NUMERO: 1056

DATA: 02/09/2014

A P P U N T I

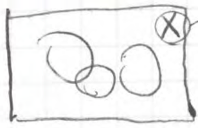
STUDENTE: Allora

MATERIA: Analisi Matematica I + Eserc.

Prof. Tabacco

ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

LETTERE MAIUSCOLE PER GLI INSIEMI, LETTERE minuscole PER GLI ELEMENTI



→ insieme ambiente

$a \in A$

$A \subset X$ (A incluso propriamente in X)

$A \subseteq X$ (A incluso non necessariamente in maniera propria)

$x \notin B$

$\varnothing$ insieme VUOTO, incluso in ogni altro insieme $\varnothing \subset X$

[$\varnothing \subseteq X$ vuol dire che X può essere vuoto]

Insiemi numerici

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$ DEFINIZ. X ELENCAZ.

$A = \{x \in X : p(x)\}$ A è costituito dagli elementi x tali che p(x) è vera.

→ proprietà

→ NOTA: $: = /$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

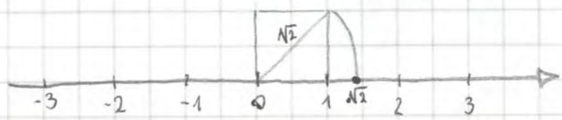
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Z}$ (relativi) $= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ (razionali) $= \left\{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \text{ e } m \neq 0\right\}$

oppure $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ e $m \neq 0$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ [DIMOSTRAZ. A Pg. 4]



$\mathbb{R}$ (reali); ogni punto della retta corrisponde a un numero reale e viceversa.

NUMERO (FINITO) DI ELEMENTI: CARDINALITÀ

Es: $A = \{\text{numeri pari}\}$

$A = \{0, 2, 4, \dots\}$

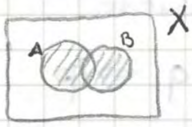
$A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

$\complement A =$ DIPENDE DALL'INSIEME AMBIENTE!

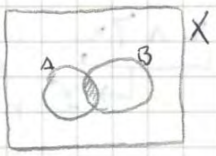
in $\mathbb{N}$ $\complement_{\mathbb{N}} A = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$

UNIONE E INTERSEZIONE

$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$



$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}$



Proprietà booleane

- $A \cap \complement A = \emptyset$
- $A \cup \complement A = X$

Propr. commutat., associat., distrib.

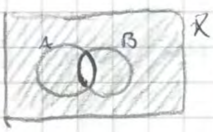
$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$

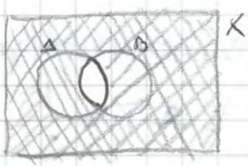
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Leggi di De Morgan

$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$





DIFFERENZA E DIFFERENZA SIMMETRICA

$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$

NON VALE LA COMMUTATIVA!

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\forall$ quantificatore universale

$\exists$. quantificatore esistenziale

Es:

$p(x)$ = essere pari

$A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

$\forall a \in A \,/\, p(a)$

$\exists n \in \mathbb{N} \,/\, \neg p(n)$

$\exists!$ vuol dire: "esiste solo uno"

Es:

$p(x;y)$ $\quad x \leq y$ $\quad$ in $\mathbb{R}$

$\forall x, \forall y : p(x,y)$ falsa!

$\forall x, \exists y : p(x,y)$ vera

$\exists x, \exists y : p(x,y)$ vera

$\exists y, \forall x : p(x,y)$ falsa

l'ordine è essenziale se i quantificatori sono diversi!

Oppure:

$p(x)$ vera $\Rightarrow \neg p(x)$ falsa

$$\neg\left(\forall x \in A : p(x)\right) \Leftrightarrow \exists x \in A : \neg p(x)$$

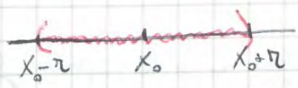
$$\neg\left(\exists x \in A : p(x)\right) \Leftrightarrow \forall x \in A : \neg p(x)$$

Curiosità:

$|x|$ è la distanza sulla retta da x a 0

$|x-3|$ è la distanza sulla retta da x a 3

$|x - x_0| < r$



5

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 340

Altro es: $A = (-1, 5]$ è limitato!

$$(-1, 5] \subseteq [-1, 5]$$

-1 è il miglior minorante, ma non appartiene all'insieme.

Ancora: $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\qquad 0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$

$$\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

$$\Rightarrow A \text{ è limitato}, \quad A \subseteq [0, 1]$$

MA $1 \notin A$

MASSIMI, MINIMI, ESTREMI

$A \subseteq \mathbb{R}$

- x_M si dice MASSIMO di A se
  - i) $\forall x \in A : x \leq x_M$
  - ii) $x_M \in A$

PROPRIETÀ: IL MASSIMO, SE ESISTE, È UNICO

Lo dimostro per assurdo: ho 2 massimi x_M e x'_M

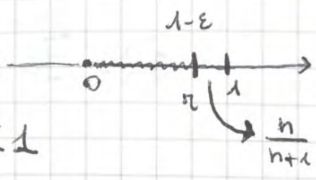
$$x_M, x'_M \in A$$

Allora, per la i), $x'_M \leq x_M$ e $x_M \leq x'_M$

$$\Rightarrow x_M = x'_M$$

- x_m si dice minimo di A se
  - i) $\forall x \in A : x \geq x_m$
  - ii) $x_m \in A$

Nell'esempio di prima posso dimostrare che A non ha max, cioè che $\nexists r < 1$ maggiorante di A



$\Rightarrow$ Devo dimostrare che $r < \frac{n}{n+1} < 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 340

BALZO IN AVANTI

$n!$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$0! = 1$

$1! = 1$

$n! = n(n-1)!$ se $n \geq 2$ $\qquad$ definizione ricorsiva

$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! =$$
$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$\Rightarrow n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$

$\binom{n}{k}$ coeff binomiale $\quad \begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ n \geq k \end{cases}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

es: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 10$

$n! = n(n-1) \ldots (n-k)(n-k-1) \ldots 2 \cdot 1$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{k!}$$

$\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0! \, \cancel{n!}} = 1$

$\binom{n}{n} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!} \, 0!} = 1$

$\binom{n}{n-1} = \frac{n}{(n-1)! \, (\cancel{n}-\cancel{n}+1)!} = \frac{n \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$

per ogni $\begin{cases} n \geq 1 \\ 0 < k < n \end{cases}$ $n, k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

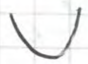
Il primo coeff. è la somma di due binomiali di ordine inferiore. $\Rightarrow$ sono tutti num naturali

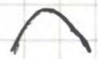
$A = B$

$$B = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \underbrace{(n \cancel{-1} - k \cancel{+1})!}_{(n-k)(n-k-1)!}} + \frac{(n-1)!}{\underbrace{k!}_{k \cdot (k-1)!}(n-1-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 340

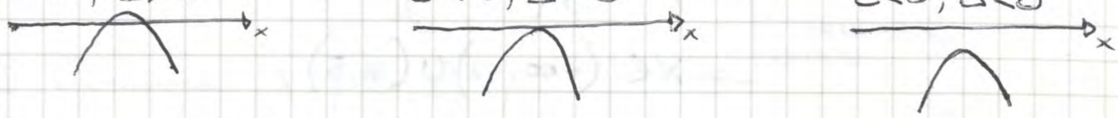
IN BASE AD a SAPPIAMO COM'È LA PARABOLA

$a>0$ 

$a<0$ 

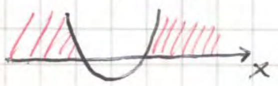
Es: $a>0,\ \Delta>0$ $\quad a>0,\ \Delta=0$ $\quad a>0,\ \Delta<0$

$a<0,\ \Delta>0$ $\quad a<0,\ \Delta=0$ $\quad a<0,\ \Delta<0$



Perciò: $\underbrace{ax^2+bx+c}_{C_1} \gtreqless \underbrace{0}_{C_2}$ [C = curva] Quando $y_1 \gtreqless y_2$, la diseq. è vera.

Es.



RICORDA: un qualunque polinomio di grado N si può decomporre come prodotto di termini

$(ax+b)^i$ 1° grado

$(ax^2+bx+c)^i$ 2° grado

$\hookrightarrow \Delta<0$

(gli altri si possono scomporre in 1° grado)

[TEOREMA DI GAUSS]

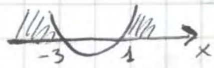
$a(x)\cdot b(x)=0$ soluzioni: $a(x)=0 \cup b(x)=0$

PERCIO' DATO $a(x)\cdot b(x) \gtreqless 0$ o $\dfrac{a(x)}{b(x)} \gtreqless 0$

1) Studio $a(x)\geq 0$
2) Studio $b(x)\geq 0$ [se ho la frazione studio $b(x)>0$]
3) Riunisco i dati

Es: $\dfrac{x^2+2x-3}{1-7x}\geq 0$

- $x^2+2x-3\geq 0$ $\quad x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-3)}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}-3\\1\end{cases}$



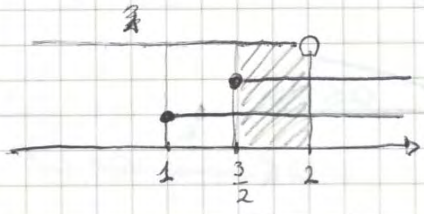
- $1-7x>0$ $\quad -7x>-1 \rightarrow x<\dfrac{1}{7}$

DIVIDO PER -7 CAMBIO VERSO

$\{x<3\} \cup \{x \geq 3\} \Rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\sqrt{x-1} > \sqrt{2x-3}$

C.E. $\left[\begin{cases} x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \\ 2x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ (\sqrt{x-1})^2 > (\sqrt{2x-3})^2 \rightarrow x<2 \end{cases}\right.$



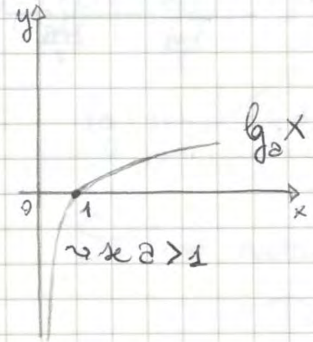
$x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$

Dato l'insieme $A = \left[\frac{3}{2}, 2\right)$,

$\text{Inf} = \frac{3}{2}$ $\qquad \min = \frac{3}{2}$

$\text{Sup} = 2$ $\qquad \text{MAX} = \nexists$ $\qquad 2 \notin A$

Logaritmi



$\boxed{a>0}, \boxed{a \neq 1}$

$\log_a x = \begin{cases} >0, & x>1 \\ =0, & x=1 \\ <0, & x \in (0,1) \end{cases}$

① $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$

purché $x, y > 0$

② $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

purché $x, y > 0$

③ $\boxed{\log_a x^n = n \log_a |x|}$ → NB!

Per es. $\log_a 9 \begin{cases} = \log_a(3^2) = 2\log_a 3 \\ = \log_a(-3)^2 = \cancel{2\log_a(-3)} \end{cases}$

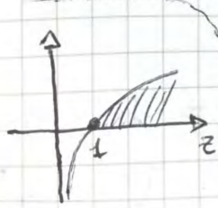
No! $x<0$

$\Rightarrow \log_a 9 = 2\log_a|3| = 2\log_a 3$

④ $\log_a 1 = 0 \quad \forall a>0, a \neq 1$

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 5 > 0 \xrightarrow{\boxed{u = x^2}} u^2 - 4u + 5 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \rightarrow \text{S.V. perché somma di numeri positivi.} \\ \log(x^4 - 4x^2 + 5) - \log(x^2+1) \geq 0 \rightarrow \log \dfrac{x^4 - 4x^2 + 5}{x^2+1} \geq 0 \end{cases}$$

$\Delta = 16 - 20 < 0$ $\forall u \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

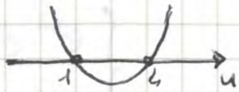


$$\frac{x^4 - 4x^2 + 5}{x^2+1} \geq 1 \longrightarrow \frac{x^4 - 4x^2 + 5 - x^2 - 1}{x^2+1} \geq 0$$

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2+1} \geq 0$$

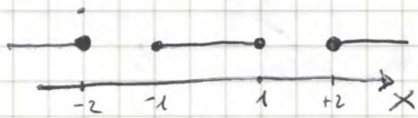
NUM ≥ 0 $\quad u = x^2 \quad u^2 - 5u + 4 \geq 0 \quad u = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x^2+1 \rightarrow$ DEN sempre > 0



$$\{u \leq 1\} \cup \{u \geq 4\}$$

$$\{x^2 \leq 1\} \cup \{x^2 \geq 4\}$$



$$\{x \leq -2\} \cup \{x \in [-1, 1]\} \cup \{x \geq 2\}$$

Ocio, eh: $\log(a+b) \cancel{=} \log a + \log b$ NO!

Se no avrei $\log_{10} 2 = \log_{10} 1 + \log_{10} 1 = 0 + 0 = 0$

Boiata

Esponenziali

a^x

$a > 0, a \neq 1$

PROPRIETÀ:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^x \cdot a^y = a^{x+y} \\ \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \\ a^x > 0 \end{cases}$$

Es:

$3^x + 3^{-x} > -2$ S.V.! somma di numeri positivi > -2 sempre!

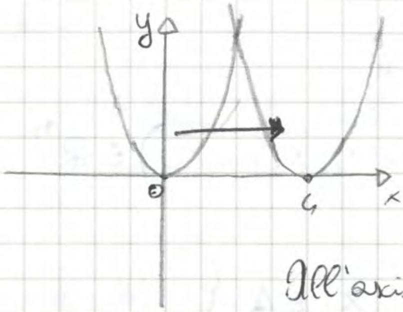
$$3^x + \frac{1}{3^x} > -2$$

INFATTI 3^x È POSITIVO

Fosse invece: $3^x \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) > 2 \cdot 3^x \rightarrow 3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 > 0 \quad u = 3^x$

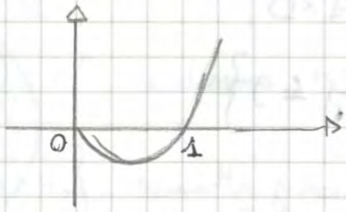
Oppure, presa $y=x^2$,

$y=(x-4)^2$;

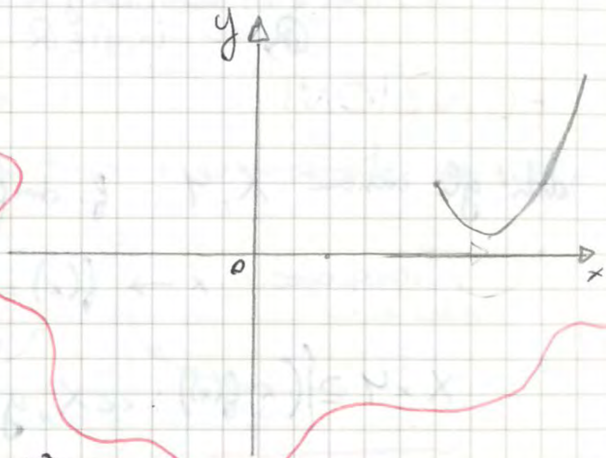


All'ascissa $x_1=4$ corrisponde l'ascissa del nuovo vertice.

Se ho $g(x)=x\log x$



e ho $f(x)=2+(x-4)\lg(x-4)$



PRODOTTO CARTESIANO

Sappiamo che $\{a,b\}=\{b,a\}$, ora

posso avere la COPPIA ORDINATA (a,b)

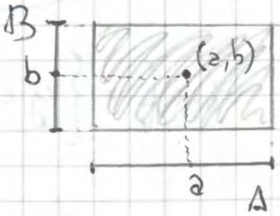
1ª componente 2ª componente

Se $a\neq b$ $(a,b)\neq(b,a)$

Posso anche avere ennuple ordinate

Dati 2 insiemi A e B

$$A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}$$



Se ho $A=B=\mathbb{R}$

allora ottengo $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$

Piano cartesiano: prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ per se stesso.

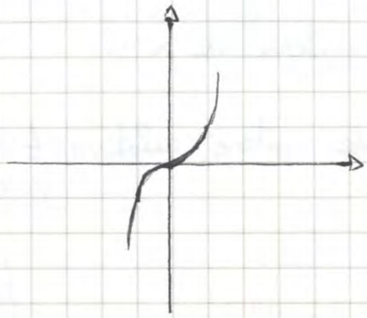
b) $f(x) = x^2$

$\text{dom}\, x = \mathbb{R}$ $\qquad$ $\text{im}\, f = [0, +\infty)$

vale per tutte le $f(x) = x^n$, n pari, $n \geq 2$

c) $f(x) = x^3$

$\text{dom}\, f = \text{im}\, f = \mathbb{R}$



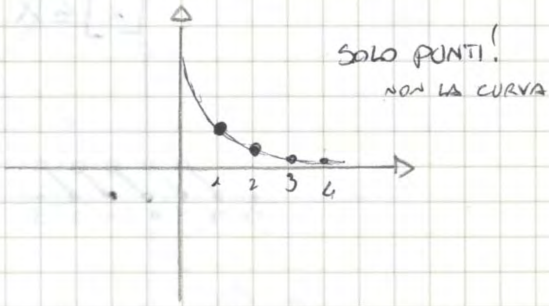
vale per tutte le $f(x) = x^n$, n dispari, $n \geq 3$

d) $\text{dom}\, f = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \}$ $\qquad$ SUCCESSIONE

$\underbrace{}_{x}$ ma di solito si usa a

$a(n)$ si trova + comunemente così: a_n

Es: $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad$ $n \geq 1$



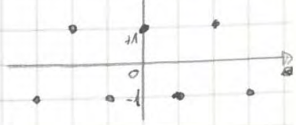
Oppure: $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad$ $n_0 = 0$

O ancora: $a_n = n!$ $\qquad$ $n_0 = 0$

O: $a_n = (-1)^n$ $\qquad$ n pari: $a = 1$

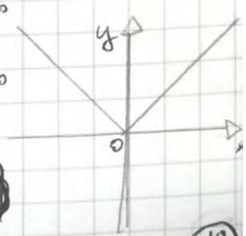
$n_0 = 0$ $\qquad$ n dispari: $a = -1$

$\Rightarrow \text{im}\, a_n = \{-1, 1\}$



O: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\qquad$ $n \geq 1$

e) Funzione definita a tratti $\qquad$ $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < x_0 \\ f_2(x) & x \geq x_0 \end{cases}$



Tipo $f(x) = |x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\text{im}\, f = [0, +\infty)$

IMMAGINE DI A

$$f(A) = \{ y \in \operatorname{im} f : \exists x \in A \wedge y = f(x) \}$$

Es: data $f(x) = x^2$ e $A = [1,2]$

$$f(A) = f([1,2]) = [1,4] \neq \operatorname{im}$$

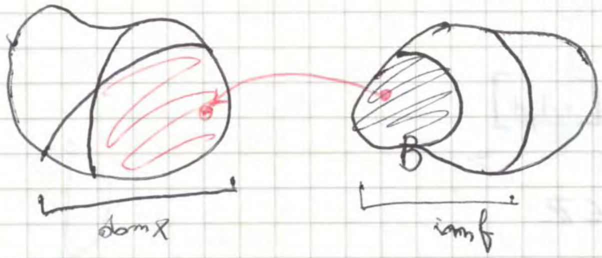
Oppure in $[x]$

$$f(x) = [x] \qquad A = [1,2]$$

$$f([1,2]) = \{1,2\}$$

Se prendo $B \subseteq Y$

$$f^{-1}(B) = \{ x \in \operatorname{dom} f : f(x) \in B \}$$ CONTROIMMAGINE DI B

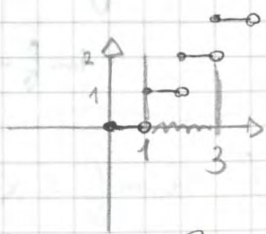


Es: in $f(x) = x^2$ $B = [1,4]$

$$f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$$

O ancora: $f(x) = [x]$

$$f^{-1}(\{1,2\}) = [1,3)$$

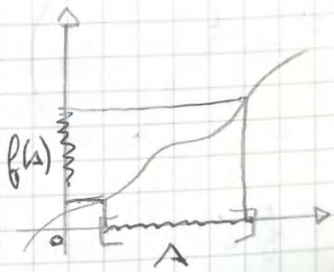


Se ho $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [funz. reale con var. reale]

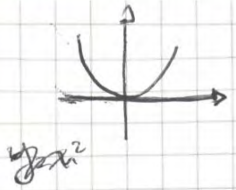
Def: $A \subseteq \mathbb{R}$

f è limitata su A se $f(A)$ è limitata

$\forall x \in \mathbb{R}$ $a \leq f(x) \leq b$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$.



Es.:



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

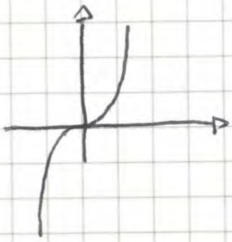
$x \to x^2$

non suriettiva

$f(x) = x^{n \text{ pari} \geq 2}$

ma se ~~...~~ scrivo $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ è suriettiva

Altro:



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

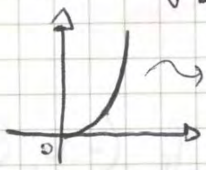
suriettiva

$f(x) = x^{n \text{ dispari} \geq 3}$

f è INIETTIVA se dati $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

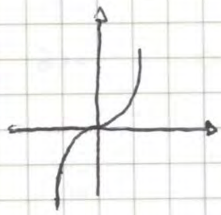
Es.: $f(x) = x^2$ non è iniettiva ~~perché~~

(ma) posso lavorare sul dominio. $f: [0, +\infty] \to \mathbb{R}$



così è iniettiva

Y:



$f(x) = x^{n \text{ disp.}}$ è suriettiva, ma anche iniettiva

f è BIIETTIVA se è contemporaneamente SURIETTIVA e INIETTIVA

Esempio:

$[x]$ è difficile da rendere iniettiva

INIETTIVITÀ

$f^{-1}(\{y\}) = \{x_1\}$ $\quad f^{-1}(y_1) = x_1$

FUNZIONE INVERSA:

SOLO SE f È ~~BIIETTIVA~~ INIETTIVA!

$$f^{-1}: \underset{\operatorname{dom} f^{-1}}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{im} f}} \to \underset{\operatorname{im} f^{-1}}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{dom} f}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 340

Dim f strettam. cresc. in I

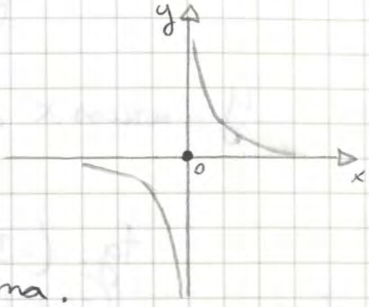
$\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Prendo x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$

Allora o $x_1 > x_2$ o $x_2 > x_1$.

In ogni caso $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Considero $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$



È iniettiva, ma

non è strettamente monotona.

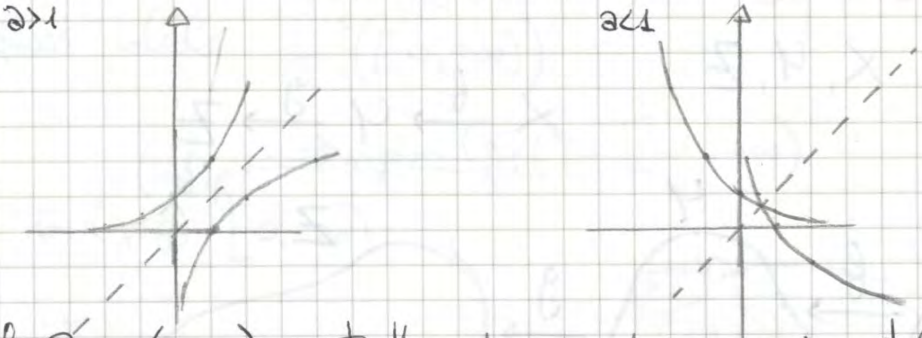
$\Rightarrow$

f è strett. monot. su I $\Leftrightarrow$ f è iniettiva su I

se f è CONTINUA

Es.

$f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1$



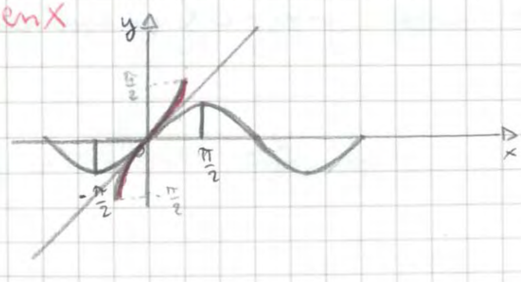
NOTA: la monotonia si conserva! infatti a $x_1 < x_2$ corrisp. $f(x_1) < f(x_2)$

$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ strettamente monotona $\Rightarrow$ invertibile

$\exists f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \log_a x$

Prendo $y = \operatorname{sen} x$



$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

$\exists f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \arcsin x$

$x = \operatorname{sen} y$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 340

Es: $f(x) = x+1 \qquad g(x) = x^2$

$$\left.\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 \\ f\circ g(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1 \end{aligned}\right] \; g\circ f \neq f\circ g$$

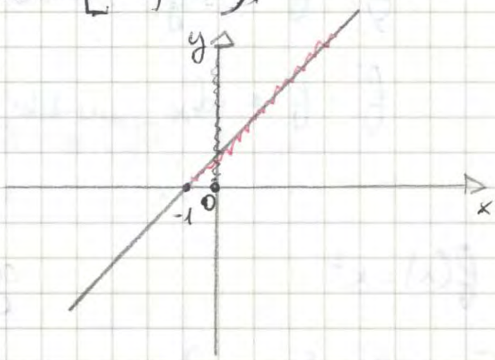
Qui i domini sono entrambi $\mathbb{R}$

Caso + complesso

$f(x) = x+1 \qquad g(x) = \sqrt{x}$

$g\circ f = g(x+1) = \sqrt{x+1}$

$\text{dom}(g\circ f) = x \geq -1$ cioè $[-1, +\infty)$.



$\text{dom } f = \text{im } f = \mathbb{R}$

$\text{dom } g = \text{im } g = [0, +\infty)$

$\text{im } f \cap \text{dom } g = [0, +\infty)$

Adesso calcolo $f^{-1}([0, +\infty))$

$\Rightarrow \text{dom}(g\circ f) = [-1, +\infty)$

$\text{im}(g\circ f) = [0, +\infty)$

Se invece compongo due funz. entrambe decrescenti o crescenti ottengo una monotona crescente, viceversa ne ottengo una decrescente.

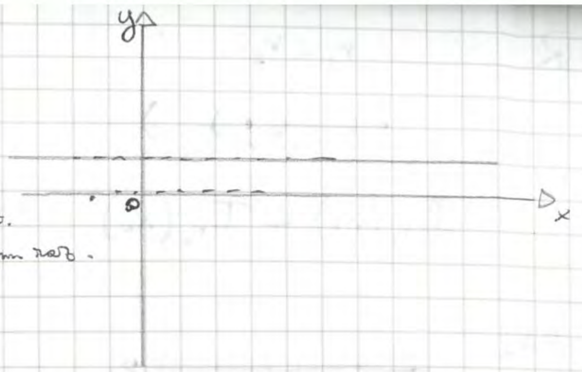
$f, g \nearrow \;\Rightarrow\; f\circ g,\ g\circ f \nearrow$

$f, g \searrow \;\Rightarrow\; f\circ g,\ g\circ f \nearrow$

$f \nearrow g \searrow \;\Rightarrow\; f\circ g,\ g\circ f \searrow$

Prese f, g iniettive $\Rightarrow f\circ g,\ g\circ f$ iniettive

Es: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



Funzione di Dirichlet

num irraz. + num → num irraz.
num raz. + num (non irraz) → num raz.

È periodica, ma non posso stabilire il suo periodo!

SALTO INDIETRO

$(a+b)^n$ **BINOMIO DI NEWTON**

				1						$n=0$
			1		1					$n=1$
		1		2		1				$n=2$
	1		3		3		1			$n=3$
1		4		6		4		1		$n=4$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0} a^{n-0} b^0}_{k=0} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b^1}_{k=1} + \dots + \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}_{k=\dots} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n} a^{n-n} b^n}_{k=n} =$$

$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + b^n$$

Dovrei fare $(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1} \dots$

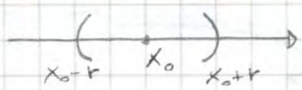
e applicare il PRINCIPIO DI INDUZIONE.

Applico la regola a $(a+b)^{n-1}$ e verifico che è valida per $(a+b)^n$

GLI INTORNI

INTORNO DI CENTRO x_0 E RAGGIO r

$x_0 \in \mathbb{R}$



$r > 0$ raggio dell'intorno

x_0 centro dell'intorno

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

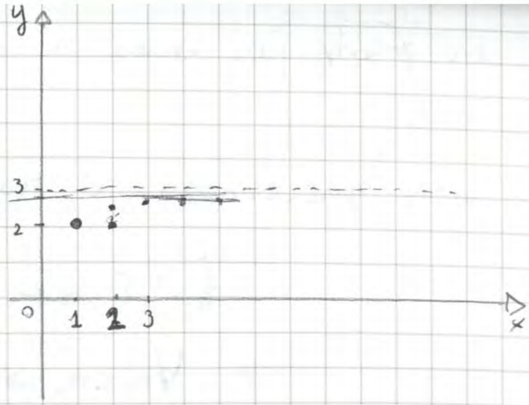
Ogni semiretta $(a, +\infty)$ è un INTORNO DI $+\infty$ $I_a(+\infty)$,

Ogni semiretta $(-\infty, b)$ è un INTORNO DI $-\infty$ $I_b(-\infty)$

Altro es:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$



E adesso do le definizioni

La successione $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

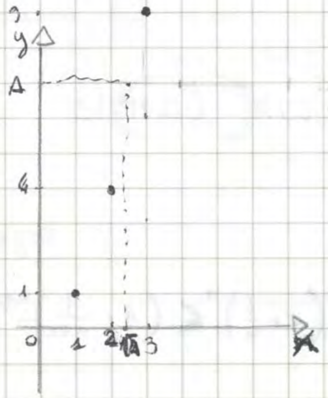
o

$$\forall I_\varepsilon(\ell), \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) : n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(\ell)$$

Se ho $a_n = n^2$

Dai qualunque numero io prendo troverò n grandi che non si trovano nel mio intorno

$\Rightarrow \lim = +\infty$



× CASA SCRIVI LA DIVERGENZA A $-\infty$

a_n ha $\sup = +\infty$

La ~~vec~~ def. di limite rimane però valida: (uso $I(+\infty)$)

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow n^2 > A \qquad \text{Perciò } \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

$$n > \sqrt{A}$$

$$n_\varepsilon = [\sqrt{A}] + 1$$

Def

La successione $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ diverge a $+\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ se

$$\forall A > 0, \exists n_A \geq 0 : \forall n > n_A \Rightarrow a_n > A$$

o

$$\forall I_A(+\infty), \exists I_{n_A}(+\infty) : \forall n\, I_{n_A}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_A(+\infty)$$

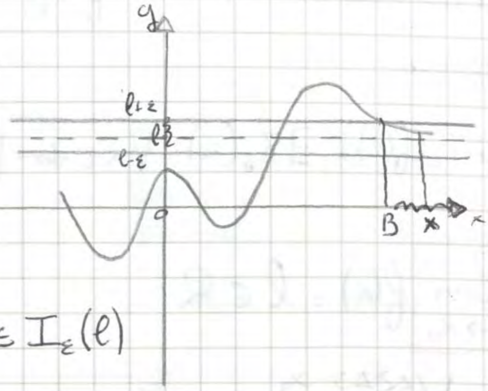
Non tutte le succ. convergono o divergono, pensa a $a_n = (-1)^n$: essa è detta INDETERMINATA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 340

Nelle successioni non faccio $x \to x_0$, perchè ho numeri interi e nell' $I(x_0)$ non è detto che trovi punti.

NELLE FUNZIONI:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ $\qquad f(x): (a, +\infty) \to \mathbb{R}$



$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \wedge x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\forall I_\varepsilon(l), \exists I_B(+\infty) : \forall x \in \mathrm{dom} f \cap I_B(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

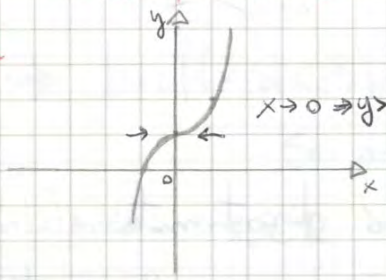
x CASA

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$x \to x_0 \quad , \quad x_0 = 0$ $\qquad [-1, 1]$

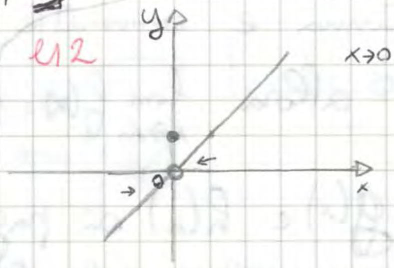
es 1



$x \to 0 \Rightarrow y \to 1$

$f(x) = x^3 + 1$

es 2



$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$y = x + [1 - x^2]$

$y = 1$ in $x = 0$

$y = x$ in $(-1,1) \setminus \{0\}$

$g(x) = x + [1 - x^2]$

$[x]$

$[1-x^2]$ $\quad x = 0 \to y = 1$

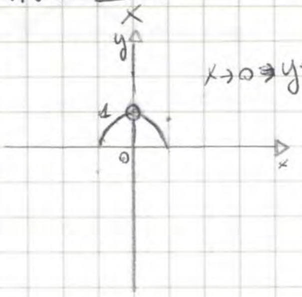
$x \in (-1,1) \setminus \{0\} \to y = 0$

$1 - x^2$

$\in (0, 1)$ se $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$

$= 1$ se $x = 0$

es 3 $\quad h(x) = \frac{\sin x}{x}$



$x \to 0 \Rightarrow y \to 1$

f è continua in $x_0 = 0$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

g è tale che $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \neq g(0)$

h è tale che $\lim_{x \to 0} h(x) = 1$

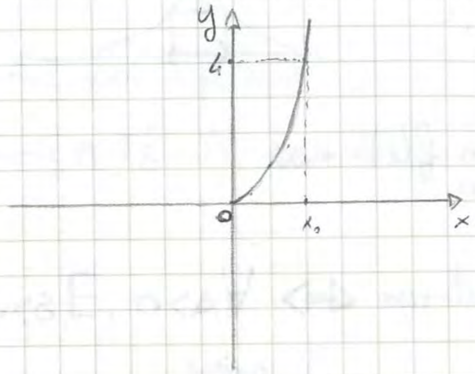
$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k = +\infty$

Bisogna legare $|f(x) - f(x_0)|$ a $|x - x_0|$

Ovviamente qualsiasi $\delta < \frac{\varepsilon}{|a|}$ va bene; non è necessario trovare il miglior δ

$\Rightarrow$ tutte le rette sono continue per $\forall x \in \mathbb{R}$

Es. $f(x) = x^2$ uso $x_0 = 2$



$|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |x+2||x-2|$

$|x - x_0| = |x-2| < \delta$

Prendo $\delta < 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$

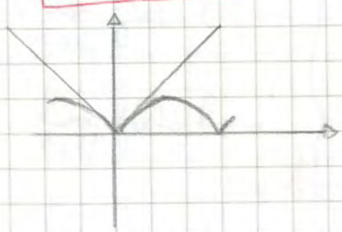
$\Rightarrow 3 \leq x+2 \leq 5$

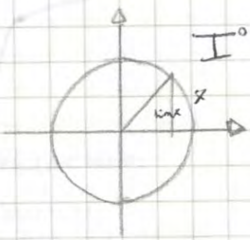
$\Rightarrow |x+2||x-2| < 5|x-2| < \varepsilon \rightarrow |x-2| < \delta$

Se scelgo $\delta \leq \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$

Es: $f(x) = \sin x \quad x_0 \in \mathbb{R}$

So che $\boxed{|\sin x| \leq |x|}$





I° Q.

$A_{tr} < A_{settore\ circolare}$

$\Rightarrow \sin x < x$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin\frac{x-x_0}{2} \cos\frac{x+x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\underbrace{\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|}_{\leq 1} \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq \cancel{2}\frac{|x-x_0|}{\cancel{2}}$$

$|\sin x| \leq 1 \quad |\cos x| \leq 1$

$|\sin x| \leq |x|$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$

$\Rightarrow \delta \leq \varepsilon$

Cioè: se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \varepsilon$

L 3

Userò $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ o $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; MA $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \pi(x) = 0 = \pi(0)$ → $\pi(x)$ è continua da destra.

$\lim_{x\to 0^-} \pi(x) = 1$

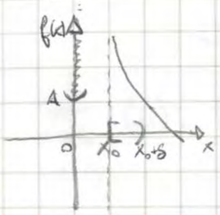
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

→ FA' GLI ALTRI A CASA

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \iff \forall A>0, \exists \delta>0 : \forall x \in \text{dom} f \wedge \boxed{0<x-x_0<\delta} \Rightarrow f(x)>A$

$\forall I_A(+\infty), \exists I^+_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom} f \wedge I^+_\delta(x_0)\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_A(+\infty)$



CONTINUITA' DA Dx (o da Sx)

f è continua da dx in $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \forall x \in \text{dom} f \wedge x-x_0<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

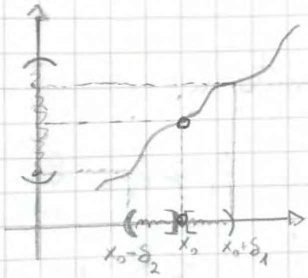
$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Se so

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1 \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_2 \end{array}\right\}$$ CHE RELAZIONI HANNO?

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \ell \end{array}$

è vero il contrario? SI'



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 340

Tutto ciò che non è disc. I sp. e non è disc. eliminabile è

DISCONTINUITÀ DI II SPECIE

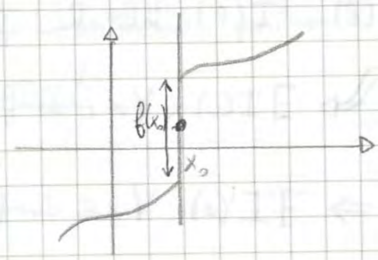
Come per le successioni:

Prop: $c = x_0^+, -\infty$

$$\lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ x \to -\infty}} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x > x_0\} & f \text{ crescente} \\ \sup\{f(x) : x > x_0\} & f \text{ decrescente} \end{cases}$$

$c = x_0^-, +\infty$

$$\lim_{\substack{x \to x_0^- \\ x \to +\infty}} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x < x_0\} & f \text{ crescente} \\ \inf\{f(x) : x < x_0\} & f \text{ decrescente} \end{cases}$$



INOLTRE: f crescente

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Lo stesso per f decrescente

$\Rightarrow$ NON HO DISCONT. DI 2^ SPECIE

Le monotone sono continue o al più hanno discontinuità di tipo salto.

TEOREMI SUI LIMITI

$c = x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$

f, g, h definite in $I(c) \setminus \{c\}$

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ finito o infinito

$\Leftrightarrow \forall I(\ell), \exists I(c) : \forall x \in \mathrm{dom} f \cap I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

"IL LIMITE DI UNA FUNZIONE, SE ESISTE, È UNICO"

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 340

Però l non deve essere $l \geq 0$, se no pensa a $y = x$ nell'origine: a dx e a sx ho segni diversi.

Non è nemmeno vera la proprietà con freccia invertita.

Posso però dire:

~~1° TEOREMA~~

Corollario: se $\exists \lim_{x \to c} f(x) = l$ e $\exists I(c) : \forall x \in \text{dom} f \cap I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \geq 0$

$$\Rightarrow l \geq 0$$

Dim: Se per assurdo $l < 0$, troverei per il teorema della permanenza del segno tutto un intorno per cui $f(x)$ ha immagine negativa

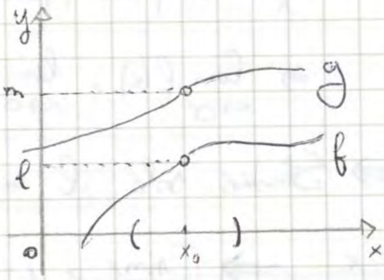
$\Rightarrow$ avrei 1 intorno con immagine strettamente positiva e strettamente negativa nello stesso tempo. ASSURDO!

1° TEOREMA DEL CONFRONTO

$\exists \lim_{x \to c} f(x) = l$, $\lim_{x \to c} g(x) = m$

$\exists I(c) : \forall x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g \cap I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

Allora $l \leq m$



Dim:

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

$$\Rightarrow \text{in } I(c) \quad h(x) \geq 0$$

$$\underbrace{\lim_{x \to c} h(x) = \cancel{\lim}\, m - l}_{\text{il lim. di 1 differenza è uguale alla diff. dei limiti}} \geq 0 \Rightarrow m \geq l$$

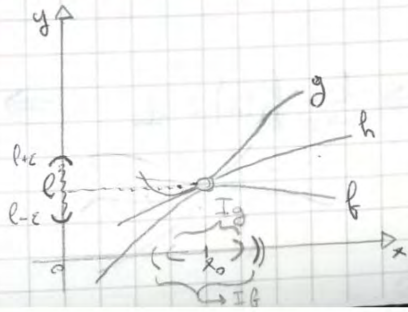
2° TEOREMA DEL CONFRONTO (teorema dei 2 carabinieri)

$\exists I(c) : \forall x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g \cap \text{dom} h \cap I(c) \setminus \{c\}$ (caso finito)

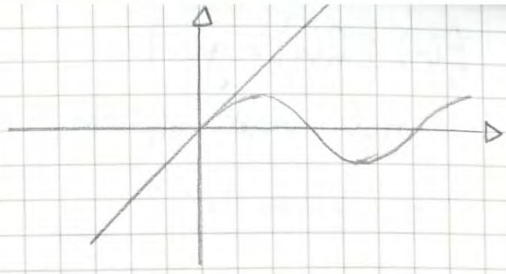
si abbia ~~tale che~~ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

$\exists \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to c} h(x) = l$



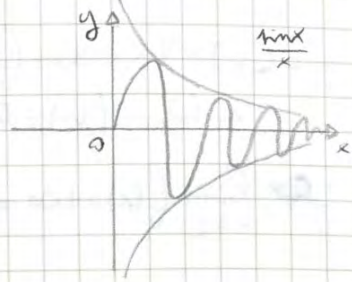
Altro es: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0}$



$x\to+\infty \Rightarrow$ quindi $x>0$

$-1 \le \sin x \le 1$

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{f(x)} \le \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{h(x)} \le \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)}$$



Per $x\to+\infty$ ho $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$

Per $x\to-\infty$ inverto tutto ma $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = 0}$

Corollario:

f limitata in $I(c)$

↳ $\exists k : |f(x)| \le k, \forall x \in I(c)$

g infinitesima per $x\to c$

↳ $\lim_{x\to c} g(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$$

$\sin x$ ↓ limitata

$\frac{1}{x}$ ↓ $\lim \frac{1}{x} = 0$

IL PRODOTTO È ANCORA INFINITESIMO.

NB $\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} |f(x)|$

$|f(x) - l| = |f(x)|$

$||f(x)| - l| = ||f(x)|| = |f(x)|$ } solo perchè $l=0$

es. $a_n = (-1)^n$ $|a_n| = 1$ ma se non ho il modulo non ho limite!

Dim: $0 \le |f(x)g(x)| \le k|g(x)|$

$|f(x)| \le k$

$\Rightarrow \lim_{x\to c} |f(x)g(x)| = \lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$

Ovviamente anche $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

Se ho

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

$$\lim_{x \to c} g(x) = m$$

allora posso fare operazioni algebriche purché le scritture ~~risultato~~ abbiano senso.

dimostraz. in rete

Invece se ho

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)\end{array}\right\}$$ cioè sono continue in x_0

$\Rightarrow f \pm g,\ f g,\ \frac{f}{g}$ sono continue in x_0, con $g(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ tutti i polinomi e le eq. razionali sono continui, dimostrata la continuità della retta, nel loro dominio.

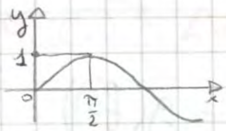
Lo stesso per le goniometriche partendo da sin e cos.

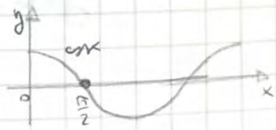
Un po' di esempi:

1) $$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 3x + e^x}{\sqrt{x^2+27}}$$ QUOZIENTE DI FUNZ. ELEMENTARI!

$$\Rightarrow \lim_{x \to 5} f(x) = f(5) = \frac{5^2 - 3 \cdot 5 + e^5}{\sqrt{25+27}}$$ BASTA CHE IL DENOM. NON SI ANNULLI.

2) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x}$$





$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^\pm} \operatorname{tg} x = \mp \infty$$

3) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 48}{(x-1)^2 (2x^2+5)} = \frac{49}{7} \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

4) $$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)} \not\exists \qquad \lim_{x \to 1^\pm} \frac{1}{(x-1)} = \pm\infty$$

L 47

a) $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\lim_{x \to c} f(x))$

b) $\exists I(c) : f(x) \neq l \quad \forall x \in I(c) \setminus \{c\}$

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)$$

Esempi:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$ $\qquad x \mapsto x^2 \mapsto \frac{\sin x^2}{x^2}$

$f(x) = x^2 \qquad g(y) = \frac{\sin y}{y}$

$h(x) = g \circ f(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ \| \\ l}} g(y) = 1$$

2) $\lim_{x \to 1^\pm} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ $\qquad x \mapsto \frac{1}{x-1} \mapsto \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$

$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad g(y) = \operatorname{arctg} y$

$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{y \to \pm\infty} \operatorname{arctg} y = \pm\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^\pm} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Ciò vuol dire che se ho $h(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$ posso dire:

- $\operatorname{dom} h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\lim_{x \to 1^\pm} h(x) = \pm\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 0$

3) $\lim_{x \to +\infty} \log \sin \frac{1}{x} = -\infty$ $\qquad x \mapsto \frac{1}{x} \mapsto \sin \frac{1}{x} \mapsto \log \sin \frac{1}{x}$

Posso applicare questo teorema anche a successioni.

$$n \mapsto a_n \mapsto g(a_n)$$

$\lim_{n \to \infty} g(a_n) = \lim_{y \to l} g(y)$ se $\lim_{n \to \infty} a_n = l$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 340

LIMITI NOTEVOLI:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a}$$

$y = \frac{x}{a}$ $\quad a \neq 0$ [se $a=0$ il lim è facilmente verificabile]

$$\lim_{x\to+\infty} y = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$$

$y = \frac{x}{a} \to x = ay$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay} = \Big(\underbrace{\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}_{g(\lim f(x))}\Big)^a = e^a$$

$\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a$ → L'ELEVAMENTO A POTENZA È UNA FUNZ. CONTINUA

LO STESSO PER $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}} \qquad y = \frac{1}{x} \to x = \frac{1}{y}$$

$$\lim_{x\to 0^\pm}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \underbrace{\log_a}_{\text{INFATTI LOG È CONTINUO}}\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \boxed{\frac{1}{\log a}}$$

[con $a>0, a\neq 1$]

IN PARTICOLARE: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}} \qquad y = a^x-1 \Rightarrow a^x = y+1 \qquad x = \log_a(1+y)$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \left(\frac{1}{\log a}\right)^{-1} = \boxed{\log a}$$

INFATTI SE HO $\lim_{x\to c} f(x) = l \neq 0$ ALLORA $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}$$

Pongo $1+x = e^y \to x = e^y - 1 \qquad y = \log(1+x)$

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{y\alpha}-1}{e^y-1}\cdot\frac{y}{y} = \lim_{y\to 0}\underbrace{\frac{(e^\alpha)^y-1}{y}}_{a=e^\alpha}\cdot\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}}_{\to 1} = \log e^\alpha = \alpha\log e = \alpha$$

$\Rightarrow$ trovo un x_0 in un intervallo sempre più piccolo

Dim ufficiale:

- supponiamo $f(a)<0$, $f(b)>0$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$f(c_0) = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{fine dim.} \\ >0 \rightarrow a_1 = a_0,\ b_1 = c_0 \\ <0 \rightarrow a_1 = c_0,\ b_1 = b_0 \end{cases}$$

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1]$$

$$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \qquad f(c_1) = \dots$$

$$[a_0, b_0] \supset \underset{\frac{b_0-a_0}{2}}{[a_1, b_1]} \supset \underset{\frac{b_0-a_0}{2^2}}{[a_2, b_2]} \supset \dots \supset [a_n, b_n] \qquad b^n - a^n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$a = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n < b_n \le \dots \le b_1 \le b_0 = b$$

$\{a_n\} \nearrow$ monotona [non strettamente] crescente e limitata $\qquad \{b_n\} \searrow$ limitata

$$f(a_n) < 0 \qquad f(b_n) > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0^- \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = x_0^+$$

$\cancel{a \le a_n \le b}$

$a \le a_n$, $b_n \le b$

M1 $\quad x_0^+ - x_0^- = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{2^n}\right) = 0$

$$\Rightarrow x_0 = x_0^+ = x_0^- = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Poiché $f(x)$ è continua

$$f(x_0) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{<0}}_{\le 0} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{>0}}_{\ge 0} \Longrightarrow \boxed{f(x_0) = 0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 340

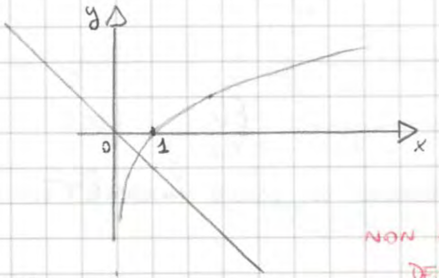
$f(100)>0 \quad f(50)>0 \quad f(25)>0 \quad f(10)>0 \quad f(2)>0$

$f(1)<0 \quad \Rightarrow x_0 \in [1,2]$

Altro es:

$x+\log x = 0$

$\log x = -x$



NON BASTA IL GRAFICO, DEVO GIUSTIFICARE!

$f(x)=\log x$

$I=(0,1]$

$g(x)=-x$

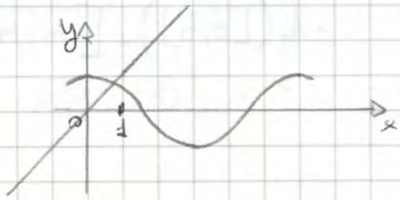
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty < g(0)=0$

$f(1)=0 > g(1)<0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (0,1] : \log x_0 = -x_0$

Ancora:

$\cos x = x$



x_0, se esiste, $\in [-1,1]$

Meglio: poiché per $x<0$ $y=x$ è <0 $\Rightarrow x_0 \in [0,1]$

$f(x)=\cos x \qquad g(x)=x$ continue

$f(0)=1 > g(0)=0$

$f(1)=\cos 1 < g(1)=1$

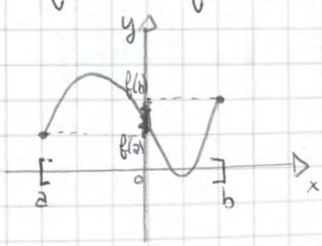
$\Rightarrow \exists x_0 \in [0,1] : \cos x_0 = x_0$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow f$ assume TUTTI I VALORI compresi tra $f(a)$ e $f(b)$

$[f(a),f(b)] \subseteq f([a,b])$



Preso $z \in [f(a),f(b)] \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0)=z$

Scelgo $g(x)$ cost. $\quad g(a)=g(b)=z$

$f(a)<g(a)$

$f(b)>g(b)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0)=g(x_0)=z$

L 52

In particolare

- $\ell \neq 0$, diremo che f è EQUIGRANDE con g per $x \to c$ e scriveremo

$$f \asymp g, \quad x \to c$$

- $\ell = 1$, diremo che f è EQUIVALENTE a g per $x \to c$ e scriveremo

$$\underbrace{f \sim g}_{\text{TILDA}}, \quad x \to c$$

- $\ell = 0$, diremo che f è TRASCURABILE rispetto a g per $x \to c$ e scriveremo

$$f = o(g), \quad x \to c$$

Se $\ell = \pm\infty$ si scambiano i ruoli di f e g

$\Rightarrow$ g è TRASCURABILE rispetto a f per $x \to c$

$$g = o(f), \quad x \to c$$

INFATTI:

Posto $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$

Allora $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le K \Rightarrow \underline{|f(x)| \le K|g(x)|}$

Per questo f è "CONTROLLATA" da g

$f \asymp g, \ x \to c \Rightarrow f = O(g), \ x \to c$

$f \sim g, \ x \to c \Rightarrow f \asymp g, \ x \to c$

$f = o(g), \ x \to c \Rightarrow$ ~~$f \asymp g, x \to c$~~ $f = O(g), \ x \to c$

$O, \asymp, \sim, o$ simboli di Landau

Es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x \sim x, \quad x \to 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \iff \sin x = o(x), \quad x \to +\infty$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 340

CONTINUITÀ e LANDAU

$$\boxed{f \text{ cont. in } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = o(1), \quad x \to x_0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + o(1), \quad x \to x_0$$

l'errore è trascurabile, dell'ordine di 1

CON I MONOMI:

$x \to 0$

$f(x) = x^n$

$g(x) = x^m$ $\boxed{n > m}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to 0} x^{n-m} = 0$$

$$x^n = o(x^m), \quad x \to 0$$

la potenza + alta è trascurabile

$x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-m} = +\infty$$

$$x^m = o(x^n), \quad x \to +\infty$$

la potenza + bassa è trascurabile

ALGEBRA CON LANDAU (vd libro)

$$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p)$$

$x \to 0$

$f = o(x^n)$ $\quad g = o(x^m)$ $\quad p = \min(n, m)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + g(x)}{x^p} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^m} = 0$$

e) ed f) per casa

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{f(x)}{x^n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x^n}{x^p}}_{\to 1 \text{ oppure } (\to 0)} + \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{g(x)}{x^m}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x^m}{x^p}}_{\to 1 \text{ oppure } (\to 0)} = 0$$

$$\left[o(x^n) \right]^k = o(x^n)\, o(x^n) \cdots o(x^n) = o(x^{kn})$$

L 56

- $\log x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \boxed{\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = 0}$$

CALCOLO DI LIMITI:

Prop 1

$x \to c \quad f \sim \tilde{f}, \; g \sim \tilde{g}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) g(x) = \lim_{x \to c} \tilde{f}(x) \tilde{g}(x)$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

DIM. x CASO

g non nulla in $I(c) \setminus \{c\}$

Dim:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{f}(x)} \cdot \frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x \to c} \underbrace{\frac{f(x)}{\tilde{f}(x)}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{g}(x)}{g(x)}}_{1} \cdot \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

Es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 3x} =$$

- $1 - \cos 5x \sim \frac{1}{2} (5x)^2$ infatti $x \to 0$ anche $5x \to 0$

OCCHIO! SCRIVILO, SE NO SBAGLI!

- $\sin^2 3x \sim (3x)^2 = 9x^2$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{25}{2} \cancel{x^2}}{9 \cancel{x^2}} = \frac{25}{18}$$

Errori comuni:

- NON VEDERE SE L'ARGOMENTO VA A ZERO
- NON VEDERE SE NELLE SOSTITUZIONI $t = f(x) \to 0$ QUANDO $x \to 0$

Altro es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x^2+1} - e}{\log(1 + \sin^2 x)} =$$

- $\log(1 + \underbrace{\sin^2 x}_{t = \sin^2 x}) \sim \sin^2 x \sim x^2 \quad t \to 0$ se $x \to 0$
- Non posso porre $t = 7x^2 + 1$ perché per $x \to 0$ $t \to 1$

$e^{7x^2+1} - e = e(e^{7x^2} - 1)$

$t = 7x^2 \quad e(7x^2 - 1) \sim e\, 7x^2$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{7e \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 7e$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 340

$\cancel{L = \lim_{x \to +\infty} (x - x) = 0}$ ERRORE!

LA SOSTITUZ. $f \sim \tilde{f}$ e $g \sim \tilde{g}$ NON VA BENE × LE SOMME.

CLASSIFICAZIONE DI INFINITI & INFINITESIMI

INFINITESIMI:

Def f, g infinitesime per $x \to c$

Se $f \simeq g$, $x \to c$ allora f e g sono INFINITESIME DELLO STESSO ORDINE

Se $f = o(g)$, $x \to c$ allora f è INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A g

Se $g = o(f)$, $x \to c$ allora f è UN INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE A g

Se $\nexists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ allora f e g sono INFINITESIMI NON CONFRONTABILI

Es:

$f(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$ $\boxed{x \to 0}$

$g(x) = x$

Entrambe infinitesime

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \xrightarrow{\sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0 \quad f = o(g)$$

Invece: $g_1 = x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \frac{1}{2} \qquad f \simeq g_1$$

Invece ancora: $g_2 = x^4$ $\qquad g_2 = o(f)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x^{4}} = +\infty$$

Es: $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ $\boxed{x \to 0}$

$g(x) = x$

Entrambe infinitesime

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \sin\frac{1}{x}}{\cancel{x}} = \nexists \,!$$

f e g NON CONFRONTABILI

INFINITI: Def

$f \simeq g$, $x \to c$ $\longrightarrow$ INFINITI DELLO STESSO ORDINE

$f = o(g)$, $x \to c$ $\longrightarrow$ f è un INFINITO DI ORDINE INFERIORE A g $\qquad \lim = 0$

$g = o(f)$, $x \to c$ $\longrightarrow$ f è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE A g $\qquad \lim = \infty$

$\nexists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\longrightarrow$ INFINITI NON CONFRONTABILI

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

Def. $x \to +\infty$, la retta $g(x) = mx + q$ è ASINTOTO A $+\infty$ (O ASINTOTO DESTRO) per f se $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - q) = 0$ cioè $f(x) = mx + q + o(1)$, $x \to +\infty$

a $-\infty$ ho l'asintoto SINISTRO, a $\pm\infty$ ho l'asintoto COMPLETO (o ASINTOTO e basta)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$$

TANTO $\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{m\cancel{x}}{\cancel{x}}}_{m} - \lim_{x \to +\infty} \frac{q}{x} = 0$$

$\frac{q}{x} \to 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0 \implies m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$f(x) \sim \underbrace{mx}_{\text{PARTE PRINCIPALE DI } f(x)}$, $x \to +\infty$ se $m \neq 0$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

Es:

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ $\quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ $\quad \boxed{m = 0}$, $q = 1$ → ASINTOTO ORIZZONTALE

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x+1}{x} - 0\right) = 1$$

$y = 1$ AS. ORIZ. COMPL.

Se $\boxed{m \neq 0}$ → ASINTOTO OBLIQUO

Es:

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ NO AS. ORIZ.

- $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\pm \cancel{x} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = \pm 1$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) \mp mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{1+x^2} \mp x\right) \cdot \frac{\sqrt{\ } \pm x}{\sqrt{\ } \pm x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}}{\sqrt{1+x^2} \pm x} = 0$$

$y = x$ AS. DX $\qquad y = -x$ AS. OBL. SX

Ancora: $f(x) = [x]$ $\quad$ $\text{dom} f = \mathbb{R}$ NO AS. VERT.

$\lim_{x\to+\infty} [x] = +\infty$ NO AS. ORIZZ.

$$\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1 \\ q &= \lim_{x\to+\infty} ([x]-x) \ \nexists \end{aligned}\right] \text{NO AS. OBL.}$$

$$x - 1 < [x] \le x$$

$$\frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \le 1 \qquad x\to+\infty: \quad 1 \Downarrow 1 \quad \Rightarrow 1$$

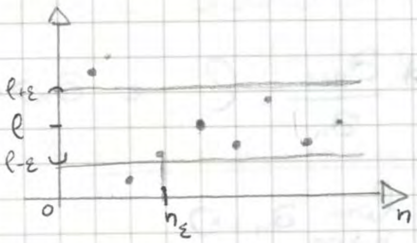
$$-1 < [x] - x \le 0 \qquad x\to+\infty: \quad -1 \quad 0 \quad \Rightarrow \nexists \lim$$

INFATTI $[x] - x = -M(x)$

SUCCESSIONI

→ Ammettono solo $\lim_{n\to+\infty} a_n$

→ Se ho $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$



$|a_n| \le K$

Prima di n_ε ho finiti n, uno dei quali avrà a_n maggiore

$$\Rightarrow |a_n| \le K$$

Perciò se $\exists\, \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n$ è **LIMITATA**

Es: SUCCESSIONE GEOMETRICA $\boxed{a_n = q^n}$ $\quad$ q è detta RAGIONE

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \text{ind.} & q = -1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{ind.} & q < -1 \end{cases}$$

$q = 0 \to a_n = 0$

$q = -\frac{1}{2} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \quad \lim = 0$

$q = -1 \quad (-1)^n \ \nexists \lim$

$q = -2 \quad (-1)^n (2^n) \quad \lim = \pm\infty \Rightarrow \nexists \lim$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 340

NUMERI COMPLESSI

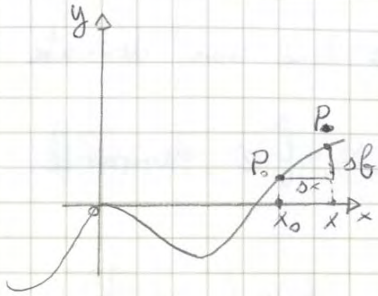
POSTO $\boxed{i^2 = -1}$

$x + \underbrace{iy}_{\text{unità immaginaria di } y}$

DERIVATE

$x_0 \in \mathbb{R}$ f definita in $I(x_0)$, compreso x_0

DAL PTO DI VISTA CINEMATICO: La derivata prima corrisponde a v in $s = v \cdot t$



GEOMETRICAMENTE:

$\Delta x = x - x_0$

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$

$P_0(x_0, f(x_0))$

$P(x, f(x))$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ è ciò che mi interessa, è detto <u>RAPPORTO INCREMENTALE</u> di f in x_0

↳ corrisponde alla velocità media

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = m_{P_0P}$ ↳ definiz. analitica.

$\Delta x \to 0 \Rightarrow$ ottengo la tg a f in x_0

$\Rightarrow$ **Def**

f è derivabile in x_0 se $\exists$ finito

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

↳ A VOLTE TROVO $y'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$

Prop: f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ cont. in x_0

Dim: Tesi: $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x) \cdot 0 = 0$$

$f'(x_0) \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^2 \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2\Delta x \cdot x_0 + (\Delta x)^2 - \cancel{x_0^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x_0 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x_0$$

3) $f(x) = x^n \qquad x_0 \in \mathbb{R} \qquad n \geq 2, \ n \in \mathbb{N}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^n} + n x_0^{n-1} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^n - \cancel{x_0^n}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(n x_0^{n-1} + \dots + (\Delta x)^{n-1})}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + n a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

$$= n x_0^{n-1} \qquad f'(x) = n x^{n-1} \text{ per } f(x) = x^n$$

4) $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

NON POSSO USARE IL BINOMIO DI NEWTON, TRA L'ALTRO POSSO ANCHE AVERE $\alpha < 0 \Rightarrow f(x)$ NON DEFINITA NELLO ZERO

Prendo $\boxed{x_0 \neq 0}$ e $\boxed{x_0 \in \operatorname{dom} f}$ → TANTO $x_0 \neq 0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^\alpha \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^\alpha \left(\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1\right)}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} =$$

$\to \alpha$

$$= \alpha \, x_0^{\alpha - 1}$$

$\alpha > 1$	$\alpha < 1$
$f'(0) = 0$	$\nexists f'(0)$

Es: $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \operatorname{dom} f' = (0, +\infty) = \operatorname{dom} f \setminus \{0\} \text{ perché } \alpha < 1$$

Oppure: $f(x) = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}} \qquad \operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

5) $f(x) = \sin x \qquad x_0 \in \mathbb{R}$ x caso $f'(x)$ di $\cos x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{2} \sin\frac{x - x_0}{2} \cos\frac{x + x_0}{2}}{\cancel{2} \cdot \frac{x - x_0}{2}} = \cos\frac{\cancel{2} x_0}{\cancel{2}} = \cos x_0$$

$\to 1$

INFATTI $(\alpha f)'(x) = 0 \cdot f(x) + \alpha f'(x) = \alpha f'(x)$

Es: $f(x) = 21x^3 - 5x^2 + 7x - 42$

$f'(x) = 21 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7$

Oppure: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 51x - 70}{x^3 + 27}$

$$f'(x) = \frac{(4x+51)(x^3+27) - 3x^2(2x^2+51x-70)}{(x^3+27)^2}$$

COMPOSIZIONE E DERIVATE

$$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(f(x))$$
$$x_0 \longmapsto y_0 \longmapsto g(y_0)$$

Prop. se $f(x)$ deriv in x_0, g deriv $y_0 = f(x_0)$

$$\Rightarrow \underline{(g(f(x)))'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)}$$

Es: $h(x) = \sin 5x$

$x \longmapsto 5x \longmapsto \sin 5x$

$f(x) = 5x \quad g(y) = \sin y$

$h'(x) = \cos(5x) \cdot 5$

↳ derivata dell'argomento

Ancora: $f(x) = \sqrt{e^{3x} - 4x + \cos 7x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{3e^{3x} - 4 - 7\sin 7x}{\sqrt{e^{3x} - 4x + \cos 7x}}$$

INVERSA & DERIVATE

$x \longmapsto f(x) \qquad f'(x_0)$

$f^{-1}(y) \longleftarrow y \qquad (f^{-1})'(y_0)$

HO DERIVATE IN PUNTI DIVERSI

Prop. se f invertibile e continua in $I(x_0)$, derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists (f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{\ldots}$

10) $g(x) = \arcsin x$

Parto da $f(x) = \sin x = y \iff y = \arcsin y$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ invertib., continua, derivab. in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

MA $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow$ userò $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

è positivo perché in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x > 0$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11) $$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prop. ~~f pari $\Rightarrow$ f dispari~~

f pari (disp.) deriv. $\Rightarrow$ f' dispari (pari)

Dim: $\cancel{f'(-x) = -f'(-x)}$ ~~dispari~~

$f(x) = f(-x)$

$\Rightarrow (f(x))' = (f(-x))'$

$\Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$

$(f(x))' = (-f(-x))'$

$f'(x) = +f'(-x)$

PROBLEMATICHE DELLE DERIVATE

$$\lim_{x \to x_0^{(\pm)}} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

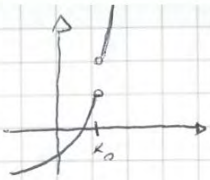
- DERIVATA DX $\quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$

- DERIVATA SX $\quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$

Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow \exists f'(x_0)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 340

Se no pensa a un salto!



$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$,

ma $\nexists f'(x)$!

Aspetto a fare la dim.

MASSIMI, MINIMI E PUNTI CRITICI

$x_0 \in \mathrm{dom} f$

- se $\exists\, I_r(x_0)$ tale che $\forall x \in I_r(x_0) \cap \mathrm{dom} f$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$

  Allora x_0 è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO (o locale)

- se $\forall x \in \mathrm{dom} f$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$

  allora x_0 è PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO (o globale)

Diremo che il massimo è STRETTO se $f(x) < f(x_0)$ per $x \neq x_0$

$f(x_0)$ è detto MASSIMO [assoluto o relativo]

Lo stesso per il MINIMO

x_0 è detto PUNTO DI ESTREMO se $f(x_0)$ è max o min di f

PUNTO CRITICO: $x_0 \in \mathrm{dom} f$ con f derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$

Teor di Fermat

f definita in un $I(x_0)$ e derivabile in x_0

Se x_0 è ~~punto~~ di estremo

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ CIOÈ x_0 è PUNTO CRITICO per f ~~DI ESTREMO~~

Dim

x_0 max relativo:

$\exists\, I_r(x_0) : \forall x \in I_r(x_0) \cap \mathrm{dom} f$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$

$\Rightarrow \Delta f \leq 0$ in $I_r(x_0)$

Se $x > x_0$ $\Delta x > 0$ $\Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 340

$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

cioè $\quad f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 340

Prop: $f: I \to \mathbb{R}$ cont, deriv. in $\mathring{I}$ (interno di I)

f è cost. $\Longleftrightarrow$ $f'(x)=0$, $\forall x \in \mathring{I}$

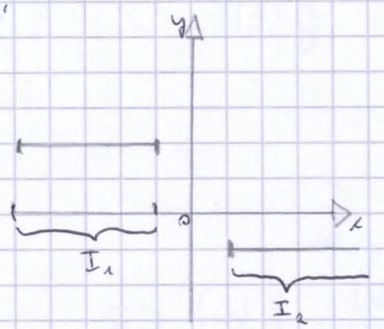
Dim
- $f(x)=K$, $f=K \to f'(x)=0$ OK
- $f'(x)=0 \overset{\text{Tesi:}}{\Rightarrow} f(x)=K$

$x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$

$$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(t)(x_2-x_1)}_{=0}$$

$$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1), \forall x \in I \Rightarrow f(x) \text{ cost.}$$

Era necessario avere I per prendere casi come questo:



Prop: $f: I \to \mathbb{R}$ cont, deriv. in $\mathring{I}$

a- $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathring{I} \Longleftrightarrow f$ è cresc. in I

b- $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathring{I} \Longrightarrow f$ è strett. cresc. in I

NON vale il contrario, pensa a $y = x^3$

Dim:
a- $\Rightarrow$ Tesi: $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$$f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(t)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}, \quad t \in (x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

Invece $f'(t) > 0$ avrei $f(x_2) > f(x_1) \to$ b-

(2)

In generale:

Prop: $f: I \to \mathbb{R}$ cont, deriv in $\mathring{I}$

$f'(x_0) = 0$

Se $f'(x)$ cambia segno nell'intorno di x_0, x_0 è PUNTO DI ESTREMO.

In particolare se $f'(x) < 0$, $x < 0$ e $f'(x) > 0$, $x > 0$

$\Rightarrow x_0$ PTO DI min LOCALE

se $f'(x) > 0$, $x < 0$ e $f'(x) < 0$, $x > 0$

$\Rightarrow x_0$ PTO DI MAX LOCALE

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

$x_0 \in \text{dom} f$

f deriv. in $I(x_0)$

Se esiste, $\underbrace{f''(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$

a volte si scrive $\frac{d^2 f}{d^2 x}(x_0)$ o $D^2 f(x_0)$

f è deriv. n volte in x_0

~~Per forza le derivate di ordine precedente, se esistono,~~

se esistono le deriv. di ordine inferiore in $I(x_0)$

e se $f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(\cancel{x_0})\right)'(x_0)$$

Es:

$f(x) = x^n$	$f(x) = x^3$
$f'(x) = n x^{n-1}$	$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = n(n-1) x^{n-2}$	$f''(x) = 3 \cdot 2 x$
$\vdots$	
$f^{(n)}(x) = n!$	$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1$
$f^{(k)}(x) = 0 \quad k > n$	$f^{IV}(x) = 0$

4L

γ: $f(x) = x^{\frac{8}{5}}$ $\quad$ dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{8}{5} x^{\frac{8}{5}-1} = \frac{8}{5} x^{\frac{3}{5}}$ $\quad C^1(\mathbb{R})$ $\quad$ se voglio rimanere sul dom f questo è il mio ordine.

$f''(x) = \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{24}{25} x^{-\frac{2}{3}}$ $\quad C^2((0,+\infty))$

γ: $f(x) = x^{\frac{12}{5}}$

$f'(x) = \frac{12}{5} x^{\frac{7}{5}}$

$C^2(\mathbb{R})$

$f''(x) = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{5} x^{\frac{2}{5}}$

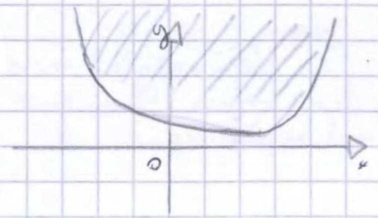
$f'''(x) = \frac{12 \cdot 7 \cdot 2}{5^3} x^{-\frac{3}{5}}$

OSSERVO CHE: $C^\infty(I) \subset \ldots \subset C^k(I) \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I)$

CONVESSITÀ/CONCAVITÀ

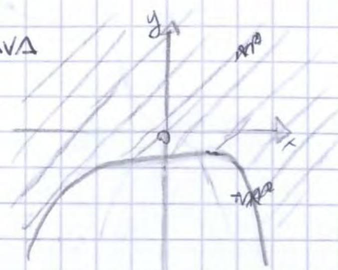
→ NEL PIANO: PRESI 2 PTI, IL SEGMENTO CHE LI HA X ESTREMI APPARTIENE ALLA FIGURA

Con f considero l'EPIGRAFICO $\mathcal{E}_{pi}(f)$



CONVESSO

$-f$ è CONCAVA



Presa $f: I \to \mathbb{R}$

$$Epi(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in I, y \geq f(x)\}$$

f è convessa in I se $Epi(f)$ è un INSIEME CONVESSO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 340

Teor: $f: I \to \mathbb{R}$ cont., deriv. 2 volte in I

$f''(x) \geq 0$ in I $\Longleftrightarrow$ f convessa in I

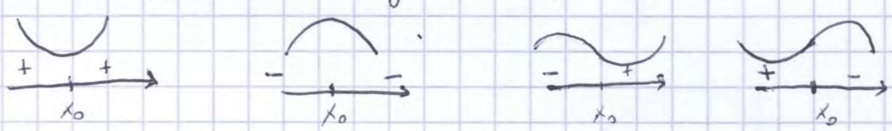
Dim $(f')'(x) \geq 0$ in I $\Rightarrow$ f' cresc. in I

Applico il teorema precedente $\Rightarrow$ f è convessa in I

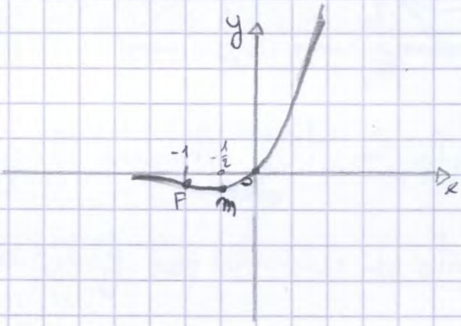
Prop $f: I \to \mathbb{R}$ deriv. 2 volte

se x_0 è pto di flesso $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$

Se $f''(x_0) = 0$, studio il segno di f'' in $I(x_0)$



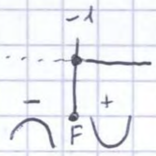
Riprendo xe^{2x}



$f'(x) = e^{2x}(1+2x)$

$f''(x) = e^{2x}(2+2+4x) = 4e^{2x}(1+x) \geq 0$

$x \geq -1$



f concava in $(-\infty, -1)$,
f convessa in $(-1, +\infty)$

$t(x)$ in $x_0 = -1$

$t(x) = f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) =$

$= -\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2}(x+1)$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = f$

8 L

Osservazioni:

- $\sinh^2 x - \cosh^2 x =$ → penso all'iperbole: $x^2 - y^2 = \pm 1$

$= \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} - 2 - \cancel{e^{2x}} - \cancel{e^{-2x}} - 2\right) = -1$

$\Rightarrow \boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$ → ASSOMIGLIA ALLA RELAZ. FONDAMENTALE.

MA $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ è come $x^2 + y^2 = 1$ VIAGGIANO SULLA CRF GONIOMETRICA

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ è come $x^2 - y^2 = 1$ VIAGGIANO SU UN'IPERBOLE EQUILATERA

- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ grafico analogo a quello di arctan x

→ per casa ✓

- $y = \sinh x$ SEMPRE CRESCENTE $\Rightarrow \exists$ l'inversa!

è detta SETTORE SENO IPERBOLICO ✓

Per casa.

Teorema di de l'Hopital

- f, g definite in $I(c) \setminus \{c\}$
- f, g derivabili in $I(c) \setminus \{c\}$
- $g'(x) \neq 0$ in $I(c) \setminus \{c\}$
- $\exists \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = L$ $\quad L = 0,\ L = \pm\infty$ $\quad \left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
- $\exists \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Non faremo la dim.

• $\alpha = 1$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = L \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad L = 0$

• $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = L$

$$\frac{x^\alpha}{e^x} = \frac{x^\alpha}{(e^{\frac{x}{\alpha}})^\alpha} = \left(\frac{\alpha \frac{x}{\alpha}}{e^{\frac{x}{\alpha}}}\right)^\alpha = \alpha^\alpha \cdot \left(\frac{\frac{x}{\alpha}}{e^{x/\alpha}}\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \alpha^\alpha \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x/\alpha}{e^{x/\alpha}}\right)^\alpha = \alpha^\alpha \left(\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y}\right)^\alpha = 0$$

$$y = \frac{x}{\alpha} \qquad x \to +\infty \qquad y \to +\infty$$

• $\alpha \leq 0 \Rightarrow \left(\frac{0}{\infty}\right) = 0$

2) $\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha \cdot e^x = 0$ per casa ✓

3) $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = 0$

• $\alpha > 0$

$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ Applico de l'Hopital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-\alpha} x^{\alpha \cancel{+1-1}} = 0 \Rightarrow L = 0$$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ per casa ✓

5) TEOREMA TAPPABUCHI

f cont. in $I(x_0)$

deriv in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell$

(12) L

PRODOTTO

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 \cdot x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

NON C'È DA IMPARARLO A MEMORIA

$$\mathrm{Re}\, z_1 z_2 \neq \mathrm{Re}\, z_1 \cdot \mathrm{Re}\, z_2$$

$$\mathrm{Im}\, z_1 z_2 \neq \mathrm{Im}\, z_1\, \mathrm{Im}\, z_2$$

OPPOSTO DI Z:

$$-z = -x - iy$$

RECIPROCO DI z

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\boxed{\frac{x}{x^2+y^2}}}_{\mathrm{Re}} + i \underbrace{\boxed{\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}}_{\mathrm{Im}}$$

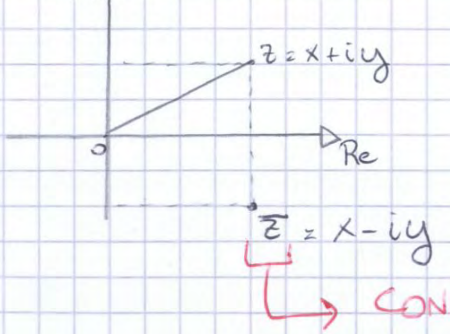
DIVISIONE:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

es:

$$\frac{1+2i}{3-4i} \cdot \underbrace{\frac{3+4i}{3+4i}}_{} = \frac{3+4i+6i-8}{9+16} = \frac{-5+10i}{25} = \underbrace{-\frac{1}{5}}_{\mathrm{Re}} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{\mathrm{Im}} i$$

quando faccio questa operazione prendo il pto simm. risp. all'asse reale



$\bar{z}$ → CONIUGATO DI z (zeta bar)

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

(14) L

• f derivabile in x_0 $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{} + o(x-x_0)$, $x \to x_0$

1ª formula incr. finito

$T_{f,x_0,1}(x)$ $+ o((x-x_0)^1)$

• f derivabile in $I(x_0)$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{} + f'(t)(x-x_0)$

t compreso tra x e x_0

2ª formula

$T_{f,x_0,0}(x) + f'(t)(x-x_0)$

polinomio — grado

Posso scrivere

$$f(x) = T_{f,x_0,2}(x) + o((x-x_0)^2) \ ? \quad (\text{per } x \to x_0)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), \quad x \to x_0$$

$(x-x_0)^0 \qquad (x-x_0)^1 \qquad (x-x_0)^2$

$$\Leftarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0 \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

chiedo 2 funz. derivabili in $I(x_0)$

$f'(x-x_0)$ si annulla solo in x_0

$\Rightarrow$ f sia derivabile in $I(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\right)}_{\text{derivata seconda}} - a = 0$$

$\Rightarrow$ f sia derivabile 2 volte in x_0

$$\frac{1}{2} f''(x_0) - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), \quad x \to x_0$$

ERRORE CON IL RESTO DI PEANO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 340

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \dots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n =$$

$x \to x_0$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0))^n$$

Se $x_0 = 0$ $\quad f^{(k)}(0) = 1$

$x \to 0$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + \frac{e^t}{(n+1)!}x^{n+1}$$

t tra zero e x

Quando $x = 1$

$$e = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{e_n} + \underbrace{\frac{e^t}{(n+1)!}}_{>0}$$

approssimaz. per difetto di e

$$e - e_n = \frac{e^t}{(n+1)!}$$

$0 < t < 1$

$e^0 < e^t < e^1$

$1 < e^t < 3$

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - e_n < \frac{3}{(n+1)!}$$

APPROSSIMAZ. MOLTO MIGLIORE RISP. A $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per $n \to +\infty$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

2) $f(x) = \log x \qquad x_0 = 1$

$f(1) = 0 \qquad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f''(x) = -x^{-2} \qquad f''' = (-1)(-2)\,x^{-3}$

$$f^{(k)}(x) = \underbrace{(-1)^{k-1}}_{\text{DISPARI SE K È PARI}}(k-1)!\,x^{-k}$$

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$T_{f,1,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \dots$$

$$\log t = (t-1) - \frac{1}{2}(t-1)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(t-1)^n + o((t-1)^n) \qquad t \to 1$$

(13) L

SALTA 1 PAG.

$x = t-1 \rightarrow t = 1+x$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n), \quad x \to 0$$

OSSERVO PER LE FUNZ. DISPARI. ~~E CONTINUE~~

$$g(x) = -g(-x)$$

$$g(0) = -g(0) \Rightarrow 2g(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$g \text{ dispari} \xRightarrow{\text{continua}} g(0) = 0$$

Prop:

f pari (dispari), il suo sviluppo di MacLaurin, se esiste, contiene solo potenze pari (dispari)

Dim

So che se f è pari $\Rightarrow f'$ è dispari

$$f^{(2n+1)} \text{ dispari} \Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Perciò il coefficiente del termine dispari è nullo.

Es: 3) $f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0$

$f'(x) = \cos x \quad g(x)$

$f''(x) = -\sin x \quad g'$

$f'''(x) = -\cos x \quad g''$

$f^{(4)}(x) = \sin x \quad g'''$

$$f^{(2n)}(0) = f(0) = 0$$

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

$2n+1 = 5 \rightarrow n = 2$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

TANTO x^{2n+2} ha coefficiente zero

Per es: $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$

4) $f'(x) = \cos x = g(x)$ vedi sopra a matita

20 L

$$T_{f,0,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha}{n!}$$

DEFINIZIONE:

$$\binom{\alpha}{k} \triangleq \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

OVVIAMENTE NON HA SENSO SCRIVERE $\alpha!$ SE $\alpha \notin \mathbb{N}$

Per $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

PERCIÒ, IN GENERALE:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

GENERALIZZAZ. DEL BINOMIO DI NEWTON.

Per es:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad x_0 = 0 \quad n = 3$$

$$= 1 + \frac{1}{2} x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 + o(x^3)$$

Oppure

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad x_0 = 0 \quad n = 2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2} x^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + o(x^2)$$

Ancora:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad x_0 = 0 \quad n = 5$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

$\sinh x =$

$$-e^{-x} = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

SALTIAMO LA Dim

Ancora un esempio.

$$f(x) = e^x - \sqrt{1+2x} \qquad x_0 = 0$$

ORD. DI INFINITESIMO E PARTE PRINCIPALE DI $f(x)$?

Cerco il primo termine che non si annulla per $x \to x_0$

$$= \underbrace{1 + x + o(x)}_{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} - \Big(1 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x + \underbrace{o(x)}_{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}(2x^2) + o(x^2)}\Big) = o(x)$$

SO SOLO CHE È DI ORD SUP. AL PRIMO.

$$= \frac{x^2}{2} + \cancel{o(x)} + \frac{1}{\cancel{8}_2}\cancel{4}x^2 + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

ORD. DI INFINITESIMO $= 2$ PER $x \to 0$

$p(x) = x^2$

Es:
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{5x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{5x^2} = \frac{1}{5}$$

MOLTIPLICAZIONE

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + o(x^n)$$

$$f(x)\,g(x) = \big(p_n(x) + o(x^n)\big)\big(q_n(x) + o(x^n)\big) =$$

$$= \underbrace{p_n(x)\,q_n(x)}_{\text{POLINOMIO DI GRADO } 2n} + \underbrace{p_n(x)\,o(x^n)}_{(a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n)\,o(x^n)} + \underbrace{q_n(x)\,o(x^n)}_{o(x^n)} + \underbrace{o(x^n)\,o(x^n)}_{o(x^{2n})} =$$

$$o(x^n) + o(x^{n+1}) + \dots + o(x^{2n})$$

Ancora:

$$f(x) = 5(x-1)^2 + 27(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

$f(1) = 0$

$f'(1) = 0 \rightarrow$ 1 PTO CRITICO! POICHÈ $pp(x) = 5(x-1)^2$ $x=1$ PTO DI MINIMO RELATIVO

$f''(1) > 0$ ORD. DI INFINITESIMO $= 2$

$f'''(1) > 0$

DIVISIONE

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) \iff f(x) = h(x)\, g(x)$$

$$\iff p_n(x) + o(x^n) = (r_n(x) + o(x^n))(q_n(x) + o(x^n))$$

Un esempio per capire:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad n = 4$$

$$= \square x + \square x^3 + o(x^4)$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}$$

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ \hline x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4) & x + \frac{1}{3}x^3 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \quad // \; \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^4)$$

$$\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\overline{\quad / \quad o(x^4)}$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

26 L

Nel caso $f(x) = \sqrt{\cos x}$ $\qquad n=3$

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 \boxed{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}} = (1+t)^{\frac{1}{2}}$$

t

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 =$$

già qui entra in $o(x^3)$

$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$$

Altro es:

$$f(x) = e^{\cos x} = e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \qquad n=3$$

$$= e \cdot e^{\boxed{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}} = e\left(1 + \cancel{t} - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

t

$$= e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3)$$

ATTENTO A NON SVILUPPARE IN 1 COME SE FOSSE IN ZERO!

POTEVO ANCHE FARE:

$$f(x) = e^{\cos x} \to t \qquad = e + e(t-1) + o(t-1) =$$

$$= e + e(\cos x - 1) + o(\cos x - 1) =$$

$$= e + e\left(-\frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)$$

Teor

f derivabile $n \geq 2$ volte ~~in~~ x_0 e

$$f'(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0 \qquad f^{m}(x_0) \neq 0$$

per un certo m : $2 \leq m \leq n$

$$f(x) = f(x_0) + a_m (x-x_0)^m + o((x-x_0)^m) \quad (x \to x_0)$$

$a_m \neq 0$

$\Rightarrow$ a) m pari $(x-x_0)^m = \cup$ o $\cap$ a seconda che $a_m \gtrless 0$

Se m è pari x_0 è punto di max se $f^{(m)}(x_0) < 0$ e punto di minimo se $f^{(m)}(x_0) > 0$

28 L

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$

Def: la funz. derivabile $F: I \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$ si dice PRIMITIVA di f in I

Es:

$f(x) = x^3$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 \quad F'(x) = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} x^3 = f(x)$

$\Rightarrow F(x)$ è UNA primitiva di f

$G(x) = \frac{1}{4}x^4 - 27$ è un'altra primitiva

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Teor di CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$

se F è una primitiva di f

$\Rightarrow$ TUTTE e sole le primitive di f sono della forma

$$G(x) = F(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Le indicherò con questo simbolo: $\int f(x)\,dx$ = INSIEME DELLE PRIMITIVE DI f

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\} \; F \text{ primitiva di } f =$$

$$= F(x) + c \quad \text{con } F \text{ primitiva di } f$$

Dim

Se $F'(x) = f(x) \Rightarrow G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

Adesso devo dimostrare "TUTTE E SOLE"

Supponiamo che $G(x)$ sia primitiva di f $\quad$ Tesi: $G(x) = F(x) + c$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 109 di 340

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} -\cos x + c & x \geq 0 \\ \cos x + c - 2 & x < 0 \end{cases}$$

TAVOLA DI INTEGRALI

f	f'	f	F
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\alpha \neq -1$
$\log\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x	e^x	e^x
a^x	$\log a \cdot a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Es:

→ $\int \frac{2}{3x}\,dx = \frac{2}{3}\log\lvert x\rvert + c$

→ $\int \sqrt{5x}\,dx = \frac{(5x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{5} + c$

→ $\int \; \frac{1}{2}\int 2x\cos x^2\,dx = \frac{\sin x^2}{2} + c$

$$\boxed{\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin f(x) + c}$$

Prop (integrazione per parti)

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Dim

$$(f(x)g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

$$\int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)dx = f(x)g(x) + c$$

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \underline{\int f'(x)\,g(x)\,dx}$$

→ qui dentro c'è una c

Es:

$I = \int x e^x\,dx$ NON POSSO RICONDURLA A $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx$

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \qquad g(x) = e^x$

$I = xe^x - \int e^x\,dx =$

$= xe^x - e^x + c$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$g'(x) = x \qquad g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$I = \frac{1}{2}x^2e^x - \underline{\frac{1}{2}\int x^2 e^x\,dx}$

→ è vero, ma HO PEGGIORATO LA SITUAZIONE!

Es: $I = \int \log x\,dx$

$f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \qquad g(x) = x$

$I = x\log x - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}\,dx = x\log x - x + c = x(\log x - 1) +$

Es:

$I = \int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$g'(x) = \sin x \qquad g(x) = -\cos x$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$g'(x) = \cos x \qquad g(x) = \sin x$

→ NON DEVO CAMBIARE! AVEVO SCELTO $f(x) = e^x$

Per caso: $f = \sin x$ ✓ $g' = e^x$

$I = -e^x\cos x + e^x \sin x - I$

$\Rightarrow \cancel{2}I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$

34 L

$$I = \int tg\,x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$y = \cos x \qquad dy = -\sin x \, dx$

$$I = -\int \frac{dy}{y} = -\log|y| + c = -\log|\cos x| + c$$

Es: $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$\boxed{y = \sqrt{1+x^2} - x}$

$$dy = \left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} - 1\right) dx = \frac{\overbrace{x - \sqrt{1+x^2}}^{-y}}{\sqrt{1+x^2}} dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$I = -\int \frac{dy}{y} = -\log|y| + c =$$

$$= -\log\left|\sqrt{1+x^2} - x\right| + c =$$

$$= \log \frac{1}{\left|\sqrt{1+x^2} - x\right|} + c = \log\left|\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}}\right| + c = \log\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) + c$$

Ancora: $\int \sqrt{1+x^2}\, dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$g'(x) = 1 \qquad g(x) = x$

$$\cancel{2}I = \frac{x\sqrt{1+x^2} - \cancel{I} + \log\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{2} + c$$

$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$ ✓ } PER CASA

Es: $\boxed{\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx} = \int \frac{1}{y} \frac{1}{y + \frac{1}{y}} dy = \int \frac{1}{\cancel{y}\frac{(y^2+1)}{\cancel{y}}} dy = \operatorname{arctg} y + c = \operatorname{arctg} e^x + c$

$y = e^x \qquad dy = e^x dx = y\, dx \rightarrow \frac{dy}{y} = dx$

36 L

(r, ϑ) coordinate polari

$$z = x + iy = r\underbrace{(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)}_{\text{il suo modulo è } 1} \triangleq r e^{i\vartheta}$$

ECCO DUNQUE Euler's formula

$$\cos\vartheta + i \sin\vartheta = e^{i\vartheta}$$

PRODOTTO & FORMA TRIGONOMETRICA

$$z_j = r_j(\cos\vartheta_j + i \sin\vartheta_j) \qquad j = 1, 2$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2} = r_1 r_2 (\cos\vartheta_1 + i \sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + i \sin\vartheta_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + i(\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_1)\right) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2))$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| = r_1 r_2$$

$$\boxed{\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2}$$ "a" minuscola!

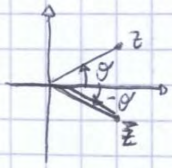
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = r_1 e^{i\vartheta_1} \cdot r_2 e^{i\vartheta_2} = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

DIVISIONE

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{1}} \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{r e^{-i\vartheta}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{1}{r} e^{-i\vartheta}$$

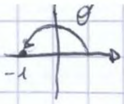
$$\bar{z} = x - iy = r(\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)) = r e^{-i\vartheta}$$



$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\vartheta_1} e^{-i\vartheta_2} = \boxed{\frac{r_1}{r_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 117 di 340

$-1 = e^{-i\pi}$



$\rho = 1 \quad \varphi = -\pi$

$r = \sqrt{1} = 1$

$\vartheta = \dfrac{-\pi + 2k\pi}{2} \quad k = 0, 1 \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}} = i \quad ? \quad -i$

$z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = -i \quad\quad +i$

INOLTRE SO CHE

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

- $|e^{z}| = e^{x} \Rightarrow e^{z} \neq 0$, perchè il suo modulo è $= e^{x}$ che è > 0 sempre.
- $\arg e^{z} = y$
- PERIODICA DI $2\pi i$

$$e^{z+2\pi i} = e^{x}e^{i(y+2\pi)} = e^{x}(\cos y + i\sin y) = e^{x}e^{iy} = e^{x+iy} = e^{z}$$

$$\Rightarrow e^{iz} = e^{ix} \cdot e^{-y} = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$$

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned}\right] \oplus / \ominus$$

PER CASA
$\cosh ix$
$\sinh ix$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

40 L

- 1ST: DIVIDERE num e den se $n \geq m$
- 2ND: CONSIDERARE $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ con $n < m$
- 3RD: DECOMPORRE IL denominatore

$$Q_m(x) = d(x-\alpha_1)^{r_1} \dots (x-\alpha_h)^{r_h} \cdot \underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}_{\Delta<0} \dots \underbrace{(x^2+p_kx+q_k)^{s_k}}_{\Delta<0}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_h \in \mathbb{R}$

$p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}$

$$r_1 + \dots + r_h + \underbrace{2}_{\hookrightarrow \text{ho } x^2}(s_1 + \dots + s_k) = m$$

Le radici complesse coniugate vanno a coppie.

es: $$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = F_1(x) + \dots + F_h(x) + \tilde{F}_1(x) + \dots + \tilde{F}_k(x)$$

dove $F_1(x) = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{A_{r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}$

e $\tilde{F}_1(x) = \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{B_{s_1}x+C_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}$

- 4TH: SCRIVERE $R(x)$ COME SOMMA DI FRAZIONI ELEMENTARI

2 PROBLEMI: - SO INTEGRARE LE ~~RADICI~~ FRAZIONI?
- COME TROVO A_i, B_i, C_i?

$$\int \frac{1}{x-\alpha_1}dx = \log|x-\alpha| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha_1)^r}dx = \cancel{\frac{(x-\alpha)^{r-1}}{r-1}} + c \quad \frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{r-1}} + c$$

$$\begin{cases} A = -B \to A \\ A - B = 7 = -2B \end{cases}$$

Es: $$\frac{7}{x^2-1} = \frac{7}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 7 = A(x+1) + B(x-1) = x(A+B)$$

$$\int \frac{7}{x^2-1}dx = A\int \frac{1}{x-1}dx + B\int \frac{1}{x-1}dx = \cancel{\tfrac{7}{2}} \dots + A\log|x-1| + B\log|x+1| + c$$

42 L

Esempi:

1) $$\int \frac{x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$$

$$Q(x) = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$$

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x^2-3x+3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$x=0 \qquad 3 = A$

$x=1 \qquad 1 = C$

PER B PRENDO UN NUM. A CASO

$x=2 \qquad 4-6+\cancel{3} = \cancel{3} + B\cdot 2 + 2 \rightarrow 2B = -4 \rightarrow B = -2$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$I = 3\log|x| - 2\log|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + c = \log\left|\frac{x^3}{(x-1)^2}\right| - \frac{1}{x-1} + c$$

2) $$I = \int \frac{3x^2+x-4}{x^3+5x^2+9x+5}\,dx$$

USERÒ RUFFINI: $x=-1$

	1	5	9	5
-1		-1	-4	-5
	1	4	5	//

$$Q(x) = (x+1)(x^2+4x+5) = (x+1)\left((x+2)^2+1\right)$$

$$\frac{\Delta}{4} < 0$$

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$$

$$3x^2+x-4 = A(x^2+4x+5) + (Bx+C)(x+1)$$

$x=-1 \qquad -2 = 2A \Rightarrow A = -1$

$x=0 \qquad -4 = -5 + C \Rightarrow C = 1$

$x=1 \qquad 0 = -10 + 2 + 2B \rightarrow 2B = \frac{8}{2} \rightarrow B = 4$

SE HO

e^{ax} $\qquad t = e^{ax} \qquad dt = a e^{ax} dx$

$$\frac{dt}{t} = a\,dx$$

Es:

$$I = \int \frac{e^{-x}}{e^{2x} - 2e^x + 2} dx =$$

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{t}}{t^2 - 2t + 2} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2(t^2 - 2t + 2)} dt$$

$\Delta < 0$

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct + D}{t^2 - 2t + 2} \qquad (\dots) \quad \text{PER CASA}$$

$(t-1)^2 + 1$

SE HO

$R(\sin x, \cos x)$ $\qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \longrightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Es:

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= 4 \int \frac{t}{(t^2 + 2t + 1)(1+t^2)} dt = 4 \int \frac{t}{(t+1)^2(1+t^2)} dt$$

$$\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct + D}{(1+t^2)} \qquad (\dots) \quad \text{PER CASA}$$

SE HO

$R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)$ $\qquad t = \tan x \longrightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \qquad dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

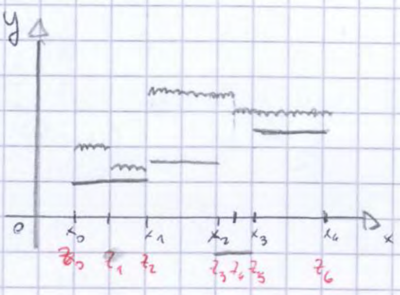
46 L

$$\int_I f = \int_a^b f(x)dx = c_1(x_1-x_0)+c_2(x_2-x_1)+\dots+c_n(x_n-x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i-x_{i-1})$$

Perciò prese $f, g \in S([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, \text{ a scala}\}$

se $f \le g \Rightarrow \int_I f \le \int_I g$

es.



PRENDO DEGLI INTERVALLI CHE SODDISFINO sia f che g

$$\left.\begin{array}{l}\{z_0, \dots z_\ell\} \quad f(x) \le g(x) \\ \sum_{i=1}^{\ell} c_i(z_i - z_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{\ell} d_i(z_i - z_{i-1})\end{array}\right] \Rightarrow c_i \le d_i \Rightarrow \int_I f \le \int_I g$$

SE PRENDO UNA FUNZIONE LIMITATA

$i_f = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad s_f = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \qquad i_f, s_f \in \mathbb{R}$

PRENDO 2 INSIEMI:
- TUTTE LE FUNZ. A SCALA PIÙ PICCOLE DI f
- TUTTE LE FUNZ. A SCALA PIÙ GRANDI DI f

$S_-(f;a,b) = \{g = S(f;a,b) : g \le f\}$ → ne esiste almeno una: $g(x) = i_f$

$S_+(f;a,b) = \{h = S(f;a,b) : h \ge f\}$ → è lo stesso con s_f.

$$\Rightarrow g(x) \le f(x) \le h(x)$$

$$\int_I g \le \int_I h$$

PRENDO

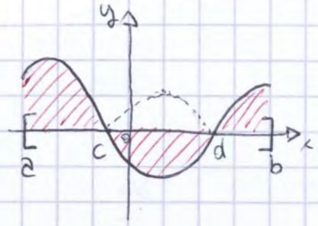
$$\sup\left\{\int_I g : g \in S_-(f;a,b)\right\} = \underline{\int}_I f \qquad \text{INTEGRALE INFERIORE}$$

mi serviranno numeri x usare sup e inf.

$$\inf\left\{\int_I h : h \in S_+(f;a,b)\right\} = \overline{\int}_I f \qquad \text{INTEGRALE SUPERIORE}$$

2. se $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a,b])$

COME CALCOLARE L'INTEGRALE DEFINITO SENZA PASSARE PER LA DEFINIZIONE?



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

$f \in \mathcal{R}([a,b])$

Per calcolare l'area di $T(f;a,b)$ userò $|f(x)|$, se no avrei una area con segno.

$$\Longrightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$c,d \in [a,b] \Rightarrow \exists \int_c^d f(x)\,dx$$

Def: $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx = -\int_d^c f(x)\,dx$; $\displaystyle\int_c^c f(x)\,dx = 0$

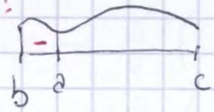
Teor: $f, g \in \mathcal{R}(I)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ ADDITIVITÀ

1) $\forall a, b, c \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

NOTA: L'ordine di a, b e c è ininfluente

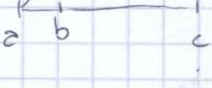
es:



$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

RICADRÒ SEMPRE IN QUESTO CASO $\Rightarrow$



2) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

$\Rightarrow$ LINEARITÀ

50 L

Dim:

i) $i_f \leq f(x) \leq s_f$

$$\int_a^b i_f \, dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b s_f \, dx$$

$$i_f \cancel{(b-a)} \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq s_f \cancel{(b-a)} \qquad a<b \Rightarrow b-a>0$$

POSSO DIVIDERE PER $(b-a)$

$$\Rightarrow \quad i_f \leq m(f; a,b) \leq s_f$$

ii) f è continua $\Rightarrow$ $i_f = \min f(x)$ $\quad s_f = \max f(x)$ per Weierstrass

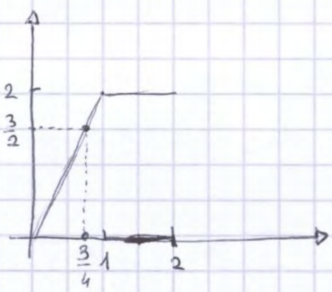
$$\text{im } f = [i_f, s_f]$$

CONSEGUENZA DEL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

~~Poiché~~ $\Rightarrow \exists z : f(z) = m(f; a,b)$

$z \in [a,b]$

Es:



$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1 \cdot 2}{2} + 1 \cdot 2 = 3$$

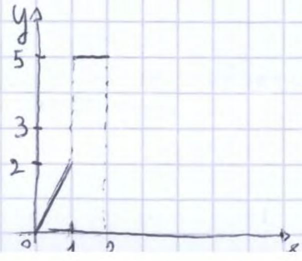
$$m(f; 0,2) = \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2}$$

$$f \text{ cont} \Rightarrow \exists z \in [0,2] : f(z) = \frac{3}{2}$$

$$2z = \frac{3}{2} \rightarrow z = \frac{3}{4}$$

Avessi avuto

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1] \\ 5 & x \in (1,2) \end{cases}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 131 di 340

Corollario: $f: I \to \mathbb{R}$ continua, G primitiva di f in I

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

Dim: $x_0 = a$ $\quad \exists\, F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad F_a'(x) = f(x)$

$$G(x) = F_a(x) + c \longrightarrow F_a(x) = G(x) - c$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_a(b) - \underbrace{F_a(a)}_{\text{LO METTO IO, TANTO } F_a(a)=0} = G(b) \cancel{-c} - G(a) \cancel{+c} = G(b) - G(a)$$

Perciò, x es.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,2] \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2\,dx = x^2\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 = 1 - 0 + 4 - 2 = 3$$

altro es.

$$\int_0^1 (e^x - \sin x + 2)\,dx = (e^x + \cos x + 2x)\Big|_0^1 = e + \cos 1 + \cancel{2} - \cancel{1} - \cancel{1} = e + \cos 1$$

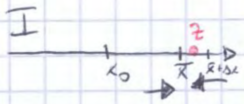
Dim del teor. fond. del calcolo integrale

Ip: $f: I \to \mathbb{R}$ continua

$x_0, x \in I$

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt \implies \text{Th: } F_{x_0}'(x) = f(x), \ \forall x \in I$$

cioè $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_{x_0}(\bar{x} + \Delta x) - F_{x_0}(\bar{x})}{\Delta x} = f(\bar{x})$



$$F_{x_0}(\bar{x} + \Delta x) - F_{x_0}(\bar{x}) = \int_{x_0}^{\bar{x}+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt =$$

$$= \cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt} + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 133 di 340

$$f(x) = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 + o(t^4)\right) dt = \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)\right]_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Oppure $f(x) = \arcsin x$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(+\frac{3}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right) t^4 + o(t^4)$$

$$f(x) = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8} t^4 + o(t^4)\right) dt = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

OSSERVAZIONI SUGLI INTEGRALI DEFINITI E METODI DI INTEGRAZIONE

PER PARTI:

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

PER SOSTITUZ.:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy$$

$$y = \varphi(x) \qquad dy = \varphi'(x)\, dx$$

$$\varphi[a,b] \to [\alpha, \beta]$$

VOLENDO POSSO DIMENTICARE GLI ESTREMI, RISOLVERE E INFINE SOSTITUIRE a e b ALLA x DELLA PRIMITIVA.

Es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x\, dx$$

$$y = \sin x \qquad dy = \cos x\, dx$$

$$I = \int y^5\, dy = \frac{y^6}{6} + c = \frac{\sin^6 x}{6} + c$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^6 \frac{\pi}{2}}{6} - \frac{\sin^6 0}{6} = \frac{1}{6}$$

OPPURE FACEVO

$$x = 0 \to y = \sin 0 = 0$$

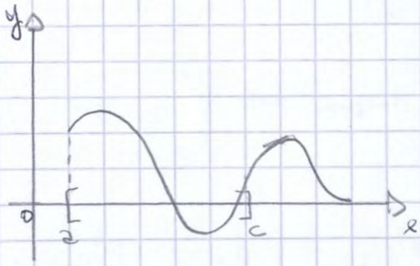
$$x = \frac{\pi}{2} \to y = 1$$

$$\int_0^1 y^5\, dy = \frac{y^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

INTEGRALI IMPROPRI

- $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{R}_{loc}([a, +\infty))$



f è LOCALMENTE INTEGRABILE in $[a, +\infty)$ se è integrabile in ogni sottointervallo $[a, c]$, $\forall c \geq a$

allora $\exists \; F(c) = \int_a^c f(x)\,dx \qquad F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx}_{L}$$

Se
- $L \in \mathbb{R} \implies$ l'integr. impr. CONVERGE
- $L = \pm\infty \implies$ " " DIVERGE
- $\nexists L \implies$ " " OSCILLA

Es

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha} \qquad \alpha > 0 \;,\; [1, +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

continua $\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{loc}([1, +\infty))$

$$F(c) = \int_1^c x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^c & \alpha \neq 1 \\ \left.\log x\right|_1^c & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(c^{1-\alpha} - 1\right) & \alpha \neq 1 \\ \log c & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{c \to +\infty} F(c) = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha = 1 \end{cases}$$

 L

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 137 di 340

Per il teorema di permanenza del segno in $\overbrace{I^-(b)}^{\text{almeno uno}}$ ho f sempre ≥ 0 o sempre $\leq$ se $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$.

Lo stesso non si può dire se f oscilla e $\nexists \lim_{x \to b^-} f(x)$

Es:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{(b-x)^\alpha}}_{} \qquad \alpha > 0$$

sempre positivo in $[a,b) \Rightarrow$ converge o diverge

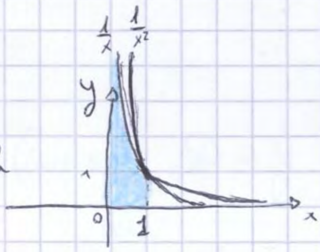
$$F(c) = \int_a^c \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} -\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_a^c & \alpha \neq 1 \\ \log(b-x)\Big|_a^c & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha}\left((b-c)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\right) & \alpha \neq 1 \\ -\log\frac{b-c}{b-a} & \alpha = 1 \end{cases}$$

Se $c \to b^-$

$$F(c) = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{DIVERGE} & \alpha \geq 1 \\ \searrow \text{CONVERGE} & \alpha < 1 \end{cases}$$

infatti per potenze piccole ho un'area + piccola



ADDITIVITÀ DI INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_a^{+\infty} = \int_a^d + \int_d^{+\infty}$$

LINEARITÀ:

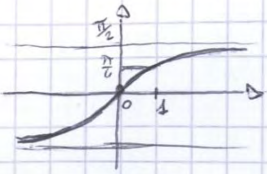
$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

60 L

$$\Rightarrow \quad 0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Il teor vale anche per $[a, b)$

Es: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx \quad , \quad \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$



$$\frac{\pi}{4} \le \operatorname{arctg} x \le \frac{\pi}{2}$$

1) $\displaystyle\frac{\pi/4}{x^2} \le \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \le \frac{\pi/2}{x^2}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi/2}{x^2}\,dx$ converge

$\displaystyle\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$ converge

2) $\displaystyle\frac{\pi/4}{x} \le \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \le \frac{\pi/2}{x}$

$\hookrightarrow \int_1^{+\infty}$ DIVERGE $\Rightarrow$ NON MI SERVE!

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi/4}{x}\,dx$ diverge

$\displaystyle\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{atan} x}{x}\,dx$ diverge

Es:

$$\int_1^3 \sqrt{\frac{7-x}{3-x}}\,dx$$

IL PROBLEMA è NELL'ESTREMO 3

$1 \le x \le 3 \qquad -3 \le -x \le -1$

$\sqrt{4} \le \sqrt{7-x} \le \sqrt{6}$

$$\frac{2}{(3-x)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{\sqrt{7-x}}{(3-x)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{\sqrt{6}}{(3-x)^{\frac{1}{2}}}$$

l'i.i. CONVERGE

$$\Longrightarrow \int_1^3 f(x)\,dx \text{ converge}$$

BASTA CAPIRE se si deve MAGGIORARE o MINORARE

Teor (criterio di convergenza assoluta)

$$f \in R_{loc}([a, +\infty)) \quad , \quad |f| \in R([a, +\infty))$$

(62) L $\quad \Longrightarrow \quad f \in R([a, +\infty)) \;\wedge\; \left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$

ATTENTI, PERÒ: f può essere integrabile anche se $|f|$ non lo è!

Le funz. che soddisfano qst teorema sono ASSOLUTAMENTE INTEGRABILI.

Es: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge

MA $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge

Altro es

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{converge}}$$

$\downarrow$ converge

CRITERIO DEL CONFRONTO

$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

Teor (criterio del confronto asintotico)

1. $f \in \mathcal{R}_{loc}([a,+\infty))$, f sia un infinitesimo di ordine α per $x \to +\infty$

$\Longrightarrow$ se $\alpha > 1$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

se $\alpha \leq 1$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

2. $f \in \mathcal{R}_{loc}([a,b))$, f sia un infinito di ordine α per $x \to b^-$

$\Longrightarrow$ se $\alpha < 1$, $\int_a^b f(x)\,dx$ converge

se $\alpha \geq 1$, $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 143 di 340

Se $\alpha > 1$ so che $\log x \geq \log 2$ in $[2, +\infty)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log x} \leq \frac{1}{\log 2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\log x}\right)^{\beta} \leq \left(\frac{1}{\log 2}\right)^{\beta} = K$$

$$\underbrace{\frac{1}{x^{\alpha} \log^{\beta} x}}_{\text{converge}} \leq \underbrace{\frac{K}{x^{\alpha}}}_{\text{converge}}$$

$I_{\alpha,\beta}$ con $\alpha > 1$, $\forall \beta > 0$ converge

Se $\alpha < 1$

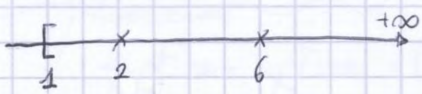
$$\frac{1}{x^{\alpha} \log^{\beta} x} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \boxed{\frac{x^{-\alpha+1}}{\log^{\beta} x}}}_{\text{diverge}} \geq \underbrace{\frac{M}{x}}_{\text{diverge}}$$

all'∞ tende a $+\infty$

$I_{\alpha,\beta}$ con $\alpha < 1$, $\forall \beta > 0$ diverge

Es:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-5}{(x+1)\sqrt[3]{(x-2)(x-6)}}\, dx$$



$+\infty$

$x = 2$

$x = 6$

$$\int_1^{2} + \int_2^{3} + \int_3^{6} + \int_6^{7} + \int_7^{+\infty}$$

PRIMI 2:

$x \to 2$

$$f(x) \sim \frac{-3}{3\sqrt[3]{-4}} \cdot \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

UNICA COSA CHE CONTA

$\frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ convergono

2° e 3°:

$x \to 6$

$$f(x) \sim \text{cost.} \frac{1}{(x-6)^{\frac{1}{3}}}$$

$\rightarrow$ convergono

ULTIMO:

$x \to +\infty$

$$f(x) \sim k \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ DIVERGE!

66 L

Es: $y' = f(x)$ $\quad f: I \to \mathbb{R}$ continua

Se F è una primitiva di f

$$y(x) = F(x) + c$$

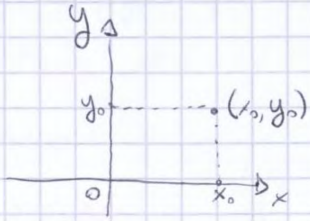
LA SOLUZ. DIPENDE DA TANTE COSTANTI ~~QUANTE SONO LE VARIABILI DI ORDINE INFERIORE~~ QUANTO È L'ORDINE DELL'EQ.

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

integrale generale dell'eq. diff. di ordine n, dip. da n costanti

Per un fissato valore delle costanti, si ottiene l'INTEGRALE PARTICOLARE

ORDINE 1: $\quad y(x_0) = y_0$



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

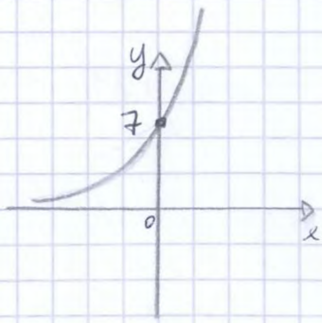
Se ho ordine n: devo dare n condizioni

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_{00} \\ y'(x_0) = y_{01} \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases}$$

Es:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 7 \end{cases} \quad \to y = c e^x \qquad c \cdot e^0 = 7 \to c = 7$$

$$\Rightarrow y = 7e^x$$



$$\frac{y'}{h(y)} = \frac{g(x)\, h(y)}{h(y)} \quad \text{in } J \qquad h(y) \to \neq 0$$

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x)$$

$\frac{1}{h}$ cont. in $J \Rightarrow H$ primitiva di $\frac{1}{h(y)}$

ma $y = y(x) \Rightarrow \frac{dH(y(x))}{dx} = \frac{dH(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$

Perciò $H'(y(x)) = g(x)$

Se $G'(x) = g(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{H(y(x))}_{\text{sicuramente invertibile}} = G(x) + c$$

SICURAMENTE INVERTIBILE, ESSENDO $h(y)$ SEMPRE $>$ (o $<$) di zero in J

$$\Rightarrow y(x) = H^{-1}(G(x) + c)$$

Del resto, se

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

allora $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx \Rightarrow H(y(x)) = G(x) + c$

Nell' es. di prima

$$y' = y(1-y)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y) \qquad \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx$$

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} \to 1 = A(1-y) + By$$

$y = 0 \quad 1 = A$

$y = 1 \quad 1 = B$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 149 di 340

Ancora un es:

$$y' = \frac{1+e^x}{1+e^y} \qquad g(x) = 1+e^x \qquad h(y) = \frac{1}{1+e^y} > 0$$

$$\int (1+e^y)\,dy = \int (1+e^x)\,dx$$

$$\underbrace{y + e^y}_{H(y)} = \underbrace{x + e^x + c}_{G(x)+c} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Mi fermo qui, non so esplicitare $H^{-1}(y)$

MA NON È DETTO CHE NON POSSA RISOLVERE PROBLEMI DI CAUCHY!

es:
$$\begin{cases} y' = \frac{1+e^x}{1+e^y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$1 + e^1 = 0 + e^0 + c \Rightarrow c = e$$

$$\Rightarrow y + e^y = x + e^x + e$$

EQ. DIFF. OMOGENEA

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{con } x \neq 0$$

es.
$$x^2 y' = y^2 + xy + x^2$$

$$y' = \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1}_{\varphi(y/x)}$$

- $z = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow z = z(x) = \frac{y(x)}{x}$

$\hookrightarrow$ $y = xz \qquad y' = z + xz'$

$$\Rightarrow z + xz' = \varphi(z) \rightarrow z' = \frac{\varphi(z) - z}{x}$$

POSSO FARLA A VARIABILI SEPARABILI

$\Rightarrow \log|y| = -A(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y = k e^{-A(x)} \qquad k \in \mathbb{R}}$$

ho incluso anche $h(y) = 0$

SE $b(x) \neq 0$

$y' + a(x) y = b(x)$

cerco la sol. nella forma $y = k(x)\underbrace{e^{-A(x)}}$

$e^{-A(x)}$ sempre > 0
$\Rightarrow$ rappr. lecita

$y' = k'(x) e^{-A(x)} + k(x) e^{-A(x)}(-a(x))$

$k'(x) e^{-A(x)} \cancel{- k(x) a(x) e^{-A(x)}} + \cancel{a(x) k(x) e^{-A(x)}} = b(x)$

$k'(x) = e^{A(x)} b(x)$

$\Rightarrow k(x) = \int e^{A(x)} b(x)\, dx$

$$y = y(x, c) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int e^{\int a(x)dx} b(x)\, dx + c\right)$$

Es:

$y' - y = 0 \qquad a(x) = -1 \qquad b(x) = 0$

Per casa

Altro es:

$x y' + y = x^2$

$y' + \frac{1}{x} y = x \qquad a(x) = \frac{1}{x} \qquad b(x) = x$

$A(x) = \log|x|$

$y = y(x, c) = e^{-\log|x|}\left(\int e^{\log|x|} x\, dx + c\right) =$

$= \left|\frac{1}{x}\right|\left(\int |x| x\, dx + c\right) = \frac{1}{x}\int x^2 dx = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$

SIA IN $(0, +\infty)$
CHE IN $(-\infty, 0)$ I 2 VAL. ASS.
SI COMPENSANO TRA LORO!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 153 di 340

1_ Cercherò l'int. generale dell'omog. associata

$$y = y_{om}(x, c_1, c_2)$$

2_ Poi cercherò un int. particolare dell'eq. completa $y_p(x)$

$$\Rightarrow \quad y(x, c_1, c_2) = y_{om}(x, c_1, c_2) + y_p(x)$$

1_

Cerco le soluz. in forma esponenziale

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$

$$y_2(x)\ e^{\lambda_2 x}$$

MA come calcolare la derivata di un esp. complesso?

Esattamente come per i num. reali : $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

INFATTI:

$$f(x) = u(x) + i\, v(x) \qquad f'(x) = u'(x) + i\, v'(x)$$

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i\, e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\boxed{(e^{\lambda x})'} = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta \sin\beta x + i\left(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x\right) =$$

$$= e^{\alpha x}(\alpha + i\beta)\cos\beta x + e^{\alpha x}\sin\beta x(-\beta + i\alpha) =$$

$$-\beta + i\alpha = i(\alpha + i\beta)$$

$$= e^{\alpha x}(\alpha + i\beta)(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$

$$= (\alpha + i\beta)\, e^{(\alpha + i\beta)x} = \boxed{\lambda e^{\lambda x}}$$

TORNANDO A NOI:

Se una soluz. è $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b\, e^{\lambda x} = 0 \iff \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO DELL'EQUAZIONE.

INFATTI $e^{\lambda x}$ MAI SI AZZERA

PERTANTO

$$y_{om}(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ sono già a posto $\boxed{\Delta > 0}$
- $\boxed{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}}$ $\lambda_1 = \sigma + i\omega$ $\lambda_2 = \sigma - i\omega$ $\boxed{\Delta < 0}$

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(\sigma + i\omega)x} = e^{\sigma x}(\cos\omega x + i \sin\omega x)$$

nella combinaz. lineare tra λ e $\bar{\lambda}$ le parti immaginarie si tolgono

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\sigma x}\cos\omega x \quad , \quad \tilde{y}_2(x) = e^{\sigma x}\sin\omega x$$

?

$$\Rightarrow y_{om}(x, c_1, c_2) = e^{\sigma x}(c_1\cos\omega x + c_2 \sin\omega x)$$

Es. 1

$$y'' + y' - 6y = 0$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -3$$

$$y_{om}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

(continua)

Es. 2

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{1} = -1 \pm 2i \qquad \sigma = -1 \quad \omega = 2$$

$$y_{om}(x, c_1, c_2) = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

- Se $\lambda_1 = \lambda_2$ perchè per $\chi(\lambda) = 0$ $\Delta = 0$ $\chi(\lambda) = \chi'(\lambda) = 0$

$\boxed{\Delta = 0}$ $y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = x e^{\lambda x}$

$$y_2'(x) = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(1 + \lambda$$

$$y''(x) = e^{\lambda x}(2\lambda + \lambda^2 x)$$

78) L

Avevamo avuto

$$y'' + y' - 6y = e^{2x}$$

$\mu = 2 \qquad \chi(\mu) = \chi(2) = 0$

$$\Longrightarrow \quad y_p(x) = \alpha x e^{2x}$$

$$y_p'(x) = \alpha e^{2x}(1 + 2x)$$

$$y_p''(x) = \alpha e^{2x}(2 + 2 + 4x)$$

$$\cancel{e^{2x}}(4\alpha + \cancel{4\alpha x} + \alpha + \cancel{2\alpha x} - \cancel{6\alpha x}) = \cancel{e^{2x}}\,1$$

$$5\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\Longrightarrow y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$$

Se poi avessimo:

$$y'' + y' - 6y = e^{x} + e^{2x}$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

STUDIO I 2 y_p SEPARATI E POI LI SOMMO ENTRAMBI A $y_{om}(x, c_1, c_2)$

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{x}$$

$\rightarrow$

$$g(x) = P_n(x) \cdot e^{0x}$$

$\lambda = 0$ ~~sostit.~~

$$y_p(x) = x^m q_n(x)$$

$\chi(0) = 0 \qquad m = 1$

$\chi(0) \neq 0 \qquad m = 0$

Per es. (riprendo l'es 2)

$$y'' + 2y' + 5y = x^2 + 1$$

$\chi(0) \neq 0$

$$y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$y_p'(x) = 2\alpha x + \beta$$

$$y_p''(x) = 2\alpha$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 159 di 340

IN REALTÀ QST METODO VA BENE ANCHE PER EQ. DIFF. DI GRADO > 2, CAMBIA SOLO L'OMOGENEA & I CALCOLI SONO + COMPLICATI

BASTA CHE i coefficienti siano COSTANTI

QUIZ

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x - x^2 + e^{-2x}}{\sin x + e^{-3x} + x^2}$

1
$+\infty$
$-\infty$
-1
0

$\frac{-x^2}{x^2} = -1$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 4x^3 + x\sin x}{\sin(3x^2) + x^2}$

$-\infty$
-4
0
$+\infty$
1

$\frac{-4x^3}{x^2} = -4x$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi x^2+1}{2x^2-1}\right)}{\log(\operatorname{arctg} x)}$

0
$\frac{2}{\log\pi}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{\log\pi}$
$\frac{1}{\log\pi - \log 2}$

$\frac{1}{\log\frac{\pi}{2}}$

4) $f(x) = e^{x\cos x}$

$\lim_{x\to\pi} \log(f^3(x)) =$

-3π
1
0
π
$\log 3\pi$

$\log e^{3x\cos x} = 3x\cos x$

-3π

5) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2} =$

0
$3e$
1
e^3
$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{3}}\right)^{\frac{x^2}{3}\cdot 3} = e^3$

1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x e^x + 4^x}{x^2 5^x + 4^x}$

0
$4/5$
1
$-\infty$
$+\infty$

$-\infty(+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{4^x\left(2x\left(\frac{e}{4}\right)^x+1\right)}{4^x\left(x^2\left(\frac{5}{4}\right)^x+1\right)} = \frac{-\infty}{1}$

82 L

3) f cont. in $x=0$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = -1 \Rightarrow$

$\boxed{\sqrt{5+f(0)} = 2}$ $\qquad f(0) = -1$

$\sqrt{5+f(0)} \in [-2, 0]$

$\sqrt{5+f(0)} \geq \sqrt{5}$

$\sqrt{5+f(x)}$ può non essere cont in $x=0$

nessun'altra risp.

4) $\lim_{x\to 4} f(x) \geq 0$, allora

$\exists$ I di $x=4$ / $f(x)\geq 0$ $\rightsquigarrow$ non dà info sul punto 4

$\exists$ " " $f(x)>0$

$f(4)\geq 0$

$f(4)>0$

nessun'altra

5) $x\to +\infty$ $\quad f = o(g)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \Rightarrow$

f limitata $\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = 0$

$f(x) \sim x\,g(x)$, $x\to+\infty$

f può tendere a $+\infty$ per $x\to+\infty$ $\qquad \frac{0}{0}$

f deve tendere a zero per $x\to+\infty$ $\qquad \frac{\infty}{0}$

$f(x) \sim \frac{g(x)}{x}$, $x\to+\infty$ $\qquad = \frac{1}{0}\cdot\infty = \infty$

1) $y=3x+2$, $y=5x+3$ as obl. dx di $f(x)$ e $g(x)$. Allora

$\lim_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)-x) = 5$ $\qquad f(x) = mx+q+o(1)$ $\quad x\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+g(x)}{x} = 8$

4- ~~$\lim_{x\to+\infty}$~~ $f(x)g(x) \sim x^2$, $x\to+\infty$

3- $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-g(x)) = 0$

$f(x)g(x)$ ha una succ. di zeri diverg. a $+\infty$

(84) L

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad b_n \geq 2 \ \forall n$

Allora

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$

$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n b_n$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

5) $a_n = b_n + (-1)^n \frac{\log n}{n} \quad - b_n$

$\rightarrow a_n - b_n$ conv

$a_n + b_n$ converge

$a_n + b_n$ è limitata

$a_n - b_n$ illimitata inf.

$a_n b_n$ è limitata

2) $a_n = 4^n + (-5)^n \qquad 5^n\Big(\underbrace{\left(\tfrac{4}{5}\right)^n}_{0} + (-1)^n\Big)$

a_n decresc

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

a_n tende a zero

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$\rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

4) $\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$

0

$+\infty$

$-\infty$

$\nexists$

$\rightarrow 1$

$\frac{n-n+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}$

∞^0

$e^{0 \log \infty}$

$e^{\frac{1}{2n^{1/2}}\log(n+1)} = e^0 = 1$

4) a_n non limitata inferiorm. Allora

Sì $\rightarrow \forall K>0 \ \exists \bar{n}\in\mathbb{N} : a_{\bar{n}} < -K$

NO! $\rightarrow \forall K>0 \ \exists \bar{n}\in\mathbb{N} : \forall n>\bar{n} \Rightarrow a_n < -K$ manca ...

$\exists K \cancel{<} 0 : a_n < -K \quad \forall n$

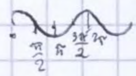
$\exists K>0 : a_n < -K \quad \forall n$

$\forall K>0 \ \forall n\in\mathbb{N} \ a_n < -K$

$\rightarrow a_n$ potrebbe oscillare tra $-\infty$ e $+\infty$?

(o tra $-\infty$ e 0)

1) $a_n = n\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$



a_n limitata

$a_n \neq 0 \ \forall n$

$\rightarrow a_n$ non ha limite

a_n monotona

a_n tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-2}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} \cdot \frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}$

$\rightarrow -2$

$\nexists$

2

$+\infty$

1

$\frac{(n-2-n-2)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{(n+1-n+1)(\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2})}$

$\frac{-4\cdot 2n^{\frac{1}{2}}}{2\cdot 2n^{\frac{1}{2}}}$

5) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}(\sqrt{\ }+\sqrt{\ })}$

$+\infty$

0

$\rightarrow 1$

$\nexists$

e

$\frac{n+3-n+5}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} \quad \frac{8^4}{2n^{\frac{1}{2}}}$

0

$e^{\frac{4}{n^{1/2}}(-\log n)} = e$

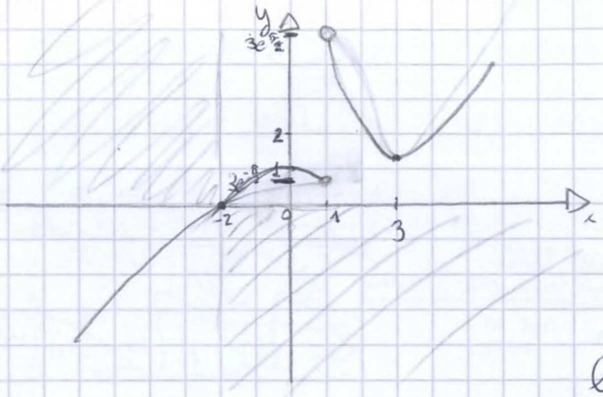
4) (a) Enuncia e dimostra Lagrange (8 pti)

(b) $f(x) = x(x+1)|x+1| + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ in $[-3, 0]$

Soddisfa le ipotesi di Lagrange?

Se sì trovare i pti di Lagrange

1)



$\lim_{x \to +\infty} (x+2)\, e^{\arctan \frac{1}{1-x}} - x =$

$- \frac{\pi}{2} \leq \arctan \frac{1}{1-x} \leq \frac{\pi}{2}$

$e^{-\frac{\pi}{2}} < e^{\arctan \frac{1}{1-x}} < e^{\frac{\pi}{2}}$

$(x+2)\, e^{-\frac{\pi}{2}} - x < e^{\arctan \frac{1}{1-x}}(x-2) - x < e^{\frac{\pi}{2}}(x-2) - x$

$x \to +\infty$

$x e^{-\frac{\pi}{2}} + 2e^{-\frac{\pi}{2}} - x$

$x(e^{-\frac{\pi}{2}} - 1) + 2e^{-\frac{\pi}{2}}$

2)

(a) $f(x) - g(x) = x + ax^2 + o(x^3) - x^2 - \log(1 + x + x^3) \quad (x \to 0) =$

$= x + ax^2 - x^2 - \left(x + x^3 - \frac{(x+x^3)^2}{2} + \frac{(x+x^3)^3}{3}\right) + o(x^3) \quad (x \to 0) =$

$= \cancel{x} + ax^2 - \frac{x^2}{2} \cancel{- x} - x^3 \cancel{+ \frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (x \to 0) =$

$= x^2\left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$

(88) Se $a \neq \frac{1}{2}$ $\quad p(x) = x^2\left(a - \frac{1}{2}\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 167 di 340

4) ⓐ f ~~cont~~ ~~definita in~~ cont $[a,b]$, deriv (a,b)

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b): \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Dim:

Pongo $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

cont $[a,b]$, deriv (a,b)

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) \\ g(b) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(b)} + f(a) = g(a) \end{array}\right] \Rightarrow \underline{\text{Rolle}}$$

$$\exists c \in (a,b): g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b): f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ⓑ

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1)^2 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & x \geq -1 \\ -x(x+1)^2 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & x < -1 \end{cases}$$

$f(-1^+) = f(-1) = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$

$f(-1)^- = 0 \quad \rightarrow \underline{\text{cont}}$

$x(x^2+2x+1) + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = x^3 + 2x^2 + x + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \quad x \geq -1$

$-\cancel{x^3} - \cancel{2x^2} - x + \cancel{x^3} + \cancel{2x^2} + 2x + 1 = x + 1 \quad x < 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 8x + 3 & x > -1 \\ 1 & x < -1 \end{cases}$$

$f(-1^+) = +6 - 8 + 3 = 1$

$f(-1^-) = 1$

$\Rightarrow f(x)$ deriv in $[-3, 0]$, cont $[-3, 0]$

$\Rightarrow$ Lagrange

$f(0) = 1 \qquad f(-3) = -2$

90 L

5) $x \to 0$ $f \sim x^2 \cos x$ $g \sim e^x - 1$ allora

$\lim_{x \to 0} \left|\frac{f}{g}\right| = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\frac{e^x - 1}{x} \cdot x} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{f}{g} = \frac{1}{2}$

→ $\lim_{x \to 0} \frac{f}{g} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{f}{g} = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{f}{g} = 1$

6) $\lim_{x \to +\infty} (3x^3 - 4x^2) \sin x$

$-\infty$

$+\infty$

0

sia $+\infty$ che $-\infty$

→ $\nexists$

7) a_n limitata inf.

$\forall k > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \Rightarrow a_n \geq k$

$\forall n, \ a_n \geq 0$

$\exists k < 0 : \forall n, \ a_n < k$

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \Rightarrow a_n \geq 0$

→ $\exists k < 0 : \forall n, \ a_n > k$

8) $f(x) = (3\cos x)^{(4\cos x)}$ $\quad f'(0) =$

$e^{4\cos x \log(3\cos x)}$

1

→ 0

3/4

$\log 3/4$

-1

$f' = (3\cos x)^{4\cos x}\left(-4\sin x \log(3\cos x) + \frac{4\cos x}{3\cos x} 3(-\sin x)\right)$

9) $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 0 \\ 2\sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$ $\quad f(0) = 0 \quad f(0^+) = 0$

$\in C^1$ $\qquad f' = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 0 \end{cases}$

deriv. in 0

disc. in 0

→ cont ma non deriv in 0

nessun'altra

10) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$

$h(x) = \frac{1}{f(x)}$ allora

$h'(x) = -1 \frac{1}{(f(x))^2} f'(x)$

→ $h'(0) = -3/16$

$= -4/3$

$= 1/3$

$= 3/16$

$= -1/3$

$h'(0) = -\frac{3}{16}$

11) Maclaurin $n = 6$ $\quad f = e^{\cos x^3}$

$1 + \frac{1}{2}x^6$ $\qquad e^{1 - \frac{1}{2}x^6}$

→ $e - \frac{e}{2}x^6$ $\qquad e \, e^{-\frac{1}{2}x^6}$

$e\left(1 - \frac{1}{2}x^6\right)$

$2 + \frac{1}{2}x^6$

$1 - \frac{e}{2}x^6$

$1 + \frac{1}{6}x^6$

12) $f = 4 - 3(x-2)^6 + o((x-2)^6)$ $x \to 2$. f ha un:

flesso in $x = 2$

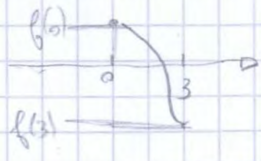
max in $x = 0$

min in $x = 0$

min in $x = 2$

→ max in $x = 2$

13) $f: [0,3] \to \mathbb{R}$ cont e decresc. Allora



$f([0,3]) = [f(0), f(3)]$

$f((0,3)) = (f(3), f(0))$

$f((0,3]) = (f(3), f(0)]$

GIUSTA → $f([0,3]) = [f(3), f(0)]$

nessun'altra

92 L

Eq. diff. 2° grado lineari

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

$$y(x, c_1, c_2) = y_{om}(x, c_1, c_2) + y_p(x)$$

$$\int_a^x f'(x)\,dx = f(x) - f(a)$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)\,dx$$

- $y_{om}(x, c_1, c_2)$

$y = e^{\lambda x}$

$\chi(\lambda) = 0$

$\Delta > 0 \quad y_{om}(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ $\quad f' \geq 0$

$\Delta = 0 \quad y_{om}(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

$\Delta < 0 \quad y_{om}(x, c_1, c_2) = e^{\sigma x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$

$\lambda = \sigma + i\omega$

- $y_p(x)$

→ $g(x) = e^{\mu x}$ $\quad$ * 2 se $\chi(\lambda)$ ha $\Delta = 0$

$y_p(x) = \alpha x^m e^{\mu x}$

$\chi(\mu) = 0 \quad m = 1^*$

$\chi(\mu) \neq 0 \quad m = 0$

→ $g(x) = p_n(x) \cdot e^{0x}$

$y_p(x) = x^m q_n(x)$

$\chi(0) = 0 \quad m = 1^*$

$\chi(0) \neq 0 \quad m \neq 0$

→ $g(x) = \sin \theta x \cdot e^{0x}$

$y_p(x) = x^m(\alpha \sin \theta x + \beta \cos \theta x)$

$\chi(0 + i\theta) = 0 \quad m = 1^*$

$\chi(0 + i\theta) \neq 0 \quad m = 0$

→ $g(x) = p_n(x) e^{\mu x}$

$y_p(x) = x^m q_n(x) e^{\mu x}$

$\chi(\mu) = 0 \quad m = 1^*$

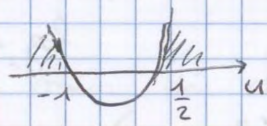
$\chi(\mu) \neq 0 \quad m = 0$

$$\cos x - 2(1-\cos^2 x) + 1 > 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0 \qquad \boxed{u = \cos x}$$

$$2u^2 + u - 1 > 0$$

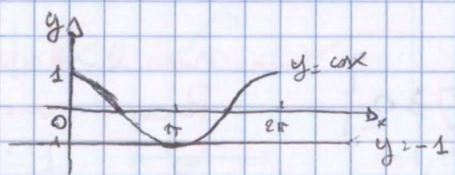
$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\{u < -1\} \cup \left\{u > \frac{1}{2}\right\}$$

$$\underbrace{\{\cos x < -1\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{\cos x > \frac{1}{2}\right\}}_{B}$$

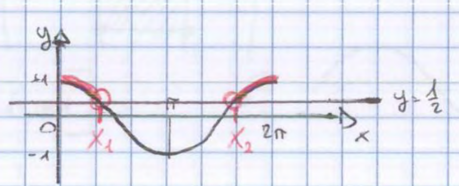
(A) $\cos x < -1$



Essendo cosx periodica, la studio in un periodo che poi estendo.

$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ o Soluz $\emptyset$

(B) $\cos x > \frac{1}{2}$



in un periodo $[0, x_1) \cup (x_2, 2\pi]$

$$\cos x = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{\pi}{3} = x_1 \\ \frac{5\pi}{3} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \text{Soluz } \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right] + 2k\pi$$

FUNZIONI PARI, ~~e/o~~ DISPARI o né l'una né l'altra.

es. 1° $f(x) = |-x^2 + x^4|$ $\qquad$ dom $f = \mathbb{R}$

$$f(-x) = |-(-x)^2 + (-x)^4| = |-x^2 + x^4| = f(x)$$

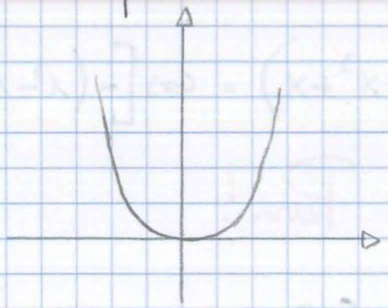
È pari!

NB
- $\cos x = \cos(-x)$
- $\sin x = -\sin(-x)$

4

x^n

pari

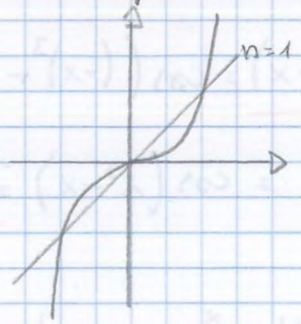


$\text{dom} = \mathbb{R}$

$\text{Im} = [0, +\infty)$

funz. pari

dispari



$\text{dom} = \mathbb{R}$

$\text{Im} = \mathbb{R}$

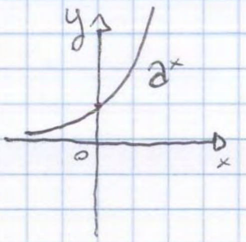
funz. dispari

FUNZIONI INIETTIVE E SURIETTIVE

Nelle funzioni di analisi matematica l'insieme di arrivo è $\mathbb{R}$ (salvo diversa indicaz.)

$\Rightarrow$ UNA FUNZ. è SURIETTIVA SE $\text{Im} f = \mathbb{R}$

Es:



$a > 1$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$\text{Im} f = (0, +\infty) \Rightarrow$ <u>NON</u> suriettiva in $\mathbb{R}$

né pari, né dispari

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \text{iniettiva} \\ \rightarrow \text{suriettiva in Im} f \end{array}\right\}$ biiettiva, ovvero INVERTIBILE

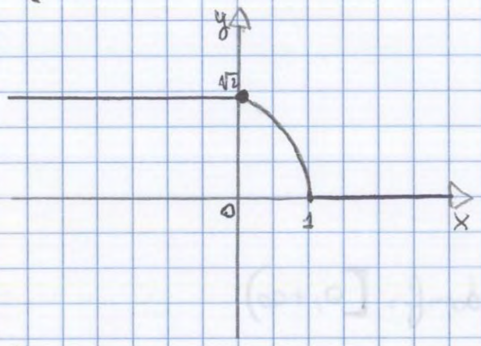
$\Downarrow$

$\exists$ funz. inversa

$f^{-1}(x) = \log_a x$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 177 di 340

$$\begin{cases} x \geq 1 & f(x) = 0 \\ x \in [0,1) & f(x) = \sqrt{2-2x} \\ x < 0 & f(x) = \sqrt{2} \end{cases}$$



Per disegnare $\sqrt{2-2x}$
so che ha una forma a radice
ed è traslata

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im} f = [0, \sqrt{2}] \Rightarrow$ non suriettiva

Né pari né dispari

NON è iniettiva $\Rightarrow$ NON INVERTIBILE

Determinare un possibile intervallo di invertibilità:

a) $x \in [0,2]$? NO!

b) $x \in [-1,1]$? NO!

c) $x \in [0, \frac{1}{2}]$? Sì, ma non è l'intervallo più grande.

d) $x \in [0,1]$ OK!

$\Rightarrow$ in d) ho $x \in [0,1]$
e $y \in [0, \sqrt{2}]$

Posso qui invertirla!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 179 di 340

$f \circ f^{-1} = \text{"}x\text{"}$

tipo se ho $f(x) = \sqrt{x}$
e $g(x) = x^2$

$f \circ g = \sqrt{x^2} = |x|$

$g \circ f = (\sqrt{x})^2 = x$, con $x \geq 0$

Infatti abbiamo invertito solo un pezzo di parabola.

Considero: $f_1 = e^{\log x}$

$f_2 = \log(e^x)$

$f_1: \begin{cases} \text{dom} = (0, +\infty) \\ \text{Im} \subseteq \text{Im Esp.} = (0, +\infty) \end{cases}$

comanda il più esterno!

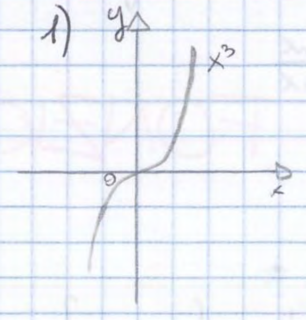
$y = x$ dimostrato ✓

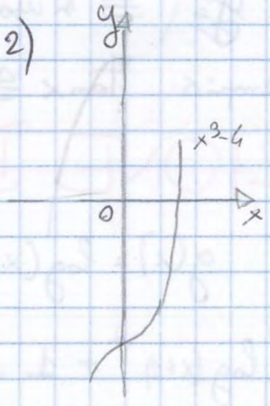
$f_2: \begin{cases} \text{dom} = \mathbb{R} \\ \text{Im} \subseteq \text{Im} \log = \mathbb{R} \end{cases}$

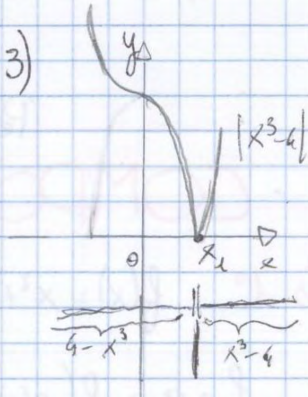
$\log e^x = x \log e = x$

GRAFICI

$f(x) = |x^3 - 4|$

1) 

2) 

3) 

x_1; $x^3 - 4 = 0$

$x = \sqrt[3]{4}$

10) L

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B = B(\varepsilon) > 0 : \forall x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

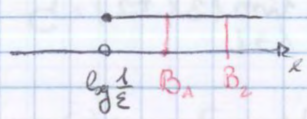
Es 1°

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

$|e^{-x} - 0| < \varepsilon$ voglio arrivare a $x > B$

$|e^{-x}| < \varepsilon$ → SEMPRE > 0 ! → $\log e^{-x} < \log \varepsilon$ $\quad -x < \log \varepsilon$

$\Rightarrow x > -\log \varepsilon = \log \frac{1}{\varepsilon}$



$$\boxed{B \geq \log \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B = B(\varepsilon) > 0 : \forall x < -B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Es 1°

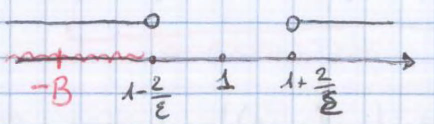
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x-1} = -2$$

$$\left| -\frac{2x}{x-1} - (-2) \right| < \varepsilon \longrightarrow \left| \frac{\cancel{-2x} \cancel{+2x} - 2}{x-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-2}{x-1} \right| < \varepsilon \rightarrow \frac{|-2|}{|x-1|} < \varepsilon \rightarrow \frac{2}{|x-1|} < \varepsilon$$

Ricorda: se $A, B > 0$ allora $A < B \Longleftrightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{B}$

$$\frac{|x-1|}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow |x-1| > \frac{2}{\varepsilon}$$



$$-B = 1 - \frac{2}{\varepsilon} \Longrightarrow B = \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

18

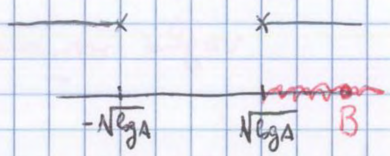
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\forall A > 0, \exists B = B(A) > 0 : \forall x > B \Rightarrow f(x) > A$

Es 1°

$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2} = +\infty$

$\log e^{x^2} > \log A \qquad x^2 > \log A$



• se $A > 1$ $\quad B \geq \sqrt{\log A}$ ← NON SCORDARE LA RADICE!

• se $A < 1$ $\quad \log A < 0 \quad x^2 > 0$ s.v.

$\forall B \geq 0$

Limiti & domini

$y = \sqrt{x} \qquad \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

DEVO SEMPRE SCRIVERE $x \in \text{dom} f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$

Posso usare mezzo intorno

$(x_0, x_0 + \delta)$ o $(x_0 - \delta, x_0)$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Occhio:

$\cancel{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty}$

→ QUESTO LIMITE IN SENSO STRETTO NON ESISTE

Es 1°

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \forall A > 0, \exists \delta = \delta(A) > 0 : \forall x \in (0, 0+\delta) \Rightarrow \frac{1}{x} > A$

20 L

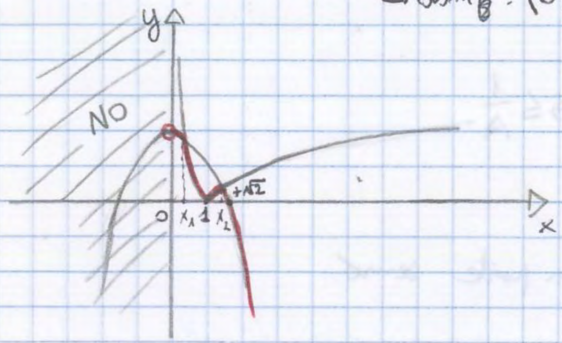
FUNZIONI min e max

Es 1°

$f(x) = \min(|\log x|, 2-x^2)$

$\hookrightarrow \text{dom} f : (0, +\infty)$

dom f è il più piccolo dei 2 domini



Es 2°

$g(x) = \max(x-1, x^3)$

$\text{dom} g = \mathbb{R}$

Quiz:

$f(x) = \arcsin\sqrt{x-1} \longrightarrow \text{dom} f : \begin{cases} x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \geq -1 \rightarrow \forall x \text{ se } x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 1 \rightarrow x-1 \leq 1 \rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{dom} f = [1,2]$

dom f =
a) $[0, +\infty)$
b) $\mathbb{R}$
c) $(1,2)$
d) $[1,2]$
e) $(3,4)$

Potevo ragionare per esclusione

a - $x=0$ $\sqrt{-1}$ NO!

b - $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{ammissibile}}$ $\sqrt{-1}$ NO!

c - $x=1$ arcsin 0 esiste $\Rightarrow$ NO!

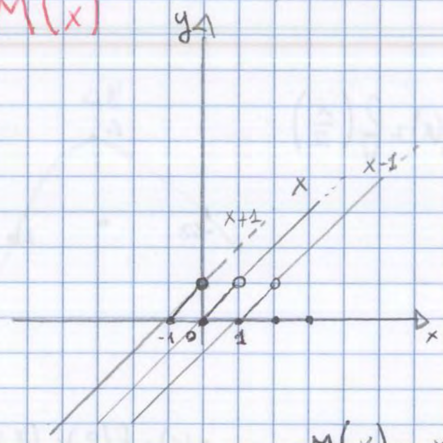
e - ~~arcsin $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}>1$~~ $\Rightarrow$ se $x=1$ va bene $\Rightarrow$ NO!

$A = \{x \in \mathbb{R} : x = n^2 - 3n + 1, n \in \mathbb{N}\}$

a) $\max A = +\infty$
b) $\max A = +1$
c) $\max A = -1$
d) $\nexists \min A$
e) $\min A = -1$

12) L

$f(x) = M(x)$



$dom = \mathbb{R}$

$Im = [0, 1)$

NÉ PARI NÉ DISPARI

NON INIETTIVA

$M(x) = x - [x]$

CALCOLO DI LIMITI

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x+100}{1-100x^3+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1-\frac{2x}{x^3}+\frac{100}{x^3}\right)}{-100\cancel{x^3}\left(\frac{1}{-100x^3}+1+\frac{x^2}{-100x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{100}{x^3}}{-100\left(\frac{1}{-100x^3}+1+\frac{1}{-100x}\right)} =$$

A OGNI PASSAGGIO ALGEBRICO SOSTITUISCO e vedo se va bene.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-100} = -\frac{1}{100}$$

2) $$\lim_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3-3x^2-18x-9} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Se $\underbrace{N(x_0)}_{\text{polinomio numeratore}} = 0$ allora $N(x) = (x-x_0)\underbrace{N_1(x)}_{\text{grado ridotto}}$

$\Rightarrow N_1(x) = \frac{N(x)}{x-x_0}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}N_1(x)}{\cancel{(x-x_0)}D_1(x)}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3+0x^2-3x-2 & x+1 \\
x^3+x^2 & x^2-x-2 \\
\hline
// \quad -x^2-3x-2 & \\
\quad -x^2-x & \\
\hline
\quad // \quad -2x-2 & \\
\quad\quad -2x-2 & \\
\hline
\quad\quad // \quad // &
\end{array}$$

resto = zero

GIUSTO!

24) L

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+x}\right)\frac{3x+\sqrt{9x^2+x}}{3x+\sqrt{9x^2+x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{9x^2}-\cancel{9x^2}-x}{3x+\sqrt{9x^2+x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{3x+\sqrt{9x^2\left(1+\frac{x}{9x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{3x+\sqrt{9x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{9x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{3x+|3x|\sqrt{1+\frac{1}{9x}}} =$$

$\xrightarrow{x\to+\infty}$ $\Rightarrow |3x| = 3x$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{x}}{3\cancel{x}+3\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{9x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{3+3\sqrt{1+\frac{1}{9x}}} = -\frac{1}{6}$$

6) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+2}-\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} = (+\infty-\infty)$$

voglio renderlo in $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$$

$$\Rightarrow A-B = \frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2-(x^3+2x^2+1)}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{x^3+2}\right)^2}_{x^2(\to 1)}+\underbrace{\sqrt[3]{x^3+2}\cdot\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}_{x\cdot x}+\underbrace{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\right)^2}_{x^2}} =$$

$(x\sqrt[3]{1})^2 \longrightarrow x^2(\to 1)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+1}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = -\frac{2}{3}$$

7) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ allora $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$

8) $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = 1$$

perché $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x = 0$

9) $$\lim_{x\to+1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = 1$$

perché $\lim\limits_{x\to+1}(x^2-1) = 0$

10) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

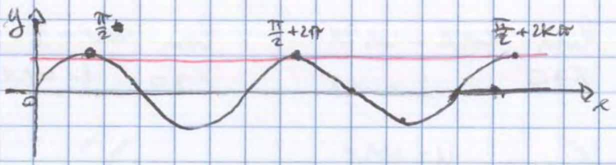
$u = x-\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x\to\frac{\pi}{2}$ $\quad u\to0$

$\hookrightarrow x = u+\frac{\pi}{2}$

26 L

- TEOREMA DI SOSTITUZ: se ho una corrisp. biunivoca non cambio il limite
- TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE.

→ Pongo $x = \underbrace{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}_{\text{Retta} \Rightarrow \text{biiettiva ok!}}$ $k \in \mathbb{Z}$



$x \to +\infty \Rightarrow k = +\infty$

$$\lim_{k \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \boxed{1}$$

→ Se pongo $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x \to +\infty$ $k = +\infty$

$$\lim_{k \to +\infty} \sin(\pi + 2k\pi) = \boxed{0}$$

HO 2 RISULTATI DIVERSI!

$\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x$

~~Se pongo $x = \frac{3}{2}\pi$~~

1) $\lim_{x \to +\infty} x(2 + \sin 3x)$ $(\sin \infty)$

TEOREMA DEL DOPPIO CONFRONTO.

$$-1 \leq \sin 3x \leq 1$$

$$2 - 1 \leq 2 + \sin 3x \leq 2 + 1$$

x è > 0 $\Rightarrow$ $x \cdot 1 \leq \underbrace{x(2 + \sin 3x)}_{\boxed{\text{x il doppio confronto}}} \leq 3x$

$x \to +\infty$: $x \cdot 1 \to +\infty$, $3x \to +\infty$, $x(2+\sin 3x) \to +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x(2 + \sin 3x) = +\infty$$

2) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} + \cos\sqrt{2x}\right) x^3$

$$-1 \leq \cos\sqrt{2}x \leq 1$$

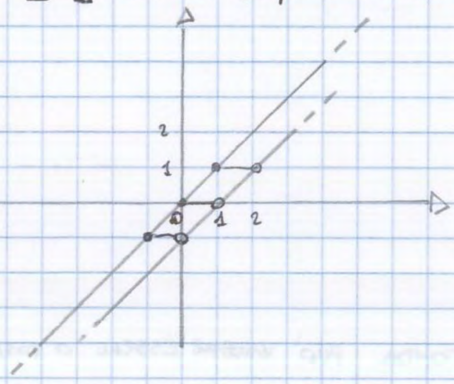
$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \cos\sqrt{2}x \leq \frac{3}{2}$$

28) L

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{[x]}{x}$

RICORDA: $x = [x] + M(x)$

CON $[x]$ e $M(x)$ DEVO USARE IL DOPPIO CONFRONTO!



$x - 1 < [x] \leq x$

$\Rightarrow_{x \to 0}$ $\frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} < \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

$x \to +\infty$: $\frac{x-1}{x} \to 1$, $\frac{[x]}{x} \Downarrow 1$, $\frac{x}{x} \to 1$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{x - tg x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

PROBLEMA: POLINOMI + TRIGONOMETRICHE

Occhio a non fare questo errore.

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} - \frac{tg x}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{tg x}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \boxed{\frac{tg x}{x}} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right)$

$\frac{tg x}{x} \to 1$

NO! Non si può sostituire lungo i calcoli, solo alla fine!

METODO CORRETTO:

LA FUNZ. È DISPARI $\Rightarrow f(x) = -f(-x)$

$f(0^+) = -f(-0^+) = -f(0^-)$

30 L

Perciò: → nelle esponenziali domina la base + grande

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\boxed{3^n-4^n}}{4^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{4^n}\left(\frac{3^n}{4^n}-1\right)}{\cancel{4^n}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{1+\frac{1}{4^n}} = \frac{0-1}{1+0} = -1$$

8) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4n+2}{2n+3}\right)^n =$

$$\frac{4n+2}{2n+3} = \frac{4n+2+6-6}{2n+3} = \frac{4n+6}{2n+3} - \frac{4}{2n+3} = 2 - \frac{4}{2n+3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2 - \underbrace{\frac{4}{2n+3}}_{\text{tende a } 0}\right)^n = \left(2^{+\infty}\right) = +\infty$$

9) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+2}\right)^{\sqrt{n^2+2}}$

$$\frac{n^2-n+1}{n^2+n+2} = \dots = 1 - \frac{2n+1}{n^2+n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{2n+1}{n^2+n+2}}_{\text{tende a zero}}\right)^{\sqrt{n^2+2}} = \left(1^{\infty}\right) \text{ INDETERMINATA!}$$

Ma so che $\frac{A}{B} = \frac{1}{\frac{B}{A}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{n^2+n+2}{2n+1}}\right)^{\sqrt{n^2+2}}$$

Inoltre $A^B = A^{\frac{B\cdot C}{C}} = \left(A^C\right)^{\frac{B}{C}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{-1}{\frac{n^2+n+2}{2n+1}}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2n+1}}}_{\text{tende a } e^{-1}}\right)^{\frac{(2n+1)\sqrt{n^2+2}}{n^2+n+2}} =$$

So che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+2}{2n+1} = +\infty$ è del tipo $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{-1}{x}\right)^x = e^{-1}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)\sqrt{n^2+2}}{n^2+n+2} = \frac{(2n+1)\,|n|\,\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{n^2+n+1} = \dots = 2$$

$\Rightarrow$ RISULTATO: $\left(e^{-1}\right)^2 = e^{-2}$

12) L

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $3^\pi = e^{\pi \log 3}$

DIVERSO È IL CASO $a_n = (-1)^n$, per cui va bene $\forall n > 0$

NON CI SONO I FRAZIONARI CHE DISTURBANO

n	1	2	3	4	5
a_n	-1	$+1$	-1	$+1$	-1

PERÒ $\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$

Tra l'altro

$$\left.\begin{aligned} (-1)^n &= \cos(\pi n) \\ 0 &= \sin(\pi n) \end{aligned}\right| n \in \mathbb{Z}$$

Dim x casa

Es:

1) $\lim_{n\to+\infty} \left(2+(-1)^n\right) n$

$-1 \le (-1)^n \le 1 \qquad 1 \le 2+(-1)^n \le 3$

$n \le \left(2+(-1)^n\right) n \le 3n$

$n\to+\infty$: $n \to +\infty \leftarrow 3n$, quindi $\left(2+(-1)^n\right) n \to +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n\left(2+(-1)^n\right) = +\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n} = 0$ limitata su ∞

3) $k!$ RICORDA: $1! \triangleq 1$

$0! \triangleq 1$

$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{3} \frac{6}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{6}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{n^3} \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = 1$$

34) L

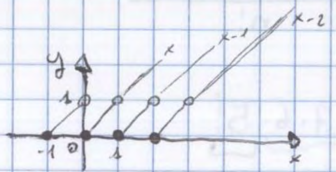
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 199 di 340

Dirichlet

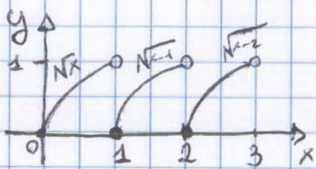
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

TRA 2 IRRAZIONALI CI SONO UN SACCO DI IRRAZIONALI E TANTI RAZIONALI (TRA DI ESSI)

1) $f(x) = \sqrt{M(x)}$



$\Rightarrow$



$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$\text{Im} f = [0, 1)$

NON INIETTIVA

DISCONTINUA in $\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned} f(1^-) &= 1 \\ f(1) &= 0 \end{aligned}\right] \text{ DISCONTINUITÀ SALTO}$$

$f(1^+) = 0$

2) $f(x) = \left[\frac{1}{1+x^2}\right]$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

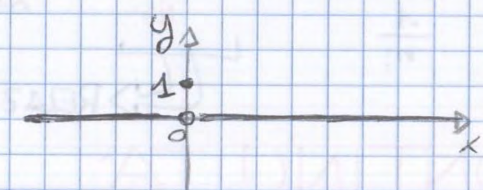
f È PARI

$\text{Im} f \subseteq \text{Im}[x] = \mathbb{Z}$

$$\underbrace{0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1}$$

$\rightarrow$ verifica: $\cancel{1} \leq \cancel{1} + x^2 \quad x^2 \geq 0 \begin{cases} = & x = 0 \\ > & x \neq 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ (0,1) & x \neq 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow \text{Im} f = \{0, 1\}$

DISCONTINUA IN $x = 0$

(salto)

$$\left.\begin{aligned} f(0^-) &= 0 \\ f(0^+) &= 0 \end{aligned}\right] \text{ UGUALI} \Rightarrow \text{DISC. ELIMINABILE}$$

$f(0) = 1$

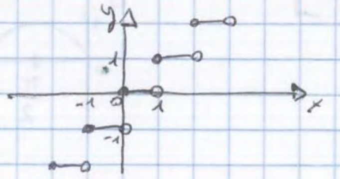
6) $f(x) = x\underbrace{(-1)^{[x]}}$

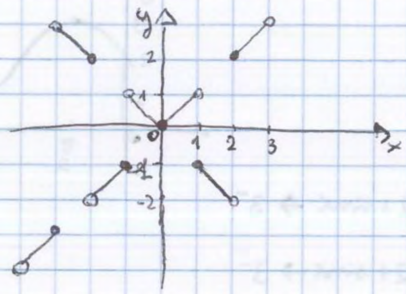
f ha senso perché all'esponente di (-1) ho un intero

$x \in [0,1)$ $[x] = 0$ $f(x) = x$

$x \in [1,2)$ $[x] = 1$ $f(x) = -x$

$x \in [2,3)$ $[x] = 2$ $f(x) = x$





ES. DI FRATTALE

Discontinua in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$

↳ salto non eliminabile

$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R} \setminus \{(1,2) \cup (-2,-1)$?

↳ PENSACI

---

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{x^2}{1-\cos x}}_{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x \cdot x}}_{1} \right) = 2$

FORME INDETERMINATE

$\left(\frac{0}{0}\right)$ $x \to x_0$ $f, g \to 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \cdot \frac{1}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$\Rightarrow$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ e $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ hanno la stessa algebra!

$$(0 \cdot \infty) = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} \cdot 0 = \frac{1}{0} \cdot 0 = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$\Rightarrow$ $(0 \cdot \infty)$ può essere ricondotta a $\left(\frac{0}{0}\right)$

con $f \cdot g = \frac{1}{\frac{1}{f}} \cdot g$

38) L

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 203 di 340

Sempre x qst di solito non uniamo $\sin(x_1) > \sin(x_2)$

INOLTRE SE:

$$f(x) \begin{cases} \text{CONTINUA (o somma di continue)} \\ \text{STRETT. CRESCENTE (o somma di monot. strett. crescenti)} \end{cases}$$ [non la differenza!]

$\Rightarrow f(x)$ è INIETTIVA!

Es: $f(x) = e^{2x} + e^x = \underbrace{e^2 \cdot e^x}_{\text{MONOT. STR. CRESC. continua}} + \underbrace{e^x}_{\text{MONOT. STR. CRESC. continua}}$

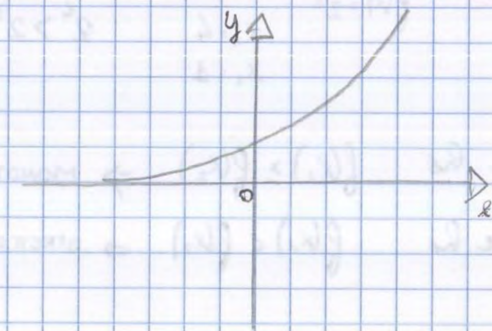
$\Rightarrow$ è INVERTIBILE!

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ → NON TEMERE 0^+ o 0^-! SONO INTORNI!

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\text{Im} f = (0, +\infty)$



Altro: $f(x) = 4^x - 2^x$

CONTINUA? SI!

$x_1 = -1$ $\quad f(x_1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} = -\frac{4}{16}$

$x_2 = -2$ $\quad x_1 > x_2$ $\quad f(x_2) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{16}$ $\quad f(x_1) < f(x_2)$

$\Rightarrow$ NON CRESCENTE!

LANDAU

$\boxed{x \to x_0}$ $\quad f, g \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{0}{0} = \begin{cases} 0 \text{ (sono arrivato a } \frac{0}{cost}\text{) la f va a zero con + forza} & f = o(g), x \to \\ 1 \text{ stessa rapidità} & f \sim g \\ \pm\infty \left(\frac{cost}{0}\right), g \text{ va a zero + rapidamente} & g = o(f) \end{cases}$$

④L

Se ho $x \to 0$ $f(x) \to 0$ (infinitesima)

VOGLIO LA PARTE PRINCIPALE, quella FORMA POLINOMIALE ~~che tende per f(x) per x~~ $p(x) = Kx^n$

tale che $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{p(x)} = 1$

$f \sim p, \ x \to 0$

Es. $f(x) = 1 - \cos 2x$

$x \to 0$ $f(x) \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{Kx^n} = 1$ $\qquad \cos z \sim 1 - \frac{z^2}{2} \ (z \to 0)$

$z = 2x \quad x \to 0 \quad z \to 0$

$\cos 2x \sim 1 - \frac{(2x)^2}{2}, \ x \to 0$

$\cos 2x \sim 1 - 2x^2, \ x \to 0$

$1 - \cos 2x \sim + 2x^2, \ x \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = 1$

$2x^2 \to p(x)$, anch'essa infinitesima

$\to$ 2 è L'ORDINE DI INFINITESIMO, sempre > 0

Ancora:

$f(x) = e^{5x} - 1$

$p(x) = Kx^n$

$e^{5x} - 1 = (e^5)^x - 1 \sim (\log e^5)x, \ x \to 0$

$\Rightarrow$ $e^{5x} - 1 \sim \boxed{5x}, \ x \to 0$

$p(x)$

ORD. DI INFINITESIMO $= 1$

Ancora: $f(x) = \sqrt{10 - 4x^2} - \sqrt{10}, \ x \to 0$ $\qquad f \to 0$

$(1+z)^n \sim 1 + nz, \ z \to 0$

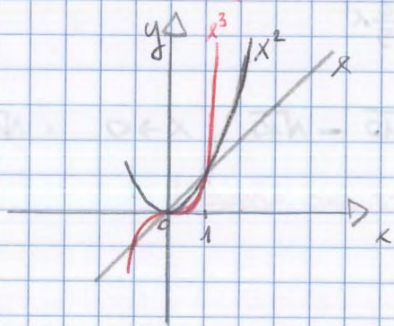
IN GENERALE

$P(x)$ è tale che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{P(x)} = 1$

GLI o PICCOLI

- $\sin x = x + o(x)$, $x \to 0$

$o(x)$ → ERRORE TRASCURABILE RISPETTO A X



in $[0,1]$: $x \gg x^2 \gg x^3$

$o(x)$ è un CONTENITORE di FUNZIONI TRASCURABILI RISP. A x

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$o(x^2)$ → vuol dire che dopo ci possono essere x^3, x^4, ecc.

1 → guarda che $P(x)$ di $\cos x$ è 1 per $x \to 0$, perché $\cos(0) = 1$

Es:

$f(x) = x \sin(x^2) \quad x \to 0$

$f \to 0$ è INFINITESIMA.

$P(x)$ deve creare nel $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{P(x)}$ una FORMA INDETERMINATA.

$$P(x) = k x^n \qquad n > 0$$

$$f(x) = x\left(x^2 + o(x^2)\right), x \to 0 \;=\; x^3 + \underbrace{x\,o(x^2)}, \; x \to 0 \;=\; x^3 + o(x^3), \; x \to 0$$

perché $x^2 \to 0$ se $x \to 0$

x^3 diventerà x^4

$x^{2,3}$ " $x^{3,5}$

$\Rightarrow o(x^3)$

x^3 → $P(x)$

ORD. INFINITESIMO = 3

44 L

γ: $f(x) = \underbrace{(x^2-4)}_{b\_}\underbrace{\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)}_{a\_} \qquad x \to 2$

a_ $1-\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 1-\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+2-2)\right) = 1-\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right) =$

$= 1-\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right)}_{z\to 0} \overset{x\to 2}{=\!=} 1-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right)^2+o\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2(x-2)^2\right)\right) =$

$= \cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{16}(x-2)^2+o\left((x-2)^2\right) = \frac{\pi^2}{32}(x-2)^2+o\left((x-2)^2\right)$

b_ $x^2-4 \to (x+2-2)^2-4 \ \ldots$

$\to = (x+2)(x-2)$, con $(x+2)\to 4$, $(x-2)\to 0$: PERCIÒ VALE $4(x-2)+o(x-2)$, $x\to 2$

$\Rightarrow \left(4(x-2)+o(x-2)\right)\left(\frac{\pi^2}{32}(x-2)^2+o\left((x-2)^2\right)\right) =$

$= \frac{\pi^2}{8}(x-2)^3+4(x-2)\,o\left((x-2)^2\right)+\frac{\pi^2}{32}(x-2)^2 o(x-2)+o(x-2)\cdot o\left((x-2)^2\right) =$

$= \frac{\pi^2}{8}(x-2)^3+\underbrace{4\,o\left((x-2)^3\right)}_{o((x-2)^3)}+\underbrace{\frac{\pi^2}{32}\,o\left((x-2)^3\right)}_{o((x-2)^3)}+o\left((x-2)^3\right) =$

$= \frac{\pi^2}{8}(x-2)^3+o\left((x-2)^3\right)$

SE $x\to+\infty$ e $f\to+\infty$

Per $x\to+\infty \qquad x^2 = o(x^3)$

LE CURVE DOPO $x=1$ + HANNO ESPONENTE GRANDE, + DOMINANO A $+\infty$

infatti per es $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3} = +\infty$

Es: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^3+6x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

RICORDA:

$(\log x)^n \ll x^m \ll a^x \ll x^x \quad (a>1)$

per $x\to+\infty$

48 L

OCCHIO:

$$\operatorname{tg} x = x + o(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x + o(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - o(x)}{x^2} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2}}$$

NON HO P(x) DEL NUM!

X ORA NON POSSO RISOLVERLO!

ANCORA:

$$\lim_{x\to 0} x^n (\log x)^q = (0 \cdot \infty)$$

caso + banale: $\underbrace{\lim_{x\to 0} x \log x}$

x de l'Hopital ho che vale $\boxed{\text{zero}}$!

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^n (\log x)^q = 0$$

Quiz:

i) $\lim_{x\to 0^+} \pi(\sin x) =$

~~a~~ 0

b 1

c $\nexists$

d -1

e $+3$

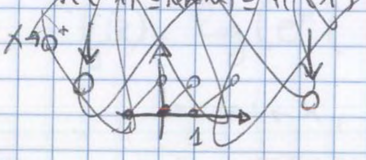
$-1 \le \sin x \le 1$

$\pi(-1) \le \pi(\sin x) \le \pi(1)$

$x \to 0^+$

$\sin(0^+) = 0^+$

$\pi(0^+) = 0$



ii) Im di $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x) =$

a $\mathbb{R}$

b $[0, +\infty)$

c $\{0\}$

~~d~~ $\{0, \pm 1\}$

e $\{\pm 1\}$

$\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im}(\operatorname{sgn})$

$0 \in \operatorname{Im}?$

$x = 1 \to \sin \pi x = 0$

$\operatorname{sgn} 0 = 0$

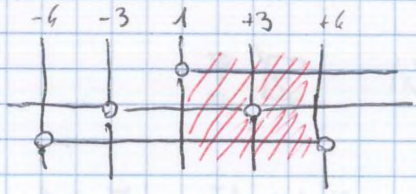
$1 \in \operatorname{Im}?$ $x = \frac{1}{2} \to \sin \pi x = 1$

$\operatorname{sgn} 1 = 1$

52 L

Es: 1) $f(x) = \log(x-1) + \frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ Basler Paolo?

$$\text{dom} f \begin{cases} x-1>0 & \to x>1 \\ x^2-9 \neq 0 & \to x \neq \pm 3 \\ 16-x^2>0 & \to -4<x<4 \end{cases}$$



$\Rightarrow \text{dom} f = \underbrace{(1,3) \cup (3,4)}$

↳ dom. non simm. risp. all'asse y

⇒ NÈ PARI NÈ DISPARI

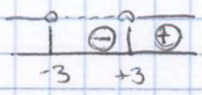
$x = 3$

BUCO DEL DOMINIO

$\lim_{x \to 3} f(x) \nexists$ ELEMENTO DI INDETERM.: $\frac{1}{x^2-9}$

$\cancel{\frac{1}{x^2-9}} > 0$

$x^2-9>0$



$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ $x=3^+$ AS VERT.

o $x=3$ AS. VERT. DX

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

$x=3^-$ AS. VERT.

$x=3$ AS. VERT. SX

⇒ $x=3$ AS. VERT.

(cioè completo, dx ∧ sx)

$x = 1$

$x = 4$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ $\lg(0^+) = -\infty$

$x = 1$ AS. VERT. DX

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \cancel{+}\infty$

$-\frac{1}{\sqrt{0^+}} = \cancel{+\infty} -\infty$

$x=4$ AS. VERT. SX

ASINTOTI ORIZZONTALI: Dx o Sx

$x \to +\infty$ $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} \nexists & \text{FERMATI: NO AS. ORIZZ., NO AS. OBL} \\ \ell \neq \pm\infty & y = \ell \text{ AS. ORIZZ., NO AS. OBL.} \\ \pm\infty & \text{NO AS. ORIZZ., FORSE AS. OBL.} \end{cases}$$

Questa funzione non ha dom f che si estende a $+\infty$ o a $-\infty$

⇒ NON CI SONO ASINTOTI OBLIQUI O ORIZZONTALI!

54 L

4) $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{x} + 4$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

NÈ PARI NÈ DISPARI

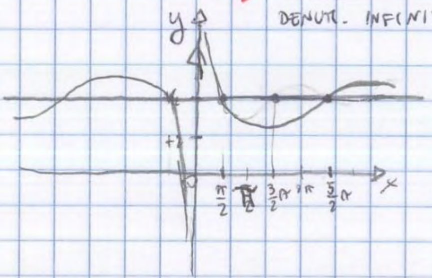
$x=0$ AS. VERT. x cono

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\sin x}{x} + 4 = 4 \Rightarrow y=4 \text{ AS. ORIZZ. SX \& DX}$$

$\dfrac{\text{NUMER. LIMITATO}}{\text{DENOM. INFINITO}} = 0$

$\Downarrow$

NO AS. OBL.



TAGARI HO INTERSEZIONI CON L'ASINTOTO:

$$\begin{cases} y=4 \\ y=\dfrac{1-\sin x}{x}+4 \end{cases} \qquad \cancel{4} = \frac{1-\sin x}{\cancel{x}} \cancel{+4} \quad x\neq 0$$

$1-\sin x = 0 \quad \sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

INFINITE INTERSEZIONI!

5) $f(x) = 2x + \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

$\mathrm{dom} f = [0, +\infty)$ NÈ PARI, NÈ DISPARI

$$\lim_{x\to+\infty} 2x + \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} = +\infty \quad \text{NO AS. ORIZZ.}$$

As. obl?

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(2x + \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{x(x^2+1)}\sqrt{x} = 2$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \cancel{2x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} - \cancel{2x} = 0$$

$\Rightarrow y = 2x$ AS. OBL. DX

56) L

DERIVABILITÀ

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Questa scrittura mi dice che:

1) $\exists f(x_0) \Rightarrow$ $x_0 \in \text{dom} f$

2) f deve essere continua in x_0

3) $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$

Cosa compromette la derivabilità?

- radici n-esime
- valori assoluti
- logaritmi

NOTE: CLASSI DI FUNZIONI

$f \in C^0(A)$ è continua in A

$f \in C^1(A)$ è continua e derivabile con derivata prima continua in A

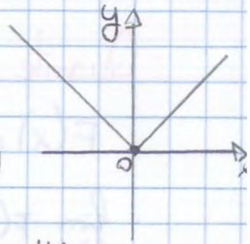
$f \in C^2(A)$ è continua, derivabile 2 volte con derivata prima e d. seconda continue in A

$f \in C^\infty(A) \Rightarrow$ FUNZIONI SMOOTH (lisce)

$$C^0(A) \supset C^1(A) \supset C^2(A) \supset \dots \supset C^\infty(A)$$

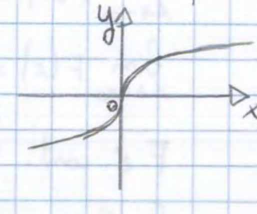
$$C^\infty(\mathbb{R}) \begin{cases} \text{POLINOMI} \\ \sin x / \cos x \\ e^x \end{cases}$$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

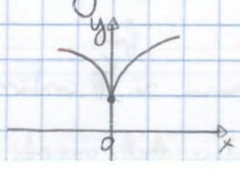


$f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ ma finite $\Rightarrow$ PUNTO ANGOLOSO $\quad y = |x|$ in zero

$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) \to \pm\infty$ $\Rightarrow$ FLESSO A tang. VERT $\quad y = \sqrt[3]{x}$ in zero



$f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ ma infinite $\to$ CUSPIDE



58

2)

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{d}{dx}\sin x\right)\cos x - \sin x\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ \underline{1 + \operatorname{tg}^2 x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x) = 2\operatorname{tg}^{2-1} x \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^3 x$$

3)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sh} x = \cosh x$$

4)

$$f(x) = \operatorname{sh}(x^7 + x)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^7 + x) \cdot \frac{d}{dz}\operatorname{sh} z \Big|_{z = x^7 + x} = (7x^6 + 1)\cosh(x^7 + x)$$

5)

$$f(x) = e^{x^2 + \log \sin x}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + \log \sin x)\, e^{x^2 + \log \sin x} = \left(2x + \frac{d}{dx}\sin x \cdot \frac{1}{\sin x}\right) e^{x^2 + \log \sin x} =$$

$$= \left(2x + \frac{\cos x}{\sin x}\right) e^{x^2 + \log \sin x}$$

6)

$$f(x) = (x+1)^{\sin \pi x} \triangleq e^{\sin \pi x \log(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sin \pi x \log(x+1)\right) \cdot e^{\sin \pi x \log(x+1)} =$$

$$= \left(\pi \cos \pi x \log(x+1) + \frac{\sin \pi x}{x+1}\right) e^{\sin \pi x \log(x+1)} =$$

$$= \left(\pi \cos \pi x \log(x+1) + \frac{\sin \pi x}{x+1}\right) (x+1)^{\sin \pi x}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 221 di 340

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1} = 0$$

3) $f(x)$ tale che $f'(x) = f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

e $f(0) = 3$

Calcolare $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{IV}(0)$

$$f'(0) = f(0)^2 = 3^2 = 9$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}(f^2(x)) = 2 f(x) f'(x)$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2 \cdot f(0) \cdot f'(0) = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$$

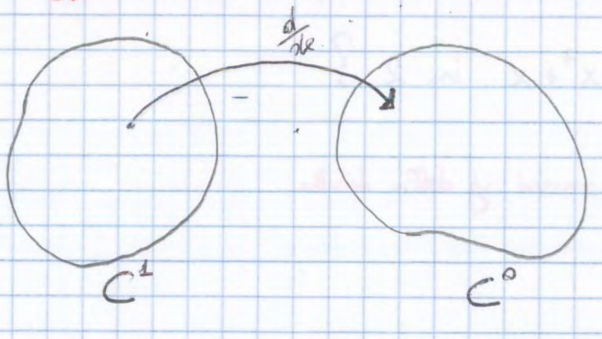
$$f'''(x) = (f''(x))' = \frac{d}{dx}(2 f(x) f'(x)) = 2(f'(x) \cdot f'(x) + f(x) f''(x))$$

$$f'''(0) = 2(9 \cdot 9 + 3 \cdot 54) = 486$$

$f^{IV}(x)$ per casa

4)

$\frac{d}{dx}$



L'OPERATORE DI DERIVATA ASSOCIA FUNZIONI A FUNZIONI

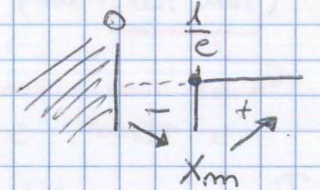
$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dx}(x+1) = 1 \\ \frac{d}{dx}(x+6) = 1 \end{array}\right]$$ NON INIETTIVO ~~SURIETTIVO~~ $\Rightarrow$ NON INVERTIBILE

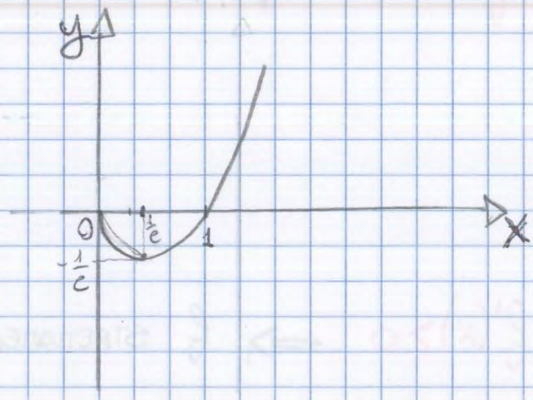
$$\frac{d}{dx}(a f(x) + b g(x)) = a \frac{d}{dx} f(x) + b \frac{d}{dx} g(x)$$

$\Rightarrow$ è un OPERATORE LINEARE

62) L

$f'(x) = 1 + \log x \geq 0 \qquad \log x \geq -1 \qquad x \geq e^{-1}$





$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\log\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$

Es:

$f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ dom $= \mathbb{R}$ NO AS. VERS.

- PARI
- $f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4+1}{x^2+1} \sim \dfrac{x^4}{x^2} = +\infty$ NO AS. ORIZZ.

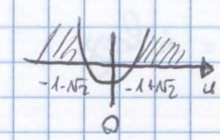
$\lim_{x \to \pm\infty}$ x^2 non si comporta come una retta! NO AS. OBL.

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2+1) - (x^4+1)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^5+4x^3-2x^5-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^5+4x^3-2x}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

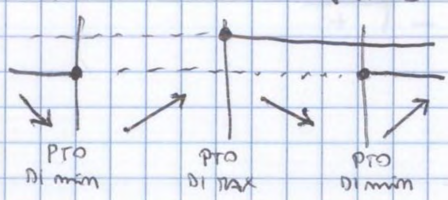
$x^5 + 2x^3 - x \geq 0 \qquad x(x^4+2x^2-1) \geq 0$

- $x \geq 0$
- $x^4 + 2x^2 - 1 \qquad u = x^2 \qquad u^2 + 2u - 1 \geq 0 \qquad u = -1 \pm \sqrt{2}$



$\underbrace{x^2 \leq -1-\sqrt{2}}_{\text{MAI VERIFICATA!}} \ \vee \ x^2 \geq \sqrt{2}-1$

$x \leq -\sqrt{\sqrt{2}-1} \ \vee \ x \geq \sqrt{\sqrt{2}-1}$



$f(0) = 1$

Nei min le y sono difficili da calcolare, le salto.

64

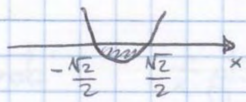
$f'(0^+) = e \qquad f'(0^-) = -e \qquad \Rightarrow \nexists f'(0)$!

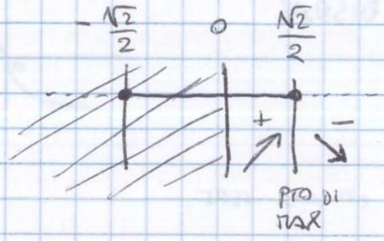
in zero ho un PTO ANGOLOSO

$$f' = \begin{cases} e^{1-x^2}(1-2x^2) & x>0 \\ e^{1-x^2}(-1+2x^2) & x<0 \end{cases}$$

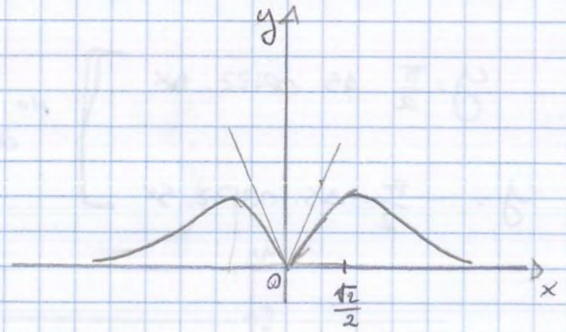
$\boxed{x>0}$

$\cancel{e^{1-x^2}}(1-2x^2) \geq 0 \qquad x^2 \leq \frac{1}{2}$





Per simmetria so cosa succ. a $x<0$



STUDI DI FUNZIONI

1) $f(x) = 4|x-2| + \log(e^{2x}-1)$

dom f: $e^{2x} > e^0 \qquad \cancel{2}x>0$

dom f $= (0, +\infty)$

NÈ PARI NÈ DISPARI

NON STUDIO IL SEGNO

$\lim_{x\to 0^+} \left(4|x-2| + \log(e^{2x}-1)\right) = -\infty \qquad x=0$ AS. VERT. DX

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad$ NO AS. ORIZZ. DX

AS. OBL. ?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 227 di 340

$$f(x) = \underbrace{4|x-2|}_{\geq 0} + \log(e^{2x}-1) \geq \log(e^{2x}-1) \geq 0 \quad \text{se } e^{2x}-1 \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}\log 2$$

Perciò $f(x)$ sempre >0 quando $x>2$

2) $f(x) = x + 4\,\text{arctg}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

- dom f : $e^x \neq 1$ $\qquad$ dom f $= \mathbb{R}\setminus\{0\}$

- ~~NÉ PARI NÉ~~ DISPARI

- $\lim_{x\to-\infty}\left(x + 4\,\text{arctg}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)\right) = -\infty$ NO AS. OR. SX

$\frac{e^x+1}{e^x-1} \to -1$ se $x \to -\infty$ $\Rightarrow$ $y = x - 4\,\text{arctg}\,1 = x - \pi$ AS. OBL. SX

$x \to +\infty$ $\quad e^x \to +\infty$

$\frac{e^x+1}{e^x-1} \to +1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ NO AS. OR. DX

$y = x + 4\,\text{arctg}\,1 = x + \pi$ AS. OBL. DX

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x + 4\,\text{arctg}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)\right) = 2\pi$$

$x \to 0$; $\quad \frac{e^x+1}{e^x-1} \to \frac{2}{0^+} = +\infty$

STUDIO $\frac{e^x+1}{e^x-1} \geq 0$ $\quad$ (e^x+1: S. >0) $\quad e^x > 1 \to x > 0$

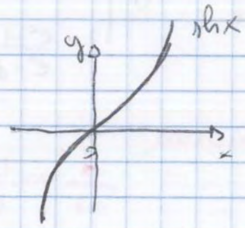
$- \quad 0 \quad +$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -4\cdot\frac{\pi}{2} = -2\pi$$

$\Rightarrow$ $x=0$ DISC. DI 1ª SPECIE

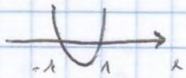
- $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x + 4\,\text{arctg}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)\right) = 1 + 4\frac{d}{dx}\,\text{arctg}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) =$

$f''(x) \geq 0 \qquad \dfrac{2\, \mathrm{sh}\, x}{\mathrm{sh}^2 x - 1} \geq 0$

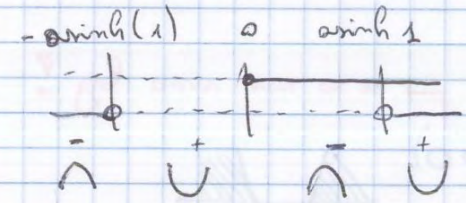


$N(x) \geq 0 \qquad x \geq 0$

$D(x) > 0$



$x < \mathrm{arsinh}(-1) \lor x > \mathrm{arsinh}(1)$

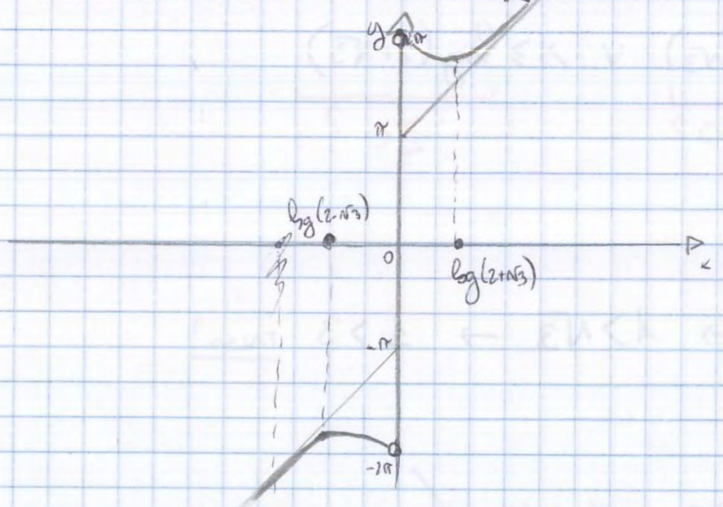


$x = -\mathrm{arsinh}\, 1$ = PTO DI FLESSO ASCENDENTE

$x = 0$ NON È 1 PTO DI FLESSO, XK IN 0 $\nexists f(x)$

$x = \mathrm{arsinh}\, 1$ = PTO DI FLESSO ASCENDENTE

NO! AZZERANO IL DENOM DELLA DERIVATA SECONDA!



3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{3x}}$ → C'È 1 ERRORE, vd. pag 75

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

NÈ PARI, NÈ DISPARI, NON HA INFATTI UN dom f SIMM. RISP. A 0

· SEGNO: $\dfrac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{3x}} \geq 0$

70 L

1° METODO

$$\sim \frac{e^{\frac{u}{3}}}{-u^2} = -\infty$$

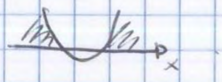
2° METODO: de l'Hopital

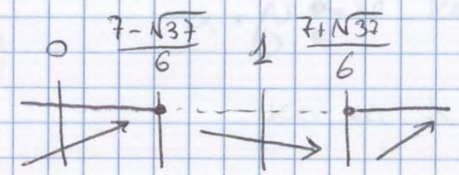
$$\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{\frac{u}{3}}}{u-u^2} \overset{H}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{\frac{1}{3}e^{\frac{u}{3}}}{1-2u} \overset{H}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{\frac{1}{9}e^{u/3}}{-2} = -\infty$$

$\Rightarrow x=0$ AS. VERT. DX

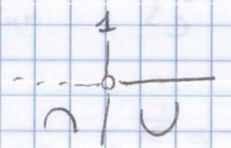
$$f'(x) = (\dots) = \frac{e^{\frac{1}{3x}}}{3(x-1)^2}(3x^2-7x+1) \geq 0$$

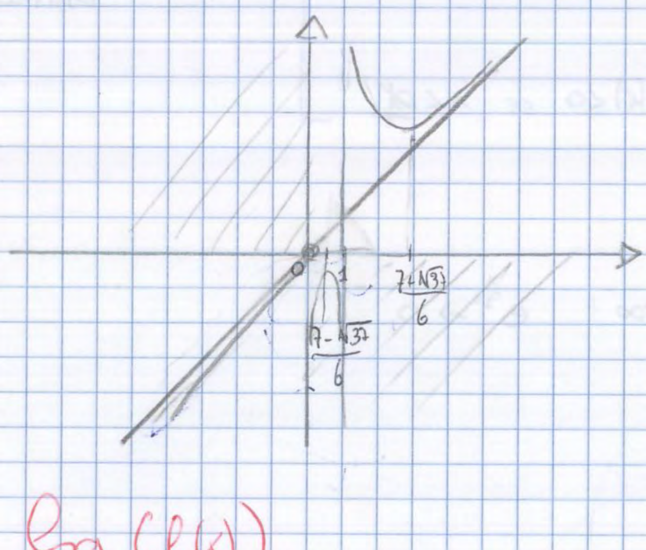
$$x = \frac{7\pm\sqrt{37}}{6}$$





$$f''(x) = (\dots) = \frac{e^{\frac{1}{3x}}}{9x^2(x-1)^3}(25x^2-8x+1) \geq 0$$





$\log(f(x))$

DOVE $f(x) \leq 0$ $\nexists \log(f(x))$

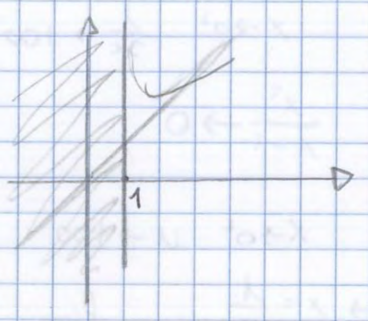
DOVE $f(x) < 1$ $\log(f(x)) < 0$

DOVE C'È L'AS. VERT., RIMANE

RIMANE LA MONOTONIA

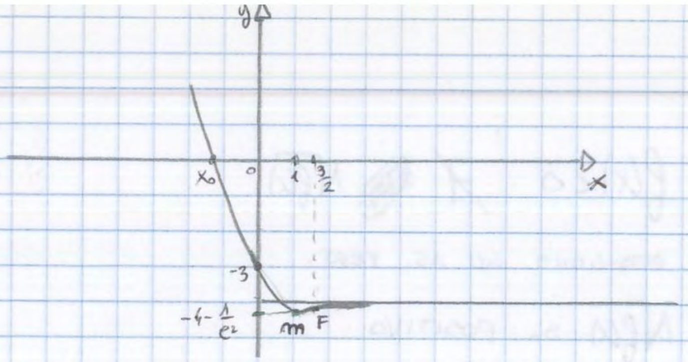
DOVE $f(x) \geq 1$ $\log(f(x)) \geq 0$

VA A ∞ + LENTAMENTE



72 L

$f(0) = -3$

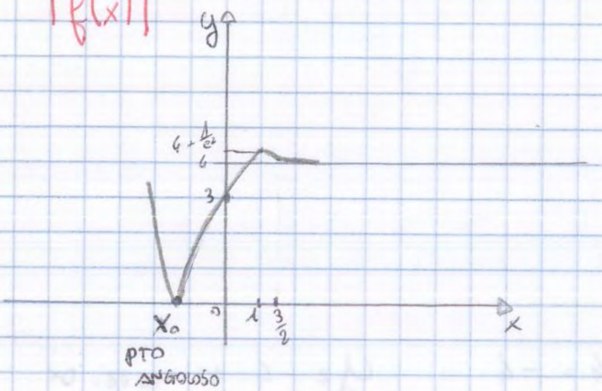


È continua perchè è somma e prodotto di continue
È strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = -3$ $\Rightarrow$

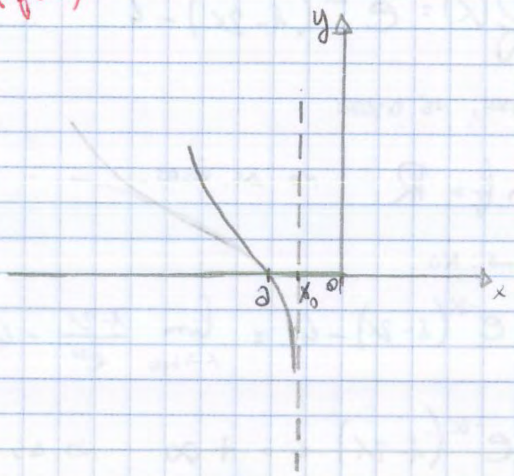
$\Rightarrow \exists$ un solo zero in $(-\infty, 1)$

DOPO 1 LA CURVA NON SUPERA L'ASINTOTO $\Rightarrow$ DOPO 1 NON HO ALTRI ZERI.

$|f(x)|$



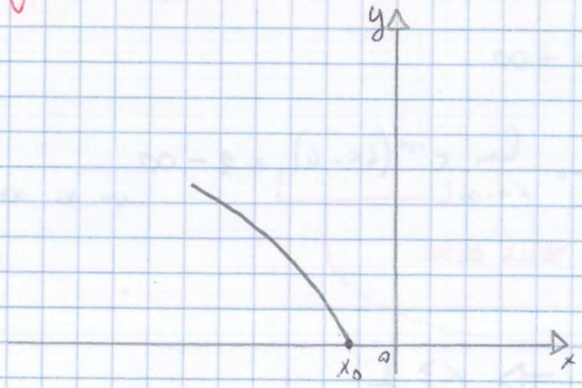
$\log(f(x))$



$f(x) = 1 \rightarrow x = a < x_0$

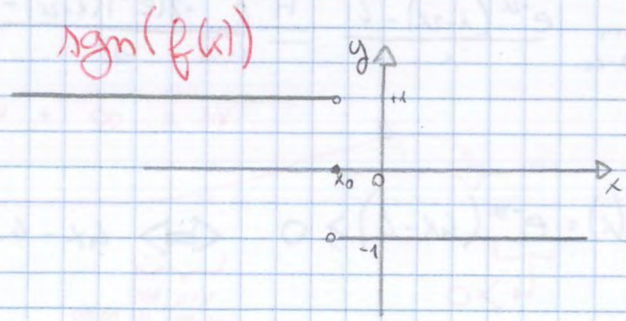
LA MONOTONIA È CONSERVATA

$\sqrt[n]{f(x)}$ n pari



LA MONOTONIA È CONSERVATA

$\mathrm{sgn}(f(x))$



74 L

Potevo operare diversamente

$$\frac{x^2}{x-1}\, e^{\frac{1}{3x}} \qquad x \to +\infty$$

$$e^{\frac{1}{3x}} = \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{3x}\right), \quad x \to +\infty$$

$$\frac{x^2+1-1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$$

POTEVO ANCHE DIVIDERE I POLINOMI

$$f(x) = \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)\left(1+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \qquad x \to +\infty$$

$$x + \underbrace{\frac{x}{3x}}_{\frac{1}{3}} + x\, o\left(\frac{1}{x}\right) + 1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3x(x-1)} + \frac{1}{x-1}\, o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty$$

$$= x+1+\frac{1}{3}+o(1), \quad x \to +\infty \qquad = x + \frac{4}{3} + o(1)$$

$$\Rightarrow \quad y = x + \frac{4}{3} \quad \text{AS. OBL.}$$

QUIZ:

$f(x) = x^3 - x$

~~a~~ SUR, NN INV, DISP

b SUR, NN INV, PARI

c INV. IN $[0,1]$, DISP.

d INV IN $[1,+\infty)$, PARI

e INV IN $[0,+\infty)$, DISP.

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$x^2 \geq \frac{1}{3}$ ↗ ↘ ↗ NN. INV.

$f(-x) = -x^3 + x = -f(x)$ DISPARI

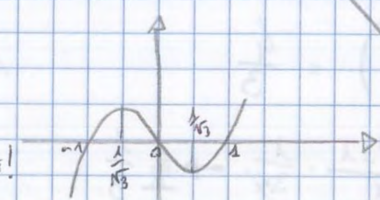
$\Rightarrow$ a

BASTAVA ACCORGERSI CHE

$f(x) = 0$

SE $x = 0 \lor x = \pm 1$

$\Rightarrow$ NON INVERTIBILE!



Im di $(M(x+1))^2$

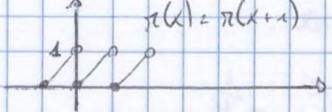
a COINCIDE CON $M(x^2) + 2M(x) + 1$

~~b~~ è $[0,1)$

c $[0,1]$

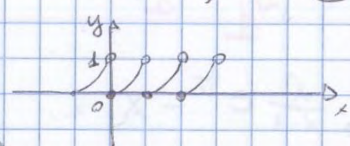
d $(-1,0]$

e $(-1,1)$



$M(x) = M(x+1)$ perché $M(x)$ ha periodo 1

$[0,1)$ b



$M(1) = 0$

$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$M\left(\frac{1}{2}\right) + M\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \neq M(1)$

76 L

Es:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 =$$

La somma è finita se $n \in \mathbb{N}$

TARTAGLIA

1	$n=0$
1 1	$n=1$
1 2 1	$n=2$
1 3 3 1	$n=3$
1 4 6 4 1	$n=4$
1 5 10 10 5 1	$n=5$

$$\Rightarrow (a+b)^4 = a^4b^0 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^4$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots$$

$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + \dots$$

$$b \to 0 \qquad = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + o(b^2)$$ MI FERMO XK MI BASTA b^2

$n \notin \mathbb{N}$ ho infiniti termini!

Es: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$x \to 0$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + o(x^2) =$$

↳ DEVO FERMARSI, SE NO ~~...~~ VADO AVANTI X SEMPRE!

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

CALCOLO DI PARTI PRINCIPALI

$$f(x) = \frac{\sqrt[5]{1-x^3}}{\log(e+x)}$$ Maclaurin (cioè $x_0 = 0$)

$n = 3$ → PERCIÒ MI FERMERÒ SEMPRE A $o(x^3)$

$$N(x) = \sqrt[5]{1-x^3} = (1-x^3)^{\frac{1}{5}} = o(x^3) + 1 + \frac{1}{5}(-x^3) + \frac{1}{2}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)(-x^3)^2 =$$

TEOREMA:

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = 0$

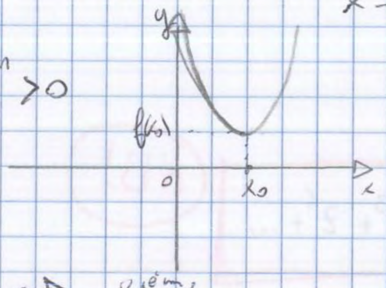
⇒ PERCIÒ AMMETTE SVILUPPO DI Maclaurin (x es. C^4 = ammette Maclaurin fino al grado 4)

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0)}_{0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + o((x-x_0)^2)$$

Perciò in $I(x_0)$

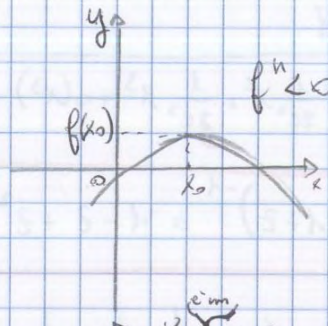
$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + o((x-x_0)^2) \quad x \to x_0$$

$f'' > 0$



$\Rightarrow x_0$ è un min

$f'' < 0$

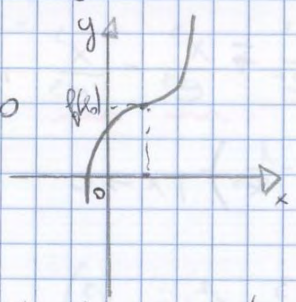


$\Rightarrow x_0$ è un max

Se anche $f''(x_0) = 0$

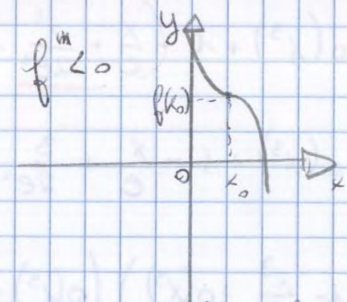
$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{6} f'''(x_0) + o((x-x_0)^3)$$

$f''' > 0$



x_0 flesso ascend.

$f''' < 0$



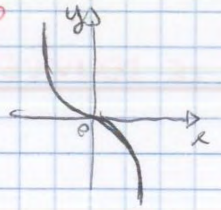
x_0 flesso discend.

Se anche $f'''(x_0) = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^4}{24} f^{(4)}(x_0) + o((x-x_0)^4)$$

FORMA SIMILE A x^2, simmetrica, COME TUTTE LE PARI

DISEGNO $p(x)$



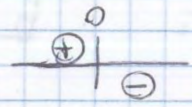
$x=0$ FLESSO DISC.

INOLTRE SO CHE:

① $f'(0)=0$ $\qquad \dfrac{f'''(0)}{\cancel{6}} = -\dfrac{4}{\cancel{6}}$

$\dfrac{f''(0)}{\cancel{2}} = 0 \Rightarrow f''(0)=0$

② VISTO CHE IN $I(0)$ $f(x)\sim p(x)$, SO IL SEGNO DI f IN $I(0)$



2) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ $\qquad n=5$, $x_0=0$

$$= \frac{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)} \quad , x\to 0$$

POSSO OPERARE COSÌ:

voglio scrivere la frazione come polinomio

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + o(x^5)\right)$$

$$\Rightarrow x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = \left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + o(x^5)\right) =$$

$$= A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \frac{A_0}{2}x^2 + \frac{A_1}{2}x^3 + \frac{A_2}{2}x^4 + \frac{A_3}{2}x^5 + \frac{A_0}{24}x^4 + \frac{A_1}{24}x^5 + o(x^5)$$

ADESSO APPLICHERÒ IL PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI:

$$\begin{cases} 0 = A_0 \\ 1 = A_1 \\ 0 = A_2 + \cancel{\frac{A_0}{2}} \\ \frac{1}{6} = A_3 + \frac{A_1}{2} \\ 0 = A_4 + \cancel{\frac{A_2}{2}} + \cancel{\frac{A_0}{24}} \\ \frac{1}{120} = A_5 + \frac{A_3}{2} + \frac{A_1}{24} = A_5 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \end{cases}$$

$A_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$

$A_5 = \dfrac{1+20-5}{120} = \dfrac{16}{120} = \dfrac{2}{15}$

82)

$o((x-2)^3) + 3(x-2) - \frac{9}{2}(x-2)^3 - \frac{1}{3}(27(x-2)^3) \quad (x \to 2)$

NOTARE CHE NON SVILUPPO $(x-2)$

$= o((x-2)^3) + 3(x-2) + \frac{9}{2}(x-2)^3 + \frac{1}{3}\left(-\frac{9}{2} - \frac{27}{3}\right) \quad (x \to 2)$

$= 3(x-2) - \frac{27}{2}(x-2)^3 + o((x-2)^3) \quad (x \to 2)$

$g(x) = \underbrace{3x}_{} - \left(3(x-2) - \frac{27}{2}(x-2)^3 + o((x-2)^3)\right) \quad (x \to 2)$

NON HO $(x - x_0)$ $\Rightarrow$ NON C'È ANCORA UN POLINOMIO DI TAYLOR!

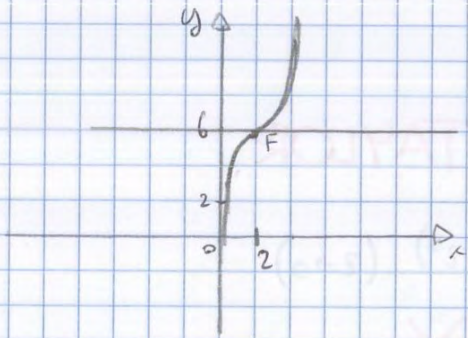
ANCHE $3x$ VA SVILUPPATO!

$3x = 3(x+2-2) = 3(x-2) + 6 \quad (x \to 2)$

$\Rightarrow g(x) = 6 + \cancel{3(x-2)} - \cancel{3(x-2)} + \frac{27}{2}(x-2)^3 + o((x-2)^3) \quad (x \to 2)$

$= 6 + \frac{27}{2}(x-2)^3 + o((x-2)^3) \quad (x \to 2)$

IN $I(2)$



$x = 2$ PTO DI FLESSO ASCENDENTE (A tang orizz.)

COME TUTTI QUELLI OTTENUTI CON TAYLOR!

$g(2) = 6$

$g'(2) = 0$

$\frac{g''(2)}{2!} = 0$

$\frac{g'''(2)}{6} = \frac{27}{2} \cdot 6 = 81$

2) $f(x) = 1 + x + x^2 \qquad x_0 = 3$

VOGLIO TAYLOR!

$= 1 + (x-3+3) + (x-3+3)^2 \quad (x \to 3)$

$= 1 + (x-3) + 3 + (x-3)^2 + 9 + 6(x-3) \quad (x \to 3)$

84) L

$= 1 - 3x - x^2 + 9x^2 + 6x^3 + x^4 - 27x^3 - 27x^4 + 81x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$

$= 1 - 3x + 8x^2 - 21x^4 + 55x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$

5) $f(x) = \log(1 - 8x^2) - \dfrac{4}{1+2x^2} + 4$

Calcolare la $P(x)$ per $x_0 = 0$

In genere si sviluppa almeno un grado in più risp. alle potenze che compaiono

NB se $f(x)$ è pari, il termine di grado 3 è nullo, perciò mi serve il grado 4.

f pari

$\log(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + o(z^2) \quad (z \to 0)$

$(1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 + o(z^2) \quad (z \to 0)$

$\log(1 - 8x^2) = -8x^2 - \dfrac{1}{2}(-8x^2)^2 + o(x^4) \quad (x \to 0)$

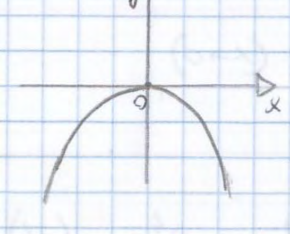
$f(x) = -8x^2 - \dfrac{1}{2}(-8x^2)^2 + o(x^4) - 4\left(1 - (2x^2) + (2x^2)^2\right) + 4 \quad (x \to 0)$

$= \cancel{-8x^2} - 32x^4 + o(x^4) \cancel{-4} + \cancel{8x^2} - 16x^4 \cancel{+4} \quad (x \to 0)$

$= \underbrace{-48x^4}_{P(x)} + o(x^4) \quad (x \to 0)$

ORD. DI INFINITESIMO: 4

in $I(0)$



$x = 0$ PTO DI MAX

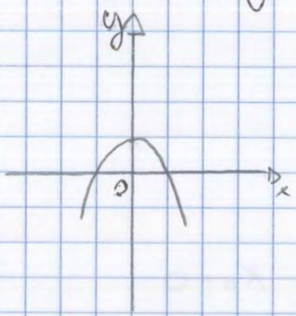
$\dfrac{f^{(4)}(0)}{24} = -48 \implies f^{(4)}(0) = -48 \cdot 24 = -1152$

$48 \times 24 = 192 + 96\text{-} = 1152$

86) L

Se mi interessa cosa è $x_0 = 0$

POSSO SCRIVERE $f(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$



$x = 0$ PTO DI MAX.

NUM. COMPLESSI

$z_1 = 4 + 2i$

$z_2 = 6 + 5i$

$i = \sqrt{-1}$

$z_1 + z_2 = 4 + 2i + 6 + 5i = 10 + (2+5)i = 10 + 7i$

$z_1 - z_2 = 4 + 2i - 6 - 5i = (4-6) + (2-5)i = -2 - 3i$

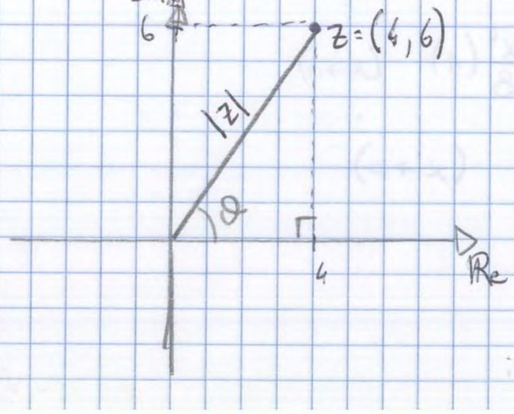
$z_1 \cdot z_2 = (4+2i)(6+5i) = 24 + 20i + 12i + 10i^2 = 24 - 10 + 32i = 14 + 32i$

$\overline{z_1} = \overline{4+2i} = 4 - 2i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+2i}{6+5i} \cdot \frac{6-5i}{6-5i} = \frac{24 - 20i + 12i - 10i^2}{36 - 25i^2} = \frac{34 - 8i}{61}$

Dato $z = 4 + 6i$

$\mathrm{Re}(z) = 4$ $\quad \mathrm{Im}(z) = 6$ (NON $6i$)



|z| è una dist. geometrica, mentre il valore assoluto è una funzione

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

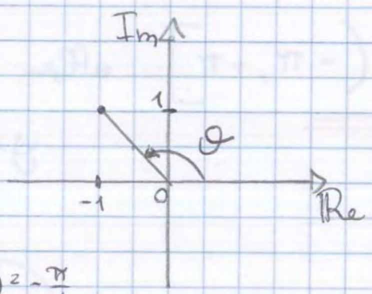
$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

IN GENERALE SI SCRIVE $\boxed{tg\,\theta = \frac{y}{x}}$,

MA È **SBAGLIATA**.

Per es.:

$z_2 = -1 + i$



$\rho_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

SECONDO LA FORMULA AVREI $\theta_2 = \arctg\frac{1}{-1} = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$

BUGIA!

$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

PERCIO':

se $z = x + iy$ si trova:

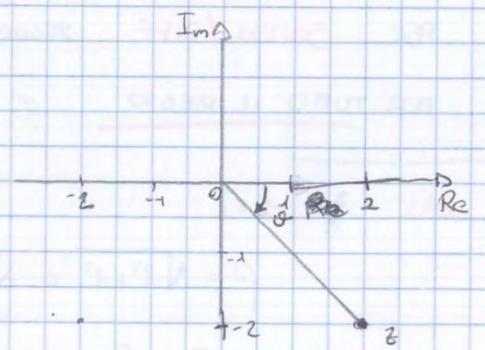
- nel I / IV QUADR. $\Rightarrow \theta = \arctg\frac{y}{x}$
- nel II QUADR. $\Rightarrow \theta = \pi + \arctg\frac{y}{x}$
- nel III QUADR. $\Rightarrow \theta = -\pi + \arctg\frac{y}{x}$

Es:

$z_4 = 2 - 2i$

($\in$ IV quadr.)

$\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

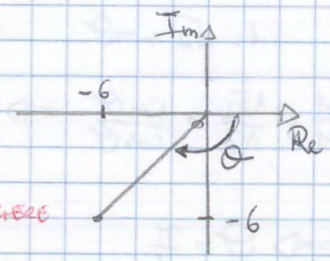


$\theta_4 = \arctg\frac{-2}{2} = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Altro es:

$z_3 = -6 - 6i$

$\rho = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$



DI SOLITO CALCOLO Arg, NON arg.

MA NO PROBLEMA, BASTA AGGIUNGERE 2π

$\theta_4 = -\pi + \arctg(+1) = -\frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow \int u^{-3}\,du = \frac{u^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2}(\log x)^{-2} + c$$

IL dom dell' integranda era $[0,+\infty)\setminus\{1\}$

IL dom della primitiva è $(0,+\infty)\setminus\{1\}$

Altro:

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx \qquad u = x^3 \qquad du = 3x^2\,dx \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\Rightarrow \int \cancel{x^2}\, e^u \frac{du}{3\cancel{x^2}} = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

Altro:

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx \qquad \cancel{u = x^3+x+1}$$

$$\int \frac{x^3+x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{x\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + c$$

Ancora:

$$\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx =$$

POSSO EVITARE I FRATTI SEMPLICI.

$$= \int \frac{x^3}{1+(x^4)^2}\,dx \qquad u = x^4 \quad du = 4x^3\,dx \quad dx = \frac{du}{4x^3} \qquad \int \frac{\cancel{x^3}}{1+u^2}\frac{du}{4\cancel{x^3}} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} u + c = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^4 + c$$

NB

Altro:

$$\int (\cos x)^3\,dx =$$

POSSO SEMPRE FARLO PER $(\cos x)^n$, n INTERO

$$= \int \cos x\,(\cos x)^2\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \int \cos x\,dx - \int \cos x \sin^2 x\,dx =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 253 di 340

$f' = e^{\frac{3}{2}u} \rightarrow f = \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}u}$

$\Rightarrow I = \frac{2}{3} u\, e^{\frac{3}{2}u} - \int \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}u}\, du =$

$g = u \rightarrow g' = 1$

$$= \frac{2}{3} u\, e^{\frac{3}{2}u} - \frac{2}{3} \int e^{\frac{3}{2}u}\, du = \frac{2}{3} u\, e^{\frac{3}{2}u} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 e^{\frac{3}{2}u} + c =$$

$$= \frac{2}{3} u\, (e^u)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 (e^u)^{\frac{3}{2}} + c$$

$x = e^u \Longrightarrow u = \log x$

$$= \frac{2}{3} \log x \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + c$$

L'AVESSI FATTO SUBITO PER PARTI:

$$\int \sqrt{x} \log x\, dx = \frac{2}{3} \log x \cdot x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{2}{3} \log x \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$f' = \sqrt{x} \quad f = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$

$g = \log x \quad g' = \frac{1}{x}$

Altro:

$$\int \log x\, dx = x \log x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx = \underline{\underline{x \log x - x}} + c$$

IMPARALO A MEMORIA

$f' = 1 \quad f = x$

$g = \log x \quad g' = \frac{1}{x}$

Altro:

$$\int \log^2 x\, dx = \left(\underline{\underline{\text{NON FARE}}} \int \log x \log x\, dx \right) = x \log^2 x - \int \cancel{x} \frac{2}{\cancel{x}} \log x\, dx =$$

$f' = 1 \rightarrow f = x$

$g = \log^2 x \rightarrow g' = 2 \frac{1}{x} \log x$

94) L

$$\int e^x \sin x\,dx = \sin x\, e^x - \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x(\sin x)\,dx\right)$$

$$f' = e^x \quad f = e^x$$
$$g = \cos x \quad g' = -\sin x$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

INTEGRALI DI FUNZ. RAZIONALI

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

1. $\deg N(x) < \deg D(x) \Rightarrow$ FRATTI SEMPLICI
2. $\deg N(x) \geq \deg D(x) \Rightarrow$ DIVISIONE DI POLINOMI

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

$$\deg R(x) < \deg D(x)$$

Es: $\displaystyle\int \frac{x^4+x+2}{x^2+1}\,dx$

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +x & +2 & x^2+1 \\ x^4 & & x^2 & & & x^2-1 \\ \hline // & // & -x^2 & +x & +2 & \\ & & -x^2 & & -1 & \\ \hline & & // & x & +3 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^4+x+2}{x^2+1}\,dx = \int\left(x^2-1+\frac{x+3}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int (x^2-1)\,dx + \underbrace{\int \frac{x+3}{x^2+1}\,dx}_{} = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{3}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + 3\,\mathrm{arctg}\,x + c$$

GRADO NUM = 0 o 1

GRADO DEN = 2 $\Delta < 0$

96) L