NUMERO: 1055 DATA: 02/09/2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Votano

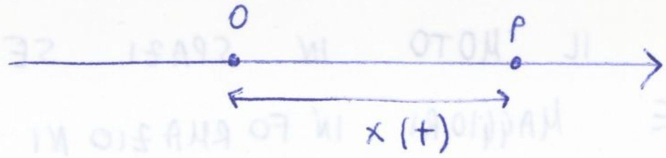
MATERIA: Fisica I Temi d' Esame

Prof. Barbero

# CINEMATICA LINEARE

## 1) COS'È IL MOTO RETTILINEO?

UN MOTO CHE SI SVOLGE LUNGO UNA RETTA SULLA QUALE VENGONO FISSATI ARBITRARIAMENTE UN'ORIGINE E UN VERSO; IL MOTO DEL PUNTO È DESCRIVIBILE TRAMITE UNA SOLA COORDINATA $x(t)$.




SE $x$ e $t$ VENGONO MISURATE SPERIMENTALMENTE POSSONO ESSERE RIPORTATE SU UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI (SULL'ASSE X I VALORI DI $t$, SULL'ASSE Y QUELLI DI $x$), CORRISPONDENTE QUINDI AL GRAFICO DELLA FUNZIONE $x(t)$. QUEST'ULTIMO È ANCHE CHIAMATO DIAGRAMMA ORARIO. IL PUNTO A CUI CI SI RIFERISCE È UN PUNTO MATEMATICO, OSSIA PRIVO DI DIMENSIONI GEOMETRICHE; ESSO SARÀ QUINDI CONSIDERATO COME UN CORPO LE CUI DIMENSIONI SONO TRASCURABILI RISPETTO AGLI SPOSTAMENTI CONSIDERATI

## 2) COM'È DEFINITA LA VELOCITÀ MEDIA E ISTANTANEA IN UN MOTO RETTILINEO?

LA VELOCITÀ MEDIA $V_m$ È DEFINITA COME RAPPORTO TRA LO SPOSTAMENTO $\Delta x$ E L'INTERVALLO DI TEMPO $\Delta t$

NEL CASO IN CUI SI PARLASSE DI $V_m$, LA RETTA È SECANTE DELLA FUNZIONE $x(t)$.

NEL CASO IN CUI SI CONSIDERASSE UNO SPOSTAMENTO $\Delta x$ INFINITESIMO (CON $\Delta t \to 0$) (COME NELLA VELOCITÀ ISTANTANEA), LA RETTA È TANGENTE POICHÉ $x_1 \equiv x_2$ E IL SUO COEFFICIENTE ANGOLARE È INFATTI LA DERIVATA IN QUEL PUNTO, OSSIA LA VELOCITÀ ISTANTANEA.

4) COM'È DEFINITA L'ACCELERAZIONE MEDIA E ISTANTANEA NEL MOTO RETTILINEO?

IN UN MOTO ACCELERATO, OSSIA QUANDO LA VELOCITÀ VARIA NEL TEMPO, L'ACCELERAZIONE MEDIA È DEFINITA COME RAPPORTO TRA LA VARIAZIONE DI VELOCITÀ $\Delta V$ E INTERVALLO DI TEMPO $\Delta t$ CONSIDERATO

$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

CON PROCEDIMENTO ANALOGO A QUELLO NELLA DOMANDA 2), SI PASSA AL CONCETTO DI ACCELERAZIONE ISTANTANEA, CIOÈ LA RAPIDITÀ DI VARIAZIONE TEMPORALE DELLA VELOCITÀ.

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ESSA INDICHERÀ QUINDI LA CRESCENZA O DECRESCENZA DELLA FUNZIONE $V(t)$. LA SUA UNITÀ DI MISURA È

$$\frac{m}{s^2} = \left[\frac{S}{T^2}\right]$$

8-9) COS'È IL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO E QUALI SONO LE SUE EQUAZIONI?

È UN MOTO NEL QUALE L'ACCELERAZIONE È COSTANTE, QUINDI I VALORI ACCELERAZIONE MEDIA E ISTANTANEA COINCIDONO, QUINDI:

- $dV = a(t)\,dt \longrightarrow \int_{V_0}^{V} V = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \longrightarrow \boxed{V = V_0 + a(t-t_0)}$

- $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} [V_0 + a(t-t_0)]\,dt \rightarrow \boxed{X(t) = X_0 + V_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2}$

DUNQUE, IN QUESTO PARTICOLARE MOTO, LA VELOCITÀ È UNA FUNZIONE LINEARE DEL TEMPO, MENTRE LO SPAZIO È UNA FUNZIONE QUADRATICA DEL TEMPO.

10-11) COS'È IL MOTO ARMONICO SEMPLICE? DETERMINA L'ACCELERAZIONE

È UN MOTO VARIO LA CUI LEGGE ORARIA È

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

DOVE A È L'AMPIEZZA DEL MOTO, $\omega$ LA PULSAZIONE, $\phi$ FASE INIZIALE E $\omega t + \phi$ LA FASE DEL MOTO.

ESSO SARÀ QUINDI UN MOTO PERIODICO LUNGO UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA 2A, CHE SI SPOSTERÀ AL MASSIMO DI UNA DISTANZA A DALL'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO, DI PERIODO E FREQUENZA

12) SE $a = -KV$, DETERMINA $V = V(t)$ E $X = X(t)$

SIAMO QUINDI IN UN REGIME VISCOSO, DOVE LA DECELERAZIONE È PROPORZIONALE ALLA VELOCITÀ (PER ESEMPIO, UN PARACADUTISTA CHE SI LANCIA NEL FLUIDO CHIAMATO ARIA):

- $\frac{dV}{dt} = -KV \longrightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = -K \int_{t_0}^{t} dt \longrightarrow \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -Kt$

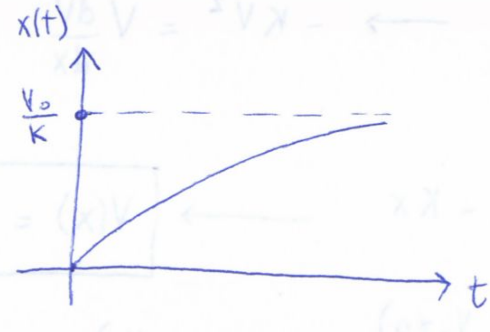
(con $t_0 = 0$ e $V_0 \neq 0$)

$$\longrightarrow \boxed{V(t) = V_0 \, e^{-Kt}}$$


- $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} V_0 \, e^{-Kt} \, dt \longrightarrow X(t) = X_0 - \frac{V_0}{K} \left[ e^{-Kt} \right]_{t_0}^{t}$

$$\longrightarrow \boxed{X(t) = X_0 + \frac{V_0}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right)}$$

SE $X_0 = 0$, IL PUNTO TENDE ASINTOTICAMENTE ALLA POSIZIONE $\frac{V_0}{K}$




13) SE $a = -KV$, DETERMINARE $V = V(X)$

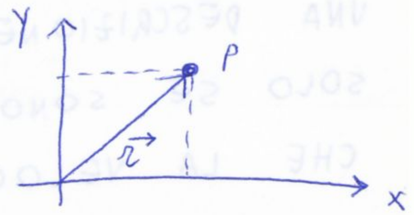
$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} V[X(t)] = \frac{dV}{dX}\frac{dX}{dt} = V\frac{dV}{dX} = a(X)$ QUINDI

# CINEMATICA BIDIMENSIONALE

1) CHE COS'È IL VETTORE POSIZIONE?

UN VETTORE È UN ENTE MATEMATICO UTILIZZATO PER GRANDEZZE VETTORIALI, OSSIA DEFINITE DA UN MODULO, UNA DIREZIONE E UN VERSO. IN PARTICOLARE, IL VETTORE POSIZIONE (o RAGGIO VETTORE) INDICA LA POSIZIONE DI UN IPOTETICO PUNTO P MATEMATICO NEL PIANO, CONGIUNGENDO L'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO E IL PUNTO P:

$$r(t) = \overline{OP} = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y$$

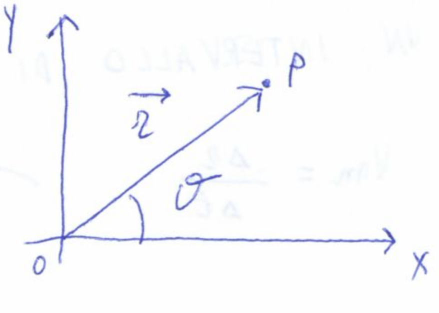



DOVE $\vec{u}_x$ E $\vec{u}_y$ SONO I VERSORI DEGLI ASSI CARTESIANI (CON MODULO UNITARIO, E CONSIDERATI FISSI NEL TEMPO).

IL VETTORE POSIZIONE PUÒ ANCHE ESSERE ESPRESSO, OLTRE CHE IN FORMA CARTESIANA, CON COORDINATE POLARI UTILIZZANDO LE SEGUENTI RELAZIONI:

$x = r \cdot \cos\theta$ , $y = r \cdot \sin\theta$ , $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$$\boxed{r(t) = (r\cos\theta)\,\vec{u}_x + (r\sin\theta)\,\vec{u}_y}$$



L'INCREMENTO $dr$ DEL VETTORE POSIZIONE RISULTA TANGENTE ($\vec{u}_T$) ALLA TRAIETTORIA, E DI MODULO $ds$. IN SOSTANZA PENSIAMO AL MOTO COME UNA SUCCESSIONE DI SPOSTAMENTI INFINITESIMI CON DIREZIONE VARIABILE

$$\boxed{\vec{V} = \frac{ds}{dt}\,\vec{u}_T = V\,\vec{u}_T}$$

QUINDI $\vec{V}$ INDIVIDUA DIREZIONE E VERSO DEL MOTO, OLTR AL SUO MODULO ($\equiv$ VELOCITA' ISTANTANEA $\frac{ds}{dt}$).

4) COME SI ESPRIME LA VELOCITA' VETTORIALE IN FORMA INTRINSECA?

SI ESPRIME CON LA FORMULA DELLA DOMANDA PRECEDENTE, DOVE $V$ $\vec{u}_T$ SONO CARATTERISTICHE INTRINSECHE PERCHE' NON CAMBIANO, ANCHE NEL CASO IN CUI SI CAMBIASSE L'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO. QUESTA INDIPENDENZA E' DOVUTA AL FATTO CHE, CAMBIATO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO, LA FORMA DELLA TRAIETTORIA RIMARREBBE COMUNQUE INVARIATA, COME DI CONSEGUENZA NON CAMBIEREBBERO NEANCHE I $\Delta r$ e $dr$ CONSIDERATI. SI PARLA QUINDI DI INVARIANZA DELLE RELAZIONI VETTORIALI RISPETTO ALLA SCELTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

5) ESPRIMI LA VELOCITA' IN COORDINATE POLARI.

DEFINITI $\vec{u}_r$ E $\vec{u}_\theta$ RISPETTIVAMENTE COME VERSORI DELLA DIREZIONE DI $r$ E ORTOGONALE DI $r$, IL RAGGIO VETTORE PUO' ESSERE ESPRESSO COME $r\,\vec{u}_r$.

UTILIZZANDO LA REGOLA DI DERIVAZIONE DI UN VETTORE ABBIAMO:

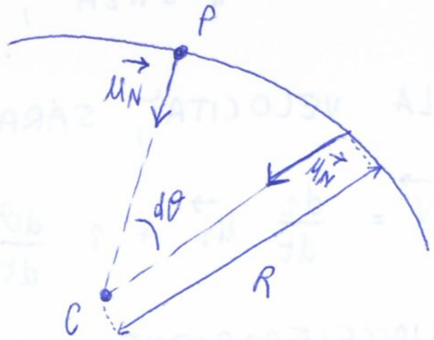
$$a = \frac{d}{dt}(V\vec{u_T}) = \frac{dV}{dt}\vec{u_T} + V\frac{d\vec{u_T}}{dt}$$

$$= \frac{dV}{dt}\vec{u_T} + V\frac{d\phi}{dt}\vec{u_N}$$

3-9) COS'È IL CERCHIO OSCULATORIO? COS'È IL RAGGIO DI UN CERCHIO OSCULATORIO PER UNA CURVA PIANA?

LE RETTE NORMALI ALLA TRAIETTORIA (PARALLELE ALLA COMPONENTE $\vec{u_N}$ DELL'ACCELERAZIONE) DI DUE PUNTI VICINI TRA LORO SI INCONTRANO IN C, CENTRO DELLA CIRCONFERENZA TANGENTE ALLA TRAIETTORIA NEL PUNTO (CHIAMATA OSCULATRICE), ANCHE DETTO CENTRO DI CURVATURA.

IL RAGGIO R DELLA CIRCONFERENZA OSCULATRICE È LA DISTANZA $\overline{CP}$, È DETTO RAGGIO DI CURVATURA.




ESSENDO L'ARCO DI TRAIETTORIA $dS = d\phi\, R$, SI PUÒ ESPRIMERE

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dS}\cdot\frac{dS}{dt} = \frac{1}{R}\cdot V$$

E QUINDI L'ACCELERAZIONE COME

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u_T} + \frac{V^2}{R}\vec{u_N}$$

(QUESTO PERCHÈ SI ANNULLANO ALCUNE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ E ACCELERAZIONE IN COORDINATE POLARI, VEDI RISPOSTA 5 E 10)

12) DISCUTI DEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

È UN PARTICOLARE MOTO CIRCOLARE NEL QUALE LA VELOCITÀ (TRASVERSA OVVIAMENTE) È COSTANTE IN MODULO, E L'ACCELERAZIONE TANGENTE È NULLA, QUINDI $a = a_n$.
ESSENDO LA VELOCITÀ COSTANTE, ANCHE LA VELOCITÀ ANGOLARE $\omega$, ESPRESSA COME $\frac{V}{R}$, LO SARÀ A SUA VOLTA.
LE LEGGI ORARIE DI QUESTO MOTO SONO:

- $s(t) = s_0 + Vt$ ; $\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$; [con $s(0) = s_0$ e $\vartheta(0) = \vartheta_0$]

È QUINDI UN MOTO ACCELERATO CON ACCELERAZIONE COSTANTE, ORTOGONALE ALLA TRAIETTORIA

$$a = a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

SI TRATTA INOLTRE DI UN MOTO PERIODICO CON PERIODO T E FREQUENZA $f$ UGUALI A:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

AGGIUNGIAMO INOLTRE, CHE QUANDO UNA PARTICELLA DESCRIVE UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE E HA $\omega$ COSTANTE, LA SUA PROIEZIONE SUGLI ASSI X E Y RAPPRESENTA UN MOTO ARMONICO SEMPLICE, SFASATO DI $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t + \vartheta_0) \\ y(t) = R\sin(\omega t + \vartheta_0) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

IN TAL CASO, LE LEGGI ORARIE DEL MOTO (POSTO $t_0 = 0$, $\omega = \omega_0$ E $\theta = \theta_0$) SI HA:

- $\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)\, dt \longrightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha t}$

- $\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t [\omega_0 + \alpha t]\, dt \longrightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$

- $\alpha(\theta) = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta)\, d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega \longrightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta}$

15) DISCUTI IL MOTO DI UN PROIETTILE

E' IL MOTO DI UN PUNTO P LANCIATO DALL'ORIGINE CON VELOCITA' INIZIALE $V_0$ FORMANTE UN ANGOLO $\theta_0$ CON L'ORIZZONTALE. IL MOTO E' CARATTERIZZATO DA UN'ACCELERAZIONE COSTANTE $a = -g\,\vec{\mu_y}$ LE CUI CONDIZIONI INIZIALI A $t_0 = 0$ SONO $r(0) = 0$ e $V = V_0$

- $V(t) = V_0 + \int_0^t a(t)\, dt \longrightarrow V(t) = V_0 - g t\,\vec{\mu_y}$

CHE POSSIAMO SCOMPORRE IN $\boxed{V(t) = V_0 \cos\theta\,\vec{\mu_x} + (V_0 \sin\theta - gt)\,\vec{\mu_y}}$

- LE LEGGI ORARIE DEI MOTI PROIETTATI INVECE SONO:

$$x = V_0 \cos\theta \cdot t \qquad y = V_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

DALLE QUALI POSSIAMO DEDURRE CHE LE DUE COMPONENTI SONO UN MOTO RETTILINEO ORIZZONTALE E UN MOTO

SFRUTTANDO LA RELAZIONE $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ SI PUÒ RISCRIVERE LA TRAIETTORIA COME:

$$\frac{x^2}{2g}\tan^2\theta - x\tan\theta + y + \frac{x^2}{2g} = 0$$

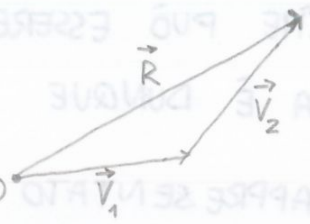
$$\hookrightarrow \tan\theta_{1,2} = \frac{g}{x}\left(1 + \frac{2}{g}\sqrt{\frac{g}{2}\left[1 - \frac{x^2}{g^2}\right] - y}\right)$$

I PUNTI LE CUI COORDINATE SODDISFANO LA CONDIZIONE $y > \frac{g}{2}\left[1 - \frac{x^2}{g^2}\right]$ NON POSSONO ESSERE RAGGIUNTI DAL PROIETTILE PER NESSUN ANGOLO $\theta$ (PERCHÉ L'EQUAZIONE DI 2° GRADO NON AVREBBE SOLUZIONI REALI, POICHÉ $\Delta < 0$).

$y = \frac{g}{2}\left[1 - \frac{x^2}{g^2}\right]$ È QUINDI CHIAMATA PARABOLA DI SICUREZZA.

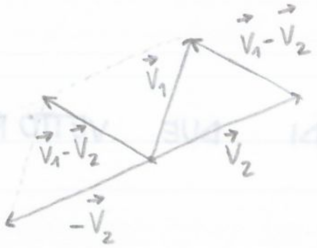
ZIONE DEL PRIMO CON L'ESTREMO LIBERO DELL'ULTIMO.

SI VERIFICA IMMEDIATAMENTE CHE $\vec{R}$ È INDIPENDENTE DALL'ORDIN
N CUI VENGONO PRESI I VETTORI




) COME È DEFINITA LA DIFFERENZA DI DUE VETTORI?

A DIFFERENZA FRA DUE VETTORI $\vec{V}_1$ E $\vec{V}_2$ $(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$ È DEFINITA
OME LA SOMMA DEL VETTORE $\vec{V}_1$ E DEL VETTORE $-\vec{V}_2$
È RAPPRESENTATA GEOMETRICAMENTE DALLA DIAGONALE DEL PARALLEL
GRAMMA COSTRUITO CON I DUE VETTORI, OVVERO DALLA DIAGONALE
CHE CONGIUNGE L'ESTREMO LIBERO DI $\vec{V}_2$ CON L'ESTREMO LIBERO
DI $\vec{V}_1$




4) CHE COSA SIGNIFICA RISOLVERE UN VETTORE LUNGO DUE DIREZIONI?

UN VETTORE LIBERO NELLO SPAZIO PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO
DALLE PROIEZIONI DEL VETTORE SU DUE RETTE.

5) CHE COSA SONO LE COMPONENTI DI UN VETTORE?

FISSATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO, UN VETTORE LIBERO NELLO SPAZIO PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO DALLE TRE PROIEZIONI DEL VETTORE LUNGO GLI ASSI. QUESTE LUNGHEZZE VENGONO DETTE COMPONENTI DEL VETTORE E IN PARTICOLARE SE ESSE SONO TRA LORO PERPENDICOLARI SI PARLA DI COMPONENTI CARTESIANE.

6) SCRIVI LA SOMMA DI DUE VETTORI IN TERMINI DELLE LORO COMPONENTI CARTESIANE.

LA SOMMA DI DUE VETTORI È DATA DALLA DIAGONALE DEL PARALLELOGRAMMA COSTRUITO CON I DUE VETTORI, CHE UNISCE IL PUNTO DI APPLICAZIONE DI UN VETTORE CON L'ESTREMO LIBERO DELL'ALTRO.

QUALUNQUE VETTORE $\vec{V}$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME SOMMA DI TRE VETTORI DIRETTI SECONDO GLI ASSI COORDINATI, SECONDO L'ESPRESSIONE

$$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z$$

DOVE $V_x \vec{u}_x$, $V_y \vec{u}_y$, $V_z \vec{u}_z$ SONO DETTI VETTORI COMPONENTI DEL VETTORE $\vec{V}$.

DATI QUINDI DUE VETTORI $\vec{V}$ E $\vec{W}$ SI PUÒ DETERMINARE LA LORO SOMMA COME

$$\vec{V}+\vec{W} = (V_x + W_x)\vec{u}_x + (\vec{V}_y + \vec{W}_y)\vec{u}_y + (V_z + W_z)\vec{u}_z$$

COME DIREZIONE QUELLA ORTOGONALE AL PIANO INDIVIDUATO DAI VETTORI $\vec{V}_1$ E $\vec{V}_2$, COME VERSO QUELLO OTTENUTO DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA, OVVERO QUELLO DA CUI SI DEVE RUOTARE IL VETTORE $\vec{V}_1$ VERSO $\vec{V}_2$ IN SENSO ANTIORARIO.

SE DUE VETTORI SONO TRA LORO PARALLELI, IL LORO PRODOTTO VETTORIALE SARÀ NULLO

11) COME È DIRETTO IL PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI?

PER DETERMINARE IL VERSO DEL PRODOTTO VETTORIALE SI APPLICA LA REGOLA DELLA MANO DESTRA, INFATTI IL VETTORE RISULTANTE HA DIREZIONE PERPENDICOLARE AL PIANO DEFINITO DAI DUE VETTORI E VERSO QUELLO DA CUI SI DEVE RUOTARE IL VETTORE $\vec{V}_1$ VERSO $\vec{V}_2$ IN SENSO ANTIORARIO. DALLA DEFINIZIONE SEGUE CHE IL PRODOTTO VETTORIALE È ANTICOMMUTATIVO, INFATTI

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$$

12) CHE COS'È IL VETTORE UNITARIO?

IL VETTORE UNITARIO, DETTO COMUNEMENTE VERSORE, È UN VETTORE DI MODULO PARI A 1. I VERSORI DEGLI ASSI X, Y, Z VENGONO INDICATI RISPETTIVAMENTE CON $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ E $\vec{u}_z$

SI DEFINISCE INTEGRALE DEFINITO DI $\vec{v}(t)$ IL VETTORE A CUI TENDE LA SOMMA QUANDO TUTTI I $\Delta t_i$ TENDONO A ZERO

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, dt$$

DOVE $t_1$ E $t_2$ SONO GLI ESTREMI DELL' INTERVALLO CONSIDERATO

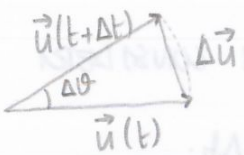
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\vec{u}_x\, dt + v_y(t)\vec{u}_y\, dt + v_z(t)\vec{u}_z\, dt =$$

$$= \vec{u}_x \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\, dt + \vec{u}_y \int_{t_1}^{t_2} v_y(t)\, dt + \vec{u}_z \int_{t_1}^{t_2} v_z(t)\, dt$$

L' INTEGRALE DEL VETTORE HA COME COME COMPONENTI GLI INTEGRALI DELLE COMPONENTI DEL VETTORE

4) MOSTRA CHE LA DERIVATA DI UN VERSORE RISPETTO A UN PARAMETRO È PERPENDICOLARE AL VERSORE STESSO

AL MOMENTO CHE IL VERSORE È PER DEFINIZIONE UN VETTORE UNITARIO A MODULO UNITARIO, CIÒ CHE PUÒ VARIARE IN FUNZIONE DI $t$ È SOLO LA DIREZIONE, QUINDI PUÒ COMPIERE ROTAZIONI DI UN CERTO ANGOLO $\Delta\vartheta$




$$\Delta\vec{u} = \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$$

# DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

) CHE COSA SONO LE LEGGI DI NEWTON?

E LEGGI DI NEWTON SONO 3 PRINCIPI CHE PERMETTONO DI DESCRIVERE ORRETTAMENTE IL MOTO DI OGGETTI CHE SI MUOVONO CON UNA VELOCITÀ PICCOLA RISPETTO A QUELLA DELLA LUCE.

PRINCIPIO DI INERZIA

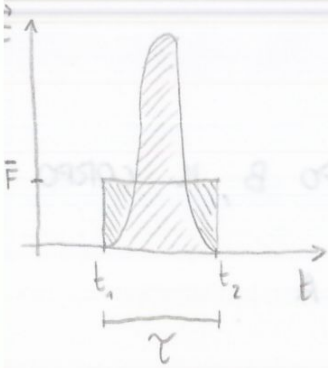
N UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE, UN PUNTO MATERIALE LIBERO HE ABBIA A UN CERTO ISTANTE UNA VELOCITÀ $\vec{V}$, MANTIENE INDEFIN AMENTE, FINCHÈ RESTA LIBERO, IL SUO STATO DI MOTO RETTILINE NIFORME

II PRINCIPIO DELLA DINAMICA

N UN SISTEMA INERZIALE, IL PRODOTTO FRA L'ACCELERAZIONE SUBITA A UN CORPO PUNTIFORME E LA MASSA GRAVITAZIONALE DI QUEL ORPO È PROPORZIONALE ALLA RISULTANTE DELLE FORZE AGENTI SUL ORPO

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

5) COME È POSSIBILE DETERMINARE LA FORZA MEDIA IN UN URTO?




RIPORTANDO L'INTENSITÀ DELLA FORZA $\vec{F}(t)$ IN FUNZIONE DEL TEMPO, L'IMPULSO È RAPPRESENTATO DALL'AREA SOTTESA AL GRAFICO, $\tau$ È L'INTERVALLO IN CUI AVVIENE L'URTO.

QUINDI DAL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

$$\bar{F} = \frac{J}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt$$

) QUAL È LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO DI UNA PARTICELLA?

AFFINCHÉ UNA PARTICELLA SIA IN UNA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO È NECESSARIO CHE LA SOMMATORIA DELLE FORZE AGENTI SU DI ESSA SIA NULLA. OVVERO

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

) DISCUTI LE FORZE DOVUTE ALLE SUPERFICI, BARRE E FILI

SE UN CORPO, SOGGETTO ALL'AZIONE DI UNA FORZA O DELLA RISULTANTE NON NULLA DI UN INSIEME DI FORZE RIMANE FERMO BISOGNA DEDURRE CHE L'AZIONE DELLA FORZA PROVOCA UNA REAZIONE DELL'AMBIENTE CIRCOSTANTE CHE SI ESPRIME TRAMITE UNA FORZA UGUALE E CONTRARIA ALLA FORZA

L'ACCELERAZIONE VALE

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

IL MOTO È ARMONICO SEMPLICE CON PULSAZIONE $\omega$ E PERIODO T, DOVE

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad E \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

QUANDO LA MOLLA VIENE DEFORMATA, CIOÈ ESTESA O COMPRESSA, ESSA TENDERÀ A RITORNARE ALLA SUA CONDIZIONE DI RIPOSO, SECONDO UNA FORZA DI RICHIAMO PROPORZIONALE ALLA DEFORMAZIONE FINO A CHE NON SI SUPERA IL LIMITE DI ELASTICITÀ DELLA MOLLA.

5) DISCUTI IL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE SOTTO L'AZIONE DI UNA FORZA VISCOSA

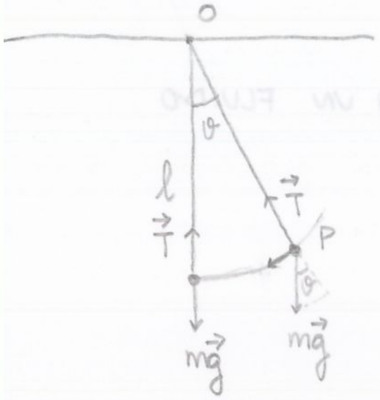
LA FORZA DI ATTRITO VISCOSO È UNA FORZA CHE SI OPPONE AL MOTO ED È PROPORZIONALE ALLA VELOCITÀ DEL CORPO SOGGETTO ALLA FORZA

$$\vec{F} = -\eta\vec{v}$$

IL MOTO NON È RETTILINEO E SI RICAVA CHE IL MODULO DELLA VELOCITÀ PRESENTA UNA DECRESCITA ESPONENZIALE NEL TEMPO.

È IMPORTANTE SOTTOLINEARE CHE TRAMITE LA FORZA DI ATTRITO VISCOSO

AL PUNTO P LE EQUAZIONI DINAMICHE DIVENTANO




$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = ma_N \\ -mg\sin\theta = ma_T \end{cases}$$

8) MOSTRA CHE UN PENDOLO MATEMATICO FINO AL SUO ANGOLO LIMITE SI MUOVE DI MOTO ARMONICO SEMPLICE


$$s = l\theta$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d}{dt}(l\theta) = l\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(l\frac{d\theta}{dt}\right) = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$\sin\theta \sim \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \rightarrow \theta(t) = A\sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

QUANDO F È LA SOMMA DI m FORZE, IL LAVORO È PARI ALLA SOMMA DEI LAVORI DELLE SINGOLE FORZE, CHE PUÒ ESSERE POSITIVO, NULLO O NEGATIVO.

LA POTENZA CORRISPONDE AL LAVORO PER UNITÀ DI TEMPO. È ISTANTANEA SE CONSIDERATO UN INTERVALLO INFINITESIMO dt, MEDIA SE CONSIDERATO IL TEMPO t DURANTE CUI IL LAVORO È STATO SVOLTO

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\frac{dr}{dt} = \vec{F} \cdot V = F_T V$$

$$P_m = \frac{W}{t}$$

LE RISPETTIVE UNITÀ DI MISURA DI LAVORO E POTENZA SONO JOULE (J) E WATT ($W = \frac{J}{s}$)

2) ENUNCIA IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

CONSIDERANDO IL LAVORO INFINITESIMO PER UNO SPOSTAMENTO ds, ABBIAMO

$$dW = F_T\, ds = m a_T\, ds = m \frac{dV}{dt} ds = m V dV$$

INTEGRANDO OTTENIAMO:

$$\int dW = \int_A^B mV\, dV \longrightarrow W = \frac{1}{2} m V_B^{\,2} - \frac{1}{2} m V_A^{\,2} = E_{K_B} - E_{K_A} = \Delta E_K$$

DOVE $\Delta E_K$ È LA DIFFERENZA DI ENERGIA CINETICA DEL PUNTO B DAL PUNTO A. DA QUESTO TEOREMA SI DEDUCE QUINDI CHE QUALUNQUE SIA LA FORZA AGENTE NELLO SPOSTAMENTO LUNGO LA TRAIETTORIA DA A A B IL LAVORO

4) VALUTARE IL LAVORO FATTO DA UNA FORZA COSTANTE F.

PUÒ ESSERE VALUTATO ESATTAMENTE COME FATTO PER LA FORZA PESO NELLA DOMANDA PRECEDENTE (ESSENDO ANCHE ESSA COSTANTE)

$$F = \text{costante} = F_x \vec{u_x} + F_y \vec{u_y} + F_z \vec{u_z}$$

$$dr = dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z}$$

$$W^{\gamma}_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\,\vec{dr} = \int_A^B (F_x \vec{u_x} + F_y \vec{u_y} + F_z \vec{u_z})(dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z})$$

$$= \int_A^B F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = F_x \int_A^B dx + F_y \int_A^B dy + F_z \int_A^B dz =$$

$$= \left\{ F_x x_B + F_y y_B + F_z z_B \right\} - \left\{ F_x x_A + F_y y_A + F_z z_A \right\}$$

$$= E_{p_B} - E_{p_A}$$

IN QUESTO CASO IL LAVORO FATTO È UGUALE ALLA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE (ASSE PRESO CONCORDE ALLA FORZA) ED È COMUNQUE INDIPENDENTE DAL PERCORSO, MA CONTANO SOLAMENTE I PUNTI A E B.

5) CHE COS'È UNA FORZA CENTRALE?

È UNA FORZA DIRETTA SEMPRE VERSO UN PUNTO O (CHIAMATO CENTRO DI FORZA), CHE HA DIREZIONE DETERMINATA DALLA RETTA CONGIUNGENTE UN IPOTETICO PUNTO P ED O, E MODULO CHE DIPENDE SOLO DALLA DISTANZA $\overline{OP}$.

COME MOSTRATO NEL DISEGNO, LA FORZA PUÒ ESSERE

7) DISCUTI IL CASO PARTICOLARE DELLA FORZA DI COULOMB E DELLA FORZA CENTRALE $F = -Kr$ (DOVE K È UNA COSTANTE).

IL CASO PARTICOLARE DELLA FORZA DI COULOMB, CHE HA FORMULA $\vec{F} = K \frac{Qq}{r^2} \vec{u_r}$, È UGUALE A QUELLO FATTO NELLA DOMANDA PRECEDENTE (ESSENDO UNA FORZA CENTRALE

$$W^{\gamma}_{A \to B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B K \frac{Qq}{r^2} \vec{u_r} (dr\, \vec{u_r} + r\, d\theta\, \vec{u_\theta}) =$$

$$= \int_A^B K \frac{Qq}{r^2} dr = KQq \left[ -\frac{1}{r} \right]_A^B = K \frac{Qq}{r_A} - K \frac{Qq}{r_B}$$

SI PROCEDE IN UNO STESSO MODO PER UNA FORZA CENTRALE DEL TIPO $F = -K r \vec{u_r}$

$$W = \int_A^B \vec{F} dr = \int_A^B -Kr\, dr = -K \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_A^B = \frac{1}{2} K r_A^2 - \frac{1}{2} K r_B^2$$

UNA FORZA DI QUESTO TIPO È QUELLA ELASTICA, NELLA QUALE SI HA APPUNTO IL LAVORO ESPRESSO COME L'OPPOSTO DELLA VARIAZIONE DELL'ENERGIA POTENZIALE TRA LA POSIZIONE FINALE E QUELLA INIZIALE

$$-\left( \frac{1}{2} K r_B^2 - \frac{1}{2} K r_A^2 \right) = -(E_{PB} - E_{PA}) = -\Delta E_P$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 208

PESO E LE FORZE CENTRALI).
SE UNA FORZA È CONSERVATIVA, W È UGUALE ALLA DIFFERENZA TRA UNA "PROPRIETÀ" DEL PUNTO DI PARTENZA E QUELLO DI ARRIVO. IN GENERALE:

- PER LE FORZE CONSERVATIVE IL LAVORO È UGUALE ALL'OPPOSTO DELLA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE
- NON ESISTE UNA FORMULA GENERALE DELL'ENERGIA POTENZIAL MA CAMBIA A SECONDA DELLE FORZE CONSIDERATE

UNA FORZA CONSERVATIV. FA LAVORO NULLO QUANDO NON C'È SPOSTAMENTO O QUANDO IL PERCORSO È CHIUSO (HA CIRCUITAZIONE NULLA).

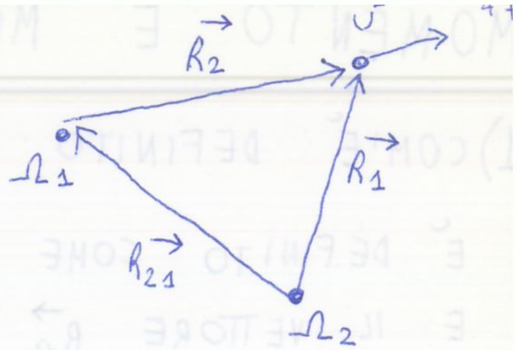
LE FORZE PER LE QUALI INVECE NON VALE LA PROPRIET DI INVARIANZA RISPETTO AL PERCORSO, SONO DETTE NON CONSERVATIVE. UN ESEMPIO DI QUESTE SONO LE FORZE DISSIPATIVE, COME LA FORZA DI ATTRITO. I LAVORI DI QUESTE FORZE SI CALCOLANO COME VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 208

$\vec{M_1} = \vec{R_1} \times \vec{v}$

$\vec{M_2} = \vec{R_2} \times \vec{v}$




$\vec{R_1} = \vec{R_{21}} + \vec{R_2}$ (per la regola del parallelogramma)

$$\vec{M_1} = (\vec{R_{21}} + \vec{R_2}) \times \vec{v} = \vec{R_{21}} \times \vec{v} + \vec{R_2} \times \vec{v} = \vec{R_{21}} \times \vec{v} + \vec{M_2}$$

SI DIMOSTRA QUINDI CHE CAMBIANDO IL POLO, CAMBIA L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO (E IL MOMENTO STESSO) PRECEDENTEMENTE VALUTATO CON UN ALTRO POLO.

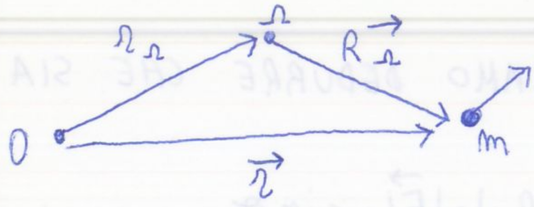
3) COS'È IL MOMENTO DI UNA FORZA F RISPETTO A UN PUNTO $\Omega$? COM'È DIRETTO?

È, COME RIPORTATO NELLA DOMANDA 1 A PAG. , IL PRODOTTO VETTORIALE TRA IL VETTORE $\vec{R\Omega}$ (DISTANZA TRA PUNTO $\Omega$ E PUNTO DI APPLICAZIONE DI $\vec{F}$) E $\vec{F}$.

$$\vec{M_\Omega} = \vec{R_\Omega} \times \vec{F}$$


DIMENSIONALMENTE È UGUALE A $\left[M \cdot \frac{L^2}{T^2}\right]$ E SI ESPRIME QUINDI IN N·m (NON IN JOULE COME LE ENERGIE IN QUANTO IL MOMENTO È UNA QUANTITÀ VETTORIALE E NON SCALARE).

È DIRETTO PERPENDICOLARMENTE SIA A $\vec{R\Omega}$ CHE A $\vec{F}$, E IL SUO VERSO È STABILITO CON LA REGOLA DELLA MANO DESTRA.




se $\Omega$ in moto, $\vec{r_\Omega}$ cambia (altrimenti rimane costante)

$$\frac{d\vec{L_\Omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{R_\Omega} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{R_\Omega}}{dt} \times \vec{p} + \vec{R_\Omega} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\overset{*}{=} (\vec{V} - \vec{V_\Omega}) \times \vec{p} + \vec{R_\Omega} \times \vec{F}$$

$$= \vec{V} \times \vec{p} - \vec{V_\Omega} \times \vec{p} + \vec{M_\Omega}$$

$$= \vec{V} \times (m\vec{V}) - \vec{V_\Omega} \times \vec{p} + \vec{M_\Omega}$$

$$= \boxed{-\vec{V_\Omega} \times \vec{p} + \vec{M_\Omega}}$$

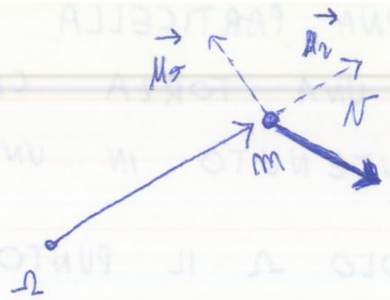
$*$ $\vec{r} = \vec{r_\Omega} + \vec{R_\Omega} \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r_\Omega}}{dt} + \frac{d\vec{R_\Omega}}{dt}$

$$\rightarrow \vec{V} = \vec{V_\Omega} + \frac{d\vec{R_\Omega}}{dt}$$

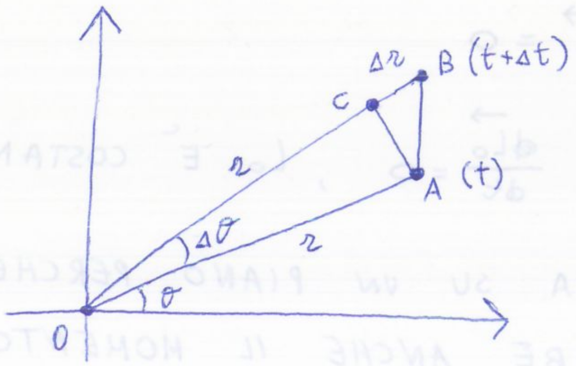
SE IL POLO $\Omega$ RISULTASSE FERMO, $\frac{d\vec{r_\Omega}}{dt} = 0$ QUINDI $\vec{V_\Omega} = 0$ E $\boxed{\frac{d\vec{L_\Omega}}{dt} = \vec{M_\Omega}}$

7) COS'È UNA FORZA CENTRALE?

VEDI DOMANDA 5 IN "LAVORO, ENERGIA, CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA" A PAGINA




10) MOSTRARE CHE UNA PARTICELLA L'AZIONE SOLAMENTE DI UNA FORZA CENTRALE, LA SUA VELOCITÀ AREOLARE DEFINITA COME $\frac{dS}{dt}$ (DOVE S È L'AREA PERCORSA DAL VETTORE POSIZIONE DELLA PARTICELLA RISPETTO AL CENTRO DI FORZA) È COSTANTE.




$$\Delta A_{OAB} = \Delta A_{OAC} + \Delta A_{ACB}$$

$$\Delta A = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{AC}}{2} + \frac{\overline{AC}\cdot\overline{CB}}{2} = \frac{1}{2} r \cdot r\Delta\theta + \frac{1}{2} r\, d\theta\, \Delta r$$

PER SPOSTAMENTI INFINITESIMI $\Delta r$ NO, QUINDI

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \\ L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = cost. \end{cases} \quad \text{QUINDI} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{COSTANTE}$$

# SISTEMI DI PARTICELLE

1) COS'È UN SISTEMA DI PARTICELLE?

È UN SISTEMA DI m PUNTI MATERIALI, CON m MAGGIORE DI 1, INTERAGENTI TRA DI LORO E CON IL RESTO DELLO UNIVERSO

2) DISCUTI LA DIFFERENZA TRA FORZE INTERNE ED ESTERNE

LA FORZA $F_i$ AGENTE SULL'i-ESIMO PUNTO SI PUÒ PENSARE COME RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE AGENTI SUL PUNTO ($F_i^{est}$) E DELLE FORZE INTERNE ESERCITATE DAGLI ALTRI m-1 PUNTI ($F_i^{int}$).

$$F_i = F_i^{est} + F_i^{int}$$

UNA FORZA INTERNA NASCE QUINDI TRA DUE PARTICELLE PRESENTI NEL SISTEMA, MENTRE UNA FORZA ESTERNA NASCE DALL'INTERAZIONE DI UNA PARTICELLA NON APPARTENENTE AL SISTEMA, CON UNA CHE VI APPARTIENE.

3) MOSTRARE CHE LA RISULTANTE DELLE FORZE INTERNE DI UN SISTEMA DI PARTICELLE È UGUALE A ZERO.

LA RISULTANTE DELLE FORZE INTERNE $\vec{R}^{int}$ È:

$$\vec{R}^{int} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^{int} = \sum_{i=1}^{N} \left( \sum_{J=1}^{N} F_{Ji} \right) = \sum_{iJ} \vec{F_{Ji}}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{iJ} \vec{F_{Ji}} + \sum_{Ji} \vec{F_{iJ}} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{iJ} \underbrace{\left( \vec{F_{Ji}} + \vec{F_{iJ}} \right)}_{=0} = 0$$

$$V_{CM} = \frac{dr_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{dr_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i V_i}{\sum m_i} = \frac{P}{M}$$

QUINDI È VERIFICATO CHE $V_{CM} = \frac{P}{M} \rightarrow \boxed{P = V_{CM} \cdot M}$

6) DERIVARE L'EQUAZIONE $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{est}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M \cdot \vec{V_{CM}}) = M \frac{d\vec{V_{CM}}}{dt} = M \vec{a_{CM}} = \vec{R}^{est}$$

SE LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È NULLA, L'ACCELERAZIONE DEL CENTRO DI MASSA È ZERO, QUINDI $V_{CM}$ È COSTANTE.

POSSIAMO ANCHE DIRE QUINDI CHE SE LA QUANTITÀ DI MOTO CAMBIA, LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È DIVERSA DA ZERO.

7) MOSTRARE CHE SE UN CORPO PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME FORMATO DA DUE PARTI, IL SUO CM PUÒ ESSERE RISCONTRATO SE IL CM DELLE DUE COMPONENTI È NOTO

SE UNA PARTE DEL CORPO È UN SISTEMA DI $i$ PARTICELLE DI MASSA $m_i$, E L'ALTRA PARTE UN SISTEMA DI $J$ PARTICELLE DI MASSA $m_J$, LA POSIZIONE DEL CM DEL CORPO È:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 208

DOVE $M_\Omega^{int} = 0$ PERCHÈ PRODOTTO VETTORIALE DI VETTORI PARALLELI, QUINDI ANCHE PER I SISTEMI DI $i$ PARTICELLE VALE 

$$\frac{dL_\Omega}{dt} = -V_\Omega \times P + M_\Omega^{est}$$

9) CHE COS'È IL SISTEMA DI RIFERIMENTO CM?

È UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE HA COME ORIGINE IL CM, E GLI ASSI MANTENGONO LA STESSA DIREZIONE RISPETTO A QUELLI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE (ASSUNTI PARALLELI A QUEST'ULTIMI, INFATTI).
IN GENERALE È UN SISTEMA NON INERZIALE PERCHÈ È IN MOTO TRASLATORIO, MA NON NECESSARIAMENTE RETTILINEO UNIFORME (LO È SOLO SE $\vec{R}^{est} = 0$ E QUINDI $\vec{a}_{CM} = 0$).

10) PERCHÈ

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' = 0 \quad E \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\,' = 0$$

DOVE $\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i\,'$ SONO I VETTORI POSIZIONE DELLA i-ESIMA PARTICELLA RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE E RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO CM, RISPETTIVAMENTE?

12) DIMOSTRARE CHE

$$L_0 = r_{CM} \times P + L'_{CM}$$

(DOVE $L'_{CM}$ È IL MOMENTO ANGOLARE RELATIVO AL CM)

È IL TEOREMA DI KÖNIG DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{L_0} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r_{CM}} + \vec{r_i'}) \times m_i (\vec{v_{CM}} + \vec{v_i'})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \{ \vec{r_{CM}} \times m_i \vec{v_{CM}} + \vec{r_{CM}} \times \underbrace{m_i \vec{v_i'}}_{0} + \vec{r_i'} \times m_i \vec{v_{CM}} + \underbrace{\vec{r_i'} \times m_i \vec{v_i'}}_{0}$$

$$= \vec{r_{CM}} \times M\vec{v_{CM}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i'} \times m_i \vec{v_{CM}} = \vec{r_{CM}} \times \vec{p} + \vec{L'_{CM}}$$

$$(\vec{L_{CM}})$$

3) MOSTRARE CHE

$$E_K = \frac{1}{2} V_{CM}^2 + E'_K$$

DOVE $E'_K$ È L'ENERGIA CINETICA RELATIVA AL SISTEMA DI RIFERIMENTO CM.

È IL TEOREMA DI KÖNIG DELL'ENERGIA CINETICA

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} E_{Ki} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v_{CM}} + \vec{v_i'})^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{N} (v_{CM}^2 + 2 v_{CM} v_i' + v_i'^2) m_i \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{CM}^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i v_i' v_{CM}}_{0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_K' = E_{KCM} + E_K'$$

QUINDI

$$\left[E_K(B1) + E_K(B2)\right] - \left[E_K(A1) + E_K(A2)\right] =$$

$$= W_{A1 \to B1}^{est} + W_{A2 \to B2}^{est} + W_{A1 \to B1}^{int} + W_{A2 \to B2}^{int} =$$

$$= E_K(B) - E_K(A) = W_{A \to B}^{est} + W_{A \to B}^{int}$$

QUINDI SIA LE FORZE ESTERNE CHE QUELLE INTERNE "FANNO LAVORO".

IL LAVORO COMPLESSIVO DI ESTERNE E INTERNE CHE AGISCONO SU UN SISTEMA DI PUNTI È UGUALE ALLA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA. QUESTA VOLTA IL CONTRIBUTO DI QUELLE INTERNE NON SCOMPARE PERCHÈ FORMATO DA TANTI TERMINI "$F_{ij} \cdot dr_{ij}$", IN GENERE, NON NULLI E CON SOMMA DIVERSA DA ZERO.

QUESTA STRUTTURA IMPLICA CHE AL LAVORO DELLE FORZE INTERNE È LEGATO UN CAMBIAMENTO DELLE DISTANZE MUTUE TRA I VARI PUNTI (PERCHÈ SE FOSSE COSTANTE, $dr_{ij} = 0$ E QUINDI $W^{int} = 0$, CHE È CIÒ CHE ACCADE NEI CORPI RIGIDI).

IL TH. DELL'ENERGIA CINETICA È DIMOSTRATO IN QUANTO

$$dW_i = F_i \cdot dr_i = m_i V_i \, dV_i$$

17) DIMOSTRARE CHE NEL CASO DI FORZE ESTERNE PARALLELE A UNA DIREZIONE DATA $\vec{u}$, $\vec{F_i} = F_i \vec{u}$, LA FORZA EQUIVALENTE HA MODULO

$$f = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}$$

E DEVE ESSERE APPLICATA AL PUNTO

$$\Omega G = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^{N} F_i R_{\Omega_i} + \frac{\lambda}{f} \vec{u}$$

DOVE L'ULTIMO TERMINE NON È ESSENZIALE.

ESSENDO FORZE CON LA STESSA DIREZIONE $\vec{u}$, POSSIAMO SCRIVERE LA RISULTANTE:

$$R = \sum_{i=1}^{N} F_i = \left(\sum_{i=1}^{N} F_i\right) \vec{u}$$

ANCH'ESSA PARALLELA A $\vec{u}$.

IL MOMENTO RISULTANTE È DATO DA:

$$M = \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_i \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{N} F_i r_i\right) \times \vec{u}$$

CHE È ORTOGONALE A $\vec{u}$.

DEVE ESSERE QUINDI POSSIBILE TROVARE UN PUNTO C DOVE APPLICARE $\vec{R}$ TALE CHE

$$\vec{M} = \vec{OC} \times \vec{R} = \vec{r_c} \times \vec{R}$$

EGUAGLIANDO LE DUE ESPRESSIONI DI M TROVIAMO:

# CORPO RIGIDO

) CHE COS'È UN CORPO RIGIDO?

N CORPO RIGIDO È UN SISTEMA MATERIALE INDEFORMABILE: LA ISTANZA RELATIVA FRA DUE QUALUNQUE PUNTI COSTITUENTI UN ORPO RIGIDO È IMMUTABILE.

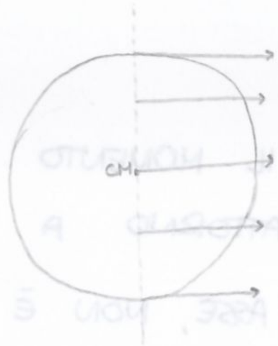
) CHE COSA SONO I GRADI DI LIBERTÀ DI UN CORPO RIGIDO?

N CORPO RIGIDO LIBERO DI MUOVERSI NELLO SPAZIO COSTITUISC N SISTEMA A SEI GRADI DI LIBERTÀ: UNA VOLTA SPECIFICATA LA OSIZIONE DI UN PUNTO TRAMITE TRE COORDINATE, IL CORPO PUÒ NCORA RUOTARE ATTORNO A UN ASSE QUALUNQUE PASSANTE PER UEL PUNTO, PER FISSARE LA DIREZIONE DI UN ASSE SOLIDALE AL ORPO E PASSANTE PER QUEL PUNTO È NECESSARIO SPECIFICARE UE ANGOLI; E UN TERZO ANGOLO È NECESSARIO PER SPECIFICAR 'ANGOLO DI ROTAZIONE INTORNO A QUELL'ASSE.

(CHE PUÒ VARIARE NEL TEMPO) COINCIDENTE CON LA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA $\vec{V}_{CM}$. QUINDI SE È NOTO IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA È NOTO QUELLO DI QUALSIASI ALTRO PUNTO. NON ESSENDOCI MOVIMENTO DEI PUNTI COSTITUENTI IL CORPO RISPETTO AL CENTRO DI MASSA, LE GRANDEZZE SIGNIFICATIVE IN TRASLAZIONE SONO:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r} \times M\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{F} = M\vec{a}_{CM}$$

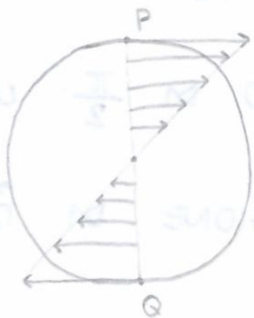



$V_i = V_{CM}$

5) DISCUTI IL MOTO DI PURO ROTOLAMENTO ATTORNO A UN ASSE FISSO.

NEL MOTO DI PURO ROTOLAMENTO TUTTI I PUNTI DESCRIVONO UN MOTO CIRCOLARE CON VELOCITÀ ANGOLARE $\omega$ IN FUNZIONE DEL TEMPO. L'EQUAZIONE DINAMICA DEL MOTO DI ROTAZIONE È

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$




$V_P = \omega R$

$V_Q = -\omega R$

6) CHE COS'È UN MOTO DI ROTOTRASLAZIONE ATTORNO AD UN ASSE FISSO?

ED È ORTOGONALE AL PIANO INDIVIDUATO DAI VETTORI $\vec{v}_i$ E $\vec{r}_i$

L MODULO DI $\vec{L}_{O_i}$ È

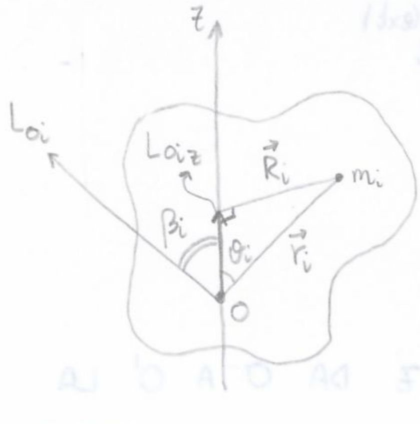
$$L_{O_i} = r_i m_i v_i = r_i m_i \omega r_i \sin\vartheta_i = m_i \omega r_i^2 \sin\vartheta_i$$

L MOMENTO ANGOLARE DEL CORPO È

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

NON PARALLELO ALL'ASSE DI ROTAZIONE

) MOSTRA CHE $L_z = I_z \omega$, DOVE $I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$ È IL MOMENTO D'INERZIA DEL CORPO RISPETTO ALL'ASSE $z$, NELLA DEFINIZIONE DI $I_z$, $R_i$ È LA DISTANZA DELLA MASSA $m_i$ DALL'ASSE




$$L_{O_{iz}} = L_{O_i} \cos\beta_i = L_{O_i} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_i\right) = L_{O_i} \sin\vartheta_i =$$

$$= m_i \omega r_i^2 \sin\vartheta_i \cdot \sin\vartheta_i = m_i \omega r_i^2 \sin^2\vartheta_i = m_i R_i^2 \omega$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{O_{iz}} = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \omega$$

$$\longrightarrow \quad L_z = \omega \left( \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \right) = I_z \omega$$

3) DIMOSTRA CHE CAMBIANDO IL POLO SULL'ASSE $z$ DA O A O', IL MOMENTO TOTALE DELLE FORZE ESTERNE CAMBIA SECONDO LA LEGGE $\vec{M}_{O'}^{(ext)} = h\vec{k} \times \vec{R}^{(ext)} + \vec{M}_O^{(ext)}$

NULLO. QUINDI

$$M_{O'z}^{(ext)} = M_{Oz}^{(ext)}$$

1) DIMOSTRA CHE L'EQUAZIONE FONDAMENTALE DEL CORPO RIGIDO CHE RUOTA ATTORNO ALL'ASSE $z$ È

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{(ext)}$$

DAL MOMENTO CHE $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = M_O^{(ext)}$, CONSIDERANDO UN POLO FISSO O SULL'ASSE DI ROTAZIONE, SI PUÒ CONSIDERARE LA COMPONENTE SULL'ASSE $z$ DEL MOMENTO, QUINDI

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{O,z}^{(ext)}$$

POICHÈ $L_z = I_z \omega$, IN CUI È SOLO LA VELOCITÀ ANGOLARE $\omega$ A POTER CAMBIARE AL VARIARE TEMPO DIREZIONE, MODULO E VERSO, SI PUÒ SCRIVERE:

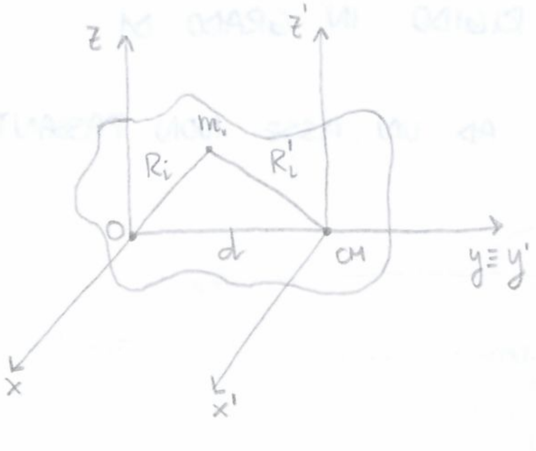
$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{(ext)}$$

2) CALCOLA L'ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO CHE RUOTA ATTORNO ALL'ASSE $z$.

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \qquad \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{M}_\perp$$


N EFFETTO DEL MOTO DI PRECESSIONE È QUELLO DI FAR CAMBIARE IREZIONE ALL'ASSE DI ROTAZIONE, QUINDI OCCORRONO OPPORTUNI UPPORTI PER MANTENERE L'ASSE NELLA POSIZIONE VERTICALE. QUESTE ITUAZIONI SAREBBERO DA EVITARE IN QUANTO NASCONO SOLLECITAZIONI UI SUPPORTI DELL'ASSE CHE POSSONO PORTARE A VIBRAZIONI E ANCHE LLA ROTTURA DELL'ASSE

4) DIMOSTRA CHE $I_z = I_{CM} + Md^2$, DOVE L'ASSE $z$ È PARALLELO ALL'ASSE DI ROTAZIONE, $z'$, PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA, $d$ È LA DISTANZA DAGLI ASSI $z$ E $z'$, E $M$ È LA MASSA TOTALE DEL CORPO.




PER DIMOSTRARE IL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER SI FA RIFERIMENTO A DUE SISTEMI CARTESIANI CORRELATI IN QUESTA MANIERA:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + d \\ z = z' \end{cases}$$

STATICO, L'AZIONE DEL PESO È TALE DA RIPORTARLO ALLA POSIZIONE PIÙ STABILE.

LE COORDINATE DEL CENTRO DI MASSA SONO

$$\begin{cases} x_{CM} = h \sin\vartheta \\ y_{CM} = -h\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\vec{M}_o^{(ext)} = \vec{r}_{CM} \times (m\vec{g}) = h(\vec{u}_x \sin\vartheta - \vec{u}_y \cos\vartheta) \times (-mg\,\vec{u}_y) = -mgh\sin\vartheta\,\vec{u}_z$$

$$I_o \frac{d\omega}{dt} = M^{(ext)} \rightarrow \quad I_o \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mgh\sin\vartheta \rightarrow I_o\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + mgh\sin\vartheta = 0$$

SE $\sin\vartheta \sim \vartheta$ ALLORA

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_o}\vartheta = 0$$

CHE È L'EQUAZIONE DEL MOTO ARMONICO

SI PUÒ CONSIDERARE, IN PARALLELO AL MOTO ARMONICO, $\omega^2 = \frac{mgh}{I_o}$

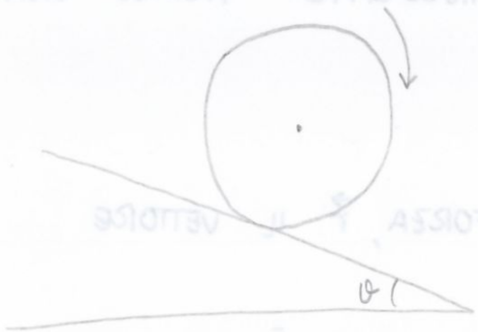
QUINDI $T = \frac{2\pi}{\omega}$, OVVERO $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mgh}}$

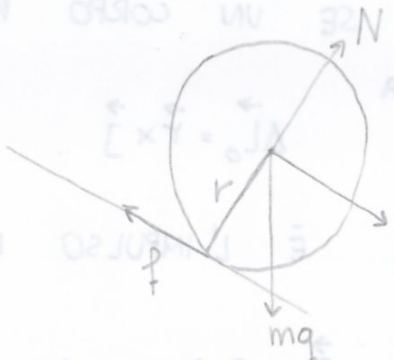
6) DIMOSTRA CHE PER UN PENDOLO FISICO CI SONO DUE ASSI, SITUATI IN PUNTI OPPOSTI DEL CENTRO DI MASSA, PER CUI IL PERIODO DI OSCILLAZIONE È LO STESSO

DALLA RELAZIONE

$$\vec{V}_{CM} = \vec{r} \times \vec{\omega}$$

18) DISCUTI IL MOTO DI UN DISCO SU UN PIANO INCLINATO CON COEFFICIENTI DI ATTRITO RADENTE $\mu_s$ E $\mu_k$. QUAL È LA CONDIZIONE DI MOTO SENZA SLITTAMENTO? COSA ACCADE QUANDO QUESTA CONDIZIONE NON SI REALIZZA?




$$\begin{cases} m \dfrac{dv_{CM}}{dt} = mg\sin\vartheta - f \\ I \dfrac{d\omega}{dt} = fr \end{cases} \rightarrow \frac{I}{r}\frac{dv_{CM}}{dt} = fr \qquad I_{disco} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\cancel{r^2}\frac{1}{\cancel{r}}\frac{dv_{CM}}{dt} = f\cancel{r}$$

SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO

$$\frac{3}{2}\cancel{m}\frac{dv_{CM}}{dt} = \cancel{m}g\sin\vartheta \rightarrow \frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{2}{3}g\sin\vartheta$$

$$f \le \mu_s mg\sin\vartheta$$

$$\frac{2}{3}g\sin\vartheta = g\sin\vartheta - \mu_s g\cos\vartheta \rightarrow -\mu_s\cos\vartheta = -\frac{1}{3}\sin\vartheta$$

$$tg\vartheta = 3\mu_s$$

0) QUALI SONO LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA STATICA?

A CONDIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO PER UN CORPO RIGIDO

: CHE LA RISULTANTE DELLE FORZE APPLICATE AL CORPO E LA

OMMA DEI MOMENTI SIA NULLA

$$\begin{cases} \vec{R}^{(ext)} = 0 \\ \vec{M}^{(ext)} = 0 \end{cases}$$

) PERCHÈ IN UN URTO LE FORZE ESTERNE SONO DI SOLITO TRASCURABILI RISPETTO ALLE FORZE INTERNE?

N UN' INTERAZIONE FRA DUE PUNTI MATERIALI, AFFINCHÈ CI SIA UN RTO È NECESSARIO CHE SIA VERIFICATA LA CONDIZIONE CHE IL EMPO DI INTERAZIONE $\Delta t$ SIA COSÌ BREVE DA RENDERE ININFLUEN E IL CONTESTUALE EFFETTO DI EVENTUALI FORZE ESTERNE. POICHÈ UESTE ULTIME HANNO IN GENERALE UN ANDAMENTO REGOLARE N FUNZIONE DEI RISPETTIVI IMPULSI, SONO INFINITESIMI SIMULTANEI . $\Delta t$. QUANDO AVVIENE L'URTO TRA CORPI INDEFORMABILI IN UN REVISSIMO INTERVALLO DI TEMPO LE FORZE MUTUE DIVENTANO INTENS IME DI MOLTI ORDINI DI GRANDEZZA PIÙ INTENSE DELLE FORZE ESTERNE.

) PERCHÈ IN UN URTO TRA DUE PUNTI MATERIALI LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA, $\vec{p}(0^-) = \vec{p}(0^+)$, DOVE $0^-$ E $0^+$ SIGNIFICANO SUBITO PRIMA E SUBITO DOPO L'URTO, SI ASSUME A $t=0$?

AL MOMENTO CHE L'URTO È UN' INTERAZIONE MOLTO INTENSA IN CUI E FORZE ESTERNE VENGONO TRASCURATE, SI PUÒ AFFERMARE CHE URANTE IL FENOMENO IL SISTEMA DEI DUE OGGETTI PUÒ ESSERE

DEL SISTEMA DOPO L'URTO È PARI ALL'ENERGIA CINETICA TOTALE PRIMA DELL'URTO. MENTRE IN UN URTO ANELASTICO L'ENERGIA CINETICA TOTALE DEL SISTEMA È MINORE DELL'ENERGIA CINETICA PRIMA DELL'URTO.

) DISCUTI L'URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO IN UNA DIMENSIONE TRA DUE PUNTI MATERIALI. MOSTRA CHE IN QUESTO CASO LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA È DATA DA

$$\Delta E_k = E_k(0^+) - E_k(0^-) = -\frac{1}{2}\mu(v_{1i} - v_{2i})^2$$

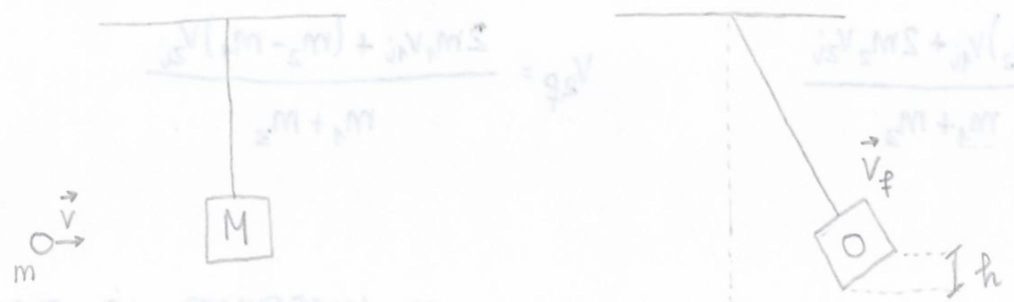
DOVE $v_{1i}$ E $v_{2i}$ SONO LE VELOCITÀ INIZIALI DELLA PARTICELLA 1 E 2 DI MASSA $m_1$ E $m_2$, RISPETTIVAMENTE, E $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ È LA MASSA RIDOTTA.

NEL CASO DI URTI ANELASTICI VI È LA PRESENZA DI UNA O PIÙ FORZE DISSIPATIVE; PER QUESTO MOTIVO L'ENERGIA CINETICA TOTALE DEL SISTEMA DIMINUISCE DOPO L'URTO.

POICHÈ NELLA MAGGIOR PARTE DEI CASI IN QUESTO TIPO DI URTO, LE PARTICELLE PROCEDONO INSIEME DOPO LA COLLISIONE, ESSE SI MUOVERANNO CON VELOCITÀ FRA DI LORO UGUALI E PARI ALLA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA. INFATTI

MENTE CON VELOCITÀ $\vec{v}$, URTA IL PENDOLO RIMANENDO CONFICCATO. TERMINATA LA COLLISIONE IL PENDOLO CON IL PROIETTILE INIZIA A OSCILLARE RAGGIUNGENDO UN'ALTEZZA $h$, RISPETTO ALLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO.

DAL MOMENTO CHE L'ENERGIA POTENZIALE NEL PUNTO DI ALTEZZA MASSIMA EGUAGLIA L'ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA, SI È IN GRADO DI CALCOLARE LA VELOCITÀ.




PER LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$mv = (m+M)v_f$$

DOPO L'URTO

$$\frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = (m+M)gh \rightarrow v_f = \sqrt{2gh} \qquad v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

) CHE COS'È UN URTO ELASTICO?

SI DEFINISCE COME URTO ELASTICO UN URTO DURANTE IL QUALE SI CONSERVA OLTRE ALLA QUANTITÀ DI MOTO ANCHE L'ENERGIA CINETICA

$$m_1 (V_{1i} + V_{1f})(V_{1i} - V_{1f}) = m_2 (V_{2f} + V_{2i})(V_{2f} - V_{2i})$$

MA POICHÉ $V_{1i} + V_{1f} = V_{2f} + V_{2i}$

SI PUÒ SCRIVERE $m_1 (V_{1i} - V_{1f}) = m_2 (V_{2f} - V_{2i})$

METTENDO A SISTEMA LE DUE EQUAZIONI

$$\begin{cases} V_{1i} - V_{2i} = V_{2f} - V_{1i} \\ m_1 (V_{1i} - V_{1f}) = m_2 (V_{2f} - V_{2i}) \end{cases} \rightarrow \quad V_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) V_{1i} + 2 m_2 V_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad V_{2f} = \frac{2 m_1 V_{1i} + (m_2 - m_1) V_{2i}}{m_1 + m_2}$$

b) DISCUTI I CASI SPECIALI DOVE $m_1 = m_2$, $m_1 \gg m_2$ E $m_1 \ll m_2$

SE $m_1 = m_2$

$$\begin{cases} V_{1f} = V_{2i} \\ V_{2f} = V_{1i} \end{cases}$$

A SEGUITO DELL'URTO SI OTTIENE UNO SCAMBIO DELLE VELOCITÀ

SE $m_1 \gg m_2$

$$\begin{cases} V_{1f} = V_{1i} \\ V_{2f} = 2 V_{1i} \end{cases}$$

SE IL PRIMO CORPO HA UNA MASSA MOLTO SUPERIORE AL SECONDO, DOPO L'URTO I DUE CORPI SI MUOVERANNO NELLO STESSO VERSO UGUALE A QUELLO DEL PRIMO CORPO PRIMA DELL'URTO SENZA MAI INCONTRARSI

SE $m_1 \ll m_2$ E $V_{2i} = 0$

$$\begin{cases} V_{1f} = -V_{1i} \\ V_{2f} = 0 \end{cases}$$

IN QUESTO CASO DOPO L'URTO IL PRIMO CORPO TORNA INDIETRO CON LA STESSA VELOCITÀ PRIMA DELL'URTO

# MOTO OSCILLATORIO

) COME È DEFINITO IL MOTO ARMONICO SEMPLICE?

. MOTO ARMONICO SEMPLICE LUNGO UN ASSE RETTILINEO È UN
IOTO VARIO LA CUI LEGGE ORARIA È DEFINITA DALLA RELAZIONE

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

OVE $A, \omega, \phi$ SONO GRANDEZZE COSTANTI: A È DETTA AMPIEZZA DEL
IOTO, $\omega t + \phi$ FASE DEL MOTO, $\phi$ FASE INIZIALE E $\omega$ PULSAZIONE.
SSO RISULTA ESSERE UN MOTO PERIODICO DI PERIODO T, IN QUANTO
D INTERVALLI DI TEMPI EGUALI IL PUNTO RIPASSA NELLA STESSA
OSIZIONE CON LA STESSA VELOCITÀ.

) QUAL È L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE CHE DESCRIVE IL MOTO ARMONICO
SEMPLICE? QUALI SONO LE SUE PROPRIETÀ?

: EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELL'OSCILLATORE ARMONICO

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

È UN'EQUAZIONE DEL SECONDO ORDINE LINEARE A COEFFICIENTI
COSTANTI, OMOGENEA.

A QUESTO PUNTO SI TRATTA DI RISOLVERE UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE. LA SOLUZIONE È LA SEGUENTE

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

CHE PUÒ ESSERE SCRITTA IN DUE MODI:

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ CON $a = A\cos\phi$ $b = A\sin\phi$

$x(t) = B\sin(\omega t + \psi)$ CON $a = -B\sin\psi$ $b = B\cos\psi$

QUINDI $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ È UNO DEI TRE MODI PER ESPRIMERE LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE.

c) VALUTA $A$ E $\phi$ IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI $x(0) = x_0$ E $v(0) = v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\sin\phi \\ v_0 = \omega A\cos\phi \end{cases} \longrightarrow \frac{x_0}{v_0} = \frac{1}{\omega}\operatorname{tg}\phi \rightarrow \operatorname{tg}\phi = \omega\frac{x_0}{v_0}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \operatorname{arctg}\left(\omega\frac{x_0}{v_0}\right)$$

$$\begin{cases} A\sin\phi = x_0 \\ A\cos\phi = \dfrac{v_0}{\omega} \end{cases} \longrightarrow A^2\sin^2\phi + A^2\cos^2\phi = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

DAL MOMENTO CHE $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$E_k = \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{k}{\cancel{m}} A^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) =$$

$$= \frac{1}{2} kA^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] =$$

$$= \frac{1}{2} kA^2$$

8) COME VIENE DEFINITO IL VALORE MEDIO DI UNA FUNZIONE $\langle f \rangle$?

PER IL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$$

9) COME VIENE DEFINITO IL VALORE MEDIO DI UNA FUNZIONE PERIODICA $\langle f \rangle$?

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \, dx = 0$$

10) MOSTRA CHE SE UNA PARTICELLA SI MUOVE DI M.A.S., $\langle x \rangle = 0$ E $\langle v \rangle = 0$, MENTRE $\langle E_p \rangle = \langle E_k \rangle = \frac{1}{4} kA^2$

DAL MOMENTO CHE $x = A \sin(\omega t + \phi)$ E $v = \omega A \cos(\omega t + \phi)$ SONO FUNZIONI

11) DISCUTI LA SOVRAPPOSIZIONE DEL M.A.S. CON LA STESSA PULSAZIONE, $x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$ E $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$. MOSTRA IN PARTICOLARE CHE L'AMPIEZZA DEL M.A.S. RISULTANTE È DATA DA

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

ENTRAMBI I MOTI OBBEDISCONO ALLA STESSA EQUAZIONE DIFFERENZIALE, CAMBIANO SOLO LE CONDIZIONI INIZIALI. SAPPIAMO INOLTRE CHE $x = x_1 + x_2$ È ANCORA SOLUZIONE. QUINDI LA SOMMA È UN MOTO ARMONICO CON LA STESSA PULSAZIONE

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0 \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = 0$$

$$\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} + \omega^2(x_1+x_2) = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

QUINDI

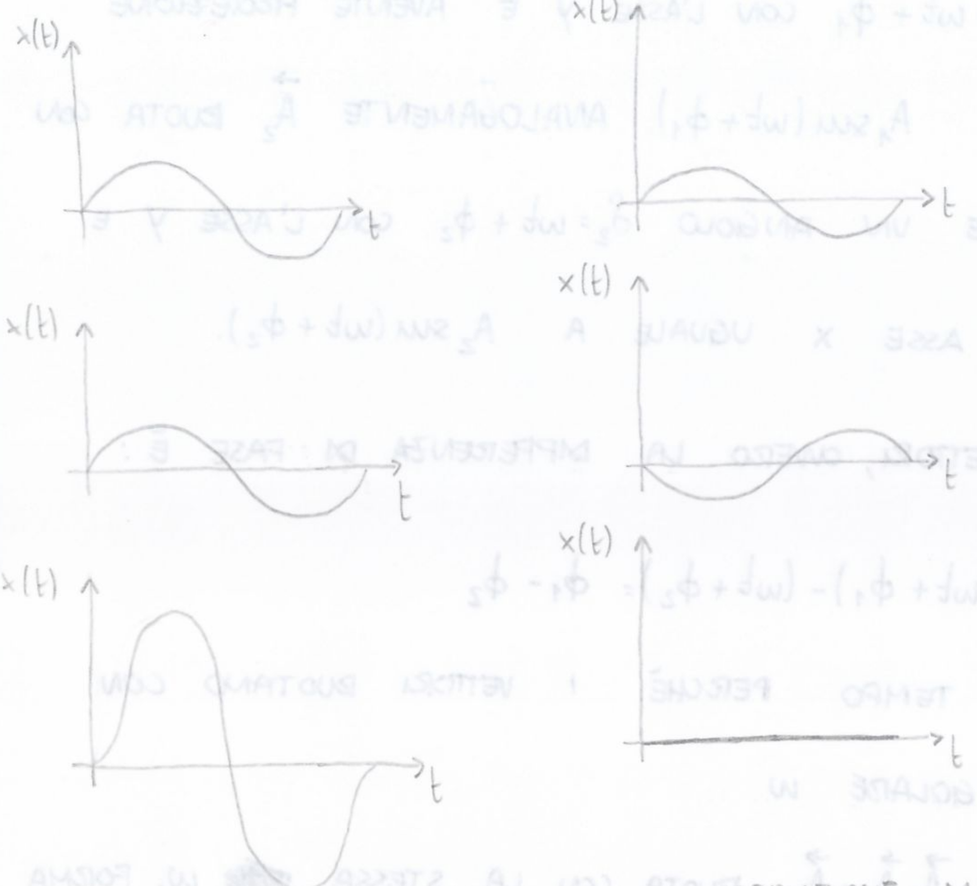
$$x = A\sin(\omega t + \phi) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$\Rightarrow A(\sin\omega t \cos\phi + \cos\omega t \sin\phi) = A_1(\sin\omega t \cos\phi_1 + \cos\omega t \sin\phi_1) + A_2(\sin\omega t \cos\phi_2 + \cos\omega t \sin$$

$$\underline{A\cos\phi} \sin\omega t + \underline{A\sin\phi} \cos\omega t = \underline{(A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2)}\sin\omega t + \underline{(A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2)}\cos\omega t$$

IN OPPOSIZIONE DI FASE

$\phi_1 - \phi_2 = (2n+1)\pi$ $\qquad A = A_1 - A_2$




IN FASE

IN OPPOSIZIONE DI FASE

3) IN CHE COSA CONSISTE IL METODO DEI VETTORI ROTANTI DI FRESNEL? RIOTTIENI IL RISULTATO PRECEDENTE ATTRAVERSO QUESTO METODO.

A COSTRUZIONE DI FRESNEL È BASATA SUL FATTO CHE LA PROIEZIONE I UN MOTO CIRCOLARE SU UN DIAMETRO È UN MOTO ARMONICO