



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1042

DATA: 15/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bosio

MATERIA: Topografia

Prof. Manzino

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

3/3/14

TOPOGRAFIA

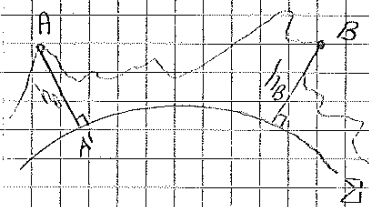
È una scienza applicata che ha come scopo quello di determinare e rappresentare la sup. terrestre e ciò che vi sta sopra.

Nasce dalla GEODESIA, una scienza il cui scopo è quello di determinare la figura della Terra (sup. fisica e matematica), tenendo conto del tempo.

SUP. FISICA Separazione tra Terra e acqua dall'atmosfera

SUP. MATEMATICA Superficie equipotenziale avvece relativa al campo gravitazionale terrestre.

PROBLEMA della RAPPRESENTAZIONE della Terra



METODO VARIAZIONALE

Si basa sul determinare gli spostamenti della sup. terrestre dell'ellissoide Σ di riferimento.

Ciascun punto viene proiettato \perp a Σ su di esso. La distanza $h_A = \overline{AA'}$ è detta QUOTA.

Ciascun punto si individua mediante 3 coordinate λ, ψ, h ; ovvero LONGITUDINE, LATITUDINE e QUOTA rispetto la sup. di riferimento.

La direzione di proiezione è sempre determinabile e coincide con quella del FILO A PIOMBO (NADIR).

La sup. equipotenziale più utile su cui si cerca di proiettare è il GEOIDE ovvero una sup. equipot. convenzionale individuata dal livello medio del mare in quiete.

MOTI TERRESTRI

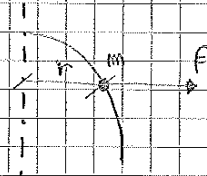
▶ ROTAZIONE A TORNO ALL'ASSE POLARE

$$\omega = \frac{2\pi}{T_E}$$

$T_E \rightarrow$ giorno siderale medio = 86'164"091 sec

$a = \omega^2 r$ è l'accelerazione centrifuga dovuta alla rotazione dunque la forza esercitata su una massa vale:

$$F = m \cdot a = m \omega^2 r$$

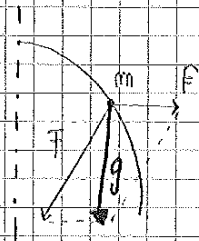


▶ RIVOLUZIONE attorno al Sole

$T_S =$ 1 anno siderale = 365,256360 giorni.

COMBINAZIONE degli effetti

Considerando la combinazione di F e F_c per un punto di massa unitaria ricaviamo che:



$$\boxed{g = F + F_c} \quad \begin{array}{l} \text{COMBINAZIONE dell'effetto} \\ \text{CENTRIFUGO e GRAVITAZIONALE} \end{array}$$

Anche F_c ammette potenziale centrifugo pari a:

$$V = \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

Il Potenziale di gravità W è dato da

$$\boxed{W(P) = V(P) + V_c(P)}$$

$$W = W(P) = G \iiint_V \frac{\rho}{r} dV + \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

$$g = F + F_c = -\text{grad}(W)$$

4/3/12

ESPRESSIONE del POT. GRAVITAZIONALE in SERIE

$$V(P) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \left[A_{mml} \frac{R_{mml}(\psi, \lambda)}{(\sigma)^{m+1}} + B_{mml} \frac{S_{mml}(\psi, \lambda)}{(\sigma)^{m+1}} \right] \quad \begin{matrix} m \rightarrow \text{ordine} \\ m \rightarrow \text{grado} \end{matrix}$$

▷ A_{mml} e B_{mml} sono COSTANTI che dipendono dalla densità e dalla forma terrestre.

▷ R_{mml} e S_{mml} sono funzioni TABULATE

$$A_{mml} = 2G \frac{(m-l)!}{(m+l)!} \iiint_{\gamma} (\sigma')^m R_{mml}(\psi', \lambda') \rho d\tau$$

$$B_{mml} = 2G \frac{(m-l)!}{(m+l)!} \iiint_{\gamma} (\sigma')^m S_{mml}(\psi', \lambda') \rho d\tau$$

A e B sono "facilmente" calcolabili solo a ordine e grado 2.

$$A_{00} = G \iiint \rho d\tau = G \cdot H \quad H = \text{massa della Terra}$$

A_{1ml} e B_{1ml} sono nulli se poniamo l'origine degli assi nel CM perché rappresentano i momenti statici e nel CM per definizione sono nulli.

$$A_{20} = G \left(\frac{A+B}{2} - C \right) \quad A, B, C = \text{momenti di Inerzia principali rispetto } x, y, z$$

$A_{21} = 0$ se scegliamo z coincidente con l'asse di rotazione

$$A_{22} = \frac{G}{4} (B-A) \quad B_{20} = B_{21} = B_{22} = 0$$

Quindi:

$$V(P) = \left[\frac{GH}{\sigma} + A_{20} \frac{R_{20}}{\sigma^3} + A_{22} \frac{R_{22}}{\sigma^3} \right] + \pi'$$

π' = Resto dello sviluppo

DETERMINAZIONE dello SFEROIDE

$GM, \frac{e-A}{H}, \omega^2$ vengono fissate.

Ci poniamo in due casi differenti:

- EQUATORE $\psi = 0^\circ$ e chiamo "a" il raggio EQUATORIALE

$$U = \frac{GM}{a} \left[1 + \frac{k}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^2}{2GM} \right]$$

- POLO $\psi = 90^\circ$ e chiamo "c" il raggio POLARE

$$U = \frac{GM}{c} \left[1 - \frac{k}{c^2} \right]$$

Poiché U dev' essere costante:

$$\frac{GM}{a} \left[1 + \frac{k}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^2}{2GM} \right] = \frac{GM}{c} \left[1 - \frac{k}{c^2} \right]$$

Ricaviamo:

$$\frac{c}{a} = \left(1 + \frac{k}{c^2} \right) \left(1 + \frac{k}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^2}{2GM} \right)^{-1} \quad \text{siccome } \frac{k}{c^2} \approx 0$$

$$\frac{c}{a} \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{k}{a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{2GM}$$

Definiamo α SCHIACCIAMENTO dello SFEROIDE "a"

$$\alpha = \frac{a-c}{a} = \frac{3}{2} \frac{k}{a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM}$$

Definiamo analogamente β SCHIACCIAMENTO GRAVIMETRICO "B"

$$\beta = \frac{\delta_p - \delta_e}{\delta_e} = -\frac{3}{2} \frac{k}{a^2} + 2 \frac{\omega^2 a^3}{GM}$$

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a^3}{GM} \quad \text{COSTANTE!}$$

IN CONCLUSIONE :

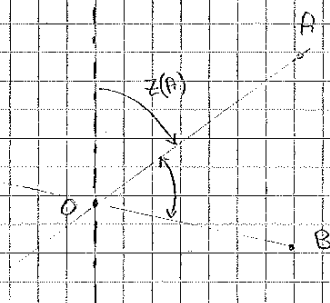
- Dal punto di vista PLANIMETRICO si usa come riferimento l'ELISSOIDE di ROTAZIONE che verifica la condizione $U = U_0 = W_0$.
- Dal punto di vista altimetrico si si riferisce al GEOIDE e per determinare le quote si effettuano le livellazioni da un manoscopo di riferimento.

8/3/14

STRUMENTI di MISURA ANGOLARE

ANGOLO AZIMUTALE

Angolo diedro $\hat{A}OB$ formato dai due piani appartenenti al fascio della verticale in O e passanti rispettivamente in A e in B .



ANGOLO ZENITALE

Angolo $z(A)$ compreso tra la verticale in O e il vettore \vec{OA} .

DISTANZA REALE

lunghezza del segmento \vec{OA}

DISTANZA TOPOGRAFICA

lunghezza arco di geodetica della superficie di riferimento che unisce i 2 punti.

DISLIVELLO

Differenza di quota tra 2 punti.

RETIFICA del TEODOLITE

- ▶ Asse principale \perp al piano orizzontale passante per a_2
- ▶ Asse $a_2 \perp$ ad a_1
- ▶ " $a_3 \perp$ ad a_2
- ▶ I 3 assi si incontrano in un solo punto detto CENTRO STRUMENTALE.

ERRORI di LETTURE AZIMUTALI

- ▶ ERRORE DI INCLINAZIONE (E_i)
Asse a_2 non è \perp ad a_1 .
 $E_i \approx i \cotg(Z)$
- ▶ ERRORE di COLLIMAZIONE (E_c)
Asse a_3 non è \perp ad a_2 .
- ▶ ERRORE di ECCENTRICITÀ dell'ALIDADA (E_e)
Asse a_1 non passa per il centro geometrico armutale.

Rimedi \rightarrow Possiamo annullare questi errori impiegando la REGOLA di BESSEL.

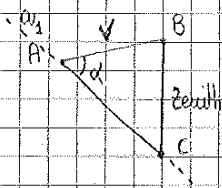
Eseguiamo una prima lettura col cerchio verticale a dx, dopodiché ruoto di 180° lo strumento e ruoto il cannocchiale in modo da collimare nuovamente il punto. (ora il cerchio è a sx)

$$L_{\text{annullata}} = \frac{L_s + L_d \pm \pi}{2} \quad \leftarrow \text{LETTURA PURATA dagli errori}$$

- ▶ ERRORE di VERTICALITÀ (E_v)

Asse a_1 non è verticale

$$E_v = r \operatorname{sen}(\alpha) \cotg(Z)$$



- ▶ ERRORE di GRADUAZIONE dei CERCHI

La suddivisione dei cerchi non è perfetta e uniforme.

Ripetere le letture su parti diverse del cerchio e farne la

Oggi i cerchi sono ottici, graduati con CHIARO-SCURI, e sono dei FOTODIODI sotto di loro, essi sono sensibili ai cambi di luminosità e inviano i dati alla centralina della stazione totale.

PRINCIPI di MISURAZIONE degli ANGOLI

- TEODOLITI ELETTRONICI con CERCHI CODIFICATI → LETTURA ASSOLUTA
- " " " " GRADUATI → LETTURA INCREMENTALE
- " " " " MECCANIZZATI → " DINAMICA

La Lettura Assoluta

Maggior è la graduazione del cerchio maggiore sarà la precisione con cui si definisce l'angolo!

IP FOTODIODO rileva la luce e invia un segnale:
 0 ↔ SCURO, 1 ↔ CHIARO.

Durante la ROTAZIONE viene fatto un conteggio dei CHIARO SCURO e si determina così la MISURA GREZZA:

$$L_g = \frac{m}{M} \cdot C$$

$m \rightarrow$ n° dei CHIARO SCURO

$M \rightarrow$ # di suddivisioni del cerchio

$C \rightarrow 400^\circ$

Per aumentare la precisione si usa per uno strumento associato al cerchio e simile al nonio che ci permette di determinare con precisione dei mgm la misura.

La Lettura Incrementale

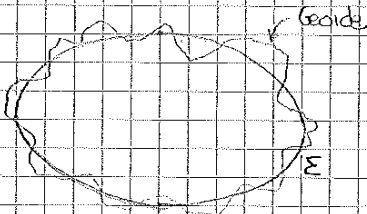
I cerchi sono graduati, c'è una sorgente luminosa (indice di lettura digitale). Sotto al cerchio un fotodiode conta quanti chiaro-scuro passano → determiniamo così l'angolo conoscendo la graduazione del cerchio. Come per prima la precisione va migliorata usando le FRANGE di INTERFERENZA (nodi di grigi) con cui si arriva alla precisione di $\frac{1}{100}$ della graduazione normale.

11/3/14

Ellissoide di Rotazione

Dobbiamo definire il valore di U_0 che definisce il nostro ellissoide di rotazione. Tale valore sarà tale da far sì che la media su tutta la superficie del POTENZIALE ANOMALO T sia 0!

$$H_G[W] = W_0 = H_G[U] + \underbrace{H_G[T]}_{=0} \rightarrow W_0 = U_0 + 0 \rightarrow W_0 = U_0$$



Posizioni Reciproche di ELLISSOIDE e GEOIDE.
Per individuare l'ELLISSOIDE di ROTAZIONE abbiamo bisogno di 4 parametri:

a ; $G \cdot M$; ω ; A_{20} »

Gravità Normale

γ_0 è calcolabile sulla superficie dell'ellissoide; siccome per però i punti reali della superficie avranno una certa quota (h) rispetto Σ sappiamo che all'incirca ogni 3 mt di quota, la gravità diminuisce di 1 mgal ($1 \text{ gal} = 1 \text{ cm/s}^2$).

SISTEMI di COORDINATE

- CARTESIANO GEOCENTRICO (x, y, z)
- GEOGRAFICO GEOCENTRICO o POINCARÉ (λ, ψ, σ)
- GEOGRAFICO (ψ, λ, h)
- ASTRONOMICHE (ϕ, Δ, H)

$$\frac{z}{r_0} = \frac{c}{a} \operatorname{tg} \beta = \frac{c^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow z = r_0 \cdot \frac{c^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi$$

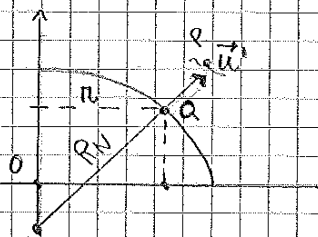
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \beta &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \\ \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{\operatorname{sen} \varphi \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \end{aligned} \right.$$

con $e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$ ECCENTRICITÀ QUADRATICA

$$c = a \sqrt{1 - e^2} \quad r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

GRAN NORMALE $\vec{R}_N \rightarrow \vec{R}_N = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$

$$z = c \cdot \operatorname{sen} \beta = \frac{a \operatorname{sen} \varphi (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = R_N (1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi$$



$r_0 \equiv$ con il raggio del parallelo per il punto.

$$r_0 = R_N \cdot \cos \varphi$$

Altre coordinate ricavati r_0 e z proiettato in su x, y nuovo 0 .

$$Q = \begin{cases} x = R_N \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y = R_N \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ z = R_N (1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

Come già detto spesso il punto non giace sulla ellissoide ma ha una certa altezza (h) rispetto esso.

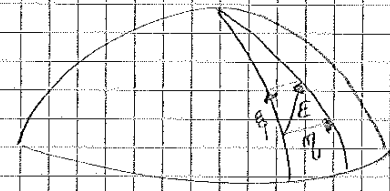
$$Q = \begin{cases} x = (R_N + h) \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y = (R_N + h) \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ z = [h + R_N (1 - e^2)] \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

Cio perché \vec{M}' ha la medesima direzione di h !

La deviazione angolare E è anche vista come un vettore di componenti (η, ξ) rispettivamente componenti parallela e meridiana.

$$\begin{cases} \sin \phi = \frac{g_z}{|g|} & g_x = g \cos \phi \cos \lambda \\ \tan \lambda = \frac{g_y}{g_x} & g_y = g \cos \phi \sin \lambda \end{cases}$$

$$E \circ \begin{cases} \eta = E_\lambda = (\lambda - \lambda') \cos \varphi \\ \xi = E_\varphi = (\varphi - \varphi') \end{cases}$$



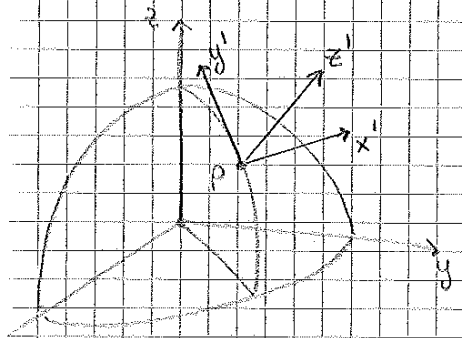
η non è solo la differenza $\lambda - \lambda'$ perché come si può vedere esso dipende anche dalla latitudine φ ; η aumenta verso l'equatore e si azzerava ai poli!

$h \approx N + H$ $N = \text{ONDULAZIONE DEL GEOIDE}$

ϕ si determina con un TACOLITE e con l'"UNIVERSALE GEODETICO" mentre λ mediante l'uso di un CROMOMETRO di precisione.

Tutte le misure vanno fatte usando come riferimento le EPIMERIDI.

SISTEMA di COORDINATE LOCALI: "COORD. EULERIANE"



Sistema di riferimento con una validità di circa 10 km nell' intorno del punto di origine. La terra è così suddivisa:

- z' coincide con \vec{r}
- y' è diretto in modo tangente al meridiano
- x' è " \perp agli altri due assi e tangente al parallelo.

Il Raggio Massimo si trova sulla SEZIONE NORMALE
 ⊥ al quello MERIDIANA.

Per le curve formate da SEZIONI NORMALI vale la relazione di Eulero:

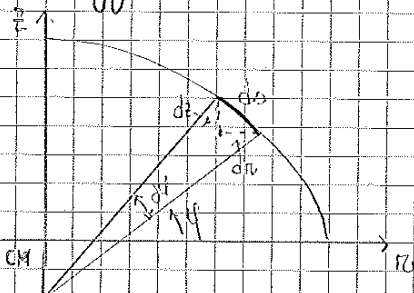
$$\frac{1}{R\alpha} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\rho} + \frac{\sin^2(\alpha)}{R_N}$$

dove:

ρ → Raggio minimo di curvatura

R_N → " massimo di curvatura (GRAN NORMALE)

Raggio di curvatura di un'ELIPSE



$$ds = \rho \cdot d\varphi$$

Ricordiamo le formule per il passaggio dai coord. geografiche al cartesiane.

Ricordiamo:

$$dx = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)} d\varphi$$

$$dz = \frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} d\varphi$$

$$ds = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} d\varphi$$

ma come $ds = \rho d\varphi$

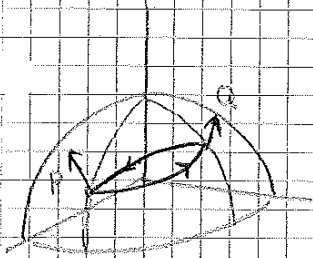
Ricaviamo che $\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$

RAGGIO MINIMO di CURVATURA

Il Raggio MASSIMO lo ricaviamo con il TEOREMA di HEUSNIER

" Il Raggio di curvatura di una sezione obliqua è uguale al raggio della sezione NORMALE corrispondente al piano che contiene la tangente alla sezione obliqua per il coseno dell'angolo formato dai piani delle sezioni".

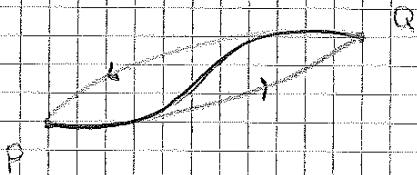
LINEE GEODETICHE



L'Azimuth che da P va a Q è diverso da quello che da Q va a P.

Questo perché cambiamo le normali e quindi anche le normali normali.

La CURVA GEODETICA è una curva che giace su Σ (non è quindi piana) ed è l'arco che congiunge P e Q con la minima distanza possibile.



La CURVA GEODETICA è anche definita come la curva che ha normale in ogni suo punto coincidente con la normale dell'ellissoide.

Considerando la superficie $\Sigma: F(x, y, z)$ esiste il problema di definire la distanza tra 2 punti P, Q su di essa.

Ovviamente esistono le linee che congiungono P e Q ma quella di minima lunghezza è la CURVA GEODETICA.

Se P e Q non sono troppo distanti ($\theta < \pi$), la geodetica è unica ed è in genere una CURVA COBBA ovvero non è PIANA.

I coseni direttori della normale a Σ valgono:

$$\frac{1}{2\Delta} \frac{dF}{dx} ; \frac{1}{2\Delta} \frac{dF}{dy} ; \frac{1}{2\Delta} \frac{dF}{dz} \quad \text{dove} \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$$

La curva g (GEODETICA) data in forma parametrica in funzione di s (coordinate curvilinee) ha equazione:

$$g: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

I coseni direttori della tg alla geodetica valgono:

$$R_x \frac{d^2x}{ds^2} ; R_y \frac{d^2y}{ds^2} ; R_z \frac{d^2z}{ds^2}$$

Riconfermo che $r =$ raggio parallelo e $\lambda =$ longitudine :

$$X = r \cos \lambda \quad Y = r \sin \lambda$$

Si assume ora r e λ dipendono da ds ne scriviamo le derivate :

$$\frac{dx}{ds} = -r \sin(\lambda) \frac{d\lambda}{ds} + \cos(\lambda) \frac{dr}{ds} = -Y \frac{d\lambda}{ds} + \cos(\lambda) \frac{dr}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = r \cos(\lambda) \frac{d\lambda}{ds} + \sin(\lambda) \frac{dr}{ds} = X \frac{d\lambda}{ds} + \sin(\lambda) \frac{dr}{ds}$$

Inseriamo tutto nella eq. (4)

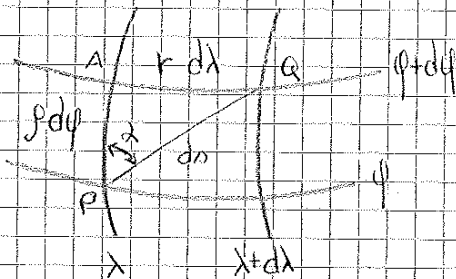
$$X^2 \frac{d\lambda}{ds} + X \sin(\lambda) \frac{dr}{ds} + Y^2 \frac{d\lambda}{ds} - Y \sin(\lambda) \frac{dr}{ds} = \text{costante}$$

↓

$$\frac{d\lambda}{ds} (r^2 \cos^2(\lambda) + r^2 \sin^2(\lambda)) + \frac{dr}{ds} (r \cos \lambda \sin \lambda - r \sin \lambda \cos \lambda) = \text{cost}$$

↓

$$\frac{d\lambda}{ds} \cdot r^2 = \text{costante} \quad (5)$$



Consideriamo il triangolo rettangolo PAB

$$r dx = ds \cdot \sin(\alpha)$$

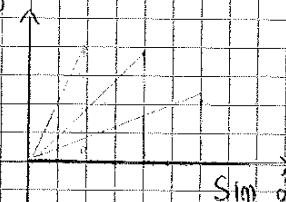
RELAZIONE di CAIROT

$$r \sin(\alpha) = \text{cost}$$

Scriviamo allora che (5) diventa :

Relazione di Clairaut :

"In ciascun punto della GEODESICA il prodotto del raggio del parallelo in quel punto e l'azimut della geodesica nel punto rimane COSTANTE".



Nel primo quadrante al crescere di α , cresce il seno e di conseguenza deve diminuire r !!

A 300 km di distanza si compie un errore di:

- $0''_{,26}$ di $\varphi = 0^\circ$
- $0''_{,13}$ di $\varphi = 45^\circ$

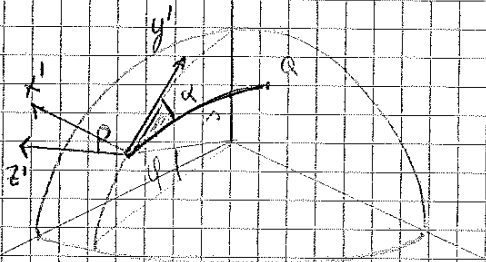
Tale errore non trascurabile rispetto alla precisione dei nostri strumenti ed inoltre è pressoché impossibile eseguire misurazioni tra punti che distano più di 300 km tra loro a causa della curvatura terrestre.

TECERCA della GEODESIA OPERATIVA

"Qualunque misura di Azimuth, angolo e distanza eseguita con i mezzi a disposizione del topografo può ritenersi eseguita con riferimento ad archi di geodetica sulla superficie di riferimento".

Con i nostri strumenti dunque possiamo sostituire ad $A_z, \alpha,$ e alla curva geodetica quella della sfera usuale.

CAMPO GEODETICO e CAMPO TOPOGRAFICO



Consideriamo una tetraedra locale con origine in P:

α è l'Azimuth della sezione normale con cui andiamo da P a Q. Chiamo Δ l'arco PQ .

Approssimiamo l'ellissoide a una sfera di raggio R_s . Essa ovviamente ha eccentricità nulla ($e^2 = 0$).

Le espressioni parametriche della curva geodetica che da P va a Q e viceversa diventano

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \Delta \sin(\alpha) \cdot \left(1 - \frac{\Delta^2}{6R_s^2}\right) \\ y_s &= \Delta \cos(\alpha) \cdot \left(1 - \frac{\Delta^2}{6R_s^2}\right) \\ z_{P'} &= -\frac{\Delta^2}{2R_s} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{GEODESIA} \\ \text{sulla} \\ \text{SFERA IDEALE} \end{array}$$

CAMPO TOPOGRAFICO

Facciamo tendere il Raggio della sfera locale a ∞ .

Otteniamo un PIANO detto PIANO LOCALE.

La geodetica su questo piano sarà:

$$\left. \begin{aligned} X_s &= \rho \cdot \sin(\alpha) \\ Y_s &= \rho \cdot \cos(\alpha) \\ Z_s &= 0 \end{aligned} \right\} \text{GEODETICA sul PIANO LOCALE}$$

Notiamo un errore planimetrico tra il PIANO e SFERA LOCALI di:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\rho^2}{6\rho R_n}$$

ρ	10 km	20 km	50 km
$\frac{\Delta s}{s}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$16 \cdot 10^{-6}$	$10,2 \cdot 10^{-5}$

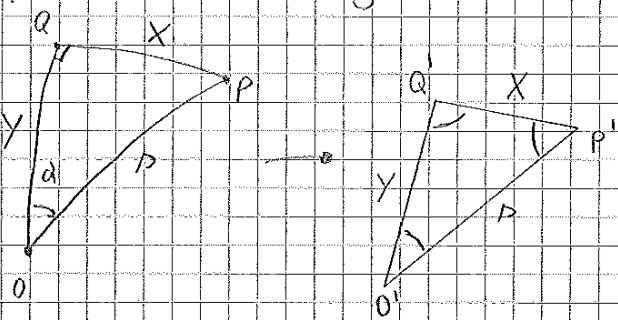
Definizione di CAMPO TOPOGRAFICO

"Im un INTERNO di 10 ÷ 15 km per misure PLANIMETRICHE possiamo sostituire alla sfera locale il piano locale tangente alla sfera in P."

- In ambito Altimetrico il PIANO LOCALE non è utilizzabile a causa dell'elevata differenza tra le due superfici.

In fatti già a 100 mt abbiamo un errore paragonabile a quello dei nostri strumenti ($\pm 0,8$ mm con $s = 100$ mt) $\equiv (8 \cdot 10^{-6})$ PRECISIONE

Applicazione del T di Legendre



$$\begin{aligned} \hat{O}' &= \alpha - \epsilon \\ \hat{Q}' &= \pi - \epsilon \\ \hat{P}' &= \frac{\pi}{2} - \alpha + 2\epsilon \end{aligned}$$

α, β sono le COORD. POLARI GEODETICHE mentre x, y quelle RETTANGOLARI GEODETICHE.

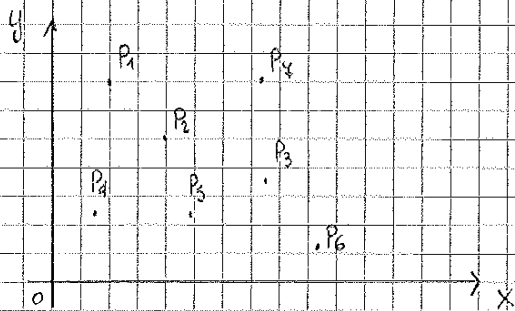
Tale assunzione può possiamo fare in quanto secondo il TEOREMA della GEODESIA OPERATIVA possiamo approssimare Δ ad una CURVA GEODETICA.

Secondo il Teorema dei Seni:

$$\frac{x}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{y}{\cos(\alpha - 2\epsilon)} = \frac{\rho}{\cos(\epsilon)} \quad \cos(\epsilon) \stackrel{N}{\approx} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \stackrel{N}{\approx} 1$$

Ricaviamo dunque:

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\alpha - \epsilon) \\ y = \rho \cos(\alpha - 2\epsilon) \end{cases} \quad 3\epsilon = \frac{\frac{1}{2} \rho \sin^2 \alpha \cos \alpha}{R^2}$$



Del sistema ricaviamo una approssimazione planimetrica piana sul PIANO GEODETICO dei punti sulla SFERA \rightarrow estensione di circa 100 km, che rapp. già

una cartografia valida!

NB Soltanto noi non siamo in possesso di (α, ρ) a causa della distanza fra i punti lontanissimi fra loro con uno strumento topografico.

Noi siamo però in possesso delle COORDINATE GEOGRAFICHE GEOCENTRICHE $(\lambda, \varphi, \sigma)$.

MISURA di una GRANDEZZA

• MISURE DIRETTE

Si conta il # di unità contenute in una quantità costituita

• MISURE INDIRETTE

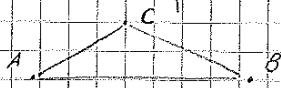
Definite dal suo legame interno funzionale,
ad esempio:

- somma degli interni triangolo = π
- sup del triangolo = $\frac{1}{2} ab \sin \alpha$

• MISURE INDIRETTE CONDIZIONATE

sia ad esempio le quote di 3 punti legati da 3 misure dirette

$$\Delta AB + \Delta BC + \Delta CA = 0$$



TIPICI di ERRORI nelle misure

DA EVITARE

- ERRORI GROSSOLANI errori banali (lettura, conta, ...)
- ERRORI SISTEMATICI errori che conservano valore e segno al ripetere della misura. (taratura errata ...)
Si media con BESSEL.

• FLUTTUAZIONI ACCIDENTALI

Sono a priori imprevedibili ma possiamo fare delle valutazioni probabilistiche.

Le FLUTTUAZIONI si hanno quando portiamo pos. misurazioni al limite della precisione dello strumento in uso.

TRATTAMENTO delle MISURE

Possiamo ipotizzare una gamma di possibili valori ed un ORDINE di PROBABILITÀ tra di essi. Tale ordine è un numero che varia da 0 ad 1 ed è detto PROBABILITÀ

VARIABILE CASUALE (VC):

È una distribuzione di probabilità ed un insieme di valori argomentali S sia rappresentabile in \mathbb{R} .

TIPI di VARIABILE CASUALE

► DISCRETA

Quando l'insieme S è formato da un numero discreto di punti nei quali si concentra una probabilità.
(es: lancio di un dado o di una moneta).

La $F(x)$ sarà una funzione DISCONTINUA

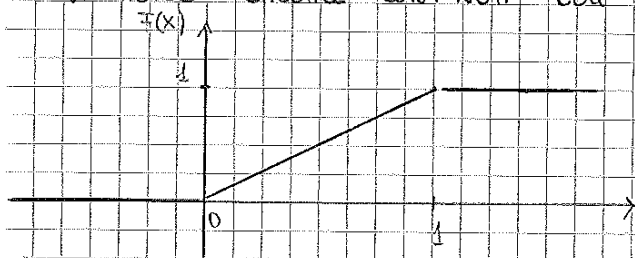
► CONTINUA

Quando la probabilità che x assuma un singolo valore è sempre 0.

(es: misure di una distanza)

La $F(x)$ è una funzione CONTINUA.

VARIABILE CASUALE CONTINUA con distribuzione uniforme di probabilità

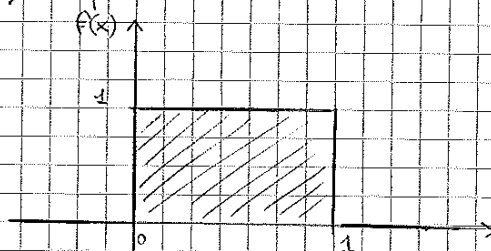


La $F(x)$ cresce linearmente nel tratto di S .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

La funzione derivata di $F(x)$ prende il nome di DENSITÀ di PROBABILITÀ ($f(x)$).

Il suo grafico indica come e dove è distribuita la PROBABILITÀ.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{ma ricorda che} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

DALLA V.C. alla VARIABILE STATISTICA

La VC è una variabile APRIORISTICA, ovvero noi abbiamo un'idea / aspettativa dei risultati dell'esperimento ancora da effettuare.

Quando si fa l'esperimento spesso i risultati non combaciano esattamente con quelli attesi.

► Si definisce la MEDIA della VAR. CAS X quando esiste

$$\mu = H[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (\text{Analogia al H. STATICO})$$

questo per VC. CONTINUE.

μ = BARICENTRO delle MISURE.

Per VC. DISCRETE:
$$\mu = \sum_{i=1}^m x_i \cdot f_i$$

Per una VS

$$m = H[X] = \sum x_i \cdot f_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m x_i \cdot F_i$$

NB la MEDIA è un OPERATORE LINEARE!

Esempio:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ 3 & 2 & 5 \end{array} \right. \quad m = \frac{3x_1 + 2x_2 + 5x_3}{10}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_3 & x_3 & x_3 & x_3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right. \quad m = \frac{\sum x_i}{N}$$

VS non ordinate!

LA VARIANZA

È il quadrato dello SCARTO QUADRATICO MEDIO.

Quest'ultimo indica quanto sono disperse le misure attorno alle medie.

• Definiamo lo SCARTO $\rightarrow V = (X - \mu_x)$

la varianza è:
$$\sigma^2(X) = H[(X - \mu_x)^2]$$

Possiamo vedere che:

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot f(x) dx$$

Quota $\hat{=}$ Indica l'altezza ORTOMETRICA ovvero l'altezza di un punto rispetto al GEODE.

34/3

$$\Delta AB = Q_B - Q_A = H_B - H_A \quad \text{DISIVELLO tra A e B}$$

L'operazione che ci permette di determinare i dislivelli è la LIVELLAZIONE.

Esistono due tipi di livellazioni:

- ▶ dipendenti dalla distanza dei 2 punti
- ▶ indipendenti " " " " "

LIVELLAZIONI INDIPENDENTI

- LIVELLAZIONE BAROMETRICA (Misura le variazioni della pressione atmosferica e le condizioni al contorno)
- LIVELLAZIONE IDROSTATICA (sfatta il principio dei vasi comunicanti)
- LIVELLAZIONE GEOMETRICA

LIVELLAZIONI DIPENDENTI

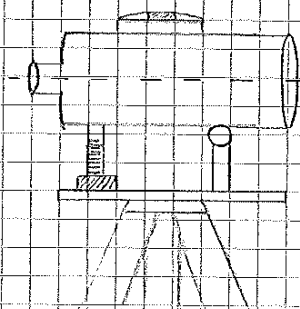
- LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA

LIVELLAZIONE GEOMETRICA

Cio che ci permette di misurare i dislivelli è il LIVELLO ovvero un cannocchiale fissato su un basamento elastico costituito da una VITE di ELEVAZIONE e da una traversa con CERNIERA.

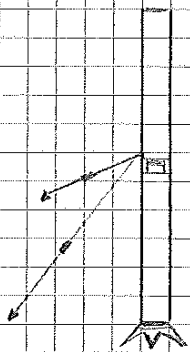
La vite di elevazione ci permette di rendere orizzontale il LIVELLO e dunque l'asse di collimazione.

Per la perfetta orizzontalità si usa una LIVELLA TORICA di precisione.



LA STADIA

È un asta graduata/codificata dotata di un livello sferico e due piedi per la sua messa in perfetta verticalità. (Piedi solo per misure di alta precisione).



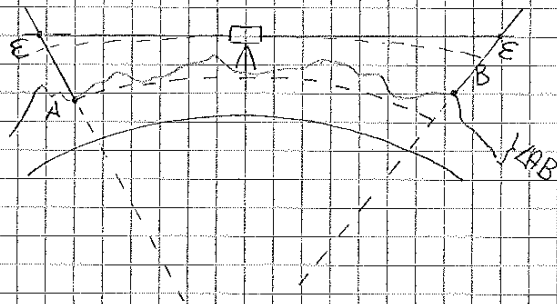
La stadia poggia su un tripode a teste sferiche in modo che il punto a cui si riferisce la misura è unico.



La distanza tra stadia e livello varia al secondo delle precisioni volute! (A. PREC. \rightarrow $d \leq 10$ mt).

OSSERVAZIONI

Come già visto il PIANO LOCALE è PESSIMO per misure altimetriche. Unico fatto rispetto al GEOIDE che si può approssimare allo ellissoide che a sua volta in un raggio di 400 km si può approssimare con la sfera locale.



$$\Delta AB = PA - \epsilon - PB + \epsilon$$

$$\Delta AB = PA - PB$$

Natale che riferendo alla sfera locale il dislivello AB si trova sempre dalle letture alla stadia nonostante l'asse di collimazione non compia una curva come la sfera! Infatti se la LIVELLAZIONE è dal MEZZO l'errore compiuto ϵ è uguale su ambedue misure \rightarrow si annulla!

Vantaggi della LIVELLAZIONE dal MEZZO

- ANNULLO ERRORE di SFERICITÀ TERRESTRE
- " " " " NON PERFETTA ORIZZONTALITÀ dell'asse di collimazione

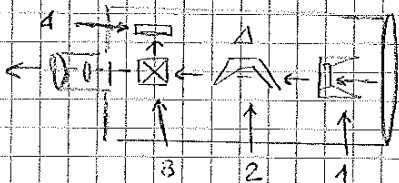
GLI AUTOLIVELLI

Sono livelli elettronici dotati di un compensazione automatica che rende perfettamente orizzontale l'asse di collimazione. Si basano tutti su un sistema di pseudonarismi e sono in grado di fornire una precisione compresa tra gli $\pm 0,2''$ e $\pm 2''$.

Da lettura elettronica allo stadio

Si usano stadii codificati su cui è impresso un codice a BARRE (numero bianco) molto particolare derivante dai numeri d'oro e su cui si basano anche i sistemi GPS. Tale numero è detto PSEUDOCASUALE.

È necessario in quanto inquadrando lo stadio l'autolivello dev'essere in grado di capire a che livello dello stadio è e definire la lettura precisa allo stadio rispetto a quel pezzo di codice che legge.



La radiazione luminosa dello stadio arriva allo strumento.

1) LENTE PARALLATTICA

con il suo spostamento, necessario per la perfetta messa a fuoco, si determina la distanza approssimata livello - stadio.

2) COMPENSATORE

3) DIVISORE d'IMMAGINE

Divide la radiazione luminosa deviando solo quella INFRAROSSA verso il CCD.

4) CCD

Analizza il segnale infrarosso convertendolo in un codice digitale (ONDA QUADRA).

NB Serve radiazione IR per funzionare quindi in luoghi bui (CAVERNE, GALERIE, ecc...) servono due particolari!!

VERIFICA della RETIFICA di un livello / autolivello

- ▶ Eseguo livellazione dal mezzo \rightarrow Δ AB senza errore di rettifico
- ▶ " " " da un estremo.

Note le due misure!! quindi l'eventuale ERRORE di RETTIFICA.

Rettifica:

- LIVELLO \rightarrow Agisco sulla LIVELLA TORICA
- AUTOLIVELLI \rightarrow " sul RETICULO

LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA

Si effettua con un teodolite. Ha il vantaggio di poter effettuare battute su distanze elevate e misurare dislivelli elevati! Lo svantaggio è che non è preciso quanto un livello!

Abbinando però questo strumento al sistema GPS possiamo definire con una buona precisione l'ONDULAZIONE del geoide in quel punto!

- GPS fornisce l'ALTEZZA ELISSOIDICA (h)
- TEODOLITE " " " OTOMETRICA (H)

$$\text{Siccome } h \approx H + N \rightarrow N \approx h - H$$

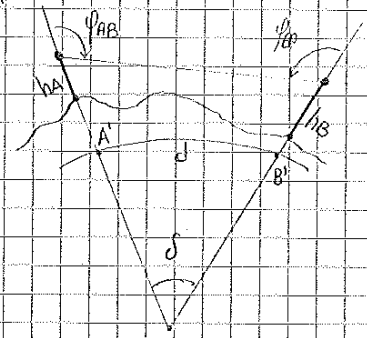
NB

Sostituendo al GEOIDE una SFERA LOCALE compiamo degli errori trascurabili planimetricamente (Raggio di 100 km) mentre altimetricamente tali errori sono più evidenti ma assumendo di compiere un errore dell'ordine del centimetro posso effettuare tale sostituzione per LIVELLAZIONI nel raggio di 10 km.

7/4/13

Sviluppando in serie : $\text{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^3}{24} + \dots$

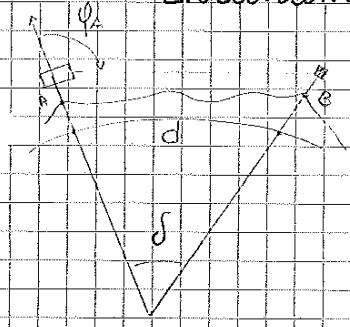
$\delta = \frac{d}{R} \rightarrow \text{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right) \approx \frac{d}{2R}$



$\Delta Q = d \left(1 + \frac{QH}{R}\right) \cdot \text{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{BA} - \varphi_{AB})$

$\Delta AB = d \left(1 + \frac{QH}{R}\right) \text{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{BA} - \varphi_{AB}) + h_A - h_B$

LIVELLAZIONE DA UN ESTREMO



Valle sempre per qualunque triangolo e quindi anche per APO che :

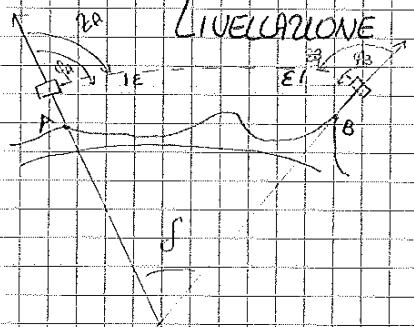
$\underbrace{\pi - \varphi_A}_{\alpha} + \delta + \underbrace{\alpha - \varphi_B}_{\beta} = \pi \rightarrow \varphi_A + \varphi_B = \pi + \delta$

Allora $\rightarrow \Delta Q = d \left(1 + \frac{QH}{R}\right) \text{tg} \frac{1}{2} (\underbrace{\pi + \delta - \varphi_A - \varphi_B}_{\varphi_B})$

$\Delta Q = d \left(1 + \frac{QH}{R}\right) \text{cotg} \left(\varphi_A - \frac{\delta}{2}\right) \rightarrow \Delta Q = d \left(1 + \frac{QH}{R}\right) \text{cotg} \left(\varphi_A - \frac{d}{2R}\right)$

DISUVELLO livellazione da un estremo

LIVELLAZIONE RECIPROCA con RIFRAZIONE



La rifrazione produce una curvatura dell'occhio e quindi leggiamo un angolo zenitale $zeta_A$ che in realtà non è quello corretto!

Siccome però l'errore compiuto è il medesimo da ambo i punti e ha segno opposto mettiamo che :

$Z_A = \varphi_A - \epsilon$

$Z_B = \varphi_B - \epsilon$

$Z_B - Z_A = \varphi_B - \varphi_A$

STATISTICA - MISURE

Chiamiamo **VARIABILE CASUALE STANDARDIZZATA** una VC per cui $\mu = 0$ e $\sigma = \pm 1$.

Riprendiamo e analizziamo la **FUNZIONE di DISTRIBUZIONE** della **VARIABILE GAUSSIANA**:

$$F(x) = P[X \in I_{x_0}] = \int f(t) dt$$

Ricaviamo che per la **VARIABILE GAUSSIANA** al varone dell'intervallo attorno alla media considerato ho:

$$\begin{cases} P[|X - \mu| < 0] = 0,683 = 68,3\% \\ P[|X - \mu| < 2\sigma] = 0,954 = 95,4\% \\ P[|X - \mu| < 3\sigma] = 0,997 = 99,7\% \end{cases}$$

In pratica se la mia **VARIABILE** è **GAUSSIANA** la probabilità che la mia misura cada nell'intervallo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ è del **99,7%**.

TEOREMA di TCHEBICEV

Ci fornisce il minimo valore di Probabilità per una **QUALUNQUE** distribuzione di variabile standardizzata!

$$P_{\min} = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \quad \lambda \geq 1 \quad \lambda = m\sigma$$

$$\begin{cases} P_{\min} = 0 & \text{se } \lambda = 1 \\ P_{\min} = 75\% & \text{se } \lambda = 2 \\ P_{\min} = 89\% & \text{se } \lambda = 3 \\ \vdots \end{cases}$$

Quindi ad esempio in un intervallo del tipo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ la minima probabilità di trovare la nostra VC è dell'**89%** (diventa **99,7%** se **GAUSSIANA** ad esempio)

LE MISURE INDIRETTE

8/4

Consideriamo una VG funzione di un'altra VG.

Ad esempio:

► $x = VG$ del lancio di un dado

$$P(x \in \text{pari}) = \frac{1}{2} \quad P(x \in \text{dispari}) = \frac{1}{2}$$

$$\{\text{pari}\} \cup \{\text{dispari}\} = S \quad \{\text{pari}\} \cap \{\text{dispari}\} = \emptyset$$

► $y = VG$ del lancio di una moneta e sia $y = g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x \in \text{pari} = y \text{ è testa} \\ x \in \text{dispari} = y \text{ è croce} \end{cases}$$

In pratica abbiamo associato xy ad x mediante una funzione $g(x)$ tale che:

$$\text{E } x = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{aligned} g(1) = g(3) = g(5) &= \text{CROCE } (0) \\ g(2) = g(4) = g(6) &= \text{TESTA } (1) \end{aligned}$$

$$y = \begin{cases} \text{CROCE} & \text{TESTA} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi siamo riusciti a definire una VG y in funzione di x senza aver fatto misure su y .

Generalizzazione

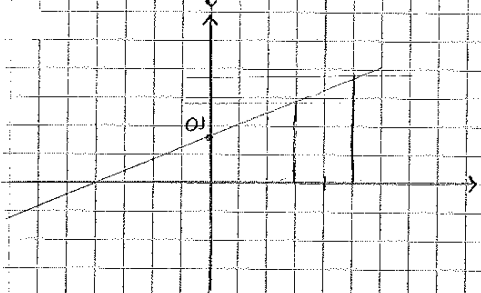
Possiamo fare una generalizzazione anche per il caso di VG continue.

Da funzione $y = g(x)$ definita su S_x dei valori argomentali delle x trasformo quest'ultimo in S_y .

Sia quindi $A_x \in S_x$ notiamo che se $g(x)$ non è invertibile su S_x avremo che all'esistenza A_y

Esempio

$$g(x) = y = ax + b \quad |g'(x)| = |a|$$



Sappiamo x va di GAUSS STANDARDIZZATA

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

da $g(x)$ ricaviamo x in funzione di $y \rightarrow x = \frac{y-b}{a}$

a questo punto allora $\rightarrow f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-b}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{|a|}$

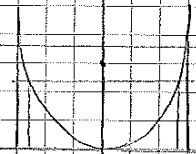
$$\rightarrow f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-b}{a}\right)^2}$$

► OSSERVAZIONI

Se $g(x)$ è una funzione lineare essa permette di passare da una NORMALE STANDARD a un'altra NORMALE non unit standard in cui $\mu = b$ e $\sigma = |a|$!
Ovviamente vale anche il viceversa!

Esempio

$$g(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad |g'(x)| = |2x| \quad x = \pm \sqrt{y}$$



Abbiamo due intervalli di x che compaiono A_x dunque:

se $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot |2\sqrt{y}|} e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{y})^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot |2\sqrt{y}|} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-1/2 y}$$

COROLLARIO 1

Se $y = ax + b$ è un operatore lineare e dunque:

$$y = ax + b \rightarrow H[y] = a H[x] + b$$

Dimostriamo:

$$\begin{aligned} \int y f_y(y) dy &= \int (ax + b) \frac{f_x(x)}{g'(x)} dy = \int (ax + b) \frac{f_x(x)}{dy} dy dx \\ &= \int ax f_x(x) dx + b \int f_x(x) dx = \\ &= a \int x f_x(x) dx + b \cdot 1 = a H[x] + b \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

COROLLARIO 2

Se $y = g(x)$ sotto opportune ipotesi e una certa approssimazione vale che:

$$H[y] = g(\mu_x)$$

l'uguaglianza è rigorosa quando $g(x)$ è lineare.

In altri casi linearizzando $g(x)$ ricaviamo:

$$g(x) \approx g(\mu_x) + g'(\mu_x)(x - \mu_x)$$

$$H[y] = \int y f_y(y) dy = \int g(x) \frac{f_x(x)}{dy} dy dx = \int g(x) f_x(x) dx =$$

$$= \int g(\mu_x) f_x(x) dx + \int \underbrace{g'(\mu_x)(x - \mu_x)}_{\text{trascurabile}} f_x(x) dx$$

$$\rightarrow H[y] = \int g(\mu_x) f_x(x) dx = g(\mu_x) \int f_x(x) dx = g(\mu_x) \cdot 1$$

$$\rightarrow H[y] = g(\mu_x) \quad \text{c.v.d.}$$

LA VARIABILE CASUALE a m-dimensioni

14/4

Rappresentiamo la VC a m-dimensioni come un vettore a m-componenti, ovvero un vettore che individua il punto \vec{x} in R^m .

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

L'insieme dei valori argomentali S sarà dunque un sotto-spazio di R^m (A) in cui è definita la nostra distribuzione di probabilità. Se la distribuzione è definita solo su k elementi x_i tali che:

$$\sum_{i=1}^k P[X=x_i] = 1 \quad \text{allora la VC è discreta}$$

in caso contrario è continua.

ESEMPIO: VC bi-dimensionale.

\vec{x}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1k}
x_{21}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	...	p_{1k}
x_{22}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	...	p_{2k}
...
x_{2h}	p_{h1}	p_{h2}	p_{h3}	...	p_{hk}

p = probabilità dei singoli accoppiamenti

NB Possiamo sempre assimilare una VS a una VC sostituendo p_{ij} a f_{ij}

$$F(\vec{x}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{P(A)}{w(A)} \quad \text{dove } w(A) = \text{misura di } A$$

$\rho = \text{diametro di } A$

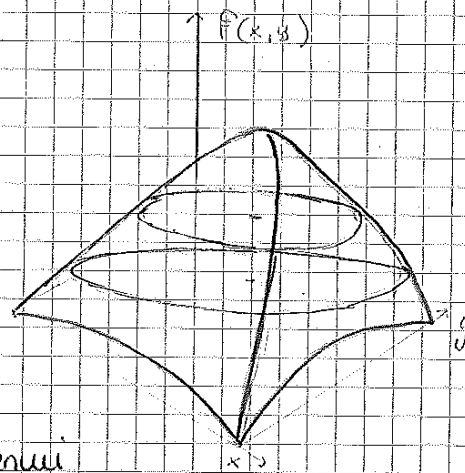
$$f(\vec{x}) = \frac{dP(A)}{dV(\vec{x})}$$

dove $dV(\vec{x})$ è un elemento di volume infinitesimo attorno al punto \vec{x} .

$$P(x \in A) = \int_A f(\vec{x}) dV(\vec{x}) = \int_A f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$$

DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA o 2D

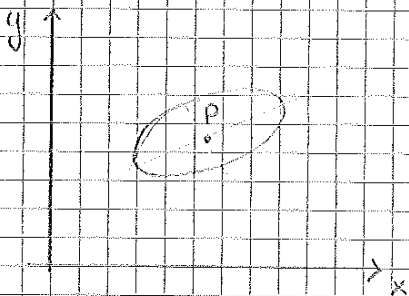
$$f(x, y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



Se consideriamo un piano
 a) $z = \text{cost}$ muoviamo,
 mediante intersezione
 con la superficie, l'equazione
 di un'ELLISSE di cui posso determi-
 nare i due assi.

A seconda della z l'ellisse individuata detto
 ELLISSE di PROBABILITÀ individua la zona attorno a
 un punto $P(x, y)$ su cui si ha quella probabilità di
 trovare la misura eseguita.

Man mano che z cresce \rightarrow aumento PROBABILITÀ \rightarrow
 diminuiscono dimensioni dell'ellisse \rightarrow misura PRECISA



Più l'ellisse coincide con una circonferenza
 più significa che la precisione
 della misura è incondizionata
 dalle direzioni, ovvero non a suo
 vantaggio privilegiate.

DISTRIBUZIONI MARGINALI

Considerando una distribuzione di probabilità e MARGINALE
 di una VG indica sostanzialmente la probabilità
 che una VG x_i è ad un certo $dl(x_i)$. In pratica
 il P MARGINALE di x_i è indicato come:

$$f_{x_i} = \frac{P(x \in A)}{dx_i} = \int dx_2 \cdot \dots \cdot \int dx_m f(x_1, \dots, x_m)$$

" Quante probabilità ho di pescare il # 6 da un
 mazzo con 50 numeri? " (CASO UNIDIMENSIONALE)

" E di pescarlo se lo pescate solo? " (CASO BIDIMENSIONALE)

ESEMPIO $VG \in \mathbb{R}^2$ $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$

$\begin{matrix} x \rightarrow \\ y \downarrow \end{matrix}$	4	5	9	$f_y(y)$
1	0,1	0,2	0,1	0,4
2	0,1	0,2	0	0,3
3	0	0,1	0,1	0,2
4	0	0	0,1	0,1
$f_x(x)$	0,2	0,5	0,3	1

$f_y(y)$ = MARGINALE della y

$f_x(x)$ = " " x

$$M_y = \sum y_i \cdot p_i = \sum y_i f_y(y_i) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = 2$$

$$M_x = \sum x_i \cdot p_i = \sum x_i f_x(x_i) = 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,3 = 6$$

$$\vec{\mu} = (6, 2)$$

In altri termini moltiplichiamo ciascun valore argomentato per il relativo marginale.

Caso di VS a 2 dimensioni

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_s)$$

$$M_x = \frac{1}{m} \sum x_i f_x(x_i) \quad M_y = \frac{1}{s} \sum y_i f_y(y_i)$$

MOmenti di UNA VG m dimensionale

Si definiscono i momenti centrali come i corrispondenti della variabile scarto.

$$\vec{v} = \vec{x} - \vec{\mu}_x \quad \text{dunque supponendo } \vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$$

$$v_i = x_i - \mu_i$$

$$O^2(\vec{x}) = M[(\vec{x} - \vec{\mu}_x)^2] = M[(\vec{x} - \vec{\mu}_x)(\vec{x} - \vec{\mu}_x)^T]$$

Corollario 1

Se $g(\vec{x})$ è lineare ovvero $g(\vec{x}) = \underline{A}\vec{x} + \vec{b}$ allora

$$\vec{\mu}_y = \underline{A}\vec{\mu}_x + \vec{b}$$

Corollario 2

Se la variabile \vec{x} è ben concentrata in una zona di \mathbb{R}^m (SAM piccoli) e nella stessa zona $\vec{y} = g(\vec{x})$ è lentamente variabile allora:

$\vec{\mu}_y = H[g(\vec{x})]$ ragionevolmente ma un po' con un po' di approssimazione vale che

$$\vec{\mu}_y \approx g(\vec{\mu}_x)$$

OSSERVAZIONI SULLA MATRICE VARIANZA - COVARIANZA

Supponiamo di avere $\vec{x} \in \mathbb{R}^u$ e che le sue componenti siano indipendenti stocasticamente. Allora:

$$f_x(\vec{x}) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot (\dots) \cdot f_m(x_m)$$

osserviamo che $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x_i) dx_i = 1$ per definizione

$$\begin{aligned} \Rightarrow H[x_i x_k] &= \int x_i x_k f_x(\vec{x}) d\vec{x} \dots = \\ &= \int f_1(x_1) dx_1 \cdot \int f_2(x_2) dx_2 \cdot (\dots) \cdot \int x_i f_i(x_i) dx_i \cdot \int x_k f_k(x_k) dx_k \\ &\quad \cdot (\dots) \cdot \int f_m(x_m) dx_m \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (\dots) \cdot \mu_{x_i} \cdot \mu_{x_k} \cdot 1 \cdot 1 = \mu_{x_i} \mu_{x_k} \end{aligned}$$

Daunque la media di $x_i \cdot x_k = \mu_{x_i} \cdot \mu_{x_k}$ se \vec{x} è indip. stocasticamente.

CASO PASSAGGIO da n dimensioni a 1 dimensione

$\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}$ esempio (2 lati + angolo \rightarrow area triangolo)

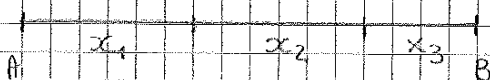
la matrice \underline{A} non necessariamente una matrice a singola riga dunque

$$C_{yy} = \underline{A} C_{xx} \underline{A}^T \quad \text{si riduce alla sola varianza di } \bar{y}.$$

$$\sigma_y^2 = \omega_1^2 x_1^2 + (\dots) + \omega_m^2 x_m^2 + \sum 2(\omega_i \omega_j)(x_i x_j)$$

eventuali covarianze dovute alla non indep stocastica di \vec{x} .

Esempio



$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{AB} = y = x_1 + x_2 + x_3$$

$$y = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 0$$

$$A = (1 \ 1 \ 1)$$

poiché le misure sono indipendenti

$$C_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

$$C_{yy} = \underline{A} \cdot C_{xx} \cdot \underline{A}^T = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$C_{yy} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$$

$$C_{yy} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = \sigma_y^2$$

Se poi $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \rightarrow \sigma_y^2 = 3\sigma_x^2$

Dunque
$$C_{yy} = \left[\frac{dg}{dx} \right] C_{xx} \left[\frac{dg}{dx} \right]^T$$

RADICE DI UNA MATRICE

$$C_{xx} = k^2 = k \cdot k^T = U \Lambda U^T$$

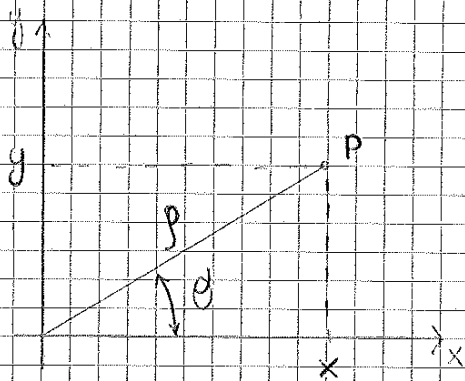
Λ = matrice di autovalori di C_{xx} e diagonale

U = " ortogonale degli autovettori di C_{xx}

$$k = U (\Lambda)^{1/2} U^T \quad k^T = U^T (\Lambda^{1/2}) U$$

$$k \cdot k^T = U \Lambda U^T$$

Esercizio



D: un punto P si sono misurate per via diretta:

- distanza $p = 1 \text{ km}$ $\sigma_p = \pm 1 \text{ mm}$
- $\theta = \frac{\pi}{6}$ $\sigma_\theta = \pm 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$

1) CALCOLARE le COORDINATE di P e indicare la PRECISIONE.

$$\begin{cases} x_p = p \cos \theta \\ y_p = p \sin \theta \end{cases} \rightarrow g(\vec{E}) = g(p, \theta) = \begin{pmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{dg}{dE} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -p \sin \theta \\ \sin \theta & p \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -50000 \\ \frac{1}{2} & 86602.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86602.5 \\ 50000 \end{pmatrix}$$

$$C_{xy} = A \cdot C_{EE} \cdot A^T \quad C_{EE} = \begin{pmatrix} \sigma_p^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 4 \cdot 10^{-12} \end{pmatrix}$$

INDICE di CORRELAZIONE LINEARE

Consideriamo due variabili casuale \vec{x} e \vec{y} indipendenti stocasticamente. Avremo allora che $\sigma_{xy} = 0$.

Supponiamo che $\vec{y} = \underline{A}\vec{x} + \vec{b}$ allora come abbiamo già visto:

$$\mu_y = A\mu_x + b \rightarrow \vec{y} - \vec{\mu}_y = \underline{A}(\vec{x} - \vec{\mu}_x)$$

Scriviamo la matrice:

$$\begin{aligned} C_{xyxy} &= N \left[(\vec{x} - \vec{\mu}_x)^T (\vec{y} - \vec{\mu}_y) \right] = N \left[(\vec{x} - \vec{\mu}_x)^T \underline{A} (\vec{x} - \vec{\mu}_x) \right] = \underline{A} N \left[(\vec{x} - \vec{\mu}_x)^T (\vec{x} - \vec{\mu}_x) \right] \\ &= \underline{A} C_{xx} \end{aligned}$$

Dunque la matrice $C_{xyxy} = \underline{A} C_{xx}$

Consideriamo per semplicità il caso di 2 V.G. e prendiamo

(1) caso \vec{x} e \vec{y} indipendenti $\sigma_{xy} = 0$

(2) caso \vec{x} e \vec{y} dipendenti $\sigma_{xy} = \alpha \sigma_x^2$ $\sigma_y^2 = \alpha^2 \sigma_x^2$

$$\rightarrow \sigma_y = \pm |\alpha| \sigma_x$$

Definiamo il momento ρ_{xy} come

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

INDICE di CORRELAZIONE LINEARE

(1) $\rho_{xy} = 0$

(2) $\rho_{xy} = \frac{\alpha \sigma_x^2}{\sigma_x \cdot |\alpha| \sigma_x} = \frac{\alpha \sigma_x}{|\alpha| \sigma_x} = \pm 1$

DISTRIBUZIONE NORMALE ad N-DIMENSIONI

\vec{z} - VARIABILE NORMALE STANDARDIZZATA $[H[\vec{z}] = 0, C_{zz} = I]$

Consideriamo una trasformazione lineare di \vec{z} tale che:

$$\vec{x} = \vec{\mu} + \underline{k} \vec{z} \quad \text{con } \underline{w} = \underline{k}^T \quad \text{e} \quad \underline{k} \cdot \underline{k}^T = \underline{k}^T \cdot \underline{k} = \underline{k}^2$$

$\vec{z} = (\underline{x} - \underline{\mu}) \underline{k}^{-1}$ Abbiamo espresso \vec{z} in funzione di \vec{x}

$$f_{\vec{x}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \cdot |\underline{k}|} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})^T (\underline{k}^2)^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})}$$

Notiamo che \vec{x} è ancora una V.G. NORMALE con media $\underline{\mu}$ e matrice di covarianza $C_{xx} = \underline{k} C_{zz} \underline{k}^T = \underline{k} \cdot \underline{k}^T = \underline{k}^2$

$$f_{\vec{x}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \cdot |\underline{C}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})^T (\underline{C}_{xx})^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})}$$

È una NORMALE ad N-dimensioni non STANDARD

La trasformazione $\vec{z} = (\underline{x} - \underline{\mu}) \underline{k}^{-1}$ equivale a)

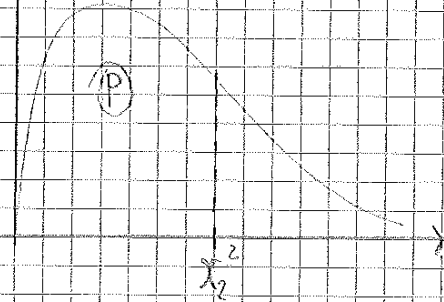
$$\vec{z} = (\underline{C}_{xx})^{-1/2} (\underline{x} - \underline{\mu})$$

con cui si passa da una variabile normale a una variabile NORMALE STANDARD !!

$$(x - \mu_x \quad y - \mu_y) (C_{xx})^{-1} \begin{pmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \end{pmatrix} = \chi_2^2$$

$$\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2\rho_{xy} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 = \chi_2^2$$

Imponendo una certa probabilità prefissata p ricaviamo il corrispondente valore dello chiavero



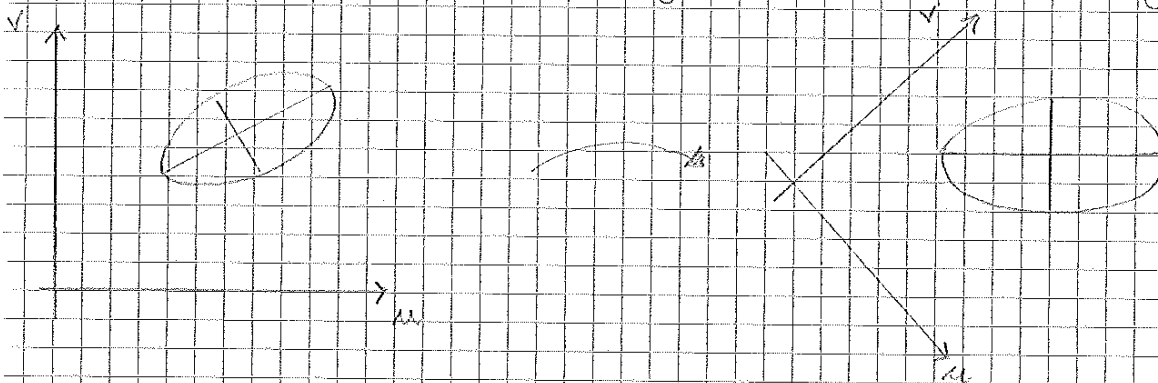
la regione di piano che verifica la condizione fissata da

$$P \left[(x - \mu)^T C_{xx}^{-1} (x - \mu) \leq \chi_{\alpha}^2 \right] = p$$

e quindi $(x - \mu)^T (C_{xx})^{-1} (x - \mu) \leq \chi_{\alpha}^2$ è un'ellisse per $m=2$, ellissoide, $m=3$ iperellissoide, $m \geq 3$ iperellissoide.

Notiamo osservando l'equazione dell'ellisse che quando $\rho_{xy} = 0$ ovvero quando $C_{xy} = 0$ otteniamo un'ellisse con semiassi paralleli a xy .

Quando ciò non accade possiamo trovare una matrice di rotazione che tramite la terza variabile nella sistema di riferimento xy in cui quindi $C_{xy} = 0$



Se consideriamo una normale doppia (u, v) con matrice $G = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{pmatrix}$ possiamo effettuando una opportuna rotazione passare a una nuova $VG(x, y)$ normale doppia in cui

Se estendiamo il procedimento ad n -dimensioni e chiamiamo \underline{U} la matrice di Rotazione con cui $\vec{y} = \underline{U} \vec{x}$ e per cui si ha $G_{yy} = \text{diag}(c_{ii})$ ovvero è diagonale.

Possiamo trovare i SEMIASSI calcolando gli AUTVALORI della matrice G_{xx} che ricaviamo ponendo $\det |G_{xx} - \lambda I| = 0$

L'inclinazione analogamente è data dagli AUTOVETTORI che rappresentano i coseni direttori degli assi principali.

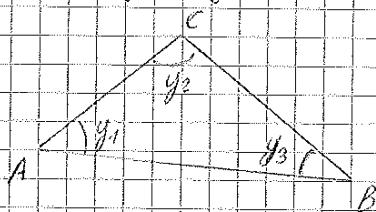
Li ricaviamo sostituendo λ e normalizzando.

MISURE DIRETTE CONDIZIONATE

Misure dirette che però devono sottostare ad una legge precisa.

Supponiamo che tale legge sia lineare, ad esempio misuro i 3 angoli interni di un triangolo e so che chiamando y_1, y_2, y_3 le misure avrei che:

$$y_1 + y_2 + y_3 = \pi$$



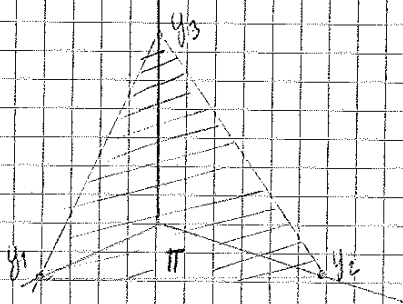
y_1, y_2, y_3 sono MISURE TEORICHE

quando noi facciamo le misure

ESTRAIAMO da $y_1 \rightarrow y_{10}$, ecc...

Notiamo che $y_{10} + y_{20} + y_{30} - \pi \neq 0 = V'$

In pratica la nostra MISURA REALE $\vec{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, y_{30})$ non appartiene al piano π .



Il piano π è il PIANO TEORICO e notiamo che \vec{y}_0 non vi appartiene ma si trova ad una distanza \vec{V}' .

MINIMI QUADRATI con parametri (misure inclinate e condizionate)

5/5/14

Supponiamo che vi sia una v.a. inclinata $\vec{y} = \underline{A} \vec{x} + \vec{a}$

$$\text{rang}(A) = m \quad A_{mm} = \left(\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \Bigg\} m \quad A \cdot A^T = \text{matrice } n \times n$$

CRITERIO di STIMA

Si cerca la minima distanza \vec{v} . Se le misure hanno tutte la medesima varianza allora $d^2 = \hat{v}^T \hat{v} = \min$

Nel caso in cui non sia così allora $d^2 = \hat{v}^T C_{yy} \hat{v} = \min$

NB

Spesso non si conosce C_{yy} però si è in possesso di un rapporto di precisione rispetto a un parametro costante σ_0^2 .

$$p_j = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_j^2} \quad P = p_{jj} \quad j=1, \dots, m \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & & \\ & p_{22} & \\ & & \dots \\ & & & p_{mm} \end{pmatrix}$$

La matrice P è detta matrice dei PESI ed ha sulla diagonale i p_{jj} .

Quindi non serve sapere la varianza di ogni misura ma ci basta sapere il loro rapporto!

$$\hat{v}^T P \hat{v} = d^2 = \min \rightarrow (y_0 - \hat{y})^T P (y_0 - \hat{y}) = d^2 = \min$$

→ occorre dunque ricavare il $\min(\hat{v}^T P \hat{v}) = \min(d^2)$

tenendo conto delle m condizioni aggiuntive $\hat{y} \in \pi$

$$\Rightarrow \vec{y} = \underline{A} \vec{x} + \vec{a}$$

La ricerca si effettua con i Moltiplicatori di Lagrange ovvero si cerca il minimo della funzione:

$$\phi(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{2} (y_0 - \hat{y})^T P (y_0 - \hat{y}) + (\hat{y} - \underline{A} \hat{x} - \vec{a})^T \vec{\lambda} = \min \quad \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$C_{\hat{V}\hat{V}} = [C_{y_0} \ C_{y_0} - C_{y_0\hat{y}}] - [P^{-1} - AN^{-1}A^T] \hat{\sigma}_0^2$$

Questa matrice è molto importante perché ci permette di confrontare lo scarto \hat{V} con il suo SGM.

L'ipotesi alla base, con cui abbiamo supposto che l'evento che compiamo è ACCIDENTALE perché prevede da una ESTRALIONE di un VALORE della VG, prevede che allora

$$H[\hat{V}] = 0 \rightarrow \text{il rapporto } \frac{\hat{V}}{\hat{\sigma}} \text{ dev'essere in } \left| \frac{\hat{V}}{\hat{\sigma}} \right| \leq 2:3$$

Se tale rapporto è più grande c'è una misura sbagliata da verificare.

OSSERVAZIONE

Il Rapporto $\frac{\hat{V}}{\hat{\sigma}}$ si dice SCARTO STANDARDIZZATO.

$$\underline{\underline{R}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \cdot P \cdot C_{\hat{V}\hat{V}} = I - PAN^{-1}A^T \leftarrow \text{MATRICE di RIDONDANZA}$$

La matrice R è molto particolare, essa infatti come possiamo notare è una MATRICE ACCORABILE ancora prima di fare le MISURE !!

$\underline{\underline{P}}$ è una matrice quadrata e simmetrica; la sua

TRACCIA è la RIDONDANZA GLOBALE = $m-m$.

$$tr(R) = \sum_{j=1}^m r_{jj} = m-m$$

Sulla diagonale di $\underline{\underline{P}}$ troviamo i termini r_{jj} = RIDONDANZE LOCALI esse hanno valore compreso tra 0 e 1.

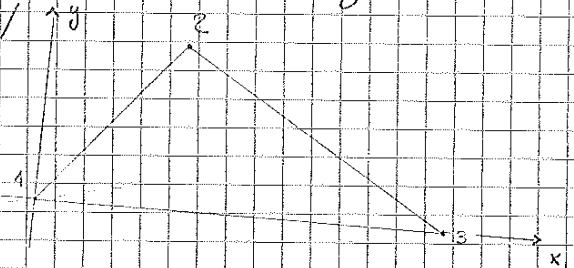
Se il valore di r_{jj} di una misura è ≈ 0 significa che quella misura è pressoché inutile. Viceversa ≈ 1 è il valore di r_{jj} più significa che quella misura irrigidisce la rete e dunque è importante !!

Questo sistema è risolvibile!!

NB Prima di effettuare una compensazione su una misurazione occorre sempre fissare dei parametri!!

- ▶ In una RETE PLANIMETRICA formata da distanze ed angoli dobbiamo fissare 3 parametri:
 - 2 traslazioni del SR
 - 1 angolo di rotazione

- ▶ In una RETE PLANIMETRICA formata da soli angoli dobbiamo fissare 4 parametri:
 - 2 traslazioni
 - 1 rotazione
 - 1 scala



$$\hat{y} = \text{MISURA DIRETTA} = \begin{pmatrix} \hat{\Delta}_{12} \\ \hat{\Delta}_{23} \\ \hat{\Delta}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \underline{A} \hat{x} + \underline{Q}$$

Ricaviamo la MATRICE NORMALE $N = A^T P A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{D_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D_{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_{12}} + \frac{1}{D_{23}} & -\frac{1}{D_{23}} \\ -\frac{1}{D_{23}} & \frac{1}{D_{23}} + \frac{1}{D_{13}} \end{bmatrix}$$

Ricaviamo i TERMINI NOTI $P = \hat{y} + \underline{Q}$

$$P = \begin{pmatrix} \hat{\Delta}_{12} + Q_1 \\ \hat{\Delta}_{23} \\ \hat{\Delta}_{13} + Q_1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D} = A^T P P = \left[\frac{1}{D_{12}} (\hat{\Delta}_{12} + Q_1) - \frac{1}{D_{23}} \hat{\Delta}_{23}, \frac{1}{D_{23}} \hat{\Delta}_{23} + \frac{1}{D_{13}} (\hat{\Delta}_{13} + Q_1) \right]$$

$$\sum v_j^2 \leq X_j^2$$

X_j^2 è il valore della chiavada che corrisponde ad una precisione P del 95%.

- ▶ \hat{y} e $C_{\hat{y}}$ sono ELEMENTI di PROGETTO
- ▶ $C_{\hat{y}}$ e $\sum v_j^2$ sono ELEMENTI di VERIFICA

I DISTANZOMETRI AD ONDE (EDM / EODM)

Distinguiamo 2 tipi di distanzometri che si basano sull'invio di un segnale, o onda, elettromagnetica che viene poi riflessa.

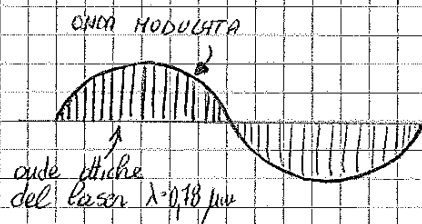
- 1) DISTANZOMETRI OI SFASAMENTO
- 2) DISTANZOMETRI OI MISURA di TEMPO

I DISTANZOMETRI OI SFASAMENTO

- 1) Emissione di una radiazione ottica concentrata, ovvero laser, con una lunghezza d'onda nell'infrarosso vicino ($\lambda \approx 0,78 \mu\text{m}$).

Tale onda viene modulata e trasmessa verso un prisma retro riflettore.

L'onda viene MODULATA con lo scopo di ottenere un'onda di lunghezza pari a 2 volte la distanza tra STRUMENTO e PRISMA. Si effettua tale modulazione si varia l'intensità di energia fornita al diodo all'arseniuro di Gallio, ottenendo una onda SINUSOIDALE con λ voluto.



Consideriamo ora quello a sfasamento.

$$2D_0 = \left(\Delta\varphi \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \right) + m\lambda$$

Il termine " $m\lambda$ " misura il numero di volte che l'onda si è ripetuta durante il tragitto. $m = \text{AMBIGUITÀ di FASE}$

A meno che $m \neq 0$ ogni volta che la lunghezza d'onda è minore al doppio della distanza.

Il fatto che compaia " m " è legato alle necessità di raggiungere elevate precisioni nelle misure della distanza!

Lo sfasamento $\Delta\varphi$ si misura con una precisione di $\frac{1}{1000}$ della λ dell'onda modulata.

Diunque supponendo una distanza $AB = 1 \text{ km}$ λ dell'essere di 2 km ma allora la precisione sarebbe di:

$$10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 2! \text{ ovvero uno scarto di } \pm 2 \text{ mt!}$$

Per aumentare la PRECISIONE necessariamente dobbiamo diminuire λ in modo da raggiungere la precisione voluta di 10^{-5} , 10^{-6} .
A questo punto però compaiono un'altra difficoltà in più che è l'AMBIGUITÀ di FASE!

DETERMINAZIONE di " m " - Metodo delle DECADI

1) Si effettua una misura con $\lambda = 2D_0$ in questo modo $m=0$ e nuovo D_0 con un scarto dell'ordine del metro o comunque di 10^{-3} volte la distanza misurata.

2) Rimoduliamo l'onda riducendo λ ad esempio di 10^{-2} .
Rideterminiamo D_0 perché la precisione di D_0 di prima è sufficiente a definire $m \rightarrow$ Determino D_0 con una precisione di $10^{-3} \cdot 10^{-2} = 10^{-5}$.

3) Ripetiamo se vogliamo una precisione maggiore

supponiamo $D = 3\text{ m}$ $\rightarrow \Delta t = \frac{2D}{c} \approx 20 \text{ ns}$

$$\frac{\delta \Delta t}{\Delta t} = 10^{-5} \rightarrow \delta \Delta t = 10^{-5} \cdot \Delta t = 0,2 \text{ ps} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

Ovvero ci servirebbe uno strumento dotato di una sensibilità di 10^{-13} !

In Realtà accettando una precisione di 10^{-5} , 10^{-6} al di sopra dei 3 m di distanza la sensibilità diminuisce:

$$\delta \Delta t = 10^{-5} \cdot \frac{2}{v} \cdot \delta D \quad \text{dove} \quad \delta D = \pm (3 \text{ mm} + 1 \text{ ppm})$$

Quindi per $D = 10 \text{ km}$ $\delta D = \pm 13 \text{ mm}$ e dunque abbiamo che

$$\delta \Delta t = 10^{-5} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} (\pm 0,013) = \pm 80 \text{ ps} = \pm 8 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

Ma anche con $D = 3 \text{ m}$ $\delta D = \pm 3 \text{ mm}$

$$\delta \Delta t = (\pm 0,003) \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} = \pm 20 \text{ ps} = \pm 2 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

OSSERVAZIONI

Abbiamo già dunque una riduzione di 2 ordini di grandezza sulla sensibilità dello strumento che misura Δt .

Tale precisione è ancora poco parecchio elevata, infatti è raggiungibile solo con orologi atomici al RUBIO!

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA

Nel distanziometro c'è un oscillatore che misura il Δt con una precisione di $\pm 3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

L'impulso inviato dal diodo ha una potenza molto elevata perché si concentra su un'intensità di corrente in un tempo brevissimo! 20 A in 12 ns.

Dopo un certo Δt l'impulso è trovato allo strumento

\rightarrow il Δt misurato dall'oscillatore ci permette di determinare l'AMBIGUITÀ di fase.

- ▶ Maggior Portata a parità di potenza (fino a 6 km)
- ▶ Maggior Precisione
- ▶ Possibilità di utilizzo senza stadia e prisma fino a 200m+ ma con SAH di $\pm 2 \div 5$ mm.

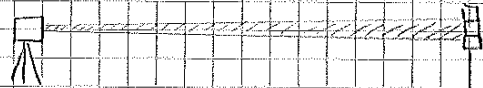
Metodo di Misura Intermedio

È simile a quello usato dai GPS, in pratica c'è un unico quadrante portatile al cui interno però è contenuto un codice PSEUDOCASUALE.

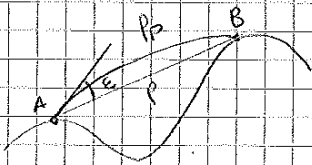
PORTATA degli EODH in campo

Il raggio laser ha una lieve divergenza (qualche mgom) dunque all'aumentare della distanza l'energia si dispende maggiormente. In particolare si dispende con il quadrato della D.

Aumentando il numero di prismi su una stadia riusciamo a rimpedire un impulso più forte e a fare quindi far uscire!



LA RIFRAZIONE



La Rifrazione modifica la velocità di propagazione dell'onda in fatti avviene che la sua velocità non sarà più c ma

$$v = \frac{c}{n} \quad \text{dunque} \quad \lambda = \frac{c}{n f}$$

In pratica avviene un errore sistematico legato al fatto che l'onda non si propaga con velocità c ma bensì v.

Fattori di influenza sull'INDICE di RIFRAZIONE

- 1) TEMPERATURA $\rightarrow \Delta T = 1^\circ C$ provoca una variazione di 1ppm
- 2) PRESSIONE ATMOSFERICA
- 3) UMITÀ RELATIVA

Rappresentazione dell'ellissoide sul Piano

19/5/14

L'ELUSSOIDE, così come lo SFEROIDE, non è una superficie sviluppabile ovvero non ha generatrici appartenenti a una retta. Non possiamo infatti sezionare lungo una generatrice e ottenere una figura piana o meglio, lo possiamo fare ma la validità di tale rappresentazione è pari a quella del CAMPO TOPOGRAFICO del punto di vista altimetrico (300 mt al massimo).

Inoltre oltre tali distanze la normale al piano e all'ellissoide differiscono troppo, dunque linee verticali non lo potrebbero più essere sulla carta!

Le CARTOGRAFIE

Sono delle proiezioni dell'ellissoide su superfici tangenti in un punto medio e che sono sviluppabili sul piano. Le superfici di riferimento più usate sono 3:

- CILINDRO
- PIANO
- CONO

A seconda delle superfici di riferimento usate avremo

• PROIEZIONI PROSPETTICHE

La sup. utilizzata è il PIANO, solitamente si usano ai POLI queste carte.

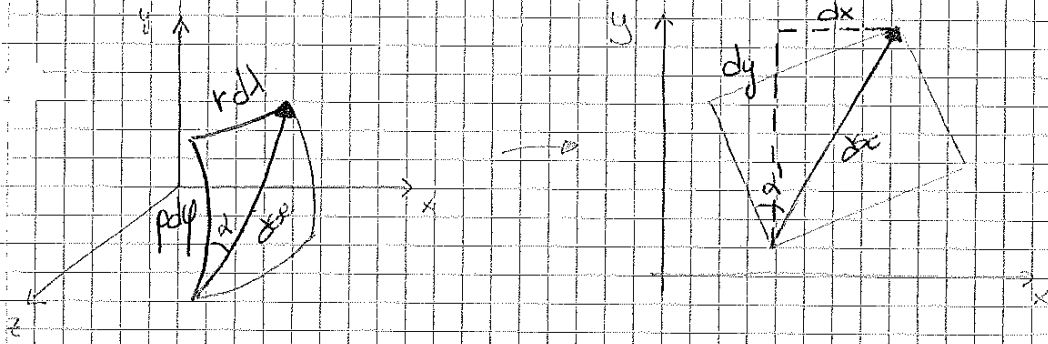
• PROIEZIONI CILINDRICHE

• PROIEZIONI CONICHE

NB Ovviamente non essendo superfici sviluppabili, ELUSSOIDE e SFEROIDE, avremo per forza delle deformazioni durante la loro proiezione!

Inoltre la funzione $F(\varphi, \lambda)$ che proietta l'ellissoide sul piano dev'essere invertibile ovvero dev'essere una relazione biunivoca tra punto su carta e elliss.

EQUAZIONI differenziali delle RAPPRESENTAZIONI



$$ds_e^2 = p^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2$$

$$ds_c^2 = dx^2 + dy^2$$

Ipotesiamo esistere una funzione biunivoca che lega x e y a φ e λ .
 $x = x(\varphi, \lambda)$ e $y = y(\varphi, \lambda)$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \quad \text{e} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

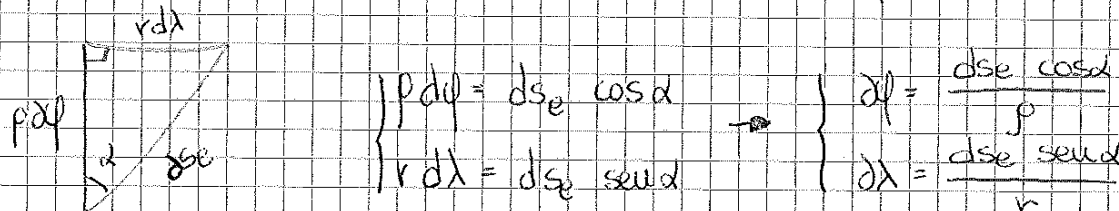
Diunque possiamo scrivere che:

$$ds_c^2 = dx^2 + dy^2 =$$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 \right]}_e d\varphi^2 + 2 \underbrace{\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]}_F d\varphi d\lambda + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]}_g d\lambda^2$$

$$ds_c^2 = e d\varphi^2 + F d\varphi d\lambda + g d\lambda^2$$

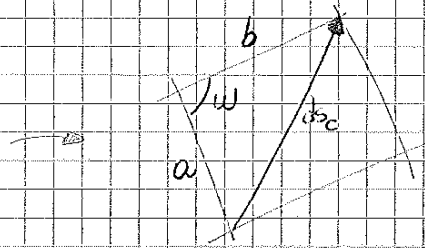
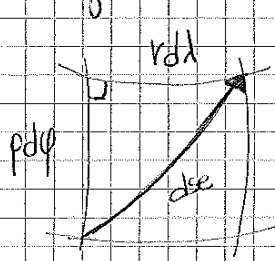
Osservando il TRIANGOLO RETTANGOLO infinitesimo sull'ellissoide



Sostituiamo in ds_c :

$$ds_c^2 = e \left[\frac{ds_e \cos \alpha}{p} \right]^2 + 2F \frac{ds_e \cos \alpha \cdot ds_e \sin \alpha}{r p} + g \left[\frac{ds_e \sin \alpha}{r} \right]^2$$

Torniamo alla rappresentazione di un arco infinitesimo di geodetica.



$$\frac{ds_c}{dse} = m$$

$$\downarrow$$

$$dse \cdot m = ds_c$$

Chiamiamo "a" e "b" ricordando l'angolo di pendenza trovata prima.

$$m^2 = e' \cos^2 \alpha + 2F' \sin \alpha \cos \alpha + g' \sin^2 \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quando } \alpha = 0 \rightarrow m^2 = e' \rightarrow m_1 = \sqrt{e'} = \frac{\sqrt{e}}{\rho} \\ \text{quando } \alpha = 90^\circ \rightarrow m^2 = g' \rightarrow m_2 = \sqrt{g'} = \frac{\sqrt{g}}{r} \end{array} \right.$$

Dunque avremo che :

$$a = p d\phi = \frac{\sqrt{e}}{\rho} \quad \text{mentre} \quad b = r d\lambda = \frac{\sqrt{g}}{r}$$

da cui otteniamo :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{e} d\phi \\ b = \sqrt{g} d\lambda \end{array} \right.$$

Secondo Carnot : $ds_c^2 = e d\phi^2 + g d\lambda^2 + 2 \sqrt{eg} d\phi d\lambda \cos \omega$

$$\text{e } ds_c = e d\phi^2 + 2F d\phi d\lambda + g d\lambda^2$$

Ricaviamo :

$$\sqrt{eg} \cos \omega = F \rightarrow \cos \omega = \frac{F}{\sqrt{eg}}$$

► Rapp. isogonali

Affinche' una carta sia isogona serve che $\cos \omega = \cos 90^\circ$

$$\text{ovvero } \cos \omega = 0 \rightarrow F = 0$$