NUMERO: 1033

DATA: 15/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Boltri

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Serra

Beltri Eugenio

Analisi I

Prof Enrico Serra

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 56

- In base a quale funzione viene utilizzata per prima possiamo parlare di:
- $(g \circ f) \rightarrow g(f(x))$ oppure $(f \circ g) \rightarrow f(g(x))$

- La funzione COMPOSTA è molto utilizzata nel CALCOLO dei DOMINI, e servono essenzialmente per velocizzare il calcolo e "scavalcare" l'insieme di mezzo.
- Se f, g sono FUNZIONI INIETTIVE, allora anche $(g \circ f)$ e $(f \circ g)$ sono INIETTIVE e INVERTIBILI
- Ovviamente $g \circ f \neq f \circ g$ (COINCIDONO SOLO IN RARI CASI).

FUNZIONE da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- Si dice che la funzione è CRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in$ dominio $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Si dice che f è STRETTAMENTE CRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in dom(f)$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Si dice che la funzione è DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in dom(f)$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Se f è CRESCENTE o DECRESCENTE si dice che f è MONOTÒNA.
- Se f è STRETT. CRESCENTE/DECRESCENTE, allora f è STRETT. MONOTÒNA, e di conseguenza INIETTIVA

(La proprietà enunciata è a senso unico, cioè se è INIETTIVA non è detto che sia MONOTONA).

- Si dice che f è LIMITATA SUPERIORMENTE su A se $f(A)$ è limitato superiormente.

ovvero $\forall x \in A \quad f(x) \leq M$.

- Si dice che f è LIMITATA INFERIORMENTE su A se $f(A)$ è limitato inferiormente.

ovvero $\forall x \in A \quad f(x) \geq m$

Infine, una funzione LIMITATA (sia sup che inf) ha il grafico compreso fra 2 RETTE ORIZZONTALI

- Per l'ESTREMO SUPERIORE vale questa relazione $\sup f(x) = \sup f(A)$.
- Ovviamente anche per l'ESTREMO INFERIORE $\inf f(x) = \inf f(A)$
- CASO PARTICOLARE: Se $\sup f(A) = +\infty$ si dice che la funzione è ILLIMITATA su A.

Per il MASSIMO vale questa relazione $\rightarrow$ Un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \sup f(A)$ è il MAX per f su A.

- Per il MINIMO $\rightarrow$ Un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \inf f(A)$ è il MIN per f su A.

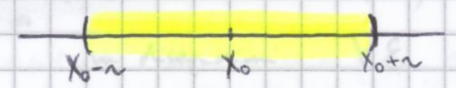
TEOREMA: Da ogni successione si può estrarre una sottosuccessione MONOTÒNA.
(Attraverso l'utilizzo dell'idea dei "PICCHI").

- Tutto quello precedentemente detto porta al TEOREMA di BOLZANO-WEIERSTRASS.

TEOREMA: Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione CONVERGENTE (limite finito).
di BOLZANO-WEIERSTRASS.

LIMITE DELLE FUNZIONI

- Si chiama INTORNO di x_0 di raggio r $\Rightarrow$ $I_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ |x - x_0| < r \}$
- Negli INTORNI gli estremi sono sempre esclusi, gli INTORNI sono sempre SIMMETRICI.



- L'intersezione tra due intorni è ancora un INTORNO, lo stesso vale per l'UNIONE.
- Vedendo la definizione di INTORNO, notiamo che è uguale a quella di limite.

Infatti $\quad |a_n - \ell| < \varepsilon \iff a_n \in I(\ell)$

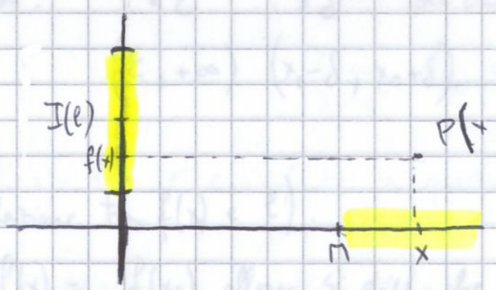
$\qquad n > n_0 \iff n \in I_{n_0}(+\infty)$

Arriviamo quindi a definire una nuova definizione di limite attraverso gli INTORNI.

$$\forall I(\ell) \quad \exists I(+\infty) \text{ tale che } n \in I(+\infty) \Rightarrow a_n \in I(\ell).$$

Questa scrittura è più generale, usata in molti casi perché più malleabile.

- Ulteriore massima scrittura sintetica è $f(I(+\infty)) \subset I(\ell)$.



Da M in poi tutti i punti di x hanno la loro immagine contenuta nell'INTORNO di ℓ.

Scrittura generale $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M$ tale che $x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

- M dipende sempre da ε.

- Se la funzione è CONTINUA in tutti i punti di $A \subset \mathbb{R}$, si dice che f è CONTINUA in A.
- Se la funzione è CONTINUA in tutti i punti del suo Dominio, si dice che f è CONTINUA.
- Tutte le funzioni <u>elementari</u> sono CONTINUE:

- POTENZE - POLINOMI - FUNZ. ESPONENZIALI - LOGARITMI
- FUNZ. TRIGONOMETRICHE - FUNZ. IPERBOLICHE - Tutte le inverse alle precedenti.

$\boxed{\text{N.B}}$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ equivale a dire $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

<u>LIMITE UNILATERALE</u>

- È il limite considerato solo da una parte della x_0

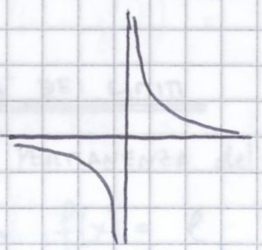
$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l & x > x_0 \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l & x < x_0 \end{cases}$$

- Si chiama INTORNO DESTRO di raggio δ $I_\delta^+(x_0) = [x_0, x+\delta)$
- Si chiama INTORNO SINISTRO di raggio δ $I_\delta^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0]$

Formula generica <u>intorno destro</u>: $\forall I(l) \quad \exists I^+(x_0)$ tale che $x \in I^+(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l)$

In disequazioni: $\forall \varepsilon \quad \exists \delta$ tale che $x_0 < x < x_0+\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

ESEMPIO



$f(x) = 1/x$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0} 1/x \text{ NON ESISTE} \\ \lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty \end{cases}$$

TEOREMA: Dire $\lim_{x \to c} f(x) = l$ è equivalente a questa proprietà $\Rightarrow \underbrace{\forall x_n \to c}_{\text{SUCCESSIONE}} \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$

Spiegazione: Se il limite è REALMENTE l allora tutte le successioni tendenti a c, avranno uguale limite.

- Questo teorema è utile per dimostrare il contrario di quello che prova, ovvero basterà trovare 2 successioni (x_n y_n) tendenti entrambe a c, ma con limite diverso, per mostrare che il limite $f(x)$ per $x \to c$ non ESISTE.

TEOREMA DEL CONFRONTO (teorema del panino).

Se ho 3 funzioni f, g, h definite in $I(c)\setminus\{c\}$ e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e il $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = \ell$, allora di conseguenza $\lim_{x\to c} g(x) = \ell$.

LIMITI NOTEVOLI

I limiti notevoli o fondamentali sono limiti conosciuti e utilizzati al fine di semplificare limiti più complessi. Il risultato che danno infatti è già conosciuto dopo una dimostrazione effettuata. Per queste dimostrazioni molto spesso si utilizza il metodo del CONFRONTO. (vedi esempi sul quaderno).

COROLLARIO: (TEOREMA del CONFRONTO) Se f è limitata in $I(c)\setminus\{c\}$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 0$

allora $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = 0$ [LIMITE del PRODOTTO]

Con questo corollario possiamo anche risolvere limiti con all'interno funzioni oscillanti, cioè limitate

ex. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{tende a } 0} \cdot \underbrace{\sin x}_{\substack{\text{limitata} \\ |\sin x|\leq 1}} = 0$ RISULTATO

ALGEBRA DEI LIMITI Dati $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ // $\lim_{x\to c} g(x) = m$ con $\ell, m \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x\to c} \left(f(x) + g(x)\right) = \ell + m$
- $\lim_{x\to c} f(x)\cdot f(g) = \ell\cdot m$
- $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$ con $m \neq 0$

ATTENZIONE

$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$ ovvero devo guardare come $g(x)$ tende a 0. Infatti se tende a 0^+ il risultato è $+\infty$, mentre se tende a 0^- il risultato sarà $-\infty$.

FORME INDETERMINATE $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\frac{0}{0}$ $+\infty-\infty$ $0\cdot\infty$ 1^∞ 0^0 ∞^0.

COROLLARIO: Somma prodotto e quoziente di funzioni continue SONO FUNZIONI CONTINUE.

REGOLA di SOSTITUZIONE

$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. Se uno vuol fare il limite di $\lim_{x\to c} g\left(f(x)\right)$ può fare $\lim_{y\to\ell} g(y)$

xké SONO EQUIVALENTI

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Affinché questo teorema sia dimostrato è essenziale che l'intervallo sia CHIUSO e LIMITAT

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

Allora f assume nell'intervallo $[a,b]$ un VALORE MASSIMO e un VALORE MINIMO.

⊛ un intervallo chiuso manda sempre ad un intervallo chiuso $[m, M]$.

PROPRIETÀ funzioni CONTINUE MONOTONE

① Se f è continua su I, allora possiamo dire che se f è MONOTONA è anche INIETTIV e viceversa.

ovvero f CONTINUA $\to$ Strett. MONOTONA $\Leftrightarrow$ FUNZ. INIETTIVA.

② f strettamente monotona e continua su I, esiste f^{-1} (xk f è INIETTIVA) e grazie alla CONTINUITÀ posso dire che f^{-1} è CONTINUA.

COROLLARIO: FUNZIONI INVERSE di FUNZIONI CONTINUE, SONO CONTINUE (esempio ARCCOS(x) ARCTAN(x) ARCSIN(x))

$\boxed{\text{CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI}}$ SIMBOLI di LANDAU.

CONDIZIONE di partenza: f e g sono definite nell'intorno $I(c) \setminus \{c\}$ a valori in $\mathbb{R}$

Ci SONO 2 SIMBOLI da IMPARARE:

① Si dice che f è equivalente a g per $x \to c$ se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

SCRITTURA SIMBOLICA $\boxed{f \sim g}$ per $x \to c$

② Si dice che f è trascurabile rispetto a g per $x \to c$ se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

SCRITTURA SIMBOLICA $\boxed{f = o(g)}$ Si legge "f è o piccolo di g" con $x \to c$

· Questo vuol dire che $f(x)$ con $x \to 0$ è talmente piccola da essere trascurabile, rispetto ai valori molto più grandi di $g(x)$.

PROPRIETÀ (sempre nelle condizioni elencate all'inizio) per $x \to c$

$f \sim g$ se e solo se $f = g + \underline{o(g)}$

Ovvero una QUALSIASI FUNZIONE TRASCURABILE RISPETTO A g, in altre parole una qualunque funzione che rapportata a g tende a 0.

INFINITESIMI E INFINITI

- Una funzione f si dice infinitesima per $x \to c$ o in c se $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ ovvero $f = o(1)$
- Una funzione f si dice INFINITA per $x \to c$ o in c se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

CONFRONTI TRA INFINITESIMI E INFINITI

- Se f e g sono infinitesimi in C e se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dice che f e g sono INFINITESIME dello stesso ORDINE (ovvero tendono a zero nello stesso modo).
- Se f e g sono INFINITESIME e $f = o(g)$, allora si dice che f è infinitesima di ordine superiore a g (ovvero f va più velocemente a zero).

COROLLARIO: Sia φ una funzione infinitesima/infinita "CAMPIONE" e sia f una funz. infinitesima o infinita per $x \to c$

Se esiste $\alpha > 0$ tale che $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dice che f ha ordine di infinitesimo (o infinito) α rispetto a φ.

$\boxed{\text{N.B}}$ La funzione $\ell \cdot \varphi(x)^\alpha$ si chiama PARTE PRINCIPALE di f rispetto a φ

CALCOLO DIFFERENZIALE

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad$ I è un intervallo

Prendiamo un punto x_0 nell'Intervallo I.

$$\left.\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right\} \text{RAPPORTO INCREMENTALE.}$$

Sto confrontando una differenza nelle ordinate con una nelle ascisse.

DEFINIZIONE: Se limite esiste ed è FINITO, si dice che f è derivabile in x_0

Il valore del limite si chiama DERIVATA di f in x_0

(stesso significato). SIMBOLOGIA: $f'(x_0)$ // $Df(x_0)$ // $\frac{df}{dx}(x_0)$

È UNA PROPRIETÀ PUNTUALE (dipende da punto a punto).

DEFINIZIONE

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \ell(x-x_0)}_{\text{retta } r(x)} + o(x-x_0)$$

Quindi se la funzione è derivabile esiste una retta $(r(x))$ che passa per il punto $(x_0, f(x_0))$

Possiamo scrivere $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = r(x) + o(x-x_0)}$ $x \to x_0$

Ovviamente questa retta deve possedere 1 CARATTERISTICA ; ovvero la differenza tra $f(x)$ e $r(x)$ DEVE tendere a ZERO più in fretta rispetto alla distanza tra x e x_0

Quindi $f(x) - r(x) = o(x-x_0)$

SCRITTURA della retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ ⊛ con $\ell = f'(x_0)$

DEFINIZIONE : Questa è la retta TANGENTE al grafico f in $(x_0, f(x_0))$.

N.B DEFINIZIONE : Se f è derivabile in tutti i punti, allora si definisce una funzione nuova:

$$\boxed{f'(x) = \text{"LA DERIVATA di } f\text{"}}.$$

ALCUNI CASI

- $f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a \quad \forall x$
- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ Se la funzione è costante la derivata vale 0.

PROPRIETÀ

- Continuità
- Derivabilità

TEOREMA : Se f è derivabile in x_0 allora f è CONTINUA in x_0

LA DERIVABILITÀ IMPLICA LA CONTINUITÀ (non il contrario).

N.B ⊛ EQUAZIONE RETTA TANGENTE

$$y - y_0 = m(x-x_0) \Longleftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0)$$

• FUNZIONI IPERBOLICHE, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ // $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Calcoliamo la derivata

$$\boxed{D(\cosh x) = \sinh x} \qquad \boxed{D(\sinh x) = \cosh x}$$

$$\boxed{D(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}, \text{ oppure } 1 + \tanh^2 x}$$

• FUNZIONI INVERSE.

$$\boxed{D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}} \qquad \boxed{D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \boxed{D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

(non si utilizza mai)

REGOLE di DERIVAZIONE 2

4) FUNZIONI COMPOSTE ⇒ $g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

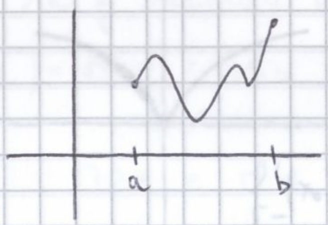
5) FUNZIONI INVERSE ⇒ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ oppure $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

(f deve essere invertibile e $f'(x) \neq 0$)

Data la relazione $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$

piccolo corollario

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$



Definizione: Si chiama DERIVATA destra di f in x_0

il $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

[stessa cosa con DERIVATA SINISTRA, $x \to x_0^-$]

Proprietà: f è derivabile in x_0 se f è derivabile da DESTRA e da sinistra in x_0 e le due DERIVATE coincidono.

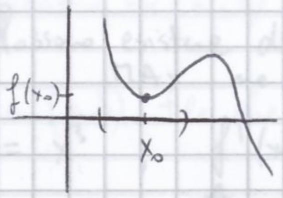
USO DELLE DERIVATE

- OTTIMIZZAZIONE (ovvero calcolare i MAX e i MIN di una FUNZIONE).

Definizione: $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$

- $x_0 \in A$ si dice MINIMO LOCALE per f se esiste un $I(x_0)$ tale che $\forall x \in I(x_0)$ $f(x) \geq f(x_0)$

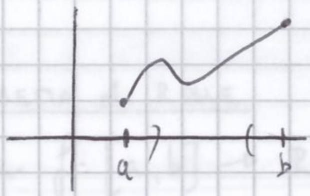
MINIMO LOCALE



- $x_0 \in A$ si dice MASSIMO LOCALE per f se esiste un intorno $I(x_0)$ tale che $\forall x \in I(x_0)$, $f(x) \leq f(x_0)$

Piccole varianti

- $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ si dice MINIMO LOCALE STRETTO (forte).

- 

$f(a)$ = MINIMO LOCALE in un INTORNO destro di A
$f(b)$ = MAX LOCALE in un INTORNO SINISTRO di A

DEFINIZIONE: Sia f derivabile in x_0
Se $f'(x_0) = 0$, si dice che x_0 è un PUNTO CRITICO (stazionario) per f

Terminologia: MAX e MIN sono chiamati "ESTREMI" della FUNZIONE.

TEOREMA di FERMAT.

Supponiamo che:

- f sia definita in un intorno di x_0 (completo)
- x_0 sia un ESTREMO LOCALE per f (MAX o MIN)
- f sia derivabile in x_0

$\Bigg\}$ CONDIZIONI NECESSARIE !!

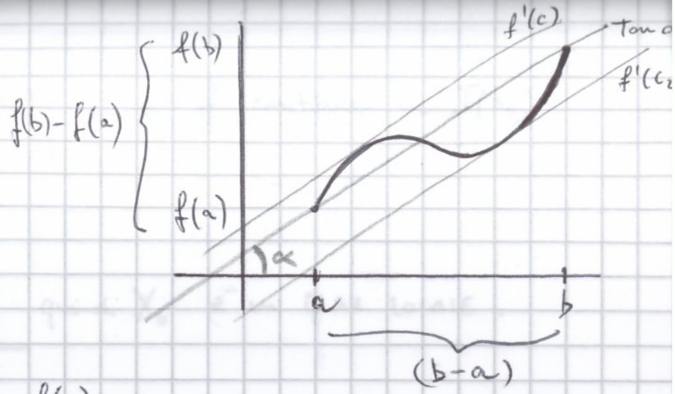
Allora x_0 è un PUNTO CRITICO per f, ovvero $f'(x_0) = 0$.

- TEOREMA di LAGRANGE (più ampio)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Supponiamo:

1) f continua in $[a,b]$
2) f derivabile almeno in (a,b)



Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Spiegazione disegno: Il rapporto incrementale dà come risultato la pendenza della retta tangente, il quale è uguale alla pendenza della tangente al punto (punti) C. Ciò significa che le due rette tangenti sono PARALLELE.

CONSEGUENZE AL TEOREMA di LAGRANGE.

(1) CARATTERIZZAZIONE delle funzioni costanti.

Se f è costante in $[a,b]$ allora $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Teorema di caratterizzazione delle funz. costanti:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è COSTANTE se e solo se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

RELAZIONI TRA LA MONOTONIA E SEGNO della DERIVATA.

TEOREMA: Sia f derivabile su un intervallo I.

Allora

CONDIZ. SUFF e NECESSARIA

1) f è CRESCENTE su I se e solo se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
2) se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$, allora f è strettamente crescente.

DERIVATE SUCCESSIVE

$f: I \to \mathbb{R}$

f' è derivabile, di conseguenza possiamo ancora derivare $(f')' = f''$ DERIVATA SECONDA.

Possiamo derivare "n" volte e scriveremo $f^{(n)}$.

Dato n intero positivo.

$I \subset \mathbb{R}$

$C^n(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \ / \ f$ è derivabile n volte su I e $f^{(n)}$ è continua su $I \}$

Si dice anche f di CLASSE C^n

CASI PARTICOLARI

C^∞ funzioni derivabili infinite volte (è un insieme).

$C^0 = \{ f: I \to \mathbb{R} \ / \ f$ è continua$\}$??

ESEMPIO di CASO PARTICOLARE

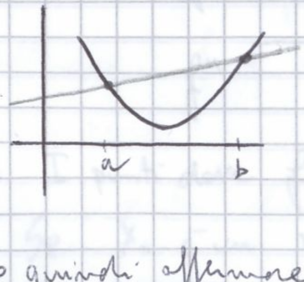
f è derivabile in tutti i punti ma f' non è continua in 1 PUNTO

Si dice che $f \notin C^1(\mathbb{R})$ xké $C^1(\mathbb{R})$ contiene tutte le funzioni con derivata prima continua in tutti i punti.

CONCAVITÀ e CONVESSITÀ

Prendiamo un $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. $f: I \to \mathbb{R}$

- Si dice che f è convessa su I se $\forall x_1, x_2 \in I$ il grafico di f è SOTTO al segmento per $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.



$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$ EQUAZIONE RETTA SECANTE

Possiamo quindi affermare: $f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ con $x \in [a,b]$

- Si dice concava su I la funzione che per $\forall x_1, x_2 \in I$ il grafico di f è SOPRA al segmento $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

TEOREMA (REGOLA di de l'HÔPITAL).

f, g definite in $I(c) \setminus \{c\}$

Supponiamo che:

1) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) < {0 \atop \infty}$

2) f, g siano derivabili in $I(c) \setminus \{c\}$ e $g'(x) \neq 0$ in $I(c) \setminus \{c\}$

3) $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

Allora $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

$\boxed{\text{N.B}}$ Serve a semplificare i limiti, xk utilizzo il rapporto tra le derivate, sperando sia una forma determinata.

UTILITÀ PRATICA → Altri limiti Notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{per } \forall \alpha > 0 \text{ debolezza del logaritmo.}$$

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha \cdot \log x = 0 \quad \text{per } \forall \alpha$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{K^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha \quad \text{FORZA dell'ESPONENZIALE.}$$

APPROSSIMAZIONE LOCALE DI FUNZIONI

- Cosa vuol dire approssimare?

Data una funzione f, vogliamo cercare una funzione g più semplice di f in modo che la differenza $f-g$ sia più piccola possibile ⇒ $f-g$ = RESTO ($R(x)$ funzione

- Cosa vuol dire locale?

Attorno ad un punto, chiamato d'ora in poi x_0.

ECCO COSA VOGLIAMO FARE ➡ $f(x) - g(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ con n più grande possibile

Svolgendo la SOMMATORIA $T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

TEOREMA di TAYLOR

Supponiamo che

- Sia f di CLASSE $C^{n-1}(I)$
- Esista $f^{(n)}(x_0)$

Allora esiste un unico polinomio di grado $\leq n$, chiamato p_n, tale che

$$f(x) - p_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{con } x \to x_0$$

Questo unico polinomio è chiamato POLINOMIO di TAYLOR (T_n)

A livello terminologico quando $x_0 = 0$ chiameremo POLINOMIO di McLAURIN.

ovvero $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Sinteticamente la nostra APPROSSIMAZIONE LOCALE $\to$ $f(x) = T_n(x) + o(x^n)$

Tutto ciò si dice: FARE lo sviluppo di f all'ordine n con $\underbrace{\text{RESTO di PEANO}}_{o(x^n)}$.

TEOREMA (FORMULA di TAYLOR con RESTO di LAGRANGE)

Supponiamo che:

- $f : I(x_0) \to \mathbb{R}$ di classe $C^n(I)$
- Esista $f^{(n+1)}$ in I

Allora esiste $c \in I(x_0)$ tale che $f(x) = T_n(x) + \underbrace{\overbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}^{\text{Valore definito cioè possiamo dare un vero valore numerico.}}}_{\text{RESTO di LAGRANGE.}}$

Il perché del NOME

Se scriviamo all'ordine 0 $(n=0)$

f deve essere derivabile, avremo $\exists c / f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$

ovvero $\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$ cioè il TEOREMA di LAGRANGE.

- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$

- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$

- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

ALGEBRA degli SVILUPPI di TAYLOR $\quad f(x) = T_n(x) + o(x^n) \;\;//\;\; g(x) = S_n(x) + o(x^n)$

- SOMMA di FUNZIONI

$$f(x) + g(x) = \underbrace{T_n(x) + S_n(x)}_{\text{polinomio di grado} \leq n} + o(x^n)$$

- PRODOTTO di FUNZIONI

$$f(x) \cdot g(x) = \underbrace{T_n(x) \cdot S_n(x)}_{\text{di solito grado} > n} + o(x^n)$$

$\boxed{\text{N.B}}$ Si tengono solo le POTENZE $< n$, xK quelle superiori sono trascurabili.

- FUNZIONI COMPOSTE $g(f(x))$

CONDIZIONE NECESSARIA: La funzione interna $f(x)$ deve tendere a ZERO quando $x \to 0$

Ci sono due modi possibili di procedere,

DATI gli sviluppi di f e g

$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n) \;\;//\;\; f(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m + o(x^m)$

① $g(f(x)) = a_0 + a_1 f(x) + a_2 f(x)^2 + \dots + a_n \left(f(x)^n\right) + o\left(f(x)^n\right)$

poi $\quad a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 \dots) + a_2(b_1 x + b_2 x^2 \dots)^2 + o\Big(\underbrace{(b_1 x + b_2 x^2 + o(x^n}_{o(x^n)}\Big)$

qua ho sviluppato prima g e poi f.

② Sviluppo prima f e poi g.

INTEGRALI

Abbiamo da risolvere due problemi distinti:

1. operazione inversa della derivazione
2. metodi per il CALCOLO e definizioni di area.

PROBLEMA 1 Sia $f : I \to \mathbb{R}$

Definizione: Ogni funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ si chiama PRIMITIVA di f.

Domanda: possono esistere più primitive per una stessa funzione?

PROPRIETÀ: CARATTERIZZAZIONE delle PRIMITIVE

Due primitive della stessa funzione differiscono per una **COSTANTE**.

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Trovando quindi 1 primitiva ne trovo immediatamente INFINITE, anche se però sostanzialmente ne esiste 1 SOLA per ogni funzione.

L'INSIEME di TUTTE le primitive di f si chiama INTEGRALE INDEFINITO di f

Simbologia: $\int f(x)\,dx$

Vari modi per definire l'integrale $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \;/\; C \in \mathbb{R}\} = F(x) + C$

REGOLE di INTEGRAZIONE NOZIONE BASE: f è la DERIVATA di F $\boxed{F' = f}$
F è la primitiva di f

1. LINEARITÀ dell'INTEGRALE.

$$\int \left(a f(x) + b g(x) \right) dx \Rightarrow a \int f(x)\,dx + b \int g(x)\,dx$$

2. INTEGRAZIONE per PARTI (vedi dimostrazione sul q).

$$\int (f' \cdot g)\,dx = f \cdot g - \int (f \cdot g')\,dx + C$$

N.B. ovviamente l'integrazione per parti si utilizza per ottenere un integrale più semplice di quello di partenza altrimenti non ha senso

- CASO 2

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}\,dx$$ poniamo $x^2+bx+c=0$ non ha soluzioni.

Cosa si fa? RISPOSTA: Si fa comparire al numeratore la derivata del denominatore. I passaggi successivi molto spesso comportano di spaccare l'integrale e procedere con i vari metodi visti in precedenza (ovviamente è un procedimento molto lungo)

- CASO 3

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}\,dx$$ poniamo che $x^2+bx+c=0$ abbiamo 2 soluzioni (k, m)

ESISTONO 2 NUMERI A e B tali che vale questa relazione di uguaglianza

$$\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c} = \frac{A}{(x-k)} + \frac{B}{(x-m)}$$

Il denominatore delle 2 uguaglianze è per forza uguale, bisognerà trovare i valori di A e B per i quali vale l'uguaglianza al numeratore (per ogni grado). ovvero ciò comporta sviluppare un SISTEMA a 2 incognite.

Una volta trovati i valori A e B possiamo riscrivere l'integrale così:

$$\int \frac{A}{(x-k)} + \frac{B}{(x-m)}$$ e proseguire con la risoluzione secondo i metodi precedenti.

Quindi: **TEOREMA**: Se f è continua a tratti su $[a,b]$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \text{ ESISTE ed è finito,}$$

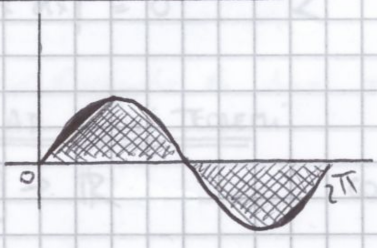
allora il limite si chiamerà integrale definito di f su $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ } Un numero che indica l'area.

estremi di integrazione

• Se f è positiva su $[a,b]$, l'area sotto il grafico di f è per definizione $\int_a^b f(x)\,dx$

PROBLEMA dell'area NEGATIVA



$f(x) = \sin x$

Avremo $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$

OSSERVAZIONE

È stato definito $\int_a^b f(x)\,dx$ con $a<b$

COSA SUCCEDE se $b<a$?!

Definizione: per $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ si pone $\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$

PROPRIETÀ dell'INTEGRALE

1) ADDITIVITÀ $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

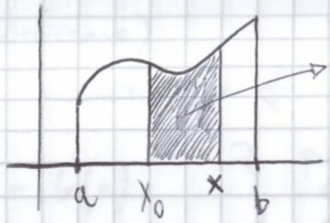
PROPRIETÀ BASE delle AREE.

2) LINEARITÀ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

PREMESSA

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ FISSO $x_0 \in [a,b]$



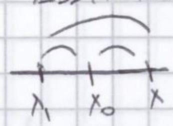
$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ AREA.

Se inizio a cambiare il valore di x a piacere il valore dell'area (ovvero dell'integrale) diventerà FUNZIONE di x.

Cioè $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ FUNZIONE INTEGRALE di f

E se cambio x_0? mentre mantengo fisso x?

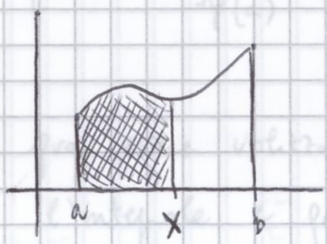
ADDITIVITÀ



$$F_{x_1}(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_0} f(t)\,dt$$

Questo però è uguale a dire $= \underbrace{F_{x_0}(x)}_{\text{quella di prima}} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_0} f(t)\,dt}_{\text{numero indipendente da } x}$

Se cambiamo il nome e rimettiamo a, b e x avremo questo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$



dove $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ rappresenta LA FUNZIONE integrale di f.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA e sia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la sua funzione integrale; allora F è una PRIMITIVA di f.

Quindi F è derivabile in ogni $x \in [a,b]$ e $F'(x) = f(x)$

$\boxed{\text{N.B}}$ Questo teorema dimostra in pratica che l'integrale è l'inverso della derivata ed è il punto di incontro concettuale tra calcolo e ricerca di primitive e il calcolo di aree.

Che cosa si può dire su F se abbiamo info su f?

① Se $f(t) \geq 0 \quad \forall t$

- Il segno di $F(x)$ se $x \geq a$ è positivo, cioè $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \geq 0$

- Il segno di $F(x)$ se $x < a$ è negativo, cioè

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt \leq 0$$

quindi
$$\boxed{\begin{array}{ll} F(x) \geq 0 & \text{per } x > a \\ F(x) \leq 0 & \text{per } x < a \end{array}}$$

② Se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Ovviamente $F'(x) = f(x) \leq 0$ allora $F(x)$ è DECRESCENTE

ma è vera la relazione $F'(x) = \underbrace{f(x) \geq 0}_{\text{per ipotesi}}$ allora $F(x)$ è CRESCENTE per $\forall x$.

③ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Diremo che se f è CRESCENTE allora $F(x)$ sarà convessa, per le proprietà viste con le derivate.

INTEGRALI IMPROPRI

La funzione non è limitata ed un intervallo definito.

Dovremo calcolare $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

① Abbiamo intervalli tipo $[a, +\infty)$ con f continua sull'I

facciamo $\lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\,dx$
- Se limite è FINITO, l'integrale CONVERGE (la funz. è integrabile in senso improprio).
- Se limite ∞, DIVERGE
- NON ESISTE, integrale indeter.

DA SAPERE PER UTILITÀ

N.B $\alpha > 0$

① $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{convergente per } \alpha > 1 \\ \text{divergente per } \alpha \leq 1 \end{cases}$ (tende a zero troppo lentamente)

② $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{divergente per } \alpha \geq 1 \\ \text{convergente per } \alpha < 1 \end{cases}$ sull'intervallo $(0,1]$

STABILIRE IL CARATTERE DI UN INTEGRALE IMPROPRIO

$f(x) \geq 0$ su $[a,+\infty)$ per definizione $\lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} F(R)$

quindi $F(x)$ cresce (vedi pag precedenti) $\forall x \geq a$

possiamo allora aggiungere che (visto che è monotona) il $\lim_{R\to+\infty} F(R)$ ESISTE SEMPRE e può essere finito o $\pm\infty$ (visto già nelle successioni). [lo stesso con funz. integrale decrescente]

TEOREMA del CONFRONTO

Sia $\underbrace{0 \leq f(x)}_{\text{ATTENZIONE CONDIZIONE FONDAMENTALE}} \leq g(x) \quad \forall x \in [a,+\infty)$

Affermiamo che:

- se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE
- se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.

ATTENZIONE

ma se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge non posso dire nulla sul carattere di $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

N.B $\boxed{i^2 = -1}$

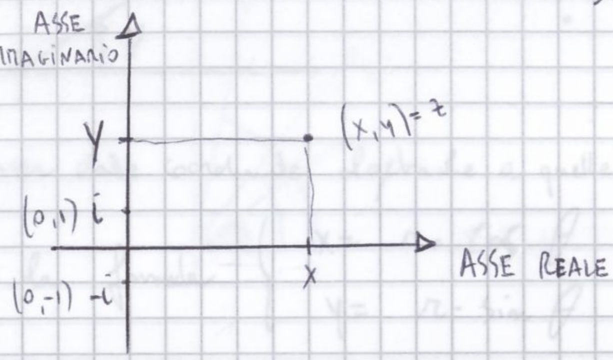
Inoltre svolgo i calcoli normalmente come sempre.

- In $\mathbb{C}$ valgono tutte le proprietà algebriche di $\mathbb{R}$ (commutativa, semplificazioni ...)
- ATTENZIONE: Non vale però la PROPRIETÀ di ORDINAMENTO.

dire $z_1 < z_2$ non ha senso.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

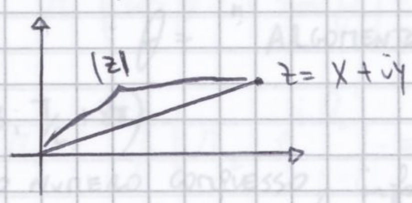
$z = x + iy = (x, y)$ Essendo una coppia la rappresento come un PUNTO sul GRAFICO.



PIANO COMPLESSO o PIANO di GAUSS.

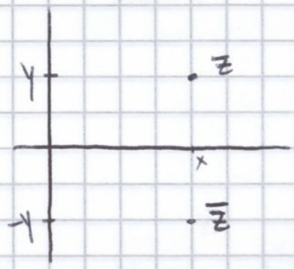
- La distanza di z da O si chiama MODULO di z $|z|$ ovviamente $|z| \geq 0$

Dire $|z_1| < |z_2|$ ha senso xk sono distanze.



Definizione: Complesso coniugato di z. Simbologia. $\bar{z} = x - iy$

Punto simmetrico rispetto all'asse REALE.



Alcune proprietà: $\bar{\bar{z}} = z$ $\|$ $|\bar{z}| = |z|$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\|$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

CASI PARTICOLARI

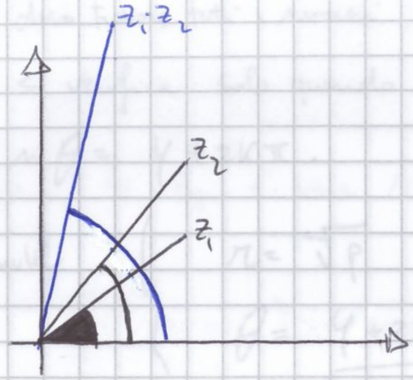
$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Attenzione che $|z|^2 \neq z^2$ Sono molto diversi.

N.B. La forma trigonometrica permette molte semplificazioni nel calcolo dei prodotti tra numeri complessi. Perché, per una serie di relazioni, si può affermare che

PRODOTTO di num. complessi
$$\begin{cases} |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| & \text{moltiplicazione dei moduli} \\ \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) & \text{Somma degli angoli} \end{cases}$$

ESEMPIO GRAFICO.



FORMULA di EULERO

$$\forall \theta \qquad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

quindi il numero complesso $r(\cos\theta + i\sin\theta) = \boxed{r \cdot e^{i\theta}}$ FORMA ESPONENZIALE dei numeri complessi.

Per il prodotto valgono ancora le regole precedenti $(r_1 \cdot e^{i\theta_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\theta_2}) = \underbrace{r_1 \cdot r_2}_{\text{moltiplico i moduli}} \cdot e^{\overbrace{i(\theta_1+\theta_2)}^{\text{Sommo gli angoli.}}}$

relazione utile $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}}$

Stesso ragionamento per la divisione

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

POTENZE di numeri COMPLESSI (molto complicate se non si usa la forma esponenziale)

1) Scrivere z in forma esponenziale $z = r \cdot e^{i\theta}$

2) $z^n = (r \cdot e^{i\theta})^n \Rightarrow r^n \cdot e^{in\theta}$ (serie di moltiplicazioni).

Un polinomio complesso di grado n può sempre essere scritto

$$P(z) = a\,(z-z_0)^{\alpha_0}\cdot(z-z_1)^{\alpha_1}\cdot(z-z_K)^{\alpha_K}$$

radici — molteplicità

N.B $\alpha_0+\alpha_1+\ldots=n$

La somma delle molteplicità dà il grado del polinomio

TEOREMA: Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti reali.
Allora, se z_0 è una radice, anche $\overline{z}_0$ è una radice.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Hanno due caratteristiche:

- l'incognita è una funzione — y è la funzione incognita $y(x)$
- nell'equazione compaiono derivate dell'incognita.

Il risultato che dobbiamo ottenere è $\rightarrow$ $y'(x) = f(x)$ con $f(x)$ DATA.

quindi sostanzialmente $y(x) = F(x) + c$ (ricerca delle primitive).

Definizione: L'ORDINE della più alta derivata dell'incognita si chiama ordine dell'equazione.

ESEMPI

$$xy' + e^{2y} - \frac{1}{y} = \sin x \qquad \text{equazione di 1° ordine}$$

$$y'' - 2y' + \sin(y) = x \qquad \text{equazione di 2° ordine}$$

N.B Non è necessario che vi siano tutte le derivate precedenti a quella più alta.

Equazione all'ordine n $\rightarrow$ $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

detta EQUAZIONE in FORMA NORMALE.

- PREMESSA (funzioni a 2 variabili).

Il grafico di una funzione a due variabili è un GRAFICO TRIDIMENSIONALE.

Il problema delle funz a 2 variabili può essere risolto fissando una variabile e risolvendo così la rimanente (come se fosse una normale funz. a variabile singola).

- Possiamo anche parlare di DERIVATE PARZIALI, ovvero deriv solo la parte interessata da una variabile mentre l'altra rimane bloccata.

ESEMPIO $f(x,y) = x^4 \log y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 \log y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^4/y$$

TEOREMA di CAUCHY (ESISTENZA e UNICITÀ LOCALE).

- Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ dato.
- Se $f(x,y)$, ovvero l'eq. differenziale, è CONTINUA in x per ogni y e C^1 in y per ogni x.

Allora il problema $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha ESATTAMENTE 1 SOLUZIONE definita in un intorno di x_0.

Osservazione 1 : "LOCALE"

Anche se f verifica le ipotesi su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ex $y' = x^2 y^2$) in genere la soluzione è definita solo su un intorno di x_0.

Osservazione 2

$y' = f(x,y)$ che soddisfa le ipotesi del teorema in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Due soluzioni dell'equazione (tra tutte quelle infinite) NON si incrociano MA (xk vorrebbe dire che in quel punto il problema di CAUCHY avrebbe 2 soluzioni)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 56

Per ricercare invece le soluzioni <u>non</u> costanti dovremo portare tutte le y a sinistra dell'uguale, e tutte le x a destra. Inoltre per eliminare y', utilizziamo l'uguaglianza $y' = \frac{dy}{dx}$. Una volta arrivati a questa condizione, integriamo le due parti ottenute.

Dalla soluzione dell'integrale basterà isolare la $y(x)$ per avere così l'INTEGRALE GENERALE dell'equazione.

L'enunciato teorico è $y(x) = H^{-1}\left(G(x) + c\right)$.

<u>RIASSUNTO</u>

eq. diff $y' = g(x)\,h(y)$ — L'integrale generale:

- Soluzioni costanti $y(x) = y_0$ tale che $h(y_0) = 0$
- $y(x) = H^{-1}\left(G(x) + c\right)$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI del II ORDINE

$$y'' + ay' + by = f(x)$$ con a, b numeri $\in \mathbb{R}$.

$\boxed{N.B}$ Se $f(x) = 0$ allora l'equazione differenziale si dice "OMOGENEA"

<u>Osservazioni</u>

- Se $y(x)$ è soluzione e $\alpha \in \mathbb{R}$, anche αy è soluzione.
- Se y_1 e y_2 sono soluzioni anche $(y_1 + y_2)$ è soluzione.
- Se y_1 e y_2 sono soluzioni e C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$ (costanti) allora $C_1y_1 + C_2y_2$ è soluzione $\forall\, C_1, C_2$.

<u>TEOREMA</u>

1. L'integrale generale dell'equazione "OMOGENEA" ha la forma $y(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ dove y_1 e y_2 sono due soluzioni <u>NON PROPORZIONALI</u> (cioè diverse) dell'equazione
2. L'integrale generale dell'equazione "NON OMOGENEA" ha la forma:
$$y(x) = y_G + y_P$$
dove y_G è l'integrale GENERALE dell'equazione OMOGENEA.

Come si trovano le soluzioni dell'equazione non omogenea ??

Ricordiamo che basterà trovare solo una soluzione (y_p) per definire l'integrale generale dell'eq. lineare del II ordine.

Abbiamo questa situazione $y'' + ay' + by = f(x)$

CASO I Se f è un polinomio di grado n.

- Se 0 NON è una soluzione dell'eq. caratteristica allora la $y_p = q_n$ (Polinomio di grado n)
- Se 0 è una soluzione dell'eq. caratteristica di molteplicità 1 $y_p = x\,q_n(x)$
- Se 0 " " " " " " 2 $y_p = x^2 q_n(x)$

CASO II Se $f(x) = e^{rx}$

- Se r non è soluzione dell'eq. caratteristica allora $y_p = Ae^{rx}$
- Se r è soluzione dell'eq. caratteristica di molteplicità 1 $y_p = Ax\,e^{rx}$
- Se r " " " " " " 2 $y_p = Ax^2 e^{rx}$

CASO III Se $f(x)$ è $e^{rx} \cdot \cos(sx)$ oppure $e^{rx} \sin(sx)$

- Se $r+is$ non è soluzione dell'eq. caratteristica $y_p = e^{rx}(A\cos(sx) + B\sin(sx))$
- Se $r+is$ è soluzione dell'eq. caratteristica allora $y_p = x\,e^{rx}(A\cos(sx) + B\sin(sx)$