NUMERO: 1034

DATA: 15/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Boltri

MATERIA: Geometria

Prof. Malaspina

Boltri Eugenio

Geometria

prof Francesco Malaspina

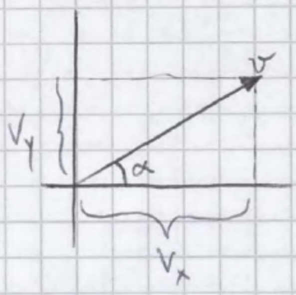
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 72

- Ogni elemento ammette opposto $\forall\, OP\ \exists\, OQ$ tale che $OP + OQ = \vec{0}$
- Somma di ELEMENTO NEUTRO $OP + \vec{0} = OP$

PROPRIETÀ del PRODOTTO per uno SCALARE

- ASSOCIATIVA $a(b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
- $\exists$ elemento neutro $1 \cdot u = u$
- DISTRIBUTIVA
  - $(a+b) \cdot v = av + bv$
  - $a(v+w) = av + aw$

COMPONENTI di un VETTORE (TEOREMA di SCOMPOSIZIONE).



Per trovare le componenti di un vettore basta che traccio le perpendicolari agli assi.

REGOLE TRIGONOMETRICHE

$$v_x = v \cdot \cos\theta$$
$$v_y = v \cdot \sin\theta$$
$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

Poiché formano un

Calcolo $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

(TEOREMA di PITAGORA).

VERSORI ASSOCIATI

Sono i vettori che hanno la stessa direzione e verso ma modulo 1. Si ottengono $\frac{v}{|v|}$

Grazie ai versori associati posso scomporre il vettore così $\boxed{v = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}}$

Facilitando le operazioni di somma e prodotto.

VETTORI PARALLELI

Due vettori v e w si dicono PARALLELI se hanno la stessa DIREZIONE e se si possono scrivere così $\boxed{v = t\,w}$ con $t \neq 0$.

Ragionando in componenti vale la regola $\boxed{V_x \cdot W_y = V_y \cdot W_x}$

Per convenzione, il vettore nullo $(\vec{0})$ è parallelo a qualsiasi vettore.

Osservazione

Notare che se $v \hat{} u > \pi/2$ posso usare la formula $v \cdot \left(u \cdot \frac{v}{|v|^2} \right)$ poiché $u \cdot v < 0$

PROPRIETÀ del PRODOTTO SCALARE

$\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall v, w, u \in V_2$

- $v \cdot w = w \cdot v$
- $(a v) \cdot w = a (v \cdot w) = v (a \cdot w)$
- $v (w + u) = v w + v u$.

Ragioniamo con le componenti dei vettori
$$\begin{cases} v = V_x \hat{i} + v_y \hat{j} \\ w = W_x \cdot \hat{i} + w_y \cdot \hat{j} \end{cases}$$

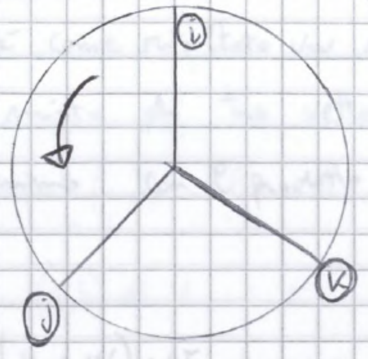
quindi il prodotto scalare diventa
$$V \cdot W = (V_x \cdot \hat{i} + V_y \hat{j}) + (W_x \hat{i} + W_y \hat{j}).$$
$$= V_x W_x \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} + V_x W_y \hat{i} \cdot \hat{j} + V_y \cdot W_x \hat{j} \cdot \hat{i} + V_y \cdot W_y \cdot \hat{j} \cdot \hat{j}$$

Definizione: Se u è un vettore (a caso) non nullo dello spazio e O_{xyz} è un sistema di riferimento, i coseni degli angoli che $\vec{u}$ forma con gli assi coordinati (vale a dire i versori fondamentali $\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}$) si dicono COSENI DIRETTORI di u.

quindi $i \cdot i \parallel \hat{j} \cdot \hat{j} \Rightarrow$ angolo $0° \to \cos 0 = 1$
mentre $\hat{i} \cdot \hat{j} \parallel j \cdot \hat{i} \Rightarrow$ angolo $90 \to \cos 90 = 0$

ottengo $\boxed{V \cdot W = V_x W_x + V_y W_y}$

Inoltre per trovare quale vettore viene a formarsi possiamo introdurre la regola dell'orologio



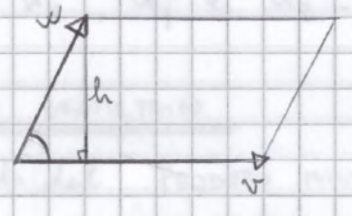
$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$$
$$\hat{j} \wedge \hat{k} = i$$
$$k \wedge i = j$$

Significato geometrico del modulo del prodotto vettoriale

I due vettori presi individuano un Parallelogramma, il modulo del prodotto Vettoriale individua l'Area.

$$\boxed{A = |v \wedge w|}$$

Infatti $|v \wedge w| = |v| \underbrace{|w| \, |\sin \widehat{vw}|}_{h \text{ (altezza)}}$ Per le regole base della TRIGONOMETRIA.



PROPRIETÀ del PRODOTTO VETTORIALE

- ANTICOMMUTATIVA $\quad v \wedge w = - w \wedge v$
- DISTRIBUTIVE $\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad e \quad \forall u, v, w \in V_3$

1 – $a (v \wedge w) = a v \wedge w = v \wedge a w$

2 – $v \wedge (w + u) = v \wedge w + v \wedge u$.

$\boxed{\text{N.B}}$ Non vale la PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $\quad v \wedge (w \wedge u) \neq (v \wedge w) \wedge u$

REGOLA di CALCOLO per il PRODOTTO VETTORIALE

$$\begin{cases} v = v_x i + v_y j + v_z k \\ w = w_x i + w_x j + w_x k \end{cases}$$

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \cdot k$$

Calcolo in diagonale e ottengo $= (v_y w_z - w_y v_z) i - (v_x w_z - w_x v_z) j + (v_x w_y - w_x v_y) k$

STRUTTURE ALGEBRICHE

Una struttura algebrica è un CAMPO (detto anche CORPO COMMUTATIVO).

Definizione: Sia K un insieme e in K siano definite due operazioni:

- SOMMA, che ad ogni coppia (a,b) di elementi di K associa un UNICO elemento di K denotato con $a+b$.
- PRODOTTO, che ad ogni coppia (a,b) di elementi di K associa un UNICO elemento di K denotato con $a \cdot$

Come possiamo notare sono operazioni BINARIE e INTERNE.

Allora K è detto campo se entrambe le due operazioni soddisfano queste proprietà.

PROPRIETÀ della SOMMA
- COMMUTATIVA $a+b = b+a$
- ASSOCIATIVA $(a+b)+c = a+(b+c)$
- $\exists$ elemento neutro tale che $a + 0_k = a$ con $\forall a \in K$
- ESISTENZA di un OPPOSTO tale che $a + a' = 0_k$ con $\forall a \in K$

PROPRIETÀ del PRODOTTO
- COMMUTATIVA $a \cdot b = b \cdot a$
- ASSOCIATIVA $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- $\exists$ elemento neutro tale che $a \cdot 1_k = a$ con $\forall a \in K$
- Esistenza di un INVERSO tale che $a \cdot a^{-1} = 1_k$ con $\forall a \in K$

Ultima proprietà che deve essere rispettata (mix delle precedenti) è la DISTRIBUTIVA, ovvero

$$a \cdot (b+c) = ab + ac$$

Le nove proprietà elencate sono dette anche Assiomi di campo.

SPAZIO VETTORIALE

Definizione: Siano dati un campo numerico K e un insieme V (composto da vettori).

Siano inoltre definite le seguenti operazioni sugli elementi di V:

- SOMMA, che ad ogni coppia di V associa un UNICO elemento di V (operaz. INTERNA). $(v+w)$.
- PRODOTTO per elementi di K, operaz. quindi ESTERNA, che ad ogni coppia (a, v) con $a \in K$ e $v \in V$ associa un unico elemento di V $(a \cdot v)$

Come fatto prima fissiamo un campo numerico **K** e chiamiamo $K^{m,n}$ l'insieme delle matrici a coefficienti in K. Allora (posto che rispetti le regole di prima) $K^{m,n}$ è uno SPAZIO VETTORIALE su K e svolge le operazioni in questo modo.

• SOMMA $\mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}^{m,n}$ (operaz. INTERNA, come prima).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

• PRODOTTO $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}^{m,n}$ (operazione esterna, come prima)

$$\lambda A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda_{m,n} \end{pmatrix}$$

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K.

Un sottoinsieme $W \subseteq V$ è detto SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V se e solo se valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall_{v_1, v_2} \in W$ la somma deve appartenere all'insieme $v_1 + v_2 \in W$
2. $\forall_\lambda \in K$, $\forall_v \in W$ allora $\lambda v \in W$
3. $0_v \in W$ (ovvero l'elemento neutro di V appartiene anche a W).

Osservazione: I sottospazi di V_3 sono $\{\vec{0}\}$ (detto IMPROPRIO), le rette per l'origine e i piani per l'origine (quest'ultimo quando ho 2 vettori non paralleli).

Osservazione: Siano U e W due sottospazi dello spazio vettoriale V su K. Allora sicuramente $Z = U \cap K$ è un sottospazio di V.

L'unione invece quasi mai da un sottospazio, solo nei casi che U e K siano nulli oppure uno sia incluso nell'altro (l'unione sarà il più grosso).

quindi diremo che w è combinazione lineare degli elementi $v_1 \dots v_n$.

N.B

Ovviamente $v_1, \dots v_n$ possono essere anche linearmente DIPENDENTI; questo significa che la combinazione lineare fa comunque 0, ma c'è almeno un coefficiente diverso da 0 $(a_i \neq 0)$.

Ciò inoltre vuol dire che posso scrivere almeno un vettore (v_1) come combinaz. lineare degli altri $(v_2 \dots v_n)$.

BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

<u>Definizione</u>: Sia V un K-spazio vettoriale. Un insieme $B = (v_1, v_2 \dots v_n)$ di elementi di V è detto BASE di V se valgono le seguenti proprietà:

1. B è ordinato
2. B è libero (se quindi $v_1, \dots v_n$ sono linearmente indipendenti).
3. B genera l'insieme V. (ovvero le COMB. LINEARI degli elementi di B creano V).

<u>Osservazione</u>: Un insieme ordinato B di elementi di V è una base di V se e solo se ogni elemento di V si può scrivere <u>in MODO UNICO</u> come combinazione lineare degli elementi di B. $(v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n)$
(quindi devono essere linearmente indipendenti).

- <u>COMPONENTI di UN VETTORE RISPETTO AD UNA DATA BASE</u>

Sia $B = (v_1, \dots, v_n)$ una Base di V e $v \in V$ allora le <u>componenti</u> di v rispetto alla base B sono i COEFFICIENTI $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tali che

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ PRESI NELL'ORDINE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 72

PROPOSIZIONE SULLA DIMENSIONE dei Sottospazi

Sia V uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un suo sottospazio. Se $\dim V = n$ allora

1. $\dim W \leq n$ (W è generato)
2. $\dim W = n$ se e solo se $W = V$.

PROPOSIZIONE SULLA DIMENSIONE E BASI di UNA SOMMA DIRETTA

Sia V uno spazio vettoriale e $W_1 \dots W_n$ suoi sottospazi. Supponiamo di avere una Base per ogni sottospazio. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:

1. La SOMMA $W_1 + \dots + W_n$ è DIRETTA.
2. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ è una BASE di $W_1 + W_2 + \dots + W_n$.
   (La somma delle Basi, genera una base per la somma dei sottospazi).
3. $\dim(W_1 + \dots + W_n) = \dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_n$.

In un caso più generico se la somma non è diretta possiamo affermare che

(Potrebbero infatti essere degli elementi in comune). $\dim(W_1 + \dots + W_n) \leq \dim W_1 + \dots + \dim W_n$

FORMULA di GRASSMANN.

Data quest'ultima formula più generica, possiamo affermare che, dati W, Z sottospazi di V allora

$$\boxed{\dim(W+Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z)}$$

che accomuna sia il caso generico, sia il caso in cui la somma sia DIRETTA ($W \cap Z = 0$)

RANGO di UNA MATRICE

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, allora $\boxed{\dim R_A = \dim C_A = \text{RANGO } \rho(A)}$

Per calcolare il rango basterà ridurre la matrice A e infine si contano le righe non nulle (ovvero linearmente indipendenti) per stabilire la $\dim R_A$, e quindi di conseguenza anche il rango della MATRICE.

TEOREMA (molto importante).

Sia $S = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} / A$ è simmetrica$\}$ (ovvero l'insieme di tutte le MATRICI quadrate SIMMETRICHE) e sia $W = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} / A$ è antisimmetrica$\}$, allora W e S sono due sottospazi di $\mathbb{R}^{n,n}$ e $\mathbb{R}^{n,n} = S \oplus W$ (SOMMA DIRETTA dei 2 sottospazi).

Spiegazione e utilità: Ogni matrice quadrata si può scrivere in MODO UNICO come somma di una MATRICE SIMMETRICA e una ASIMMETRICA.

MODO di SCOMPORRE UNA qualsiasi MATRICE quadrata

$$\boxed{A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}}$$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Definizione: Siano date due matrici $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ e $B = (b_{jk}) \in K^{n,p}$

Il PRODOTTO righe per colonne di A per B è la matrice,

$$\boxed{C = A \cdot B = (c_{ik}) \in K^{m,p}}$$

Ogni elemento c_{ik} si ottiene facendo il prodotto scalare tra la i-esima riga di A e la K-esima colonna di B.

ovvero $c_{ik} = (a_{i1} \cdot b_{1k}) + (a_{i2} \cdot b_{2k}) + (a_{i3} \cdot b_{3k}) \dots$

Osservazione: Si noti che il prodotto $A \cdot B$ è definito se e solo se il numero di colonne di A è PARI (uguale) al numero di RIGHE di B.

Attenzione: 1. Il prodotto NON è COMMUTATIVO.

2. Può succedere che il prodotto di matrici non nulle dia come risultato la MATRICE NULLA

PROPRIETÀ Siano A, B, C matrici con $a \in \mathbb{R}$.

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- ${}^t(AB) = {}^tA \cdot {}^tB$.
- $A(B + C) = AB + AC$
- $a(A \cdot B) = (aA)B = A(aB)$

SISTEMI LINEARI

Un'equazione del tipo $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$, dove $a_1 \dots a_n \in K$ e $x_1 \dots x_n$ sono incognit
si dice LINEARE. L'elemento b si dice TERMINE NOTO dell'equazione.

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite sul campo $\mathbb{R}$, è un'insieme di m equazioni lineari nelle stesse incognite $x_1, \dots x_n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Esempio
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 4x - 2y + 3z = 2 \\ 5x + y - z = 1 \end{cases}$$

Una soluzione è un n-upla (insieme di termini) che sia soluzione di tutte le equazioni contemporaneamente.

Il sistema si dice risolubile se ammette almeno una soluzione.

Possiamo riscrivere il sistema in forma di matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che si può scrivere nella forma più compatta $\boxed{AX = B}$

La matrice A si dice matrice dei coefficienti.
La matrice B è quella dei termini Noti.

Attenzione!)

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Questa è detta MATRICE COMPLETA.

TEOREMA di ROUCHE-CAPELLI.

Sia $AX = B$ un sistema lineare, sia $(A|B)$ la matrice completa, allora:

1) • Il sistema è risolubile $AX = B$ è risolubile se e solo se $\rho(A|B) = \rho(A)$
2) • Se è risolubile, ammette $\infty^{n-\rho}$ soluzioni.

n = numero di incognite $(x, y, z, k, \dots)$ presenti nel problema.

ρ = rango della matrice

(3) - Risolvendo il sistema si può trovare una BASE ponendo pari a 1 la prima incognita e pari a 0 tutte le altre, proseguendo poi a rotazione.
(Ovviamente faccio questa sostituzione nell'insieme finale delle soluzioni ottenute).

TEOREMA: Sia y_0 una soluzione di un sistema $AX = B$, allora ogni altra soluzione è della forma $y + y_0$. Dove y è soluzione del sist. omogeneo associato ($AX = 0$).

$\boxed{\text{N.B} \quad XA = B \iff {}^tA \cdot {}^tX = {}^tB}$

EQUAZIONI MATRICIALI

Sono equazioni caratterizzate dal fatto che anche la matrice dei termini noti è (come anche quella delle incognite) composta da VETTORI. È detto anche SISTEMA ad INCOGNITE VETTORIALI.

N.B Vale il teorema di ROUCHE-CAPELLI (generalizzato).

(1). $AX = B$ è risolubile se e solo se $\rho(A|B) = \rho(A)$.

(2). Se il sistema è risolubile (ovvero (1)) allora le soluzioni dipendono da $n - \rho$ RIGHE LIBERE (parliamo qui di righe xk anche le incognite sono VETTORI)

MATRICI INVERTIBILI (Vale solo per le matrici quadrate).

Definizione: Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice invertibile se esiste una matrice $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $A \cdot B = I_n$ (matrice identica). Se è così chiameremo $B = A^{-1}$ la MATRICE INVERSA di A.

Attenzione: Per trovare la matrice inversa A^{-1} devo risolvere l'eq. $AX = I$. Le X (vettori) che trovo andranno a creare A^{-1}.

PROPRIETÀ: (1) - L'inversa, se esiste, è UNICA.

(2) · $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

(3) · A è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$ (numero di incognite).

PRIMO TEOREMA di LAPLACE

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} \quad \text{(ragionam. x righe)}$$

oppure

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} \quad \text{(ragionam. x colonne)}$$

Dunque il determinante di A si ottiene moltiplicando ciascun elemento di una riga (o di una colonna) per il PROPRIO compl. algebrico, sommando poi i risultati.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \\ \text{oppure } \det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4. \end{array} \right\} \text{stesso risultato}$$

PROPRIETÀ Sia $A \in K^{n,n}$. Allora (Stiamo ragionando con matrici quadrate)

1) Se B è la matrice ottenuta da A scambiando due righe o 2 colonne (E_2) allora $\det B = -\det A$

2) Se B è la matrice ottenuta da A moltiplicando una riga o una colonna per $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$, allora $\det B = \lambda \det A$

3) Se B è una matrice ottenuta da A con una trasformazione sulle righe o sulle colonne di tipo E_1 (sommare una riga con un'altra moltiplicata per un $a \in \mathbb{R}$) allora $\det B = \det A$

4) $\det A = \det {}^tA$

5) Se A ha due righe o 2 colonne uguali, allora $\det A = 0$

6) TEOREMA di BINET $\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$

APPLICAZIONI LINEARI

Definizione: Siano V e W due spazi vettoriali su K e sia $f: V \to W$ un'applicazione (ovvero una legge che ad ogni elemento $v \in V$ associa solo un elemento di W).
Inoltre f (ovvero l'applicazione) si dice lineare se valgono queste proprietà:

① $f(v+u) = f(v) + f(u) \quad \forall u, v \in V$

② $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall \lambda \in K$ e $\forall v \in V$.

PROPRIETÀ

- $f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n)$ | x le 2 proprietà precedenti
- $f(0_V) = 0_W$

SOMMA e PRODOTTO (PER UN NUMERO) di APPLICAZIONI LINEARI

Condizioni di partenza: Siano $f: V \to W$ e $g: V \to W$ entrambe applicazioni lineari
allora anche $(f+g): V \to W$ è un'applicaz. lineare.

Condizioni di partenza: Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f: V \to W$ un'applicaz. lineare.
allora anche $\lambda f: V \to W$ è un'applicaz. lineare.

NUCLEO di UN'APPLICAZ. LINEARE

Dati V e W due spazi vettoriali su K e sia $f: V \to W$ un'applicaz. lineare, allora il NUCLEO dell'applicaz. è l'insieme così definito $\mathrm{Ker}\, f = \{ v \in V \,/\, f(v) = 0_W \}$
ovvero è l'insieme di tutti quegli elementi di V che hanno come immagine il vettore nullo di W.

Osservazione: Ker f è un sottospazio di V.

IMMAGINE di UN'APPLICAZ. LINEARE

Definizione: Sia $f: V \to W$ un'app. lineare, con V e W spazi vettoriali su K, allora l'immagine è l'insieme $\mathrm{Im}\, f = \{ w \in W \,/\, \exists\, v \in V$ con $f(v) = w \}$.

IMMAGINE E MATRICE ASSOCIATA (TEOREMA).

Sia $f: V \to W$ un'applicaz. lineare e sia $A = M_f^{E,F}$ la matrice associata ad f rispetto alle BASI E ed F. Allora:

1) Il sottospazio $\mathrm{Im} f$ è generato dai vettori di W aventi per componenti rispetto ad F le colonne di A.

2) $\mathrm{Im} f$ è ISOMORFO allo spazio delle colonne di A (biettivo).

3) $\dim \mathrm{Im} f = \rho(A)$.

Metodo per trovare una base di $\mathrm{Im} f$ (2 modi, ma citiamo solo quello comune).

- Si riduce per colonne la matrice A, le colonne NON nulle danno le componenti, rispetto ad F, di una base di $\mathrm{Im} f$.

Trucco: Se si vuole ridurre per righe, basterà cambiare A con ${}^tA$.

NUCLEO E MATRICE ASSOCIATA (TEOREMA)

Sia $f: V \to W$ un'applicaz. lineare e sia $A = M_f^{E,F}$ la matrice associata ad f rispetto alle basi E ed F. Sia inoltre $Z \subseteq \mathbf{K}^n$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$. Allora:

1) $\dim \mathrm{Ker} f = \dim V - \rho(A)$.

2) l'isomorfismo $\varphi: \mathbf{K}^n \to V$ definito da $(x_1 \dots x_n) \to x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ induce, per restrizione un ISOMORFISMO tra Z e $\mathrm{Ker} f$.

Metodo per trovare una base di $\mathrm{Ker} f$

- Si risolve il sistema omogeneo $M_f^{E,F} \cdot X = 0$
- Si trova una base dello spazio Z delle soluzioni del sist. omogeneo.
- Si costruisce una BASE per il $\mathrm{Ker} f$ (utilizzando spesso le basi canoniche).

Corollario: Sia $f: V \to W$ un'applicaz. lineare tra spazi vettoriali e $\dim V = \dim W$.
Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
(1) f è un ISOMORFISMO (2) f è INIETTIVA (3) f è SURIETTIVA.

Logicamente se f è ISOMORFISMO allora esiste $f^{-1}: W \to V$.

Nomenclatura: Se $f: V \to V$ è un ISOMORFISMO, si dirà AUTOMORFISMO.

CAMBIAMENTO di BASE

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e siano E e F due basi di V.
Scrivo i membri della base F in funzione della base E.

$$\begin{cases} f_1 = p_{11} e_1 + \dots + p_{n1} e_n \\ \vdots \\ f_n = p_{1n} e_n + \dots + p_{n,n} e_n \end{cases}$$

La matrice P che ottengo è composta dalle componenti degli elementi di F rispetto alla base E, disposti sulle colonne.

Questa matrice è anche detta MATRICE di PASSAGGIO da E ad F. $\left(P_{F,E}\right)$
Mentre la matrice $P^{-1}_{E,F}$ è la matrice di passaggio da F ad E → TEOREMA sulle MATRICI di PASSAGGIO

Interpretazione PRATICA $(f_1 \dots f_n) = (e_1 \dots e_n) P \iff \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$

Facendolo diventare in questo modo un sistema lineare. (N.B)

Possiamo interpretare la matrice di passaggio nel seguente modo:
(1) $\varphi: V \to V$ (endomorfismo) a.l. tale che $\varphi(e_i) = f_i$, quindi $P = M_\varphi^{E,E}$, ovvero la matrice ASSOCIATA.

TEOREMA del CAMBIAMENTO di BASE

Sia $f: V \to W$, siano E, E' basi di V, siano F, F' basi di W.
Inoltre sia P matrice di passaggio da E a E', mentre Q da F a F'.
Poniamo $A = M_f^{E,F}$ e $A' = M_f^{E',F'}$ allora $\boxed{A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P}$

Lo scalare ZERO è un autovalore di f se e solo se $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0_V\}$, ovvero ciò implica che f non è iniettiva. Inoltre l'autospazio V_0 (cioè associato all'autovalore zero) coincide con il $\mathrm{Ker}\, f$.

INDIPENDENZA LINEARE degli AUTOVETTORI (TEOREMA)

Siano $\lambda_1 \dots \lambda_m$ autovalori DISTINTI di un endomorfismo $f: V \to V$ e siano $v_1 \dots v_m$ autovettori associati; allora $v_1 \dots v_m$ sono tra di loro linearmente INDIPENDEN[TI]. Inoltre la somma tra i relativi autospazi associati è DIRETTA.

Osservazione (MOLTO IMPORTANTE).

Un numero λ è un autovalore per l'endomorfismo $f: V \to V$ se e solo se

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

dove $A = M_f^{E,E}$ matrice associata a f rispetto a una base di V (uguale in partenza e arrivo). Tale determinante è un polinomio di grado $n = \dim V$ nell'incognita λ e viene detto POLINOMIO CARATTERISTICO.

Le radici (ovvero i risultati) che si ottengono saranno AUTOVALORI di f.

Particolarità: Se A è una matrice triangolare, anche la matrice derivata dal polinomio sarà triangolare, perciò notiamo che gli AUTOVALORI sono gli ELEMENTI posti sulla diagonale di A.

Metodo per trovare gli autovalori di f:

- Si trova la matrice associata a f rispetto a qualsiasi BASE (Infatti matrice costruita su due basi diverse darà comunque lo stesso POLINOMIO).
- Si calcola il POLINOMIO caratteristico (ovvero il det. della matrice $A - \lambda I$).
- Le radici ottenute sono gli AUTOVALORI.

Corollario: Se V è un sottospazio vettoriale sul campo K e $f: V \to V$ è un endomorfismo con n autovalori DISTINTI tutti appartenenti a $\mathbb{K}$, allora f è SEMPLICE.

MATRICE DIAGONALIZZABILE (Definizione).

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (cioè QUADRATA) si dice "diagonalizzabile" se è simile a una matrice diagonale, ovvero se esiste una matrice quadrata INVERTIBILE P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice DIAGONALE.

TEOREMA (sulla DIAGONALIZZAZIONE).

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, una matrice quadrata. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $f: V \to V$ applicaz. lineare, associata a A tramite la base E di V, allora:

1) A è diagonalizzabile se e solo se f è SEMPLICE.

2) Se F è una base di V formata da autovettori e P è la matrice di passaggio tra E ed F, allora la matrice diagonale è $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (come detto prima)

Attenzione: Sulla diagonale di D compaiono gli AUTOVALORI di A, ciascuno con la propria molteplicità.

N.B REGOLA PRATICA per la DIAGONALIZZAZIONE

Voglio capire se una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è diagonalizzabile:

- CALCOLO le RADICI del POLINOMIO CARATTERISTICO. $(A - \lambda I) = 0$
- Controllo che $\forall i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Se $m_{\lambda_i} > 1$ verifico che $\dim V_{\lambda_i} = n - \rho(A - \lambda_i I) = m_{\lambda_i}$
- Costruisco infine P mettendo sulle colonne gli autovettori, cioè le BASI degli AUTOSPAZI.

PROPOSIZIONE

$f: V \to V$ endomorfismo. λ autovalore e V_λ il suo autospazio. Allora λ^2 è autovalore di $f^2 = f \circ f$ e $W_{\lambda^2} \supseteq V_\lambda$.

Osservazione: Sia $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ con autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -1$, gli autovalori di A^3 sono $\lambda_1 = 1^3$, $\lambda_2 = 0^3$, $\lambda_3 = 2^3$ e $\lambda_4 = (-1)^3$.

MATRICE ORTOGONALE

Definizione: Una matrice quadrata P si dice ortogonale se P è invertibile e se risulta che $P^{-1} = {}^tP$. Il suo determinante è sempre uguale a ± 1. ⊛

Vale anche di conseguenza questa relazione ${}^tP \cdot P = I_n$.

TEOREMA (matrici ortogonali e cambio base).

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con E, F basi ortonormali. Sia P la matrice di passaggio da E a F, allora P è ORTOGONALE.

Corollario: Sia $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ allora questi enunciati sono equivalenti

- P è ortogonale
- Le COLONNE di P formano una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$
- Le RIGHE di P formano una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$.

} Condizione FONDAMENTALE

Definizione ⊛: Se $\det P = 1$ allora P è una MATRICE ORTOGONALE SPECIALE.

Attenzione: Talvolta è possibile trovare matrici con $\det = 1$, ma ciò non garantisce la ortogonalità, infatti bisogna anche controllare che il prodotto scalare a 2 a 2 vettori faccia ZERO (infatti $v \cdot w = 0 \rightarrow \perp$)

ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI

Definizione: Sia V un K-spazio vettoriale con prodotto scalare. Un endomorfismo $f: V \to V$ si dice AUTOAGGIUNTO se $\forall v, w \in V$ allora $\boxed{f(v) \cdot w = v \cdot f(w)}$

Data una Base $E = (e_1 \dots e_n)$ di V, f si dice autoaggiunta se e solo se $\forall_{i,j}$ vale $\boxed{f(e_i) \cdot e_j = e_i \cdot f(e_j)}$

N.B. questo è assolutamente logico xK ricordiamo che la base potrà creare attraverso le comb lineari tutto lo spazio V.

CAMBIAMENTO LINEARE di VARIABILI

Siano $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Effettuare un cambiamento lineare di variabili significa che tra i vettori di X e quelli di Y vi è una relazione del tipo $X = PY$, dove P è una matrice $\in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile (quindi vale anche la relazione $Y = P^{-1}X$).

Osservazione: Data quindi la situazione precedente con $f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$, allora se effettuiamo il cambiamento di variabili avremo che $f(X) = f(PY) = {}^t(PY)\, A \cdot (PY)$

Date le regole sulle trasposte possiamo scrivere ${}^tP \cdot {}^tY \cdot A \cdot (PY)$. Questa sarà la stessa forma quadratica, che avrà come matrice associata $({}^tP \cdot A \cdot P)$.

Per definizione due forme quadratiche che si possono ottenere una dall'altra con un cambiamento lineare di variabili si dicono EQUIVALENTI.

$\boxed{\text{N.B}}$ Due forme quadratiche equivalenti hanno lo stesso segno e lo stesso rango.

SEGNO di UNA FORMA QUADRATICA

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica tale che $f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$.

Una forma quadratica si dice

- DEFINITA POSITIVA se $f(X) > 0$ per ogni $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$
- SEMIDEFINITA POSITIVA se $f(X) \geq 0$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$
- DEFINITA NEGATIVA se $f(X) < 0$ per ogni $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.
- SEMIDEFINITA NEGATIVA se $f(X) \leq 0$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$
- NON DEFINITA negli altri casi.

FORMA CANONICA di UNA FORMA QUADRATICA

Definizione: Una forma quadratica è in forma canonica se in essa compaiono solo i termini al quadrato del polinomio, ovvero se e solo se la matrice associata è DIAGONALE.

EQUAZIONE PARAMETRICA

Esiste UNA SOLA RETTA passante per un punto $P_0(x_0, y_0)$ e parallela ad un vettore $v = l\,i + m\,j$. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, i punti della retta si ottengono con la formula $\boxed{P = P_0 + t v}$

Questa equazione è detta EQUAZIONE VETTORIALE PARAMETRICA della retta, passante per P_0 e parallela a v.

I punti sono coppie di numeri.

Esplicitando le componenti otteniamo $(x - x_0, y - y_0) = t\,(l, m)$ e mettendo a sistema

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

EQUAZ. PARAMETRICA SVILUPPATA

Definizione: (l, m) si chiamano parametri DIRETTORI della retta.

RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI

Se abbiamo una retta passante per 2 punti, allora la sua equazione cartesiana sarà data da

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

N.B. Dove x, y sono le incognite. Mentre (x_1, y_1) e (x_0, y_0) sono i valori dati dei 2 punti.

Metodo per calcolare le intersezioni tra rette $(r_1 \cap r_2)$

Se abbiamo l'equazione in forma cartesiana, risolvo il sistema in t_1 e t_2 e sostituisco i valori trovati o in r_1 o in r_2.

$$r_1 \begin{cases} x = x_0 + l t_1 \\ y = y_0 + m t_1 \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} x = x_0' + l' t_2 \\ y = y_0' + m' t_2 \end{cases}$$

$$r_1 \cap r_2 = \begin{cases} x_0 + l t_1 = x_0' + l' t_2 \\ y_0 + m t_1 = y_0' + m' t_2 \end{cases}$$

Oppure mi basta fare un normalissimo sistema (se ho l'equazioni).

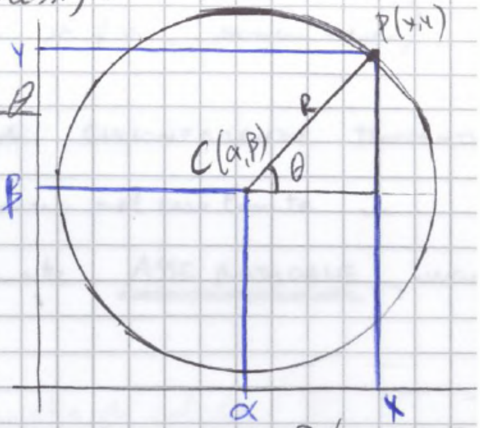
Nomenclatura: La circonferenza è detta

- A PUNTI REALI con $R > 0$.
- DEGENERE con $R = 0$. (xk si riduce ad un solo punto)
- IMMAGINARIA con $R < 0$ (utilizzo dei numeri complessi).

- Trovare un punto (x, y) sulla circonferenza sapendo l'angolo θ

$$\begin{cases} x = \alpha + R\cos\theta \\ y = \beta + R\sin\theta \end{cases}$$

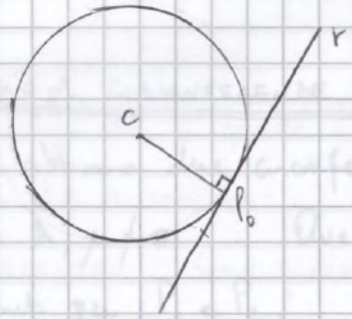
Vedi disegno →



RETTA TANGENTE alla CIRCONFERENZA

Abbiamo una circonferenza di centro $C = (\alpha, \beta)$ con raggio R e con $P_0(x_0, y_0)$ appartenente alla circonferenza.

Data questa premessa, allora ESISTE UNA SOLA RETTA TANGENTE passante per P_0 e questa retta sarà perpendicolare alla retta $\overline{CP_0}$.



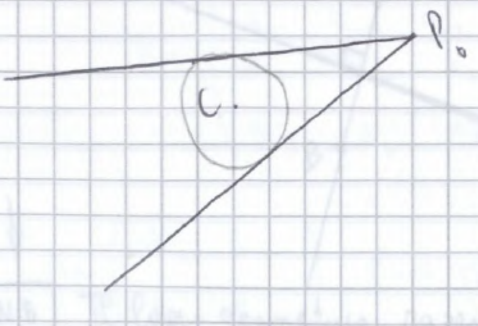
Troviamo il segmento $CP = (\alpha - x_0, \beta - y_0)$

RETTA TANGENTE (FORMA CARTESIANA)

$$\boxed{r: (\alpha - x_0)(x - x_0) + (\beta - y_0)(y - y_0) = 0}$$

Osservazione = Distanza della retta tangente dal centro è uguale al raggio.

Osservazione = Se il punto P_0 è esterno alla circonferenza allora ci saranno due rette tangenti alla circonferenza.



CIRCONFERENZA per tre PUNTI

Se abbiamo tre punti non allineati, allora esiste UNA SOLA circonferenza passante per essi.

FORMULA

Valori di P_0, P_1, P_2

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_0^2 & y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sono incognite.

N.B. Estrapoliamo un pezzo del calcolo

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Questa sottomatrice ci permette di calcolare il coefficiente di (x^2+y^2). E dovrà per forza essere diverso da 0 altrimenti non abbiamo una CIRCONFERENZA

CONICHE

Definizione generale: Tutti i luoghi di punti che si possono rappresentare nel piano attraverso equazioni di II grado (a coefficienti reali) sono detti "CONICHE".

Due tipi di coniche:

1. DEGENERI, sono quelle ottenute dal prodotto di due eq. di I grado.
2. NON DEGENERI, sono ELLISSE, IPERBOLE e PARABOLA.

CONICA $f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

Inoltre le due matrici simmetriche

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$ MATRICE ASSOCIATA a f

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$ è la MATRICE dei termini di II grado. $\Rightarrow \left[a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2\right]$ ovvero $(x,y)\cdot A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ FORMA QUADRATICA.

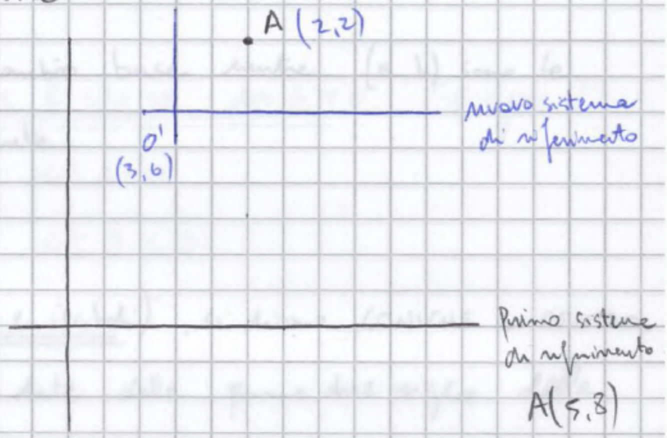
• Cambiamenti di riferimento nel piano (importante).

• TRASLAZIONE

Se A è un punto di coordinate (x,y) nel sist. iniziale e coordinate (x',y') rispetto a quello traslato, allora abbiamo questa relazione

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

con (a,b) sono le coordinate dell' Origine O' del nuovo sist. di riferimento



• ROTAZIONE

Per ottenere una rotazione abbiamo bisogno di una MATRICE ORTOGONALE SPECIALE P (ovvero con det = 1), inoltre deve essere una MATRICE 2x2.

Se non è ortogonale allora NON si può parlare di rotazione.

N.B Per trovare quindi la relazione fra le coordinate (x,y) e (X,Y) nei 2 sistemi di riferimento avremo

$$\boxed{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \quad \boxed{\text{oppure } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$$

Struttura formale di P

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

dove α rappresenta l'angolo di ROTAZIONE per sovrapporre i 2 sistemi

N.B

con $\det(P) = 1$ ROTAZIONE ANTIORARIA

con $\det(P) = -1$ ROTAZIONE ORARIA.

• ROTOTRASLAZIONE

Abbiamo questa relazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

Con P matrice ort. speciale di cambio base, e (a,b) le coordinate del centro del secondo sistema

Ricordando quanto detto prima, una conica è degenere se e solo se $\det B = 0$.
Se è degenere abbiamo queste possibilità:

- la conica è l'unione di 2 RETTE distinte (solo però con $\rho(B) = 2$). (*)
- la conica è l'unione di 2 rette reali COINCIDENTI (solo con $\rho(B) = 1$).

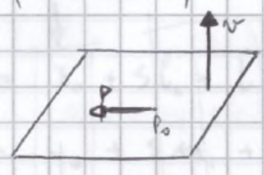
(*) Inoltre con $\rho(B) = 2$

- le due rette sono (complesse coniugate) con un punto in comune se e solo se $\det A > 0$ Spiegat??
- nessun punto in comune se e solo se $\det A = 0$
- le 2 rette sono reali e incidenti con $\det A < 0$

PIANI NELLO SPAZIO

Un piano $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ può essere individuato nei seguenti modi

① $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ e $v = (a, b, c) \in V_3 - \{0\}$ che sia $\perp$ a π.

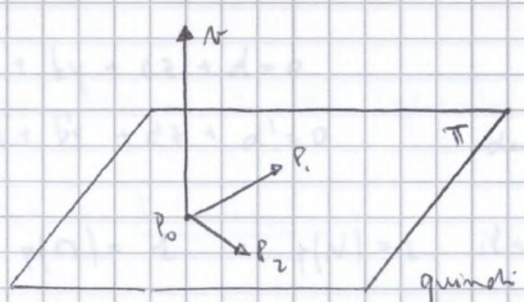


$P = (x, y, z) \in \pi$

Se $P - P_0 \perp v$ allora $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)(a, b, c) = 0$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

quindi $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ EQUAZIONE CARTESIANA del PIANO.

② 

P_0, P_1, P_2 punti non allineati

allora $(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0) = v \perp \pi$

quindi π passa per P_0 ed è $\perp$ a $(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0)$

Quindi per le proprietà del prodotto misto
(se 3 vettori sono complanari allora sarà nullo)

$$\pi : (P - P_0) \cdot [(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0)] = 0$$

avremo $\rightarrow$

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} =$$

FASCIO di PIANI

Definizione: Sia r una retta nello spazio. Il fascio di piani per r è l'insieme di tutti i piani dello spazio passanti per la retta r.

Poiché r è individuata da un'intersezione di piani non paralleli tutti i piani avranno eq. del tipo

$$\boxed{\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0}$$ con λ e $\mu \neq 0$.

Proprietà sulle RETTE

- Due rette appartengono allo stesso piano se sono INCIDENTI o parallele.
- Se due rette non sono complanari allora si dicono SGHEMBE, inoltre esiste UNA SOLA RETTA che è ORTOGONALE e INCIDENTE con entrambe.

DISTANZA tra un punto e il PIANO

Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto dello spazio.

$\pi: ax+by+cz+d$ un piano qualsiasi.

N.B.

La distanza del punto dal piano è pari alla sua PROIEZIONE ORTOGONALE sul piano

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Nel caso avessimo 2 rette sghembe parliamo di DISTANZA MINIMA

Data $r: \underline{P = P_0 + tv}$ e $s: \underline{Q = Q + t'w}$

Esisterà solo una retta (n) ortogonale a entrambe. I 2 punti di intersezione P_K e Q_H hanno distanza minima. Poiché la retta n è ortogonale ad entrambe, essa sarà parallela al vettore $(v \wedge w)$. Quindi formula.

$$d(r,s) = \frac{|(Q_0-P_0)\cdot(v \wedge w)|}{|v \wedge w|}$$

SFERA per 4 PUNTI NON COMPLANARI

Esiste sempre una sfera passante per 4 punti non complanari

$$S: \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2 & x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Intersezione tra un piano e una sfera

Dato $\pi: ax+by+cz+d=0$ $\qquad S: (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

Consideriamo la loro intersezione dal sistema $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \end{cases}$ abbiamo 3 casi

1) $d(C,\pi)<R$ Sfera è tagliata in 2 dal piano. Questo genera una nuova circonferenza di raggio r. $\left(r=\sqrt{R^2-D^2}\right)$

2) $d(C,\pi)=R$ In questo caso si dice che il piano π è tangente alla sfera in P_0 e ogni retta passante per P_0 è tangente alla sfera.

Dati C e P_0 il piano sarà $\rightarrow$ $\boxed{(x_0-\alpha)(x-x_0)+(y_0-\beta)(y-y_0)+(z_0-\gamma)(z-z_0)=0}$

EQUAZIONE del PIANO TANGENTE

3) $d(C,\pi)>R$ non abbiamo intersezione.
Questo teoricamente genera una circonf. immaginaria.

$$0 = x\cdot x_0+y\cdot y_0+z\cdot z_0+\frac{a(x-x_0)}{2}+\frac{b(y-y_0)}{2}+\frac{c(z-z_0)}{2}+$$

FASCI di SFERE

Date 2 sfere, la loro intersezione può risultare

1) Vuota (nessun punto in comune)

2) un Punto (sfere tangenti) ⊛ ↓

3) Una circonferenza (sfere secanti)

TOPOLOGIA di $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^n$ indichiamo con $\bar{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Considero il PRODOTTO SCALARE EUCLIDEO $\quad \bar{x}\bar{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

In questo spazio vettoriale è definita anche una norma $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

e una distanza $\quad d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$

INTORNO di $\bar{x}_0$

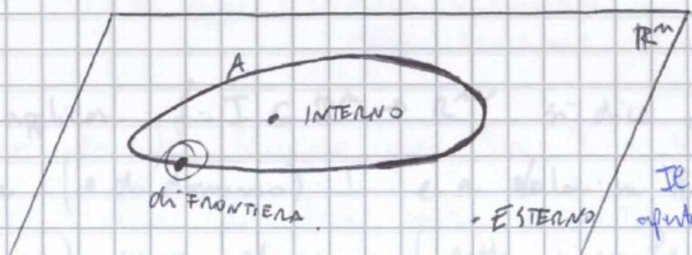
Sia $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice intorno di $\bar{x}_0$ di raggio $r > 0$ $\quad B_r(\bar{x}_0) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n / \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r \}$

Si chiama invece INTORNO CHIUSO di $\bar{x}_0$ di raggio $r > 0$ $\quad \overline{B_r(\bar{x}_0)} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n / \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r \}$

Significato: Si tratta sostanzialmente di sfere n-dimensionali piene (cioè comprendenti tutti i punti dell'interno), le quali posso avere o non avere il BORDO.

Definizione: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\bar{x} \in A$

- $\bar{x}$ si dice INTERNO se esiste almeno un INTORNO che è contenuto in A.
- $\bar{x}$ si dice ESTERNO se è interno a $\mathbb{R}^n - A$.
- $\bar{x}$ si dice di FRONTIERA se non è né interno né esterno.



L'unione tra 2 Aperti è ancora un insieme aperto (vale anche per i chiusi)

Il complementare di un insieme A aperto è un chiuso

L'unione tra un aperto e un chiuso NON dà NIENTE se i 2 insiemi sono separati

Nomenclatura

$\mathring{A} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{x}$ è un INTERNO di $A \}$ è detto INSIEME degli INTERNI di A.

$\partial A = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{x}$ è di FRONTIERA per $A \}$ è detto FRONTIERA di A.

$\mathring{A} \cup \partial A$ si dice CHIUSURA di A e si indica con $\bar{A}$.

Un insieme si dice APERTO se $A = \mathring{A}$ // Si dice chiuso se $A = \bar{A}$.

Proprietà: La composizione di funzioni continue è continua.

Osservazione: f è continua in $\bar{x}_0$ se e solo se $\boxed{\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)}$

N.B. In 2D c'è solo un modo per avvicinarsi a x_0, ma se siamo in 3D (o più) ci sono ∞ modi per avvicinarsi a $\bar{x}_0$.

PROCEDURA

Solitamente si applicano molte condizioni. Inizialmente si pone $y = kx$, cioè si vede a cosa tendono tutte le rette. Poi si pone $y = kx^2$ ovvero per tutte le parabole. (di solito basta così). Così se il limite è sempre uguale ESISTE, altrimenti NO.

PROCEDURA 2 Si possono usare anche le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases}$$

Inoltre vale questa regola

$$\boxed{\left| f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) - \ell \right| \le g(\rho)}$$

Ovvero basta trovare una funzione maggiorata che abbia il limite desiderato. Se esiste anche la nostra funz. ha quel limite.

⊛ N.B. L'esistenza del gradiente non implica la continuità della funzione (contrario rispetto Analisi I).

- Derivate Parziali

Basterà derivare normalmente tenendo una tra x e y come effettiva variabile, mentre l'altra diventerà una COSTANTE.

Molto importante è il vettore "GRADIENTE" composto così $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$.

Le componenti saranno poi le eq. trovate dopo aver derivato. Basterà a questo punto sostituire la coppia (x, y) desiderata per ottenere il valore del gradiente in quel punto.

Osservazione Geometrica, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sono i COEFFICIENTI angolari delle rette tangenti al grafico nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Parallele ai piani xz e yz. ⊛

e vale questa relazione $\boxed{\frac{df}{dv}(x_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot v}$

Ciò implica che se $\nabla f(\bar{x}_0)$ è nullo allora tutte le DERIVATE direzionali nel punto x_0 saranno nulle, di conseguenza la derivata direzionale in un PUNTO Stazionario è nulla.

• DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARZ $\quad |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$

Applicandola alla formula di prima vediamo che.

$$|\nabla f(\bar{x}_0) \cdot v| \leq |\nabla f(\bar{x}_0)| \cdot |v|$$

N.B

Osserviamo che le derivate direzionali in $\bar{x}_0$ non superano mai, in valore assoluto, il modulo del gradiente di f in x_0.

Inoltre $\boxed{v = \frac{\nabla f(\bar{x}_0)}{|\nabla f(\bar{x}_0)|}}$ VERSORE tale per cui le deri. diret. è MASSIMA

Osservazione: Se il gradiente di f è NON nullo in $\bar{x}_0$ allora la massima CRESCITA di f (a partire da $\bar{x}_0$) avviene nella DIREZIONE del gradiente, mentre la massima DECRESCITA nella direzione OPPOSTA.

DERIVATE di ORDINE SUPERIORE

Abbiamo 2 tipi di derivate seconde.

• PURA cioè per esempio $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}_0)$.

• MISTA, cioè $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}_0)$

Attenzione !! NON è detto che $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(\bar{x}_0)$ coincida con $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(\bar{x}_0)$.

TEOREMA di SCHWARZ

Se 2 derivate miste ESISTONO e SONO CONTINUE in un INTORNO di $\bar{x}_0$ allora in tale punto COINCIDONO.

Per vedere se un punto è un MAX o un MIN, bisogna fare le derivate parziali e porre il gradiente uguale a zero. I punti trovati (controllare che facciano parte del dominio) devono essere utilizzati per costruire la matrice Hessiana.

Se $Hf(x_0)$ è DEFINITA POSITIVA allora $\bar{x}_0$ è un MINIMO relativo.
Se $Hf(x_0)$ è DEFINITA NEGATIVA allora $\bar{x}_0$ è un MAX relativo.
Se $Hf(x_0)$ NON È definita allora $\bar{x}_0$ è un PUNTO di SELLA.
Se $Hf(x_0)$ è SEMIdefinita allora NON HO ABBASTANZA INFO.

Equivalentemente.

Se $\det Hf(x_0) > 0$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} > 0 & \text{allora } \bar{x}_0 \text{ è un MINIMO} \\ \dfrac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x^2} < 0 & \text{allora } \bar{x}_0 \text{ è un massimo.} \end{cases}$

VALIDA solo per matrici 2X2

Se $\det Hf(\bar{x}_0) < 0$ allora x_0 è un punto di SELLA.
Se $\det Hf(x_0) = 0$ allora NON HO ABBASTANZA INFO.

- MATRICE JACOBIANA

Come la matrice Hessiana raccoglieva le derivate seconde, la matrice Jacobiana raccoglie le derivate prime parziali.

Definizione: Possiamo definire $df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m,n}$ la FUNZIONE JACOBIANA.
$\bar{x} \to Jf(x)$

Inoltre si può definire l'applicazione lineare
$df(\bar{x}_0) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ questa viene detta DIFFERENZIALE di f in $\bar{x}_0$

Come avevamo visto in precedenza è possibile la la composizione di funzioni facendo il PRODOTTO RIGHE per COLONNE tra matrici.

- RETTA e VERSORE TANGENTE: Data γ una curva regolare. Dato P_0 e alla curva.

Definiamo il versore tangente come $v = \dfrac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$

Cioè prenderemo la funzione e la deriviamo e poi costruiamo la formula del versore, mettendo infine le coordinate del punto.

Di conseguenza la retta tangente è la retta PARALLELA al vettore trovato, e inoltre passante per P_0.

- LUNGHEZZA di una curva

Dovremo fare l'integrale del modulo della derivata prima, calcolata in 2 punti scelti (integrale definito)

$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt}$$

Osservazione: Curve congruenti hanno la STESSA LUNGHEZZA, ciò è vero anche cambiando le parametrizzazioni delle curve.

CURVE PIANE

Una curva si dice piana se esiste un piano che contiene tutti i suoi punti.

Abbiamo 3 metodi per vedere se è piana:

1. Trovo 3 punti non allineati e alla curva. Scrivo l'eq. del piano per P_1, P_2, P_3 e controllo se ogni punto di γ sta nel piano.

2. Prendo un generico piano $ax + by + cz + d = 0$ e verifico se $\exists\, a, b, c, d$ NON tutti nulli tali che $\forall t \in$ dominio di γ allora $\gamma(I) \in \pi$.

   Ovvero $a\,x(t) + b(y(t)) + c\,z(t) + d = 0$.

3. Vedi in seguito dopo PIANO osculatore.

Osservazione: Se γ è una curva data da POLINOMI di grado ≤ 2 allora è SICURAMENTE PIANA.

Osservazione: Se γ è piana ed è contenuta in π allora ogni retta tangente è anch'essa in π.

Osservazione: Se γ è una curva regolare, il piano passante per P_0 $\perp$ al versore tangente è detto piano NORMALE a γ in P_0. Inoltre se γ è piana ed è contenuta in π allora il piano normale è sempre $\perp$ a π.

CURVE BIREGOLARI

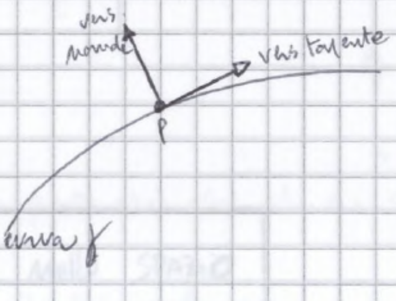
γ si dice Biregolare se è regolare e se vale la seguente proprietà:

1) $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI (ovvero $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \neq 0$).

Poiché per essere regolare $\gamma'(t) \neq 0$ si ha anche che $\gamma''(t) \neq 0$ e NON devono essere MAI PARALLELI (altrimenti il prodotto vettoriale è nullo).

· VERSORE NORMALE, questo vettore si ricava dal versore tangente.

Infatti data la funzione, ricavo il versore tangente. Dovrò poi derivare il versore tangente (che sarà in funzione di t) e farne la NORMA. Ottengo così il versore normale.



N.B. Per verificare di aver fatto correttamente i calcoli il vers. tangente moltiplicato per quello normale deve dare ZERO.

VERSORE BINORMALE

È quel versore dato dal prodotto vettoriale tra il versore tangente e quello normale.

Graficamente sarà il vettore in P (uscente/entrante nel foglio) rispetto al disegno precedente.

Questi 3 vettori formano una BASE ORTONORMALE di V_3 e sono detti TRIEDO FONDAMENT

PIANO OSCULATORE

Sia γ una curva biregolare e sia $P_0 \in$ alla retta tangente in P_0

Sia inoltre P_1 un altro punto appartenente a γ ma NON alla retta tang. per P_0

<u>Definizione:</u> Un luogo geometrico di punti dello spazio che soddisfano contemporaneamente due equazioni indipendenti si chiama CURVA IN FORMA CARTESIANA.

$$\Gamma : \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

CILINDRO

<u>Definizione:</u> Una superficie S è un CILINDRO se è unione di rette parallele ad uno stesso vettore. Tali rette si dicono "generatrici" del cilindro.
Una curva L contenuta in S che interseca tutte le generatrici si chiama "DIRETTRICE" di S. (Il cilindro non è detto che sia chiuso o circolare).

- Dati $v=(l, m, n)$ vettore non nullo e una curva $f(t)=(x(t), y(t), z(t))$.
  Quindi il cilindro avente le generatrici parallele a v e $f(t)$ come direttrice ha questa eq. parametrica
  $$\begin{cases} x = x(t) + l s \\ y = y(t) + m s \\ z = z(t) + n s \end{cases}$$
  con t, s parametri $\in \mathbb{R}$.
  Eliminando t, s si può passare alla forma cartesiana (di solito complicata)

$\boxed{\text{N.B}}$ Un punto sta sul cilindro se sta su una delle generatrici.

- <u>Cilindri Paralleli agli assi</u>
  Se S è una superficie con eq. cartesiana $f(x,y)=0$ tale cioè che la variabile z non compare nell'equazione, allora la superficie S è un cilindro con le rette generatrici parallele all'asse z e la direttrice la curva $f(x,y)=z=0$ del piano $z=0$.
  Analogamente $g(y,z) = x = 0$ (cilindro // asse x)
  $h(x,z) = y = 0$ (cilindro // asse y).

Se quindi consideriamo una curva $\gamma(t)$ nello spazio e il Vertice (a,b,c), possiamo dire che il cono è l'unione di rette (infinite) passanti per $\gamma(t)$ e V.

EQ. PARAMETRICA del CONO
$$\begin{cases} x = a + (x(t)-a)\,s \\ y = b + (y(t)-b)\,s \\ z = c + (z(t)-c)\,s \end{cases}$$

↑ coordinate Vertice

Esempio $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \to (\cos t, \sin t, 1)$ $\quad V = (0,0,0)$

Troviamo un'eq. cartesiana della curva $\gamma(t)$.

$$\begin{cases} x = 0 + (\cos t - 0)\,s \\ y = 0 + (\sin t - 0)\,s \\ z = 0 + (1-0)\,s \end{cases} \quad \begin{cases} x = s\cos t \\ y = s\cdot\sin t \\ z = s \end{cases} \to$$ elevando al quadrato ottengo e con $s=1$ $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$

quindi $\gamma : \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$

Inoltre dato $V=(a,b,c)$ un punto dello spazio e $L \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ una curva in forma cartesiana (direttrice del cono),

Un punto $P=(x,y,z)$ sta sul cono se e solo se sta su una qualche generatrice, ovvero

$$\begin{cases} x = a + (x_0-a)\,s \\ y = b + (y_0-b)\,s \\ z = c + (z_0-c)\,s \end{cases}$$ dove $(x_0,y_0,z_0) = Q$ punto appartenente a L

$\boxed{\text{N.B}}$ Un'equazione cartesiana del CONO si trova ricavando i valori di (x_0,y_0,z_0) e andando a sostituirli poi nelle eq. di L.

Esempio di prima
$$\begin{cases} x = 0 + x_0\cdot s \\ y = 0 + y_0\cdot s \\ z = 0 + z_0\cdot s \\ x_0^2+y_0^2=1 \\ z_0=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = x/z \\ y_0 = y/z \\ z = s \\ (x/z)^2+(y/z)^2=1 \\ z_0=1 \end{cases}$$

eq. del cono $\boxed{x^2+y^2=z^2}$

- Paraboloide ellittico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$
- Paraboloide a sella $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$.

. Coniche degeneri:

- Cono iperbolico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
- Cono parabolico $yz - ax^2 = 0$
- Cilindro ellittico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Cilindro iperbolico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Cilindro parabolico $ax^2 - y = 0$

Alternativamente possiamo costruire la matrice simmetrica 4x4 (come per le quadratiche)

Se det $B \neq 0$ allora la QUADRICA È NON DEGENERE

- Autovalori di A (3x3)
  - Avt. nullo → PARABOLOIDE
  - Avt. tutti e 3 positivi → ELLISSOIDE
  - NON definita → IPERBOLOIDE.

Se det. $B = 0$ quadrica DEGENERE

Faccio il rango di B

- rango 3 → CONO o CILINDRO.
- rango 2 → COPPIA di PIANI.

NB $\boxed{\text{Se sono presenti solo 2 variabili stiamo trattando un cilindro}}$.

INTEGRALI di SUPERFICIE

$$\int_a^b f \, d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Prossimamente Esempio