NUMERO: 1029

DATA: 15/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Cancedda

MATERIA: Fisica I

Prof. Gamba

CANCEDDA

Meccanica Fisica I

Prof. A. Gamba

dopo l'analisi dimensionale otteniamo la formula del moto armonico

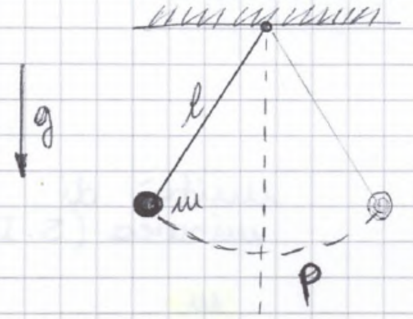
$$x(t) = A \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{p}\right)$$

$T = [t]$

$T = [p]$

$A = [L]$

• ANALISI DIMENSIONALE



periodo di oscillazione

$p = ?$

$L = [l]$ $\quad M = [m]$

$\frac{L}{T^2} = [g]$ $\quad T = [p]$

$$\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = T \Rightarrow p \div \sqrt{\frac{l}{g}}$$

proporzionale

• ragionando in modo più generico (sistematico)

non dimensionale

$$\boxed{p = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

$$l, m, g \rightsquigarrow p$$

$$p \div l^a \cdot m^b \cdot g^c$$

$$\left[l^a \cdot m^b \cdot g^c\right] = L^a \cdot M^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^c = L^{a+c} \cdot M^b \cdot T^{-2c} = T$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ -2c = 1 \end{cases}$$

$c = \frac{1}{2}$

$a = -c = \frac{1}{2}$

$b = 0$

$p \div l^a \, m^b \, g^c =$

$= l^{\frac{1}{2}} \, m^0 \, g^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}$

• per trovare il 2π bisogna analizzare più affondo

$$x(t_{fin}) = x(t_{in}) + \int_{t_{in}}^{t_{fin}} v(t)\,dt$$

$$\bar{v} = \frac{x(t_{fin}) - x(t_{in})}{t_{fin} - t_{in}} \Rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{1}{t_{fin} - t_{in}} \cdot \int_{t_{in}}^{t_{fin}} v(t)\,dt}$$

velocità media — velocità istantanea

ponendo come dati:

$t_{in} = 0 \quad t_{fin} = t$

$x(0) = x_0$

$$x(t) = x_0 + \int_0^{t} v(t')\,dt'$$

tempo finale

variabile temporale

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,dt'}$$

conoscendo $v(t)$ e x_0 posso ricavare la traiettoria $x(t)$ mediante un integrazione

MOTO RETTILINEO UNIFORME $\quad (v(t) = V_0 = \text{cost.})$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,dt' =$$

$$= x_0 + \int_0^t V_0\,dt = x_0 + V_0 \int_0^t dt' =$$

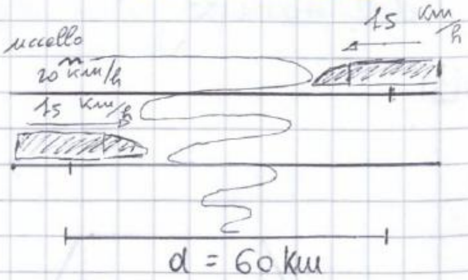
utilizzo le regole di integrazione e ottengo t

$$= \boxed{x(t) = x_0 + V_0\,t}$$

abbiamo ottenuto la legge oraria di questo moto, da cui possiamo vedere che la posizione $x(t)$ cresce linearmente con il tempo t

PROBLEMA:

calcolare lo spazio percorso dall'uccello



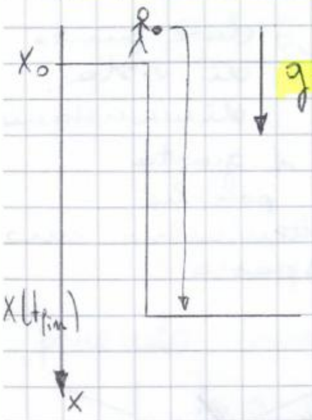
$s_{ucc} = V_{ucc} \cdot t$

$s_{treni} = \frac{d}{2} = V_{treno} \cdot t$

andando alla stessa velocità, i due treni si incontrano nel punto medio

$t = \frac{d}{2 V_{treni}}$ istante del l'incontro dei treni

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO ($a = \text{cost}$)



$g = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2}$

$$a(t) = g = \text{cost.}$$

I° integ.

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')\,dt' = \boxed{v_0 + g t}$$

INTEGRALI

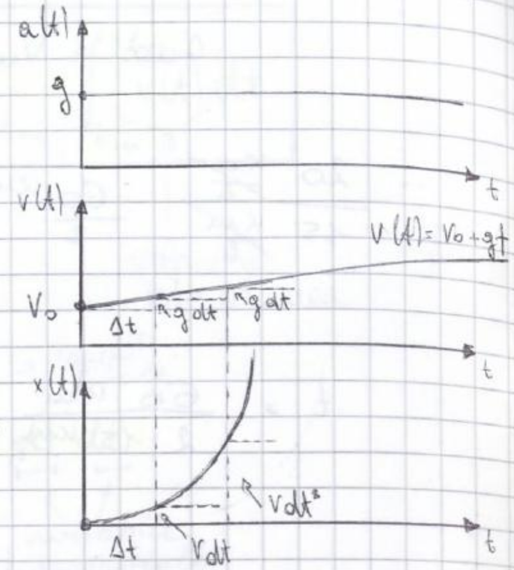
$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,dt' =$$

II° integ.

$$= x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + g t')\,dt' =$$

$$= \boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2}$$

LEGGE DEL MOTO UNIF ACCELERATO



Mi interessa esprimere la velocità in funzione della posizione invece che in funzione del tempo

$t \to x$ (cambio di variabile)

$$v(t) = v(x(t))$$

regola di derivazione di funzione composta

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \to = v \Rightarrow \frac{\Delta v}{\cancel{\Delta x}}\frac{\cancel{\Delta x}}{\Delta t}$$

$$\boxed{a(t) = v \cdot \frac{dv}{dx}} \longrightarrow \boxed{a\,dx = v\,dv}$$ forma differenziale

$$\int_{x_{in}}^{x_{fin}} a\,dx = \int_{v_{in}}^{v_{fin}} v\,dv$$

$a(x) = \text{cost}$

$$\int_{x_{in}}^{x_{fin}} a\,dx = \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_{in}}^{v_{fin}}$$

$$\int_{x_{in}}^{x_{fin}} a\,dx = \frac{v_{fin}^2}{2} - \frac{v_{in}^2}{2}$$

$$\boxed{a\left(x_{fin} - x_{in}\right) = \frac{v_{fin}^2}{2} - \frac{v_{in}^2}{2}}$$

lavoro — en. cinetica

dimensionalmente $\left[\frac{L}{T^2} L = \frac{L^2}{T^2}\right]$

MOTO ARMONICO

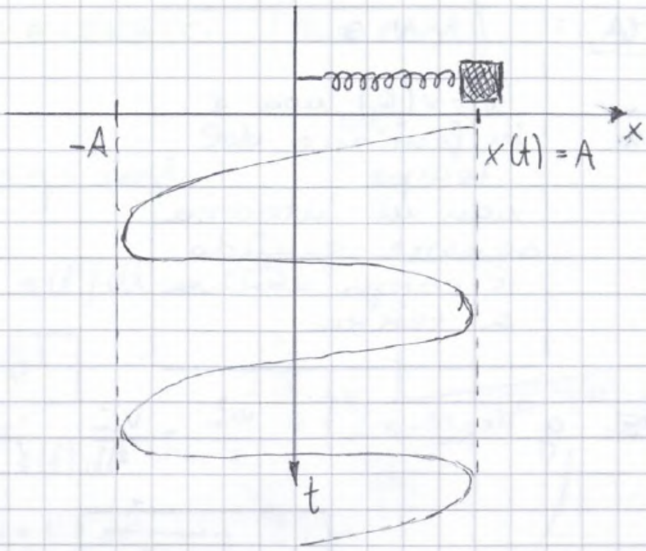
$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t - \phi)$$

A "ampiezza" — ϕ "fase"

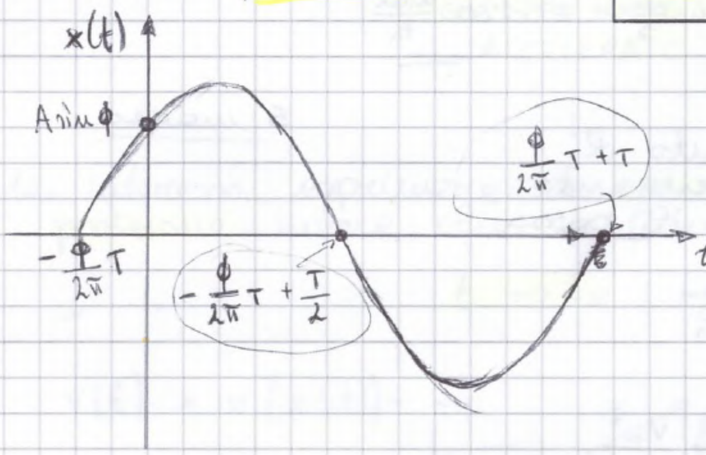
ω: "pulsazione"

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ — T → "periodo"

ν = frequenza $= \frac{1}{T}$ → reciproco del periodo



$$\boxed{\omega = 2\pi \cdot \nu}$$



$-\frac{\phi}{2\pi}T$ $\qquad$ $-\frac{\phi}{2\pi}T + \frac{T}{2}$ $\qquad$ $\frac{\phi}{2\pi}T + T$

$$\frac{2\pi}{T}t = \omega t = k\pi - \phi$$

$$t = \frac{T}{2\pi}(k\pi - \phi) =$$

$$= k\frac{T}{2} - \frac{\phi}{2\pi}T$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = + A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) =$$

$$= \boxed{-\omega^2 x(t)}$$

LEGGE DEL MOTO ARMONICO

equazione differenziale del II° ordine

moto unif. accelerato $\quad \frac{d^2x}{dt^2} = g = \text{cost}$

oscillazione armonica $\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

equazioni differenziali del II° ordine

$$x(t) = A^{\triangleleft} \sin(\omega t + \phi^{\triangleleft})$$

"integrale generale" perché le soluzioni sono al suo interno (frecce)

RIASSUMENDO

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

è indifferente usare il seno o il coseno, apportando una precisazione matematica

$$\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

ponendo $v_0 = 0$: $A = |x_0|$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi) = A\omega\sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) = \qquad \boxed{-\sin\alpha = \sin(\alpha - \pi)}$$

$$= A\omega^2\sin(\omega t + \phi + \pi)$$

tutti i grafici di $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ sono traslati l'uno dall'altro di multipli di π:

$$x \Rightarrow v + \frac{\pi}{2}$$

$$v = a + \frac{\pi}{2}$$

$$x = a + \pi$$

Eliminando il tempo dalla formula $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

$$a\,dx = v\,dv \quad , \quad \int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv \;,$$

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

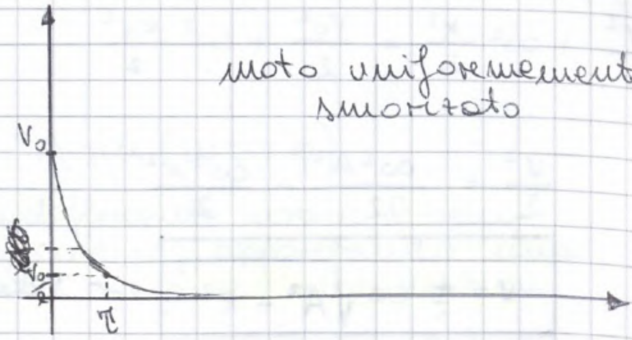
$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(x) = -\omega^2 x$$

$$\int_{x_0}^{x} -\omega^2 x'\,dx \quad ; \quad -\omega^2\int_{x_0}^{x} x\,dx$$

$$\boxed{-\omega^2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}}$$

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-kt}$$

moto uniformemente smorzato



$$[k] = \frac{1}{T}$$

$$k = \frac{1}{\tau}$$ ↳ tau

COEF. DI SMORZAMENTO

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

↳ tempo caratteristico di smorzamento quando la velocità 1/e

ponendo $t_0 = 0$

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-t/\tau}$$ equazione differenziale

$$dx = v_0 e^{-t/\tau} dt$$ quanto è lungo il pezzetto che faccio in un certo dt

$$\int_{x_0}^{x} dx' = v_0 \int_0^t e^{-t'/\tau} dt'$$

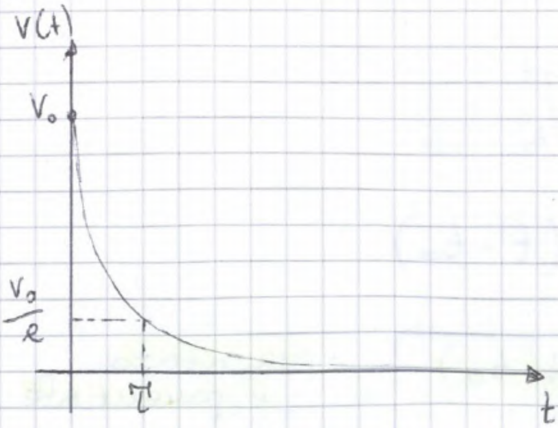
$$x - x_0 = v_0(-\tau)\left[e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^t ; \quad x - x_0 = v_0(-\tau)\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) ;$$

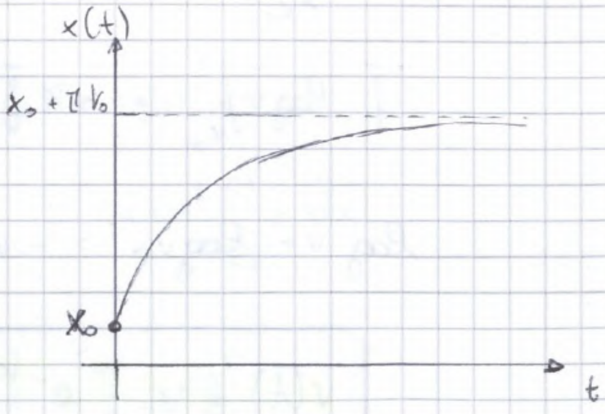
$$x - x_0 = v_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) ; \quad x(t) = x_0 + v_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

usando tempi elevati

$t \to +\infty$

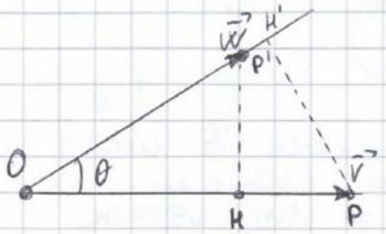
la $x(t) \to x_0 + \tau v_0$





PRODOTTO SCALARE

11 marzo



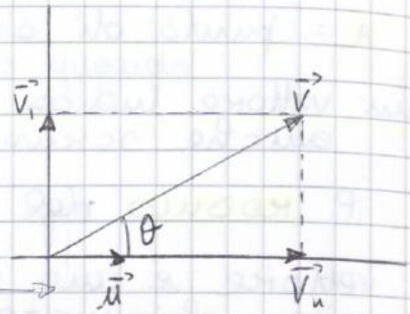
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v\left(w \cos\theta\right) = v \cdot w_u$$

$$\vec{w} = \left(v \cos\theta\right) w = v_u\, w$$

$\overline{OH} = w_u = w\cos\theta$

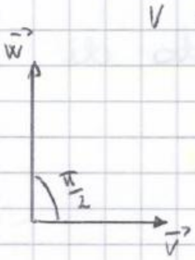
$\overline{OH'} = v_u = v\cos\theta$

$$|\vec{u}| = 1$$



$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v \cdot \underbrace{u}_{\text{modulo di } u} \cdot \cos\theta = v\cos\theta = v_u$$

$$\vec{v} = v_u \cdot \vec{u} + \left(\vec{v} - v_u \cdot \vec{u}\right) = \vec{v}_u + \vec{v}_1$$

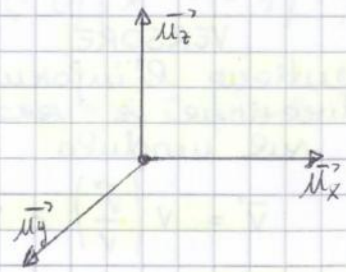


$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v \cdot w \cdot \cos\theta$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

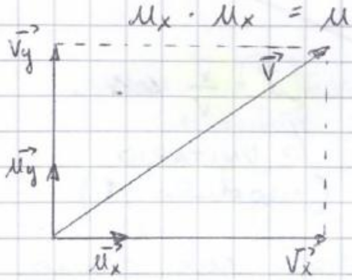
REGOLE DI BASE

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y &= 0 \\ \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x &= 1 \\ \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y &= 1 \end{aligned}\right\} \text{basi ortogonali}$$



$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0$$

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1$$



$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{u}_x + v_y \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{w} = w_x \cdot \vec{u}_x + w_y \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(v_x \cdot \vec{u}_x + v_y \cdot \vec{u}_y\right)\left(w_x \cdot \vec{u}_x + w_y \cdot \vec{u}_y\right) =$$

$$= v_x \vec{u}_x \cdot w_x \vec{u}_x + \underbrace{\cancel{v_x u_x \cdot w_y u_y} + \cancel{v_y u_y \cdot w_x u_x}}_{\text{prodotti misti} = 0} + v_y u_y \cdot w_y u_y$$

usando la base ortonormale u_x, u_y i termini misti si cancellano

$$= v_x w_x + v_y w_y = v\, w \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w}$$

se fossimo in 3D:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

$\vec V = V_x \vec u_x + V_y \vec u_y + V_z \vec u_z$ $\qquad$ $\vec W = W_x \vec u_x + W_y \vec u_y + W_z \vec u_z$

$$\vec V \times \vec W = (V_x \vec u_x + V_y \vec u_y + V_z \vec u_z) \times (W_x \vec u_x + W_y \vec u_y + W_z \vec u_z) =$$

$$= V_x \vec u_x (W_x \vec u_x + W_y \vec u_y + W_z \vec u_z) + V_y \vec u_y (W_x \vec u_x + W_y \vec u_y + W_z \vec u_z) + V_z \vec u_z (W_x \vec u_x + W_y \vec u_y + W_z$$

$$= \cancel{V_x \vec u_x \cdot W_x \vec u_x} + V_x \vec u_x W_y \vec u_y + V_x \vec u_x W_z \vec u_z +$$

$$+ V_y \vec u_y \cdot W_x \vec u_x + \cancel{V_y \vec u_y W_y \vec u_y} + V_y \vec u_y W_z \vec u_z +$$

$$+ V_z \vec u_z \cdot W_x \vec u_x + V_z \vec u_z W_y \vec u_y + \cancel{V_z \vec u_z W_z \vec u_z} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec u_x \cdot \vec u_x = 0 \\ \vec u_y \cdot \vec u_y = 0 \\ \vec u_z \cdot \vec u_z = 0 \end{array}}$$

$\vec u_x \cdot \vec u_y = \vec u_z$

$\vec u_y \cdot \vec u_z = \vec u_x$

$\vec u_z \cdot \vec u_x = \vec u_y$

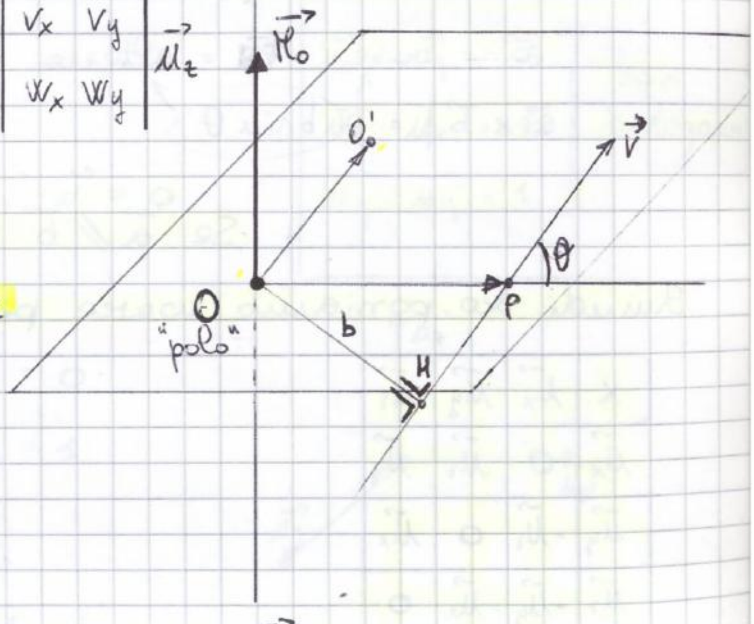
scambiando i termini ottengo "−"

$$= (V_x W_y) \vec u_z + (V_x W_z) \cdot -\vec u_y +$$

$$+ (V_y W_x) \cdot -\vec u_z + (V_y W_z) \cdot \vec u_x + (V_z W_x) \cdot \vec u_y + (V_z W_y) \cdot -\vec u_x =$$

$$= (V_y W_z - V_z W_y) \vec u_x + (V_z W_x - V_x W_z) \vec u_y + (V_x W_y - V_y W_x) \vec u_z$$

$$= \begin{vmatrix} V_y & V_z \\ W_y & W_z \end{vmatrix} \vec u_x + \begin{vmatrix} V_z & V_x \\ W_z & W_x \end{vmatrix} \vec u_y + \begin{vmatrix} V_x & V_y \\ W_x & W_y \end{vmatrix} \vec u_z$$



a cosa serve? **MOMENTI**

servono per descrivere le rotazioni

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

$$\vec M_o = \vec{OP} \times \vec V = (\vec{OO'} + \vec{O'P}) \times \vec V =$$

$$\boxed{\vec M_o = \vec{OO'} \times \vec V + \vec{O'P} \times \vec V}$$

quando $OO' // v$ il termine e' zero: in questo caso il momento non dipende da dove scelgo il polo

$$\vec M_o = \vec{OP} \times \vec V$$

$$M_o = OP \cdot V \cdot \sin\theta =$$

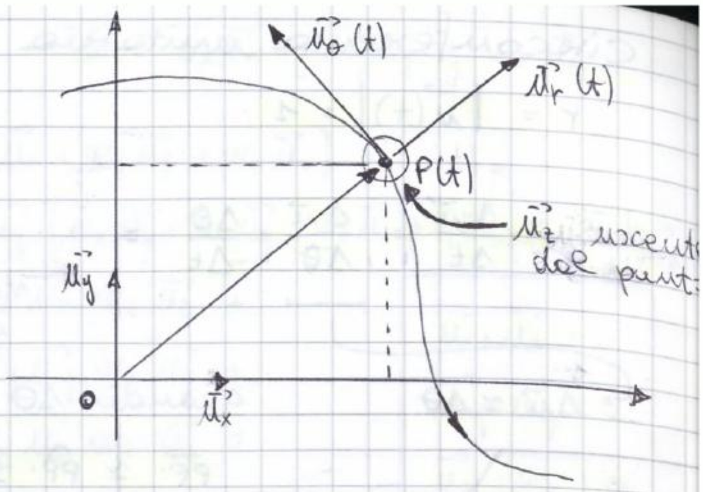
$$M_o = \vec{OH} \cdot V$$

$\vec{OH} = OP \cdot \sin\theta$ è la distanza del polo dalla direzione di $\vec v$, si chiama "BRACCIO" (b)

COORDINATE POLARI

$$\vec{u}_\theta(t) = \vec{u}_z \times \vec{u}_r(t)$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = r \cdot \vec{u}_r}$$

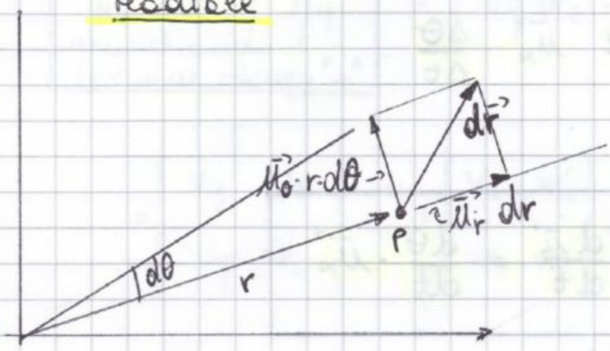


$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(r \cdot u_r)$$ derivando si ottiene:

$$\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

velocità radiale

$\frac{d\vec{u}_r}{dt}$: $\vec{u}_N$ direzione normale → $\vec{u}_\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \; ; \; \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\vec{u}_\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

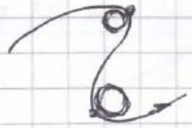
scritto in forma differenziale

$$\boxed{d\vec{r} = \vec{u}_r\, dr + \vec{u}_\theta\, r\, d\theta}$$

SISTEMA DI COORDINATE ADATTATO ALLA TRAIETTORIA

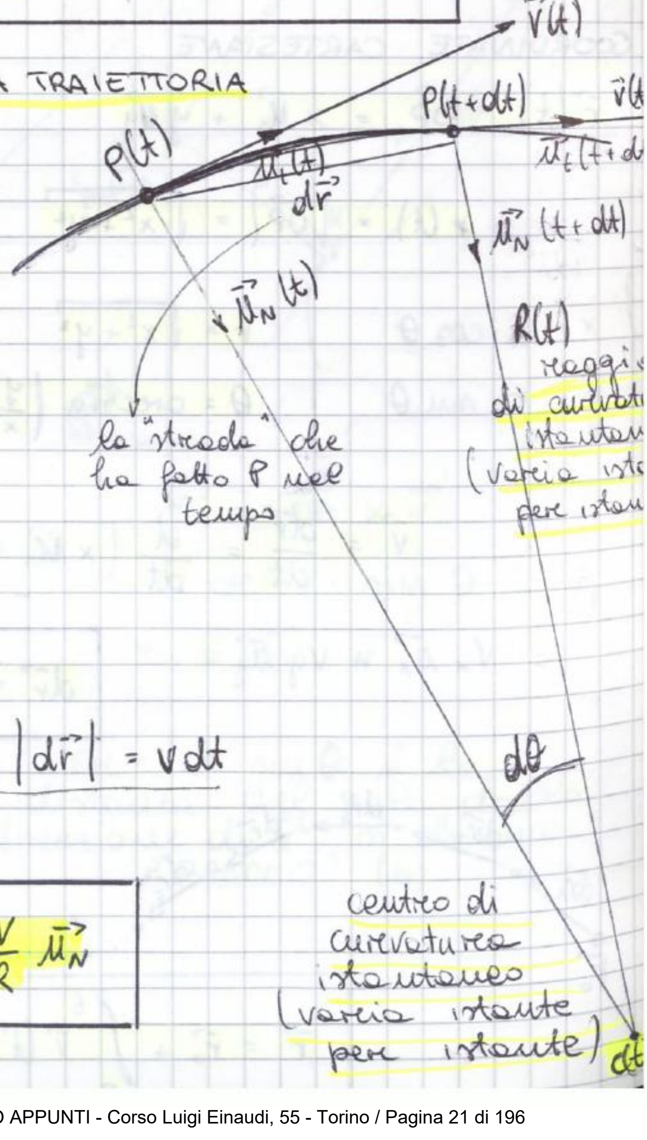
$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v}$$

la traiettoria è una circonferenza di centro c(t) se dt è piccolo



ottengo un'approssimazione migliore usando la circonferenza al posto della tangente

$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{u}_t}$$ la velocità è tangente alla traiettoria



$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = v\vec{u}_t\,dt \quad ; \quad dr = |d\vec{r}| = v\,dt$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \vec{u}_N \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}\vec{u}_N$$

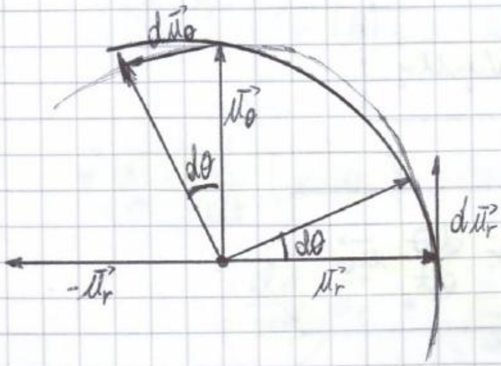
$$\boxed{\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v}{R}\vec{u}_N}$$

$$dr = \underbrace{R\,d\theta = v\,dt}$$

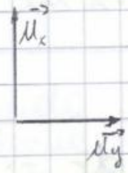
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

12 marzo

leggi di variazione delle coppie di versori normali



$d\vec{u}_x = d\vec{u}_y = 0$



$$\boxed{d\vec{u}_r = \vec{u}_\theta\, d\theta} \longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt}}$$

$$\boxed{d\vec{u}_\theta = -\vec{u}_r\, d\theta} \longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r \frac{d\theta}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \omega} \longleftarrow \text{velocità angolare}$$

ACCELERAZIONE IN COORDINATE POLARI

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \qquad \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)$$

per svolgere questa derivata usiamo la regola di derivazione del prodotto

$$\frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vec{u}_r}{dt} +$$

$$+ \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} =$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt}\vec{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r =$$

$$= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_\theta = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\vec{u}_\theta$$

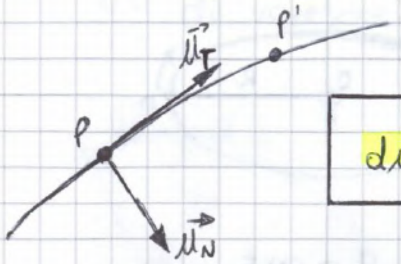
derivando $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ ottengo $\frac{1}{\cancel{r}}2\cancel{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\cancel{r}}r^{\cancel{2}}\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\boxed{= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\vec{u}_\theta =}$$

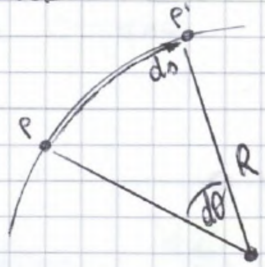
= accelerazione radiale (a_r) + accelerazione tangenziale a_θ =

$$\boxed{= a_r + a_\theta}$$

ACCELERAZIONE IN COORDINATE INTRINSECHE



$$\boxed{d\vec{u}_T = \vec{u}_N \, d\theta}$$



$$ds = R\,d\theta$$

$$d\vec{u}_T = \vec{u}_N \frac{ds}{R}$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \vec{u}_N \frac{v}{R}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{u}_T) =$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N}$$

acc. tangenziale + acc. centripeta

direzione tangente alla traiettoria

direzione verso il tempo di curvatura

RIEPILOGO

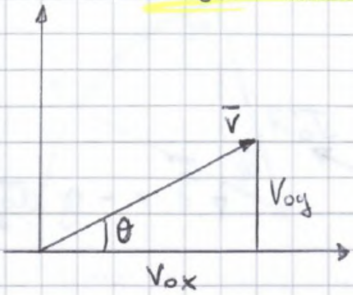
CINEMATICA 1D

- moto ~~uniformemente~~ uniforme
- moto uniformemente accelerato
- moto periodico

CINEMATICA 2D

- moto uniforme rotazionario
- moto vario rotazionario
- moto uniformemente accelerato (DA FARE)

$$\boxed{y = \frac{V_{oy}}{V_{ox}} x - \frac{g}{2V_{ox}^2} x^2} \longrightarrow$$ è l'equazione di una parabola

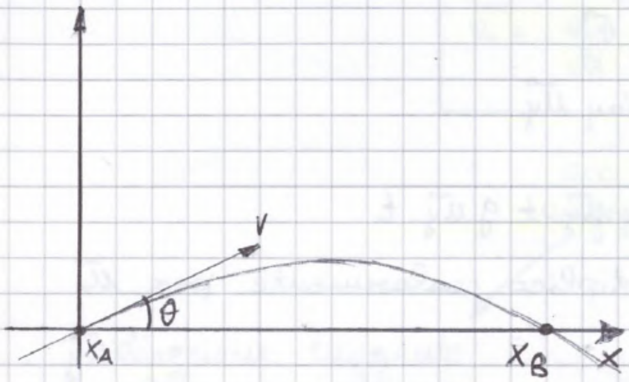


$$V_{ox} = V\cos\theta$$

$$V_{oy} = V\sin\theta$$

$$y = \frac{\cancel{V}\sin\theta}{\cancel{V}\cos\theta} x - \frac{g}{2(V\cos\theta)^2} x^2$$

$$y = tg\theta\, x - \frac{g}{2V^2\cos^2\theta} x^2$$



$$\tan\theta\, x - \frac{g}{2V^2\cos^2\theta} x^2 = 0$$

$$x\left(\tan\theta - \frac{g}{2V^2\cos^2\theta} x\right) = 0$$

$$X_A = 0$$

$$\tan\theta = \frac{g}{2V^2\cos^2\theta} x ;$$

$$x = \frac{tg\theta\,(2V^2\cos^2\theta)}{g} ; \quad x = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}(2V^2\cos^2\theta)}{g} ;$$

$$X_B = \frac{2V^2}{g}\sin\theta\cos\theta$$

$$\boxed{2\sin\theta\cdot\cos\theta = \sin 2\theta}$$

$$X_B = \frac{V^2}{g}\sin 2\theta$$

$$\sin 2\theta = \frac{g X_B}{V^2} ; \quad \boxed{\theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{g X_B}{V^2}\right)}$$

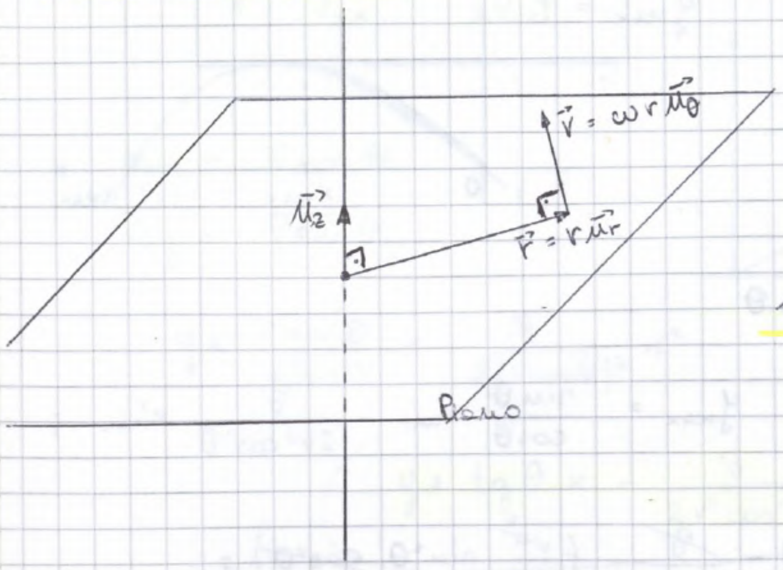
$$t_B = t_{urto} = ?$$

$$t = \frac{X - X_0}{V_{ox}} ; \quad t_B = \frac{X_B}{V\cos\theta} = \frac{1}{V\cancel{\cos\theta}}\frac{V^2}{g}2\sin\theta\cancel{\cos\theta}$$

$$t_B = \frac{2V}{g}\sin\theta$$

MOTO CIRCOLARE

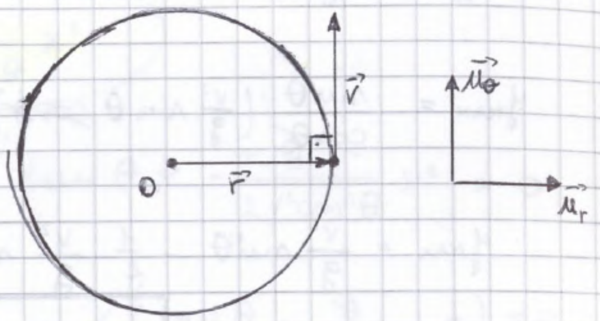
18 marzo



r = costante

$\frac{d\theta}{dt} = \omega$ = costante

$\vec{u_\theta} = \vec{u_z} \times \vec{u_r}$



$$\vec{v} = \omega r \vec{u_\theta} = \omega r \vec{u_z} \times \vec{u_r} =$$
$$= \omega \vec{u_z} \times r\vec{u_r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u_z} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\vec{u_z}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_z} = \vec{\alpha}$$ vettore accelerazione angolare

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}} \rightarrow \vec{a} = \vec{a_\theta} + \vec{a_r}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}} \rightarrow \vec{a_\theta} + \vec{a_r}$$

caso di moto uniforme $\alpha = 0$ no accelerazione angolare

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\cancel{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = \boxed{-\omega^2 \vec{r}}$$

perchè sono $\perp$

III^a Legge di Newton: Principio di Azione Reazione

$$\boxed{F_{AB} + F_{BA} = 0}$$

Queste azioni sono uguali, non alla variazione di velocità, ma alla variazione della quantità di moto

La massa non è uguale al peso: può essere considerata come una resistenza che i corpi fanno verso uno spostamento.

La massa esiste anche senza gravità, il peso invece no

I motori a reazione sfruttano il principio di azione reazione (un esempio può essere un palloncino pieno d'aria si muove grazie alla spinta contraria all'uscita dell'aria all'interno di esso

QUANTITÀ DI MOTO E IMPULSO

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

II^a Legge di Newton

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

in forma differenziale

$$\vec{F}\,dt = d\vec{p} \quad ; \quad \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt' = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p}$$

essendo dei vettori per svolgere l'integrale si devono scomporre

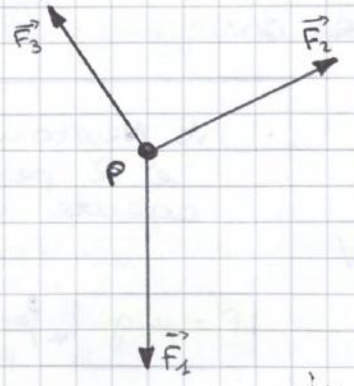
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_{0x}}^{t_x} F_x\,dt = \int_{p_{0x}}^{p_x} dp = p_x - p_{0x} \\ \displaystyle\int_{t_{0y}}^{t_y} F_y\,dt = \int_{p_{0y}}^{p_y} dp = p_y - p_{0y} \\ \displaystyle\int_{t_{0z}}^{t_z} F_z\,dt = \int_{p_{0z}}^{p_z} dp = p_z - p_{0z} \end{cases}$$

riunendoli assieme otteniamo:

$$\boxed{\vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}}$$

Teorema della quantità di moto (forma integrale della II^a Legge di Newton)

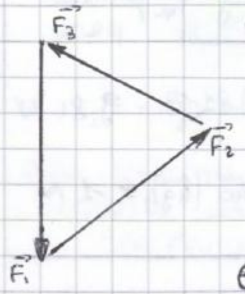
impulso della forza su Δt $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt' = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}}$



$$m\vec{a} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \dots + \vec{F_n} = \vec{R}$$

$\vec{R}$: "risultante delle forze"

quando $\boxed{\vec{R} = 0}$ ci troviamo in una situazione di equilibrio statico



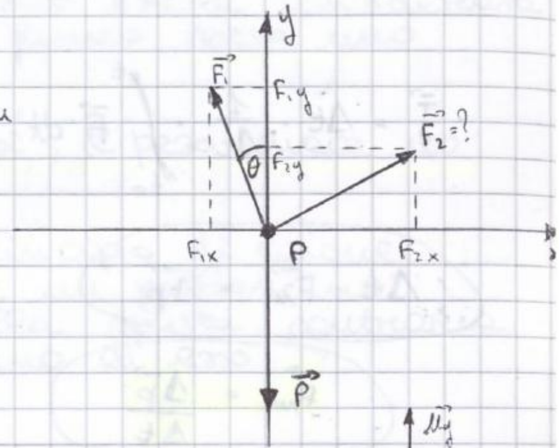
in questa situazione i vettori delle forze formano un poligono regolare chiuso

• Esempio

$\theta = 30°$
$P = 34\ N$
$F_1 = 25\ N$
$F_2 = ?$

cercare $\vec{F_2}$ per avere un equilibrio statico

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0}$$



① Coordinate cartesiane

$$x: \quad P_x + F_{1x} + F_{2x} = 0$$

$$y: \quad P_y + F_{1y} + F_{1y} = 0$$

in pratica nella direzione x dobbiamo avere $F_{1x} = F_{2x}$

$F_{1y} = F_1 \cos\theta$

$F_{1x} = -F_1 \sin\theta$

$$x: \quad F_1 \sin\theta = F_{2x}$$

la forza peso deve essere equilibrata da $F_{1y} + F_{2y}$

$$y: \quad P = F_{2y} + F_1 \cos\theta \Rightarrow F_{2y} = P - F_1 \cos\theta$$

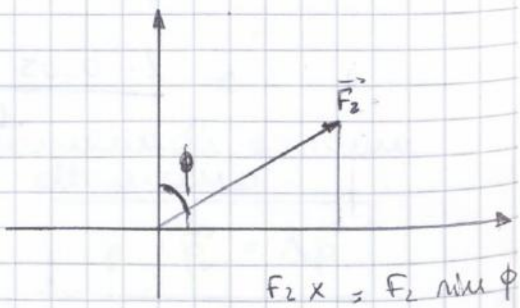
$$F_{2x} = F_1 \sin\theta \Rightarrow 25\ N \cdot \frac{1}{2} = 12,5\ N$$

$$F_{2y} = P - F_1 \cos\theta \Rightarrow 34\ N - \left(25\ N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12,3\ N$$

② Coordinate polari

$$x: \quad F_1 \sin\theta = F_2 \sin\phi$$

$$y: \quad F_2 \cos\phi = P - F_1 \cos\theta$$



$F_{2x} = F_2 \sin\phi$

$F_{2y} = F_2 \cos\phi$

$$\begin{cases} F_2 \sin\phi = F_1 \sin\theta \\ F_2 \cos\phi = P - F_1 \cos\theta \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{F_1 \sin\theta}{P - F_1\cos\theta} = \frac{25\ N \cdot \frac{1}{2}}{12,3\ N} \simeq 1$$

• $\phi \simeq 45°$

• $F_2 = F_1 \frac{\sin\theta}{\sin\phi} = 25\ N \frac{1/2}{\dots} = 25\ N/\sqrt{2} \simeq 17,6\ N$

ATTRITO STATICO

$$\boxed{F_{as} < \mu_{as} \cdot N}$$

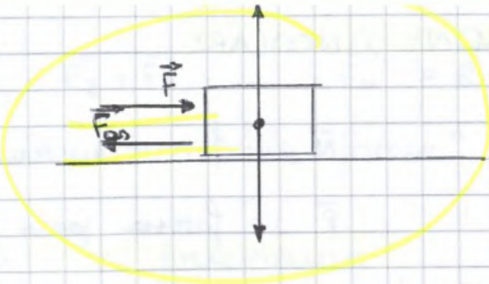
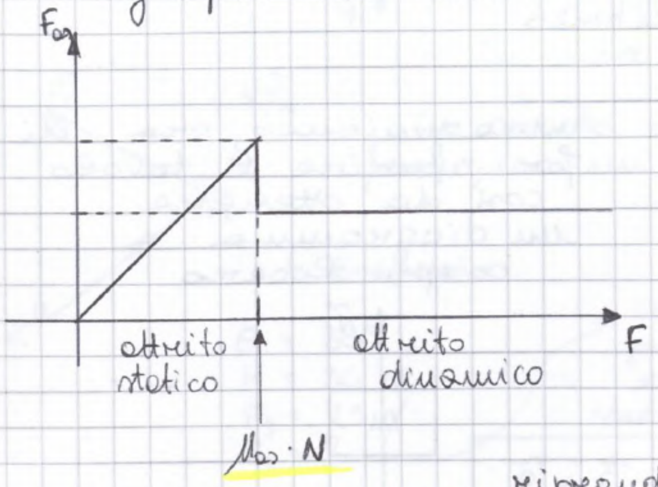
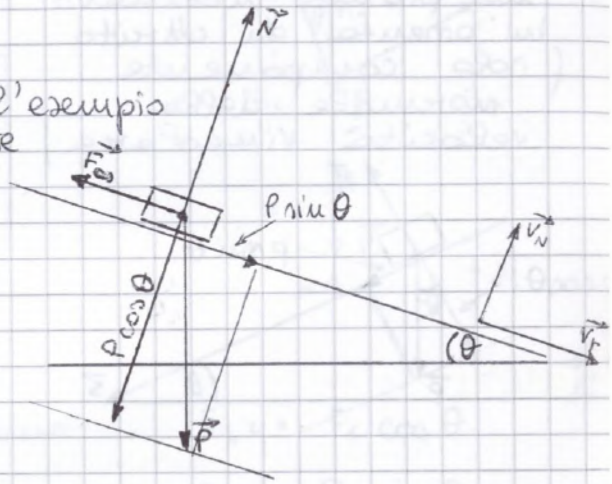


grafico dell' attrito



riprendiamo l'esempio precedente



$N = P \cdot \cos\theta$

$F_{as} = P \sin\theta < \mu_{as} \cdot N$

$= P \cdot \sin\theta < \mu_{as} \cdot P \cdot \cos\theta$

$\tan\theta < \mu_{as}$

$\tan\theta_c = \mu_{as}$

$$\boxed{\theta_c = \arctan(\mu_{as})}$$

teta critico: sopra di esso il corpo inizia a scivolare quindi regime di attrito dinamico, prima attrito statico.

ATTRITO DINAMICO

quando $F > \mu_{as} \cdot N$

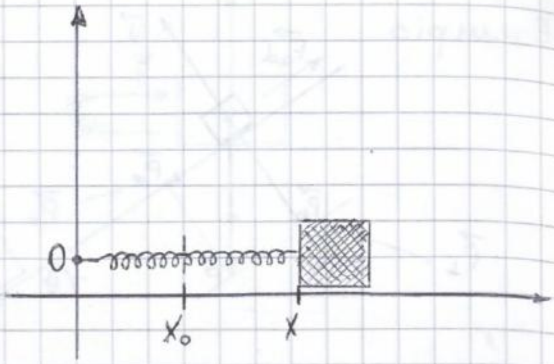
il corpo entra in movimento, ma è soggetto a una forza frenante

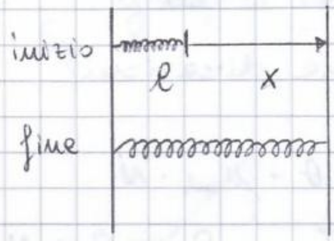
$$\vec{F}_{ad} = -\mu_{ad} \cdot N \cdot \vec{\mu}_r$$

$\vec{\mu}_r = \frac{\vec{V}}{V}$ cioè ha verso opposto alla velocità

FORZA ELASTICA

x: elongazione della molla cioè lo spostamento dalla posizione di equilibrio





$$\vec{F}_{el} = -k \cdot x \cdot \vec{u}_x$$
$$= -k \cdot \vec{x}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{el} = -k\vec{r}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{r}$$

$$\left[\frac{k}{m}\right] = \frac{1}{s^2}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$$

in 1 Dimensione

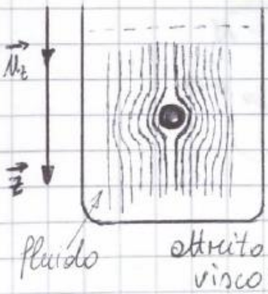
$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

equazione dell'oscillatore armonico

$\Longrightarrow$ $x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$ moto armonico

A, ϕ si ricavano dai dati iniziali

ATTRITO VISCOSO



$$\vec{F} = -\gamma \cdot \vec{v}$$

γ: "coefficiente di attrito viscoso"

la legge del moto di un corpo che cade in un fluido è soggetto alla forza peso e all'attrito viscoso

$$m \cdot \vec{a} = -\gamma\vec{v} + m \cdot g \cdot \vec{u}_z$$

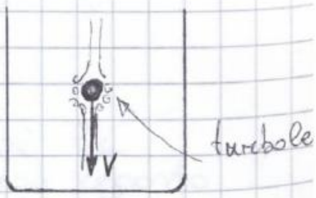
$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -\gamma\frac{dz}{dt} + m \cdot g$$

poniamo trasformarla da un equazione differenziale del II ordine che non contiene la variabile "z"

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v + mg$$

$$\boxed{v = v_z = \frac{dz}{dt}}$$

un altro tipo di attrito è quello turbolento quello generato dalla resistenza dell'aria, è più complesso rispetto a quello viscoso in quanto genera dei vortici attorno al corpo che è soggetto a questo attrito



noi non prendiamo in considerazione questo tipo di attrito

$$g - \frac{V}{\tau} = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(g - \frac{V_0}{\tau}\right)$$

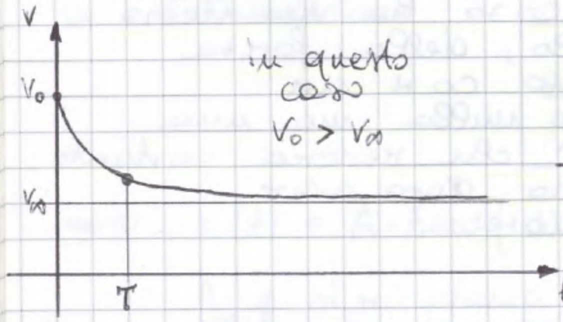
$$V = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(g - \frac{V_0}{\tau}\right)(-\tau) - g \; ; \quad V = -\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\left(g\tau - V_0\right) + g\tau \; ;$$

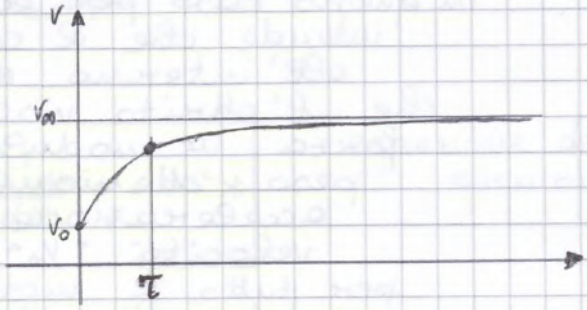
$$\boxed{\tau g = V_\infty} \qquad V = \tau g\left[1 + \left(\frac{V_0}{\tau g} - 1\right) e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

$$* \quad \boxed{V = V_\infty\left[1 + \left(\frac{V_0}{V_\infty} - 1\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}$$

$$V(0) = V_\infty\left(\cancel{1} + \frac{V_0}{V_\infty} - \cancel{1}\right) = V_0 \longleftarrow$$ le condizioni iniziali sono verificate

$$V(\infty) = V_\infty$$





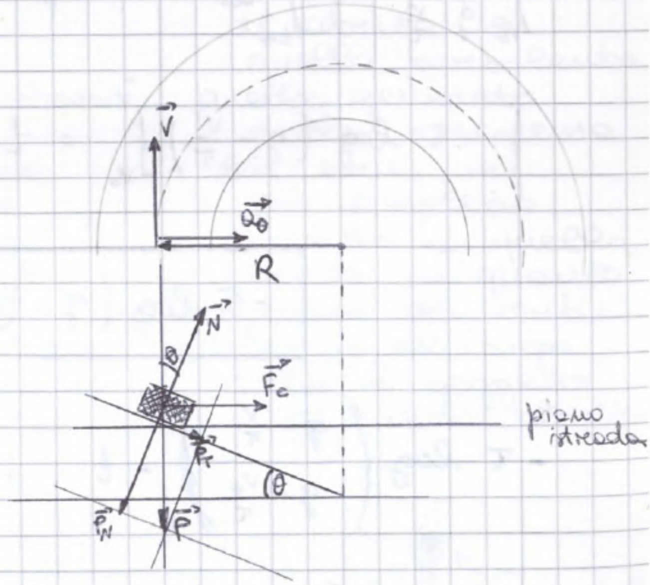
in questo caso $V_0 < V_\infty$

* pere ottenere la legge del moto e quindi questi grafici bisogna integrare la formula della velocità (*)

FORZA CENTRIPETA

$$\boxed{a_\theta = \frac{V^2}{R}}$$

$$\boxed{F_c = m\, a_\theta = m \frac{V^2}{R}}$$



Esempio: $\quad V = 20 \frac{m}{s} \qquad R = 500\, m$

$\theta = ?$

$$\vec{a_\theta} = \frac{V^2}{R} \qquad F_c = m \cdot \vec{a_\theta} = m \cdot \frac{V^2}{R} \qquad N = P\cos\theta = mg\cos\theta$$

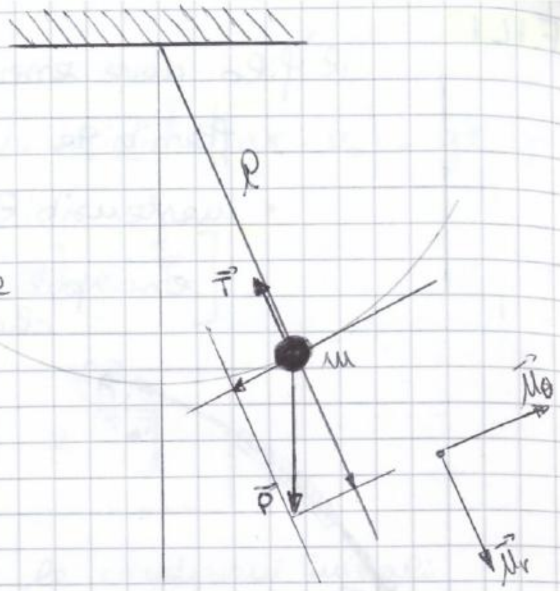
II legge $\boxed{\vec{F_c} = \vec{P} + \vec{N}}$

$$\begin{cases} x: & m\frac{V^2}{R} = N \sin\theta \\ y: & mg = N\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{V^2}{gR} = \tan\theta \longrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{V^2}{gR}\right) \simeq 6$$

il risultato, quindi, non dipende dalla massa

PENDOLO SEMPLICE



legge del moto del pendolo ?

$$m \cdot \vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

per eliminare la reazione vincolare proietto lungo $\vec{u}_\theta$

$$\vec{u}_\theta : \quad m \cdot \vec{a}_\theta = m \cdot g \cdot \sin\theta$$

$$\cancel{m} \cdot \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \cancel{m} g \sin\theta$$

quindi il moto del pendolo ha la seguente equazione differenziale:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{g \sin\theta}{\ell}}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{u}_\theta = - m g \sin\theta$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

"pulsazione" $\longrightarrow$ $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{g}{\ell} \sin\theta$$

ottengo così, dopo l'approssimazione:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{g}{\ell} \cdot \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \omega^2 \theta$$

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

θ_0, ϕ sono dati iniziali

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\ell/g}$$

questo è definito ISOCRONISMO che è presente solo nel limite di piccole oscillazione

ho bisogno di approssimare $\sin\theta$ in questa equazione. Per farlo uso l'equazione di Taylor per il seno

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

confrontando ~~il~~ il grado dell'approssimazione che si vuole usare con il termine di Taylor successivo si ottiene la stima dell'errore commesso

per esempio: $\dfrac{\theta^3/6}{\theta} < 10^{-3}$

questa approssimazione la posso usare con oscillazioni infinitesime

quando ad esempio $\theta = 0$ o $\theta \simeq \pi$

$$\boxed{dg = \frac{4\pi^2}{T^2}\, dl - 2\left(\frac{4\pi^2 l}{T}\right) dT}$$

$$df(x) = \frac{df}{dx}\,dx$$

"STIMA DEGLI ERRORI"

$$df(x,y) = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy$$

$T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$

questo tipo di calcolo si chiama: "DERIVATA PARZIALE"

$\bar{T}$: "valore medio di T"

$$\bar{T} = \frac{1}{N}\left(T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_N\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_i \left(T_i - \bar{T}\right)^2}$$

SCARTO QUADRATICO

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i \left(T_i - \bar{T}\right)^2}$$

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i \left(l_i - \bar{l}\right)^2}$$

SCARTO QUADRATICO MEDIO

O

DEVIAZIONE STANDARD

inserendo le stime degli errori nella formula sopra

$$dg^2 = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 dl^2 + 4\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right)^2 dT^2}$$

otteniamo la formula di propagazione degli errori

$$\boxed{\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \cdot \sigma_l^2 + 4\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right)^2 \cdot \sigma_T^2}}\ *$$

$$\boxed{\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2\,\frac{dT}{T}}$$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

la formula di propagazione degli errori è più semplice se uso gli errori relativi

$$x = y^a z^b w^c$$

$$d \log x \Rightarrow \frac{dx}{x} = a\,\frac{dy}{y} + b\,\frac{dz}{z} + c\,\frac{dw}{w}$$

"gli errori relativi si sommano"

$$\boxed{\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}}$$

* è la stessa formula (*) ma questa è più semplice da usare

$$dg_y = g(x, y + dy) - g(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

se invece le vario entrambe

$$dg = dg_x + dg_y = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

$$\boxed{dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy}$$

(approssimazione del I ordine, cioè trascurando i termini di ordine superiore, tipo: dx^2, $dxdy$, dy^2, $dx^2 dy$, ...)

torniamo agli errori:

1 variabile $g = g(x)$

$$dg = \frac{dg}{dx} dx$$

$$\sigma_g = \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \sigma_x$$

mettiamo il modulo perché le variazioni possono essere anche negative.

2 variabili $g = g(x, y)$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

$$dg^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 dy^2 + 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} dxdy$$

l'ultimo termine diminuirà all'aumentare del numero delle misurazioni

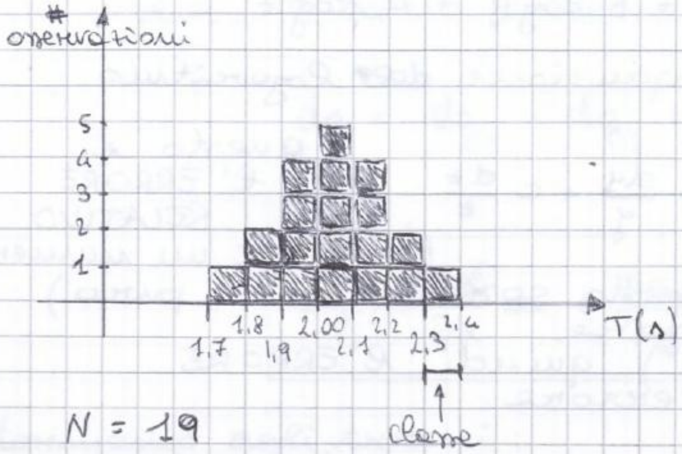
la formula di propagazione degli errori diventa (il quadrato dell'incertezza)

$$\boxed{\sigma_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2}$$

ISTOGRAMMA

con # si intende numero

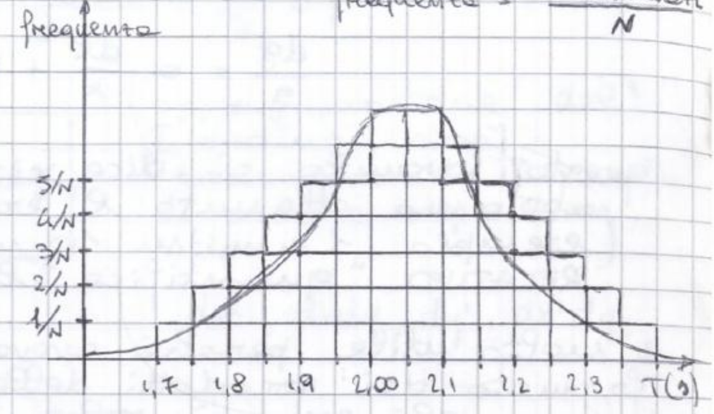


N = 19

ISTOGRAMMA NORMALIZZATO

cioè il numero delle osservazioni (# osservazioni) viene diviso per il numero delle misurazioni (N)

$$\text{frequenza} = \frac{\#\ \text{osservazioni}}{N}$$



nel limite $N \to \infty$ posso scegliere classi sempre più piccole, e il profilo dell'istogramma tende ad approssimare una curva continua; questa curva è detta:

CURVA DI GAUSS

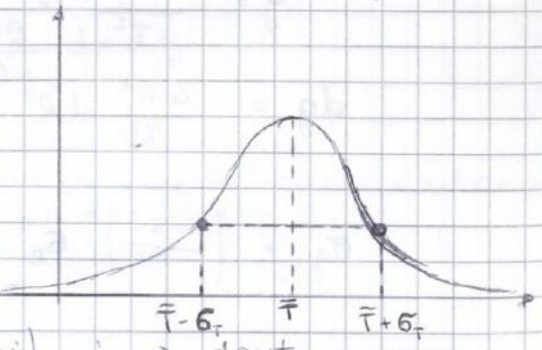
la sua equazione è:

$$\boxed{f(T) = e^{-\frac{(T-\bar{T})^2}{2\sigma_T^2}}}$$

solitamente viene normalizzata per avere l'area sotto la curva uguale a 1 che indica il 100% della possibilità che una misura stia sotto la curva.

per normalizzare si aggiunge all'equazione di Gauss un termine

$$\boxed{f(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} \cdot e^{-\frac{(T-\bar{T})^2}{2\sigma_T^2}}}$$



il valore "vero" (che non conosceremo mai) vive dentro l'intervallo $(\bar{T}-\sigma_T, \bar{T}+\sigma_T)$ con una probabilità calcolata del 68% perché l'area normalizzata della curva in quell'intervallo è di 0,68

a) stima del valore "vero" $\bar{T}$

b) stima dell'incertezza σ_T

c) stima della probabilità che $\bar{T}-\sigma_T < T_{vero} < \bar{T}+\sigma_T$ è il 68%

CRAMER:

$$m = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum y_i & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & N \end{vmatrix}} = \frac{N \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{N \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

per calcolare q si usa lo stesso metodo.

$$q = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & \sum x_i^2 \\ N & \sum x_i \end{vmatrix}} = \frac{\sum x_i y_i \sum x_i - \sum x_i^2 \sum x_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2}$$

INTERPOLAZIONE LINEARE (con i minimi quadrati)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & N \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_m^2 = \frac{\sum x_i^2}{\Delta} \sigma_y^2}$$

$$\boxed{\sigma_q^2 = \frac{N}{\Delta} \sigma_y^2}$$

LAVORO E ENERGIA

trovare la velocità di un corpo conoscendo la posizione e non il tempo

$$\vec{v}\, dv = \vec{a}\, dx \; ; \quad \int_{v_A}^{v_B} v\, dv = \int_{x_A}^{x_B} a\, dx \; ;$$

$$\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} = \int_{x_A}^{x_B} a(x)\, dx \; ; \quad m \frac{v_B^2}{2} - m \frac{v_A^2}{2} = \int_{x_A}^{x_B} m\, a(x)\, dx \; ;$$

$$\boxed{F(x) = m \cdot a(x)}$$

$$\boxed{E_K = m \frac{v^2}{2}}$$

energia cinetica

Teorema dell'energia cinetica (1D)

$$E_{K_B} - E_{K_A} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\, dx = W$$

all'interno dell'integrale abbiamo il prodotto di una forza [F(x)] per uno spostamento (dx)

W = "lavoro" → il lavoro che compie la forza per andare da x_A a x_B

TEOREMA ENERGIA CINETICA

$$\boxed{E_{K_B} - E_{K_A} = W_{A \to B}} \longleftrightarrow \boxed{\Delta E_K = W}$$

$\Delta E_K = E_{K_B} - E_{K_A} = W_{A\to B} = \int_A \vec{F}\, d\vec{r}$ in 3D

$$\boxed{E_K = m\frac{V^2}{2}}$$

$[E_K] = [W_{A\to B}] = kg\,\frac{m^2}{s^2} = N\cdot m = J$

J: Joule: 1 J è l'energia che serve per spostare 1 kg di 1 m

$$\boxed{P = \frac{dw}{dt}}$$

P: "potenza"

$[P] = \frac{J}{s} = W$

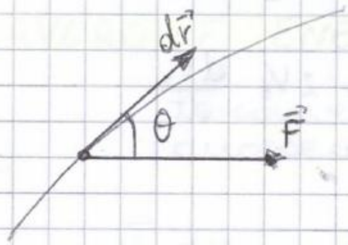
W: "Watt"

scrivendo l'equazione di sopra in forma differenziale otteniamo il lavoro infinitesimo

$$dw = \vec{F}\, d\vec{r} = \vec{F}\,\vec{v}\, dt = P\, dt$$

Esempi:

$$\boxed{dw = \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

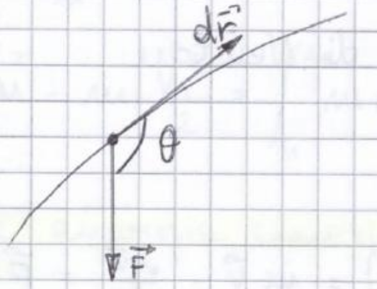


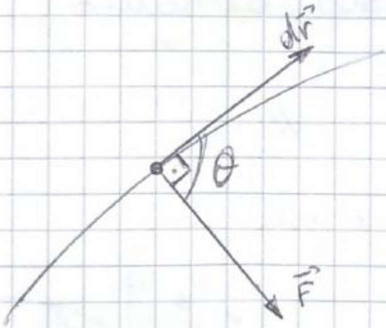
quando $\theta < \frac{\pi}{2}$ la forza è concorde allo spostamento quindi

$$\boxed{dw > 0}$$

quando $\theta > \frac{\pi}{2}$ la forza si oppone allo spostamento

$$\boxed{dw < 0}$$





quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ la forza è $\perp$ allo spostamento

$$\boxed{dw = 0}$$

questo tipo di forza è chiamat

FORZA DEVIATRICE

E : "energia"

$$\boxed{E = m\frac{V_B^2}{2} + m g z_B = m\frac{V_A^2}{2} + m g z_A}$$

$E_K = m\frac{V^2}{2}$ E_P : "energia potenziale" $= m g z$

questa somma è costante quindi $E = $ cost. ma E_K e E_P variano durante il moto

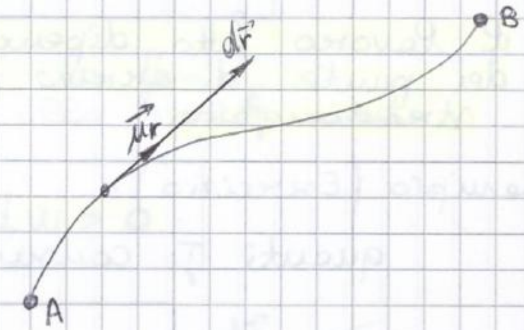
CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$\boxed{E_{K_B} + E_{P_B} = E_{K_A} + E_{P_A}} \Rightarrow \text{FORZA CONSERVATRICE}$$

LAVORO DELLA FORZA D'ATTRITO

$$\vec{F} = -\mu_d \cdot N \cdot \vec{u}_T$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B -\mu_d \cdot N \cdot \vec{u}_T \cdot d\vec{r}$$



ds = modulo dello spostamento

$$W_{A\to B} = -\mu_d \cdot N \int_A^B ds = -\mu_d N \cdot \left(\text{lunghezza della strada percorsa andando da } A \to B\right)$$

1. NON È REVERSIBILE
2. DIPENDE DALLA STRADA FATTA
3. NON È UNA FORZA CONSERVATRICE

FORZE CONSERVATIVE

1) il lavoro dipende solo dai punti di partenza e arrivo non dalla strada percorsa
2) se inverto la traiettoria il lavoro cambia segno

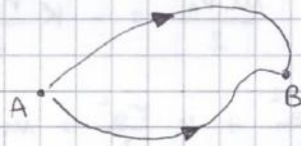
$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_B^A \vec{F}\, d\vec{r}$$

$\Rightarrow$ CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA

FORZE NON CONSERVATIVE (O DISSIPATIVE)

1) il lavoro dipende dal percorso
2) se inverto la traiettoria il lavoro resta negativo

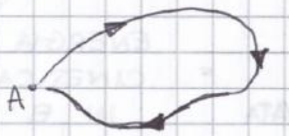
FORZE CONSERVATIVE



FORZA CONSERVATIVA: non importa la strada percorsa

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$m\frac{V_B^2}{2} - m\frac{V_A^2}{2} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r}$$



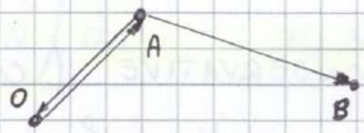
FORZA CONSERVATIVA

$$W_{A\to A} = 0$$

possiamo "spezzare" in due l'integrale ottenendo due integrali:

il primo parte da "O" e arriva in "B" passando per "A"

il secondo va da "O" a "A"



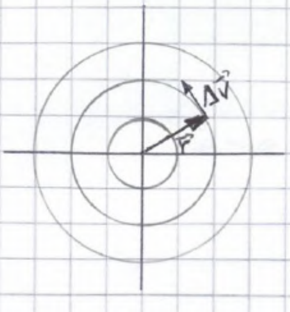
sottraendo il secondo dal primo otteniamo l'integrale di partenza

$$m\frac{V_B^2}{2} - m\frac{V_A^2}{2} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_A} \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$\boxed{m\frac{V_B^2}{2} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = m\frac{V_A^2}{2} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_A} \vec{F}\, d\vec{r}}$$

$$E_{K_B} + E_{P_B} = E_{K_A} + E_{P_A}$$

$$0 = \Delta f = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y) \overset{1^\circ \text{ ordine}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y\right)\cdot\left(\vec{u}_x\Delta x + \vec{u}_y\Delta y\right)$$

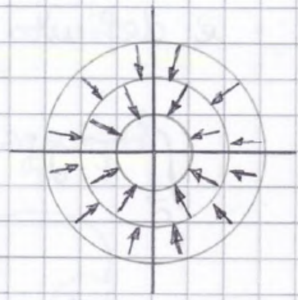
$$\boxed{0 = \nabla f \cdot \Delta\vec{r}}$$

il gradiente è $\perp$ al piccolo spostamento $\Delta\vec{r}$ effettuato quindi è ortogonale alle curve di livello

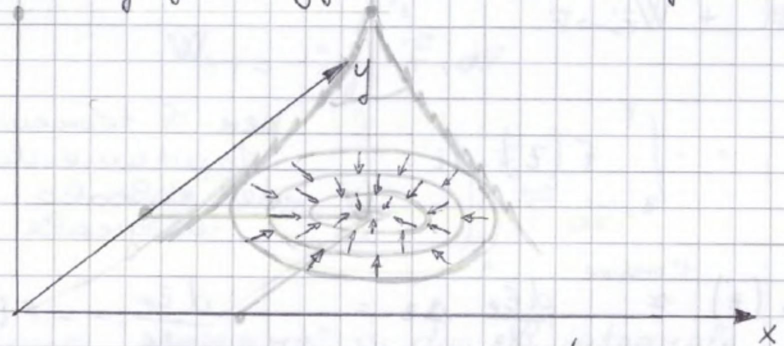
$f(x,y) = x^2 + y^2$

il gradiente di f è:

$$\nabla f = 2x\cdot\vec{u}_x + 2y\cdot\vec{u}_y = 2(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) = 2\vec{r}$$



$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$ = raggio vettore di componenti x e y

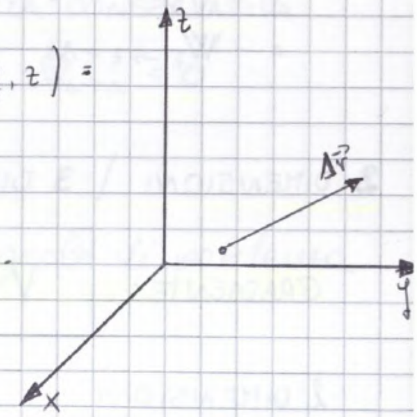


Riprendiamo il calcolo in 2/3 DIMENSIONI

$$\Delta E_p = E_p(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - E_p(x,y,z) =$$

$$\overset{1^\circ \text{ ordine}}{=} \frac{\partial E_p}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\Delta z$$

$$\overset{def}{=} -W_{\vec{r}\to\vec{r}+\Delta r} \overset{def}{\simeq} -\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} =$$



$$\boxed{= -F_x\Delta x - F_y\Delta y - F_z\Delta z}$$

quindi:

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

che si può scrivere anche:

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla E_p}$$

sono le stesse formule.

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ quantità cinematica

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ quantità dinamica

$$\cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{r}^2}{d^2t}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} =$$

$$\boxed{\vec{v} \times m\vec{v} = 0} \qquad \boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

II legge di Newton

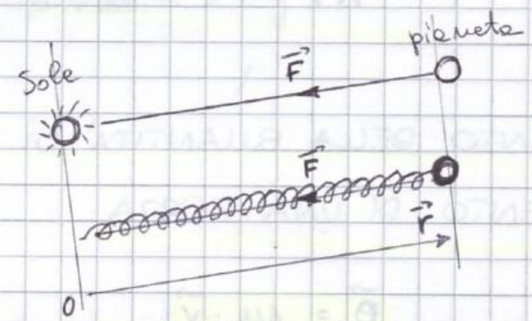
$$= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \longleftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}}$$

TEOREMA DEL L'ENERGIA ANGOLARE

ESEMPIO: FORZE CENTRALI

il momento di una forza centrale è nullo

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



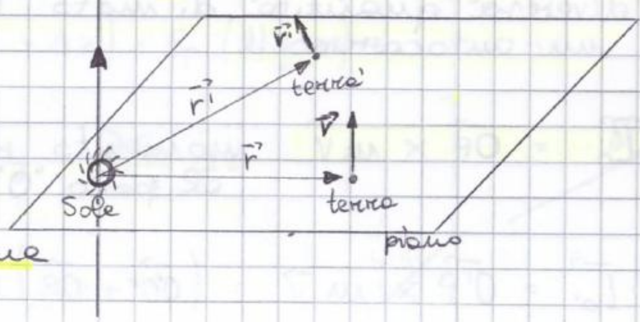
$\vec{r}$ e $\vec{F}$ sono //

quindi $\vec{r} \times \vec{F} = 0$

quindi il momento angolare è costante di conseguenza è conservato

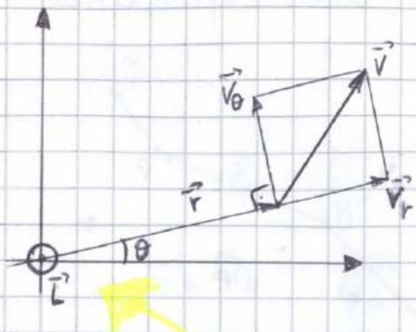
$$\vec{L} = cost$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r}' \times \vec{v}'$$



$\vec{L}$ è ortogonale per costruzione al piano in cui giacciono $\vec{r}$ e $\vec{v}$

Infatti: l'orbita dei pianeti giace in un piano invariabile (per la terra si chiama PIANO DELL'ECLITTICA)



$\vec{L}$ è uscente dal piano

$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v_r} + \vec{v_\theta}) = m\vec{r} \times \vec{v_\theta} =$$

$$= m\,\vec{r}\,\vec{v_\theta} \cdot \vec{u_z} = m r^2 \omega \cdot \vec{u_z} =$$

$$= m r^2 \omega\, \vec{u_z}$$

$$\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_\theta}$$

$$\boxed{L_z = L = m r^2 \omega}$$

$$\vec{v_\theta} = \omega \cdot r = \frac{d\theta}{dt} r$$

LEGGI DI CONSERVAZIONE

$\vec{F} = 0 \Downarrow \vec{p} = cost$ (moto uniforme)

$\vec{M} = 0 \Downarrow \vec{L} = cost$ (moto piano)

$W = 0 \Downarrow E_K = cost$

nel caso di forze conservative

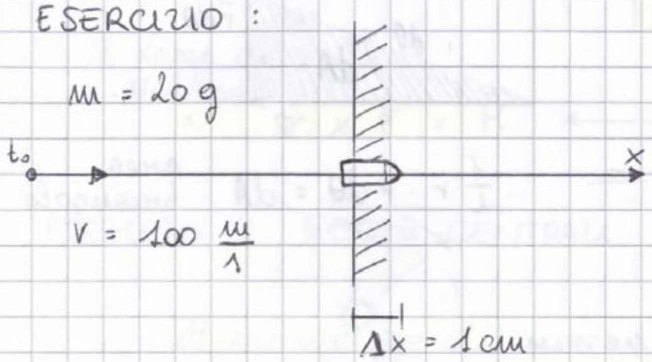
$$W_{A \to B} = -(E_{P_B} - E_{P_A})$$

$$E_K + E_P = cost$$

l'energia cinetica da sola non si conserva ma si conserva l'energia totale

ESERCIZIO :

$m = 20\,g$



t_0 x

$v = 100 \frac{m}{s}$

$\Delta x = 1\,cm$

stimare il tempo di arresto : forza media che il muro esercita sul proiettile per formularlo

T. ENERGIA CINETICA

$$E_{K_B} - E_{K_A} = W_{B \to A}$$

$$0 - \frac{m}{2} v^2 = \vec{F} \Delta \vec{r} \cong - F_m \Delta x$$

$$m \frac{V^2}{2} = F_m \Delta x \implies F_m = \frac{mV^2}{2\Delta x}$$

$$F_m = \frac{(0{,}002\,kg)(100\,\frac{m}{s})^2}{2(0{,}01\,m)} =$$

$$= \frac{10^{-2}\,kg \cdot 10^{-4}\,\frac{m^2}{s^2}}{10^{-2}\,m} = \underline{10^{-4}\,N}$$

QUANTITA' DI MOTO

~~T. ENERGIA CINETICA~~

$$\vec{P}_B - \vec{P}_A = \vec{F}_m \Delta t$$

$$0 - mv = -F_m \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{mv}{F_m}$$

$$\Delta t = \frac{mv}{\frac{mV^2}{2\Delta x}} = \frac{\cancel{mv}}{\cancel{mV^2}} \cdot 2\Delta x =$$

$$= \frac{2\Delta x}{V} = \frac{2 \cdot 0{,}01\,m}{100\,m/s} =$$

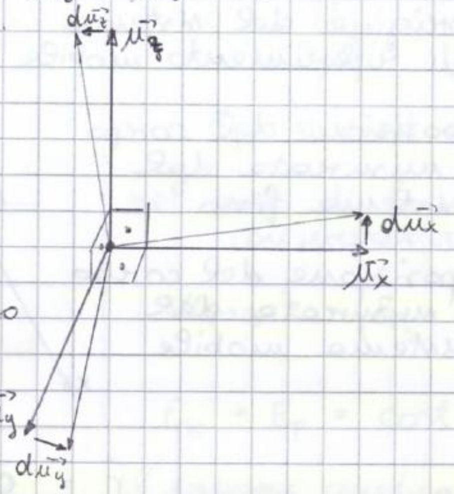
$$= \underline{2 \times 10^{-4}\,s}$$

$$F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} \vec{u_x}\cdot\vec{u_x} = 1 \; ; & \vec{u_x}\cdot\vec{u_y} = 0 \; ; & \vec{u_x}\cdot\vec{u_z} = 0 \\ \vec{u_y}\cdot\vec{u_x} = 0 \; ; & \vec{u_y}\cdot\vec{u_y} = 1 \; ; & \vec{u_y}\cdot\vec{u_z} = 0 \\ \vec{u_z}\cdot\vec{u_x} = 0 \; ; & \vec{u_z}\cdot\vec{u_y} = 0 \; ; & \vec{u_z}\cdot\vec{u_z} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u_x}\times\vec{u_y} = \vec{u_z} \\ \vec{u_y}\times\vec{u_z} = \vec{u_x} \\ \vec{u_z}\times\vec{u_x} = \vec{u_y} \end{cases}$$

x → y → z



faccio uno spostamento infinitesimo dei versori tenendo costante il loro angolo (l'uno dall'altro)

$$\vec{V} = V_x\vec{u_x} + V_y\vec{u_y} + V_z\vec{u_z} =$$
$$= \left(V_x\vec{u_x}\right)\vec{u_x} + \left(V_y\vec{u_y}\right)\vec{u_y} + \left(V_z\vec{u_z}\right)\vec{u_z}$$

$$d\vec{u_x} = \underbrace{\cancel{\left(\vec{u_x}\,d\vec{u_x}\right)}}_{0}\vec{u_x} + \left(\vec{u_y}\,d\vec{u_x}\right)\vec{u_y} + \left(\vec{u_z}\,d\vec{u_z}\right)\vec{u_z}$$
$$d\vec{u_y} = \left(\vec{u_x}\,d\vec{u_y}\right)\vec{u_x} + \underbrace{\cancel{\left(\vec{u_y}\,d\vec{u_y}\right)}}_{0}\vec{u_y} + \left(\vec{u_z}\,d\vec{u_y}\right)\vec{u_z}$$
$$d\vec{u_z} = \left(\vec{u_x}\,d\vec{u_z}\right)\vec{u_x} + \left(\vec{u_y}\,d\vec{u_z}\right)\vec{u_y} + \underbrace{\cancel{\left(\vec{u_z}\,d\vec{u_z}\right)}}_{0}\vec{u_z}$$

questa è una matrice antisimmetrica in quanto la diagonale presenta termini nulli e i termini si compongono in questo modo:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

$$\left(\vec{u_y}\,d\vec{u_x}\right)\vec{u_y} = d\theta_z \; ; \quad \left(\vec{u_x}\,d\vec{u_z}\right)\vec{u_x} = d\theta_y \; ; \quad \left(\vec{u_z}\,d\vec{u_y}\right)\vec{u_z} = d\theta_x$$

$$d\left(\frac{u_x^2}{2}\right) = \vec{u_x}\,d\vec{u_x} = 0 \; ; \quad \vec{u_x}\cdot\vec{u_y} = 0$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\vec{u_x}\,\vec{u_y}\right) = \frac{d}{dt}\vec{u_x}\cdot\vec{u_y} + \vec{u_x}\cdot\frac{d}{dt}\vec{u_y} \; ; \quad d\vec{u_x}\cdot\vec{u_y} = -d\vec{u_y}\cdot\vec{u_x}$$

ho parametrizzato la rotazione infinitesima in termini di tre angoli infinitesimi

$$\begin{cases} d\vec{u_x} = \quad + d\theta_z - d\theta_y \\ d\vec{u_y} = -d\theta_z + \quad + d\theta_x \\ d\vec{u_z} = d\theta_y - d\theta_x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\vec{u_x}}{dt} = + \vec{u_y}\dfrac{d\theta_z}{dt} - \vec{u_z}\dfrac{d\theta_y}{dt} \\ \dfrac{d\vec{u_y}}{dt} = -\vec{u_x}\dfrac{d\theta_z}{dt} + \quad + \vec{u_z}\dfrac{d\theta_x}{dt} \\ \dfrac{d\vec{u_z}}{dt} = \vec{u_x}\dfrac{d\theta_y}{dt} - \vec{u_y}\dfrac{d\theta_x}{dt} \end{cases}$$

Riprendo il calcolo $\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r'}$ derivando e sostituendo otteniamo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{OO'} + \frac{d}{dt}\vec{r'}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \vec{V_{O'}}$$

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

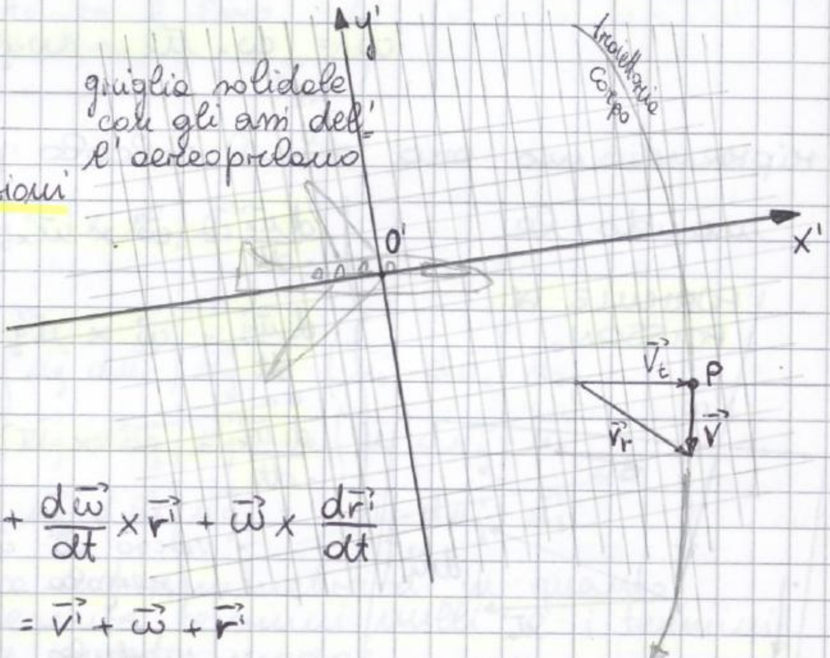
$$\boxed{\vec{V} = \vec{V_{O'}} + \vec{V'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}}$$

$\vec{V}$: velocità misurata nel sistema fisso

$\vec{V'}$: VELOCITÀ RELATIVA, cioè misurata nel sistema mobile

$\vec{V_{O'}} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$: VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO $\vec{V_t}$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V_t} + \vec{V'}}$$



per trovare le accelerazioni derivo l'equazione delle velocità

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V_{O'}} + \vec{V'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a_{O'}} + \vec{a'} + \vec{\omega} \times \vec{v'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

consideriamo che $\frac{dr'}{dt} = \vec{v'} + \vec{\omega} + \vec{r'}$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V_t} + \vec{V_r}}$$

e che per la derivata di $\frac{dv'}{dt}$ svolgo gli stessi passaggi fatti per trovare $\frac{dr'}{dt}$

quindi: $\boxed{\frac{dv'}{dt} = \vec{a'} + \vec{\omega} \times \vec{v'}}$ otteniamo così:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a_{O'}} + \vec{a'} + \vec{\omega} \times \vec{v'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\vec{v'} + \vec{\omega} + \vec{r'})$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a_{O'}} + \vec{a'} + \vec{\omega} \times \vec{v'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a_{O'}} + \vec{a'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v'}$$

$\vec{a}$: accelerazione assoluta, cioè misurata nel sistema fisso

$\vec{a'}$: accelerazione relativa, cioè misurata nel sistema mobile

$\vec{F} - m\vec{a}_{0'} = m\vec{a}' \Rightarrow -m\vec{g} - m\vec{a}_{0'} = m\vec{a}'$

- $\boxed{\vec{a}' = \vec{g} + \vec{a}_{0'}}$ in questo caso si sente una forza che ci schiaccia al pavimento
- $\boxed{\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_{0'}}$ in questo caso la forza è rivolta verso l'alto quindi "ci si sente più leggeri"
- in caduta libera invece c'è l'assenza di peso

TERZO CASO: il sistema mobile è in rotazione uniforme rispetto al sistema fisso:

$0 = 0'$; $\vec{v}_{0'} = \vec{a}_{0'} = 0$; $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$; $\vec{\omega} = \text{cost}$

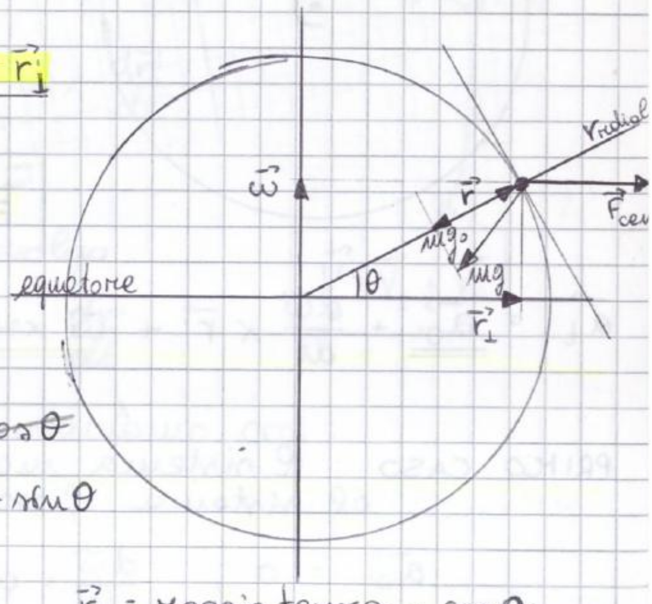
quindi: $\boxed{\vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = m\vec{a}'}$

$m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$: FORZA CENTRIFUGA → mentre prima essendo al membro destro (quindi positiva) era una FORZA CENTRIPETA

$2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$: FORZA DI CORIOLIS

$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m\omega^2 \vec{r}_\perp$

$\vec{F}_{coriolis} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$



FORZA CENTRIFUGA

$\vec{g} = m\vec{a}' = m\vec{g}_0 + m\omega^2 \vec{r}_\perp$

$g_r = -g_0 + \omega^2 r_\perp \cdot \cos\theta = -g_0 + \omega^2 \vec{r} \cos\theta$

$g_\theta = \omega^2 r_\perp \sin\theta = \omega^2 \vec{r} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta$

la forza peso non è diretta verso il centro della terra ma è spostata verso l'equatore

$\vec{r}_\perp$ = raggio terra $\cdot \cos\theta$

$\tan\phi = \frac{|g_\theta|}{|g_r|} = \frac{\omega^2 r \cdot \cos\theta \sin\theta}{g_0 - \omega^2 r \cdot \cos^2\theta} \simeq 0{,}05 \frac{m}{s^2}$

$\omega = \frac{2\pi}{2{,}4 \times 3{,}6 \times 10^4 \, s}$ $r = 6400$ km

$\theta \simeq 45° = \frac{\pi}{4}$ rad

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$\omega^2 r = 4{,}7 \times 10^{-2} \frac{m}{s^2}$ + considerare latitudine

$\cos\theta \cdot \sin\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{1}{2}$

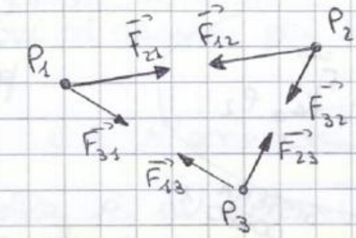
$\phi \simeq \tan\phi = \frac{0{,}025 \frac{m}{s^2}}{(9{,}81 - 0{,}025)\frac{m}{s^2}} = 0{,}003$

per una tg così piccola l'angolo è $\simeq$ ad esso $\phi = 0{,}003$ rad $\simeq 0{,}15°$

quindi: $\vec{R}^{(I)} = \sum_{i \neq j} \vec{F_{ji}}$, $\vec{R}^{(E)} = \sum_i \vec{F_i}^{(E)}$

le condizioni richiedono:

1) la risultante delle forze interne è nulla perchè per il principio di azione reazione si annullano a due a due



dimostriamo somma $F^{(I)} = 0$

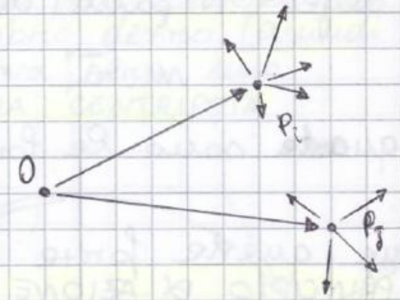
$$\vec{R}^{(I)} = \sum_{i \neq j} \vec{F_{ji}} =$$

dividendo in due la sommatoria

$$= \sum_{i<j} \vec{F_{ji}} + \sum_{i>j} \vec{F_{ji}} =$$ ora facciamo uno scambio tra i e j $\quad i \longleftrightarrow j$

$$= \sum_{i<j} \vec{F_{ji}} + \sum_{j>i} \vec{F_{ij}} = \sum_{i<j} \underbrace{\left(\vec{F_{ji}} + \vec{F_{ij}}\right)}_{0} = 0$$ i e j sono variabili mute quindi posso invertirle

2) il momento delle forze interne è nullo



$$\vec{M_0}^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{OP_i} \times \vec{F_i}^{(I)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{OP_i} \times \sum_{j \neq i} \vec{F_{ji}} =$$

SOMMATORIA DOPPIA $= \sum_{i,j} \vec{OP_i} \times \vec{F_{ji}}$ la condizione è $i \neq j$

dividendo la sommatoria in due

$$\sum_{i<j} \vec{OP_i} \times \vec{F_{ji}} + \sum_{i>j} \vec{OP_i} \times \vec{F_{ji}} =$$ scambio $(i \longleftrightarrow j)$

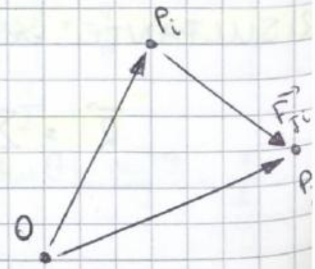
$$= \sum_{i<j} \vec{OP_i} \times \vec{F_{ji}} + \sum_{j>i} \vec{OP_j} \times \vec{F_{ij}} =$$ uso il principio di azione e reazione

$$= \sum_{i<j} \vec{OP_i} \times \vec{F_{ji}} + \sum_{i<j} \vec{OP_j} \times \left(-\vec{F_{ij}}\right) =$$ riunisco in una sola formula

$$= \sum_{i<j} \left(\vec{OP_i} - \vec{OP_j}\right) \times \vec{F_{ji}} = \sum_{i<j} \vec{P_j P_i} \times \vec{F_{ji}}$$

$$\boxed{\vec{M_0}^{(I)} = 0}$$

perchè la forza è collineare al vettore che unisce i due vettori $\vec{OP_i}$ e $\vec{OP_j}$



GRANDEZZE CUMULATIVE O GLOBALI

$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \dots + \vec{p_N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i} = m \vec{V_{cm}}$$

$$\vec{L_0} = \vec{L_{0,1}} + \vec{L_{0,2}} + \dots + \vec{L_{0,N}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L_{0,i}}$$

$$E_K = E_{K,1} + E_{K,2} + \dots + E_{K,N} = \sum_{i=1}^{N} E_{K,i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i V_i^2$$

$$\vec{R}^{(I)} = 0$$

$$\vec{R}^{(E)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^{(E)}$$

$$\vec{M_0}^{(I)} = 0$$

$$\vec{M_0}^{(E)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M_{0,i}}^{(E)}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{p_i} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{p_i}}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F_i}^{(I)} + \vec{F_i}^{(E)}\right) = \vec{R}^{(E)}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}^{(E)}}$$

TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

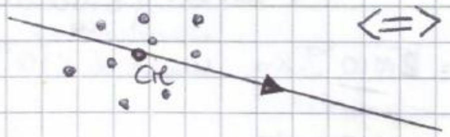
o

I EQUAZIONE CARDINALE DELLA MECCANICA DEI SISTEMI DI PUNTI

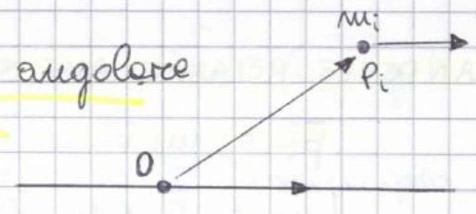
$$\vec{p} = m \vec{V_{cm}} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a_{cm}} \qquad \boxed{m \vec{a_{cm}} = \vec{R}^{(E)}}$$

Se $\vec{R}^{(E)} = 0 \iff \vec{p} = cost$

$\iff \vec{V_{cm}} = cost$ — il centro di massa, quindi, si muove di moto rettilineo uniforme



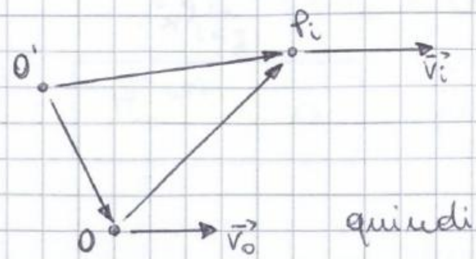
$\vec{L_{0,i}} = \vec{OP_i} \times m_i \vec{V_i}$ momento angolare di P_i



considerando il caso in cui il polo "O" sia mobile nel sistema di riferimento iniziale, cioè

$$\vec{V_0} \neq 0$$

quindi: $$\frac{d\vec{L_{0,i}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OP_i}) \times m_i v_i + \vec{OP_i} \times m_i \vec{a_i}$$



$\frac{d}{dt}(\vec{OP_i})$ scelgo "O'" fisso per esempio l'origine

$$\vec{OP_i} = \vec{O'P_i} - \vec{O'O}$$

quindi: $$\frac{d}{dt}(\vec{OP_i}) = \frac{d}{dt}\vec{O'P_i} + \frac{d}{dt}\vec{O'O} = \vec{V_i} - \vec{V_0}$$

2. Le forze che servono per avvicinare le due masse sono forze interne al sistema e non modificano il momento angolare, quindi $L_0 = \text{cost}$

$$L_0 = 2 m r_1^2 \omega_1 = 2 m r_2^2 \omega_2$$

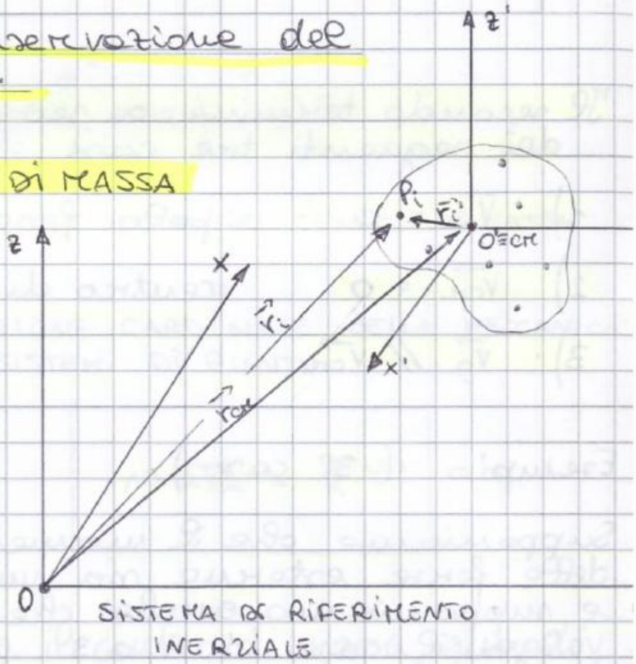
$$\omega_2 = \frac{2 m r_1^2 \omega_1}{2 m r_2^2} \qquad \omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \omega_1$$

Se per esempio: $r_2 = \frac{1}{2} r_1 \Rightarrow \omega_2 = 4\omega_1$

questo è un effetto della conservazione del momento angolare.

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Il sistema di riferimento centrato nel CENTRO DI MASSA del sistema dei punti in generale non è inerziale



Per semplicità scelgo gli assi del sistema di riferimento mobile paralleli agli assi del sistema di riferimento fisso.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i' \quad ; \quad \vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} + \frac{d\vec{r}_i'}{dt} \quad ; \quad \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} + \frac{d\vec{v}_i'}{dt} \quad ; \quad \vec{a}_i = \vec{a}_{CM} + \vec{a}_i'$$

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = m_i \vec{a}_{CM} + m_i \vec{a}_i'$$

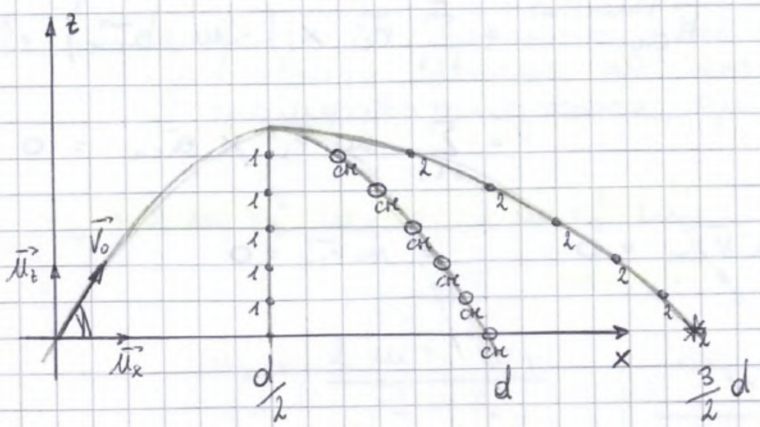
$$m_i \vec{a}_i' = \vec{F}_i - m_i \vec{a}_{CM}$$

è una forza APPARENTE o anche detta "FORZA DI INERZIA"

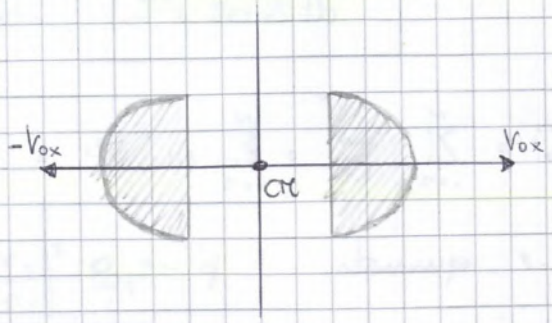
II eq. cardinale,

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} = \vec{M}_{CM}^{(E)} + \underbrace{\vec{M}_{CM}^{(inerzia)}}_{0}$$

il momento rispetto al CM delle forze di inerzia è nullo



SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA



$$\begin{cases} x = V_{0x}\, t \\ z = V_{0z}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{x}{V_{0x}} \\ z = \frac{V_{0z}}{V_{0x}} x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{V_{0x}^2} = 0 \end{cases}$$

$$= x \left(\frac{V_{0z}}{V_{0x}} - \frac{g}{2 V_{0x}^2} x \right) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = d = \frac{2 V_{0x} \cdot V_{0z}}{g} = \frac{2 V_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

$$= \frac{2 V_0^2}{g} \sin 2\theta$$

$$\theta = \pi/3 \qquad V_0 = 20\ m/s$$

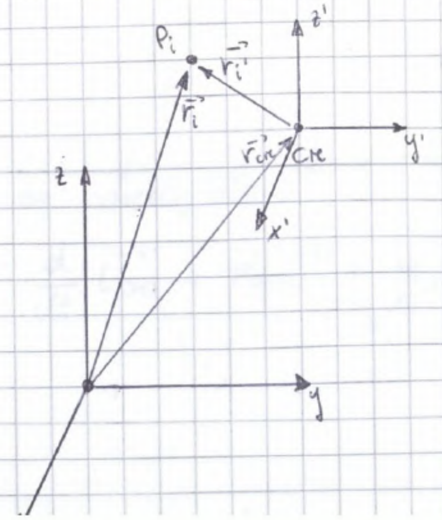
Supponiamo di conoscere $\vec{L}_{CM}$ voglio calcolare $\vec{L}_0$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i' \implies \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{OP_i} \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i' \right) \times m_i \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i' \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

$$\vec{r}_{CM} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i'}_{m \cancel{\vec{v}_{CM}}\ 0} = 0 \qquad \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{r}_i')}_{m \cancel{\vec{r}_{CM}}\ 0} \times \vec{v}_{CM} = 0$$

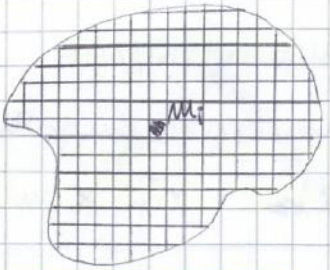


$$= \vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM} + \vec{L}'$$

$$\boxed{\vec{L}_0 = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM}}$$

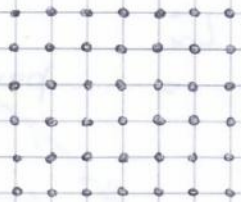
TEOREMA DI KÖNIG PER IL MOMENTO ANGOLARE

Come passare da un sistema di punti ad un corpo:



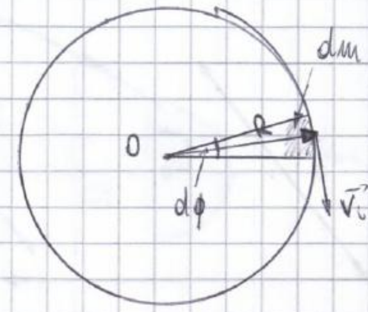
descrizione continua

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\, dm$$



descrizione discreta

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$



$$dm = \frac{m}{2\pi}\, d\phi$$

$$d\vec{L}' = \vec{R} \times dm\, \vec{v}_i =$$

$$= \vec{u}_y\, R\, dm\, v =$$

$$v = R\omega \longrightarrow = \vec{u}_y\, dm\, R^2 \omega$$

$$\vec{L}' = \int_0^{2\pi} \vec{u}_y \frac{m}{2\pi} d\phi\, R^2\omega = \vec{u}_y \underbrace{mR^2}_{} \omega \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi$$

momento di inerzia della ruota (I)

Ora per usare il teorema di König calcolo:

$$\vec{r}_G = x_G \vec{u}_x + R\vec{u}_z \qquad x_G = x_{G_0} + v \cdot t$$

$$\vec{v}_G = R\omega \vec{u}_x$$

$u_x \times u_x = 0$

$$\vec{r}_G \times m\vec{v}_G = (x_G \vec{u}_x \times R\vec{u}_z) \times mR\omega\vec{u}_x = mR^2\omega\vec{u}_y$$

$$\boxed{\vec{L} = 2mR^2\omega\vec{u}_y}$$

$$dE_K' = \frac{1}{2}\frac{m}{2\pi}d\phi(\omega R)^2 ; \quad E_K' = \int_0^{2\pi} dE_K' = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2} m\, d\phi (\omega R)^2 =$$

$$= \frac{m}{4\pi}(\omega R)^2 \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{m}{2}(\omega R)^2$$

$$E_K = \frac{m}{2}(\omega R)^2 + \frac{m}{2}(\omega R)^2 = mR^2\omega^2$$

$$\boxed{E_K = mR^2\omega^2}$$

DINAMICA DI UN SISTEMA DI PUNTI

- I^a equazione cardinale
- II^a equazione cardinale
- TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

7 equazioni totali

Se $\vec{R}^{(E)} = 0$, $M_o^{(E)} = 0$ e una delle 3 condizioni per annullare uno dei termini della II^a equazione cardinale si verifica $\vec{P} = \text{cost}$ e $\vec{L} = \text{cost}$

Se inoltre le forze sono conservative

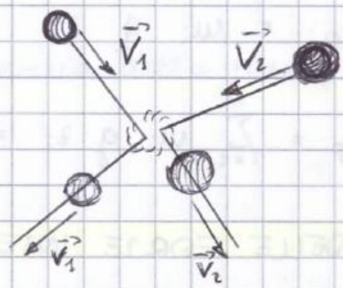
$$\boxed{E_K = \text{cost}}$$

- abbiamo la conservazione della QUANTITÀ DI MOTO

$$\boxed{m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2}$$

- CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA (urto elastico)

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}$$



URTI

- CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

che non discutiamo!

usando queste equazioni di conservazione possiamo descrivere gli urti (membro sinistro prima dell'urto e membro destro dopo l'urto)

in tabella riporto le dimensioni (x, y, z), il numero di incognite e il numero di equazioni:

DIMENSIONI	# INCOGNITE	# EQUAZIONI	
3 D.	6	3 + 1 = 4	non ho abbastanza equazioni per descrivere gli urti in 2\3 D
2 D.	4	2 + 1 = 3	
1 D.	2	1 + 1 = 2	mentre posso farlo in 1D

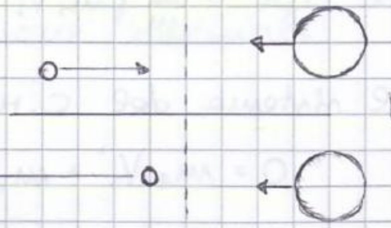
Altro caso limite : $m_2 \gg m_1$

per calcolare v_1 bisogna fare il limite della formula

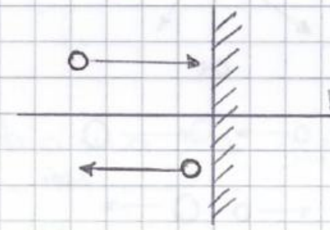
$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} V_2$$

considerando $m_2 \gg m_1$ ottenendo quindi

$$\boxed{V_1 \simeq - V_1 + 2 V_2}$$

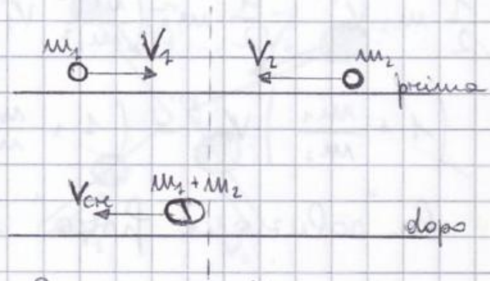


se inoltre $V_2 = 0$



$$\boxed{V_1 \simeq - V_1}$$

URTO ANAELASTICO



questa relazione è allo stesso tempo la definizione di velocità del centro di massa prima dell'urto e la relazione di conservazione della quantità di moto (se intendo il membro destro dopo l'urto)

$$\boxed{m_1 \vec{V_1} + m_2 \vec{V_2} = (m_1 + m_2)\vec{V_{cm}}}$$

Calcolo l'energia dissipata dell'urto:
faccio il conto nel sistema del c.m. perché tanto il contributo $\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{cm}^2$ non cambia dopo l'urto

$$\Delta E_k' = 0 - \left(\frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2\right) = -\frac{1}{2}\left[m_1\left(\vec{V_1} - \vec{V_{cm}}\right) + m_2\left(\vec{V_2} - \vec{V_{cm}}\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{ m_1 \left[\vec{V_1} - \frac{m_1 \vec{V_1} + m_2 \vec{V_2}}{m_1 + m_2}\right]^2 + m_2 \left[\vec{V_2} - \frac{m_1 \vec{V_1} + m_2 \vec{V_2}}{m_1 + m_2}\right]^2 \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\right]\left(\vec{V_1} - \vec{V_2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{(m_1 + m_2)\, m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\left(\vec{V_1} - \vec{V_2}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_k' = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{V_1} - \vec{V_2}\right)^2}$$

$h = 5\,cm \qquad m_1 = 5\,g \qquad m_2\ 1\,kg$

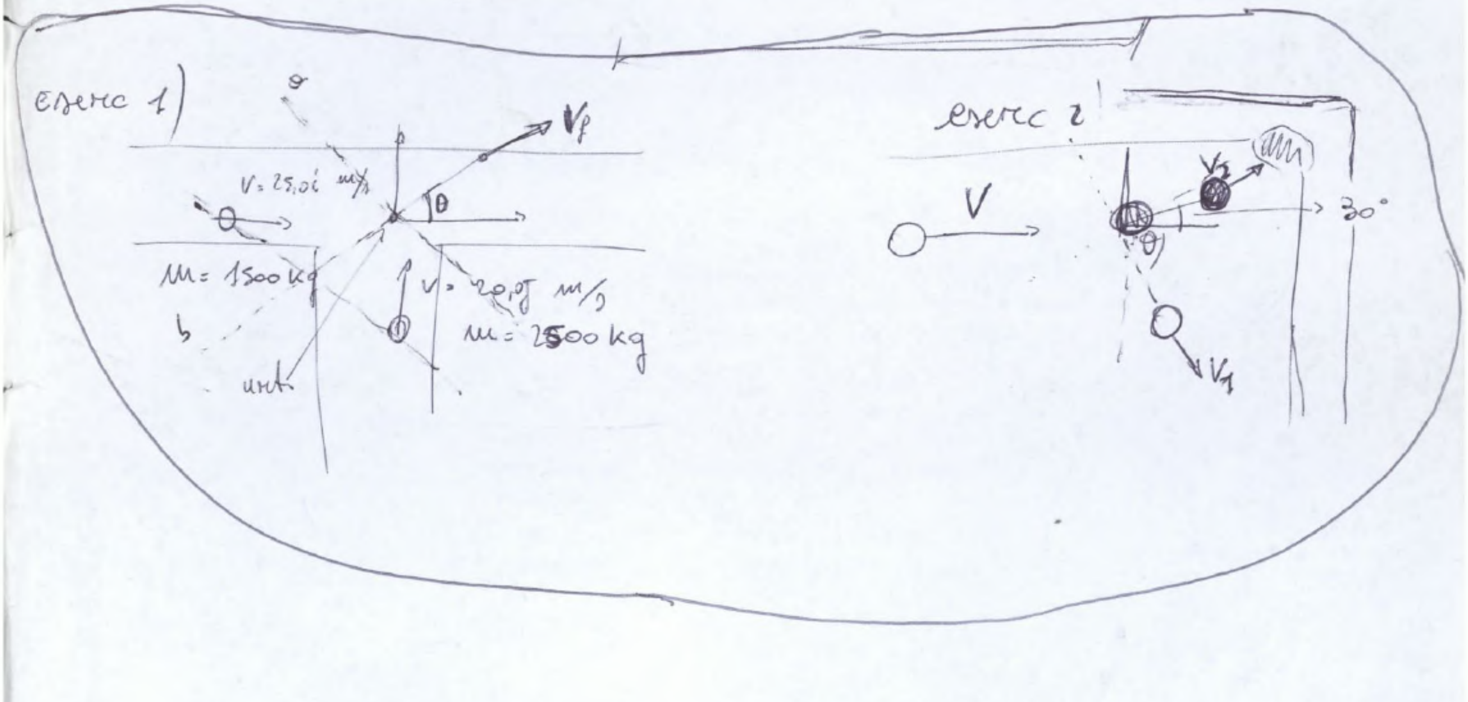
$$\cancel{V = \frac{1000\,g + 5\,g}{1000\,g}\sqrt{2 \cdot g \cdot 5\,cm}}$$

$9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

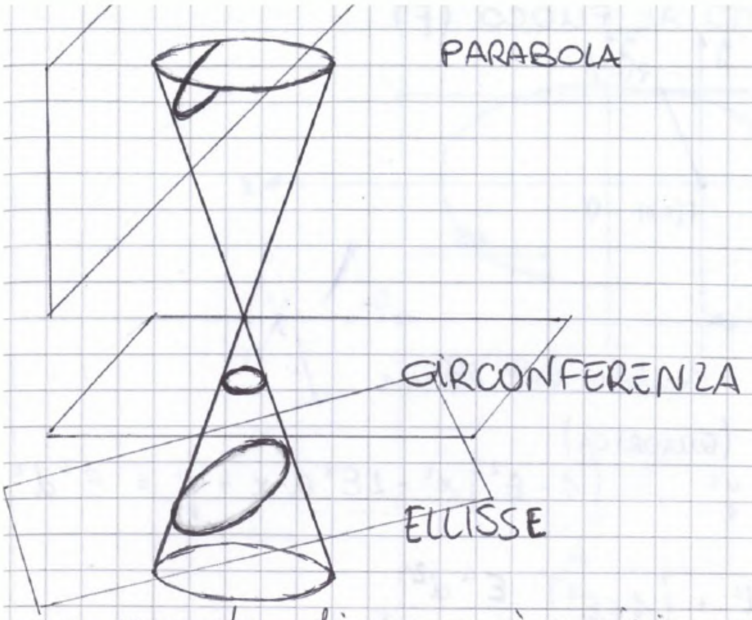
$$V = \frac{1\,kg + 5 \cdot 10^{-3}\,kg}{1\,kg} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} \cdot 5 \times 10^{-2}\,m}$$

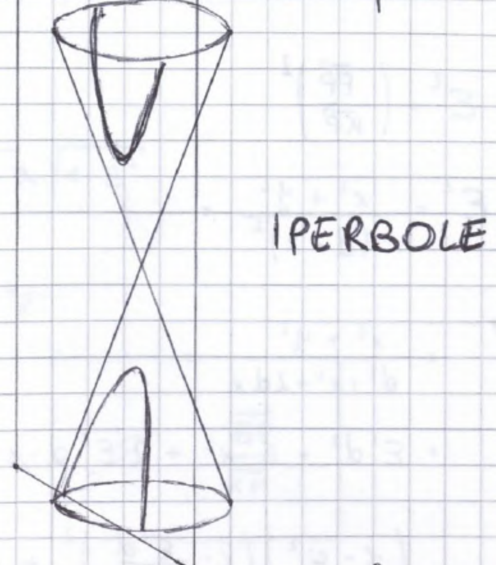
$$\simeq 0{,}2 \times 10^3 \cdot 1\ \frac{m}{s} \simeq \underline{\underline{200\ \frac{m}{s}}}$$

$$\simeq \underline{\underline{720\ \frac{km}{h}}}$$



22 Aprile

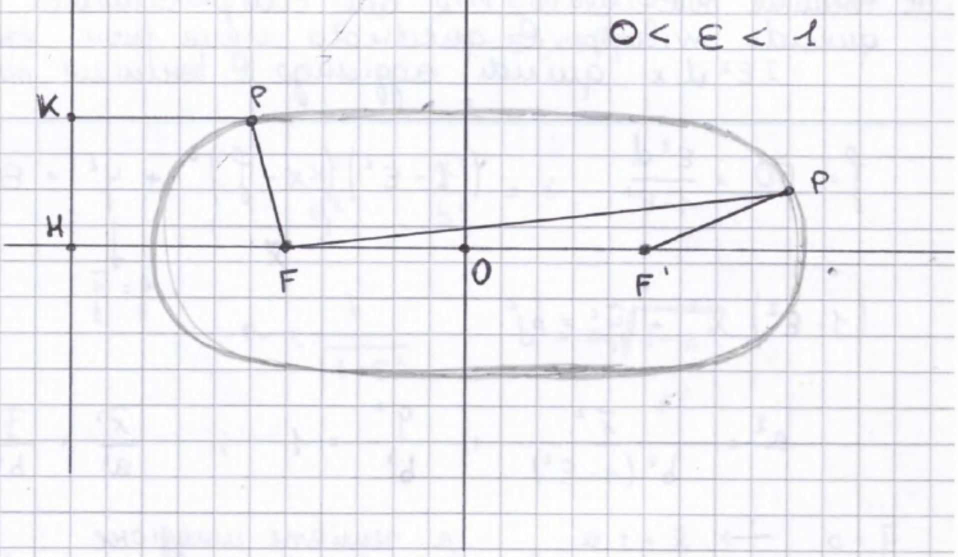




a seconda di come è posizionato il piano ottengo le figure:

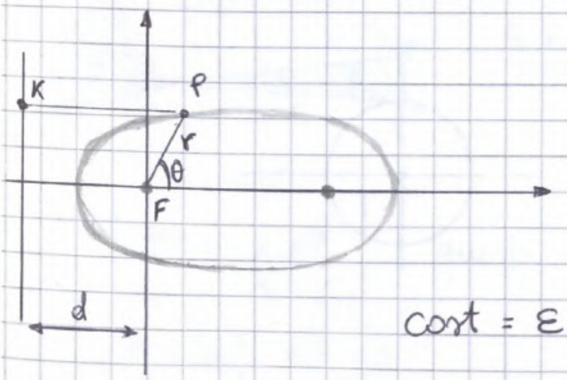
- circonferenza
- ellisse
- parabola
- iperbole

$0 < \varepsilon < 1$



QUESTI CONCETTI SONO STATI INTRODOTTI PER POTER STUDIARE IL MOTO DEI PIANETI

Un'ellisse è il luogo dei punti di un piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti FUOCHI rimane costante



$\varepsilon = \frac{\overline{FP}}{\overline{KP}}$ $\quad \overline{FP} = r$

eccentricità

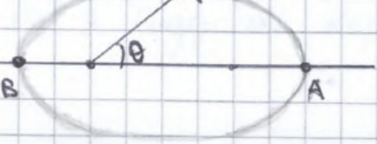
COORDINATE POLARI RISPETTO AL FUOCO (F)

$$\text{cost} = \varepsilon = \frac{r}{d + r\cos\theta}$$

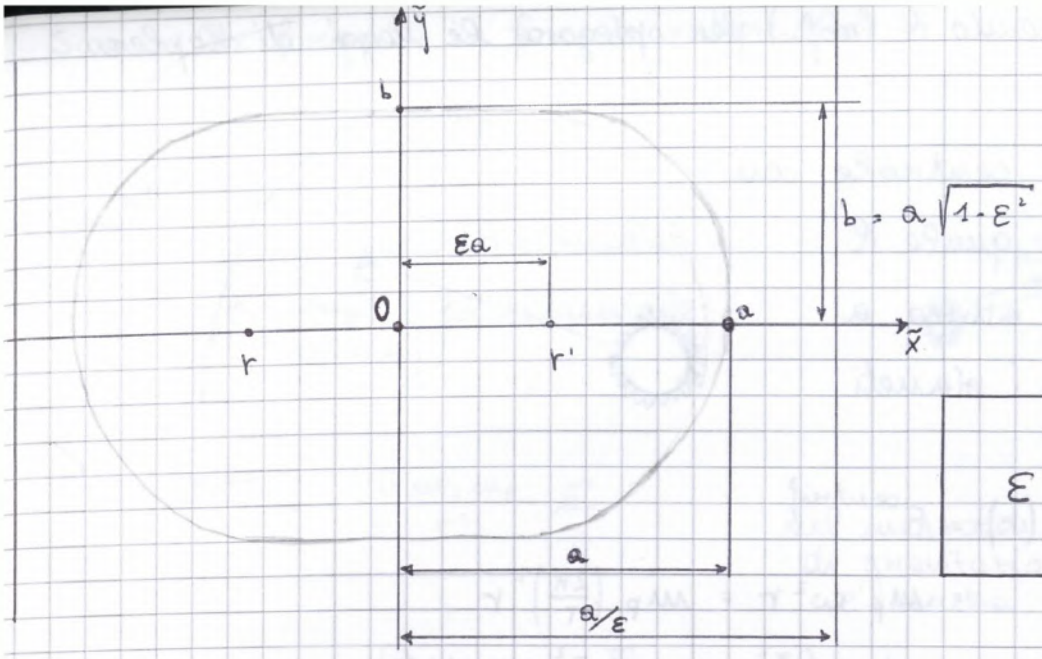
$$\varepsilon d + \varepsilon r \cdot \cos\theta = r \ ; \ r(1 - \varepsilon\cos\theta) = \varepsilon d$$

$$\boxed{r = \frac{\varepsilon \cdot d}{1 - \varepsilon\cos\theta}}$$

$$\vec{FA} = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon} \qquad \vec{FB} = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon}$$



$(0 \leq \varepsilon \leq 1)$



$$\boxed{\varepsilon = \frac{\overline{FP}}{\overline{KP}}}$$

in coordinate polari centrate in F

$$r = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

in coordinate cartesiane centrate in O

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

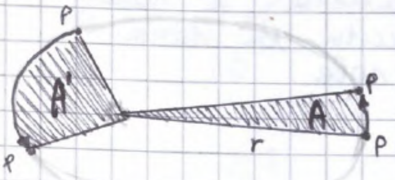
$$a = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \qquad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

LEGGI DI KEPLERO

1) orbite ellittiche con il sole in uno dei due fuochi

2) VELOCITA' AREOLARE costante ($\vec{L}$ = cost)

non scoperto da Keplero



$\underline{A = A'}$

$v \sim \frac{1}{r}$ legge delle Aree (già vista)

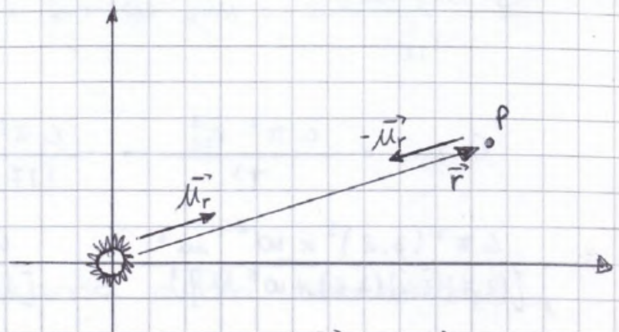
3) $\boxed{T^2 = K r^3}$ questa è una legge quantitativa

$$T = K^{\frac{1}{2}} \cdot r^{\frac{3}{2}}$$

NEWTON (legge di gravitazione universale: unisce e spiega le 3 leggi di Keplero)

Scrivo la formula in forma vettoriale

$$F^{grav} = G \frac{m_s m_p}{r^2}$$



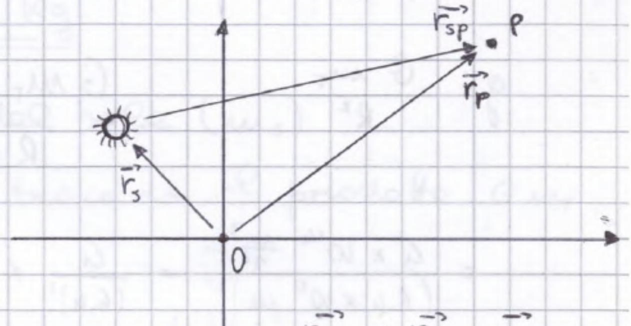
G : costante gravitazionale universale
(è una costante fondamentale della natura)

$$\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\vec{F}(r)^{grav.} = -\frac{G m_s m_p}{r^2} \vec{u_r}}$$

nel mazzoldi la costante di gravitazione universale è scritta con γ

$$= -\frac{G m_s m_p}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



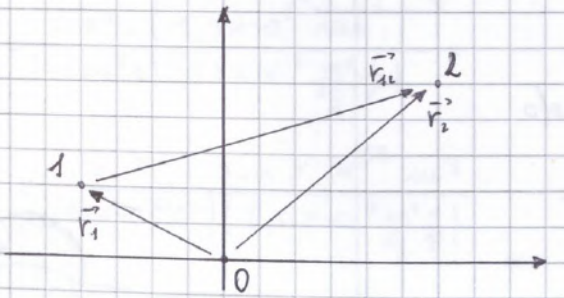
cambio il sistema di riferimento

$$= -\frac{G m_s m_p}{r_{sp}^2} \cdot \frac{\vec{r_{sp}}}{r_{sp}}$$

$$\vec{r_{sp}} = \vec{r_p} - \vec{r_s}$$

$$= -\frac{G m_s m_p}{(r_p - r_s)^2} \cdot \frac{\vec{r_p} - \vec{r_s}}{|\vec{r_p} - \vec{r_s}|}$$

usando un riferimento generico



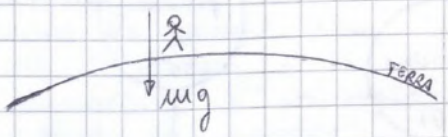
$$\vec{F_{12}} = -\frac{G m_1 m_2}{(\vec{r_2} - \vec{r_1})^2} \cdot \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}$$

$$\boxed{\vec{F_{12}} = -\frac{G m_1 m_2}{\vec{r_{12}}^2} \cdot \frac{\vec{r_{12}}}{|r_{12}|}}$$

$$\boxed{G = \frac{F_{12} \, \vec{r_{12}}^2}{m_1 m_2}}$$

$$[G] = \frac{N \cdot m^2}{kg^2} = \frac{kg \frac{m}{s^2} \cdot m^2}{kg^2} = \frac{m^3}{kg} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$mg = \frac{G m_T m}{R^2} \qquad \boxed{g = \frac{G m_T}{R^2}}$$



$g = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2}$

di questa formula non conosco tutto, i dati G e m_T sono incognite, ma conosco il loro rapporto

inoltre per potere svolgere questo esempio devo supporre che la terra abbia una massa concentrata nel centro (dimostro domani) dall'esperimento di Cavendish ottengo:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg} \frac{1}{s^2}$$

quindi ora posso calcolare la massa della terra (m_T)

$$m_T = \frac{G m_T}{G} = \frac{4{,}0 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2}}{6{,}7 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg} \frac{1}{s^2}} = \frac{4{,}0}{6{,}7} \cdot 10^{25}\ Kg$$

$$\simeq 0{,}6 \times 10^{25}\ Kg \simeq 6 \times 10^{24}\ Kg$$

ESERCIZIO: calcola la massa del sole (m_s)

usando lo stesso metodo usato per trovare il prodotto $G m_T$ trovo la massa del sole

$$F_{ST} = \frac{G m_S \cancel{m_T}}{r^2} = \cancel{m_T} \omega^2 r_{ST} = \cancel{m_T} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_{ST}$$

dati:

$r_{ST} = 150\,000\,000\ Kg = 1{,}5 \times 10^{11}\ m$

$T = 365\ g = 3{,}2 \times 10^7\ s$

$G = 6{,}7 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg} \frac{1}{s^2}$

$$m_S = \frac{4\pi^2 \cdot r_{ST}^3}{T^2 \cdot G} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}5 \times 10^{11}\ m)^3}{(3{,}2 \times 10^7 s)^2 (6{,}7 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg} \frac{1}{s^2})} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot 3{,}4 \times 10^{33}\ m^3}{(10 \times 10^{14} s^2)(6{,}7 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg} \frac{1}{s^2})} = \frac{4\pi^2 \cdot 3{,}4}{6{,}7} \times 10^{29}\ Kg \simeq 2 \times 10^{30}\ Kg$$

MASSA INERZIALE E MASSA GRAVITAZIONALE

m: quantità di materia

- $F = m a$ — II^a Legge di Newton
- $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ — Legge di gravitazione universale (MASSA GRAVITAZIONALE (M_G))

in questo caso la massa m è considerata come la resistenza che il corpo fa a cambiare il proprio stato di moto (MASSA INERZIALE (m_I))

la differenza tra massa inerziale e massa gravitazionale se esiste è minima e per rilevarla è necessario effettuare una misura

$$E_p(r_B) = -W_{A\to B} = G\, m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

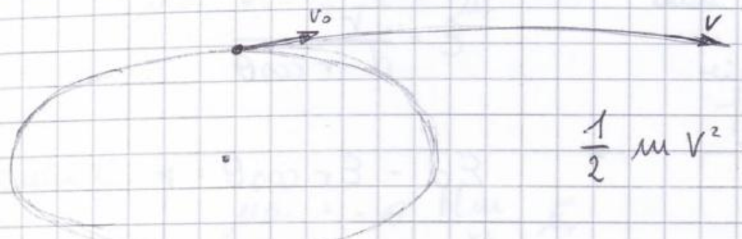
non è un problema perchè r_A lo scelgo $= \infty$ per ottenere

$$\frac{1}{r_A} \to 0\ ,\quad r_A \to \infty$$

$$\boxed{E_p(r_B) = -\frac{G\, m_1 m_2}{r_B}} \longleftrightarrow \boxed{E_p(r) = -\frac{G\, m_1 m_2}{r}}$$

il lavoro che la forza fa per portare un pianeta da una posizione r_A infinita e fino alla posizione r_B variabile

ESERCIZIO: Come si calcola la velocità di fuga?



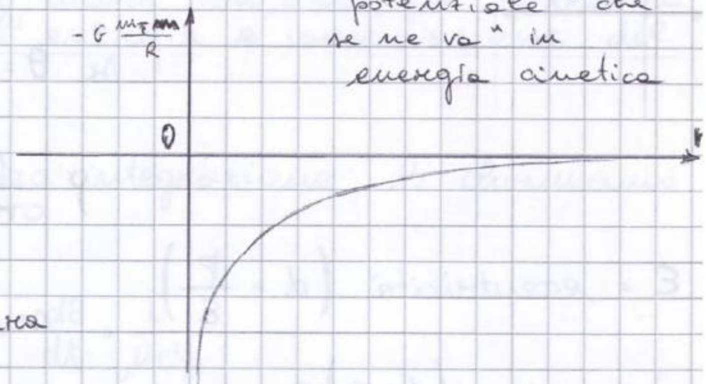
$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m V_0^2 - G\frac{m_T\, m}{R} \geq 0$$

abbastanza grande

iperbole prende energia potenziale "che se ne va" in energia cinetica

$$\frac{1}{2} m V_0^2 \geq G\frac{m_T\, m}{R}$$

$$\boxed{V_0 \geq \sqrt{\frac{2\, G\, m_T}{R}}}$$



V_0 è la velocità minima necessaria per sfuggire alla "trappola gravitazionale" della terra

$$V_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \times 10^{14}\ m^3/s^2}{6{,}3 \times 10^6\ m}} = \sqrt{\frac{8}{6{,}3} \times 10^8\ \frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{\frac{8}{6{,}3}} \times 10^4\ \frac{m}{s}$$

$$\simeq 1{,}1 \times 10^4\ \frac{m}{s} = 11000\ \frac{m}{s} = 40000\ \frac{Km}{h}$$

ESERCIZIO: Calcolare la velocità di fuga della luna

usiamo lo stesso procedimento usato per calcolare la velocità di fuga della terra

$$V_0 \geq \sqrt{\frac{2 G\, m_e}{r}}$$

r: $1738\ Km = 1{,}7 \times 10^6\ m$

m_e: $7{,}3 \times 10^{22}\ Kg$

$$V_0 \geq \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}7 \times 10^{-11}\ m^3/Kg \cdot 1/s^2 \cdot 7{,}3 \times 10^{22}\ Kg}{1{,}7 \times 10^6\ m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}7 \cdot 7{,}3}{1{,}7} \times 10^5\ \frac{m^2}{s^2}} =$$

$$= \sqrt{57{,}5 \times 10^5\ \frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{575 \times 10^4\ m^2/s^2} \simeq 2400\ \frac{m}{s}$$

$$= \frac{M+m}{Mm}\vec{F} \quad (2)$$

unendo la parte iniziale (1) e la parte finale (2) ottengo:

$$\vec{a} = \frac{M+m}{M \cdot m}\vec{F}$$

è come se fosse l'accelerazione di un corpo unico

da cui: $\vec{F} = \frac{Mm}{M+m}\vec{a} = \mu\vec{a}$

$$\boxed{\mu = \frac{Mm}{M+m}}$$ MASSA RIDOTTA

$$\vec{F} = \mu\vec{a} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$$

→ abbiamo ridotto il problema dei due corpi ad un problema ad un solo corpo con massa ridotta (μ) in un campo di forze centrali

quindi

$$\boxed{\mu\vec{a} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

equazione differenziale del 2° ordine ancora non vista, per risolverla usiamo la conservazione dell'energia e conservazione del momento angolare

2 leggi sono il risultato di una prima integrazione, li chiamiamo difatti INTEGRALI PRIMI DEL MOTO

1) $\text{cost} = L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$

2) $\text{cost} = E = \frac{\mu}{2}v^2 - G\frac{Mm}{r}$

queste due equazioni non hanno più $\vec{a}$ quindi abbiamo fatto un salto indietro

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \qquad \underline{\underline{v^2 = v_r^2 + v_\theta^2}}$$

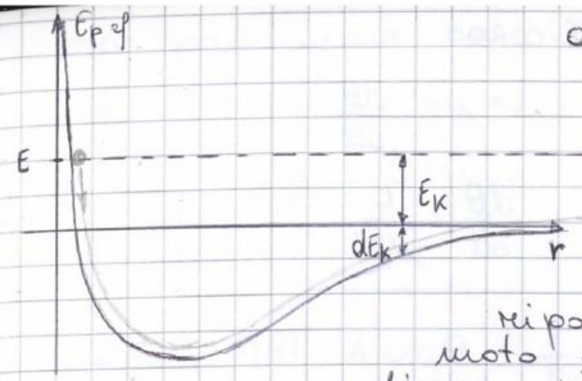
$$2) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \frac{GMm}{r} =$$

1)

siamo passati in coordinate polari

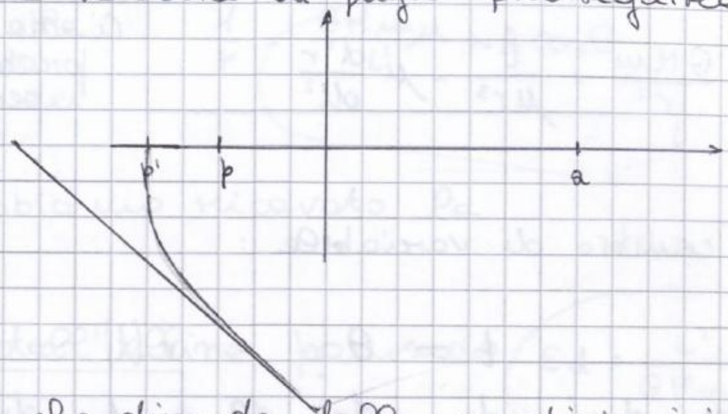
$$= \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{L}{\mu r^2}\right)^2\right] - \frac{GMm}{r} = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\frac{L^2}{\mu^2 r^4}\right] - \frac{GMm}{r} =$$

$$= \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right] - \frac{GMm}{r}$$



quando, invece, ho un energia totale positiva (cioè parte da una quota più alta) il corpo avrà una velocità abbastanza elevata per sfuggire alla "trappola gravitazionale"

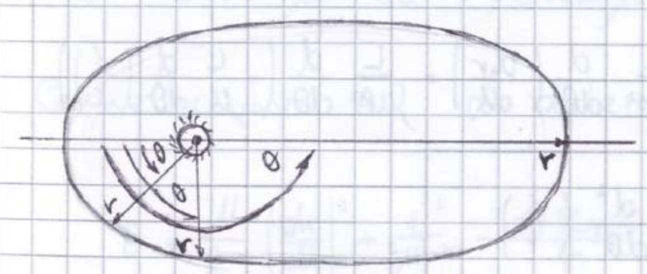
riportando il tutto in un grafico del moto del corpo vediamo che non disegna più un orbita ellitica ma dopo aver superato la velocità di fuga proseguirà il moto con un andamento asintotico e l'asintoto a cui il corpo tende è lo stesso asintoto dell'iperbole del grafico precedente (*)



$$E = E_K + E_{p,ef}$$

E è un termine costante che dipende dalle condizioni iniziali quindi saranno i due termini che la compongono a dover variare

per vedere la variazione di $E_K = E - E_{p,ef}$



man mano che l'angolo θ aumenta la lunghezza della distanza r tra il fuoco (esempio il sole) e un corpo che orbita intorno ad esso (esempio la terra) aumenta

fin ora abbiamo svolto uno studio qualitativo basato sui due integrali primi, ora ripartiamo dall'equazione del moto per trovare la formula dell'orbita

$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2}\,\vec{u}_r = -\mu r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{u}_r = \mu \vec{u}_r$$ nel caso delle orbite circolari

$$= \left[-\mu r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \mu\frac{d^2r}{dt^2}\right]\vec{u}_r$$ nel caso generale delle orbite