x)} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

CVD

Condizione che NON riguarda gli integrali. Proprietà differenziale.

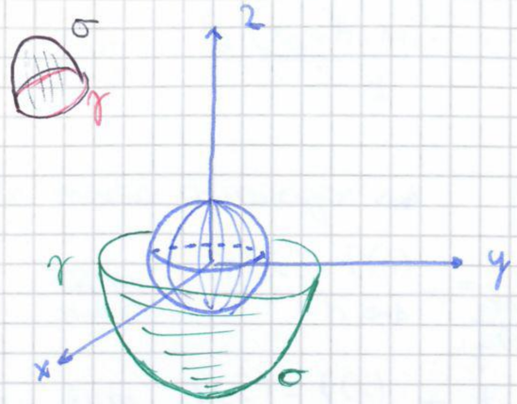
OSS: F è conservativo $\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ NON è vero il viceversa, ovvero se vale questa condizione NON è detto che F sia conservativo.

$$\exists\, i, j = 1, \dots, n : \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \neq \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Rightarrow F \text{ NON è conservativo.}$$

$\rightarrow$

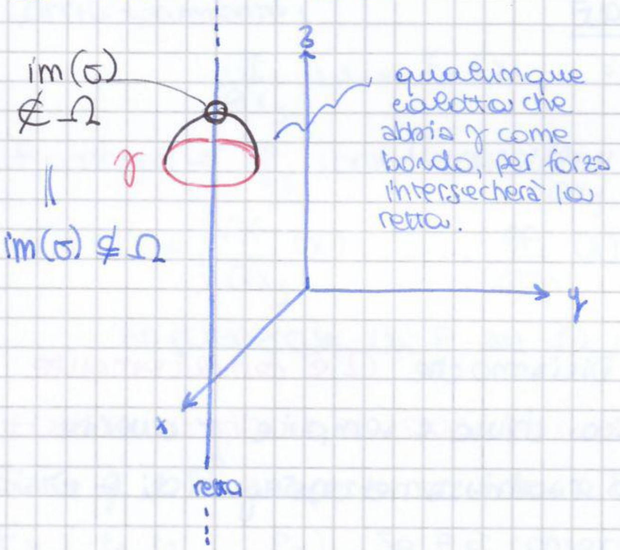
Es: $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ sfera

σ presa così va tutto bene!



Quest'insieme è semplicemente connesso.

Es: $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ retta

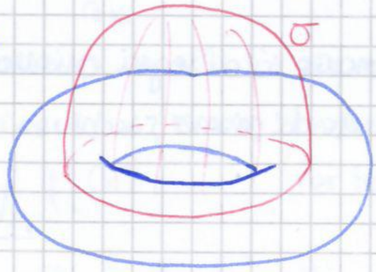


Ω NON è semplicemente connesso

$\exists$ curva tale che NON è vero che il suo sostegno è il sostegno di una calotta che sia tutta in Ω.

Es: Il toro non è semplicemente connesso.

Ω = Toro



Il suo sostegno esce da Ω

TEOREMA (condizione sufficiente x i campi di classe C^1)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, \dots, f_n)$.

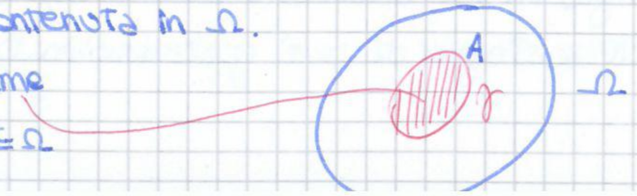
Se Ω è semplicemente connesso e $\forall x \in \Omega$ e $\forall i, j = 1, \dots, n$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, allora F è conservativo.

DIM: Sia $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una qualunque curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti. Dimostriamo che $\oint_\gamma F\, dP = 0$

$\boxed{n=2}$ Per def, Ω è semplicemente connesso $\Rightarrow$ la parte di piano racchiusa nel sostegno di γ è contenuta in Ω.

Sia A questo insieme

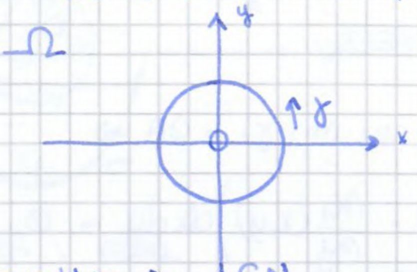
$A \subseteq \Omega$ e $\partial A = im(\gamma) \subseteq \Omega$



ES: $F(x,y) = \left(-\frac{2y}{x^2+y^2}, \frac{2x}{x^2+y^2}\right)$

$$G(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$

$\Omega = dom(F) = dom(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



Ω Non è semplicemente connesso

G è conservativo $\rightarrow$ C.N.

$g: \Omega \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \log(x^2+y^2)$ è un potenziale di G.

$\nabla g(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right) = G(x,y) \Rightarrow$ verifica C.N.

F verifica C.N ma non è conservativo.

$F = (f_1, f_2)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= -\frac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} = !! \quad \text{F verifica CN.}$$

F non è conservativo. $\gamma: [0, 2\pi] \to \Omega$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \;=$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = (-2\sin t, 2\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) =$$

$$= 2\sin^2 t + 2\cos^2 t = 2$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\, dt = 2\int_0^{2\pi} dt = \boxed{4\pi} \neq 0 \quad \Rightarrow \text{F Non è conserv.}$$