NUMERO: 1035 DATA: 15/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Barberis

MATERIA: Geomatica

Prof. Manzino

2014

Geomatica

fabiana barberis

07/07/2014

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 114

Necessità di tipo FISICO

Come orientiamo gli assi del SR?
Usiamo il sistema delle STELLE FISSE (SISTEMA INERZIALE).
Con questo possiamo georiferire tutto.

Abbiamo però la necessità di MATERIALIZZARE il sistema di riferimento, per poterlo toccare con mano, ed utilizzarlo con la strumentazione topografica

L'osservatore solidale alla Terra non si trova in un sistema di riferimento INERZIALE. Questo perché vi sono forze esterne che agiscono sulla Terra (forza di rotazione). Ciò significa che non è rispettata la legge di conservazione del momento angolare

"Il momento angolare di un sistema è costante nel tempo se è nullo il momento delle forze esterne che agiscono su di esso"

Per fare sì che il SR solidale alla Terra sia inerziale, bisogna eliminare:

- il moto di rotazione intorno al proprio asse
- il moto di rivoluzione attorno al sole
- moti di tipo millenario (precessione degli equinozi, rotazione della linea degli apsidi, rotazione della linea degli equinozi, variazione dell'eccentricità dell'orbita).

Che SR usiamo?
Usiamo ECEF: Earth Centered Earth Fixed e cioè usiamo un SR centrato nel centro di massa della Terra.

Come trovare il centro di massa? I satelliti terrestri hanno un moto che dipende dalla posizione del centro di massa della Terra.
Da misure satellitari riusciamo a ricavare la posizione del centro di massa.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 114

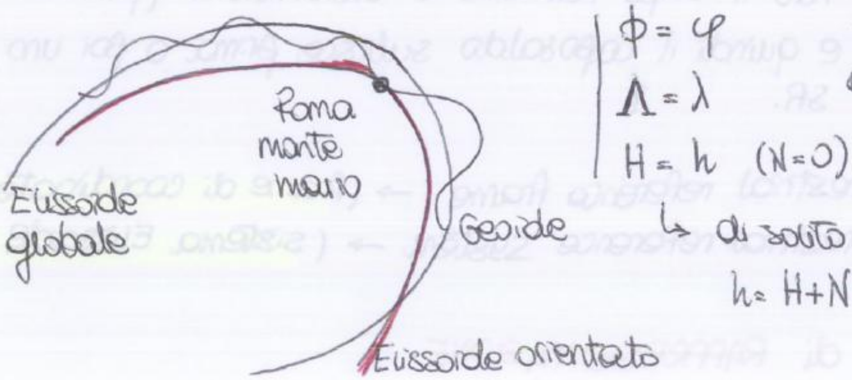
DEFINIZIONE di un SISTEMA di RIFERIMENTO

Un sistema di riferimento è l'insieme di parametri e regole che permettono di ricavare la posizione di un punto nello spazio e nel tempo. Si utilizza per mezzo di una sua materializzazione (frame)

ELISSOIDE → superficie geometrica

In Italia si usa l'elissoide di Hayford, orientato in corrispondenza dell'osservatorio di Roma Monte Mario.

Orientare un elissoide significa ipotizzare che in quel punto (Roma Monte Mario) elissoide e geoide siano tangenti in senso stretto. Le normali alle due superfici sono coincidenti



$$\begin{cases} \Phi = \varphi \\ \Lambda = \lambda \\ H = h \quad (N=0) \end{cases}$$ Punto di emanazione

↳ di solito $h = H + N$

Avremo che

$$\begin{cases} \Delta\Phi \simeq \Delta\varphi \\ \Delta\Lambda \simeq \Delta\lambda \\ h = H + \Delta N \end{cases}$$

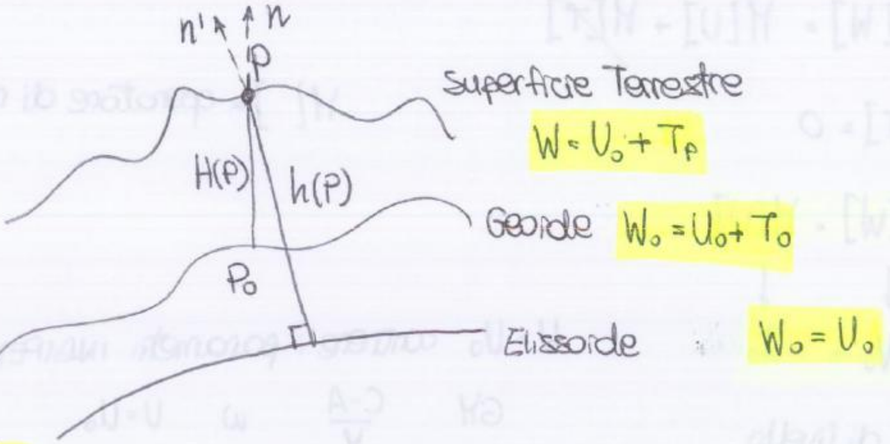
Un elissoide locale è un elissoide globale rototraslato su un punto in maniera che la normale alla superficie sia coincidente con quella del geoide nello stesso punto e a cui viene eventualmente applicato un fattore di scala per esigenze cartografiche

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \lambda R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_2$$

GEOIDE → superficie fisica equipotenziale

Il geoide e':

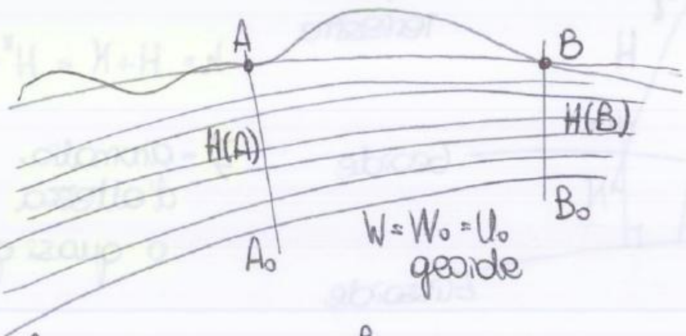
- una superficie equipotenziale del campo di gravità $W = W_0$
- il potenziale terrestre che si misura al livello medio del mare in quiete o anche la superficie media del mare in quiete
- superficie che rende, in media, il potenziale anomalo uguale a zero



$$H(P) = \int_{P_0}^{P} dn$$

H = altezza ortometrica

dn = misura di dislivello



$$H(A) = \int_{A_0}^{A} dn \qquad H(B) = \int_{B_0}^{B} dn \qquad H(A) \neq H(B)$$

Le curve sono superfici equipotenziali. Se versassi dell'acqua in A l'acqua si disporrebbe sulla superficie passante per A e B

Da cui segue $H(A) = H(B)$. Questo non e' vero!

Questo accade perche' le linee equipotenziali in B sono più vicine in quanto la gravità e' maggiore.

ζ = quasi geoide o anomalia d'altezza e vale

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}$$

altezza ellissoidica

con i valori da GPS possiamo calcolare con precisione centimetrica i valori di h. Se il geoide fosse noto con la stessa precisione, sarebbe possibile ricavare H con altrettanta precisione, unificando i SR altimetrici di tutto il globo

EVRS = European Vertical Reference System

La superficie di riferimento verticale non è rappresentata dal livello medio del mare in quiete ma da quella superficie per cui in media il potenziale di gravità della terra W_0 è uguale al potenziale normale medio della terra U_0.

Le altezze sono ΔW_P → differenze tra il potenziale nel punto P (W_P) e il potenziale EVRS (W_0)

Definendo il numero GEOPOTENZIALE $C_P = W_0 - W_P = -\Delta W_P$

per trasformarlo in un'altezza lo si divide per $\bar{\gamma}$

$$H^N = \frac{C_P}{\bar{\gamma}}$$ Calcolato partendo dalle misure di livellazione

Partendo invece dalle altezze ellissoidiche misurate con il GPS

$$W_P = U_P + T_P$$

$$\zeta = \frac{W_P - W_0}{\gamma}$$

$$H^N = h - \zeta$$

h è misurato con GPS

↓

troviamo H^N

quota geopotenziale riferita al geoide

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 114

SISTEMA di RIFERIMENTO ITALIANO

RETE TRIGONOMETRICA CLASSICA: 20000 vertici trigonometrici ottenuti per triangolazione e trilaterazione
interdistanza di 5 km

RETE IGM95: 2000 punti di interdistanza 20 km
determinata con tecniche GPS
Inquadrata nel sistema europeo ETRF89

RETE DINAMICA NAZIONALE: connessa a ETRF2000
RDN
una stazione permanente ogni 100 km
le coordinate delle stazioni permanenti sono calcolate ogni 6 mesi
la rete è infittita tramite stazioni permanenti regionali.

Tutti i vertici IGM95 sono stati aggiornati alle coordinate RDN

Si utilizzano programmi come CARTLAB e VERTO per passare da un SR all'altro.

$$\rho_{\partial_1 \partial_2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -0{,}5$$

↑
Indice di
correlazione lineare

Si ottiene quindi $\sigma_y^2 = (a_1^1)^2 \sigma_{x_1}^2 + (a_1^2)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \underbrace{2 a_i a_j \sigma_{ij}}_{\text{se abbiamo correlazione}}$

Esempio → RELAZIONE Y NON LINEARE

Se la relazione di Y che collega misure dirette a misure indirette non è lineare, non possiamo applicare la legge di propagazione varianza - covarianza. Bisogna allora linearizzare Y

$$\underline{y} = f(\underline{x})$$

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots x_n) \rightarrow y_1 \cong f_1(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Delta x_n$$

y_2

$\vdots$

y_m

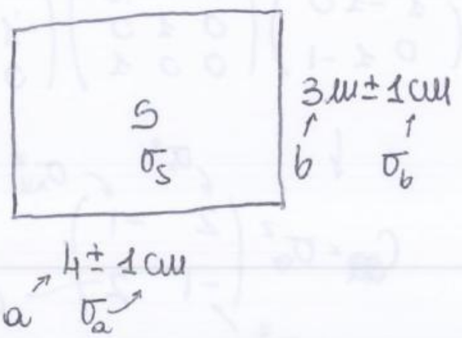
In forma matriciale

$$\underline{y} = \underline{b} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & & \vdots \\ \dots & & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{[J] \text{ MATRICE JACOBIANA}} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

In cui

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} f_1^0 \\ f_2^0 \\ \vdots \\ f_m^0 \end{bmatrix} \qquad [J] = [A]$$

Vogliamo misurare la superficie di un tavolo conoscendo i due lati



$M[S] = 4 \times 3 = 12\ m^2$

voglio calcolare σ_S

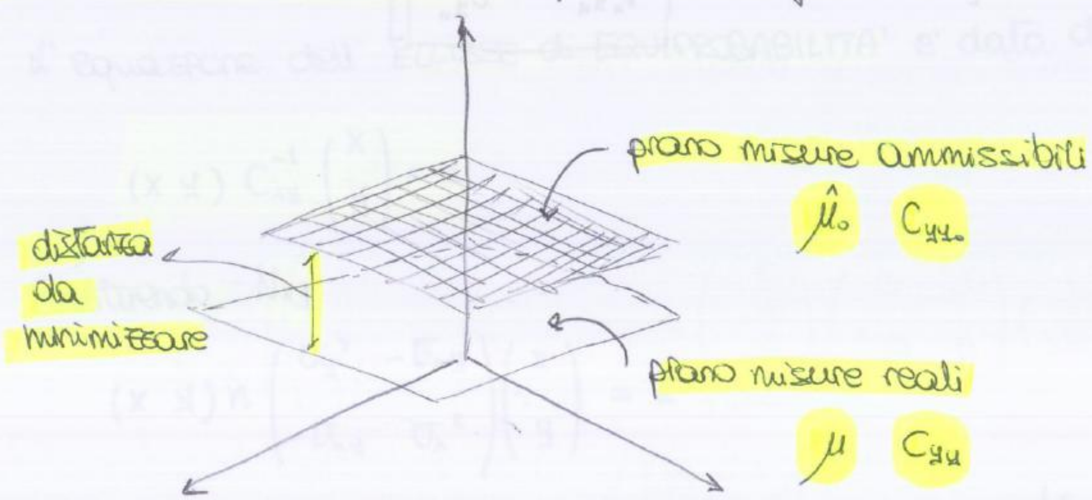
MINIMI QUADRATI

L'approssimazione ai minimi quadrati è una tecnica di ottimizzazione volta a determinare una funzione analitica che approssimi un insieme di dati senza necessariamente passare per i dati stessi.

Si usa quando abbiamo più misure che incognite.

Se vado a rappresentare nello spazio le misure eseguite di una determinata grandezza, esse giacciono su un piano.
Esse sono affette da errore. Quelle corrette si trovano su un altro piano.
Voglio determinare la distanza tra i due piani.

Il processo dei minimi quadrati permette di minimizzare la distanza minimizzando la somma del quadrato degli scarti



Supponiamo di dover stimare r grandezze (incognite) avendo effettuato n misure (termini noti). Generalmente $n > r$ (altrimenti i minimi quadrati non si possono applicare)

Il sistema che lega le n misure alle r incognite è del tipo

$$[A][x] = [\ell]$$

MATRICE DISEGNO $r \times n$; vettore delle incognite r ; vettore dei termini noti n

1

Dopo aver calcolato le grandezze stimate $\hat{x}$, sostituendole nel sistema

$$A\hat{x} - l_0 = \hat{v}$$ calcolo gli scarti stimati

Posso infine calcolare la varianza dell'unità di peso

$$\boxed{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{n-r}}$$

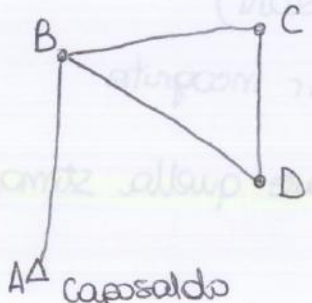
$n-r$ = ridondanza

si ottiene infine la matrice di varianza covarianza delle stime $\hat{x}$

$$\boxed{C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}}$$

ESEMPIO (Tipo Esame !!)

linea di livellazione



A caposaldo di quota nota

Abbiamo misurato i dislivelli

$$\begin{cases} \Delta_{AB} = Q_B - Q_A \\ \Delta_{BC} = Q_C - Q_B \\ \Delta_{CD} = Q_D - Q_C \\ \Delta_{DB} = Q_B - Q_D \end{cases}$$

Poniamo in forma matriciale le equazioni dei dislivelli

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{AB} \\ \Delta_{BC} \\ \Delta_{CD} \\ \Delta_{DB} \end{bmatrix}}_{\text{vettore misure osservate } y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A = \text{matrice disegno}} \underbrace{\begin{bmatrix} Q_B \\ Q_C \\ Q_D \end{bmatrix}}_{\text{vettore } x \text{ incognite}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -Q_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{vettore termini noti } b}$$

Definiamo la matrice NORMALE

$N = A^T P A$ dove P matrice dei pesi delle misure

la soluzione del sistema è data da $\hat{x} = N^{-1} A^T P l_0 = N^{-1} A^T P (y - b)$

Inserisco P

$$A^T P A \hat{x} = A^T P y_0$$

Ora trovo $\hat{x}$

$$\hat{x} = \underbrace{(A^T P A)^{-1}}_{N^{-1}} A^T P y_0$$

$$(A^T P A)^{-1} A^T P = (A^T A)^{-1} A^T \quad \text{proiettore} \quad \boxed{\mathcal{P} = A(A^T A)^{-1} A^T}$$

$$N^{-1} A^T P \longrightarrow \mathcal{P} = A N^{-1} A^T P$$

RIDONDANZA

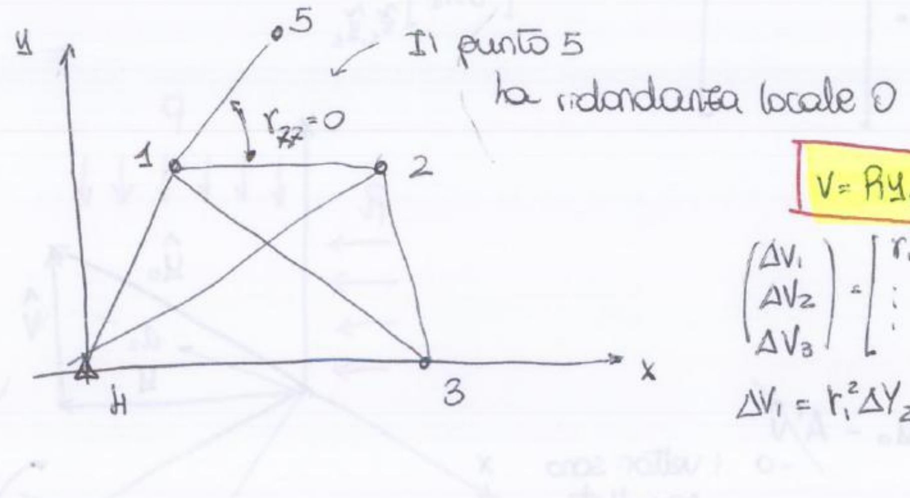
$\mathcal{R}$ e' una matrice che ha sulla diagonale le ridondanze locali

$$\boxed{\mathcal{R} = I - \mathcal{P}} = I - P A N^{-1} A^T \quad I = \text{matrice identita'}$$

La proprieta' di questa matrice e' indicare il contributo che ogni singola misura apporta alla ridondanza globale.

$\mathcal{R}$ puo' essere nota a priori, cioe' prima di aver effettuato le misure

E' importante che le misure non abbiano ridondanza locale nulla. Se una misura ha ridondanza locale nulla e' una misura inutile che non serve per i minimi quadrati



$$\boxed{V = \mathcal{R} y_0}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^1 & r_1^2 & r_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta Y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{errore nella misura}$$

$\Delta V_1 = r_1^2 \Delta Y_2 \leftarrow$ tutti gli scarti sono sporcati.

PROCESSO di STIMA

Il processo di stima consiste di due operazioni
- simulazione
- compensazione

SIMULAZIONE

Possiamo scrivere la matrice disegno, e quindi calcolare R, ancora prima di effettuare le misure, basterà sapere come effettuiamo le misure e quindi come sono legate tra di loro.
Possiamo anche determinare C_{xx} ponendo $\sigma_0^2 = k$ = costante

$$C_{xx} = \sigma_0^2 N^{-1}$$

$C_{xx} = k N^{-1}$ ← ci permette di capire quali sono le precisioni attese nella misura

$$R = I - AN^{-1}A^T$$

COMPENSAZIONE

Dopo aver fatto le misure → valuto $\hat{x}$ = grandezze stimate

$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$ matrice di varianza covarianza delle stime

Per avere $\hat{\sigma}_0$ piccolo dobbiamo:
- fare misure bene → $\hat{v}$ è piccolo
- $m-n$ è grande → la ridondanza è grande

FISSARE IL SR (DATUM)

Fissare una rete significa vincolare i gradi di libertà del sistema.

Rete planimetrica → fisso 2 traslazioni
1 rotazione

Rete 3D → fisso 3 traslazioni
1 rotazione

Fissare il datum non comporta una dipendenza degli scarti, invece influenza le ellissi di errore.

Le ellissi sono tanto più grandi tanto più lontane dal punto fisso.

$$\boxed{\chi_\infty = \frac{\max_i \sum_{j=1} N_{ij}}{\max_i \sum_j N_{ij}^{-1}}}$$

In pratica si sommano le ~~matri~~ colonne delle matrici N e N^{-1} e si prende il max delle somme di N e di N^{-1}

TEST PARAMETRICI

se le misure sono distribuite normalmente possiamo considerare

σ_0^2 = ipotizzato

$\hat{\sigma}_0^2$ = stimato tramite i minimi quadrati

$(m-n) = r$ = ridondanza

m: numero scarti; n: numero incognite ricavate

Deve valere

$$(m-n)\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{m-n}$$

se abbiamo operato un errore nella matrice disegno A o degli errori nelle misure avremo $\hat{\sigma}_0^2$ aumenta di un certo valore

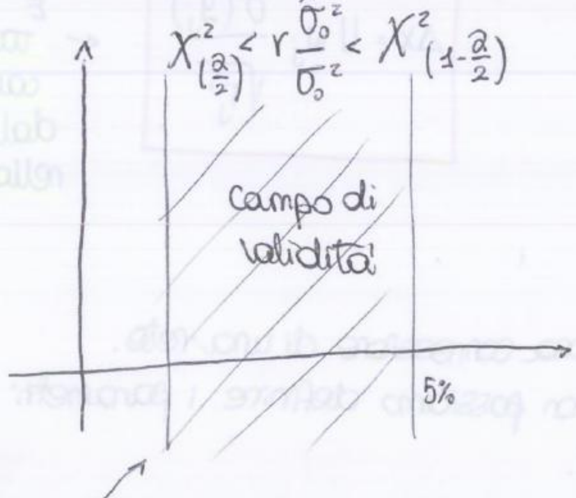
Se

$$(m-n)\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > P(5\%)$$

allora c'è un errore di misura

↳ probabilità del 5%

$$\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < r\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$



Possiamo eseguire il test
- ad una coda
- a due code

↓

se abbiamo una sovra parametrizzazione che fa implodere $r\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ e cioè diventa TROPPO piccolo

metto un limite minimo a χ^2

FILTRO di KALMAN e minimi quadrati sequenziali (SLS)

L'idea di partenza e' quella di aggiornare una stima ai minimi quadrati ogni volta che si aggiunge una misura, senza dover ricalcolare il sistema.

E' indispensabile quando effettuiamo un posizionamento real time

Ad esempio il picchettamento

I minimi quadrati prevedono

$$Ax + a = y$$

Con misure reali y_0 avremo

$$Ax + a - y_0 = y - y_0 = V$$

$$Ax - b = V$$

$$b = y_0 - a$$

V = scarti

P = pesi

Si risolve trovando la x per la quale $\frac{V^T P V}{r} = min$ r = ridondanza

Ovvero avendo il sistema si calcola

$$N^{-1} = (A^T P A)^{-1}$$

e quindi $\hat{x} = N^{-1} A^T P b = N^{-1} A^T P (y_0 - a)$

Se aggiungiamo altre misure $y_{0(i+1)}$ avremo che

$$\boxed{\hat{x}_{i+1} = L \hat{x}_i + K b_{i+1}}$$

parametri precedenti

nuove misure

La difficolta' e' nel calcolo di L e K

Separiamo i parametri definendo

$$\boxed{\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + K (b_{i+1} - A_{i+1} x_i)}$$

L'unica incognita e' K e non piu' L K = Filtro di Kalman

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 114

FILTRO di KALMAN

Ha due procedure

- FILTERING
- SMOOTHING

Il filtering e' indispensabile, lo smoothing può non essere fatto se ad esempio siamo interessati alle deformazioni di una rete GPS, seguita in tempo reale.

FILTERING

- Predizione → usa le equazioni di stato
- Correzione → usa le equazioni di misura

Le equazioni di stato sono generalmente le equazioni del moto del punto di cui si prende la misura in epoche diverse.
Ciò non e' sempre detto. Possiamo anche lavorare in un sistema statico, dove il punto non si muove di nessun moto. In quel caso l'equazione di stato assume la forma $X_k = X_{k-1}$ cioe' il punto ha sempre la stessa misura all'epoca k e all'epoca k-1. In generale le equazioni sono

- Predizione

$$\boxed{\hat{x}_{k/k-1} = T_{k-1}\, \hat{x}_{k-1/k-1}}$$

$[T]$ = matrice di transizione

$x_{k/k-1}$ → posizione all'epoca k → con le misure effettuate fino all'epoca k-1

Ciò significa semplicemente immaginare dove si sposta un punto, cioe' quali saranno le sue nuove coordinate, conoscendo le coordinate iniziali (quelle dell'epoca k-1) e la legge del moto a cui il punto e' soggetto

- Correzione

$$\boxed{\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k\left(b_k - A_k\, \hat{x}_{k|k-1}\right)}$$

La correzione prende il valore che abbiamo approssimato, e vi aggiunge un termine. Questo termine fa' uso della matrice di Kalman moltiplicata per una sorta di scarto predetto.

b_k = termine misurato all'epoca k, cioe' la nostra nuova misura

PROCEDIMENTO tramite un ESEMPIO

Moto rettilineo accelerato. A diverse epoche $t = t_0, t_2, t_3, t_n$ si sono misurate $b_0 \; b_1 \; b_2 \dots b_n$, per ogni x abbiamo anche σ_b

l'equazione del moto è $\quad x = \frac{t^2}{2}\ddot{x} + x_0$

le equazioni di stato sono

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \ddot{x}_k \frac{\Delta t^2}{2} \\ \ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]} \begin{bmatrix} x_k \\ \ddot{x}_k \end{bmatrix}$$

INNESCO ai MINIMI QUADRATI

Per cominciare la procedura del metodo di Kalman, è necessario partire da dei valori iniziali stimati con i minimi quadrati.

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

Ci servono $x_0 \quad \ddot{x} \quad x_1$

$$[A]\begin{bmatrix} x_0 \\ \ddot{x} \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

dove b_0 e b_1 sono i valori misurati

le equazioni utilizzate sono

$$\begin{cases} x_0 = b_0 \\ x_1 = x_0 + \ddot{x}\frac{\Delta t^2}{2} \\ x_1 = b_1 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\Delta t^2}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice disegno } [A]} \begin{bmatrix} x_0 \\ \ddot{x} \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$[N] = A^T P A \quad$ la matrice P dei pesi è ottenuta prendendo i termini sulla diagonale della matrice di varianza covarianza

$$P = \text{diag}\begin{bmatrix} C_{ee} \\ C_{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Trovato N invertiamo e abbiamo N^{-1}

$$\boxed{\hat{x} = N^{-1} A^T P b}$$

avremo i termini iniziali $x_0 \quad \ddot{x} \quad x_1$

Valutiamo ora

$$\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ \ddot{x} \end{pmatrix}_{2/2} = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ \ddot{x} \end{pmatrix}_{2/1} + K_2 \left[b_2 - A_2 \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ \ddot{x} \end{pmatrix}_{2/1} \right]$$

Possiamo inoltre calcolare

$$\boxed{Q_{2/2} = (I - K_2 A_2) Q_{2/1}}$$

che ci servirà poi per il calcolo di $Q_{3/2}$

Procediamo iterativamente con la predizione di $\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ \ddot{x} \end{pmatrix}_{3/2}$, il calcolo di $Q_{3/2}$. Il calcolo di A_3 e K_3

e successivamente la correzione fino ad arrivare a $\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ \ddot{x} \end{pmatrix}_{3/3}$

Così via per tutte le epoche.

SMOOTHING

All'epoca k, si è determinata una soluzione che terrà in conto delle misure alle epoche precedenti, ma non delle epoche successive.

Per avere le stime corrette di tutte le misure all'epoca finale, dobbiamo operare un procedimento inverso per aggiornare tutte le misure che sono rimaste a $x_{k/k}$

$$x_{\underbrace{k}_{\text{epoca}}/\underbrace{N}_{\text{la stima usa le misure di tutte le N epoche}}}$$

Si usa la formula

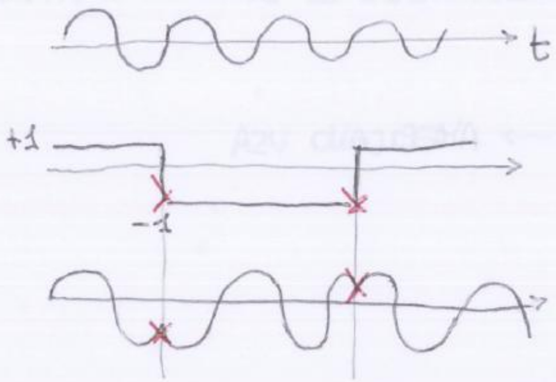
$$x_{k/N} = x_{k/k} + B_k \left(x_{k+1/N} - x_{k+1/k} \right)$$

Dove $B_k = Q_{k/k} T_k^T Q_{k+1/k}^{-1}$

Per esempio se ho 4 epoche di misura

$$B_3 = Q_{3/3} T_3^T Q_{4/3}^{-1} \quad \rightarrow \quad x_{3/4} = x_{3/3} + B_3 \left(x_{4/4} - x_{4/3} \right)$$

- Componente messaggio → codice di navigazione che contiene le effemeridi dei satelliti, informazioni sugli errori di orologio di bordo e sui ritardi ionosferici



Possiamo ricavare la distanza satellite ricevitore attraverso misure

- Misure di codice → il codice satellite e il codice che ha in memoria il ricevitore vengono confrontati e viene ricavata la ΔT tra i due codici
- Misure di fase

↓

numero di cicli interi che compie l'onda + parte frazionaria → In particolare sarà nota e misurata la parte frazionaria, mentre il numero di cicli interi sarà una incognita del sistema chiamata AMBIGUITA' di FASE

Le misure di codice sono usate per posizionamento istantaneo (bassa precisione)

Misure di fase per posizionamento post-processing

Le scale di tempo

TAI = tempo atomico internazionale → radiazione dell'atomo di cesio

GMT = tempo solare medio di Greenwich → legato al tempo di rotazione della terra

UTC = tempo universale coordinato → e' mantenuto con orologi atomici

Codice messaggio

D o NAV frequenza di 50 Hz contiene informazioni sui satelliti

CNAV contiene ulteriori informazioni sugli asincronismi delle scale di tempo e un FLAG di avvertimento se il satellite non funziona per molto tempo.

Vedi pag. 23 per gli altri sistemi GNSS

La distanza sarà calcolata moltiplicando l'intervallo di tempo per la velocità della luce nel vuoto c

$$\rho_i^j = c\Delta t$$

ρ_i^j è detto PSEUDORANGE. Non è il valore corretto della distanza ricevitore satellite poiché vi sono errori di orologio tra l'orologio del satellite e quello del ricevitore

$$\rho_i^j(t) = c\left[(t^j + \delta^j(t)) - (t_i - \delta_i(t))\right] = \underbrace{c(t^j - t_i)}_{R_i^j} + c\delta^j(t) + c\delta_i(t)$$

$$\boxed{\rho_i^j = R_i^j + c\delta_i(t) + c\delta^j(t)}$$

R_i^j = range effettivamente misurato (PSEUDORANGE)

$\delta_i(t)$ = errore d'orologio del ricevitore

$\delta^j(t)$ = errore d'orologio del satellite

ρ_i^j = RANGE ← incognito

R_i^j = PSEUDORANGE

↑ misurato

$\delta^j(t)$ generalmente è noto tramite modellazioni polinomiali.

Si considera incognito solamente il valore $\delta_i(t)$.

Separando i termini noti da quelli incogniti avremo

$$\boxed{R_i^j + c\delta^j(t) = \rho_i^j - c\delta_i(t)}$$

Le incognite di questa equazione sono ρ_i^j e $c\delta_i(t)$

$$\rho_i^j \to x_i,\ y_i,\ z_i$$

3 incognite del posizionamento del ricevitore

$c\delta_i(t) \rightarrow$ errore di orologio del ricevitore

Abbiamo quindi 4 incognite. Per trovare una soluzione dobbiamo avere

La determinazione dell' ambiguità di fase N_i^j può essere effettuata considerando un satellite per più epoche e tenendo presente che si ipotizza N_i^j rimane fissa per lo stesso satellite in epoche diverse.

CYCLE SLIP = perdità di contatto tra ricevitore e satellite che comporta l'introduzione di una nuova incognita ambiguità di fase

Considerando che $f = \frac{c}{\lambda}$ avremo

$$\frac{\rho_i^j}{\lambda} = \phi_i^j + N_i^j + \frac{c}{\lambda}\left(\delta_i(t) + \delta^j(t)\right)$$

$$\phi_i^j(t) + \underbrace{f^j \delta^j(t)}_{\substack{\text{Errore di} \\ \text{orologio del} \\ \text{satellite}}} = \frac{1}{\lambda}\rho_i^j(t) - N_i^j - \underbrace{f^j \delta_i(t)}_{\substack{\text{Errore di} \\ \text{orologio del} \\ \text{ricevitore}}}$$

Il posizionamento cinematico con le misure di fase non e' possibile se non si conoscono le ambiguità di fase.
Si effettua l'INIZIALIZZAZIONE fissando le ambiguità di fase e a quel punto si possono risolvere le equazioni come per il posizionamento con misure di codice

- Per la soluzione STATICA

Dobbiamo considerare più errori di orologio relativi al ricevitore

$c\delta_i(t)$ a tutte le epoche di misura

Avremo una incognita in più per ogni epoca di misura

$$c\delta_i(t_1) \quad c\delta_i(t_2) \ldots$$

- POSIZIONAMENTO ASSOLUTO di FASE

Equazione della fase

$$\underbrace{\phi_i^j(t)\lambda}_{\text{fase}} + \underbrace{c\delta^j(t)}_{\substack{\text{Errore di}\\ \text{orologio}\\ \text{satellite}}} = \underbrace{cp_i^j(t)}_{\substack{\text{pseudo}\\ \text{range}\\ \text{di fase}}} - \underbrace{N_i^j\lambda}_{\substack{\text{ambiguità}\\ \text{di}\\ \text{fase}}} - \underbrace{c\delta_i(t)}_{\substack{\text{Errore di}\\ \text{orologio}\\ \text{ricevitore}}}$$

N sarà incognita per ogni satellite

$$\left[A + \begin{matrix} \lambda_i^{(1)} & & & & 0 \\ & \lambda_i^{(2)} & & & \\ & & \lambda_i^{(3)} & & \\ & & & \lambda_i^{(4)} & \\ 0 & & & & \lambda_i^{(5)} \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ N_i^{(1)} \\ N_i^{(2)} \\ \vdots \\ N_i^{(5)} \\ c\delta_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_i^{(1)} + c\delta_i^{(1)} - \rho_i^{(1)(0)} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \\ v^{(4)} \\ v^{(5)} \end{bmatrix}$$

Incognite — termini noti — scarti

CASO STATICO

Ad ogni epoca di misura avremo una incognita di asincronismo $c\delta_i$

CASO CINEMATICO

Avremo 3 nuove incognite di posizione

Ad ogni epoca di misura ci saranno altre n equazioni per gli n satelliti. Dopo un po' di epoche le incognite saranno meno delle equazioni e il sistema diventa risolvibile anche nel caso cinematico.

Possiamo fissare ad intero l'ambiguità di fase (INIZIALIZZAZIONE) e risolvere le equazioni come pseudorange

Effemeridi BROADCAST: effemeridi predette contenute nel messaggio di navigazione

Effemeridi ultra rapide predette: calcolate con anticipo di qualche ora

Effemeridi a posteriori: calcolate a posteriori con precisione centimetrica

Rifrazione troposferica

Troposfera e' la parte bassa dell'atmosfera (~20 km). Avvengono i fenomeni metereologici.

La troposfera causa rifrazione sul segnale GNSS per via del vapore acqueo. Abbiamo quindi un ritardo del segnale. Esso e' indipendente dalla frequenza del segnale.

L'errore troposferico e' molto alto se i satelliti non sono alti di 15° sopra la linea dell'orizzonte.

Rifrazione ionosferica

La ionosfera e' la parte alta dell'atmosfera. Vi avvengono dei fenomeni di ionizzazione dovuti alle radiazioni solari, queste provocano rifrazione dei segnali in base alla loro frequenza.

COMBINAZIONE IONO-FREE

Distanza R_i^j ricevitore i satellite j } misurata con portanti L_1 e L_2

$L_1 \rightarrow R_{01}$, f_1 ; $L_2 \rightarrow R_{02}$, f_2

Il range R_i^j ottenuto dalle combinazioni delle frequenze f_1 e f_2 e' esente dall'effetto del ritardo ionosferico.

Per basi > 15 km serve usare almeno 2 frequenze. Al di sotto di 15 km il ritardo ionosferico viene eliminato tramite differenziazione

Multipath

Il segnale arriva all'antenna in maniera indiretta e viene riflesso durante il percorso.

E' un ritardo difficilmente modellabile perche' dipende dalla geometria e dalla presenza di ostacoli. Dipende dalla frequenza.

POSIZIONAMENTO RELATIVO

Determinazione del vettore BASELINE che congiunge due ricevitori.
Uno di questi è chiamato MASTER e generalmente è posto su un punto di coordinate note.
L'altro è chiamato ROVER

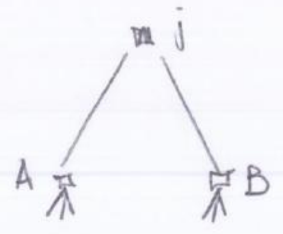
Il posizionamento relativo può essere fatto sia per misure di fase che per misure di codice. Nella realtà si fanno solo misure di fase poiché hanno precisione più elevata.

EQUAZIONE della MISURA di FASE

$$\phi_i^j(t) + \underbrace{f^j\delta^j(t)}_{\text{Errore di orologio del satellite}} = \frac{1}{\lambda}\rho_i^j(t) - \underbrace{N_i^j}_{\text{ambiguità di fase}} - \underbrace{f^j\delta_i(t)}_{\text{Errore di orologio ricevitore}} + \underbrace{I_i^j(t)}_{\text{Ritardo ionosferico}} + \underbrace{T_i^j(t)}_{\text{Ritardo troposferico}} + \underbrace{E_i^j(t)}_{\text{Errore di effemeride}}$$

DIFFERENZE SINGOLE

Abbiamo 2 ricevitori e 1 satellite



$$\phi_A^j + f^j\delta^j(t) = \frac{1}{\lambda}\rho_A^j(t) - N_A^j - f^j\delta_A(t) + I_A^j(t) + T_A^j(t) + E_A^j(t)$$

$$\phi_B^j + f^j\delta^j(t) = \frac{1}{\lambda}\rho_B^j(t) - N_B^j - f^j\delta_B(t) + I_B^j(t) + T_B^j(t) + E_B^j(t)$$

Sottraendole avremo

$$\phi_A^j - \phi_B^j = \frac{1}{\lambda}(\rho_A^j - \rho_B^j) - N_A^j + N_B^j + f^j(\delta_B - \delta_A) + \Delta I_{AB}^j + \Delta T_{AB}^j + \Delta E_{AB}^j$$

DIFFERENZE TRIPLE

Consideriamo 2 epoche di misura diverse t_1 e t_2

le doppie differenze a t_1 e t_2 sono

$$\phi_{AB}^{jk}(t_1) = \frac{1}{\lambda}\rho_{AB}^{jk}(t_1) - N_{AB}^{jk}$$

$$\phi_{AB}^{jk}(t_2) = \frac{1}{\lambda}\rho_{AB}^{jk}(t_2) - N_{AB}^{jk}$$

se si fa' la differenza tra le due le ambiguità di fase si elidono

$$\phi_{AB}^{jk}(t_2) - \phi_{AB}^{jk}(t_1) = \frac{1}{\lambda}\left(\rho_{AB}^{jk}(t_2) - \rho_{AB}^{jk}(t_1)\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\phi_{AB}^{jk}(t_{12}) = \frac{1}{\lambda}\rho_{AB}^{jk}(t_{12})}$$

Equazione alle differenze triple

Vantaggio => non dipendono dalle ambiguità di fase e quindi non è affetto dal cycle slip.

Possiamo applicare la correzione al ROVER $\boxed{R^j_B(t)_{corretto} = R^j_B(t) + PRC(t)}$

$$\boxed{R^j_B(t)_{corretto} = \rho^j_B(t) - c\delta_{AB}(t)}$$

$\delta_{AB}(t) = \delta_B(t) - \delta_A(t)$ combinazione d'orologio dei ricevitori

si eliminano gli errori di orologio dei satelliti e per baseline < 15 km si elidono gli errori spazialmente correlati

Equivale ad una differenza prima.

DGNSS con misure di fase

Per una stazione MASTER (A)

$$\lambda\phi^j_A(t) = \rho^j_A(t) - c\delta^j(t) - c\delta_A(t) - \lambda N^j_A + I^j_A(t) + T^j_A(t) + E^j_A(t)$$

La correzione sarà

$$\underbrace{CPC(t)} = \rho^j_A(t) - \lambda\phi^j_A(t) = c\delta^j(t) + c\delta_A(t) + \lambda N^j_A - I^j_A(t) - T^j_A(t) - E^j_A(t)$$

CARRIER PHASE CORRECTION

Il range corretto nel ROVER sarà

$$\boxed{\lambda\phi^j_B(t)_{corretto} = \rho^j_B(t) + CPC(t)}$$

$$\boxed{\lambda\phi^j_B(t)_{corretto} = \rho^j_B(t) - \lambda\Delta N^j_{AB} - c\delta_{AB}(t)}$$

$\Delta N^j_{AB} = N^j_B - N^j_A$

Si fa' una ulteriore differenza con un'altra distanza misurata dal satellite k

E' una differenza prima: si eliminano i bias spazialmente correlati e gli errori orologio del satellite

COMBINAZIONE WIDE LANE

$n_1 = 1$

$n_2 = -1$

$$\phi_W = \phi_1 - \phi_2$$

$$L_W = \phi_W \lambda_W = \phi_W \frac{c}{f_W} = \phi_W \cdot \frac{c}{f_1 - f_2} = c\, \frac{\phi_1 - \phi_2}{f_1 - f_2}$$

$c = f_1 \lambda_1 = f_2 \lambda_2$

$f_W = f_1 - f_2$

$$L_W = c\, \frac{\phi_1}{f_1 - f_2} - c\, \frac{\phi_2}{f_1 - f_2} = f_1 \lambda_1 \frac{\phi_1}{f_1 - f_2} - f_2 \lambda_2 \frac{\phi_2}{f_1 - f_2}$$

$L_1 = \phi_1 \lambda_1 \qquad L_2 = \phi_2 \lambda_2$

$$L_W = f_1 \frac{L_1}{f_1 - f_2} - f_2 \frac{L_2}{f_1 - f_2} = \frac{f_1 L_1 - f_2 L_2}{f_1 - f_2}$$

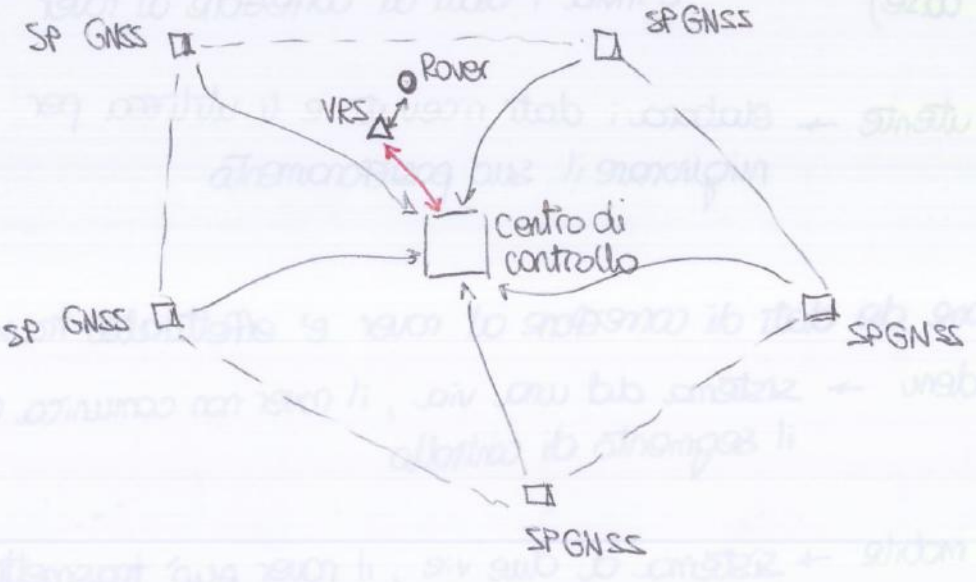
Abbiamo 3 diverse architetture di reti NRTK

- VRS Virtual reference station
- MRS Multi reference station
- MAX o MAC master auxiliary

VRS Virtual Reference Station

Il centro di controllo elabora osservazioni di codice e fase di 3 stazioni GNSS, e calcola dei modelli di bias.

Il rover invia tramite protocollo NMEA la sua posizione approssimata al centro di controllo. Questo crea una stazione virtuale molto vicina al rover e per interpolazione invia i valori di bias di questa stazione virtuale al rover, che può quindi effettuare un posizionamento differenziale applicando le correzioni



Serve una comunicazione a 2 vie.
Il calcolo è effettuato dal centro di controllo, è personalizzato e quindi ci può essere una limitazione di numero di utenti
Superata una certa distanza la VRS deve essere ricalcolata

Si può pensare di creare delle stazioni VRS fisse, il rover si "aggancia" a quella più vicina, senza bisogno di una comunicazione a 2 vie.

Non serve una comunicazione a 2 vie.

E' necessario che il rover sia in grado di svolgere i calcoli di interpolazione

La stazione master può essere sostituita da qualsiasi delle auxiliary

Usiamo stazioni reali e non virtuali

Le celle possono essere scelte dall'utente oppure se la comunicazione e' a due vie può essere usato il servizio AUTO MAX (il centro di controllo in base alla posizione può calcolare una cella opportuna)

Non ci sono limiti al numero di accessi

APPROCCI di CALCOLO

Dal posizionamento differenziale sappiamo che

$\boxed{\text{CODICE}}$
$$R_B^j(t)_{corretto} = R_B^j(t) + PRC(t) = \rho_B^j(t) - c\delta_{AB}(t) + \Delta E_{AB}^j(t) + \Delta I_{AB}^j(t) + \Delta T_{AB}^j(t)$$

$\boxed{\text{FASE}}$
$$\lambda\phi_B^j(t)_{corretto} = \rho_B^j(t) + CPC(t) = \rho_B^j(t) - c\delta_{AB}(t) - \lambda N_{AB}^j + \Delta I_{AB}^j(t) + \Delta T_{AB}^j(t) + \Delta E_{AB}^j(t)$$

PRC e CPC contengono le correzioni.

Nel RTK il software di rete deve effettuare una SEPARAZIONE dei bias. Poi deve creare un modello che possa essere interpolato e mandato al rover (o direttamente interpolato dal rover).

Approccio NON differenziato e combinato

Separiamo la componente dispersiva (ritardo ionosferico) dalla componente geometrica (ritardo troposferico e errori di effemeride)

Usando osservazioni grezze separiamo i termini con

- combinazioni iono-free → abbiamo solo più componente geometrica
- combinazioni geometry-free → abbiamo solo più ritardo ionosferico

I bias ottenuti vengono interpolati per ottenere un modello d'errore

INTERPOLAZIONE dei BIAS

L'interpolazione dei bias stimati nelle stazioni permanenti SP GNSS serve per calcolare i bias in corrispondenza del rover

Combinazione lineare LCM

Consiste in una combinazione lineare di coefficienti a applicati alle differenze doppie di fase.
Vengono mitigati gli errori non correlati e modellati quelli spazialmente correlati (troposfera, orbite)

Metodo lineare dipendente dalla distanza DIM

Serve per stimare la correzione ionosferica
E' una media ponderata con pesi W_i

$$W_i = \frac{1}{d_i}$$ dove d_i = distanza ricevitore - stazione SPGNSS

Interpolazione lineare LCM

I bias possono essere ottenuti ad ogni epoca

$$V = a\Delta X + b\Delta Y$$

a e b sono parametri d'area trasmessi al rover
ΔX ΔY sono differenze di coordinate tra base e rover
V sono i bias nel rover
sono una serie di equazioni (tante quante sono le stazioni SPGNSS) che vengono risolte ai minimi quadrati

Modello di superficie di basso ordine LSM

Vengono definite delle superfici per interpolare bias spazialmente correlati. La stima dei coefficienti avviene tramite minimi quadrati.
Ricavati i coefficienti si possono stimare i bias nel rover

NMEA → coordinate in tempo reale

Ricevitore GNSS fornisce coordinate in tempo reale, satelliti usati indici DOP ed altre informazioni

$GPRCM, 214522, ...

GPS — formato RCM — ora — latitudine, longitudine ecc...

RTCM → trasmissione di dati e correzioni per posizionamento RTK

Ne avremo due tipi

- RTCM 2.x
- RTCM 3.x

servono per diffondere i messaggi di correzione

Il 2.x prevede 63 messaggi da 30 bit, quelli più usati sono

- Type 1 e 2 → correzioni pseudorange
- Type 3 → coordinate della stazione
- Type 18 19 → misure di fase e codice
- Type 20 21 → correzioni di fase e codice
- Type 59 → messaggi proprietari

Il 3.x è più evoluto e ha informazioni sui parametri delle antenne e del sistema di riferimento. Può accettare nuovi codici, nuove frequenze e nuovi sistemi GNSS come il Galileo

Serve per la MAx = master auxiliary

FKP

Serve per trasmettere i parametri di correzione differenziale della rete NRTK al rover. Si usa nel MRS. Sono parametri di correzione superficiale d'area.

Gli indici DOP si scrivono usando i termini sulla diagonale

$$GDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_t^2} \quad \leftarrow \text{Geometrical}$$

$$HDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad \leftarrow \text{Horizontal}$$

$$VDOP = \sqrt{\sigma_z^2} \quad \leftarrow \text{vertical}$$

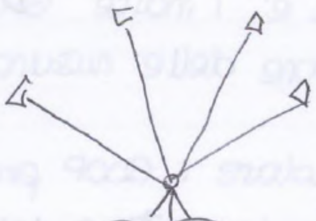
$$PDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \quad \leftarrow \text{Position}$$

$$TDOP = \sqrt{\sigma_t^2} \quad \leftarrow \text{time}$$

ALTO GDOP

↓ >6

cattiva configurazione satellitare



BASSO GDOP

↓ <6

buona configuraz. satellitare

POSIZIONAMENTO e NAVIGAZIONE INERZIALE

NAVIGAZIONE: metodi e tecniche per determinare

- posizione
- velocità
- assetto

di un oggetto in moto in un sistema di riferimento deciso a priori

Due filosofie di navigazione

- Position Fixing → ogni posizione indipendente dalle precedenti GPS
- Dead Reckoning → ogni dato dipende da misura effettuata e posizioni precedenti INS (IMU + software)

Il position fixing non è di facile realizzazione perchè il segnale GPS si sgancia facilmente (cycle slip) e quindi non si ha una soluzione continua.

PRINCIPI FISICI della NAVIGAZIONE INERZIALE

NAVIGAZIONE INERZIALE → è possibile conoscere il moto di un corpo in un sistema di riferimento, in base alle forze esterne che agiscono su di esso

I sistemi di riferimento INERZIALI sono quelli in cui è valida la 1ª legge di Newton

↳ Un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme a meno che forze esterne non lo costringano a mutare il suo stato

2ª legge di Newton

↳ $\boxed{F = m \cdot a}$

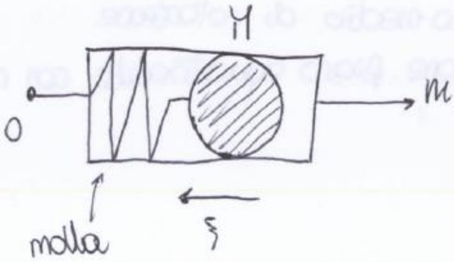
F = forza esterna
m = massa del corpo
a = accelerazione

Il giroscopio GIMBALED possiede un servomotore che impedisce all'asse di spin di cambiare direzione se viene perturbato da una coppia esterna.
Il giroscopio misura la velocità ω del supporto cardanico mosso dal servomotore che consente all'asse di spin di rimanere fisso.

GIROSCOPIO a FIBRA OTTICA: sfrutta l'EFFETTO SAGNAC.
Si confrontano gli sfasamenti o i tempi di arrivo di due segnali.
Una sorgente luminosa LED o laser emette un fascio di luce che viene diviso in due raggi (CW e CCW). Un raggio segue un percorso orario e l'altro un percorso antiorario attraverso la fibra ottica posta su un disco.
Se il disco non ruota i due raggi arrivano all'emettitore iniziale nello stesso istante. Se il disco ruota arriveranno sfasati e se ne misura lo sfasamento.
Dallo sfasamento si risale alla velocità angolare ω.
Più l'area del disco è grande maggiore è la precisione. Generalmente si usano bobine di spire lunghe fino a 1 km.
Più i raggi sono sfasati maggiore è ω

ACCELEROMETRO

Accelerometro misura la forza di reazione vincolare con cui un veicolo agisce su una massa di prova M per mantenerla a se legata in movimento.



Costituito da uno CHASSIS che vincola la massa M a muoversi lungo una sola direzione

Avremo un sensore tale che non appena M si muove, ne misura lo spostamento ed imprime una forza per far tornare M alla posizione iniziale.
M rimane immobile, cambia la forza F imposta nella molla.
L'accelerometro è soggetto a $\vec{g}$ accelerazione di gravità.
L'output dell'accelerometro è: FORZA SPECIFICA

$$\boxed{f = a - g}$$

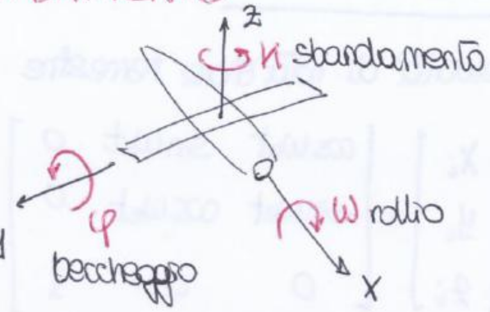
a = accelerazione imposta al corpo

g = gravità

TRASFORMAZIONI tra SISTEMI di RIFERIMENTO

ANGOLI di EULERO

Ω rollio
ϕ beccheggio
K sbandamento



DA n-frame a b-frame

$$R_n^b = R_x R_y R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\Omega & s\Omega \\ 0 & -s\Omega & c\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & 0 & -s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cK & sK & 0 \\ -sK & cK & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C = coseno
S = seno

DA b-frame a n-frame $\quad R_b^n = (R_n^b)^T = R_x^T R_y^T R_z^T$

le velocità angolari $\dot{\Omega}$ $\dot{\phi}$ $\dot{K}$ possono servire a propagare la matrice di rotazione nel tempo

$$\dot{R}_b^n = R_b^n \Omega_n^b \qquad \Omega_n^b = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{K} & \dot{\phi} \\ \dot{K} & 0 & -\dot{\Omega} \\ -\dot{\phi} & \dot{\Omega} & 0 \end{bmatrix}$$

DA e-frame a n-frame

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix}}_{R} \begin{bmatrix} x_e - x_0 \\ y_e - y_0 \\ z_e - z_0 \end{bmatrix}$$

φ = latitudine
λ = longitudine

DA n-frame a e-frame

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

Nel caso 2D → incognite : X e Y assetto K (cambio di direzione dei veicolo)

→ sensori : 2 accelerometri (accelerazioni direzione x e y)

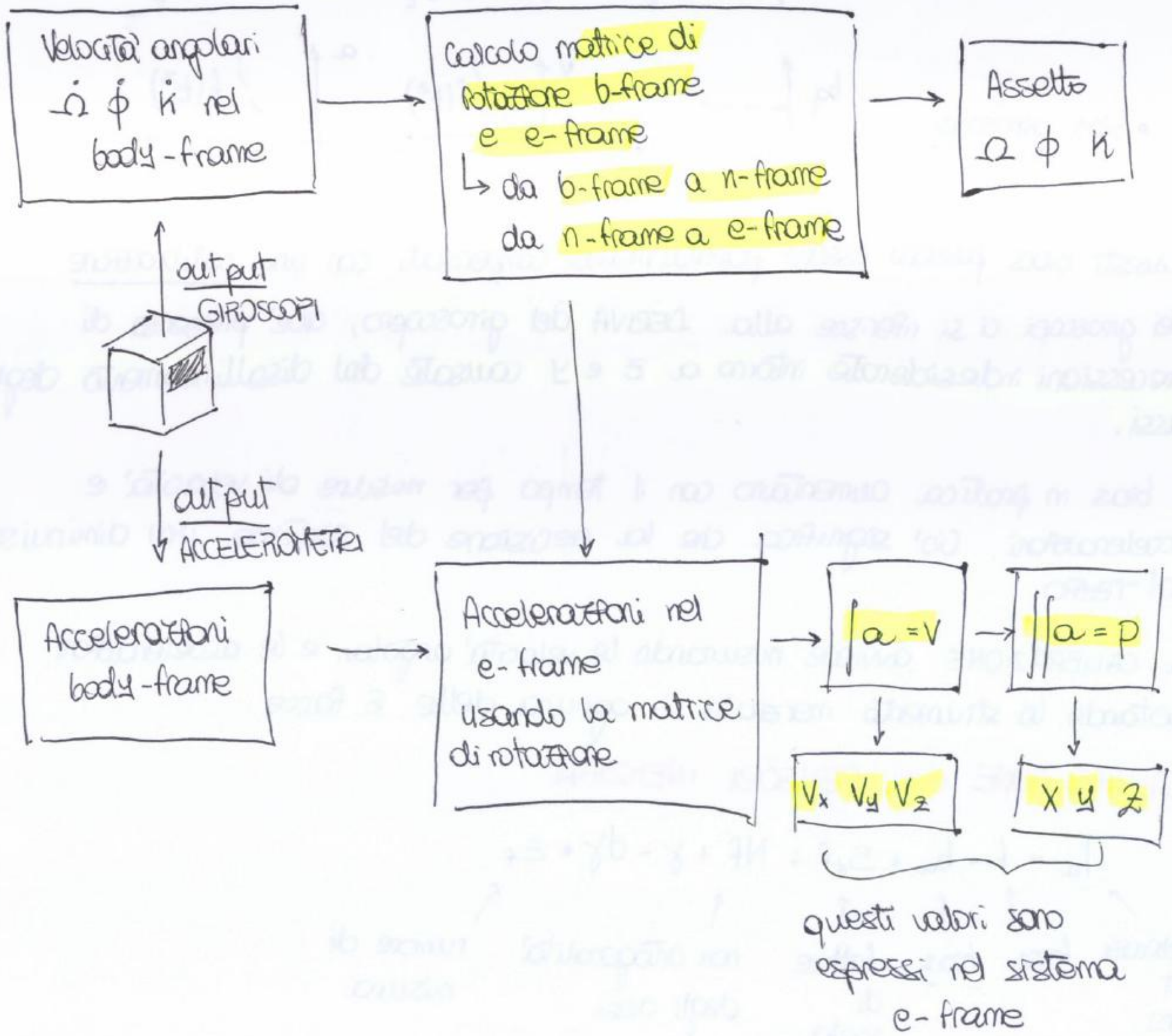
1 giroscopio (assetto K)

Nel caso 3D → incognite : X Y Z spostamenti

Ω ϕ K angoli di direzione del corpo

→ sensori : 3 accelerometri (accelerazioni X Y Z)

3 giroscopi ($\dot{\Omega}$ $\dot{\phi}$ e $\dot{K}$ velocità angolari)



$$I_\omega = \omega + b_\omega + S\omega + N\omega + \varepsilon_\omega$$

output sensore velocità angolari → I_ω

ω = velocità angolare

b_ω = bias

$S\omega$ = fattore di scala

$N\omega$ = non ortogonalità degli assi

ε_ω = rumore di misura

Questi valori di errori sistematici → bias, fattore di scala, non ortogonalità degli assi

possono essere ricavati facendo una misura statica (20 minuti)

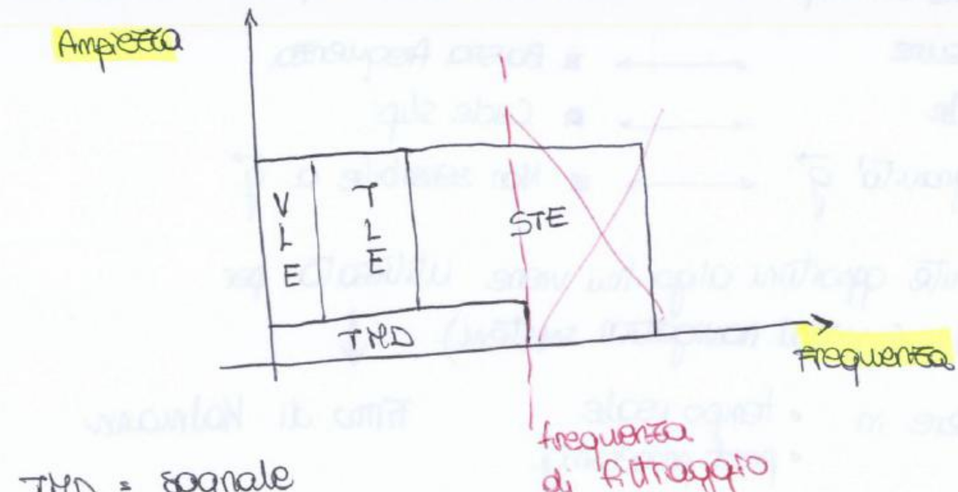
→ TEST STATICO a 6 FACCE → il sensore sta appoggiato 20 minuti su ogni faccia e registra output di accelerometri e giroscopi

La stima degli errori sistematici è fatta confrontando gli output delle 2 facce opposte

ERRORI ACCIDENTALI Errori non prevedibili a priori di segno alterno e dipendenti dalla qualità dei sensori che compongono la piattaforma, nonché dipendenti dall'ambiente esterno

La componente di errore accidentale può essere trattata come RUMORE BIANCO a media nulla. Può essere ridotto grazie all'elevata frequenza di misura

SPETTRO di RISPOSTA IMU



THD = segnale

STE = Errori accidentali (short term errors)

VLE TLE = Errori sistematici

Abbiamo due tipi di accoppiamento

▪ LASCO	▪ STRETTO
Abbiamo le soluzione nei due sistemi DISTINTI ↓ le uniamo insieme	Si combinano direttamente insieme le osservazioni ↓ possiamo ricucire i cycle slip. Non servono 4 satelliti
E' difficile ricucire i cycle slip. Serve avere 4 satelliti per il GNSS	E' più difficile implementare il sistema

Nell'integrazione tra IMU e GPS e' necessario fare attenzione a

- sfalsamento dovuto alla deriva dei giroscopi
- sfalsamento tra i riferimenti temporali. → GPS, PC e IMU

↳ generalmente si prende il sistema temporale GPS come riferimento e si correlano gli altri strumenti

Se immaginiamo di perdere il segnale GPS, per un breve periodo di tempo le prestazioni di sensori 2D e 3D sono simili. Con l'aumentare del tempo sono diverse e aumentano esponenzialmente gli errori.

APPLICAZIONI

MMS = Mobile Mapping System : veicolo dotato di GNSS, INS, odometri, camere, LS.

Serve per acquisire dati georeferenziati relativi alle strade (catasto, stato di salute delle strade, guida automatica del veicolo)
Anche il Poli ne ha uno.

UAV = Unmanned Aerial Vehicles : veicoli aerei senza pilota. Possono essere comandati da terra o seguire una rotta prestabilita mediante un autopilota.

Pedestrian Navigation = determina velocità e posizione del pedone. Può essere utilizzato a scopi civili (vigili del fuoco, guardie forestali ecc...) oppure per valutare la postura della persona.
Si possono registrare i percorsi fatti dal pedone

DISTANZIOMETRI

EDM = Elettromagnetic Distance Meter

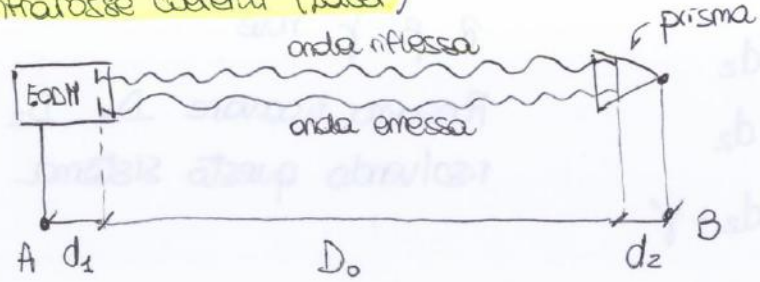
EODM = Elettro Optical Distance Meter

Gli EDM → misura dello sfasamento tra onda emessa e onda ricevuta
→ misura dei tempi trascorsi tra due impulsi o tra due treni d'onda codificata.

In entrambi i metodi la misura e' ripetuta migliaia di volte per fornire gli scarti quadratici medi

EODM Metodo della misura della fase

Emette una radiazione ottica di lunghezza d'onda λ dell'infrarosso vicino.
La modula e la trasmette.
Un prisma riflettore posto nel punto di cui vogliamo calcolare la distanza la riflette.
L'EODM misura lo sfasamento tra l'onda emessa e quella ricevuta
EODM ha una parte trasmittente e una ricevente
Si usano onde infrarosse coerenti (Laser)



$AB = d_1 + d_2 + D_0$

$\left.\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix}\right\}$ SISTEMATISMI

D_0 e' calcolato misurando lo sfasamento $\Delta\varphi$

$\boxed{\frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi}{\omega}}$ → $\omega = \frac{c}{\lambda} 2\pi$

$\boxed{\Delta\varphi = \omega \Delta t}$ — ω: impulso; Δt: differenza di tempo

$$\Delta s = c\Delta t = c \frac{\Delta\varphi}{\omega} = c\Delta\varphi \frac{\lambda}{c}\frac{1}{2\pi} = \lambda \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

n = ambiguità di fase

$$2D_0 = \underbrace{n\lambda}_{\text{cicli interi}} + \underbrace{\Delta s}_{\text{sfasamento}} = n\lambda + \lambda\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

$$\boxed{AB = d_1 + d_2 + \frac{n}{2}\lambda + \frac{\lambda}{2}\frac{\Delta\varphi}{2\pi}}$$

Metodo della misura ad impulsi

Possiamo calcolare la distanza con la formula

$$\boxed{2D = v\Delta t}$$

v = velocità dell'onda = c velocità della luce

Δt = differenza di tempo, tempo impiegato dall'onda per percorrere andata e ritorno.

Vogliamo precisione di 10^{-5}

c e' nota con precisione

Per Δt dobbiamo considerare la sensibilità $\boxed{\frac{\delta \Delta t}{\Delta t} = 10^{-5}}$ $\delta \Delta t = 10^{-5} \Delta t$

la sensibilità dipende dalla distanza

$D = 3m$

$C = 3 \cdot 10^{-8}$ $\rightarrow$ $2 \cdot 3 = 3 \cdot 10^{-8} \Delta t \rightarrow \Delta t = 20\ ns$

$\delta \Delta t = 10^{-5} \cdot 20ns = 2 \cdot 10^{-13} s$ $\rightarrow$ sensibilità ottenibile solo con orologi atomici

con l'aumentare della distanza la sensibilità diminuisce e quindi avremo meno problemi

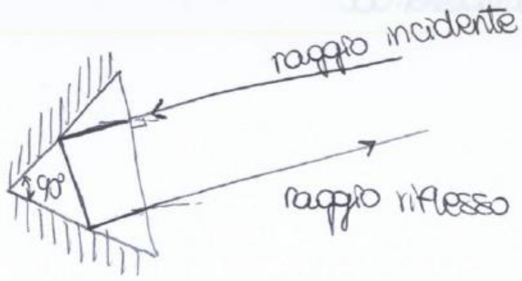
$$\boxed{\Delta t = nT + t_a - t_b}$$

n = numero di volte in cui l'onda ha effettuato un periodo (numero di λ)

T = periodo della frequenza fondamentale dell'onda quadra

t_a e t_b sono misurati tramite convertitori tempo-tensione

PRISMI

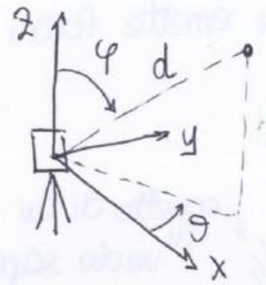


Lo scopo dei prismi e' quello di riflettere il raggio incidente parallelamente

raggio riflesso // raggio incidente

per farlo possono servire 1 o più prismi a seconda del tipo di EDM, distanza e visibilità

PRINCIPI di POSIZIONAMENTO LIDAR



Tecnica di telerilevamento che permette di determinare la distanza d.

Il fascio laser permette di determinare le direzioni φ e θ

Possiamo ricavare x y e z del punto P con

$$x = d \sin\varphi \cos\theta$$

$$y = d \sin\varphi \sin\theta$$

$$z = d \cos\varphi$$

RILIEVO CON STAZIONE TOTALE: si definiscono solo i punti necessari alla definizione dell'oggetto. E' una tecnica intelligente

RILIEVO LIDAR: si acquisisce una nuvola di punti senza operare alcuna scelta. I punti vengono acquisiti automaticamente.

Vogliamo quindi misurare la distanza d e le direzioni φ e θ per calcolare x y z di ogni punto.

MISURA delle DIREZIONI

- laser aerei: si misurano le coordinate del punto di applicazione (cioè del punto in cui e' posta la strumentazione) con GNSS.
  Si misurano gli assetti con piattaforma IMU.
- laser terrestri: si misurano le direzioni attraverso la rotazione di uno uno specchio emettitore e dello strumento stesso.

MISURA della DISTANZA

Si utilizzano impulsi laser.
La distanza di un oggetto e' determinata misurando l'intervallo di tempo tra l'onda emessa e l'onda ricevuta (cioè l'onda che e' stata riflessa dall'oggetto e che e' tornata indietro).

λ = lunghezza d'onda tale che mostra sensibilità ai fenomeni atmosferici

La misura della distanza e' effettuata tramite emissione di onde quadre di durata T.
Si misura l'intervallo di tempo Δt che intercorre tra l'emissione dell'onda e l'arrivo dell'onda riflessa.
La distanza e'

$$\boxed{2D = V\Delta t}$$ dove V = velocita' dell'onda

L'intervallo di tempo Δt e' pari a

$$\boxed{\Delta t = nT + t_a - t_b}$$

T = periodo dell'onda quadra
n = numero di onde quadre tra l'emissione e la ricezione
t_a e t_b sono tempi residui corrispondenti ai segnali di start e stop.
Essi vengono misurati con un condensatore caricato da corrente continua

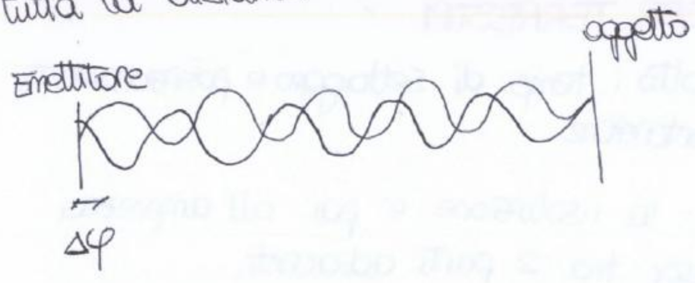
$$\boxed{t_a = \frac{V_a}{V}T} \qquad \boxed{t_b = \frac{V_b}{V}T}$$

V = tensione cui corrisponde l'impulso T

V_a, V_b = variazioni di tensione

LASER DISTANZIOMETRICI a MISURA di FASE

Misura lo sfasamento tra un'onda sinusoidale emessa e quella rientrante.
Bisogna considerare inoltre il numero di onde intere che si realizzano in tutta la distanza



Avremo che

$$\Delta S = C\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$ ← sfasamento / ← impulso

Vale la relazione

$$\frac{\lambda}{C} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Delta S = C\Delta t = C\frac{\Delta\varphi}{\omega} = C\Delta\varphi\frac{\lambda}{C}\frac{1}{2\pi} = \lambda\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

$$2D = \underbrace{n\lambda}_{\text{numero di onde intere}} + \Delta S = n\lambda + \lambda\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \longrightarrow \boxed{d = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}\frac{\Delta\varphi}{2\pi}}$$

SISTEMI LIDAR MOBILI

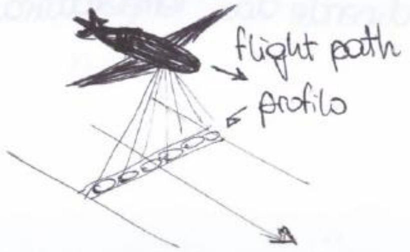
Vengono rilevati dei profili utilizzando strumentazione posta su velivoli

- Telemetro laser
- GPS + GPS master a terra
- IMU
- Apparati per la registrazione di dati
- Fotocamere digitali

Abbiamo bisogno di riferire la nuvola di punti misurata col laser ad un sistema di riferimento terrestre. Essa viene acquisita in un sistema strumentale. Per passarla ad un sistema terrestre è necessario sapere la posizione della strumentazione nel sistema terrestre e le distanze relative per tutti gli strumenti.

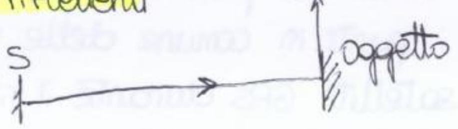
Il GPS o GNSS serve per determinare x y z degli strumenti

IMU serve per definire gli assetti



Possiamo avere 3 tipi di SUPERFICI

- Superfici riflettenti



La radiazione luminosa che colpisce un corpo è in parte:
- riflessa
- assorbita
- trasmessa

- Superfici lambertiane

Quella che noi misuriamo è quella riflessa nella direzione di incidenza.

- Superfici retroriflettenti

TECNICA del LASER SCANNING TERRESTRE

Acquisizione → Trattamento preliminare → Creazione del prodotto finale

Acquisizione ↓ Controllo in tempo reale

Trattamento preliminare ↓
1. Ricerca dei punti marker
2. Filtratura
3. Allineamento
4. Georeferenziazione
5. Triangolazione laser
6. Integrazione con immagini digitali
7. Segmentazione

Creazione del prodotto finale ↓
- Modello 3D a colori
- Immagine solida
- Ortofoto di precisione

TRATTAMENTO PRELIMINARE

1) RICERCA dei PUNTI PRESEGNALIZZATI (MARKER)

I marker sono elementi che hanno elevata riflettività. Si possono ritrovare nei dati acquisiti poiché la strumentazione mette a disposizione i valori di riflettività dei punti rilevati

↳ entità ad elevata risposta radiometrica

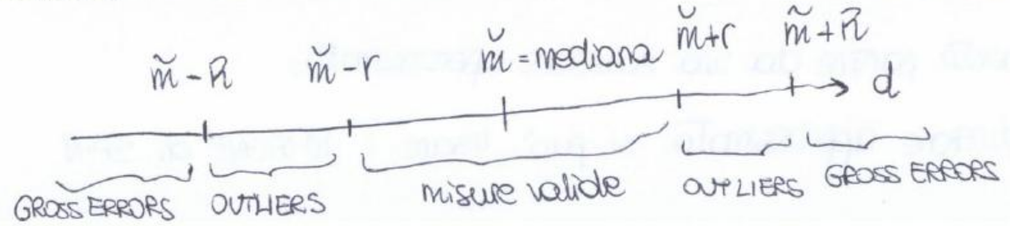
2) FILTRATURA

Le scansioni laser sono soggette a rumore e errori di acquisizione (outliers e gross errors) che è necessario eliminare con apposito filtro

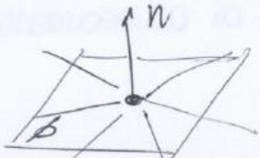
Il rumore è provocato dalla divergenza del raggio laser

Per eliminare gli OUTLIERS e i GROSS ERRORS si definiscono degli intervalli di modulo r e R (r<R) centrati sulla mediana m.

r ed R tengono conto della morfologia e del tipo di area cui si riferiscono le misure. La classificazione rispetto alla mediana permette anche di riconoscere errori di multipath.



Si considera una nuvola di punti. Preso un punto di questa nuvola se ne determina la normale locale.
In questo modo si e' definito un sistema di coordinate cilindriche



Si calcolano le coordinate cilindriche di una porzione di punti

La correlazione avviene tra l'immagine di spin del punto selezionato e tutte le immagini di spin generate sui punti della seconda scansione.
Il programma troverà il punto analogo.

Il problema e' la velocità di calcolo. Se la superficie e' molto regolare si dovrà considerare una porzione grande di immagine di spin

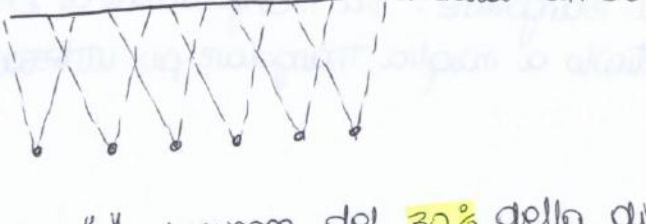
4) <u>GEOREFERENZIAZIONE</u>

Finora abbiamo correlato scansioni differenti di uno stesso oggetto, abbiamo filtrato i punti acquisiti. Ora abbiamo punti corretti e correlati nel sistema di riferimento dello strumento.
Vogliamo passare ad un sistema di riferimento terrestre.

Per farlo basta rilevare la posizione dei marker nel sistema di riferimento esterno. A questo punto note le coordinate si può effettuare la procedura analoga a quella dell'allineamento.
Otteniamo l'oggetto nel sistema di riferimento terrestre

5) <u>TRIANGOLAZIONE LASER</u>

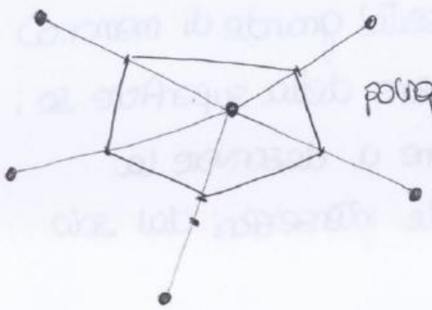
serve per rilevare fronti di edifici



Se la zona "a" e' minore del 30% della dimensione della facciata, si crea un errore sistematico di disallineamento tra i modelli.
Occorre posizionare in ogni scansione almeno un punto di coordinate note

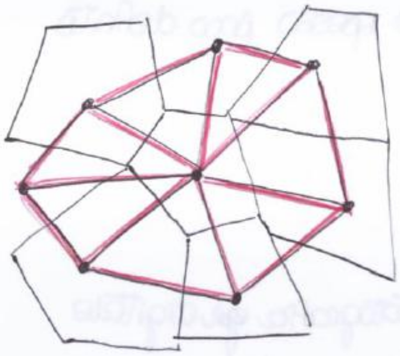
Attraverso metodi dinamici possiamo decidere se utilizzare o meno un punto per la costruzione di un piano, oppure se ignorarlo perche' non necessario.
Inoltre possiamo decidere il livello di accuratezza del modello cioe' il grado di dettaglio.
La superficie TIN e' riferita ad una 2,5D
Per passare ad una superficie 3D si passa alla triangolazione di Delaunay considerando dei tetraedri anziche' dei triangoli.

POLIGONO di VORONOI



TRIANGOLAZIONE di DELAUNAY

→ STATICA: il reticolo valida le regole solo alla fine
→ DINAMICA: il reticolo valida le regole ad ogni aggiunta di punti



Avendo una superficie di poligoni di Voronoi si collegano i punti centrali di ogni poligono e si ottiene una triangolazione di Delaunay

Nessun nodo del reticolo e' incluso dai cerchi che circoscrivono i triangoli del reticolo.
Il centro dei cerchi e' il centroide del poligono di voronoi

NURBS

Non Uniform Rational B-Splines

Non uniforme: e' utile quando si modellano superfici non regolari poiche' un vertice di controllo puo' essere piu' o meno importante a seconda del peso che gli si da'.

Razionale: la superficie e' espressa da una equazione che e' il rapporto tra 2 polinomi

B spline = curva interpolata tra 3 o piu' punti. Sono una serie di segmenti piccoli che definiscono una curva.

DSM MODELLO DIGITALE di SUPERFICIE

Modello digitale che contiene sia elementi antropici (edifici, strade, automobili) sia il terreno e la vegetazione

DTM MODELLO DIGITALE di TERRENO

Modello in cui sono rimossi gli elementi diversi dal suolo, in modo da ottenere il cosidetto "modello di suolo nudo"

Il laser riesce a raggiungere il suolo anche se e' coperto dalla vegetazione. si ottiene questa superficie attraverso la classificazione dei punti rilevati che hanno riflessività differenti a seconda del tipo di elemento di cui fanno parte.

Possiamo ottenere una ORTOFOTOCARTA

- generando un DTM modello digitale di terreno
- generando una ortofoto
- effettuando una mosaicatura di ortofoto

L'ortofoto è una fotografia aerea geometricamente corretta attraverso un processo di autorettifica. E' georeferenziata in modo che se si posiziona il puntatore mouse sulla ortofoto si ottengono X Y e Z nel sistema di riferimento terrestre. Le distanze misurate su una ortofoto sono distanze reali e corrette.

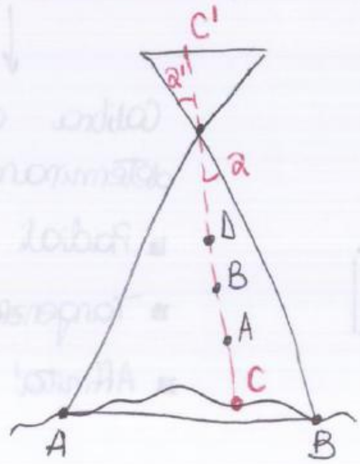
Per realizzare carte tradizionali numeriche ortofoto, DTM, GIS, modello tridimensionale, realtà virtuale abbiamo bisogno di 2 fotogrammi e poche misure sull'oggetto. Utilizziamo uno strumento chiamato RESTITUTORE

PROIEZIONE CENTRALE

La presa può essere schematizzata come una proiezione centrale dell'oggetto.

La misura sul fotogramma è una misura pseudo angolare corretta

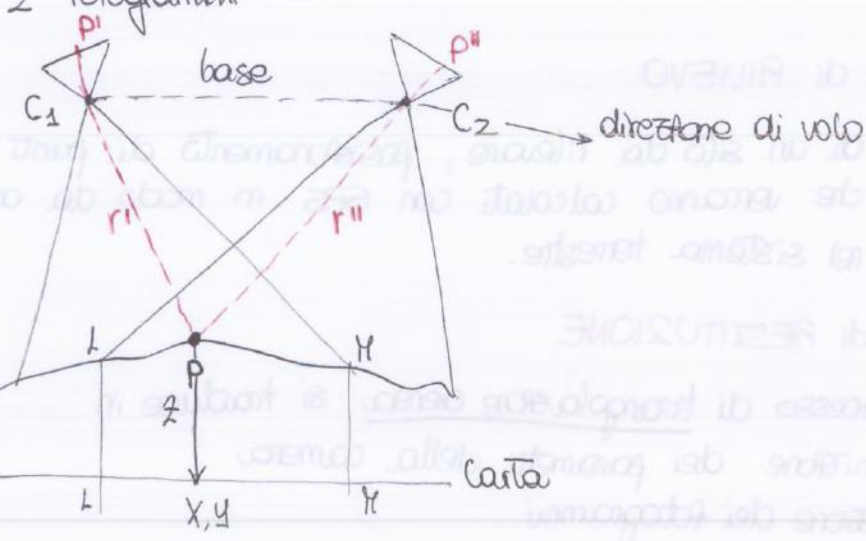
$a = a'$ se non vi sono aberrazioni



Non basta un unico fotogramma poiché qualunque punto A B C Δ ha come immagine C'.
Servono quindi almeno 2 fotogrammi

P' e P'' sono punti omologhi

r' e r'' sono raggi omologhi



3. TIPO di TERRENO
4. DIREZIONE di VOLO
5. QUOTA MEDIA di VOLO
6. RICOPRIMENTI
7. VELOCITA'
8. APPOGGIO GPS cinematico

LE ROTAZIONI SPAZIALI

ROTAZIONE PRIMARIA

$\boxed{\omega}$ rollio $\rightarrow$ $R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$

ROTAZIONE SECONDARIA

$\boxed{\phi}$ beccheggio $\rightarrow$ $R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$

ROTAZIONE TERZIARIA

$\boxed{k}$ sbandamento $\rightarrow$ $R_k = \begin{bmatrix} \cos k & -\sin k & 0 \\ \sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Possiamo effettuare rotazione spaziale eseguendo una dopo l'altra le 3 rotazioni.

N.B. = se si cambia l'ordine delle rotazioni la matrice finale e' costruita cambiando l'ordine delle matrici parziali

$$R_{k\phi\omega} = R_\omega R_\phi R_k = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos k & -\cos\phi\sin k & \sin\phi \\ \cos\omega\sin k + \sin\omega\sin\phi\cos k & c\omega ck - s\omega s\phi sk & -s\omega c\phi \\ s\omega sk - c\omega s\phi ck & s\omega ck + c\omega s\phi sk & c\omega c\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$