NUMERO: 1039

DATA: 15/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Zizzi

MATERIA: Geometria

Prof. Casnati

MATRICI

Una matrice $m \times n$ è un insieme mn numeri reali disposti su
m RIGHE
n COLONNE

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → $m = n$ ⇒ MATRICE QUADRATA

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ matrice COLONNA

$C(1, 0)$ → matrice RIGA

OPPOSTA di A ⇒ $-A$ ⇒ $-A\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ⇒ cambio il segno

MATRICI UGUALI ⇒ se hanno lo stesso n° di righe e colonne

TRASPOSTA di A ⇒ scambio riga con colonna $^t(A)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad {}^t(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $^t(^tA) = A \quad / \quad {}^t(-A) = -{}^t(A)$

MATRICE DIAGONALE: se tutte le entrate al di fuori della diagonale sono nulle ⇒ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

MATRICE IDENTITÀ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⇒ 1 nelle entrate diagonali

MATRICE TRIANGOLARE
→ SUPERIORE: $A\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
→ INFERIORE: $B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{4} & 5 \end{pmatrix}$

MATRICE SIMMETRICA ⇒ se $A = {}^t(A)$
(matrice nulla è simmetrica)

MATRICE ANTISIMMETRICA ⇒ se ${}^t(A) = -A$

es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 4 \\ -17 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

simmetrica ⇒ le entrate in posiz. simmetrica al di fuori della diagonale sono uguali.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -17 & 4 \\ 17 & 0 & 8 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ ⇒ le entrate diagonali nulle e in quelle in posizione simmetrica al di fuori della diagonale sono OPPOSTE

antisimmetrica

INVERSA A invertibile se $AB = BA = I$
B è l'inverso di $A = A^{-1}$

es: Date $A\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ verific. se sono l'uno inverso dell'altro.

$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = I$

- l'equazione matriciale $t^2 - 5t + 6 = 0$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ è soluzione?

$A^2 - 5A + 6I = 0$ $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $AB = I$ se e solo se $BA = I$

se $AB = BA = I$ e $AC = CA = I \Rightarrow B = C$

MATRICE IDEMPOTENTE se $A^2 = A$

SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$ MATRICE COMPLETA del sistema $AX = B$

- $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow (A|B)\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ $\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$

Il sistema è OMOGENEO se $B = 0$
NON OMOGENEO in caso contrario
COMPATIBILE se ha soluzioni
INCOMPATIBILE se non ha sol.

- Dato un sistema $\begin{cases} a + b + 2c + e = 1 \\ -b + d + g = 0 \\ 3b + f + 3g = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Si nota che in ogni equazione c'è un incognita che non figura nelle altre $\Rightarrow$ in ogni riga c'è un'ENTRATA NON NULLA che è anche l'UNICA NON NULLA della sua colonna

$\Rightarrow$ 1ª RIGA $a = 1 - b - 2c - e$
2ª RIGA $d = b - g$
3ª RIGA $f = -2 - 3g - 3b$

Soluzioni $= {}^t(1 - b - 2c - e,\ b,\ c,\ b - g,\ e,\ -2 - 3g - 3b)$

RISOLUZIONE di SISTEMI:

TEOREMA di ROUCHÉ-CAPELLI

Siano $A \in K^{m,n}$ $B \in K^{m,1}$
e $AX = B$ ①
$AX = 0$ ②

- Il sistema ① è compatibile se $rk(A) = rk(A|B)$ e le sue soluzioni dipendono da $n - rk(A)$ parametri liberi.
- Se il sist è compatibile e $X_0 \in K$ è una soluzione fissa allora le sue soluzioni X sono quelle $\underline{X = X_0 + Y}$ ove Y appartiene all'insieme delle soluzioni del sistema

EQUAZIONE MATRICIALE

$AX = B$ con matrice incompleta A, e matrice termini noti B

es: l'equ. matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} X_1 + 2X_2 = (1,2) \\ 2X_1 + X_2 = (0,1) \end{cases}$$

$$(A|B) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_2/3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \left.\begin{array}{l} X_1 = (-\frac{1}{3}, 0) \\ X_2 = (\frac{2}{3}, 1) \end{array}\right\} \text{UNICA SOLUZIONE}$$

Ossia devo portare i coeff di x_1 e x_2 pari a 1 in modo da poter risolvere il sistema.

L'INVERSA di UNA MATRICE

A invertibile se e solo se $rk(A) = n$

- Invertire la matrice: $AX = I$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

deve diventare l'identità — questa sarà l'inversa.

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_1 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to A^{-1}$$

VETTORI

α, β scalari (1)

LUNGHEZZA SEGMENTO $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

MODULO di VETTORE $v = i + j + k$ $\quad |v| = \sqrt{i^2 + j^2 + k^2}$

PRODOTTO VETTORE × SCALARE $\alpha(v_x\ v_y\ v_z) = (\alpha v_x, \alpha v_y, \alpha v_z)$

~~SOM~~

SOMMA DI VETTORI $(v_x\ v_y\ v_z) + (w_x\ w_y\ w_z) = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$

regola del parallelogramma

- commutativa / associativa /
- vett. nullo elem. neutro / $-\vec{v} \Rightarrow$ opposto di $\vec{v}$ / $1v = v$ / $\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1\alpha_2)v$

$(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$ / $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ /

DIFFERENZA FRA VETTORI: $B - A = (x_B - x_A)i + (y_B - y_A)j + (z_B - z_A)k$

VETTORI PARALLELI: $v \parallel w \Rightarrow w = \alpha v \Rightarrow$ sono proporzionali

VETTORE PERPENDICOLARE: $v // = (1, 2) \Rightarrow v \perp (2 -1) \rightarrow$ scambio coord. e cambio di segno

VETTORI COMPLANARI: $u, v, w \Rightarrow u = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

- 3 PUNTI sono SEMPRE COMPLANARI / se abbiamo 4 punti A, B, C, D $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{matrix}\right\}$ creiamo i vettori

PRODOTTO SCALARE: $\langle v w \rangle = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$

- commutativo / distributivo risp somma / $\alpha\langle v w \rangle = \langle \alpha v, w \rangle$ /

è sempre positivo

SCOMPOSIZIONE VETTORE $u(1, 3, -1)$ lungo $v_1(1, 1, 0)$ e $w_1(3, 1, 1)$

$\Rightarrow a\vec{v} + bw = u \Rightarrow (a, a, 0) + (3b, b, b) = (1, 3, -1)$

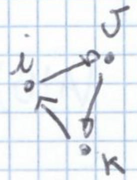
$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ a + b = 3 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 - 3 = 1 \\ a = 4 \\ b = -1 \end{cases} \text{ OK} \Rightarrow v_{//}v_1 = (4, 4, 0) \; / \; w_{//}w_1 = (-3, -1, -1)$$

VETTORI PERPENDICOLARI $\Rightarrow \langle v w \rangle = 0 \quad \Rightarrow |\langle v w \rangle| \leq |v||w|$

ANGOLO FRA VETTORI: $\Rightarrow \cos(\hat{vw}) = \dfrac{\langle v w \rangle}{|v||w|}$

$w_{//} = \dfrac{\langle v w \rangle}{\langle v, v \rangle}\vec{v}$

PRODOTTO VETTORIALE $v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = |\alpha v| \Rightarrow$



$$\Rightarrow = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} k$$

- $v \times w = -w \times v$ / $v \parallel w \rightarrow v \times w = 0$ $\quad v \nparallel w \quad v \times w \neq 0$
- è distributivo risp somma / $\alpha(v \times w) = (\alpha v) \times w = v \times (\alpha w)$
- $|v \times w| = |v||w| \operatorname{sen}(\hat{vw}) \Rightarrow$ MODULO PROD. VETTORIALE

3

e) $\alpha: 2x + y - 3z = -5$ $\quad r' \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Per det. l'intersezione sostituisco r' in $\alpha \Rightarrow 2(t-1) + t - 3(1-t) = -5$

- PIANO CON 3 PUNTI NN ALLINEATI $A(x_A\ y_A\ z_A)$ $B(x_B\ y_B\ z_B)$ $C(x_C, y_C, z_C)$

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} \begin{matrix} P \\ B-A \\ C-A \end{matrix} = 0$$

EQUAZIONI CARTESIANE di RETTE

$$r = \begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix} \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

- METODO del FASCIO $\lambda(ax + by + cz - d) + \mu(a'x + b'y + c'z - d') = 0$

- Scrivere retta per $P \parallel r$ $\quad P(1, -1, 2)$

$r \begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ $\quad v_1 = (1\ 1\ 2)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ $\quad v_1 \times v_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3\ \ 1\ \ -2)$

retta passa per P e ha $v = (3\ 1\ -2) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 1t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \Rightarrow$ ~~se si vuole l'equ cartesiana~~

POSIZIONI RETTE e PIANI in FORMA CARTESIANA

- $r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ $\quad \alpha: a''x + b''y + c''z = d''$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} d \\ d' \\ d'' \end{matrix}\right.\right)}_{A|B}$$

rank	A	A|B	
	2	2	$r \subseteq \alpha$
	2	3	r e α NN si intersec.
	3	3	r e α SI INT. in 1 PUNTO

- $r \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ $\quad r' \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{matrix}\right.\right)}_{A|B}$$

rank	A	A|B	
	2	2	$r = r'$
	2	3	$r \parallel r'$ e distinte
	3	3	$r \cap r'$ in 1 PUNTO
	3	4	r e r' SGHEMBE

DETERMINANTI

SOTTO MATRICE $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ le sott. 2x2 sono $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Quante sottomatrici sono estraibili?

$\rightarrow \binom{m}{p}\binom{n}{q}$

IL DETERMINANTE $A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ det $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\boxed{det(10) = 10}$

per le matrici 2x2 \ - //

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -7$

SVILUPPO di LAPLACE: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} \dots$

ove $\underbrace{A_{ij}}_{\text{COMPLETAMENTO ALGEBRICO}} = (-1)^{i+j} \cdot$ det sottomatrice ottenuta cancellando la riga e i J

REGOLA DI SARRUS x le matrici 3x3

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{array}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} + \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

creo questa matrice 5

Se la matrice è TRIANGOLARE INFERIORE allora det = prodotto delle entrate sulla diagonale

es $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & \frac{1}{15} \end{vmatrix} = \det = 3 \cdot -5 \cdot \frac{1}{15} = -1$

Calcolo il det(A) col il metodo di riduzione a forma triangolare

$A \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} R_3 \to R_2 + R_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - 2R_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \text{ e } C_2} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$C_1 \leftrightarrow C_3 \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \det = -12 \Rightarrow$ dato dal prodotto delle entrate della diagonale

N.B se scambio le colonne il det cambia di segno

DISTANZE

$$d(A,B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

$d(x,y) \geq 0 \Rightarrow D_{x,y} \subseteq [0;+\infty) \Rightarrow$ insieme limitato inferiorm.

DISTANZA PUNTO $P(x_0\ y_0\ z_0)$ DA PIANO $\alpha = ax + by + cz = d$

con $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$$\boxed{d(P_0;\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

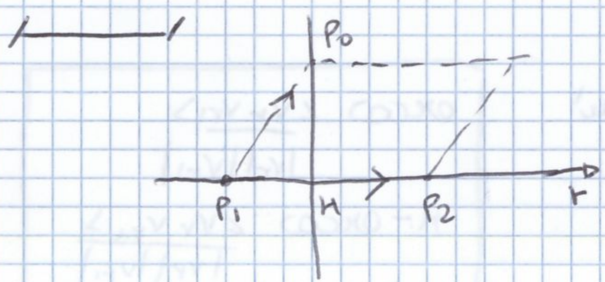
1ª FORMULA

DISTANZA PUNTO $P_0(x_0\ y_0\ z_0)$ DA RETTA in f. param.

es. $r = \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2t \\ z = 1-2t \end{cases}$ $P_0(1,1,1)$

$v(3\ 2\ -2)$

- ricavo il piano:
  $\alpha: 3(x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 2z = 3$
- $r \cap \alpha \Rightarrow 3(1+3t) + 2(2t) - 2(1-2t) = 3 \Rightarrow t = \frac{2}{17}$
- sostituisco t nella retta e trovo $H = \left(\frac{23}{17}; \frac{4}{17}; \frac{13}{17}\right)$
- $d(P_0,H) = \sqrt{\frac{36}{17^2} + \frac{169}{17^2} + \frac{16}{17^2}}$



$$d(P_0,r) = d(P_0,H) = \overline{P_0H} = \frac{A}{|P_1P_2|}$$

DISTANZA TRA 2 PIANI

$$\boxed{d(\alpha,\alpha') = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

$\alpha = ax + by + cz = d$

$\alpha' = a'x + b'y + c'z = d'$

$\Downarrow$

le equ devono avere lo stesso primo membro x ciò MODIFICARE!!

DISTANZA RETTA e PIANO

$d(r,\alpha) = d(P_0,\alpha)$ per $P_0 \in r \Rightarrow$ usare 1ª FORMULA

SFERE e CIRCONFERENZE nello SPAZIO

SFERA

Dati $C \doteq (x_C\ y_C\ z_C)$ r = raggio

- $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2 = r^2$
- $x^2+y^2+z^2 \underbrace{-2x_C x}_{\alpha} \underbrace{-2y_C y}_{\beta} \underbrace{-2z_C z}_{\gamma} + \underbrace{x_C^2+y_C^2+z_C^2-r^2}_{\delta} = 0$

$x_C = -\frac{\alpha}{2}$

$y_C = -\frac{\beta}{2}$ $\wedge$ $4r^2 = \underbrace{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}_{\text{deve essere} > 0} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}}{2}$

$z_C = -\frac{\gamma}{2}$

deve essere $> 0 \Rightarrow$ così esiste la sfera in S_3

CIRCONFERENZA

$C: \begin{cases} \text{equazione piano: } ax+by+cz=d \\ \text{equazione sfera: } (x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2 = r^2 \end{cases}$

C è una circonferenza se $d(C,\pi) < r$

- raggio di C (circonferenza) $= \sqrt{r^2 - d(C;\pi)^2}$
- PIANO Tg alla sfera nel punto $P_0(x_0\ y_0\ z_0)$:

$$\boxed{(x-x_0)(x_0-x_C)+(y-y_0)(y_0-y_C)+(z-z_0)(z_0-z_C)=0}$$

- Retta tangente alla circonf se sta nel piano.

INTERSEZIONE TRA 2 SFERE: C_1 e C_2 centri sfere

se: $d(C_1, C_2) > r_1+r_2 \Rightarrow$ SFERE INTERNE o ESTERNE

$d(C_1, C_2) = r_1+r_2 \Rightarrow$ SFERE TANGENTI int o est. in 1 PUNTO

$d(C_1, C_2) < r_1+r_2 \Rightarrow$ SFERE SECANTI, punti in comune che descrivono una circonferenza

- $x^2+y^2+z^2+\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1 = 0$
  $x^2+y^2+z^2+\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\delta_2 = 0$

$\Rightarrow (\alpha_1-\alpha_2)x+(\beta_1-\beta_2)y+(\gamma_1-\gamma_2)z+(\delta_1-\delta_2)=0$ PIANO RADICALE di SFERE

APPLICAZIONI LINEARI

V e W spazi vettoriali

Def: Un'applicazione $f: V \to W$ si dice K-lineare se:

$$\boxed{\begin{array}{l} - f(v_1+v_2) = f v_1 + f v_2 \\ - f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{array}}$$

esempi:

$f: R^3 \to R^2$

$(x,y,z) \to (3x+y-z, x-y+2z)$ è lineare? Si

$- f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda(3x+y, z, x-y+2z) = \lambda f(x,y,z)$

- se (x',y',z') e $(x'',y'',z'') \in R^3$

$f((x',y',z')+(x',y'',z'')) = f(\underbrace{x'+x''}_{x}, \underbrace{y'+y''}_{y}, \underbrace{z'+z''}_{z}) =$

$=$ ⟹ sostituisco alla $x \to x'+x''$, $y \to y'+y''$, $z \to z'+z''$ ⟹ $(3x'+y'-z', x'-y'+2z') + (3x''+ \dots)$

⟹ $f(x',y',z') + f(x'',y'',z'')$

- l'applicazione POLINOMIO è lineare
- PRODOTTO SCALARE e VETTORIALE sono R-lineari (NO ISOMORFI)
- LA DERIVATA è lineare

Def: • U, V, W sv. Se $f, g: V \to W$, $h: W \to U$ sono lineari ⟹

⟹ $h \circ f: V \to U$
$f+g: V \to W$
$\lambda f: V \to W$

→ SONO LINEARI

• Se $f: V \to W$ è K lineare:
- $im(f)$ è un SOTTOSPAZIO di W
- se $w \in im(f)$ e $v_0 \in V$ è $f(v_0) = w$ ⟹ $f^{-1}(w) = \{v_0\} + f^{-1}(0_W)$
- se $V = \mathcal{L}(v_1 \dots v_n)$ ⟹ $im f = \mathcal{L}(f(v_1) \dots f(v_n))$

MATRICI per APPLICAZIONI LINEARI

Quando studiamo un'applicazione lineare occorre sempre generare la matrice associata alla base canonica

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to (y-z, z-x, x-y)$

$$\begin{array}{l} y-z \\ z-x \\ x-y \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

l'immagine è generata dai vettori colonna

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$f(1\,0\,0) \to (3\ 3\ -1\ 0)\ v_1$

$f(0\,1\,0) \to (1\ 0\ 1\ 1)\ v_2$

$f(0\,0\,1) \to (8\ 6\ 0\ 2)\ v_3$

Vediamo le colonne vettori $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2,2}$

$a + bx + cx^2 \to \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ b-c & b-c \end{pmatrix}$ (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ rk=2

Base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$D = [E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}]$

$[f(1)]_D \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right] = (1\ 1\ 0\ 0) \Rightarrow$ la a dove si trova

$[f(x)]_D \to \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right] = (1\ 0\ 1\ 1) \Rightarrow$ la b dove si trova

$[f(x^2)]_D \to \left[\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right] = (0\ 1\ -1\ -1) \Rightarrow$ la c dove si trova

i coeff.

- $f: V(S_3) \to V(S_3)$

$v \to (v \cdot i)\, i$

Il vettore v avrà 3 comp. $(x,y,z) \longmapsto [(x,y,z)(1\,0\,0)](1,0,0)$

$i\ (1\,0\,0)$ $\quad (x,y,z) \longmapsto (x,0,0)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rk = 2

Corollario: V e W spazi vett. $f: V \to W$ appl. K-lineare. Allora:

- Se f è INIETTIVA $\dim_K(V) \le \dim_K(W)$
- Se f è SURIETTIVA $\dim_K(V) \ge \dim_K(W)$

FUNZIONI

FUNZIONE CONTINUA $f=(f_1 \dots f_m): I \to R^n$ è continua in t_0 se tali sono le sue componenti

FUNZIONE DERIVABILE f è derivabile in t_0 se tali sono le sue comp.

$(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$ SOMMA

$(\lambda f')t_0 = \lambda(t_0)f(t_0) + \lambda(t_0) f(t_0)$ PRODOTTO

FUNZIONE REGOLARE: $f: I \to R^n$ si dice regolare se è:

- INIETTIVA,
- $f \in C^1(I, R^n)$,
- $f'(t_0) \neq 0$ per ogni $t_0 \in I$

- $a+bt$ è regolare se $b \neq 0 \to$ SI
- $f(t) = (t^2, t^3) \to f'(t) = (2t, 3t^2) \to f'(0) = (0,0) \to$ NO

$\boxed{\text{CURVA}}$ $\to$ è un INSIEME DI PUNTI se è l'IMMAGINE di f cont.
f si dice PARAMETRIZZAZIONE di C.

Ogni RETTA, SEMIRETTA, SEGMENTO è UNA CURVA PIANA

$\boxed{\text{CIRCONFERENZA}}$ (curve piane) $\to x^2+y^2=r^2 \to C$ è immagine di $\to \boxed{(x,y) = (r\cos t, r\,\text{sen}\,t)}$

$\boxed{\text{ELLISSE}}$ $\to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \to C$ è immagine di: $\to$
$\to \boxed{(x,y) = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t)}$

$\boxed{\text{IPERBOLE}}$ $\to \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \to C$ è l'immagine di: $\to$
$\boxed{(x,y) = (\pm a\cosh t, b\,\text{senh}\,t)}$

$\boxed{\text{PARABOLA}}$ $\to x = py^2 \to C$ è l'immagine di $\to$
$\boxed{(x,y) = (pt^2, t)}$

CURVE BIREGOLARI $\Rightarrow$ se è regolare tale che $f' \times f'' \neq 0$

f di classe C^2 se è derivabile in I e $f' \in C^1 \Rightarrow f'' = (f')'$

- Una funzione può essere vista o come : $f(t) = (f_x(t), f_y(t), f_z(t))$

  o : $f(t) = f_x(t)\vec{i} + f_y(t)\vec{j} + f_z(t)\vec{z}$

- $f \times g(t) = \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}\vec{k}$

$(f \times g)'(t_0) = (f' \times g)(t_0) + (f \times g')(t_0)$

PUNTO DI FLESSO

P_0 è punto di flesso di C se esiste una sua parametrizzazione di C^2 con $P_0 = f(t_0)$ e $(f' \times f'')(t_0) = 0$

PIANO OSCULATORE

Piano passante per P_0 e $\perp$ a $(f' \times f'')(t_0)$ se P non è punto di flesso

esempio:

$f(t) = (r\cos t, r\,\text{sen}\,t, ht)$

$f'(t) = (-r\,\text{sen}\,t, r\cos t, h)$

$f''(t) = (-r\cos t, -r\,\text{sen}\,t, 0)$

$(f' \times f'')(t) = (rh\,\text{sen}\,t)\vec{i} - (rh\cos t)\vec{j} + r^2\vec{k}$

Il piano osculatore a C in $P_0 = f(t_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (h\,\text{sen}\,t_0)x - (h\cos t_0)y + rz = hrt_0$

equazione PIANO OSCULAT. $\begin{vmatrix} x - f_x(t_0) & y - f_y(t_0) & z - f_z(t_0) \\ f'_x(t_0) & f'_{(y)}(t_0) & f'_{(z)}(t_0) \\ f''_x(t_0) & f''_{(y)}(t_0) & f''_{(z)}(t_0) \end{vmatrix} = 0$

PIANO che CONTIGUA LA CURVA

Prendo 3 punti non allineati della curva $\Rightarrow$ faccio il piano $\Rightarrow$ sostituisco nel piano le equ. parametriche e se trovo $0 = 0 \Rightarrow$ è PIANA

SPAZI VETTORIALI

Def: Uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}$ è un insieme munito di due applicazioni:

$$sv \quad V \times V \to V$$
$$(v_1, v_2) \to v_1 + v_2 = sv(v_1, v_2)$$
$$pv \quad K \times V \to V$$
$$(\lambda, v) \to \lambda v = pv(\lambda, v)$$

- $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
- $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$
- $0_v + v = v$
- $w = -v$ (l'opposto)
- $1v = v$
- $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2) v$
- $(\lambda_1 + \lambda_2) v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$
- $\lambda v = 0$ se $\lambda = 0 \vee v = 0$

$v \in V$ $\forall$ vettori.

SOTTOSPAZI VETTORIALI

V sp V_{sv} su K, $W \subseteq V \Rightarrow W$ è SOTTOSPAZIO se $0_W \in W$ ed è chiuso rispetto alle SOMMA e PRODOTTO x scalari definiti in V.

ESEMPI:

- $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ sottosp. vett.
- $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ sottosp. vett.

Infatti gli elementi di W son $(x; -x) \Rightarrow$
$0 \in W$ / Siano poi $(x', -x')$ e $(x'', -x'') \Rightarrow (x'; -x) + (x''; -x'')$
$= (x' + x''; -(x' + x'')) \in W$ / $\cdot \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda(x; -x) = (\lambda x, -\lambda x)$
$\in W$

- $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ sottosp. vett.
- Le funzioni CONTINUE e DERIVABILI sono SOTTOSPAZI
- $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$ NON è sottosp vett. $0 \notin W$
- $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ NON è sottosp. vett
perché $(1,0), (0,1) \in W$ ma $(1,1) = (1,0) + (0,1) \notin W$
-

COMBINAZIONI LINEARI

V spazio vett. su $K \in R$ $\quad v_1 v_2 \dots v_m$ vettori $\in V$

v si dice COMBINAZIONE LINEARE di $v_1, v_m \dots$ se:

$$\boxed{v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_m v_m}$$

- Il VETTORE NULLO è sempre comb. lineare di un quals. insieme di vett.

- esempio: $e_1 = (1,0,0)$ $\quad$ $v = (3,2,0)$ è comb. lineare di $e_1\ e_2$
  $e_2 = (0,1,0)$

$$\Downarrow$$

$$v = a_1 e_1 + B e_2$$

$$(3,2,0) = a(1,0,0) + B(0,1,0)$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ B = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ha sol. } (a;B) = (3,2)$$

- se $e_1 = (1,0,0)$
  $e_2 = (0,1,0)$ $\Rightarrow$ ogni vettore $\in R^3$ è COMB. LINEARE di $e_1 e_2 e_3$
  $e_3 = (0,0,1)$

  sono LINEARM. INDIPENDENTI

- Se W' e $W'' \in V$ sottospazi fitt. generati $\Rightarrow W' + W''$ fitt. generato

BASI di uno SPAZIO VETTORIALE

Def: V sv su $K = \mathbb{R}$

l'insieme $B = (v_1 \ldots v_n)$ si dice BASE di V se:

$V = \mathcal{L}(v_1 \ldots v_n)$ cioè $v_1 \ldots v_n$ sono generatori di V

v_1 e v_n ... sono linearm. INDIPENDENTI

Def:

COMPONENTI di $v \in V$ rispetto alla Base B l'unico elemento tale che:

$[V]_B \Rightarrow v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_n v_n$

- $[v' + v'']_B = (a_1' + a_1'' + \ldots a_n' + a_n'')$

- BASE CANONICA di $\mathbb{R}^3$ $[(x, y, z)]_C = (x, y, z)$
- Da un insieme di gener si può estrarre una base;
- ogni insieme di vettori può essere completato a base $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ se e solo se sono linearmente indipendenti
- ogni base deve contenere i vettori di partenza

- $\forall$ 4 vettori in $\mathbb{R}^4$ essi non formano una base xK si possono prendere 4 volte lo stesso vettore
- $\forall$ 4 vettori distinti essi non formano una base di $\mathbb{R}^4$
- $\forall$ 5 vettori in $\mathbb{R}^4$ essi sono linearmente dipendenti xR dim $\mathbb{R}=4$
- $\forall$ 3 vettori in $\mathbb{R}^4$ essi non sono linearm. indipendenti
- $\forall$ 3 vettori in $\mathbb{R}^4$ essi NON si possono completare a base
- $\forall$ 6 vettori in $\mathbb{R}^4$, da essi NON si può ~~com~~ estrarre base xK devono essere generatori
- $\forall$ $B(v_1 v_2) V \subseteq \mathbb{R}^4$ e $B = (v_3 v_4)$ di W allora $B(v_1 v_2 v_3 v_4)$ NO BASE

N.B. Colonne e righe matrice quadrata sono INDIPENDENTI se il $\text{Det}(A) \neq 0$

PRODOTTI SCALARI

V spazio vett. (APPL. BILINEARE)

Il prodotto scalare su V è un'applicazione:

$$\langle \cdot\,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(v_1, v_2) \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{tale che}$$

- $\langle v_1 v_2 \rangle = \langle v_2 v_1 \rangle$ è commutativo
- $\langle v_1, v_2 + v_3 \rangle = \langle v_1 + v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle$ è distributivo risp somme
- $\alpha \langle v_1 v_2 \rangle = \langle \alpha v_1, v_2 \rangle$
- $\langle v, v \rangle \geq 0$ è positivo

In particolare
- $\langle v\, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$
- se $W \subseteq V$ si può consi. la restrizione $\langle \cdot\,\cdot \rangle_{|W \times W}$

- $|v| = \sqrt{\langle v\, v \rangle}$ MODULO di v
- $\langle v, w \rangle = |v||w| \cos(\widehat{vw})$ PRODOTTO CON ANGOLO
- $\langle v\, w \rangle = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$ REGOLA del PRODOTTO
- se $x = (x_1 \dots x_m)$ e $y(y_1 \dots y_m) \Rightarrow$

  $\langle x\, y \rangle = x_1 y_1 + \dots x_n y_N$ PRODOTTO SCAL. STANDARD

  $\hookrightarrow \langle x, y \rangle = x^t y = x\, I_m\, {}^t y$

Si verifichi che

$(x_1 x_2)(y_1 y_2) \mapsto 3x_1 y_1 + \frac{x_2 y_2}{2}$ è un PROD. scalare.

$$3x_1 y_1 + \frac{x_2 y_2}{2} = (x_1 x_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- $|\langle v, w \rangle| \leq |v||w|$
- $-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|} \leq 1 \Rightarrow \widehat{vw} = \arccos \frac{\langle v\, w \rangle}{|v||w|}$ ANGOLO
- $|v + w| \leq |v| + |w|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE
- $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx \Rightarrow \left| \int_a^b f_x g_x \right| \leq \sqrt{\int_a^b f_x^2} \sqrt{\int_a^b g(x)^2}$

  $\Rightarrow |f| = \sqrt{\int_a^b f_x^2\, dx}$ NORMA di funzione

MATRICI ORTOGONALI

Def $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice ORTOGONALE se ${}^tPP = I_n$

- La I_n è ORTOGONALE
- P è invertibile e $P^{-1} = {}^tP \Rightarrow P\,{}^tP = I_n$
- $\det(P) = \pm 1$ → $+1 \Rightarrow P$ si dice speciale; $-1 \Rightarrow P$ si dice non speciale
- Un P è ortogonale se e solo se le sue colonne, righe sono un ins. ortonorm.
- Matrici ortogonali di ordine 2

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \qquad P\,{}^tP = I_2$$

Rq

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_{11}^2 + p_{12}^2 = 1 \\ p_{21}^2 + p_{22}^2 = 1 \\ p_{11}p_{21} + p_{12}p_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} p_{11} = \cos\varphi \\ p_{12} = -\operatorname{sen}\varphi \end{matrix} \quad \begin{matrix} p_{21} = \operatorname{sen}\vartheta \\ p_{22} = \cos\vartheta \end{matrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ ort. speciale}$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \text{ ort non speciale}$$

- DIAGONALIZZAZIONE ORTOGONALE x matrici simmetriche

Sia $A \in Sym_n(\mathbb{R})$ Allora $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP = {}^tPAP$

CONDIZIONE ORTOGONALITÀ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ --- \end{cases}$$

A e B ortogonali di ordine n:
- (AB) è ortogonale
- $(A+B)$ e (αA) NON ORTOGONALI
- (A^n) è ORTOGONALE
- $(-A)$ è ORTOGONALE
- (A^{-1}) è ORTOGONALE

Le matrici simmetriche reali possono essere diagonalizzate tramite una matrice ortogonale $\Rightarrow$ quindi normalizzarle

MOLTEPLICITÁ ALGEBRICA $m_A(\lambda, A)$ la radice di $p_A(t)$

MOLTEPLICITÁ GEOMETRICA $m_g(\lambda, A) = \dim_K(E_A(\lambda))$

$$1 \leq m_g(\lambda, A) \leq m_a(\lambda, A)$$

significa conta quante volte ∃ l'autovalore

N.B (POLINOMIO CARATTERISTICO)

Dato un polinomio caratteristico:

$$\lambda^3 + \underbrace{5}_{\boxed{+\,+\,+}}\lambda^2 - 5\lambda + \underbrace{4}_{\det A = \, \text{on}}$$

$\Rightarrow Tr(A)$ = TRACCIA delle MATRICI (somma delle entrate diagonali)

es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Trovare u in modo che $\lambda = 1$ sia autovalore di A $\Rightarrow$
  $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det(A - 1I) = 0 \quad = u = 5$
- det polin. caratteristico e verificare che $p_A(-3) = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow p_{(A)}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 5x - 3 = 0$
  $p(A)(-3) = 0 \Rightarrow (27 - 9 - 15 - 3) = 0$
  $\lambda = 1 \wedge \lambda = -3$ sono autovalori
- det tutti gli autovalori $\Rightarrow$ uso la traccia
  $\Rightarrow$ la traccia è $-1 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 \rightarrow \lambda_3 = 1$
  $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$

Se $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ autovalori di A

per una matrice quadrata $\quad \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

$$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

FORME QUADRATICHE REALI

- Supponiamo che $\exists$ A simmetrica $\in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $\langle xy \rangle = xA^t y$

Def $\Rightarrow$ Una FORMA QUADRATICA REALE q nelle variabili $x_1 \dots x_n$ è un POLINOMIO $q(x_1 \dots x_n)$ omogeneo di 2° grado.

- Se q forma quadratica la matrice simm A viene detta MATRICE di q.

- es $q(t,x,y,z) = 2t^2 - y^2 + 3tx + tz - xy + 2xz + 3yz$

la matrice associata è $\Rightarrow$

$$A = \begin{array}{c|cccc|c} & t & x & y & z & \\ \hline t & 2 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & t \\ x & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & x \\ y & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & y \\ z & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & z \end{array}$$

Risoluzione 1) vedo coeff 2° grado $\Rightarrow 2t^2 \Rightarrow 2$ e lo metto in diagonale
$x \to 0$ " "
$-y^2 \to -1$ " "
$z \to 0$ " "

2) dobbiamo creare una matrice simmetrica;

3) vedo i monomi misti; i loro coefficienti li divido per 2 e li posiziono $\Rightarrow 3tx \to 3:2 \Rightarrow \frac{3}{2}$

FORME QUADRATICHE DEFINITE

Sia q forma quadratica, $A \in Sim$ la sua matrice Allora:

- q e A DEFINITE POSITIVE se $q(x) = xA^t x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$
- " SEMIDEFINITE POSITIVE se $q(x) = xA^t x \geq 0$
- " DEFINITE NEGATIVE se $q(x) = xA^t x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$
- " SEMIDEFINITE NEGATIVE se $q(x) = xA^t x \leq 0$
- " INDEFINITE se $\exists\, x'\, x'' \ /\ q(x') = x'A^t x' > 0$ e $q(x'') = x'' A^t x'' < 0$

es: $I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q(x,y) = x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow$ def. positiva

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q(x,y) = x^2 \geq 0 \Rightarrow$ semidef positiva

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow q(x,y) = -(\underbrace{x^2+y^2}_{>0}) \Rightarrow < 0 \to$ def. negativa

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow q(x,y) = -y^2 \leq 0 \Rightarrow$ semidef negativa

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to q(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow$ indefinita

CONICHE CLASSICHE

IPERBOLE
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ equ. canonica di C
- $(0, \pm ib)$ vertici immaginari
- $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow$ soluzioni reali se $|k| \geq a$
- $y = \pm \frac{b}{a} x \Rightarrow$ asintoti
- $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow$ soluz. reali se $|m| < \frac{b}{a}$
- se $a = b \Rightarrow$ IPERBOLE EQUILATERA

ELLISSE
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ equ. canonica di C
- più a si avvicina a b, più C diventa circonferenza

PARABOLA
- $y^2 = 2px \Rightarrow$ equ canonica di C

Consideriamo l'equazione $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

- se $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma = 0 \Rightarrow$ COPPIA IPERBOLICA di RETTE INCIDENTI
$\Rightarrow \alpha x^2 + \beta y^2 = 0 \to \begin{cases} \sqrt{\alpha}x + \sqrt{-\beta}y = 0 \\ \sqrt{\alpha}x - \sqrt{-\beta}y = 0 \end{cases}$ le 2 rette
- se $\alpha = 0, \beta\gamma > 0 \Rightarrow$ COPPIA IPERBOLICA di RETTE PARALLELE
$\Rightarrow \beta y^2 = \gamma \to \begin{cases} \sqrt{\beta}y = \sqrt{\gamma} \\ \sqrt{\beta}y = -\sqrt{\gamma} \end{cases}$ le 2 rette
- se $\alpha = \gamma = 0 \Rightarrow$ RETTA DOPPIA
$\Rightarrow \beta y^2 = 0$
- se $\alpha, \beta > 0, \gamma = 0 \Rightarrow$ COPPIA ELLITTICA di RETTE INCIDENTI
$\Rightarrow \alpha x^2 + \beta y^2 = 0 \to (\sqrt{\alpha}x + i\sqrt{\beta}y)$, $(\sqrt{\alpha}x - i\sqrt{\beta}y)$
- se $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma < 0 \Rightarrow$ COPPIA ELLITTICA RETTE PARALLELE
$\Rightarrow \{\beta y^2 = \gamma\} = \emptyset$
- se $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0 \Rightarrow$ ELLISSE IMMAGINARIA
$\{\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma\} = \emptyset$

RIDUZIONE delle CONICHE e forma CANONICA

Una conica C: $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

$$\Downarrow$$

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

C è in forma canonica se C è in forma:

$$\alpha x^2+\beta y^2=\gamma \qquad \beta y^2=2\gamma x$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{13}} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matrice dei termini di secondo grado — matrice completa della conica

Se:

$\det(B)$
- $=0$ la conica è degenere
- $\neq 0$ la conica è non degenere:
  - $\Rightarrow \det(A)$
    - $=0 \Rightarrow$ PARABOLA
    - $>0 \Rightarrow$ ELLISSE
    - $<0 \Rightarrow$ IPERBOLE

• es

Data la f quadratica: $x^2+y^2-4xy+2y-1=0$ scrivere la forma canonica!

$q(x) = x^2+y^2-4xy+2y-1=0$

FORMA CANONICA $= ax^2+by^2=c$

ove a e b sono gli autovalori

c si ottiene uguagliando il det della matrice di forma canonica $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$ con il det $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- gli autovalori sono 3 e -1 $\Rightarrow a=3$, $b=-1$

$c \to -abc = 2 \Rightarrow 3c=2 \Rightarrow c=\frac{2}{3}$

- sostituisco:

la forma canonica è $3x^2-y^2=\frac{2}{3}$

QUADRICHE

Def:

Una quadrica nello spazio è il luogo di un'equazione di 2° grado in x, y, z $\Rightarrow$ $q(x,y,z) = 0$

Sono associate 2 matrici:

$A \in \mathbb{R}^{3,3}$ matrice di coeff 2° grado

$B \in \mathbb{R}^{4,4}$ matrice completa

Si può trovare una rototraslazione in modo che la quadrica abbia una forma canonica:

Q in forma canonica se: $\quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta \ \wedge \ \beta y^2 + \gamma z^2 = 2\alpha x$

Le superfici le visualizzo con i piani $\begin{cases} x = h \\ y = k \\ z = t \end{cases}$ $\forall h, k, t \in \mathbb{R}$

se $rk(B) = 4 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow$ QUADRICHE A CENTRO NON DEGENERE

(DEGENERE PARABOLOIDE in caso contrario)

rette contenute quadrica passanti per $A\left(-1, 2, -\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ ricavare il piano per A $\Rightarrow \begin{cases} \text{QUADRICA} \\ \text{PIANO} \end{cases} \Rightarrow$ rette

se $rk(B) = 4 \Rightarrow$ Q. NON DEGENERE

$\rightarrow$ A CENTRO se $\det A \neq 0$

$\rightarrow$ PARABOLOIDE in caso contrario

$\Rightarrow$ ALTRIMENTI DEGENERE

INSIEMI APERTI e CHIUSI in $\mathbb{R}^n$

INTORNO SFERICO di raggio δ di $\bar{x}$:

$$B(\bar{x}, \delta) = \{ x = (x_1 \dots) \mid |x - \bar{x}| < \delta \}$$
$$\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$$

Def. PUNTI: $U \subseteq \mathbb{R}^n$. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice:

- se $\exists\ \delta > 0$ tale che $B(\bar{x}, \delta) \subseteq U$ INTERNO U°
- $\exists\ \delta > 0$ tale che $B(\bar{x}, \delta) \cap U = \{\bar{x}\}$ ISOLATO
- se è interno al suo complem. ESTERNO
- NON INTERNO, NON ESTERNO e N FRONTIERA ($\partial U \Rightarrow$ insieme punti di frontiera)

$\mathbb{R}^n$ è aperto
$\emptyset$ è chiuso e viceversa

PUNTO DI ACCUMULAZIONE $U \subseteq \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è P. di A. se $\forall\ \delta > 0 \Rightarrow U \cap B(\bar{x}, \delta)$ contiene punti diversi da $\bar{x}$

$U' \Rightarrow$ insieme dei punti di accumulazione

INSIEMI

APERTO $\Rightarrow$ se $\mathring{E}$ è compreso in A; (se tutti i punti di frontiera non appartengono all'insieme)

CHIUSO $\Rightarrow$ se il complementare è aperto; (se tutti i frontiera appartengono)

LIMITATO $\Rightarrow$ se prendi un disco abbastanza grande per comprendere l'insieme

COMPATTO $\Rightarrow$ se è chiuso e limitato

CONNESSO x archi $\Rightarrow$ se prendi 2 punti è possibile fare un percorso da A e B;

SEMPLICEMENTE CONNESSO $\Rightarrow$ se è possibile tracciare una retta

PUNTO ESTERNO non è di frontiera $\Rightarrow$ deve essere esterno all'insieme

FUNZIONE DIFFERENZIABILE in $A(x_0, y_0)$ se:

- f continua in (x_0, y_0);
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in (x_0, y_0)

QUINDI vale:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0 y_0) - \partial x(x_0 y_0)(x-x_0) - \partial y(x_0 y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

- U insieme compatto e $f: U \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f MAX e MIN assoluti
- U insieme compatto e con. x archi, f cont. ed m e M (min e max)

$\Rightarrow \operatorname{im}(f) = [m, M]$

DIFFERENZIABILITÀ

se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono CONTINUE $\Rightarrow$ f è diff. ed $\exists$ il piano tang.

- Sia U aperto $\Rightarrow$ Se $f: U \to \mathbb{R}$ è diff. in $\bar{x}$ $\Rightarrow$ f è CONTINUA in $\bar{x}$
- Sia U aperto $\Rightarrow$ Se f ha derivate seconde parziali continue $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

- DERIVATE DIREZIONALI in $P_0(-1, 0)$ lungo (a, b)

$f(x,y) = x^2 y - xy - 3x + 2$ $\quad \nabla(2xy - y - 3,\ x^2 - x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 0) = -3 \qquad \Rightarrow \boxed{\langle (-3, 2) \cdot (a, b) \rangle}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0) = 2 \qquad = -3a + 2b$$

FORMULA di TAYLOR

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0,y_0)(x-x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$$

- calc. sviluppo mac laurin in $(0,0)$ per $f(x,y) = \cos x - e^{y^2}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ / $e^{y^2} = 1 + y^2$ $\Rightarrow f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{2} - 1 - y^2 + \ldots$

DERIVATE in (x_0, y_0) lungo $v(v_1, v_2)$ $\Rightarrow$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

PIANO TANG. al grafico di $f(x,y)$ in $A(x_0, y_0, z_0)$

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z-z_0) = 0$$