NUMERO: 1058 DATA: 02/09/2014

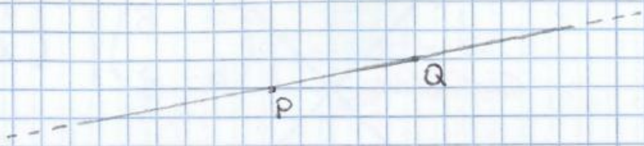
# A P P U N T I

STUDENTE: Allora

MATERIA: Geometria + Eserc.

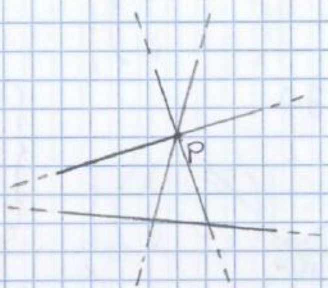
Prof. Gatto - Cordovez

# ESERCITAZIONE:



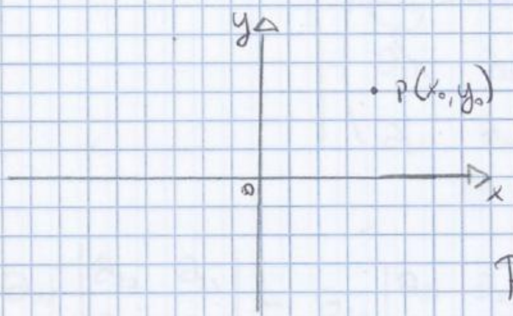

$P \neq Q$

1 SOLA RETTA




INFINITE RETTE,
ma non tutte le rette si passano

Preso un pto di riferimento, posso definire in funzione di esso TUTTI I PUNTI dello spazio.



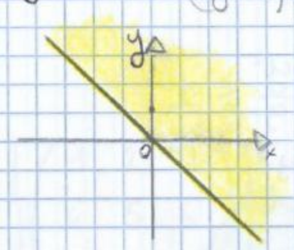

Rette passanti per P:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad m \in \mathbb{R}$$

# Disegni:

$x + y = 0$

$y = -x \qquad (y - 0) = -1(x - 0)$




$\boxed{x + y \geq 0}$

$$|x+y| \leq |x-y|$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x+y| \leq |x-y|\}$$

$\bigcup$

1. $\begin{cases} x+y \geq 0 \ \wedge \ x-y \geq 0 \\ x+y \leq x-y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y \geq 0 \ \wedge \ x-y < 0 \\ x+y \leq y-x \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y < 0 \ \wedge \ x-y \geq 0 \\ -x-y \leq x-y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y < 0 \ \wedge \ x-y < 0 \\ -x-y \leq y-x \end{cases}$

F 1

# ~~ORDI~~ DETERMINANTE

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc$$

Es:

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right| = 10 - 12 = -2$$

inverto le righe

$$\left|\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = 12 - 10 = 2$$

inverto anche le colonne

$$\left|\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right| = 10 - 12 = -2$$

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

X CASA

Dim che =

OPPURE

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Es.

$$\underbrace{\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right|}_{=0} \text{ ; e se ho } \underbrace{\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right|}_{= -0 = 0} ?$$

Scambiando 2 righe (o 2 colonne) cambio il segno!

F 3

dove se $f, g$ sono funzioni e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, per $\lambda f + \mu g$ intendiamo l'UNICA FUNZIONE tale che $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$

Lo SPAZIO VETTORIALE è come $C^0(D)$, in cui posso sommare 2 funzioni (combinaz. lineare di $f, g$ con coefficienti $\lambda, \mu$)

Quindi

se $\vec{u}, \vec{v} : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ posso definire una nuova colonna

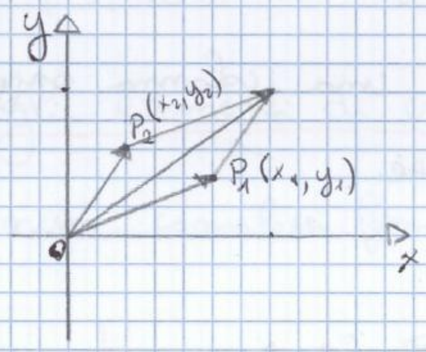
$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ tale che

$\forall\ 1 \le i \le n \quad (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})(i) = \lambda \vec{u}(i) + \mu \vec{v}(i)$

la i-esima ~~colonna~~ entrata di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è $\vec{u}(i) + \vec{v}(i)$

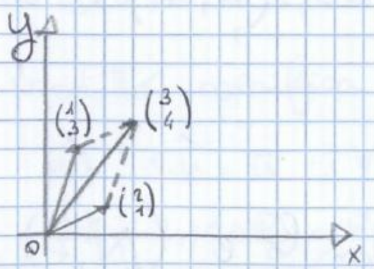
Es:

$$3\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 1 + 2\cdot 2\\3\cdot 2 + 2\\-3 + 10\\12 + 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\8\\7\\24\end{pmatrix}$$




$$\vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$$

Es:






© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 248

Un gruppo commutativo è un gruppo che ha le stesse proprietà di $\mathbb{Z}$ rispetto alla somma.

Ricordiamo che $\mathbb{R}$ è un CAMPO (rispetto a somma e prodotto)

ovvero

$(\mathbb{R},+)$ è un gruppo commutativo

$(\mathbb{R},\cdot)$ NON è un gruppo. Non tutti i numeri reali hanno il reciproco.

$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ è un gruppo commutativo

"$\mathbb{R}^*$"

INOLTRE

$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad (a+b)\cdot c = ac+bc$

$a(b+c) = ab+ac$

Un campo è quello che rispetta risp. a somma e prodotto le stesse proprietà di $\mathbb{R}$

Per def gli elementi di un campo si dicono SCALARE

Anche i num. complessi formano un CAMPO

Ricordiamo che se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ è definita una "moltiplicazione per scalare"

$(\lambda\vec{u})(i) = \lambda\,\vec{u}(i)$

Qst prodotto verifica le seguenti proprietà:

FACILI DA VERIFICARE USANDO $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

1) $1.\vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}$

2) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ e $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$, $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

3) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

$$\langle\, ,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \langle \vec{u},\vec{v}\rangle$$

dove $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}(i)\,\vec{v}(i) =$

$$= \vec{u}(1)\vec{v}(1) + \vec{u}(2)\vec{v}(2) + \dots + \vec{u}(n)\vec{v}(n)$$

CHIAMATO $\vec{u}(i) = u_i$ $\quad n=4 \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \right\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

→ POLINOMIO OMOGENEO → è una forma

grado 2 ⇒ FORMA QUADRATICA

(fosse grado = 1 ⇒ FORMA LINEARE)

Es:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 3v_1 + v_2 + 2v_3$$

FORMA LINEARE

PERCIÒ l'es. di prima è LINEARE NELLE u e LINEARE NELLE v

È perciò BILINEARE

Per es $x^2 + xy$ non è bilineare

Il prodotto scalare è definito positivo perchè

$$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle \geq 0$$

INFATTI

$$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}(i)^2 \geq 0$$

$$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

Dim

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = u_1^2 + u_2^2 = 0$$

$\Longrightarrow u_1 = u_2 = 0$, perchè se $u_1$ o $u_2$ fosse $\neq 0$ avrei una quantità positiva $u_1^2 + u_2^2 \geq u_1^2 > 0$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 248

La BILINEARITÀ del prodotto scalare si può descrivere più elegantemente come segue:

$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle + \mu \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle$$

LINEARITÀ RISP. AL 1° ARGOMENTO

È la stessa cosa di $\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f \, dx + \mu \int_a^b g \, dx$

$$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 \rangle = \lambda \langle \vec{u}_0, \vec{v}_1 \rangle + \mu \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle$$

LIN. RISP. AL 2° ARGOM.

Così dimostro l'ultima affermazione:

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad \forall \vec{w}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \quad \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

# Disuguaglianza di Schwartz.

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad (*) \quad |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$$

Dim

Se $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (*)$ è vera

Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ considero $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) = |x\vec{u} + \vec{v}|^2 \geq 0$

$$|x\vec{u} + \vec{v}|^2 = \langle x\vec{u} + \vec{v}, x\vec{u} + \vec{v} \rangle =$$

$$= x \langle \vec{u}, x\vec{u} + \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, x\vec{u} + \vec{v} \rangle =$$

$$= x^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + x \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + x \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle =$$

$$= |\vec{u}|^2 x^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle x + |\vec{v}|^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta}{4} \leq 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \leq 0$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$$

**Proposizione:**

$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
IL MODULO
$$\vec{u} \longmapsto |\vec{u}|$$

è una NORMA, cioè verifica gli assiomi

N1) $|\vec{u}| \geq 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ e $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

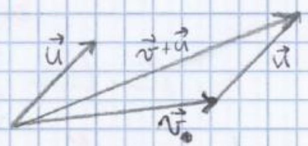
N2) $|\lambda \vec{u}| = |\lambda| |\vec{u}|$

N3) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE o DI MINKOWSKI

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

È detta triangolare per questo:




**Dim**

N1

Osservo che $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$

perché $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = \langle 0 \cdot \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

e ricordo che il prodotto scalare è DEFINITO POSITIVO

N2

$$|\lambda \vec{u}|^2 = \langle \lambda \vec{u}, \lambda \vec{u} \rangle = \lambda^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \lambda^2 |\vec{u}|^2$$

$$\Rightarrow |\lambda \vec{u}| = |\lambda| |\vec{u}|$$

N3 Siano $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

APPLICO LA LINEARITÀ

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = |\vec{u}|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2$$

Ma $|\vec{u}|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2 \leq |\vec{u}|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| + |\vec{v}|^2$

Per Schwarz

$$|\vec{u}|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| + |\vec{v}|^2 \leq |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| + |\vec{v}|^2 = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2$$

Perciò $|\vec{u} + \vec{v}|^2 \leq (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2 \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 248

$E_n = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ è una BASE ORTONORMALE

gli $\vec{e}_i$ sono $\perp$ e valgono 1 in modulo

Es: Sia $\vec{u} \in \mathbb{R}^5$ dato da

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_5 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 + u_4 \vec{e}_4 + u_5 \vec{e}_5$$

In generale

$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ è in modo unico COMBINAZIONE LINEARE di $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$

ovvero $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\vec{u}(i)}_{\text{numero, non vettore}} \cdot \vec{e}_i$

Se $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \langle \vec{u}, \vec{e}_i \rangle = \vec{u}(i)$

$\boxed{n=2}$ Tradizione vuole che $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$ e $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$ si indichino rispettivamente con $\vec{i}$ e $\vec{j}$

$\boxed{n=3}$ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ si denotano con $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ terna di versori ortonormali

e ogni $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ può essere scritto $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$

---

CAMPI VETTORIALI DIFFERENZIABILI SU UN INTERVALLO

o CURVE DIFFERENZIALI IN $\mathbb{R}^n$

o EQUAZ. ORARIE DI MOTI

**Viceversa** $\vec{u}(t) = (t^2, t^3) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$

$\dot{\vec{u}}(t) = 2t\vec{i} + 3t\vec{j}$

NON REGOLARE per $t=0$

**Proposizione:**

Siano $\vec{u}(t), \vec{v}(t)$ due CAMPI DI VETTORI DIFFERENZIABILI.

Allora $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ /

$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle(t) = \langle\vec{u}(t),\vec{v}(t)\rangle$

è differenziabile e la sua derivata obbedisce alla regola di Leibniz

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{u}(t),\vec{v}(t)\rangle = \langle\frac{d\vec{u}(t)}{dt},\vec{v}(t)\rangle + \langle\vec{u}(t),\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\rangle$$

**Es.** $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^3-2t \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

↳ calcolo il modulo:

$t^2 + \sin^2 t + \cos^2 t = t^2+1 \neq 0$

$\Rightarrow$ CAMPI REGOLARI DIFFERENZIABILI

$$\langle\vec{u}(t),\vec{v}(t)\rangle = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^3-2t \end{pmatrix},\begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\rangle = t + t\sin t + (t^3-2t)\cos t$$

INFATTI prodotti e somme di funz. differenziabili sono "

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{u}(t),\vec{v}(t)\rangle = 1 + \sin t + t\cos t + \dots$$

**Dim**

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{u}(t),\vec{v}(t)\rangle = \frac{d}{dt}\left(u_1(t)v_1(t) + \dots + u_n(t)v_n(t)\right) =$$

$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$

$$= \dot{u}_1(t)v_1(t) + u_1(t)\dot{v}_1(t) + \dots + \dot{u}_n(t)v_n(t) + u_n(t)\dot{v}_n(t) =$$

$$= \langle\begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}\rangle + \langle\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{v}_n(t) \end{pmatrix}\rangle$$

Es: $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 7\end{vmatrix} = 3\cdot 7 - 5\cdot 1 = 21-5=16$

## OSSERVAZIONE:

a) La bilinearità si può esprimere dicendo che

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$\det(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}_2, \vec{v})$ lin. risp. al I arg.

$\det(\vec{u}, \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \mu \det(\vec{u}, \vec{v}_2)$ " " " II argom.

b) L'antisimmetria implica che

$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

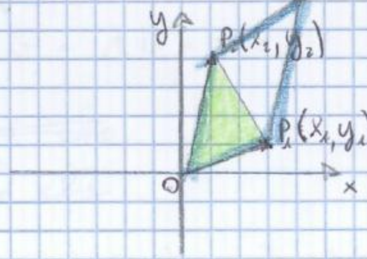
PERCHÉ

$\det(\vec{u}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{u}) \Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

Es: $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix} = 6-6=0$

## APPLICAZIONE DEL DETERMINANTE:

Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ pti del piano cartesiano $Oxy$. Calcolare l'area del triangolo $\widehat{OP_1P_2}$




$A = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{OP_1}, \vec{OP_2}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right|$

$\vec{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \vec{OP_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Il $|\det(\vec{OP_1}, \vec{OP_2})|$ è l'area del parallelogramma

Per definizione.

Es:


$\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 6 = b \cdot h$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 248

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \underset{\text{Regola di Laplace}}{=} u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 + u_2 w_1 v_3 + u_1 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1$$

È trilineare. CON CALCOLI VEDO ANCHE CHE È ANTISIMMETRICA

Es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 8 + 20 = \cancel{30}\ 21$$

Questo è il volume del parallelepipedo definito dai 3 vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Per es.

~~se~~ ho 3 vettori complanari $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ è nullo.

**Def** $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sono COMPLANARI se almeno 1 è combinaz. lineare dei rimanenti, x es. se
$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

~~diremo che~~

Osserviamo che

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v})$$

se ho 2 colonne uguali $\det = 0$ !

Infatti $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u})$

x CASA dim in verso opposto.

**Prop:** 3 vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sono complanari $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

# Proprietà del prodotto vettore

a) $\vec u \times \vec v \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec u \times \vec v \perp \begin{matrix}\vec u \\ \vec v\end{matrix}$

b) Se $\vec v$ collineare $\vec u \Rightarrow \vec u \times \vec v = \vec 0$

c) $\vec u \times \vec v = -\vec v \times \vec u$ ANTISIMMETRIA

d) $(\lambda \vec u_1 + \mu \vec u_2) \times \vec v = \lambda \vec u_1 \times \vec v + \mu \vec u_2 \times \vec v$

e) $\vec u \times (\lambda \vec v_1 + \mu \vec v_2) = \lambda \vec u \times \vec v_1 + \mu \vec u \times \vec v_2$

Es:

$$(2\vec i + 3\vec j - \vec k) \times (\vec i + 2\vec j - 2\vec k) =$$

$$= \cancel{2\vec i \times \vec i} + \underbrace{4\vec i \times \vec j}_{\vec k} - 4\vec i \times \vec k + 3\vec j \times \vec i + \cancel{6\vec j \times \vec j} - \underbrace{6\vec j \times \vec k}_{\vec i} - \underbrace{\vec k \times \vec i}_{\vec j} - 2\vec k \times \vec j + \cancel{2\vec k \times \vec k} =$$

$= \dots$

## Dim

a) Poniamo che $\vec u \times \vec v \perp \vec u$

infatti $\langle \vec u \times \vec v, \vec u \rangle = \det(\vec u, \vec v, \vec u) = 0$

$\langle \vec u \times \vec v, \vec v \rangle = \det(\vec u, \vec v, \vec v) = 0$

b) Sia $\vec v = \lambda \vec u$

$\vec u \times \lambda \vec u$ $\quad \forall \vec w \in \mathbb{R}^3$

$$\langle \vec u \times \lambda \vec u, \vec w \rangle = \det(\vec u, \lambda \vec u, \vec w) = \lambda \det(\vec u, \vec u, \vec w) = 0$$

c) $\langle \vec v \times \vec u, \vec w \rangle \qquad \langle -\vec u \times \vec v, \vec w \rangle = -\langle \vec u \times \vec v, \vec w \rangle$

$$\det(\vec v, \vec u, \vec w) = -\det(\vec u, \vec v, \vec w) = -\det(\vec u, \vec v, \vec w)$$

$$\Rightarrow \vec v \times \vec u = -\vec u \times \vec v$$

INOLTRE NON VALE L'ASSOCIATIVA

$(\vec u \times \vec v) \times \vec w \neq \vec u \times (\vec v \times \vec w)$ $\qquad$ Perciò $\vec u \times \vec v \times \vec w$ non ha senso

Per es. $(\vec i \times \vec i) \times \vec j = \vec 0$ $\qquad \vec i \times (\vec i \times \vec j) = \vec i \times \vec k = -\vec j \neq \vec 0$ → qst è anche la dim



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 248

$a=5$ , $b=2$

PER CASA ✓

3) Dati: $\{\vec{i}, \vec{i}+\vec{j}\}$, $\{\vec{i}+\vec{j}, \vec{i}+\vec{k}\}$, $\{\vec{i}+\vec{j}, 2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\}$

a. Trovare per ogni coppia l'angolo corrispondente

b. " " " " un versore perpendicolare ai 2 vettori dati in ciascun caso.

(a) $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad \cos\theta = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

(b) Per trovare $\vec{v} \perp \begin{matrix}\vec{i}\\ \vec{i}+\vec{j}\end{matrix}$

$$\vec{i} \times (\vec{i}+\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 1 \\ \vec{j} & 0 & 1 \\ \vec{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{k}, \text{ che ha modulo } 1.$$

COSA FA L'ACQUA AL PESCE? NULLA!

(a) $\vec{i}+\vec{j} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{i}+\vec{k} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

(b) $$\begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 1 \\ \vec{j} & 1 & 0 \\ \vec{k} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Ora versorizzo

$$\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

5) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + \cancel{2\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}^{0} + |\vec{v}|^2$ ~~SERV~~ USO LA PERPENDICOLARITÀ

$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - \cancel{2\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}_{0} + |\vec{v}|^2$

Perciò $|\vec{u}+\vec{v}|^{\cancel{2}} = |\vec{u}-\vec{v}|^{\cancel{2}}$

6) Trovare i vettori complanari con $\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}$ e $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$ ed ortogonali a $\vec{u}+\vec{v}$

$\boxed{\langle \vec{x}, \vec{u}\times\vec{v}\rangle = 0}$ PRODOTTO MISTO $= \det(\vec{x},\vec{u},\vec{v})$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & -1 & 0 \end{vmatrix} = a - b + c = 0$

$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2a + b - c = 0$

$(+) \quad \begin{cases} 3a = 0 \\ b = c \\ a = 0 \end{cases}$

$\vec{x} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \xrightarrow{\text{+ elegantemente}} \vec{x} = \left\{ b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$

7) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) ~~come~~ sono complanari?

b) trovare $\vec{z} \perp \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{matrix} \qquad \vec{u}\times\vec{v}$

c) trovare un vettore di modulo 3 parallelo e concorde a $\vec{v}$

$|\vec{x}| = 3 \qquad \vec{x} = \lambda \vec{v} \qquad \lambda > 0$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1/2 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1/2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{?}{=} 0 \qquad 2(-2+4) + (-1-2) + \frac{1}{2}(-2-2) =$

$= +4 - 3 - 2 = -1$ NON COMPLANARI!

b) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & 1/2 \\ \vec{j} & -1 & 1 \\ \vec{k} & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -7/4 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

c) $\lambda > 0 \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad |\vec{x}| = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 + \lambda^2} = 3 \qquad \frac{3}{2}\lambda = \cancel{3}^{1} \rightarrow \lambda = 2$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\vec{v}, A) \longmapsto A + \vec{v}$

Dove se $A = * + \vec{u}_A$

$$\underbrace{A + \vec{v}} = (* + \vec{u}_A) + \vec{v}$$

Qua non posso applicare la prop. associativa

Def:

$$(* + \vec{u}_A) + \vec{v} = * + (\vec{u}_A + \vec{v})$$

[questa è la traslazione del punto]

traslato di A per mezzo di $\vec{v}$

Osservazione: $\forall A \in \mathcal{E}^n$

$$A + \vec{0} = (* + \vec{u}_A) + \vec{0} = * + (\vec{u}_A + \vec{0}) = * + \vec{u}_A = A$$

Il vettore nullo agisce banalmente su $\mathcal{E}^n$

NOTA: $*$ non è un punto

MA

$$* + \vec{0} \in \mathcal{E}^n$$

è un modo per pensare "$*$" come punto di $\mathcal{E}^n$

Posso chiamarlo $O = * + \vec{0}$

Proprietà:

OGNI PUNTO PUÒ ESSERE TRASFORMATO IN QUALSIASI ALTRO

$\mathbb{R}^n$ agisce transitivamente su $\mathcal{E}^n$

ossia $\forall A, B \in \mathcal{E}^n$

$$\exists \vec{v} \,/\, A + \vec{v} = B$$

INFATTI se $A = * + \vec{u}_A$, $B = * + \vec{u}_B$

Allora $B = \overbrace{(* + \vec{u}_A)}^{A} + \underbrace{(\vec{u}_B - \vec{u}_A)}_{\in \mathbb{R}^n} =$

$$= * + (\cancel{\vec{u}_A} + \vec{u}_B - \cancel{\vec{u}_A}) = * + \vec{u}_B = B$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 248

b) $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$

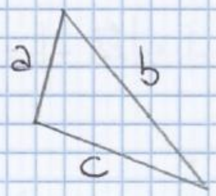
$\Longrightarrow \vec{BA} = -\vec{AB}$

c) $\forall O \in \mathcal{E}^n \quad \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$

Per la (b) $\vec{AO} = -\vec{OA}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

## Teorema di Pitagora

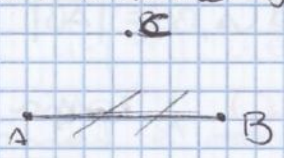



Un triangolo è rettangolo $\Longleftrightarrow$ il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due.

$\underline{a^2 = b^2 + c^2}$

**Def.**

Un triangolo di $\mathcal{E}^n$ è un insieme di 3 punti $A, B, C$




Il triangolo è retto in $A$ se $\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle = 0$

~~Dim di Pi~~ Se $A, B \in \mathcal{E}^n$ $\quad \underbrace{d}_{\text{dist. } AB}(A,B) = |\vec{AB}| = \overline{AB}$

**Dim di Pitagora:**

Sia $\widehat{A,B,C}$ triangolo. Esso è retto in $A \Longleftrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

① Se il tr. è retto $\rightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \Longrightarrow \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

$|\vec{BC}|^2 = |\vec{AC} - \vec{AB}|^2 \qquad \overline{BC}^2 = \langle \vec{AC} - \vec{AB}, \vec{AC} - \vec{AB} \rangle =$

Dim:

1) $d(A,B) = |\vec{AB}| \geq 0$

INOLTRE $d(A,B) = 0 \Rightarrow |\vec{AB}| = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{0}$

$\Rightarrow A = B$ infatti $\vec{AA} = \vec{0}$

ma qui $\vec{AB} = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l} B = A + \vec{0} \\ A = A + \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow B = A$$

2) $d(A,B) = |\vec{AB}| = |-\vec{BA}| = |-1|\,|\vec{BA}| = |\vec{BA}| = d(B,A)$

3) $\forall C \in \mathcal{E}^n$

$d(A,B) = |\vec{AB}| = |\vec{AC} + \vec{CB}| \leq |\vec{AC}| + |\vec{CB}| = d(A,C) + d(C,B)$

## Sistemi di riferimento

Sia $O \in \mathcal{E}^n$ e sia $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Ricordiamo che ogni colonna $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_1\vec{e}_1 + \dots + u_n\vec{e}_n$

Un riferimento cartesiano standard è una coppia $R_0 = (O; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$

perché è una base canonica

Ricordiamo che base canonica è ortonormale $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$

Def.

Sia $P \in \mathcal{E}^n$.

Diciamo che $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono le ~~coordinate~~ $R_0$-coordinate di $P$

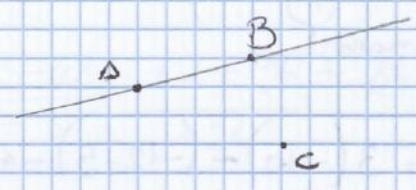
$\Leftrightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$

3) Nello spazio euclideo $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

a) Provare che A, B, C non sono allineati

b) Determinare l'area del triangolo di vertici A, B e C

a)




$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

$P = A + \vec{AB}\,t$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1-0\\2-1\\1-0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$

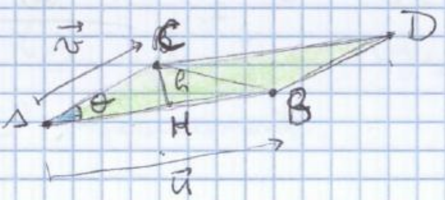
Quindi $\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

C soddisfa queste equazioni?

$\begin{cases} 0 = t \\ 2 = 1+t \\ -1 = t \end{cases}$ CONTRADDIZIONE!

Pertanto $C \notin \ell$ ($\ell$ è la retta cui $\in A, B$)

b)




$\vec{u} = \vec{AB}$

$\vec{v} = \vec{AC}$

$\sin\theta = \dfrac{h}{|\vec{v}|} \longrightarrow h = |\vec{v}| \sin\theta$

$A = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin\theta = |\vec{u} \times \vec{v}|$

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 1 & 1 \\ \vec{k} & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\+1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow A(\widehat{ABC}) = \dfrac{\sqrt{4+1+1}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 2 \\ \vec{j} & 0 & -3 \\ \vec{k} & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\sqrt{9+4+9}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{22}} \\ -\frac{2}{\sqrt{22}} \\ -\frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}$$

7) Calcolare

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45-48-4(18-24)+7(12-15) = \dots = 0$$

$$\underbrace{45-48}_{-3}\underbrace{-72+96}_{+24}\underbrace{+84-105}_{-21} = \emptyset$$

8) $P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$d(P,Q) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$$

$$|\langle \vec{PQ}, \vec{PQ} \rangle| = \left|\left\langle \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix} \right\rangle\right|$$

9) La distanza fra $A\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vale...?

$$\sqrt{(2-1)^2+(0+5)^2+(1-2)^2} = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

---

**Proposizione:**

Siano $(x_1,\dots,x_n)$ e $(y_1,\dots,y_n)$ coordinate dei punti $P,Q \in \mathcal{E}^n$ rispettivamente.

Allora

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} y_1-x_1 \\ y_2-x_2 \\ \vdots \\ y_n-x_n \end{pmatrix}$$

**Infatti**

$$\forall O \in \mathcal{E}^n \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

Scegliendo $O \equiv$ origine

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1-x_1 \\ y_2-x_2 \\ \vdots \\ y_n-x_n \end{pmatrix}$$

Se $(x, y, z)$ sono coordinate del generico punto in ~~r~~ e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

Equazioni per la retta cercata si ottengono dall'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} t$$

da cui

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 t \\ v_2 t \\ v_3 t \end{pmatrix}$$

Siccome 2 vettori sono uguali se hanno componenti uguali

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - x_0 = v_1 t \\ y - y_0 = v_2 t \\ z - z_0 = v_3 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$$

Equazioni parametriche $r_{P_0, \vec{v}}$

Descrivo la retta partendo da un mio pto qualsiasi e ~~sommando~~ un qualsiasi vettore $// \vec{v}$ non nullo

Es:

Trovare equazioni parametriche della retta che passa per $P_0(1, 2, -3)$ e parallela a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ vettore ~~dimensione~~ direzionale

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -3 + 7t \end{cases}$$

O ancora:

Scrivere equazioni parametriche della retta passante per $P_1(1, 2, 3)$ e $P_2(2, 1, 5)$

Basta scrivere la retta passante per $P_1$ e $// \overrightarrow{P_1P_2}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\mu \\ z = -1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$$

EQ. CARTESIANE: relazioni tra $x, y, z$

Basta eliminare i parametri $\lambda, \mu$ dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} \lambda = x - 1 \\ 2\mu = y - 2 \\ z = -1 + x - 1 + y - 2 = x + y - 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x + y - z - 4 = 0}$$

Osservazione:

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{coefficienti di } x,y,z}, \vec{u} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} \right\rangle = 0 \Rightarrow \text{ORTOGONALITÀ}$$

Def $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{E}^3$ si dicono allineati $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_1P_2}$ è collineare di $\overrightarrow{P_1P_3}$

Per 3 punti non allineati passa il piano $\pi_{P_1,P_2,P_3} = \{P = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1P_2} + \mu \overrightarrow{P_1P_3}\}$

Osserviamo che se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (non collineari)

$$\pi_{P_0,\vec{u},\vec{v}} = \{P \in \mathcal{E}^n / \overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\} = \{P \in \mathcal{E}^n \text{ complanari con } \vec{u} \text{ e } \vec{v}\}$$

Dunque

$$\pi_{P_0,\vec{v}_1,\vec{v}_2} = \{P / \det(\overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v}) = 0\},$$

il che prova che OGNI PIANO può scriversi in forma cartesiana come $ax + by + cz + d = 0$

Infatti, dette $(x, y, z)$ le coordinate di un punto variabile in $\pi$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi $\Longrightarrow$

Es: Trovare 3 punti in

$$2x - y + 2z - 3 = 0$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ 2x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

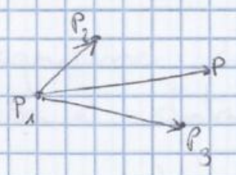
Se facessi il prodotto vettore $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$ otterrei $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Es: Eq. cartesiana e parametrica del piano passante per $P_1(1,2,-1)$, $P_2(2,1,1)$, $P_3(1,2,3)$?

Soluz.

Sia $P \in \pi_{P_1,P_2,P_3}$

$$\Rightarrow \det(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$




$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-2 & -1 & 0 \\ z+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

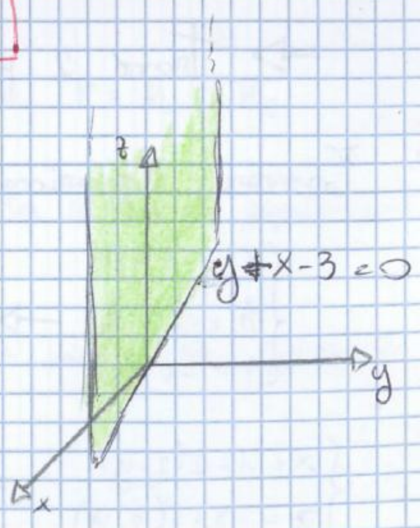
$$4 \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 - x + 2 - y = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - 3 = 0}$$ → eq. di un piano!

NB

$\{P(x,y) \in \mathcal{E}^2 / x + y - 3 = 0\}$ RETTA

$\{P(x,y,z) \in \mathcal{E}^3 / x + y - 3 = 0\}$ PIANO




Ad es.

$\{P(x,y,z) \in \mathcal{E}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$ CILINDRO!



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 248

Verifica che $x+2y-5=0$ contiene la retta r

Se $(x,y,z) \in r$

$$1+2t+2(2-t)-5 = 1+\cancel{2t}+4-\cancel{2t}-5 = 0 \; !$$

Es: Trovare altro piano contenente la stessa retta dell'es.

Ad es. sommo i 2 piani

$$\underbrace{x+2y-5}_{=0} + \underbrace{4y+z-5}_{=0} = 0$$

$$x+6y+z-10=0$$

# IN GENERALE

Dati 2 piani $\pi_1 = \pi_1(x,y,z) = 0$ e $\pi_2 = \pi_2(x,y,z) = 0$

(dove $\pi_i(x,y,z) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$)

Che si intersecano nella retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$

Un'equazione di tutti i piani che si intersecano nella stessa retta è data da

$$\lambda \pi_1(x,y,z) + \mu \pi_2(x,y,z) = 0$$

$$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

Eq. del fascio di piani con asse $r = \pi_1 \cap \pi_2$

Es: Nel fascio di piani avente asse la retta r di equazioni

$$r: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2-3t \\ z = 1-3t \end{cases}$$ determinare se esistono i piani che passano per il punto $(2,4,1)$

~~$t = \frac{1-x}{2}$ $6t =$~~

$$\begin{cases} 3x = 3-6t \\ 2y = 4-6t \\ 2z = 2-6t \end{cases} \quad 6t = 3-3x \quad \Rightarrow \begin{cases} 2y = 4-3+3x \\ 2z = 2-3+3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 3x-2z-1=0 \end{cases}$$

GIRA ⟹

## Stella di piani di centro $(x_0, y_0, z_0)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

famiglia lineare a 2 parametri di tutti i piani passanti per $(x_0, y_0, z_0)$

Es: Trovare equazione piano che passa per
$P_1(2,1,1)$ $P_2(1,2,1)$ $P_3(1,1,2)$

Uso la complanarità,

per evitare i calcoli che farei imponendo $P_1, P_2, P_3 \in ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases} 2a+b+c+d=0 \\ a+2b+c+d=0 \\ a+b+2c+d=0 \end{cases}$$

o per evitare quelli legati a $P_2, P_3 \in a(x-2)+b(y-1)+c(z-1)=0$

$$\begin{cases} -a+b=0 \rightarrow b=a \\ -a+c=0 \rightarrow c=a \end{cases}$$

Il piano è $x+y+z=4$ perché la somma delle loro rispettive componenti fa sempre 4

$x_{P_1}+x_{P_2}+x_{P_3}=4$, ecc.

**Def** Le rette affini $\begin{cases} P=O+t\vec{e}_1 & \text{asse } x \\ P=O+t\vec{e}_2 & \text{asse } y \\ P=O+t\vec{e}_3 & \text{asse } z \end{cases}$

Eq. parametriche dell'asse y

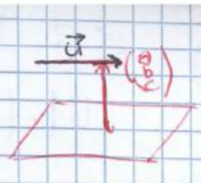
$$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$$

→ ecco i 2 piani che si intersecano per formare l'asse y



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 248

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} > = 0$$



$$\Longrightarrow \quad r \parallel \pi$$

$r_1 \parallel r_2 \iff \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$

$r_1 \perp r_2 \iff < \vec{u}_1, \vec{u}_2 > = 0$

# ANGOLO TRA 2 PIANI

L'angolo in realtà è un PUNTO DELLA CRF UNITARIA

$$S^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1 \}$$

Ogni pto della crf è un ANGOLO, di coordinate $(x_\alpha, y_\alpha)$

$x_\alpha$ è chiamato $\cos\alpha$

$y_\alpha$ è detto $\sin\alpha$

Dati $\pi_1$ e $\pi_2$

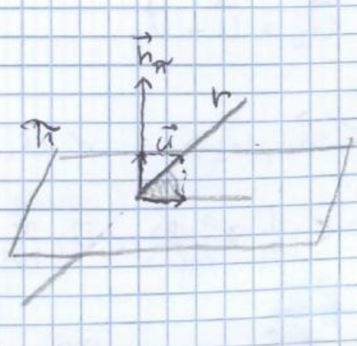
- $\cos(\pi_1, \pi_2) = \cos(\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}) =$

$$\vec{n}_\pi = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}_\pi| = 1$$

$$= \frac{< \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} >}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

Analogamente

- $\cos(r_1, r_2) = \dfrac{< \vec{u}_1, \vec{u}_2 >}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$




- $\sin(r, \pi) = \dfrac{< \vec{u}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} >}{|\vec{u}| \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 248

$$= \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \lambda^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \lambda^2 |\vec{v}|^2 =$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{|\vec{v}|^2} \cdot \frac{1}{|\vec{v}|^2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$$

$$= \frac{1}{|\vec{v}|^2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - \frac{1}{|\vec{v}|^{\cancel{4}\,2}} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \cancel{|\vec{v}|^2} = 0$$

Es: Siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$$

$$\vec{u}_{\parallel} = \left\langle \vec{u}, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\rangle \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|^2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{v} = \frac{1}{30} 19 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{15} \\ \frac{19}{30} \\ \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{19}{15} \\ \frac{19}{30} \\ \frac{19}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} \\ \frac{41}{30} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

# DISTANZE:

Ricordiamo che se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{E}^3$

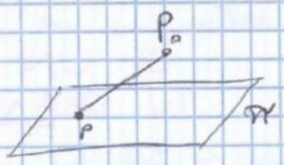
$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

DISTANZA: a_ punto - piano

b- punto - retta

c- retta - retta ~~piano~~

Def:

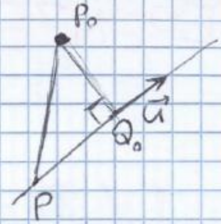



$$d(P_0, \pi) = \inf \underbrace{\{ d(P_0, P) / P \in \pi \}}_{\subseteq \mathbb{R}}$$

Di sicuro esiste perché $d(P_0, P)$ è sempre $\geq 0$

## b) Dist. punto - retta

$d(P_0, r)$

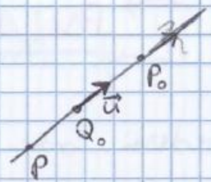



vettore su cui proiettare:

$(\vec{u} \times \vec{P_0P}) \times \vec{u}$

APPARTENENZA ALLA RETTA:

$\vec{P_0P} \times \vec{u} = \vec{0}$




$$d(P_0, r) = \frac{|\vec{P_0P} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

vedo l'appartenenza di $P_0$ alla retta, poi normalizzo (dividendo per $|\vec{u}|$)

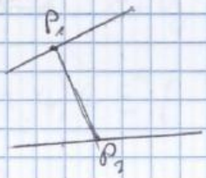
## c) $d(r_1, r_2)$

$r_i = P_i + t\, u_i$

Se $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow$ le rette sono parallele

$\Rightarrow d(r_1, r_2) = d(P_0, r_2)$ dove $P_0 \in r_1$

Altrimenti, se sono SGHEMBE (giacciono su 2 piani distinti)



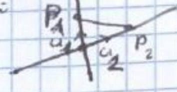

modulo proiez. ortogonale $\vec{P_1P_2}$ su un vettore ortogonale a entrambe le rette.

$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \perp \begin{cases} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{cases}$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \vec{P_1P_2}|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$$

LA dist è NULLA SE ESSE SI INCONTRANO IN UN PUNTO

le rette sono complanari




$\langle \vec{u}_1 \times \vec{u}_2, \vec{P_1P_2} \rangle = 0$

$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \vec{P_1P_2} = 0$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 248

Sostituendo abbiamo

$$t^2+t^2+9t^2=3 \to t^2=\frac{3}{11} \to t=\pm\sqrt{\frac{3}{11}}$$

$$S\cap r=\left\{\begin{pmatrix}1+\sqrt{\frac{3}{11}}\\ 2-\sqrt{\frac{3}{11}}\\ -1+3\sqrt{\frac{3}{11}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\sqrt{\frac{3}{11}}\\ 2+\sqrt{\frac{3}{11}}\\ -1-3\sqrt{\frac{3}{11}}\end{pmatrix}\right\}$$

DIVAGAZIONE:

In $\mathcal{E}^4$ una retta si esprime nella forma $P=P_0+\vec{u}t$ $\quad \vec{u}\in\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases}x_1=a_1+u_1t\\ x_2=a_2+u_2t\\ x_3=a_3+u_3t\\ x_4=a_4+u_4t\end{cases}$$

## PASSAGGI DA $\mathcal{E}^n$ a $\mathcal{E}^m$

1) Sia data la crf del piano $\mathcal{E}^2$ $x^2+y^2=1$

Ora immergiamola nello spazio:

$$\cancel{\{x^2+y^2}$$

$(x,y,z)\in\mathcal{E}^3 / \begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ → AGGIUNGO UNA COORDINATA E LA PONGO UGUALE A ZERO.

2) Immergiamo $x^2+y^2+z^2=1\subseteq\mathcal{E}^3$ in $\mathcal{E}^4$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathcal{E}^4 / \begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\\ x_4=0\end{cases}$$

$$r\begin{cases}x_1=t\\ x_2=t\\ x_3=t\\ x_4=t\end{cases} \qquad r\cap s\ ?$$

$$r\cap s=\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\\ x_4=0\\ x_1=x_2=x_3=x_4=t\end{cases} \qquad \left.\begin{cases}t^2+t^2+t^2=1\\ t=0\end{cases}\right]?$$

NELLO SPAZIO A 4 DIMENSIONI UNA RETTA PUO' PASSARE AL CENTRO DELLA SFERA SENZA ATTRAVERSARLA

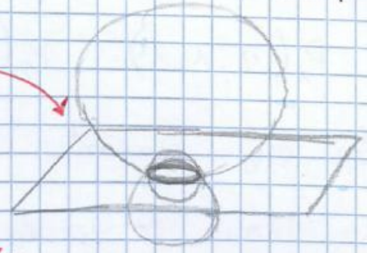
basta estendere il concetto a $\mathcal{E}^4$ ⇐

P (sul foglio bidimensionale) per arrivare in O attraversa la crf, io (3D) posso arrivare direttamente in O.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 248

$\Rightarrow$ $\forall$ crf è in almeno un modo intersezione di un piano e una sfera



$$\mathcal{C}_{P_0,\pi}(R) = \underbrace{\{P \in \mathcal{E}^3 \,/\, d(P_0,P) = R\}}_{S_{P_0}(R)} \cap \pi$$

Ho infinite eq. cartesiane
(stesso piano, molte sfere)

Per trovare centro e raggio:

esercizio

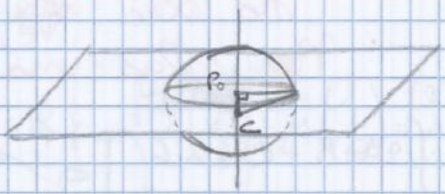
Data la crf

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z-10=0 \\ x-2y+z-2=0 \end{cases}$$

TROVARE COORDINATE DI CENTRO E IL RAGGIO

CENTRO SFERA:

$C(1,2,-4)$



EQ. RETTA PASSANTE PER C E $\perp \pi$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = -4+t \end{cases}$$

$r \cap \pi \quad 1+t-2(2-2t)+t-4-2=0 \rightarrow 6t = 9 \quad t = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{3}{2}$

CENTRO CRF:

$$P_0\left(1+\frac{3}{2},\ 2-2\frac{3}{2},\ -4+\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -1, -\frac{5}{2}\right)$$

RAGGIO:

Pitagora $\Rightarrow$ $r^2 = R^2 - d(\pi, C)^2 = 1+4+16+10 - \left(\frac{|1-4-4-2|}{\sqrt{1+4+1}}\right)^2 = 31 - \frac{\cancel{81}^{27}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{62-27}{2} = \frac{35}{2}$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{35}{2}}$

Quindi $\quad crf: \begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases}$

# ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE DI $\mathbb{R}^n$

Sappiamo che $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} / u_i \in \mathbb{R} \right\}$ è uno SPAZIO VETTORIALE rispetto alla nozione di combinazione lineare data da

$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})(i) = \lambda \vec{u}(i) + \mu \vec{v}(i)$$

cioè $\quad \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n + \mu v_n \end{pmatrix}$

Siano $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h$ colonne di $\mathbb{R}^n$

$$[\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_h] \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$[\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h] = \left\{ \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_h \vec{b}_h / \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \vec{b}_i / \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Es: $\mathbb{R}^3 \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$[\vec{b}_1, \vec{b}_2] = \left\{ \lambda \vec{b}_1 + \mu \vec{b}_2 / \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu \\ \lambda + \mu \\ -3\lambda + 5\mu \end{pmatrix} / \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Ponendo $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu \\ \lambda + \mu \\ -3\lambda + 5\mu \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \rightarrow x = 2\lambda + y - \lambda = \lambda + y \\ y = \lambda + \mu \rightarrow \mu = y - \lambda \\ z = -3\lambda + 5\mu \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda = x - y \\ \mu = -x + 2y \end{cases} \quad \Rightarrow z = -3(x-y) + 5(2y-x)$

eq. di un piano, ma non siamo in $\mathcal{E}^n$

Def

Sia $\emptyset \neq W \subseteq \mathbb{R}^n$

$W$ si dice SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $\mathbb{R}^n$ se è chiuso rispetto alle combinazioni lineari

ossia se $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \forall \vec{u}, \vec{v} \in W$

$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W$

Anche $C^0$ è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE, così come $C^1$

Proposizione:

$[\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_h] \subseteq \mathbb{K}^n$ è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Verifica:

$$\vec{u}, \vec{v} \in [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h] \quad , \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_h \;/\; \vec{u} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_h \vec{b}_h$

$\exists \mu_1, \dots, \mu_h \;/\; \vec{v} = \mu_1 \vec{b}_1 + \dots + \mu_h \vec{b}_h$

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \lambda(\lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_h \vec{b}_h) + \mu(\mu_1 \vec{b}_1 + \dots + \mu_h \vec{b}_h) =$$

$$= \underbrace{(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)}_{\lambda_1^*} \vec{b}_1 + \dots + \underbrace{(\lambda\lambda_h + \mu\mu_h)}_{\lambda_h^*} \vec{b}_h \in [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h]$$

$\Rightarrow [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h]$ è SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $\mathbb{K}^n$ detto sottospazio GENERATO da $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h$, che vengono detti

generatori di $[\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h]$

Def

Sia $W$ sottospazio. Si dice che $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h$ generano $W$

$\Leftrightarrow W = [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h]$

Osservazione: $V = \mathbb{K}^n$

$\{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio

$$\lambda \vec{0} + \mu \vec{0} = \vec{0}$$

Inoltre $\mathbb{K}^n$ è sottospazio di $\mathbb{K}^n$

$\{\vec{0}\}, \mathbb{K}^n$ si dicono SOTTOSPAZI BANALI

$\mathbb{K}^n = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$ perché se $\vec{u} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}(1)\vec{e}_1 + \dots + \vec{u}(n)\vec{e}_n$

Se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ sono linearmente dipendenti

$\exists \lambda, \mu \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$

tali che $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{O}$ Per es $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow \vec{u} = \underbrace{\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)}_{\in \mathbb{K}} \vec{v}$ $\quad \vec{u}$ multiplo di $\vec{v}$

Anche $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$ sono indipendenti

e $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$ " "

ma magari tutti e 3 sono dipendenti!

Prendo $a, b, c \in \mathbb{K}$

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

decomposizione del vettore nullo

$$\begin{cases} a+b+4c=0 \\ 2a-b+2c=0 \\ a+2b+6c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a+6c=0 \rightarrow a=-2c \\ 3b+6c=0 \rightarrow b=-2c \\ -2c-4c+6c=0 \rightarrow 0=0 \quad \forall c \in \mathbb{K} \end{cases}$$

Per es. $c=1$, $a=-2$, $b=-2$

$$-2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI!

$[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h] \in G(\mathbb{K}^n)$ dove $G(\mathbb{K}^n) = \{ W \subseteq \mathbb{K}^n / W \text{ sottospazio} \}$

**Prop:** Siano $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h \in \mathbb{K}^n$

$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ almeno uno si esprime come combinazione lineare dei rimanenti.

**Dim** $\Rightarrow$) Se sono dipendenti $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_h$ (non tutti nulli) tali che

$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{h-1} \vec{u}_{h-1} + \lambda_h \vec{u}_h = \vec{O}$

Gira $\Rightarrow$

$\underbrace{\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_h \vec{u}_h = \vec{0} = 0 \cdot \vec{u}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_h}_{=} \Rightarrow \cancel{\{\lambda_i\}}\ \lambda_i = 0$

PERCIÒ: sono l. i!

**Def** Supponiamo che $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h) \in \underbrace{W \times \dots \times W}_{h \text{ volte}}$

[vuol dire che mi interessa l'ordine] ACCOPPIO COPPIE ORDINATE

siano linearmente indipendenti e generino $W$, ossia

$W = [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h]$.

In questo caso la $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h)$ si dice BASE di $W$

**Es:** In $\mathbb{R}^3$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è base di $\mathbb{R}^3$.

Infatti essi sono l. i.

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_i = 0$$

$\mathbb{R}^3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$

$\Longrightarrow (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = E_3$ è una BASE DI $\mathbb{R}^3$

Anche $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, distinta da $E_3$

**Teor** Siano $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_h)$ e $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)$ due basi di $W \in G(\mathbb{K}^n)$. $\Longrightarrow h = k$

PERÒ DI BASI NE HO TANTE.

**Def** Sia $W \in G(\mathbb{K}^n)$ $\dim_{\mathbb{K}} W = m$ se esiste una base di $W$ formata da $m$ elementi

la dimensione è numericamente uguale a h, ma sono 2 concetti diversi

**Es:** $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$ perché $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ è base.

ciaoè $\mathbb{K}^n = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n]$ e $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ n-upla ordinata di vettori l.i.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 248

**Prop** Supponiamo che $W \in G(\mathbb{K}^n)$. Allora $\dim_{\mathbb{K}} W \leq n$ e se $\dim_{\mathbb{K}} W = n \Rightarrow W = \mathbb{K}^n$

**Esercizio:** Sia $W = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / \vec{u}(1) - 2\vec{u}(2) + 3\vec{u}(3) = 0\}$ ← STILE π CHE PASSA x L'ORIGINE [infatti comprende $\vec{0}$]

Provare che $W \in G(\mathbb{R}^3)$ e trovare la dimensione e una sua base.

Siano $\vec{u}, \vec{v} \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W$ infatti

$$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})(1) - 2(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})(2) + 3(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})(3) =$$

$$= \lambda\vec{u}(1) + \mu\vec{v}(1) - 2\lambda\vec{u}(1) - 2\mu\vec{v}(2) + 3\lambda\vec{u}(3) + 3\mu\vec{v}(3) =$$

$$= \lambda\underbrace{\left(\vec{u}(1) - 2\vec{u}(2) + 3\vec{u}(3)\right)}_{\text{ZERO}} + \mu\underbrace{\left(\vec{v}(1) - 2\vec{v}(2) + 3\vec{v}(3)\right)}_{\text{ZERO}} = 0$$

$\Rightarrow W$ è sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$\dim_{\mathbb{R}} W = 2$

$$\vec{u} \in W \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{u}(1) \\ \vec{u}(2) \\ \vec{u}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\vec{u}(2) - 3\vec{u}(3) \\ \vec{u}(2) \\ \vec{u}(3) \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\vec{u}(2)}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\vec{u}(3)}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \in \mathbb{R}$$

ecco allora che $W = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ e $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$

**Prop** Siano $W_1, W_2, \dots, W_k \in G(\mathbb{K}^n)$

Allora $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_k \in G(\mathbb{K}^n)$

**Dim** $\vec{u}, \vec{v} \in W_1 \cap \dots \cap W_k \Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \in W_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq k$

ma $W_i$ è sottospazio $\quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq k$

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \bigcap_{i=1}^{k} W_i \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{k} W_i \in G(\mathbb{K}^n)$$

**Def** $(\mathbb{K}^n)^\vee = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ → "CHECK", o "DUALE"

Ovviamente $(\mathbb{K}^n)^\vee$ è uno spazio vettoriale, perché $\xrightarrow{\text{ecc}}$

$(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)\cdot\vec{u} = \lambda\alpha_1\cdot\vec{u} + \mu\alpha_2\cdot\vec{u}$ (N2iF: prop. distributiva a dx e a sx)

$\alpha\cdot(\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2) = \lambda\alpha\cdot\vec{u}_1 + \mu\alpha\cdot\vec{u}_2$

**Def** $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^T \cdot \vec{v}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle = (u_1, \dots, u_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$$

**Osservazione:**

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$(1, -2, 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

**Esercizio:** Sia $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{K}^n)^\vee$

$$W_\alpha = \{\vec{u} \in \mathbb{K}^n : \alpha\cdot\vec{u} = 0\} \in G(\mathbb{K}^n)$$

NOTA: se $\alpha = (0, \dots, 0)$ $W_\alpha = \mathbb{K}^n$

**Infatti**

se $\vec{u}, \vec{v} \in W_\alpha$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W_\alpha$?

~~cioè~~ $\alpha\cdot(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\underbrace{\alpha\cdot\vec{u}}_{0} + \mu\underbrace{\alpha\cdot\vec{v}}_{0} = 0$

$\Longrightarrow$ $W_\alpha$ SOTTOSPAZIO

**Esercizio:**

SIST. DI EQ. LINEARI OMOGENEO

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$W \in G(\mathbb{R}^4)$?

$$W = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} \overbrace{(3, -2, -1, 5)}^{\alpha_1}\vec{u} = 0 \\ \overbrace{(1, 2, 8, -7)}^{\alpha_2}\vec{u} = 0 \\ \underbrace{(0, 1, 0, -3)}_{\alpha_3}\vec{u} = 0 \end{array} \right\}$$

$$W_{\alpha_1} \cap W_{\alpha_2} \cap W_{\alpha_3} \in G(\mathbb{R}^4)$$

$\rightarrow$ le soluzioni di un sistema di equazioni lineare omogeneo formano un sottospazio.

la loro combinaz. lineare è soluzione.

La madre di tutte le applicazioni lineari è $z \mapsto az$

Se $f: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ è lineare

Allora
- $f(\vec{0}_n) = \vec{0}_m$, infatti $f(\vec{0}_n) = f(0 \cdot \vec{v}) \overset{\text{Linearità}}{=} 0 \cdot f(\vec{v}) = \vec{0}_m$
- $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$, infatti $f(\vec{u} + (-\vec{u})) = \vec{0}_m$

RIPASSO DI INSIEMI

Ricordiamo che se $A, B$ sono insiemi e $f: A \to B$ funzione

$$\operatorname{Im} f \subseteq B = \{f(a) / a \in A\}$$

$f$ è SURIETTIVA se $\operatorname{Im} f = B$ ovvero $\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$

$$\forall b \in B, \; \underbrace{f^{-1}(b)}_{} = \{a \in A / f(a) = b\} \subseteq A$$

NON È L'INVERSA, $f$ POTREBBE NON ESSERE INVERTIBILE!

SOTTOINSIEME DELLE CONTROIMMAGINI DI $b$ (può essere $\emptyset$)

Per es $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(-4) = \emptyset$

Se $\forall b \in B$, $f^{-1}(b)$ contiene al più un elemento, $f$ si dice INIETTIVA

$f: A \to B$ è BIIETTIVA se è INIETTIVA & SURIETTIVA

Vogliamo studiare questo PROBLEMA:

$$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

$\forall \vec{b} \in \mathbb{K}^m$ vogliamo determinare $f^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{u} \in \mathbb{K}^n / f(\vec{u}) = \vec{b}\}$

Tale problema ha soluzioni dipendendo da $\vec{b}$

Prop $f^{-1}(\vec{b}) \neq \emptyset \iff \vec{b} \in \operatorname{Im}(f)$

Se $\vec{b} \in \operatorname{Im}(f)$ $f^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n / \underline{f(\vec{x}) = \vec{b}}\}$

INFATTI

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = x f(\vec{e}_1) + y f(\vec{e}_2) + z f(\vec{e}_3) =$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pertanto sia $A = \mathbb{K}^{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (C_1(A), \dots, C_n(A))$$

$C_1(A)$ $C_2(A)$ $C_n(A)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 C_1(A) + \dots + x_n C_n(A)$$

Es: Sia data $A^{2\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7\cdot 2 + 2\cdot 1 - 3\cdot 3 \\ 7\cdot 1 + 2\cdot(-4) - 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{(C_1(A), C_2(A), C_3(A))}_{\text{RIGA DI COLONNE}} = \underbrace{\begin{pmatrix} R_1(A) \\ R_2(A) \end{pmatrix}}_{\text{COLONNA DI RIGHE}}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 C_1(A) + u_2 C_2(A) + u_3 C_3(A) = \begin{pmatrix} R_1(A)\cdot\vec{u} \\ R_2(A)\cdot\vec{u} \end{pmatrix}$$

Quindi $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

si può scrivere come $f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$

Es: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^3$. Calcolare l'immagine di $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14+2 \\ 7+8 \\ 21+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{GIRARE}}$

$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}} [C_1(A), \dots, C_n(A), \vec{b}] = \dim_{\mathbb{K}} (C_1(A), \dots, C_n(A))$

**Def** Se $A$ è una matrice (cioè $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$)

$$A = (C_1(A), \dots, C_n(A)) = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_m(A) \end{pmatrix} \qquad C_i(A) \in \mathbb{K}^m \qquad R_i(A) \in (\mathbb{K}^n)^\vee$$

RANGO COLONNA di $A$ $= \dim_{\mathbb{K}} [C_1(A), \dots, C_n(A)]$

RANGO RIGA DI $A$ $= \dim_{\mathbb{K}} [R_1(A), \dots, R_m(A)]$

(MAX NUM. DI RIGHE LINEARM. INDIPENDENTI)

**Es**: determinare RANGO RIGA e RANGO COLONNA di $A$ e $B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

2 RIGHE LINEARM. INDIP.

RANGO ~~RIGA~~ = 2

RANGO RIGA = 1

RANGO COLONNA = 1

le colonne l.i. sono in $\mathbb{R}^2$, perciò sono al max 2

RANGO COLONNA = 2

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

**Teor** $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

rango riga $(A)$ = rango colonna $(A)$ = $rk(A)$

**Teor di Rouché - CAPELLI**

Sia dato il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$. Allora

$$A^{-1}(\vec{b}) \neq \emptyset \Leftrightarrow rk(A|\vec{b}) = rk(A)$$

**Infatti**

$rk(A|\vec{b}) = \dim [C_1(A), \dots, C_n(A), \vec{b}] = \dim [C_1(A), \dots, C_n(A)]$

$\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ combinaz. lineare delle colonne $\Leftrightarrow \vec{b} \in \operatorname{Im} A$

$A_1$ / $R_2(A_1) = R_2(A) - 2R_1(A)$

$R_3(A_1) = R_3(A) - 3R_1(A)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & -8 & -7 \\ -3 & 0 & 2 & -8 & -7 \end{pmatrix} =$$

Il RANGO è 2

$A_2$ / $R_3(A_2) = R_3(A_1) - R_2(A_1)$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ecco la ridotta

$rk(A) =$ num righe ~~non~~ nulle nella RIDOTTA

**Esercizio:** Sia dato il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 - h \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 + h \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Per quali valori di $h$ il sistema ha soluzioni?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-h \\ 2+h \\ 3 \end{pmatrix}$$

è soluz. solo se è combinaz. lineare delle colonne della matrice

MATRICE COMPLETA

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 1-h \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 2+h \\ 5 & -1 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_1$ / $R_2(A_1) = R_2(A) + R_1(A)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 3-h \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 2+h \\ 5 & -1 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_2$ / $R_3(A_2) = R_3(A_1) - 5R_2(A_1)$

$R_4(A_2) = R_4(A_1) - 6R_2(A_1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 3-h \\ -13 & 16 & 0 & 0 & 6h-13 \\ -13 & 17 & 0 & 0 & 7h-15 \end{pmatrix}$$

... $rk(A) = 4$ $\quad r(\text{completa}) = 4$

$=$

SOLUZ. per $\forall h$

una base del nucleo.

Per provare che $A^{-1}(\vec{b}) = \vec{u}_0 + \mathrm{Ker}\, A$

occorre che

1) $\forall \vec{v} \in A^{-1}(\vec{b}) \quad \vec{v} = \vec{u}_0 + \vec{u}$

2) $\{\vec{u} + \vec{u}_0 \mid \vec{u} \in \mathrm{Ker}(A)\} \subseteq A^{-1}(\vec{b})$

1) $\vec{v} \in A^{-1}(\vec{b}) \iff A\vec{v} = \vec{b} = A\vec{u}_0$

$\Rightarrow A\vec{v} = A\vec{u}_0 \iff A\vec{v} - A\vec{u}_0 = \vec{0} \iff A(\vec{v} - \vec{u}_0) = \vec{0}$

$\iff \vec{v} - \vec{u}_0 = \vec{u} \in \mathrm{Ker}(A)$

$\vec{v} = \vec{u}_0 + \vec{u}$

2) $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(A)$

$\Downarrow$

$A(\vec{u}_0 + \vec{u}) = A\vec{u}_0 + \underbrace{A\vec{u}}_{\vec{u} \in \mathrm{Ker}(A)} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$

Esempio / esercizio

$$\begin{cases} 2x - y + z - 2t = 3 \\ x + y + 2z - 5t = 1 \\ 6x + 6z - 14t = 8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 & 1 \\ 6 & 0 & 6 & -14 & 8 \end{array}\right) = (A|\vec{b})$$

~~$t = 0$~~ ~~$\begin{cases} 3x + 3z = 4 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$~~

$R_2(A_1|\vec{b}_1) = R_2(A|\vec{b}) + R_1(A|\vec{b})$

$$(A_1|b_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & -7 & 4 \\ 6 & 0 & 6 & -14 & 8 \end{array}\right)$$

$$(A_2|b_2) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$4 - 2 = 2$ PARAMETRI LIBERI

$\mathrm{rk}(A|\vec{b}) = \mathrm{rk}(A) = 2$

$$\begin{cases} 2x - y + z - 2t = 3 \\ 3x + 3z - 7z - 7t = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 2t - z + 3 \\ 3x = 7t - 3z + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 2\mu - \lambda + 3 \\ 3x = 7\mu - 3\lambda + 4 \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

Gira $\rightarrow$

se $A^{-1}(\vec{b}) \neq \phi$, allora

$$A^{-1}(\vec{b}) = \vec{u}_0 + Ker(A) \quad \left[\text{dove } \vec{u}_0 \in A^{-1}(\vec{b})\right]$$

Se $Ker A = \{\vec{0}_{\mathbb{K}^n}\}$ allora $A\vec{x} = \vec{b}$ possiede una soluzione

$$Ker A = \{\vec{u} \in \mathbb{K}^n / A\vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{K}^n}\}$$

# SISTEMA DI CRAMER:

SISTEMA IN CUI $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ è una matrice quadrata.

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad A^{-1}(\vec{b}) \neq \phi$$

$$\Leftrightarrow rk(A|\vec{b}) = rk(A) \Leftrightarrow \vec{b} \in [C_1(A), \dots, C_n(A)]$$

$$(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{b}$$

ossia

$$x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_n C_n(A) = \vec{b}$$

Es:
$$\begin{cases} x+2y = 3 \\ 2x-y = 1 \\ 3x+4y = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

MAI VERIFICATO!

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è fuori dal piano generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Nel caso $n = 3$

$$x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + x_3 C_3(A) = \vec{b}$$

$$C_1(A) \wedge \vec{b} \wedge C_3(A) = C_1(A) \wedge (x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + x_3 C_3(A)) \wedge C_3(A) =$$

USO LA LINEARITA' RISP. AL 2° ARGOMENTO

$$= \cancel{x_1 C_1(A) \wedge C_1(A) \wedge C_3(A)} + x_2 C_1(A) \wedge C_2(A) \wedge C_3(A) + \cancel{x_3 C_1(A) \wedge C_3(A) \wedge C_3(A)} =$$

PER L'ANTISIMMETRIA DEL DETERMINANTE

$$= x_2 C_1(A) \wedge C_2(A) \wedge C_3(A)$$

Perciò Se $\underbrace{|A|}_{=det(A)} \neq 0$

$$x_2 = \frac{C_1(A) \wedge \vec{b} \wedge C_3(A)}{|A|} \qquad x_3 = \frac{C_1(A) \wedge C_2(A) \wedge \vec{b}}{|A|}$$

$$x_1 = \frac{\vec{b} \wedge C_2(A) \wedge C_3(A)}{|A|}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 248

Esempio (perché Giovanni capisca): 10-4-14

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-3z=1 \\ y-2z=4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

CRAMER è di interesse teorico, ma NON UTILE NELLA PRATICA

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 - 2\cdot 4 = -5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{9+20}{-5} = -\frac{29}{5}$$

QSTO METODO È MOLTO + COMODO

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x-2y= \\ 5z= \\ y-2z= \end{matrix}$$

# Generalità su algebra di matrici

$$(\mathbb{K}^{m\times n}, +, \cdot) \text{ è SPAZIO VETTORIALE}$$

MOLTIPLICAZ. PER SCALARE

ossia $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$(\lambda A + \mu B)(i,j) = \lambda A(i,j) + \mu B(i,j)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n} \qquad A(i,j) = a_{ij}$$

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Si può anche fare COLONNE PER RIGHE:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

COLONNA A n COMPONENTI PER RIGA A n COMPONENTI $\Rightarrow$ MATRICE DI RANGO 1

Il PRODOTTO è BILINEARE

$\forall A, A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{m \times p} \quad \forall B, B_1, B_2 \in \mathbb{K}^{p \times n} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$(\lambda A_1 + \mu A_2) \cdot B = \lambda A_1 \cdot B + \mu A_2 \cdot B$$

$$A \cdot (\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda A \cdot B_1 + \mu A \cdot B_2$$

Perché "righe per colonne" è bilineare, e per conseguenza lo è anche quello "matrice per colonna", cui si può sempre ricondurre il prodotto di matrici.

Inoltre il prodotto di matrici è associativo nel seguente senso: $\forall m, p, q, n \in \mathbb{N}^*$ e $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times p}$, $\forall B \in \mathbb{K}^{p \times q}$, $\forall C \in \mathbb{K}^{q \times n}$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

INFATTI

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

LA COMPOSIZ. DI FUNZIONI È ASSOCIATIVA

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{C} \mathbb{K}^q \xrightarrow{B} \mathbb{K}^p \xrightarrow{A} \mathbb{K}^m$$

$$\vec{u} \longmapsto C \cdot \vec{u}$$

Le matrici si possono considerare come funzioni lineari

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 248

[http://cocoa.dima.unige.it]

ADESSO L'ENTRATA SI CALCOLA, NON SI DEFINISCE.

## Algebra delle matrici quadrate:

$n \geq 1$

$\mathbb{K}^{n \times n}$ rispetto all'usuale somma di matrici e MOLTIPLICAZIONE per uno scalare è uno SPAZIO VETTORIALE.

$\mathbb{K}^{n \times n}$ è inoltre dotato di una struttura di prodotto

$$\mathbb{K}^{n \times n} \times \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$$
$$(A, B) \longmapsto A \cdot B$$

La bilinearità del prodotto implica che valgono proprietà distributive [NON ESCO DALL'INSIEME, "OPERAZ. INTERNA"]

$$(\lambda A_1 + \mu A_2) B = \lambda A_1 B + \mu A_2 B$$

$$A(\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda A B_1 + \mu A B_2 .$$

Tale prodotto è associativo

$$\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times m}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Esiste elemento neutro del prodotto?

L'elemento neutro per il prodotto è $\mathbb{1}_n$, definita da

$$\mathbb{1}_n(i,j) = \delta_{ij}$$

Mostriamo che per $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\mathbb{1}_n \cdot A = A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

$A(C_1(x), \dots, C_n(x)) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

$(AC_1(x), \dots, AC_n(x)) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

$\begin{cases} AC_1(x) = \vec{e}_1 \\ \vdots \\ AC_n(x) = \vec{e}_n \end{cases}$ siccome $rk(A) = n$, ciascun sistema ha soluzione unica

$\Rightarrow$ trovo tutte le colonne e ottengo la matrice $X$

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

è invertibile $\Leftrightarrow rk(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\det : \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}$

$A \longmapsto |A|$

Le matrici con $\det = 0$ sono $\in \det^{-1}(0) = \{A / \det(A) = 0\}$

Quindi $\mathbb{K}^{n \times n}$ non è un gruppo rispetto al prodotto, perché non c'è inverso per tutte le matrici.

MA

GRUPPO LINEARE

$Gl_n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n \times n} \setminus \det^{-1}(0), \cdot)$

$Gl_n(\mathbb{K})$ è gruppo lineare delle matrici $n \times n$ invertibili

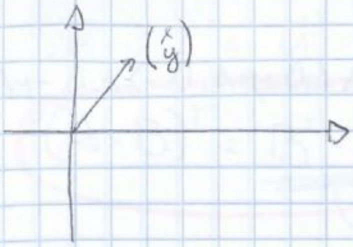
$A \in Gl_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists A^{-1} / A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$

$Gl_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ commutativo.

$n \geq 2$ $Gl_n(\mathbb{K})$ NON è COMMUTATIVO.

$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = B \cdot A$,

va bene, però è un CASO PARTICOLARE.




$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle}_{} = 0$$

HO RUOTATO IL VETTORE DI $\frac{\pi}{2}$, se lo rifaccio ottengo il vettore moltiplicato proprio per $-1$

$$\mathbb{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

le colonne formano una base ortonormale

$$\mathbb{R}_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R_\alpha \cdot R_\beta$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

---

Ricordiamo che l'insieme $\mathbb{K}^{n\times n}$ delle matrici quadrate $n\times n$ forma un'algebra (= spazio vettoriale con un'operazione binaria interna) rispetto alla naturale struttura di spazio vettoriale e il prodotto tra matrici.

$\mathbb{K}^{n\times n}$ possiede anche un'altra struttura di algebra NON ASSOCIATIVA

vale a dire

$$[A, B] = A\cdot B - B\cdot A$$

$[A, B]$ è il commutatore di 2 matrici.

2 matrici commutano $\Longleftrightarrow$ $[A, B] = 0$

$(\mathbb{K}^{n\times n}, [\,,\,])$ è un'algebra di Lie:

- $[A, B] = -[B, A]$
- $[\lambda A_1 + \mu A_2, B] = \lambda[A_1, B] + \mu[A_2, B]$

$(\alpha \cdot \vec{u})^T = \vec{u}^T \cdot \alpha^T \Longrightarrow$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

devo scriverli così perché siano moltiplicabili tra loro.

Torniamo alle MATRICI QUADRATE:

$Gl_n(\mathbb{K})$ è il gruppo [NON COMMUTATIVO] delle matrici $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertibili, ossia tali che

$\exists\, A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n} \,/\, A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n$

Ogni matrice siffatta ha RANGO MASSIMO $(= n)$, cioè $\det(A) \neq 0$

Esercizio: Determinare l'inversa di una matrice 2x2

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad |A| = ad - bc \neq 0$

Sia $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ la sua inversa.

In particolare $A \cdot X = \mathbb{1}_2$

$A(C_1(X), C_2(X)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$(A C_1(X), A C_2(X)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$\Longrightarrow \begin{cases} A C_1(X) = \vec{e}_1 & 1° \text{ sist.} \\ A\, C_2(X) = \vec{e}_2 & 2° \text{ sist.} \end{cases}$

1° sist. $(C_1(A), C_2(A)) \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ CRAMER

$x\, C_1(A) + z\, C_2(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{d}{|A|} \qquad z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{c}{|A|}$

Altro esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NB: due cose diverse da zero hanno prodotto nullo... CURIOSO!

Ancora un es:

Sia $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema di Cramer tale che $|A| \neq 0$

Allora $\exists A^{-1}$

$$A^{-1}\cdot(A\vec{x}) = A^{-1}\cdot\vec{b}$$

$$\Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b}$$

nel sist. di Cramer

$$\mathbb{1}_n\vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b} \qquad A^{-1}(\vec{b}) = A^{-1}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b}$$

$$\begin{cases} 3x - 7y = 12 \\ 2x + 8y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 8 & +7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{173}{38} \\ \frac{9}{38} \end{pmatrix}$$

Ritorniamo a $\mathbb{K}^{n\times n}$

Def $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si dice SIMMETRICA $\Leftrightarrow A^T = A$,

si dice invece ANTISIMMETRICA $\Leftrightarrow A^T = -A$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ è simmetrica: $R_i(A) = [C_i(A)]^T$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ MA $A^T \neq -A$