



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1051

DATA: 23/07/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Gemello

MATERIA: Fenomeni di Trasporto e Fluidodinamica Computazionale

Prof. Marchisio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Totale\_new

LUN 13:00-14:30	MAR 10:00-11:30	MER 8:30-10:00	GIO 14:30-16:00	GIO 16:00-17:30	MAR 17:30-19:00
FEN Intro + notazione Marchisio	COMP Teoria cinematica Marchisio	COMP Teoria cinematica Marchisio	COMP Teoria cinematica Marchisio	COMP Teoria cinematica Marchisio	
COMP Teoria cinematica Marchisio	COMP Teoria cinematica Marchisio	COMP Teoria cinematica Marchisio	FEN Continuità Marchisio	FEN Trasporto di qdm Marchisio	
FEN Trasporto di qdm Marchisio	FEN Trasporto di qdm Marchisio	FEN Trasporto di qdm Marchisio	FEN Trasporto di qdm Marchisio	COMP Met. Numerici Marchisio	
COMP Met. Numerici Marchisio	COMP Met. Numerici Marchisio	COMP Met. Numerici Marchisio	FEN Esercitazione: iam. Pisano	FEN Esercitazione: iam. Pisano	
COMP Met. Numerici Marchisio	COMP Met. Numerici Marchisio	FEN Turbolenza Marchisio	FEN Turbolenza Marchisio	FEN Turbolenza Marchisio	
COMP Es 1 Sq 1 (LAIB1) Marchisio/Sassi	FEN Turbolenza Marchisio	COMP Turbolenza Marchisio	FEN Esercitazione: iam. Pisano	FEN Esercitazione: iam. Pisano	COMP Es 1 Sq 2 (LAIB5) Sassi
COMP Es 1 Sq 1 (LAIB1) Marchisio/Sassi	COMP Turbolenza Marchisio	COMP Turbolenza Marchisio	COMP Turbolenza Marchisio	COMP Turbolenza Marchisio	COMP Es 1 Sq 2 (LAIB5) Sassi
VACANZA	VACANZA	VACANZA	VACANZA	VACANZA	
FEN Es.: turbolenza	FEN Es.: turbolenza	FEN Trasporto di energia	VACANZA	VACANZA	

Pagina 1

SCRITTO → ES. \* 10 + FENOMENI  
 3 RELAZ. BREVI → -3 ÷ 0 PUNTI  
 ORALE

TRASP. DI PROPRIETA' IN S/C

- MATERIA
- QDM
- ENERGIA

FENOMENI DI TRASPORTO SI BASANO SU NATURA MOLECOLARE

**RICHIAMI**

$p(\underline{x}, t)$  SCALARE

$\rho(\underline{x}, t)$  " "

$\underline{U}(\underline{x}, t)$  LA VELOCITA' E' UN VETTORE

$\underline{U} = (U_x, U_y, U_z)$

$\underline{U} = (U_r, U_\theta, U_z)$

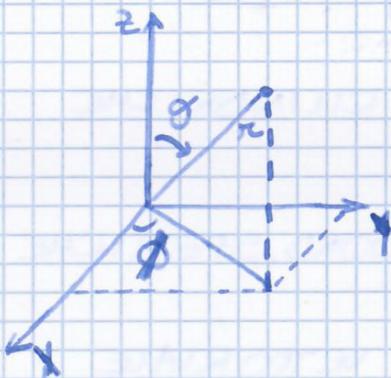
$\underline{U} = (U_r, U_\theta, U_\phi)$

$\underline{x} = (x, y, z)$  CARTESIANE

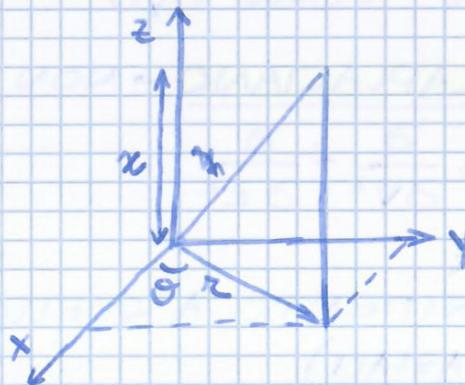
$\underline{x} = (r, \theta, z)$  CILINDRICHE

$\underline{x} = (r, \theta, \phi)$  SFERICHE

POLARE AZIMUTALE



$dV = dx dy dz$   
 $dV = r dr d\theta dz$   
 $dV = dr r^2 d\theta \sin\theta d\phi$



$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

SE APPLICATO  $\nabla$  A UNO SCALARE

$$\nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial x}; \frac{\partial p}{\partial y}; \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad \text{GRADIENTE DI PRESS.}$$

SE MOLTIPLICHO  $\nabla$  A UN VETTORIALE RICOVO LA DIVERGENZA (E' UNO SCALARE)

$$\nabla \cdot \underline{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad \text{CHIAMATO ANCHE DILATAZIONE}$$

POSITIVO SE IL FLUIDO SI ESPANDE, NEGATIVO SE SI CONTRAE

SE MOLTIPLICHO  $\nabla \otimes \underline{U} = \nabla \underline{U}$  (PRODOTTO TENSOR.) RICOVO UN TENSORE

$$\nabla \otimes \underline{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} & \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial x} & \frac{\partial U_z}{\partial y} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

GRADIENTE DI VELOCITA'

CI DA TUTTE LE INFO SUL MOTO

NOTAZ. INDICIALE:  $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$   $i=1,2,3$  ← INDICI ≠  $j=1,2,3$  (TENSORE)

$$\text{SE INVECE FACCIO } \nabla \cdot \underline{U} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad i=1,2,3$$

I FLUIDI FANNO PRINCIPALMENTE DEFORMAZIONE E ROTAZIONE

## TEORIA CINETICA DEI GAS

ES

CUBETTO DI  $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$

ALL'INTERNO CONTIENE DEGLI ATOMI, CHE POSSONO ESSERE DI  $\text{H}_2$  O GAS NOBILE

SE È  $\text{H}_2 \rightarrow 0,53 \text{ \AA} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

CON MASSA:  $\frac{10^{-3} \text{ kg}}{6 \cdot 10^{23}} = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

LE PARTICELLE TRA DI LORO SI ATTRAGGONO E SI URTANO, SE SI AVVICINANO TROPPO SI ALLONTANANO

SI POSSONO ATTRARRE X DIPOLO ELETTRICO / FORZE ATTRATTIVE DI VAN DER WAALS

CI SONO ANCHE F REPULSIVE, COME GLI  $e^-$  TRA DI LORO

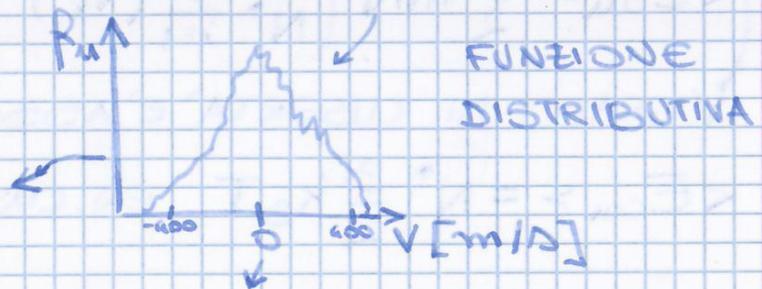
$$F = -\nabla V$$

POTENZIALE DI LENNERSJOHNS, ATTRATTIVO DI LARGO RAGGIO, REPULSIVA DI PICCOLO RAGGIO

$$\underline{F} = m \underline{a}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} \quad \underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}$$

LUNGO OGNI DIREZIONE:



MA ALCUNI HANNO  $v > \varnothing$ , ALTRI  $v < \varnothing$

LA MAGGIOR PARTE HANNO  $v = \varnothing$   
ALCUNE MOLECOLE SONO + VELOCI, ALTRE + LENTE

LA MEDIA È  $\varnothing \text{ m/s} \rightarrow$  FLUIDO STAGNANTE

QUESTO ERA IL CASO DI UN GAS RAREFATTO

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = \frac{3}{2} nR \rightarrow \text{X MOLECOLE MONOATOMICHE}$$

↓  
SOLO TRASLAZIONALE

$$F_y^i = m \frac{dv_y^i}{dt} = \frac{d}{dt} (m v_y^i) = \frac{d}{dt} (p_y^i)$$

↘ QOM LUNGO Y

$$= \frac{2 m v_y^i}{\Delta t}$$

↘ RIMBALZA E TORNA INDIETRO

$$F_y^i = \frac{m (v_y^i)^2}{e_y} \quad F_y = \sum_{i=1}^{N^*} \frac{m (v_y^i)^2}{e_y}$$

$$P = \frac{F_y}{e_x e_y} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N^*} m (v_y^i)^2$$

PRESSIONE

$$\langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} (v_y^i)^2$$

$$\left. \begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle \\ \langle v_z^2 \rangle \end{aligned} \right\} \text{X PRINC. EQUIPARTIZ. DELL'ENERGIA}$$

(CHE VALE IN SIST. CAOTICO)

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_y^2 \rangle \leftarrow \text{X EQUIPARTIZ.}$$

$$P = \frac{m N^*}{V} \cdot \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

$$PV = \frac{2}{3} N^* \left( \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right)$$

EN. CINETICA MEDIA X UNITA' DI VOLUME  
EN. INTERNA

$$PV = \frac{2}{3} n^* N_A \frac{1}{2} k_B T = n^* RT$$

↘ N. MOLE ASSOLUTO

$$PV = n^* RT$$

## POTENZIALI DI INTERAZIONE (COLISIONI TRA LE MOLECOLE)

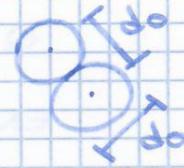
$$F = -\nabla\phi$$

### • A SFERE RIGIDE



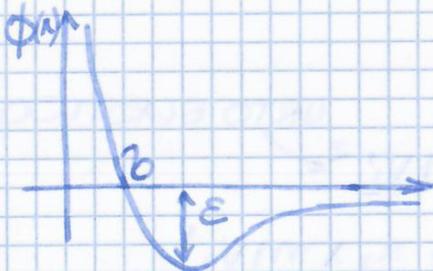
GEOMETRIA SFERICA, QUINDI INTERAZIONI NON DIPENDONO DA ORIENTAZIONI

$$\phi(r) = \begin{cases} 0 & r > d_0 \\ +\infty & r \leq d_0 \end{cases}$$



SE 2 SFERE IDENTICHE:  $d_0 = \text{DIAM. SFERE}$

### • POTENZIALE DI LENNARD-JONES



$$\phi(r) = GE \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^{12} - \left( \frac{b}{r} \right)^6 \right]$$

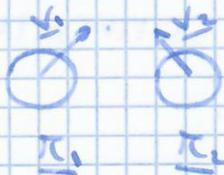
A CORTO RAGGIO

F. REPULSIVA

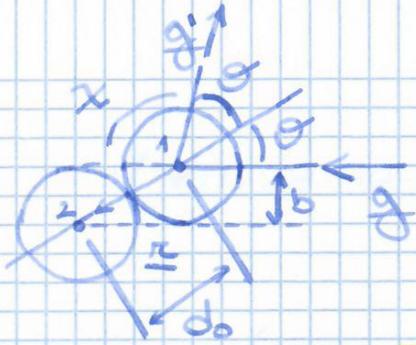
A LUNGO RAGGIO

F. ATTRATTIVA

SE 2 SFERE SI SCONTRANO CON MODELLO A SFERE RIGIDE NON SI VEDONO FINO A QUANDO NON SI SCONTRANO, CON LENNARD-JONES PRIMA SI ATTRAGGONO POI SI RESPINGONO, SE HANNO TANTO EN. CINETICA SI POSSONO COMPENETRARE



BISOGNA USARE CONSERVAZ. MAT. / ENERGIA / QDM



$$|g| = |g'|$$

$b$  = PARAMETRO DI IMPATTO ( $\perp g$ )

$\theta$  = ANGOLO DI IMPATTO

$\chi$  = ANGOLO DI DEFLESSIONE

$$b = d_0 \cdot \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

SE  $\chi \neq 0$  NON C'È COLLISIONE  $\rightarrow b = d_0$

SE DISTANO ESATTAMENTE  $d_0$  SI SFIORANO, MA NON SI SCONTRANO

SE  $\chi = 180^\circ$   $b = 0 \rightarrow$  SI SCONTRANO E TORNAVANO INDIETRO

QUELLE COSE VALGANO X MODELLO A SFERE RIGIDE (DIPENDE SOLO DALLA DINAMICA)

CON LENNARD-JONES C'È ATTRAZIONE E QUINDI SI SCONTREREBBERO CMQ (DIPENDE DALL'EN. PRESENTE ALL'INTERNO)

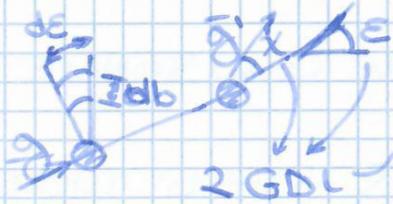
I PARAMETRI DI COLLISIONE SONO + DIFFICILI DA RICAVARE, MA  $\exists$

CMQ MODELLO SPERICO

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_1' &= \underline{v}_1 - (g \cdot \underline{r}) \underline{r} \\ \underline{v}_2' &= \underline{v}_2 - (g \cdot \underline{r}) \underline{r} \end{aligned} \right\} \text{COLLISIONE INVERSA}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_1 &= \underline{v}_1' - (g' \cdot \underline{r}) \underline{r} \\ \underline{v}_2 &= \underline{v}_2' - (g' \cdot \underline{r}) \underline{r} \end{aligned} \right\} \text{COLLISIONE DIRETTA}$$

IN 3D DEVO ANCHE CONSIDERARE DEFLESSIONI NELL'ALTRA DIREZ.



PUO' DEVIARE IN TUTTE LE DIREZIONI IN BASE A COME LE PALLINE SI SCONTRANO.

POSSO SBAGLIARE A SPARA ALTO/BASSO O DX/SX IN COORD. CARTESIANE

IN COORD. CILINDRICHE POSSO SBAGLIARE RADIALMENTE E CON ≠ INCLINAZIONE

L'AREA DEL QUADRATINO È  $db \cdot b \cdot d\epsilon$

$$db \cdot b \cdot d\epsilon = S \sin \chi dx d\epsilon$$

SUP. PRECOLLISIONE

POST-COLLISIONE

$$\delta = \text{SEZ. DIFFERENZ. DI COLLISIONE} = - \frac{b}{\sin \chi} \frac{db}{dx}$$

SEZ. IN CUI FINISCO DELLE PALLINE CHE FANNO COLLISIONE

HABIAMO 2 INCOGNITE:  $b$  E  $\chi$ , MA SAPPIAMO CHE:  $b = d_0 \cos(\chi/2)$

VALE SOLO X SFERE RIGIDE:

$$S = - \frac{b}{\sin \chi} \cdot \frac{db}{dx} = \frac{d_0^2}{4}$$

$$S = + \frac{d_0 \cos(\chi/2)}{\sin \chi} \cdot d_0 \sin(\chi/2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{d_0^2}{4}$$

$$\delta = \int_{\text{tutto}} \frac{d_0^2}{4} d\Omega' = \frac{d_0^2}{4} \cdot 4\pi = \pi d_0^2$$

È UNA SIGMA

RISULTATO OTENUTO PRIMA GRAFIC. INTUITIVAMENTE

X SFERE RIGIDE CONOSCIAMO  $\delta = \pi d_0^2$

MI MANCA ANCORA LA  $\bar{v}$  (VELOCITA' MEDIA)

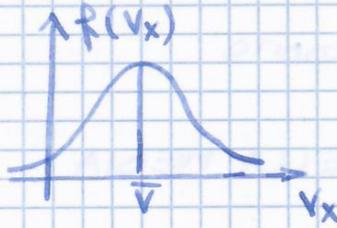
$v = N \delta \bar{v}$  VELOCITA' MEDIA DELLE MOLECOLE

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2} N \delta \bar{v}}$$

IN UN MOTO CAOTICO OGNI MOLECOLA HA LA SUA VELOCITA' ( $\neq$  TRA LORO)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} N \delta}$$

X DETERMINARE  $\bar{v}$  STUDIAMO LA **DISTRIBUZ. DI VELOC.**



COME LA FUNZ. DISTRIBUTIVE DEI CREATORI

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

NUMERO DI MOLECOLE / m<sup>3</sup> CHE HANNO VELOC. COMPRESA TRA  $v_x, v_x + dv_x$   
 $v_y, v_y + dv_y$   
 $v_z, v_z + dv_z$  DENSITA' NUMERICA

SI SCRIVE  $f(\underline{v}) d\underline{v}$   $\rightarrow$  E' UN INFINITESIMO

SE INTEGRO  $\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\underline{v}) d\underline{v} = N$  NUM. DI PARTICELLE TOTALE X UNITA' DI VOL.

$\iiint_{-\infty}^{+\infty} m f(\underline{v}) d\underline{v} = \rho$  (MASSA X UNITA' DI VOLUME)  $\rightarrow$  DENSITA' MASSICA

$\iiint_{-\infty}^{+\infty} m \underline{v} f(\underline{v}) d\underline{v} = \rho \underline{U}$   $\leftarrow$  QUANTITA' DI MOTO TOT. X UNITA' DI VOLUME

E' LA DEFINIZ. DELLA VELOC. MEDIA

$$\underline{U} = \frac{\iiint_{-\infty}^{+\infty} m \underline{v} f(\underline{v}) d\underline{v}}{\iiint_{-\infty}^{+\infty} m f(\underline{v}) d\underline{v}} = \frac{\iiint_{-\infty}^{+\infty} \underline{v} f(\underline{v}) d\underline{v}}{\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\underline{v}) d\underline{v}} = \frac{\iiint_{-\infty}^{+\infty} \underline{v} f(\underline{v}) d\underline{v}}{N}$$

( $U_x, U_y, U_z$ )

DENSITA' DI MOM.

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m \underline{v}^2 f(\underline{v}) d\underline{v} \leftarrow \text{ENERGIA CINETICA X UNITA' DI VOLUME}$$

$$= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m (\underline{c}^2 + \underline{U}^2 + 2 \underline{c} \cdot \underline{U}) f(\underline{v}) d\underline{v}$$

$$= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m \underline{c}^2 f(\underline{v}) d\underline{v} + \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m \underline{U}^2 f(\underline{v}) d\underline{v} +$$

$$+ \iiint_{-\infty}^{+\infty} m \underline{c} \cdot \underline{U} f(\underline{v}) d\underline{v} =$$

$$= \frac{1}{2} m \iiint_{-\infty}^{+\infty} \underline{c}^2 f(\underline{v}) d\underline{v} + \frac{1}{2} m \underline{U}^2 N + m \underline{U} \cdot \iiint_{-\infty}^{+\infty} \underline{c} f(\underline{v}) d\underline{v}$$

$$= \rho \hat{u} + \rho \frac{1}{2} \underline{U}^2$$

EN. INTERNA MASSICA

$\hat{k}$  EN. CINETICA X UNITA' DI MASSA

DI MASSA

$\underline{c}$  SONO DELLE FLUTTUAZIONI RISPETTO ALLA MEDIA

$\frac{1}{2} m \underline{c}^2$  E' L'EN CINETICA SCORPORATA DALL'EN. CIN MEDIA, CHE VIENE CHIAMATA ENERGIA INTERNA

$$= \rho \hat{u} + \rho \hat{k}$$

EN. INTERNA

EN. CINETICA MEDIA

STUDIANDO UNA FACCIA DI UN CUBETTO:



SE VOGLIO CALCOLARNE IL FLUSSO

$$\frac{\text{Kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

FLUSSO MASSICO

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} m v_x f(\underline{v}) d\underline{v} = \rho U_x = m N U_x$$

LA COMPONENTE FLUTTUANTE DA' UN CONTRIBUTO NULLO, CONTA SOLO IL CONTRIBUTO MEDIO

$$v_x = c_x + U_x \rightarrow \text{NON DA CONTRIBUTO AL FLUSSO M}$$

$P_{xy}$  E' UN TENSORE  $P_{ij} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} c_i c_j \rho v_i v_j dv$  ED E' IL FLUSSO DI QDM LEGATO ALLE FLUTTUAZIONI

X FAR VARIARE QDM APPLICHO UNA FORZA DEL FLUIDO SUL VOLUME (E VICEVERSA)

$$\underline{F} = \frac{dP}{dt}$$

POSSO VEDERE IL FLUSSO DI QDM COME UNA FORZA (NEGATIVA X REAZIONE) Moltiplicata x una sup

$P_{ij} = -\delta_{ij}$  → E' UNO SFORZO

$$\left[ \frac{kg}{m \cdot s^2} \right]$$

LEGATO ALLA VISCOSITA'

$\underline{P}$  E' UN TENSORE CON LE COMP  $P_{ij}$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{pmatrix} \text{ E' SIMMETRICO}$$

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\underline{P} = -\underline{\Sigma}$$

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} \Rightarrow P_{ii}$$

VOGLIO TRASFORMARE  $\underline{P}$  IN UN VETTORE A TRACCA NULLA, DEVO SOTTRARRE SULLA DIAG.  $\frac{1}{3}P_{ii}$

$$\tau_{ij} = P_{ij} - \frac{1}{3} P_{ii} \delta_{ij}$$

↑  
IN NOTAZ.  
INDICIALE

↳ VOGLIO SOTTRARLO SOLO SULLA DIAG, QUINDI USO  $\delta$  DI KRONECKER

$$\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = -P_{ij}$$

$$d_{ij} = -P_{ij} + \frac{1}{3} P_{ii} \delta_{ij} \rightarrow \underline{D}$$

TENSORE  
DEGLI SFORZI  
CON TRACCA  
NULLA

$$\underline{P} = -\underline{\Sigma}$$

TENSORE QDM = - TENS. SFORZI

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m_2 c_x c_y f(v) dv + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m_2 c_x c_y U_x f(v) dv$$

$$\textcircled{1} = \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 U_x = \rho \hat{K} U_x \rightarrow \text{EN. LEGATA AL MOTO MEDIO}$$

$$\textcircled{2} = \rho \hat{U} U_x \rightarrow \text{EN. LEGATA ALIEN. INTERNA}$$

FLUSSI CONVETTIVI

(MOTO D'INSIEME)

$$\textcircled{5} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} m c_x c_y f(v) dv \right) \underline{U}$$

E' UNA RIGA DEL TENSORE DEGLI SFORZI (E' UN VETTORE)

$$(\underline{P} \cdot \underline{n}_x) \cdot \underline{U}$$

RAPPRESENTA LO SCAMBIO DI ENERGIA DOVUTA A FLUTTUAZIONI

X TRASCINARE DEVO FARE UNO SFORZO POICHE' FLUTTUANO DENTRO E FUORI

$$E' = A \neq 0 \text{ SE } \underline{U} = \emptyset$$

① COME IL 5, MA E' ≠ 0 ANCHE SE IL FLUIDO E' FERMO, POICHE' E' L'ENERGIA CHE ENTRA E ESCE X FLUTTUARE.

E' LA CONDIZIONE DI CALORE/ENERGIA

$$= J_{q,x}$$

$$\rho \hat{U} U_x + \rho \hat{K} U_x + (\underline{P} \cdot \underline{n}_x) U_x + J_{q,x}$$

TRASPORTA EN. INTERNA CON MOTO D'INSIEME

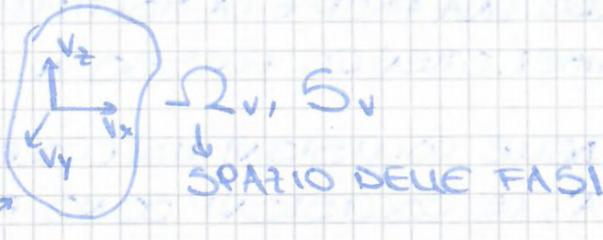
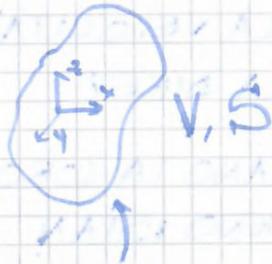
FLUSSO CONVETTIVO DI ENERGIA INTERNO

FLUSSO CONVETTIVO DI EN. CINETICA MEDIA

FLUSSO X CONDIZIONE

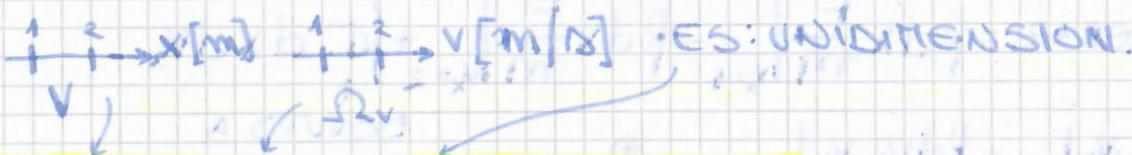
E' L'UNICO CHE E' ≠ 0 SE U = ∅

FLUSSO CONDUTTIVO DI ENERGIA



VOLUME FINITO DI FORMA QUALSIASI

$$\iiint_V dx \iiint_{\Omega_v} d\bar{v} f(t, \underline{x}, \underline{v})$$



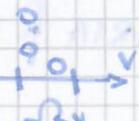
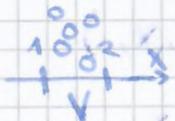
$$\int_1^2 dx \int_1^2 dv_x f(t, x, v_x) = N^* \text{ MOLECOLE}$$

$\frac{d}{dt}(\quad) = \text{FLUSSO NETTO} + \text{GENERAZIONE}$

QUESTA PROP. PUO' ESSERE MATERIA, QM, ENERGIA, ...

ORA VEDIAMO BILANCIO DI NUM. DI MOLECOLE:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V dx \int_{\Omega_v} dv_x f \right) = \dots$$



SOLO ALCUNE DI QUELLE COMPRESSE IN V HANNO VELOC. COMPRESA IN Ω\_v

LE MOLECOLE VARIANO DI NUMERO, POICHE' HANNO UNA CERTA VELOCITA' E QUINDI SI MUOVONO

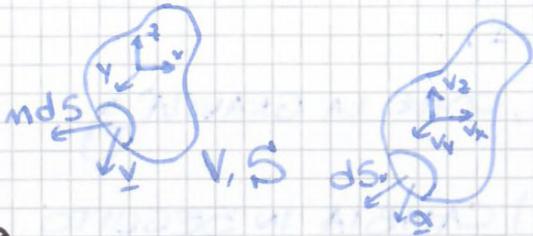
X VENERE MOLECOLE IN INGRESSO NELLO QUELLO CHE PASSANO IN Ω IN UN CERTO TEMPO

PASSANDO AL CASO 3D:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V d\underline{x} \iiint_{\Omega_V} d\underline{v} \rho(\underline{v}) + \iiint_{\Omega_V} \left( \rho(\underline{v}) \underline{v} \cdot \underline{n} dS \right) d\underline{v} + \dots \quad (*)$$

INTEGR. DI SUP.  $\swarrow$  CONTA SOLO IL FLUSSO  $\perp$  SUP.  
 (= NULLO ;  $\perp$  = MAX)

CI DICE SE LE MOLECOLE CHE ENTRANO SONO + O - DI QUELLE CHE ESCONO



$$* \dots + \iiint_V \int_{S_V} \left( \rho(\underline{v}) \underline{a} \cdot \underline{n} dS \right) d\underline{x} = \iiint_V d\underline{x} \iiint_{\Omega_V} d\underline{v} \mathcal{C}$$

FACENDO COME NEL CASO MONODIM., UTILIZZANDO LE DERIVATE:

UTILIZZIAMO INOLTRE IL TEOREMA DI GAUSS:

$$\int_S \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS = \int_V \nabla \rho \cdot \underline{v} d\underline{x}$$



$$\int_S \underline{v} \rho \underline{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{v}) d\underline{x}$$

INT. DI SUPERF. INTEGR. DI VOLUME

E' L'EQUIVALENTE DEL CASO MONODIM.

$$\nabla \cdot (\rho \underline{v}) = \left( \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right)$$

OTTENGO QUINDI:

$$\begin{aligned} & \iiint_V d\underline{x} \iiint_{\Omega_V} d\underline{v} \left( \frac{\partial \rho(\underline{v})}{\partial t} \right) + \iiint_V d\underline{x} \iiint_{\Omega_V} d\underline{v} \left( \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \right) + \iiint_V d\underline{x} \iiint_{\Omega_V} d\underline{v} \left( \rho \underline{a} \right) = \\ & = \iiint_V d\underline{x} \iiint_{\Omega_V} d\underline{v} \mathcal{C} \end{aligned}$$

$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$   
 $\left( \frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z} \right)$

## IPOTESI DI GAS MOLECOLARE: STOSSEANIAN ANSATZ

BISOGNA QUANTIFICARE IL NUMERO DI COLLISIONI TRAMITE LA LORO FREQUENZA

$f(\underline{v}_1) \cdot f(\underline{v}_2)$  SONO 2 FENOMENI CASUALI E CAOTICI

$C \propto \dots - f(\underline{v}_1) f(\underline{v}_2) \leftarrow$  SE 2 MOLECOLE SI URTANO MA LA COLLISIONE NON STANNO + NELL'INTERVALLO VOLUTO, POICHE' E' REVERSIBILE, AURANNO VELOC.  $\neq$  QUINDI:

$$C = \dots + f(\underline{v}_1') f(\underline{v}_2') - f(\underline{v}_1) f(\underline{v}_2)$$

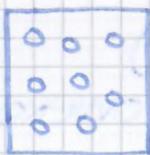
MA, ATTENZIONE, DEVO SOLO CONSIDERARE QUELLE CHE COLLIDONO

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [f(\underline{v}_1') f(\underline{v}_2') - f(\underline{v}_1) f(\underline{v}_2)] \cdot S \sin \chi \, d\chi \, d\epsilon$$

$\chi$  (ANGOLO COLLISIONE) VARIA TRA 0 E  $\pi$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [f(\underline{v}_1') f(\underline{v}_2') - f(\underline{v}_1) f(\underline{v}_2)] \cdot S \sin \chi \, d\chi \, d\epsilon \, d\underline{v}_2$$

DIPENDE DAI  $\neq$  POTENZE



DOPO UN CERTO TEMPO RAGGIUNGE L'EQUILIBRIO TERMODINAMICO, QUINDI L'ENEAZ. DI BOLTZMANN DIVENTA:

$$\phi + \phi + \phi = C \quad \text{NON HO VARIAZIONI DI } \phi \text{ NE' NELLO SPAZIO, NE' NEL TEMPO}$$

QUINDI LA FUNZIONE INTEGRANDA SARA'  $= \phi$

$$f(\underline{v}_1) f(\underline{v}_2) = f(\underline{v}_1') f(\underline{v}_2') \quad \leftarrow \text{IN EQUILIBRIO TD}$$

$$e_n f_e(\underline{v}_1) + e_n f_e(\underline{v}_2) = e_n f_e(\underline{v}_1') + e_n f_e(\underline{v}_2')$$

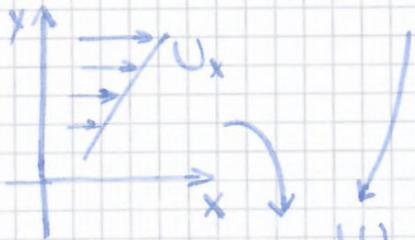
$\tau$ ,  $D$  DOBBIAMO LEGARLI ALLA VELOCITA'

$$\frac{d}{dt} QDM = \text{FORZE} \begin{cases} \text{GRAVITA'} \\ \text{PRESSIONE} \\ \text{SFORZI VISCOSI} \end{cases}$$

$\tau$ ,  $D$ , SCRITTI IN FUNZIONE DELLA VELOCITA'  $\hookrightarrow$  LEGGE DI NEWTON

TEORIA DI CHAPMAN-ENSKOG

$$\tau_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)$$



DELTA DI KRONECKER  
 $\begin{cases} = 1 & i=j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{dU_x}{dy} \rightarrow \text{LEGGE DI NEWTON!}$$

CON LA STESSA PROCEDURA SI PUO' DIMOSTR.

$$\underline{J}_{q,i} = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

↑  
 FLUSSO DI ENERGIA x CONDUZIONE

$$\underline{J}_q = -k \nabla T \leftarrow \text{LEGGE DI FOURIER}$$

ALLO STESSO MODO SI PUO' DIMOSTRARE LA LEGGE DI FLICK

IL FLUSSO NETTO IN  $dS$  E' PARI AL PRODOTTO  
SCALARE CON  $\rho \hat{G} \underline{n}$

$$\text{FLUSSO NETTO / CONVETTIVO} = \int_S \rho \hat{G} \cdot \underline{n} dS$$

SE VOGLIO IL FLUSSO TOTALE  $\int_S \rho \hat{G} \cdot \underline{n} dS$

$dS = dx dy, dy dz, dx dz$  CARTESIANE

$dS = r dr dz, r dr dz, r dr dz$

↓  
L'ALLA  $r$   
(RADIALE)

↓  
L'ALLA COORD.  
POLARE

↓  
L'ALLA COORD.  
ASSIALE

IL FLUSSO X FENOMENI MOLECOLARI LO CHIAMO  $\underline{J}_G$   
ANCH'ESSO DIVENTA  $\int_S \underline{J}_G \cdot \underline{n} dS$

IL TERMINE GENERATIVO LO INDICHIAMO CON  $\dot{g}_G$   
DA INTEGRARE:  $\int_V \dot{g}_G dV$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho \hat{G} dV \right) + \int_S \rho \hat{G} \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_G \cdot \underline{n} dS = \int_V \dot{g}_G dV$$

SE APPLICHIAMO IL TEOREMA DI REYNOLDS-OSWALD

$$\int_S \rho \hat{G} \cdot \underline{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \hat{G} \underline{u}) dV$$

$$\int_S \underline{J}_G \cdot \underline{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \underline{J}_G) dV$$

QUINDI OTTIENIAMO:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho \hat{G}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \hat{G} \underline{u}) + \nabla \cdot \underline{J}_G - \dot{g}_G \right) dV = 0$$

IL VOLUME SI CONSERVA, AFFINCHÉ SIA VERO  $\forall V$ ,  
LA FUNZ. INTEGRANDA DEVE ESSERE  $= 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \rho = -\rho (\nabla \cdot \underline{U})$$

DILATAZIONE → SE IL FLUIDO SI DILATA O SI CONTRAE

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \right) \rho = -\rho (\nabla \cdot \underline{U})$$

$$U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y} + U_z \frac{\partial}{\partial z}$$

CONSIDERIAMO AD ES. UN CANALE IN CUI CONTA SOLO IL TERMINE IN X, IN CUI DA UN PARTE LA TEMPERATURA È ALTA DALL'ALTRA È BASSA, SE SCALDO È FERMO STUDIO SOLO  $\partial/\partial t$ , SE INVECE SCALDO È IN MOVIMENTO CON IL FLUIDO, CON VELOC.  $U_x$ , NON MI BASTA  $\partial/\partial t$ , MI SERVE ANCHE  $U_x \partial/\partial x$ .

$\frac{\partial}{\partial t} \rho$  DERIVATA EULERIANA (PUNTO OSSERV. FISSO)

$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \right) \rho = \frac{D\rho}{Dt}$  DERIVATA TOTALE O SOSTANZIALE  
 ↳ LAGRANGIANA  
 (SI MUOVE CON IL FLUIDO)

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \underline{U}$$

SE  $\nabla \cdot \underline{U} > 0$  LA DERIVATA SOSTANZIALE DELLA DENS. DIMINUISCE, CIOÈ IL FLUIDO SI STA ESPANDENDO

SE  $\nabla \cdot \underline{U} < 0$ ,  $D\rho/Dt > 0$ , QUINDI SI CONTRAE, CIOÈ ENTRA + MASSA DI QUANTITÀ NE ESCE

SE  $\rho = \text{CONST.}$   $\nabla \cdot \underline{U} = 0$   $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

NEL CASO DI UN FLUIDO STAGNANTE IL TENSORE DEGLI SFORZI CONTIENE SOLO LA PRESSIONE

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{TRACCIA}(\underline{\underline{\Sigma}}) = -3p$$

$$p = -\frac{1}{3} \text{TRACCIA}(\underline{\underline{\Sigma}})$$

$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$   
 ↗ DELTA DI KRONECHER  
 ↘ SCHIACCIA IL FLUIDO  
 LA P È ISOTROPA  
 NOTAZ. INDICIALE

SE FLUIDO IN MOVIMENTO:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + d_{ij}$$

↗ SFORZI DEVIATORI  
 ↘ DEVIACIONI → PORTA AL MOVIMENTO

SE APPLICO UNO SFORZO A UN FLUIDO SI MUOVE CON  $v = \text{CONSTANTE}$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{D}}$$

$$P_{ij} = p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

$$d_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

↗ FLUSSI DI QNTI LEGATI A F. MOLECOLARI  
 ↘ SFORZI DEVIATORI / VISCOSI  
 SONO A TRACCIA NULLA

$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  È UN TENSORE:  $\nabla \otimes \underline{\underline{U}} = \nabla \underline{\underline{U}}$  ← PRODOTTO DIATICO

$$\underline{\underline{D}} = \mu \left( \nabla \underline{\underline{U}} + (\nabla \underline{\underline{U}})^T - \frac{2}{3} \underline{\underline{I}} (\nabla \cdot \underline{\underline{U}}) \right) \leftarrow \text{FLUIDI NEWTONIANI}$$

$\Delta = \text{DILATAZIONE}$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \text{VELOCITA' DI DEFORMAZ.}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \text{" " ROTAZIONE}$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{u} dx) + \int_S \rho \underline{u} \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{z} \cdot \underline{n} dS = \int_V \rho g dx + \int_S (-p) \underline{n} dS$$

FLUSSO VISCOSO

APPLICO TEOREMA DI GAUSS:

$$\int_S \rho \underline{u} \cdot \underline{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{u}) dx$$

VETTORE

$$\int_S \underline{z} \cdot \underline{n} dS = \int_V \nabla \cdot \underline{z} dx \quad \int_S (-p) \underline{n} dS = \int_V -\nabla p dx$$

SE RACCOGLIO GLI INTEGRALI DI VOLUME E PORTO DALLA STESSA PARTE RICOVO CHE L'INTEGRANDA DEVE ESSERE NULLA, QUINDI RICOVO BILANCIO LOCALE DI QDM

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \underline{u}) = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla \cdot (\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T - \frac{2}{3} \underline{I} \nabla \cdot \underline{u})$$

SE FLUIDO MOLTO VISCOSO QUESTO TERMINE È MOLTO ALTA, QUINDI IL TERMINE VISCOSO CONTA DI +

L'EQUAZIONE VALE A FLUIDO NEWTONIANO CON  $\rho$  VARIABILE

IN NOTAZIONE INDICIALE:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right]$$

SE ESPANDO:

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \underline{u} [\nabla \cdot (\rho \underline{u})] = -\nabla p + \rho g + \nabla \cdot \underline{D}$$

TUTTI I TERMINI SONO VETT. GRADIENTE DI VELOCITÀ (È UN TENSORE)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

↳  $\varnothing$  X UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE

OTTENGO:

$$\rho \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \rho \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = -\nabla p + \rho \underline{g} + \nabla \cdot \underline{D}$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} = \mu \nabla^2 \underline{U}$$

$$\rho \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \rho \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = -\nabla p + \rho \underline{g} + \mu \nabla^2 \underline{U}$$

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \nu \nabla^2 \underline{U}$$

SE  $\mu = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ .

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} \right) = -\nabla p + \rho \underline{g} + \mu \nabla^2 \underline{U}$$

EQUAZ. NAVIER-STOKES

$$\frac{D \underline{U}}{D t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \underline{g} + \nu \nabla^2 \underline{U}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

(x,y)

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

SE  $\rho = \text{const}$ ,  $\nu = 0$  → SE VELOC. MEDIA MOLTO ALTA

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g}$$

↳ DELTA DI DIRAC IN V. SONICA

EQUAZ. DI EULER

SE FLUIDO IDEALE (NO VISCOSITA'), NO VORTICITA',  
IN CONDIZ. STAZIONARIO:

$$\nabla \left( \underbrace{\frac{1}{2} \underline{U} \cdot \underline{U}}_H + \frac{P}{\rho} - g \cdot \underline{x} \right) = 0 \quad \nabla H = 0$$

↳ H COSTANTE  
(SI CONSERVA)

$$\frac{1}{2} \underline{U} \cdot \underline{U} + \frac{P}{\rho} - g \cdot \underline{x} = \text{COST} \rightarrow \text{EQUAZ. BERNOULLI}$$

TUTTE QUESTE LEGGI VALGONO CON  $\rho = \text{COST.}$

### EQUAZIONE DI POISSON

SI APPLICA DIVERGENZA ( $\nabla \cdot$ ) ALL'EQUAZ. DI NAVIER-STOKES

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

*(Note: The original image shows several terms being crossed out with arrows, indicating simplification steps.)*

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} \rightarrow \text{LAPLACIANO}$$

PRODOTTO TOTALE TRA 2 TENSORI

↳ SOMMA DI TUTTI I TERMINI

E' UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ELLITTICA

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \underbrace{\frac{\mu}{\rho V_0 L}}_{Re^{-1}} \nabla^2 \vec{U} + \underbrace{\frac{g L}{V_0^2}}_{Fr^{-1}} \vec{g}$$

↑ INERZIALE  
↑ CONVETTIVO  
↑ VISCOSO  
↑ DI LUNGHEZZA L

$$Re = \frac{\rho V_0 L}{\mu} \leftarrow \text{REYNOLDS}$$

$$Fr = \frac{V_0^2}{g L} \leftarrow \text{FROUNDE}$$

PRESI 2 SIST. GEOMETRICI SIMILI (SCALE-UP/DOWN)  
 SE HANNO  $Re =$  E  $Fr =$  HANNO LE STESSA SOLU.  
 DELL'EQUAZ, QUINDI CON PROFILI DI VELOCITA' =

### NUMERO DI REYNOLDS

SE  $Re \rightarrow 0$  DIVENTA SEMPRE + IMPORTANTE IL TERMINE VISCOSO  $\gg$  INERZIALE, CIOE' LA QDM SI TRASPOSTA A LO + X TRASP. MOLECOLARE/VISCOSO (V MOLTO BASSA)

SE  $Re \rightarrow \infty$  IL MOTO DEL TUBO DIVENTA TURBOLENTO E IL TERMINE VISCOSO  $\rightarrow 0$ , QUINDI IL TERMINE INERZIALE/CONVETTIVO E' + IMPORTANTE

### NUMERO DI FROUNDE

SE  $Fr \rightarrow 0$  CONTANO DI + TERMINI GRAVITAZ.

SE  $Fr \rightarrow \infty$  " " " " INERZIALI

SE  $Re \rightarrow 0$  TRASCURO TERMINE INERZIALE E RICAVO EQUAZ. DI STOKES

SE  $Re \rightarrow \infty$  RICAVO EQUAZ. DI EULERO

LA SOLUZ. FINALE E'

$$U_x(y) = \frac{\rho g x}{\mu} \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right)$$

$$\mu \frac{dU_x}{dy} + \rho g x y = C_1$$

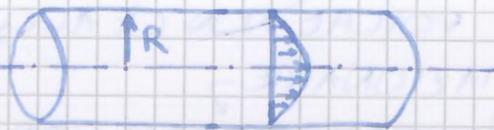
$$\rho g x \cdot \delta = C_1$$

$$\mu U_x + \rho g x \frac{y^2}{2} = \rho g x \delta y + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$U_x(y) = \frac{\rho g x}{\mu} \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right)$$

PROFILO PARABOLICO

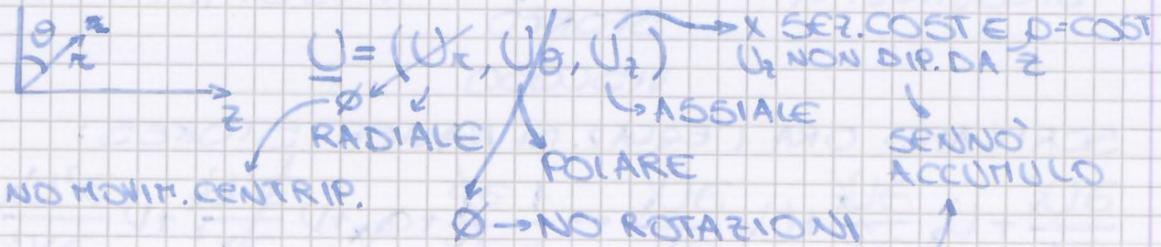
ESERCIZIO



$\rho = \text{COST.}$   
 $\mu = \text{COST.}$

SI MUOVE  
 $x \Delta p$

UTILIZZIAMO COORD. CILINDRICHE



$U_z$  NON DIPENDE DA  $\theta$ , SENNO' DEL FLUIDO SI DOVREBBE MOVERE IN DIREZ. POLARE, MA IMPOSSIBILE, NO ACCUMULO

$$U_z(r)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho U_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \rho U_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho U_z) = 0$$

$\hookrightarrow \rho (U_z(z)) = \text{COST.}$

PRENDIAMO NAVIER-STOKES:

$$\rho \left( \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \dots$$

ACCUMULO      CONVEZIONE      PRESSIONE

SE VOGLIO DETERMINARE LA PORTATA

$$\dot{V} = \int_{S'} U_z(r) dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} U_z(r) d\theta r dr$$

$$\dot{V} = \int_0^R U_z(r) 2\pi r dr$$

SUP. DI UNA CORONA CIRC.

SE FACCO I CONTI OTTENGO:

$$\dot{V} = \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu}$$

→ RICAVATO SPERIM. DA **POISEUILLE**

A RICAVARE LA VELOCITÀ MEDIA:

$$\langle U \rangle = \frac{\dot{V}}{\pi R^2} = \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{R^2}{8\mu} \rightarrow \text{E' ESATTA} V_{max} / 2$$

QUINDI OTTENIAMO:

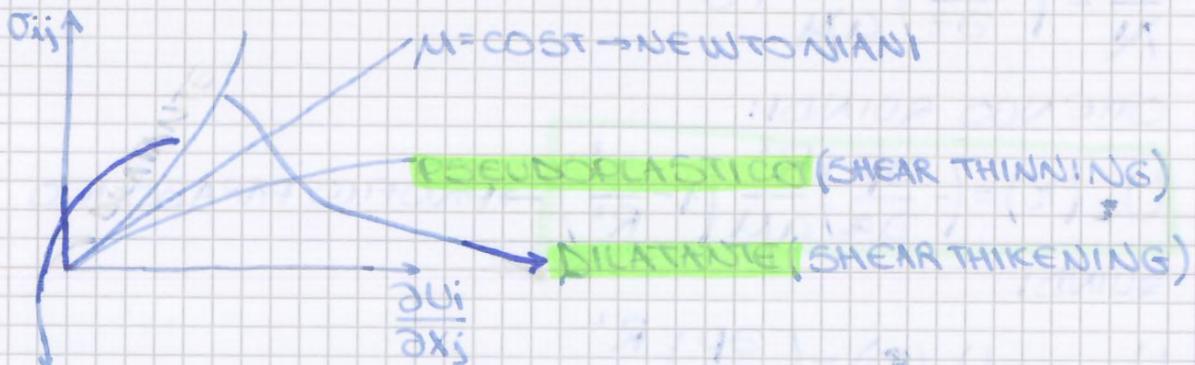
$$U_z(r) = 2 \langle U \rangle \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = U_{z,max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

CONSIDERIAMO UN **FLUIDO NON NEWTONIANO**  
(CON  $\rho = \text{cost.}$ )

LA LEGGE DI NEWTON DICEVA CHE  $\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

QUANDO HO UN TERMINE NULLO:

$$\sigma_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \leftarrow \text{SHEAR RATE}$$



IL COEFF. VISCOSITÀ APPARENTE AUMENTA CON  $\sigma_{ij}$

$$-k \left( \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)^n = \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{r}{2k} \quad \text{HO CAMBIATO I SEGNI E DIVISO X K}$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} = \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} \left( \frac{r}{2k} \right)^{1/n}$$

OTTENIAMO

$$U_z(r) = \left[ \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right]^{1/n} \frac{n}{n+1} \left[ R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right]$$

PER  $n=1$ ,  $k=\mu$  OTTENIAMO LEGGE DEL FLUIDO NEWTONIANO

SE  $n \neq 1$  NON VIENE + UN PROFILO PARABOLICO

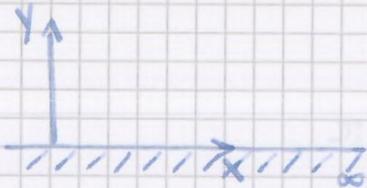
SE  $n < 1 \rightarrow$  PSEUDOPLASTICO: IL PROFILO È + PIATTO

" "  $n > 1 \rightarrow$  DILATANTE: IL PROFILO È + ACCENTUATO

### PROBLEMI CON 2 VARIABILI INDIPENDENTI

SI RISOLVONO NUMERICAMENTE CON CALCOLATORI  
VARIANO SIA SPAZIO CHE TEMPO

#### ESEMPIO



FLUIDO CHE ARRIVA FINO A  $y \rightarrow \infty$   
 $-\infty < z < +\infty$  (SUP. INFINITA)

AL TEMPO  $t < 0$  È FERMA LA PARETE, QUINDI ANCHE IL FLUIDO

AL TEMPO  $t=0$  LA PARETE INIZIA A MUOVERSI CON  $v_0$

$\rho = \text{cost}$

$\mu = \text{cost}$  (FLUIDO NEWTONIANO)

IL FLUIDO SI MUOVE SOLO LUNGO  $x \rightarrow U_x \neq 0$

$U_z(t, y)$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{4Dt}} \quad [-]$$

$$\phi(\eta)$$

IMPORTANTE POICHE' TROVIAMO OVUNQUE EQUAZ. DIFF. COSI', AD ES. 2<sup>a</sup> LEGGE DI FICK O 2<sup>a</sup> LEGGE FOURIER

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial t} &= \frac{d\phi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\phi}{d\eta} \left(-\frac{1}{2}\right) y (4Dt)^{-3/2} 4D \\ &= \frac{d\phi}{d\eta} \frac{y}{\sqrt{4Dt}} \frac{-2D}{2\sqrt{4Dt}} = -\frac{d\phi}{d\eta} \eta \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d\phi}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = \frac{d\phi}{d\eta} (4Dt)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} (4Dt)^{-1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\eta} \eta \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{t} = D \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} \cdot \frac{1}{4Dt}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\phi}{d\eta} = 0$$

EQUAZ. DIFF. ORDINARIA  
A COEFF. NON COST.  
DEL 2° ORDINE

CONDIZ. CONTORNO:

$$y \rightarrow +\infty \quad \eta \rightarrow +\infty \quad \phi = 0$$

$$y = 0 \quad \eta = 0 \quad \phi = 1$$

INTRODUCIAMO ORA UNA NUOVA VARIABILE:

$$\psi = \frac{d\phi}{d\eta} \rightarrow \frac{d\psi}{d\eta} + 2\eta\psi = 0 \rightarrow \frac{d\psi}{\psi} = -2\eta d\eta$$



$$U_y = O\left(\frac{U_\infty \delta_0}{e_0}\right) \quad U_y \ll U_x \quad U_y \text{ TRASCURABILE}$$

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} = O\left(\frac{U_\infty^2}{e_0}\right) \quad \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{U_\infty^2}{e_0^2}\right)$$

$$U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = O\left(\frac{U_\infty^2}{e_0}\right) \quad \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{U_\infty^2}{\delta_0^2}\right)$$

$$\frac{U_\infty^2}{e_0} = O\left(\nu \frac{U_\infty}{\delta_0^2}\right) \leftarrow \text{TERMINI INERZIALI BILANCIATI DA SFORZI VISCOSI}$$

SI PUÒ OTTENERE

$$\frac{\delta_0^2}{e_0^2} = O\left(\frac{\nu}{U_\infty \cdot e_0}\right)$$

$$\sqrt{\frac{\delta_0^2}{e_0^2}} = \frac{\delta_0}{e_0} = O\left(\left(\frac{U_\infty e_0}{\nu}\right)^{-1/2}\right)$$

$$\frac{\delta_0}{e_0} \propto \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

X DETERMINARE DIMENS. STRATO LIMITE

RISOLVIAMO NAVIER-STOKES, CONSIDERANDO SOLO  $U_x$

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

← STAZ.

NON È TRASCURAB.

X ANALISI DIMENS.

DI PRIMA

← TRASC.

(← TERMINE)

DA EQUAZIONE DI CONTINUITÀ  $\rightarrow \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \rightarrow U_y = \int_0^y -\frac{\partial U_x}{\partial x} dy$

ALL'ESTERNO SONO PRESENTI SOLO I TERMINI INERZIALI, ALL'INTERNO SFORZI VISCOSI COMPENSATI DA " "

FUORI DALLO STRATO LIMITE: (NO VISCOSI)

$$U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \leftarrow \text{N./S. ESTERNO}$$

X RISPETTARE TUTTO:

$$\frac{U_x}{U_\infty} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \quad 0 \leq y \leq \delta(x)$$

$$\frac{U_x}{U_\infty} = 1 \quad y \geq \delta(x)$$

ABBIAMO  
IMPOSTO LA  
CONTINUITÀ  
DELLA DERIVATA

SE SOSTUIAMO DENTRO A VON KARMAN

$$\frac{3}{2} \mu \frac{U_\infty}{\delta(x)} = \frac{d}{dx} \left( \frac{39}{280} \rho U_\infty^2 \delta(x) \right)$$

EQUAZ. DIFFERENZIALE CHE RISOLTA CI DICE CHE  
VALORE HA  $\delta(x)$ , PONENDO  $\delta(x=0) = 0$

$$\delta = \sqrt{\frac{280 \nu x}{13 U_\infty}} \approx 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

ANCORA CON METODO RIGOROSO VIENE  $\approx$

SE RISOSTITUISCO:

$$\frac{U_x}{U_\infty} = \frac{3}{2} \left( y \sqrt{\frac{13 U_\infty}{280 \nu x}} \right) - \frac{1}{2} \left( y \sqrt{\frac{13 U_\infty}{280 \nu x}} \right)^3$$

$$F_x' = \int_0^w \int_0^L \left( 2 \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx dz = 1,29 \sqrt{\rho \mu L W^2 U_\infty^3}$$

w = SPESSORE

L = LUNGHEZZA

IN CONDIZ. LAMINARE E STAZIONARIO

QUESTE EQUAZIONI SONO RISOLTI CON CALCOLATORI

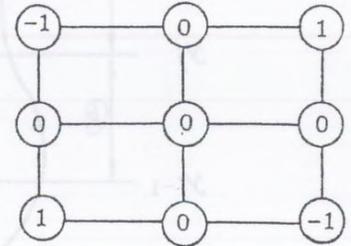
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2)$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4hk} + O((h+k)^2)$$



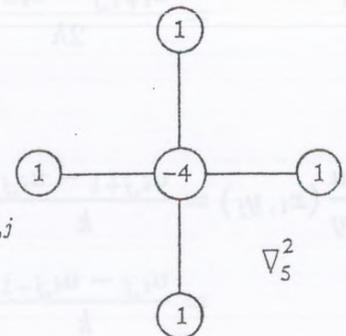
Supponiamo, per esempio,  $h = k$  e approssimiamo gli operatori

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)^T \quad (\text{gradiente})$$

$$\Delta = \nabla^T \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{laplaciano})$$

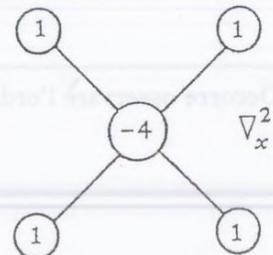
ricorrendo alle suddette formule di derivazione numerica; otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \\ &= \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2} \equiv \nabla_5^2 u_{i,j} \end{aligned}$$



Un'altra formula per  $\nabla^2 u(x_i, y_j)$  potrebbe essere la seguente:

$$\nabla_x^2 u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1}}{2h^2}$$



• IPERBOLICHE → AD ESEMPIO L'EQUAZIONE DELLE ONDE, OPPURE UN PROBLEMA DI CONVEZIONE NON STAZIONARIO

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

VOLUMI FINITI

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \phi U_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i})}{\partial x_i} + q_\phi$$

↑
↓
↓ GENERAZ

FORMA GENERALE DI BILANCIO LOCALE (CONSERVAZ.)

SE  $\phi = 1, \Gamma = 0, q_\phi = 0 \rightarrow$  EQ. CONTINUITA'

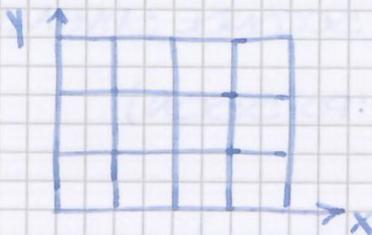
SE  $\phi = U_i, \Gamma = \mu, q_\phi = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \rightarrow$  EQ. BILANCIO QDM

SI DIVIDE VOLUME IN TANTI VOLUMETTI, LA CUI SOMMA VIENE VOLUME TOTALE E LE INTERSEZIONI SONO NULLE

TRASFORMO EQ. LOCALE IN EQ. SUL VOLUME (INTEGRATA SUL VOLUME V)

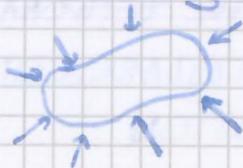
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dx + \int_V \nabla \cdot (\rho \phi \underline{U}) dx = \int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dx + \int_V q_\phi dx$$

IN UN PROBLEMA 2D: (OSO ANCHE Z IN 3D)



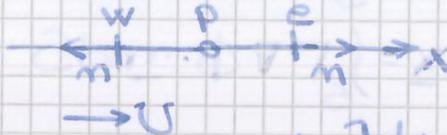
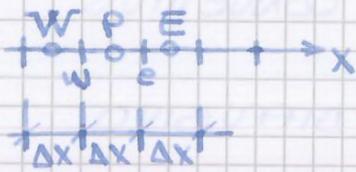
$$\int_V \nabla p dx = \int_S p \underline{n} dS \rightarrow \text{FORZA DI ARCHIMEDE}$$

FORZA DI GALLEGGIAMENTO



PASSIAMO A UN CASO 1D:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \phi U) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad \rightarrow \text{NEL NOSTRO CASO NON C'E' GENERAZ.}$$



$$(\rho U \phi)_e S_e - (\rho U \phi)_w S_w - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e S_e + \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w S_w = 0$$

U E IN DISCORDI

SE  $\rho, U, \phi$  SONO COSTANTI E LE SEZ. SONO COST.:

$$\phi_e - \phi_w - \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e \frac{1}{\rho U} + \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w \frac{1}{\rho U} = 0$$

$$\left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x}$$

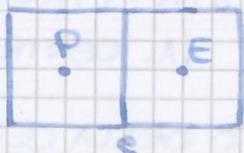
$$\left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x}$$

$$\phi_e - \phi_w - \frac{\Gamma}{\rho U} \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho U} \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x} = 0$$

PER RISOLVERE MATRICI POSSO USARE ELIMINAZ. DI GAUSS, O PINOTING, MA QUA VIENE UNA MATRICE SPARSA, QUINDI CONVIENE USARE UN METODO ITERATIVO

PROBL: CI SONO TROPPE INCOGNITE, DEVO RIUSCIRE A SCRIVERE SOLO  $\phi$  AL CENTRO DEL VOLUME AL POSTO DI  $\phi$  AL CENTRO DELLA FACCIA

PROBL: SI RISCHIA DI FARE GROSSI ERRORI



SE IL FLUIDO SI MUOVE VERSO DX ( $\rightarrow$ )  $\phi_e = \phi_p$ , SE SI MUOVE VERSO SX ( $\leftarrow$ )  $\phi_e = \phi_e$

VISCOSITÀ NUMERICA È UN ERRORE, QUINDI DEVO  
PRENDERE  $\Delta x$  MOLTO PICCOLO

$$0,001 + 500\Delta x \quad \Delta x < \frac{10^{-3}}{500}$$

SI PUÒ UTILIZZARE SENZA UN METODO DEL 2° ORDINE

SE AD ESEMPIO:

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \quad \lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}$$

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad \text{SE GRIGLIA REGOLARE}$$

### CENTER DIFFERENCING STEAM (CDS)

X VALUTARE ERRORE: (USO SERIE TAYLOR)

$$\phi(x) = \phi_P + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_P} (x_e - x_P) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_P} (x_e - x_P)^2$$

DIVIDENDO X  $(x_e - x_P)$  E ISOLANDO OTTENGO:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_P} = \frac{\phi_e - \phi_P}{x_e - x_P} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_P} (x_e - x_P) + \dots$$

$$\phi_e = \phi_P + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_P} (x_e - x_P) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_P} (x_e - x_P)^2 =$$

SOSTITUENDO OTTENGO:

$$\phi_e = \phi_P + \phi_e \frac{x_e - x_P}{x_e - x_P} - \phi_P \frac{x_e - x_P}{x_e - x_P} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_P} (x_e - x_P)^2 + \dots$$

SE ISOLO OTTENGO:

$$\phi_e = \phi_P - \underbrace{\frac{(x_e - x_P)}{(x_e - x_P)}}_{\lambda_e} \phi_P + \underbrace{\frac{(x_e - x_P)}{(x_e - x_P)}}_{\lambda_e} \phi_e = \phi_P (1 - \lambda_e) + \phi_e \lambda_e$$

TRASCURIAMO TERMINI CHE VANNO CON  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ , QUINDI

CON  $\Delta x^2 \Rightarrow$  METODO DEL 2° ORDINE



$$-(P_{ec}+1)\phi_{i-1} + (P_{ec}+2)\phi_i + (-1)\phi_{i+1} = 0$$

OTTEMIAMO:

$$\begin{pmatrix} P_{ec}+2 & -1 & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(P_{ec}+1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \emptyset & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

FORNISCE UNA SOLUZIONE CHE È SEMPRE LIMITATA

MATRICE TRIDIAGONALE

SE INVECE UTILIZZIAMO CDS:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad \phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}$$

$$\frac{1}{2}\phi_E + \frac{1}{2}\phi_P - \frac{1}{2}\phi_W - \frac{1}{2}\phi_P - \frac{\Gamma}{\rho U} \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho U} \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x}\right)\phi_W + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x}\right)\phi_P + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x}\right)\phi_E = 0$$

DIVIDO DI NUOVO x  $\Gamma/\rho U \Delta x$ :

$$-\left(+\frac{P_{ec}}{2} + 1\right)\phi_W + 2\phi_P + \left(\frac{P_{ec}}{2} - 1\right)\phi_E = 0$$

OTTENGO UN SIST: (SEMPRE TRIDIAGONALE)

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\left(\frac{P_{ec}}{2} + 1\right) & 2 & \left(\frac{P_{ec}}{2} - 1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \emptyset & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{ec} = \frac{\rho U \Delta x}{\Gamma} = \frac{\rho U / \Delta x}{\Gamma / \Delta x^2} = \frac{\Delta x^2 / \Gamma}{\Delta x / U} \rho$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\Gamma}{U} \frac{d^2\phi}{dx^2}$$

SE VOGLIO ADIMENSIONALIZZARE:  $x^* = \frac{x}{L}$

$$\frac{\rho U L}{\Gamma} \frac{d\phi}{dx^*} = \frac{\Gamma}{U} \frac{d^2\phi}{dx^{*2}} \frac{1}{L^2}$$

$$\frac{\rho U L}{\Gamma} \frac{d\phi}{dx^*} - \frac{d^2\phi}{dx^{*2}} = 0$$

EQUAZ. DIFF. DEL 2° ORDINE  
ORDINARIE A COEFF. COST.

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{\exp(x Pe/L) - 1}{\exp(Pe) - 1} (\phi_L - \phi_0)$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CON IL METODO DELLE  
PERTURBAZIONE CHE LA SOLUZIONE È LIMITATA  
A CDS SE:

$$\frac{\rho U \Delta x}{\Gamma} = Pe_c < 2$$

SE UTILIZZIAMO METODO UDS LA SOLUZIONE È  
SEMPRE LIMITATA, MA QUANDO PRENDO TANTI  
NODI LA SOLUZ. È MENO PRECISA DI CDS, MA  
CON UDS È CMP SEMPRE LIMITATA, MA CON  
UN  $\Gamma$  FITTIZIO, SE RENDE  $Pe < Pe_{REALE}$

UDS → SOLUZ. LIMITATA, ERRORE VA CON  $\Delta x$ , AGGIUNGO  
DIFF/VISC./CONDUR. NUMERICA

CDS → LIMITATA SE  $Pe_c = \frac{\rho U \Delta x}{\Gamma} < 2$ , ERRORE  $\propto \Delta x^2$

∃ ANCHE UN ALTRO METODO:  
SECOND ORDER UPWIND

W	P	E
$\phi_w$	$\phi_p$	$\phi_e$

$$\phi_e = \phi_p + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_p} (x_e - x_p)$$

→

$$\frac{\phi_p - \phi_w}{x_p - x_w}$$

SE INVECE SI MUOVO IN DIREZ. ←

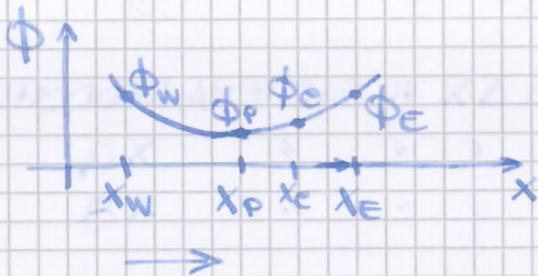
$$\phi_e = \phi_p + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_p} (x_e - x_p)$$

$$\frac{\phi_e - \phi_p}{x_e - x_p}$$

ANCH'ESSO NON GARANTISCE LIMITATEZZA

UN ALTRO METODO MOLTO UTILIZZATO:  
QUADRATIC UPWIND INTERPOLATION CONVECTIVE KINEMATICS (QUICK)

È UN METODO DEL 3° ORDINE → ERR ∝ Δx<sup>3</sup>  
 UTILIZZA UN'INTERPOLAZ. PARABOLICA



MOSTRA ANCH'ESSO  
 PROBLEMI DI  
 LIMITATEZZA

$$\phi_e = \phi_p + g_1 (\phi_w - \phi_p) + g_2 (\phi_p - \phi_e)$$

$$g_1 = \frac{(x_e - x_p)(x_p - x_e)}{(x_w - x_p)(x_w - x_e)} \quad g_2 = \frac{(x_e - x_p)(x_w - x_e)}{(x_p - x_e)(x_w - x_e)}$$

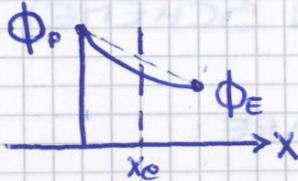
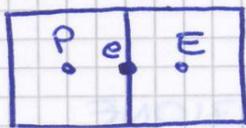
SE UTILIZZIAMO GRIGIE UNIFORME →  $\phi_e = \frac{9}{8} \phi_w + \frac{6}{8} \phi_p - \frac{1}{8} \phi_e$

CERCO PRIMA SOLUZIONE CON UDS, COME SOLUZIONI PARTENZA X USARE POI METODO DI ORDINE SUPERIORE

SI UTILIZZANO CODICI INDUSTRIALI E COMMERCIALI, CHE HANNO UN COSTO, E SONO SETTATI SU FIRST ORDER UPWIND

≡ ANCHE ALTRI METODI, + RARI

POWER LAW



$$\phi_e \begin{cases} \rightarrow \frac{\phi_p + (\phi_e - \phi_p) \frac{\exp\left(\frac{\rho U (x_e - x_p)}{\Gamma}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\rho U (x_e - x_p)}{\Gamma}\right) - 1}}{\exp\left(\frac{\rho U (x_e - x_p)}{\Gamma}\right) - 1} \\ = \text{MA CON SEGNO DI UN CAMBIATO} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{SE } \leftarrow \end{array} \right. \end{cases}$$

E' + DIFFICILE QUANTIFICARE L'ERRORE, NON SI PUO' DIRE L'ORDINE (NO TAYLOR)

- UDS  $\rightarrow \Delta X$
  - CDS  $\rightarrow \Delta X^2$
  - SOU  $\rightarrow \Delta X^2$
  - QUICK  $\rightarrow \Delta X^3$
- } SE GRIGLIA REGOLARE

SE GRIGLIA NON REGOLARE:  $\rightarrow$  ERRORE + GROSSO

- UDS  $\rightarrow \Delta X$
- CDS  $\rightarrow \neq \Delta X^2$  ( $< \Delta X^2$ ,  $> \Delta X$ ) SUPERLINEARE
- SOU  $\rightarrow \neq \Delta X^2$
- QUICK  $\rightarrow \neq \Delta X^3$

$$\phi(x) = \phi_p + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_p} (x - x_p) \begin{matrix} \nearrow \text{ERR} \\ \searrow \propto \Delta X \end{matrix}$$



$$M\Phi + N\Phi = Q$$

$$M\Phi = Q - N\Phi$$

$$\Phi^n \rightarrow M\Phi^{n+1} = Q - N\Phi^n$$

$$\underline{\delta}^n = \Phi^{n+1} - \Phi^n \rightarrow \Phi^{n+1} = \Phi^n + \underline{\delta}^n \rightarrow \text{CORREZIONE}$$

$$M\underline{\delta}^n = Q - (N+M)\Phi^n$$

ALL'INIZIO  $n=0 \rightarrow \Phi^0$  INIZIALIZZAZIONE

MOLTO COMPLICATA, BISOGNA CAPIRE IL PROBL. PRIMA DI LANCIARE LA SIMULAZIONE

$$M\underline{\delta}^1 = Q - (M+N)\Phi^0$$

$$\Phi^1 = \Phi^0 + \underline{\delta}^1$$

SONO INTERAZIONI INTERNE DELLA SIMULAZ.

$$M\underline{\delta}^2 = Q - (M+N)\Phi^1$$

$$\Phi^2 = \Phi^1 + \underline{\delta}^2$$

SI POSSONO USARE METODI DI SOVRARILASSAM. MOLTIPLICANDO LA CORREZIONE PER  $W (>1)$  X ACCELERARE

QUANDO HO UN PROBLEMA DI LIMITATEZZA USO  $W < 1$ , CHIAMATO COEFF. DI SOTTORILASSAM., PER RENDERE CODICE STABILE, SOLO SE DIVERGE

IL MIO OBIETTIVO E' ARRIVARE A  $\Phi^\infty$

SUBITO USO UDS CON  $W > 1$

POI USO METODO 2° ORDINE CON  $W < 1$

FISSO UN CRITERIO DI CONVERGENZA X CAPIRE QUANDO FERMARMI

NON FUNZIONA MAI X UN PROBLEMA PURAMENTE CONVETTIVO

SE INVECE  $c=0$

$$4(1+2d(\cos\alpha-1))^2 < 1$$

CONDIZ. PEGGIORE:  $\cos\alpha = -1 \Rightarrow d < \frac{1}{2}$

SE  $0 < \phi < 1$ , DOBBIAMO EVITARE CHE  $\phi$  DIVENTA NEGATIVO, QUINDI A DEVE AVERE TERMINI POSITIVI

$$1-2d > 0 \rightarrow d < \frac{1}{2} \rightarrow \Delta t < \frac{\rho \Delta x^2}{2\Gamma}$$

$$2d < 1 \rightarrow \frac{\rho U \Delta x}{\Gamma} < 2 \rightarrow Pec < 2$$

GIUSTO, STIAMO USANDO CDS

X EULERO ESPLICITO + CDS SERVE QUINDI:

$$Pec < 2 \rightarrow \text{FISSO } \Delta x$$

$$\Delta t < \frac{\rho \Delta x^2}{2\Gamma} \rightarrow \text{FISSO } \Delta t$$

\*EULERO ESPLICITO 1° ORDINE (TEMPO)

CDS - 2° ORDINE (SPAZIO)

$$\Delta t < \frac{\rho \Delta x^2}{2\Gamma}$$

← STABILITÀ (LIMITATEZZA)

$$Pec = \frac{\rho U \Delta x}{\Gamma} < 2$$

\*EULERO ESPLICITO 1° ORD (TEMPO)

UDS - FIRST ORDER UPWIND (SPAZIO)

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + q \phi$$

\*CDS (SPAZIO); TEMPORALE IMPLICITO

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = -U \left[ \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] + \frac{\Gamma}{\rho} \left[ \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right]$$

SCHEMA TEMPORALE ESPlicito NON È SEMPRE STABILE

SCHEMA IMPLICITO RICHIEDE DI INVERTIRE MATRICE

$$(1+2d)\phi_i^{n+1} + \left(\frac{c}{2} - d\right)\phi_{i+1}^{n+1} + \left(-\frac{c}{2} + d\right)\phi_{i-1}^{n+1} = \phi_i^n$$

$$A \underline{\phi}^{n+1} = \underline{\phi}^n$$

TRIDIAGONALE

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -\frac{c}{2} + d & 1 + 2d & \frac{c}{2} - d & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

PROBL. SEMPRE STABILE V  
VALORE DI Δt

$$-\frac{U\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Gamma\Delta t}{\rho\Delta x^2}$$

$$1 + \frac{2\Gamma\Delta t}{\rho\Delta x^2}$$

$$\frac{U\Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Gamma\Delta t}{\rho\Delta x^2}$$

$$-\frac{\rho U \Delta x}{2\Gamma} \Delta t + \Delta t$$

$$\frac{\rho \Delta x^2}{\Gamma} + 2\Delta t$$

$$\frac{\rho U \Delta x}{2\Gamma} \Delta t - \Delta t$$

$$(-Pec + 1) \Delta t$$

$$\left(\frac{\rho \Delta x^2}{\Gamma \Delta t} + 2\right) \Delta t$$

$$(Pec - 1) \Delta t$$

SI VEDE CHE Δt È ESTRAIB.

NEL CASO STAZIONARIO CDS ABBIAMO OTTENUTO MATRICE QUASI IDENTICA (A MENO DEI Δt)

LA SOLUZ. DI UN PROBL. NON STAZ. È MOLTO ≈ A UN PROBL. STAZIONARIO

X STATO STAZIONARIO POSSO USARE O UN SOLVER STAZIONARIO O UN SOLVER NON STAZIONARIO, POICHE FACCIO GLI STESSI CONTI, NEL 2° CASO CONOSCO ANCHE IL TEMPO

$\Delta t \leftrightarrow$  COEFF. SOTTORILASSAMENTO }  $Pec < 2$   
 STESSO RUOLO  
 SE Δt + PICCOLO LA SOLUZ. È + ACCURATA

$$\nabla \cdot \underline{U} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad \text{CONTINUITA'}$$

INCOGNITE:  $U_x, U_y, U_z, p$

PROBLEMA: NON SO DA QUALE EQUAZ. RICAVARE  $p$

↓  
PRESSURE-VELOCITY COUPLING

↓  
L'EQUAZ. DI CONTINUITA' LA USO SOLO DA CONTROLLO

PRENDO L'EQUAZIONE DI N.S. E APPLICO LA DIVERG. (X RISPETTARE CONTINUITA')

↓  
RICAVO L'EQUAZIONE DI POISSON (ELITTICA)

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}$$

↓  
CONTIENE CONTINUITA' E  
CI CONSENTE DI CALCOLARE  
 $p$  IN FUNZ. DELLA VELOCITA'

PROCEDIM. ITERATIVO:

$p^{(0)} = p(0)$  AD ESEMPIO CON IDROSTATICA

$U_x^{(1)}, U_y^{(1)}, U_z^{(1)}$  DA POISSON CON  $p^{(0)}$

$p^{(2)}$  DA EQUAZ. NAVIER-STOKES CON  $U_i^{(1)}$

$U_x^{(2)}, U_y^{(2)}, U_z^{(2)}$  DA POISSON CON  $p^{(2)}$

E' IL LOOP + ESTERNO DI TUTTO

CHIAMATO METODO SIMPLE

X FL. COMPRIBILI, USO METODI + COMPLESSI,  
COME PISO, OPPURE SIMPLEC

NON CAMBIA LA SOLUZ. FINALE, CAMBIA SOLO LA  
VELOCITA' DI CONVERGENZA



MOLTO UTILE IN SIMULARE  
UN RETORESTUBOLARE  
CENTRO MESHATO CON QUADRATO  
POI PROLUNGATO IN DIREZ.  
RADIALE

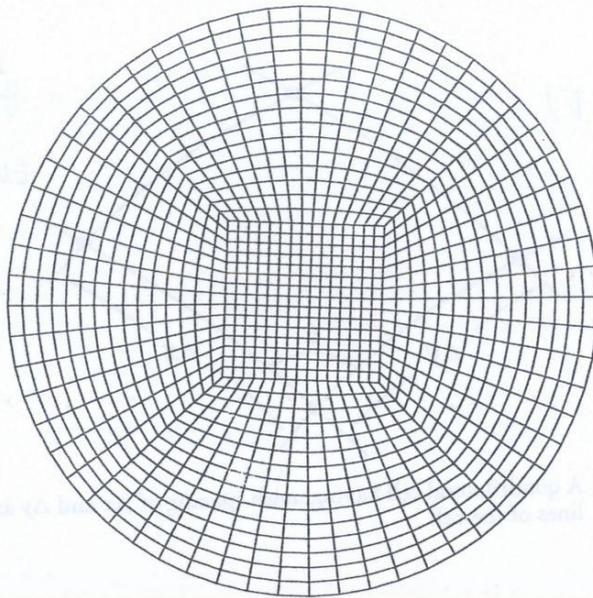


FIGURE 6.8 The generation of a structured O-grid for a circular cylinder

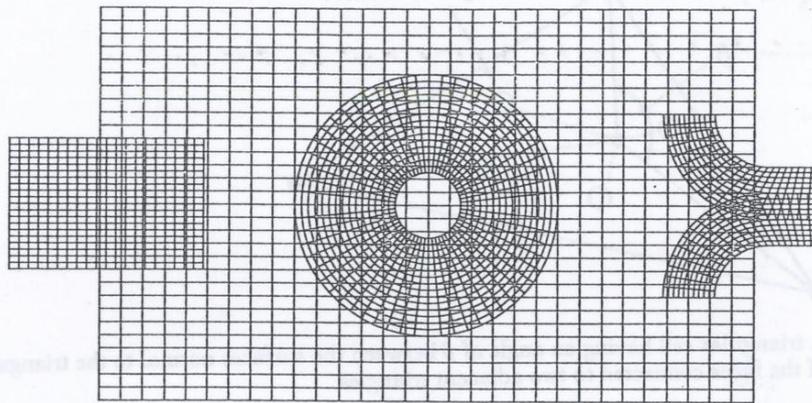
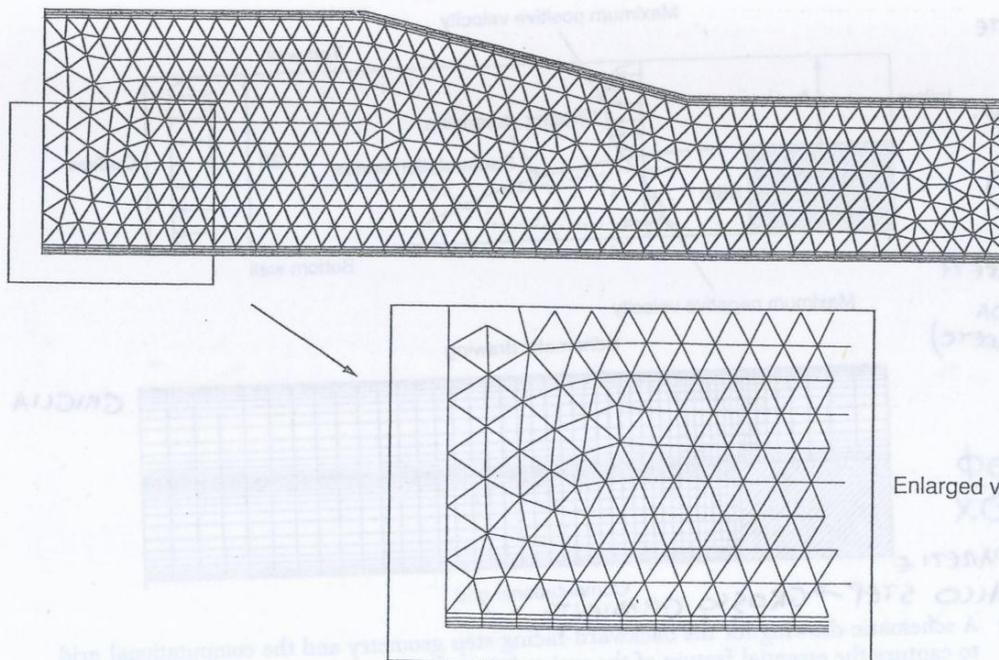


FIGURE 6.9 A structured overlapping grid for a cylinder in a channel with inlet-outlet mappings



Enlarged view

FIGURE 6.10 A grid consisting of structured quadrilateral elements near the walls and unstructured triangular elements in the remaining part of the flow domain

SERVE UN INFITTIM. ALLA PARETE

$\frac{L}{D} > 10$   
AFFINCHÉ IL PROFILO DI VELOCITÀ SIA COMPLETAM. SVILUPPATO

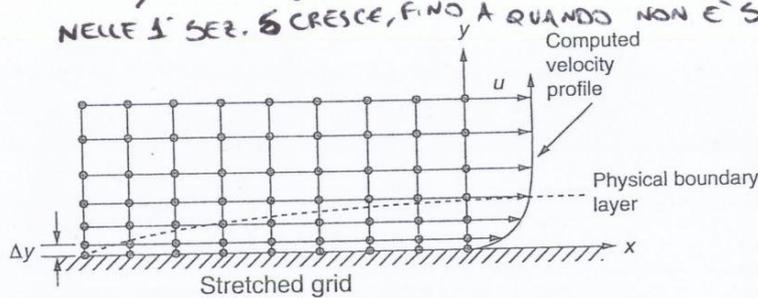
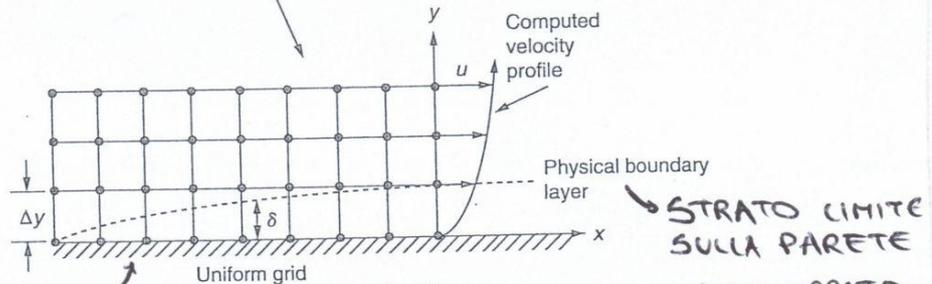
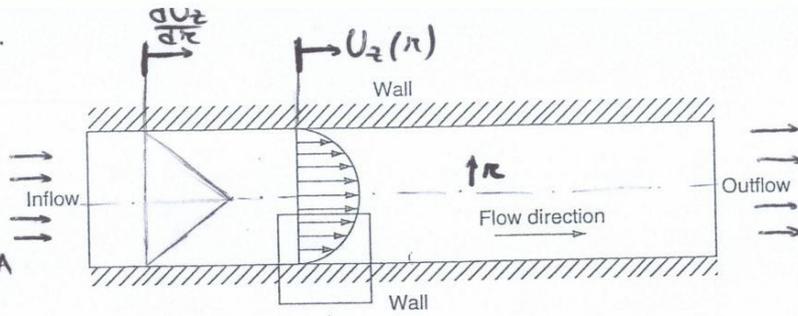
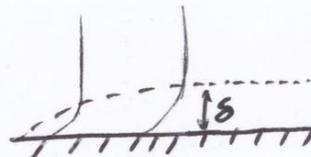


FIGURE 6.13 Two schematic illustrations demonstrating the need for local refinement in the near vicinity of the bottom wall to resolve the physical boundary layer



DOBBIAMO INFITTIMERE IN PROSSIMITÀ DELLO STRATO LIMITE  
 ↓  
 È IMPORTANTE LA DIMENS. DI δ,  
 X PRENDERE LA CELLA < ALLO STRATO LIMITE  
 $\Delta x < \delta$

LA GRIGLIA DEVE ESSERE BELLA, DEVE SEGUIRE IL FLUSSO

- 1) DEFINIAMO GRIGLIA
- 2) DEFINIAMO CONDIZ. AL CONTORNO

• WALL  
 $U = 0$  NO-SLIP (WALL)  
 $K_m \ll 1$   
 IN QUESTI CODICI DEFINISCO LE PARETI (WALL)  
 E POI POSSIAMO MODIFICARE LA CONDIZ. NO-SLIP

• VELOCITÀ MAX  
 $\frac{\partial U_z}{\partial r} = 0$  → PROFILO PIATTO E SIMMETRICO  
 NEL CODICE INDIVIDUIAMO SYMMETRY  
 $\frac{\partial U_z}{\partial r} = 0$

- 2D PLANARI SE
- 2D AXISIMMETRY → AXIS

SE TRASCURIAMO  $\checkmark \checkmark \checkmark$  E TERMINE GRAVITAZ:

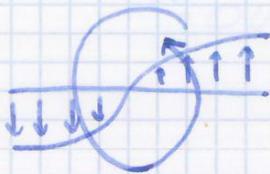
SE  $Re \rightarrow 0$   $\frac{\partial \checkmark}{\partial t} \approx \frac{1}{Re} \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark$  ← DOMINATO, DISSIPAZ.  
VISCOSA LAMINARE

SE  $Re$  BASSO (REGIME LAMINARE) I PICCOLI VORTICI CHE SI FORMANO VENGONO DISSIPATI

SE  $R \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \checkmark}{\partial t} \approx \checkmark \cdot \checkmark \checkmark \checkmark$  ← DOMINATO DA FLUSSO  
INERZIALE/CONVETTIVO

TURBOLENTO/CAOTICO

I VORTICI CRESCONO, CON VELOCITA' CHE VARIA NEL TEMPO (FLUSSO VORTICOSO)



IMPOSSIBILE PREDIRE IN MODO DETAGLIATO

PROBL: CONDIZ. INIZIALI, COME RUGOSITA' NON ESATTAMENTE IDENTIFICABILI (SERVIREBBERO INFINITE CIFRE SIGNIFICATIVE) E CONDIZ. AL CONTORNO

$10^{-3}$  mm    1,0450000 mm  
1,045/2

A CAUSA DI QUESTE PICCOLE DIFFERENZE DOPO UN CERTO TEMPO IL RISULTATO VIENE COMPLETAM. ≠

SIST. METEOROLOGICO A MAX 5 GG, PERCHE' I SIMULATORI ARRIVANO A RISULTATI PRECISI SOLO A 3 GIORNI (DOPO NON + AFFIDABILI)

CONDIZ. INIZIALI → VELOC. INGRESSO, VELOC. INIZ. CONDOTTO  
CONDIZ. CONTORNO → PARETI DEL CONDOTTO

IMPOSSIBILE PREDIRE LA SOLUZIONE

OTTENIAMO QUINDI:

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i'$$

$$\underline{U} = \langle \underline{U} \rangle + \underline{u}' \quad \text{DECOMPOSIZIONE DI REYNOLDS}$$

VELOC. MEDIA                      VELOCITA' FLUTTUANTE

$$\underline{U} \rightarrow \langle \underline{U} \rangle$$

$$\langle u_i' \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\underline{U} - \langle \underline{U} \rangle) dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \underline{U} dt - \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle \underline{U} \rangle dt$$

$$= \langle \underline{U} \rangle - \langle \underline{U} \rangle \frac{\Delta t}{\Delta t} = 0 \rightarrow \text{LA MEDIA DELLA VELOC. FLUTTUANTE } \bar{u}' = 0$$

$$\langle u_i'^2 \rangle = \langle u_i' \cdot u_i' \rangle$$

$$= \langle u_1' \cdot u_1' \rangle + \langle u_2' \cdot u_2' \rangle + \langle u_3' \cdot u_3' \rangle$$

$$= \langle u_x' \cdot u_x' \rangle + \langle u_y' \cdot u_y' \rangle + \langle u_z' \cdot u_z' \rangle$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (u_i')^2 dt$$

SE FLUSSO LAMINARE  $\langle u_i'^2 \rangle = 0$

SE FLUSSO TURBOLENTO  $\langle u_i'^2 \rangle \neq 0$

UTILIZZIAMO QUINDI LA VELOCITA' FLUTTUANTE QUADRATICA MEDIA  $\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle}$

X CAPIRE ENTITA' DEL FLUSSO:

$$\text{INTENSITA' DELLA TURBOLENZA} = \frac{\langle u_i'^2 \rangle}{(\langle \underline{U} \rangle)^2} = I$$

$\ll 1 \rightarrow$  TURBOLENZA DEBOLE

$\gg 1 \rightarrow$  EN. CINETICA FLUTTUANTE

$$\langle u_1'^2 \rangle = \langle u_2'^2 \rangle = \langle u_3'^2 \rangle \quad \text{TURBOLENZA ISOTROPA}$$

$\hookrightarrow$  UTILIZZATA X SEMPLICITA'

MA QUINDI ANCHE  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ ;  $\nabla \cdot \underline{u}' = 0$

DIVERGENZA DEL CAMPO FLUTTUANTE  $\underline{u}' = 0$

SE HO UNA PROP.  $f$  E NE FACCIAMO LA MEDIA DI REYNOLDS:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int f dt ; f' = f - \langle f \rangle$$

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle$$

$$\langle f' \rangle = 0 \quad \langle f'^2 \rangle \neq 0$$

$$\langle f' \langle g \rangle \rangle = 0 \quad \langle f' g' \rangle \neq 0$$

$$\langle f' \frac{\partial g'}{\partial x_i} \rangle \neq 0 \quad \left( \langle f' \frac{\partial g'}{\partial x_i} \rangle = \langle f' R' \rangle \neq 0 \right)$$

SE  $f$  E  $g$  SONO SCORRELATI  $\langle f' \rangle = 0$ ,  $\langle g' \rangle = 0$   
ALLORA  $\langle f' g' \rangle = 0$

SE INVECE  $f$  E  $g$  SONO CORRELATI  $\langle f' g' \rangle \neq 0$

SE  $f' = u_x'$  E  $g' = u_y'$  AD ESEMPIO ALLORA SONO CORRELATE:

$$\frac{\partial u_x'}{\partial x} + \frac{\partial u_y'}{\partial y} = 0 \quad \text{QUINDI } \langle u_x' u_y' \rangle \neq 0$$

SE  $\rho = \text{COST}$ ,  $\mu = \text{COST}$

$$\left\langle \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \nu \nabla^2 \underline{u} \right\rangle \leftarrow \text{APPLICHO MEDIA DI REYNOLDS}$$

ESSENDO UN OPERATORE LINEARE:

$$\left\langle \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right\rangle = -\frac{1}{\rho} \langle \nabla p \rangle + \langle \underline{g} \rangle + \langle \nu \nabla^2 \underline{u} \rangle$$

**RANS  $\rightarrow$  NAVIER-STOKES MEDIATA CON M. REYNOLDS**

$\downarrow$   
NATA X PROBL. STAZIONARI