



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1028

DATA: 15/07/2014

APPUNTI

STUDENTE: Cetani

MATERIA: Metodi Statistici Numerici x l'Ingegneria+ Eserc.

Prof. Falletta_Adami

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Nome - Prénom
Name - Vorname

Alessandro

Cognome - Nom
Surname - Nachname

Cetani

Materia - Matière
Subject - Fach

METODI STATISTICI E NUMERICI

Scuola - École
School - Schule

Politecnico di Torino

Classe - Classe
Grade - Klasse

3° ANNO

Anno - Année
Year - Jahr

22 2013/2014

Le pagine di questo quaderno sono prodotte con carta **OPTIK PAPER** da 90 grammi, bianchissima, estremamente liscia e satinata che garantisce il corretto assorbimento dell'inchiostro senza attraversare la pagina e la massima fluidità nella scrittura.

Made in Italy

METODI STATISTICI E NUMERICI per l'INGEGNERIA

MODELLI e SISTEMI DINAMICI

Alfredo Cestari

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- 1° ordine a variabili separabili $y' = f(y)g(x)$
- 2° ordine lineari omogenee a coefficienti costanti

SISTEMI DINAMICI: l'obiettivo non è la risoluzione dell'equazione differenziale bensì estrarre informazioni dal problema.

Eq. differenziale
$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

 è un'eq. diff. ordinaria di ordine n .

- differenziale: perché vi compare la derivate della funzione incognita x
 - ordinaria: perché vi compare una sola variabile indipendente, il tempo t
 - di ordine n : perché la derivata di ordine più elevato è la $\frac{\partial^n}{\partial t^n}$
- La medesima eq. può essere così scritta:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

ovvero in FORMA NORMALE

- forma normale: membro a destra rispetto alle derivate di ordine massimo.

PROBLEMA DI CAUCHY

Il problema di determinare la soluzione di un'equazione differenziale che soddisfi una o più condizioni iniziali è detto Problema di Cauchy.

Si considerino eq. diff. in forma normale + condizioni iniziali:

ovvero le C.I. sono

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ \dot{x}(t_0) &= x_{1,0} \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) &= x_{n-1,0} \end{aligned} \right\}$$

IL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ DI UNA SOLUZIONE per il Problema di Cauchy

afferma: se f è localmente Lipschitziana (ovvero se $\exists \lambda > 0$ per ogni coppia $x, y \in D_{\text{Dom}}$, con $\|x - y\|$ sufficientemente piccolo si ha che $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$) allora la soluzione $\exists!$ \Rightarrow DETERMINISMO MECCANICO

$$|x^* - x| = ce^{-\alpha x^* t}$$

dato le restrizioni iniziali e ponendo da ora
C una moltiplicatore arbitrario si ottiene:

$$\frac{x^* - x}{x} = ce^{-\alpha x^* t} \Rightarrow \frac{x^*}{x} - 1 = ce^{-\alpha x^* t} \Rightarrow \frac{x^*}{x} = 1 + ce^{-\alpha x^* t}$$

da cui l'integrale generale: $x(t) = \frac{x^*}{1 + ce^{-\alpha x^* t}}$

ed imponendo le C.I:

$$x_0 = \frac{x^*}{1 + c} \Rightarrow x_0 + x_0 c = x^* \Rightarrow x_0 c = x^* - x_0 \Rightarrow c = \frac{x^* - x_0}{x_0}$$

ovvero $c = \frac{x^*}{x_0} - 1$

inspiegare l'integrale generale:

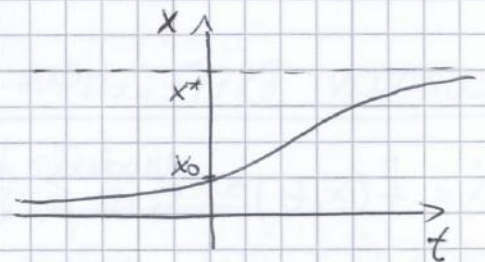
$$x(t) = \frac{x^*}{1 + \frac{x^*}{x_0} e^{-\alpha x^* t} - e^{-\alpha x^* t}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x^* x_0}{x_0 + x^* e^{-\alpha x^* t} - x_0 e^{-\alpha x^* t}} = \frac{x^* x_0}{x_0 + (x^* - x_0) e^{-\alpha x^* t}}$$

Oss: per $t \rightarrow +\infty$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$

Se $x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$ cost

Se $x_0 = x^* \Rightarrow x(t) = x^*$ cost



L'integrale generale è una f.t. monotona crescente?

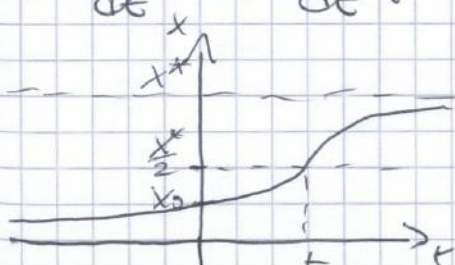
Lo studio si può condurre agevolmente senza ricorrere al calcolo della derivata: $x(t)$ è una soluzione dell'eq. diff \rightarrow la si verifica

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) (x^* - x(t))$$

$$x^* - x(t) = \frac{x^* x_0 + x^* (x^* - x_0) e^{-\alpha x^* t} - x^* x_0}{x_0 + (x^* - x_0) e^{-\alpha x^* t}} = \frac{x^* (x^* - x_0) e^{-\alpha x^* t}}{x_0 + \dots} > 0$$

Punti di flesso? stesso metodo

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{d}{dt} (\alpha x (x^* - x)) = \alpha (\dot{x} x^* - 2x \dot{x}) = \alpha \dot{x} (x^* - 2x)$$



$\Rightarrow x(t) = \frac{x^*}{2}$ solo per t e non int \rightarrow si è ottenuto che t è un punto di flesso se e solo se $x(t) = \frac{x^*}{2}$
 \rightarrow è l'unico valore di t essendo monotona crescente

EQUILIBRIO E STABILITÀ

PUNTO DI EQUILIBRIO

Def: Si dice punto di equilibrio o stato di equilibrio x tale che $f(x) = 0$

COMPORAMENTO VICINO AD UN PUNTO DI EQUILIBRIO

$$\dot{x} = f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x-x^*) \text{ per Taylor}$$

$= 0$ essendo punto di equilibrio

dunque $\dot{x} \approx f'(x^*)(x-x^*)$ $f'(x^*) \neq 0$ (per ipotesi)

Si introduce lo scarto $\eta = x - x^*$

si ottiene: $\dot{\eta} = \dot{x} = f'(x^*)\eta$

soluzione: $\eta(t) = \eta(t_0) e^{f'(x^*)(t-t_0)}$ \rightarrow Comportamento esponenziale all'equilibrio

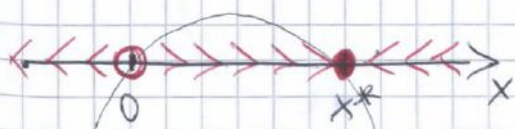
Se $f'(x^*) > 0 \Rightarrow \eta$ è CRESCENTE
 $\Rightarrow x$ si allontana da $x^* \Rightarrow$ INSTABILE

Se $f'(x^*) < 0 \Rightarrow \eta$ è DECRESCENTE
 $\Rightarrow x$ non si allontana da $x^* \Rightarrow$ STABILE

Def: Un punto di equilibrio x di $\dot{x} = f(x)$ si dice STABILE (o stabile nel futuro, o stabile nel tempo) se per ogni intorno U di x \exists un intorno V di x , tale che ogni movimento $x(t, x_0)$ con dato iniziale x_0 in V resta in U per ogni tempo; ovvero è STABILE se si resta indefinitamente vicino a x per di partire abbastanza vicino -

Def: Un punto di equilibrio x di $\dot{x} = f(x)$ si dice INSTABILE se non è stabile.

Esempio Osservando la linea delle forze, si riscontrano 2 pti di equilibrio:



linea delle forze

x^* punto di equilibrio STABILE $\rightarrow \bullet \leftarrow$
 0 punto di ep. INSTABILE $\leftarrow \circ \rightarrow$

Esercizio 2 Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} & \text{con } x \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \frac{dx}{dt} = |x|^{\frac{1}{2}} \quad \begin{cases} \text{a)} \frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{2}} & x \in \mathbb{R}^+ \\ \text{b)} \frac{dx}{dt} = i x^{\frac{1}{2}} & x \in \mathbb{C} \end{cases}$$

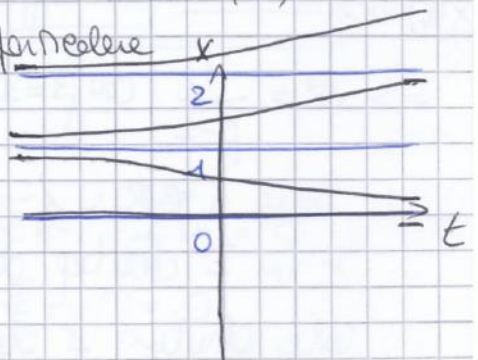
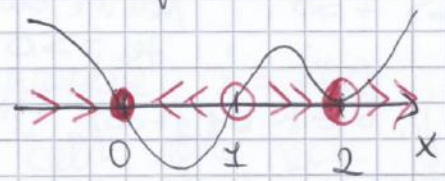
① $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = dt \Rightarrow 2\sqrt{x} = t + c \Rightarrow x = \frac{(t+c)^2}{4}$ e $0 = \frac{c^2}{4} \Rightarrow c = 0$
 soluzione particolare $x(t) = \frac{t^2}{4}$ per $x \in \mathbb{R}^+$

② $\frac{dx}{ix^{\frac{1}{2}}} = dt \Rightarrow 2\sqrt{xi} = t + c \Rightarrow \sqrt{xi} = \frac{t+c}{2} \Rightarrow -x = \frac{(t+c)^2}{4}$
 e $0 = \frac{c^2}{4} \Rightarrow c = 0$ soluzione particolare $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ per $x \in \mathbb{C}$

③ La soluzione banale $x(t) = 0$ è altrettanto soluzione.
 \Rightarrow Il campo di vettori non è Lipschitziano!

Esercizio 3 Osservare un campo di vettori f tale che 0, 1, 2 sono i soli punti di equilibrio e la funzione x

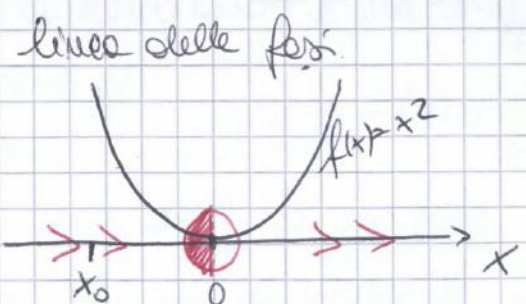
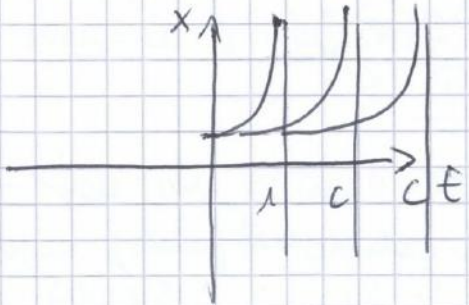
- 0 STABILE
- 1 INSTABILE
- 2 STAB. Sx e INST. ADX



$$f(x) = x(x-1)(x-2)^2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad x(t) = \frac{1}{1-t}$$

integrale generale $x(t) = \frac{1}{c-t}$



Se si parte a sx dello zero si arriva al pto di equilibrio in tempo ∞ .
 Se si parte dal punto di equilibrio si arriva all' ∞ ma nel punto che osservo, questo è verificabile invertendo il segno delle frecce.

ESEMPLO Trovare per quali valori di β \exists soluzioni di BLOW-UP.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^\beta \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \frac{dx}{dt} = x^\beta \Rightarrow \int \frac{dx}{x^\beta} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{1-\beta} x^{(1-\beta)} = t + C$$

$$\Rightarrow x^{(1-\beta)} = (1-\beta)t + C \Rightarrow x = \sqrt[1-\beta]{(1-\beta)t + C}$$

$$1 = C \frac{1}{1-\beta} \Rightarrow C = 1^{(1-\beta)} \Rightarrow C = 1$$

Soluzione particolare $x(t) = [(1-\beta)t + 1]^{\frac{1}{1-\beta}}$

$$\lim_{t \rightarrow a} x(t) = \pm \infty \Rightarrow t = a = \frac{1}{1-\beta} \text{ soluzione di fine}$$

È di blow up se $\frac{1}{1-\beta} > 0$ e $\neq \pm \infty \Rightarrow \beta > 1$

Adunatamente è possibile concludere il blow up trovando $t(x)$

$$t(x) = \frac{1}{1-\beta} [x^{(1-\beta)} - 1]$$

La soluzione di blow up avviene se per $x \rightarrow \infty$ \exists t finito.

$$t = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\beta} [x^{(1-\beta)} - 1] = -\frac{1}{1-\beta} < \infty \quad \boxed{\text{per } \beta > 1 \text{ BLOW UP}}$$

ESERCIZIO Trovare un'espressione $\dot{x} = f(x)$

1- Tale che ogni punto della retta reale $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ e un punto fisso di equilibrio $\rightarrow x^*$ tale che $f(x^*) = 0$

Risposta $f(x) = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{x} = 0}$

2- Tale che ogni intero è punto di equilibrio e non ve ne sono altri fissati $\dot{x} = \sin(\pi x)$ con $x \in \mathbb{N}$

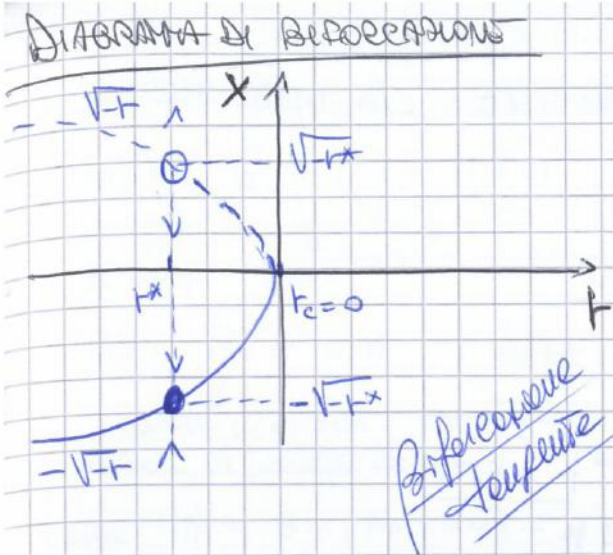
3- È possibile avere 3 punti di equilibrio stabili?



IMPOSSIBILE \rightarrow dovrebbe \exists altro punto di equilibrio

4- Tale che ci sono 100 punti fissi:

Risposta: $\prod_{j=1}^{100} (x-j)$ prodotto ricorrente



Se è mostrato un esempio di biforcazione trasversale nel punto $r=0$.

PUNTI DI EQUILIBRIO e loro STABILITÀ

--- punto INSTABILE

— punto STABILE

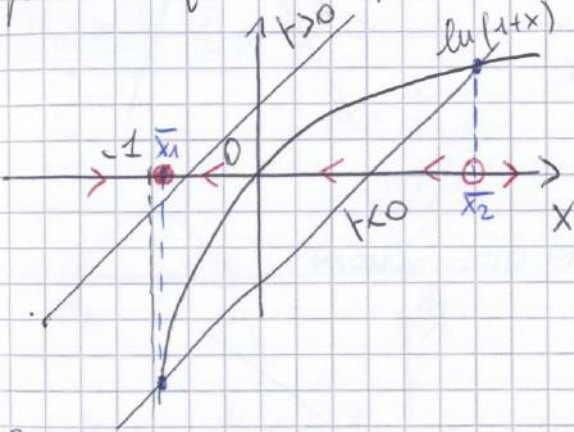
$r_c = "r \text{ critico}"$

$x^* = "x \text{ critico}"$

ESEMPLO Biforcazione trasversale

$$\dot{x} = r + x - \log(1+x)$$

punti di equilibrio $f(r,x) = 0 \Rightarrow$ via prefera $r+x = \log(1+x)$



Se trova $x^* = 0$
 $r_c = 0$

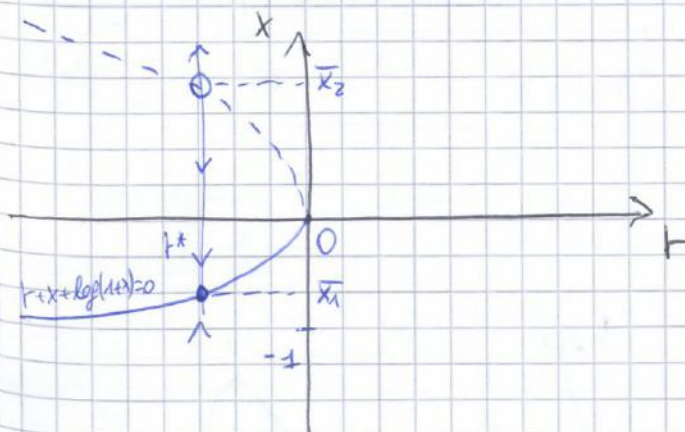
$\bar{x}_1 < 0$ STABILE

$\bar{x}_2 > 0$ INSTABILE

Condizioni che individuano x^*, r_c ovvero la biforcazione:

$$\left. \begin{aligned} r_c + x^* &= \log(1+x^*) & \textcircled{1} & \text{Condizione di curvatura} \\ & & & (x^* \text{ unico zero}) \\ 1 &= \frac{f}{1+x^*} & \textcircled{2} & \text{Condizione di tangenza} \\ & & & (\text{denominatore uguale}) \end{aligned} \right\}$$

DIAGRAMMA DI BIFURCAZIONI



OSS: Se si linearizza attorno ai valori critici $r_c=0$ e $x^*=0$

$$f(r,x) = r + x + \log(1+x)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} f(r,x) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial r}(0,0) \cdot r + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) x + o(x^2) + o(r) \\ &= 0 + r + 0 + \frac{1}{2}(1)x^2 + o(r) + o(x) \end{aligned}$$

quando messo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

si possono scrivere

$$f(r,x) \approx r + \frac{1}{2}x^2$$

NB: Tutte le biforcazioni trasversali sono localmente determinate da $f(r,x) \approx r + cx^2$

Esempio Schema funzionamento del laser

$m(t)$ = n° di fotoni presenti all'istante t

$$\dot{m}(t) = G m N - km$$

fotone di guadagno
n° di fotoni
n° di atomi
fuori di fotoni (che vengono assorbiti)

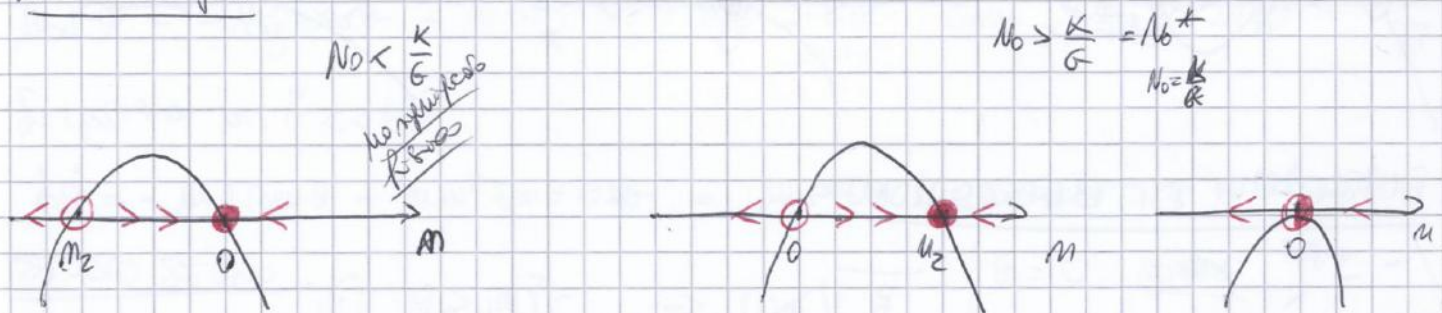
$N(t) = N_0 - \alpha m$ legge su cui gli atomi sono assenti efficaci e
 numero di atomi inattivi al pompaggio oltre rilasciare fotoni.

Di conseguenza $\dot{m} = G m (N_0 - \alpha m) - km$
 $= G m N_0 - \alpha G m^2 - km = m (G N_0 - \alpha G m - k)$

Punti di equilibrio $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{G N_0 - k}{\alpha G}$

Restrizioni fisiche del modello: velocità solo $m > 0$.

Linee delle fasi



Condizione: $N_0 < N_0^* \Rightarrow m \rightarrow 0$ NO LASER
 $t \rightarrow +\infty$

$N_0 > N_0^*$ il laser funziona

BIFURCAZIONI A FORCETTA

Problema: $\dot{x} - x^3 = x(r - x^2)$ FORCETTA SUPERCRITICA

Punti di equilibrio $x_1 = 0$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{r}$

Linee delle fasi

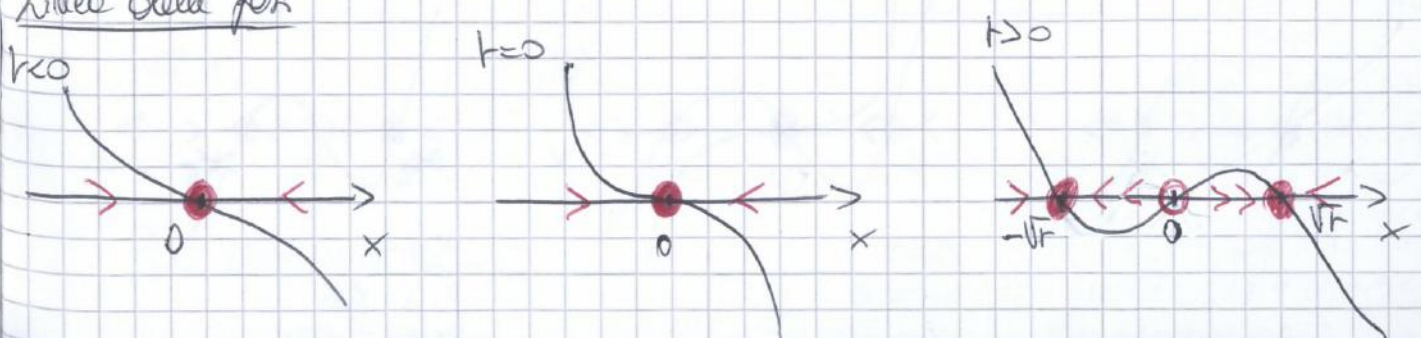
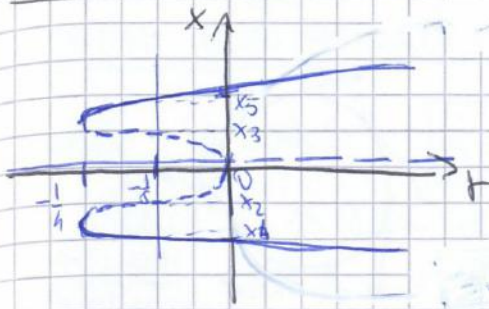
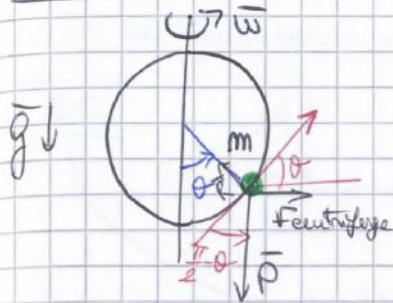


DIAGRAMMA DI BIFURCAZIONI



forchetta
supercritica

ESEMPIO Pallina su guida circolare rotante



Riferimento rotante

$$M\ddot{\alpha} = Mg + \bar{F}_{centrifuga} + \bar{F}_{coriolis} + \bar{F}_{altro} + \bar{P}$$

reazione vincolo
⊥ tangente

Con sistema di riferimento di massa alone \equiv con

la tangente; si proiettano le forze su tale asse:

$$m r \ddot{\theta} = -m g \sin \theta + m \omega^2 r \sin \theta \cos \theta - b \dot{\theta} \quad \text{dove } m \bar{a}_{tang} = m r \ddot{\theta}$$

altro

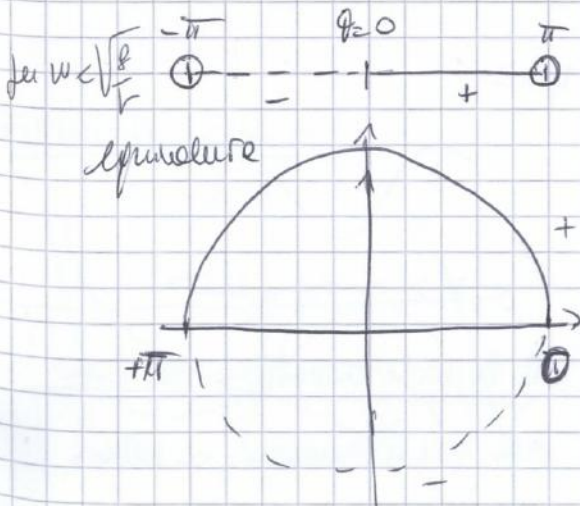
Si parla di $m r \ddot{\theta} \ll b \dot{\theta}$

$$b \dot{\theta} = -m g \sin \theta + m \omega^2 r \sin \theta \cos \theta = m \sin \theta (-g + \omega^2 r \cos \theta)$$

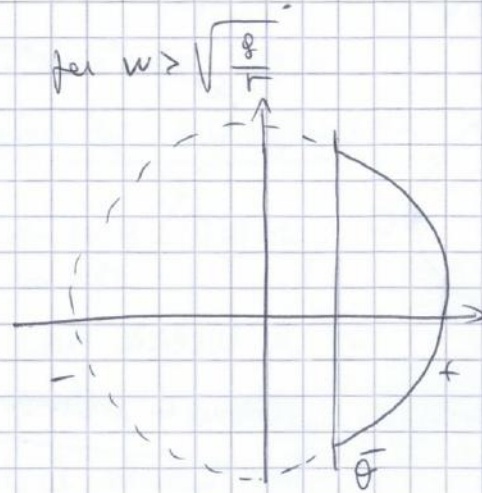
STUDIO DEI CASI

① $g > \omega^2 r$ $\Rightarrow \omega < \sqrt{\frac{g}{r}}$ | $\theta_1 = 0$ STABILE
 se fine poca veloce | $\theta_2 = \pi$ INSTABILE

② $\omega > \sqrt{\frac{g}{r}}$ | $\theta_1 = 0$ INSTABILE $\theta^* \neq 0^*$ stabili forchetta
 se fine alta veloce | $\theta_2 = \pi$ INSTABILE supercritica



π è stato punto di $-\pi$



ANALISI CON 2 PARAMETRI

SISTEMI UNIDIMENSIONALI CON 2 PARAMETRI

Modello "focotolo" $\dot{x} = tx - x^3 + h$

Per l'analisi si fissa il parametro e si varia l'altro.

Fisso t , varia h

$$\dot{x} = tx - x^3 - (-h)$$

Punto di equilibrio: $f(x) = 0$ $tx - x^3 - (-h) = 0$ ma prefero $tx - x^3 = -h$

$t \leq 0$

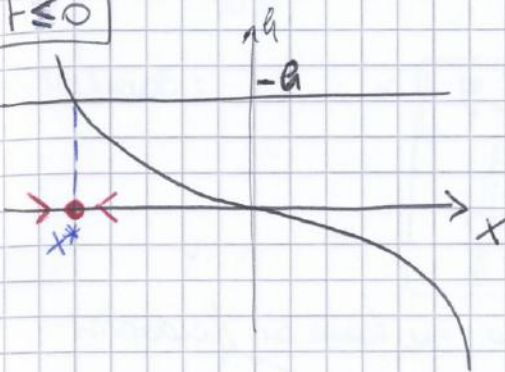


DIAGRAMMA DI BIFURCAZIONI

$t \leq 0$



$$h = x^{*3} - tx^* \text{ con } t \leq 0$$

$t > 0$

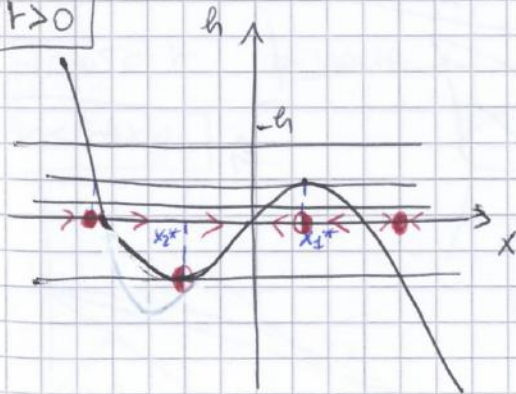
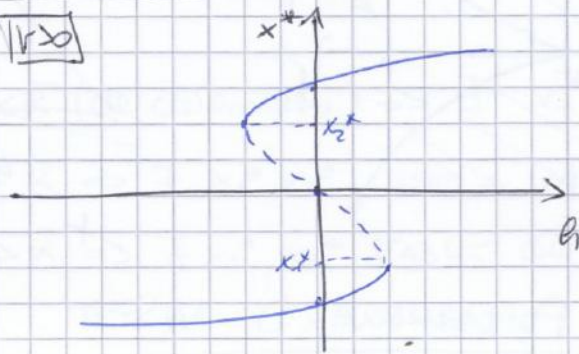


DIAGRAMMA DI BIFURCAZIONI

$t > 0$



$$h = x^{*3} - tx^* \text{ con } t > 0$$

Fisso h , varia t

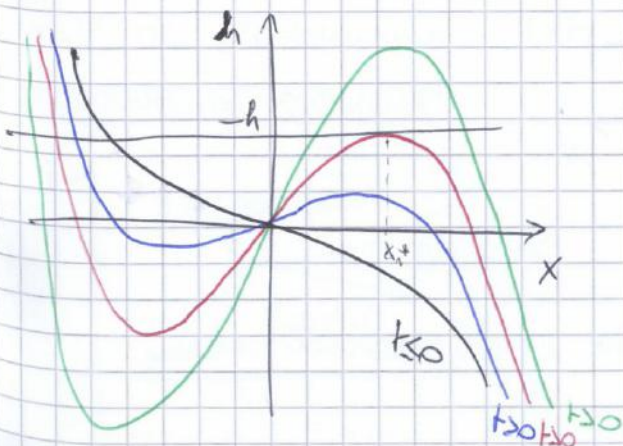
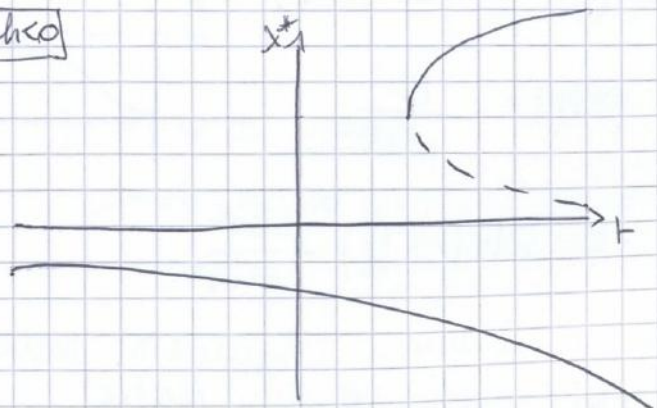


DIAGRAMMA DI BIFURCAZIONI

$h < 0$



ponendo $x = \frac{N}{A}$ si ottiene:

$$\dot{x} = R x \left(1 - \frac{A}{K} x\right) - \frac{B x^2}{1+x^2}$$

Invadendo tutto per B si ottiene:

$$\frac{\dot{x}}{B} = \frac{R}{B} x \left(1 - \frac{A}{K} x\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

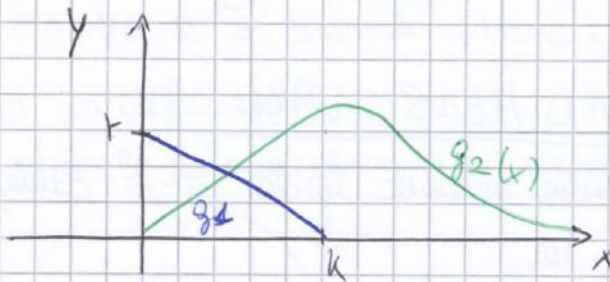
ponendo $z = Bt$ si insieme:

$$\frac{\dot{x}}{B} = \frac{dx}{dz} \quad \text{e si pone } r := \frac{R}{B} \quad \text{e } k := \frac{k}{A}$$

dunque
$$\frac{dx}{dz} = r x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

insieme:
$$\dot{x} = x \left[\underbrace{r \left(1 - \frac{x}{k}\right)}_{g_1(x, r, k)} - \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{g_2(x)} \right]$$

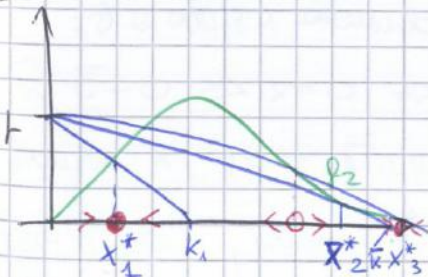
g_2 è odimensionale
(è la sola f.a. di x)



$x > 0$ in punto è una popolazione in esame

Primo r, a varie k

$$r < \max g_2$$



Il segno è dato da $g_1 - g_2$

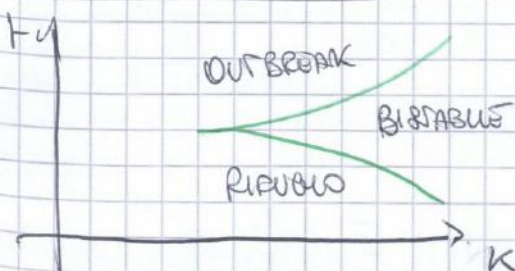
- per $k < \bar{k}$ (da determinare) $\Rightarrow \exists! x_1^*$ STABILE
- per $k = \bar{k} \Rightarrow \exists x_1^*, x_2^*$, STAB e INSTABILE
- per $k > \bar{k} \Rightarrow \exists x_1^*, x_3^*$ STABILI con $x_3^* > x_1^*$ ed $\exists x_2^*$ INSTABILE

x_1^* : "RIPUBBLICA" (popoli venuti)

x_3^* : "OUTBREAK" (popolazione molto grande)

r > r da determinare

DIAGRAMMA DI STABILITÀ



in $x=0$ è INSTABILE

avendo derivata positiva \rightarrow instabile

DEFINIZIONE: E si dice ENERGIA MECCANICA

E si scompone in ENERGIA CINETICA $T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$

$E = T + V$

e in ENERGIA POTENZIALE $V = \frac{k}{2} x^2$

E è una QUANTITÀ CONSERVATA: INTEGRALE PRIMO

EQUAZIONE DELL'OSCILLATORE ARMONICO

$m\ddot{x} + kx = 0$ Eq. diff. del II ordine a coeff. costanti

↓ si moltiplica a

① $\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = E$ Eq. diff. del I ordine a coeff. costanti

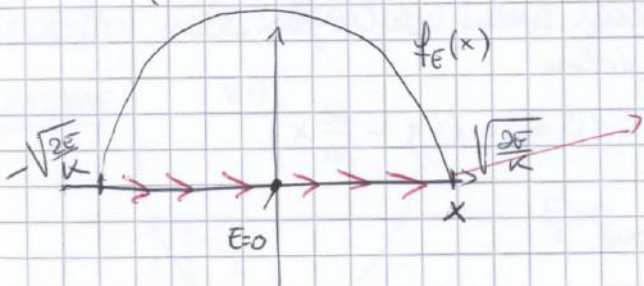
Eq. diff. in forma normale $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$

La ① risulta in forma normale diversa: $\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}}$ 2 eq. differenziali!!

$E \geq 0$ per definizione

(è la somma di 2 quadrati)

$f_E(x) = \pm \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}}$



funzione verticale! → Non è lipschitziana

Code iterati E! soluzione

si può usare in tempo finito!

Se $E = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0$

Sempre $x(t) = 0$ è una soluzione.

Per $E > 0$ Dom ($f_E(x)$) = $[-\sqrt{\frac{2E}{k}}, +\sqrt{\frac{2E}{k}}]$

Si conosce dato iniziale $x(0) = 0$

Si calcola il tempo di permanenza da $x(0) = 0$ a $x(\bar{t}) = \sqrt{\frac{2E}{k}}$

Si sfrutta il teorema di invarianza delle soluzioni:

$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{m}{2E - kx^2}} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2E - kx^2}} dx$ $x(\bar{t}) = \sqrt{\frac{2E}{k}}$

Si moltiplica $\bar{t} = \int_0^{\bar{t}} dt = \int_0^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \sqrt{\frac{m}{2E - kx^2}} dx = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}} dx$

→ sostituzione $y = \sqrt{\frac{k}{2E}} x$

$= \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin y \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\omega}$

ove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

OSS: la velocità di fase è tangente alla traiettoria di fase.

Si prende in esame un punto $(x, \dot{x}) = (x, \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}})$

La tangente alla curva di fase passante per quel punto è:

$$\left(\dot{x}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E - kx^2}} \left(-\frac{2k}{m} x \dot{x} \right) \right) = \left(\dot{x}, -\frac{k}{m} x \right)$$

Se $x_1(t)$ è una soluzione con energia E , ogni altra soluzione con energia la stessa E , si scrive $x_2(t) = x_1(t - T)$ per un opportuno valore di T .

Reverse, $\forall T \in \mathbb{R}$, $x_1(t - T)$ è soluzione con energia E .

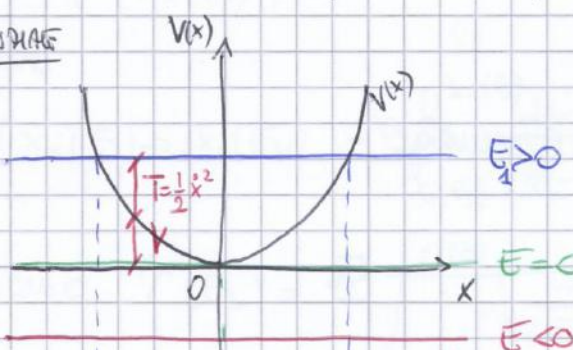
La variabile tempo compare implicitamente \rightarrow è uguale per ogni situazione temporale.

IPERONIA $T = \frac{2\pi}{\omega}$ il tempo T non dipende dall'energia

OSS: gli oscillatori armonici sono il tipo di sistemi isolati meccanici non-bate.

Il ritorno di fase dell'oscillatore armonico può essere agevolmente dedotto dalla sua funzione potenziale V :

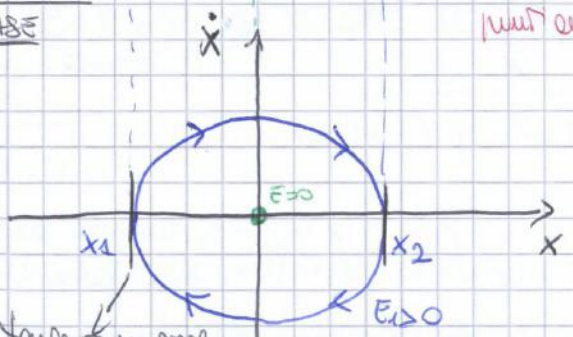
POTENZIALE



OSCILLATORE ARMONICO

$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + c$ (costante, si pone $c=0$)
 $V(x)$ parabola con minimo nell'origine

TRAIETTORIA DI FASE



Le tangente verticali derivano in quanto il grafico proviene da $\sqrt{\dots}$ e in 0 la radice ha tangente verticale.

Per tracciare il ritorno di fase nel piano delle fasi (x, \dot{x}) è sufficiente tracciare sul grafico del potenziale le rette corrispondenti ai livelli di energia E ; esse formano intersezione la curva $V(x)$.

In particolare: ogni intersezione con $V(x)$ corrisponde a un zero dell'energia cinetica $T(x)$.

• Inoltre poiché $T = (E - V) > 0 \Rightarrow$ il moto può svolgersi solo entro l'intervallo $[x_1, x_2]$ dove $V \leq E$.

Per $0 \leq E_3 < V_{min}$ si calcola tempo di permanenza: Chiuso Periodo
 $t(x_-(E_3) \rightarrow x_+(E_3)) \Rightarrow$ $\mathcal{T}(E_3) = \text{"tempo di un periodo con energia } E_3\text{"}$
 $\frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + V(x) = E \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2(E-V(x))}{\mu}} \quad t_+(E) = \dot{x}_+ = \sqrt{\frac{2(E-V(x))}{\mu}} = \frac{dx}{dt}$

Per il teorema dell'inversione delle derivate:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2(E-V(x))}{\mu}}} \quad \text{da cui} \quad dt = \frac{\sqrt{\mu} dx}{\sqrt{2(E-V(x))}}$$

Quindi $t(x_- \rightarrow x_+) = \int_{x_-(E_3)}^{x_+(E_3)} \frac{\sqrt{\mu} dx}{\sqrt{2(E-V(x))}} \rightarrow$ è un integrale improprio con 2 poli in $x_-(E)$ e $x_+(E)$
 $\leftarrow +\infty$ CONVERGE

Si consideri $x_-(E)$

$$V(x) = V(x_-(E)) + V'(x_-(E)) \cdot (x - x_-(E)) + o(x - x_-(E))$$

$= E$

$$\sqrt{E - V(x)} \sim \sqrt{-V'(x_-(E))(x - x_-(E))}$$

ma $V'(x_-(E)) \neq 0$

Quindi

$$t(x_+(E_3) \rightarrow x_-(E_3)) = \sqrt{\mu} \int_{x_+(E_3)}^{x_-(E_3)} \frac{dx}{\sqrt{2(E-V(x))}} = \sqrt{\mu} \int_{x_-(E_3)}^{x_+(E_3)} \frac{dx}{\sqrt{2(E-V(x))}}$$

Però $\mathcal{T}(E_3) = 2 \int_{x_-(E_3)}^{x_+(E_3)} \sqrt{\frac{\mu}{2(E-V(x))}} dx = \sqrt{2\mu} \int_{x_-(E_3)}^{x_+(E_3)} \frac{dx}{\sqrt{E_3 - V(x)}}$

Per $E = E_3$ si studia il periodo

$\frac{1}{\sqrt{E_3 - V(x)}}$ vicino a $x_+(E_3)$ punto di singolarità

$$V(x) = V(x_+(E_3)) + V'(x_+(E_3))(x - x_+(E_3)) + \frac{1}{2} V''(x_+(E_3))(x - x_+(E_3))^2 + o \dots$$

Notazione per comodità: $x_+(E_3) := x_+$

$$E_3 - V(x) = -V'(x_+)(x - x_+) - \frac{1}{2} V''(x_+)(x - x_+)^2 + o \dots$$

Quindi $\frac{1}{\sqrt{E_3 - V(x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{-V'(x_+)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x - x_+|}} \rightarrow \int_e^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{|x_+ - x|}} = 2\sqrt{|x_+ - x|} \Big|_e^{x_+} = 2\sqrt{x_+ - e} < \infty$ CONVERGE

OSS: $\dot{x} = \sqrt{\frac{2(E_5 - V(x))}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_5 - V(x) \right)} \sim \sqrt{\frac{2}{m} \left(-\frac{1}{2} V''(x_{max}) (x - x_{max}) \right)} + 0 \dots$

sempre $\varphi = \sqrt{\frac{V''(x_{max})}{m}} (x_{max} - x)$ è la tangente alle traiettorie di fase nel punto $(x_{max}, 0)$

NB: La traiettoria non è chiusa (in x_{max} non si chiude); è APERTA

NB: Le traiettorie di fase $\gamma(x(t), \dot{x}(t), -\infty < t < +\infty)$ è APERTA, ma questo non succede $(x_{max}, 0)$

Le traiettorie di fase che passano per il punto $(x_{max}, 0)$ è il punto stesso

Inoltre la velocità di fase in $(x_{max}, 0) = (0, \frac{-V'(x_{max})}{m}) = (0, 0)$

Le traiettorie di fase per E_5 sono 4: quelle sopra, il punto stesso e le 2 laterali.

ESEMPLO REPULSORE ARMONICO

$V(x) = -\frac{1}{2} kx^2 + e$ ($C_{potenza} = 0$)

parabola con minimo nell'origine

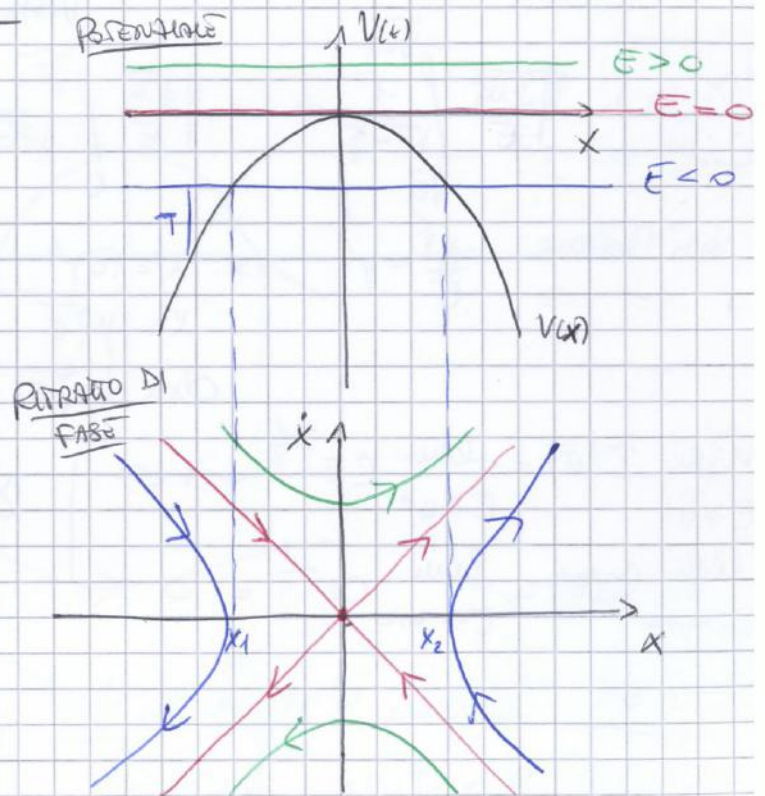
- Per $E < 0$ vi sono 2 punti di questo x_1 e x_2 .

- Per $E > 0$ non vi sono punti di questo; v diminuisce in modo che sul minimo di V , ma non si annulla mai.

- Per $E = 0$ si ha un unico punto di questo dove $V = E$ e due $v = 0$ annulla - Non è punto di

inversione ma di equilibrio; se ci si allontana da questo punto v in modulo cresce e si hanno 4 diverse traiettorie che fanno da supporto ad altrettanti moti, 2 entranti e 2 uscenti.

NB: Per il repulsore armonico le 4 traiettorie sono simmetriche, in generale sono curve diverse.



$$\gamma(\varepsilon) = c \varepsilon^{\frac{1}{2}-1} = c \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$$

Se $\alpha=2$ $\gamma(\varepsilon) = c$ costante isocrona

Se $\alpha < 2$ $\gamma(\varepsilon)$ crescente, $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$

Se $\alpha > 2$ $\gamma(\varepsilon)$ decrescente, $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \infty$ Blow-up

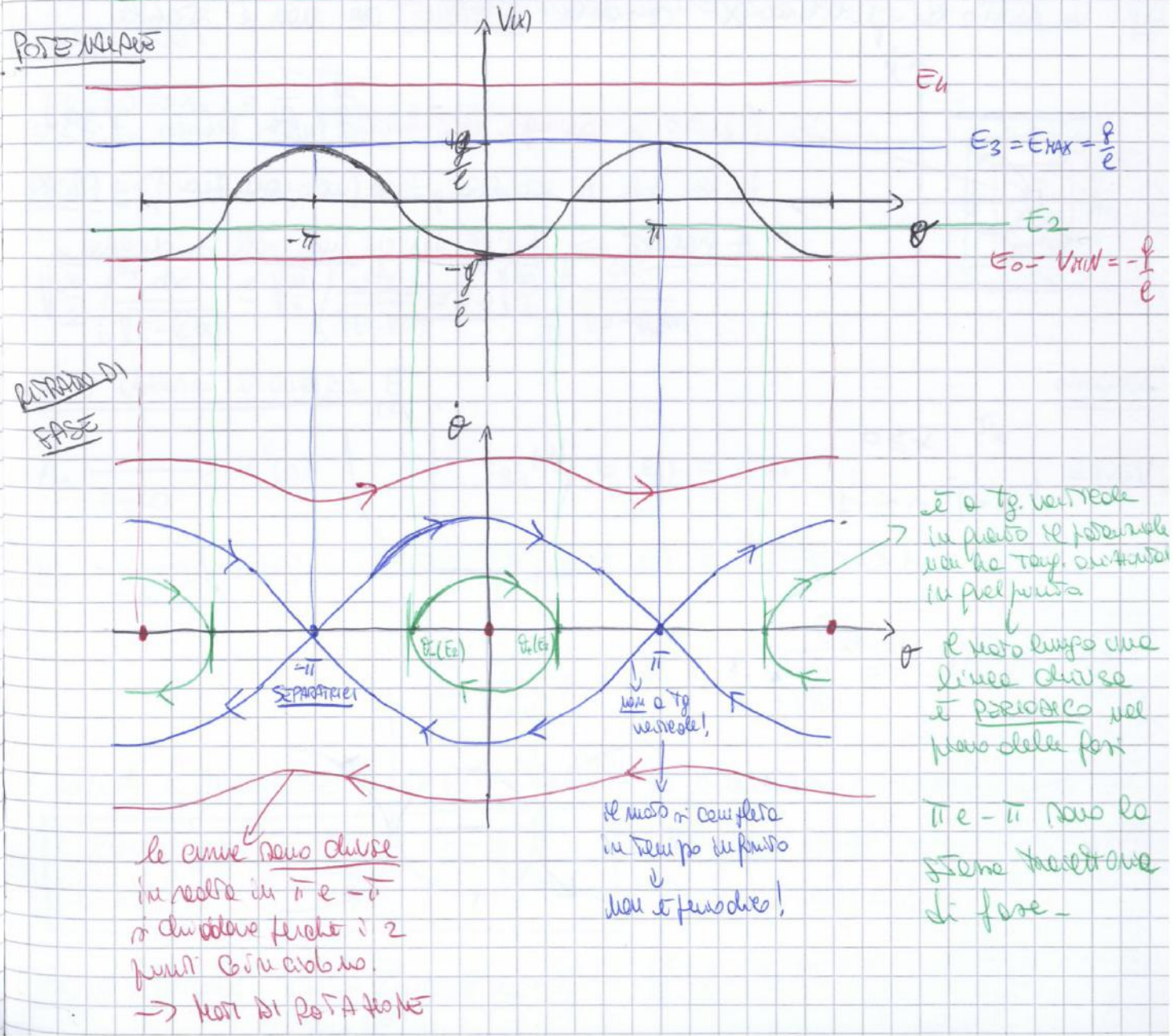
ESERCIZIO Trovare potenziale e tracciare il reticolo di fase.

PENSA $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + V(\theta) \right] = 0$$

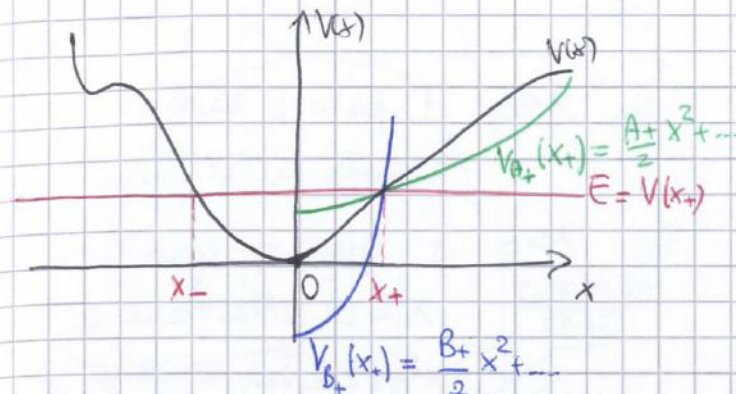
Donc $V(\theta) = \int \frac{g}{l} \sin \theta d\theta = -\frac{g}{l} \cos \theta + c = 0$

$$V(\theta) = -\frac{g}{l} \cos \theta$$



TEORIA DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

Si consideri un potenziale $V(x)$ e ad $\bar{x}=0$ un punto di minimo per V tale che $V''(0) > 0$.



Si riferisce che in x_+ $V''(x) > 0$

COEFFICIENTI

$A_+ = \min V''(x) \rightarrow$ parabola di coeff $[0, x_+]$ A_+ costante per x_+

$B_+ = \max V''(x) \rightarrow$ parabola di coeff $[0, x_+]$ B_+ costante per x_+

Si calcola ora il tempo di percorrenza da 0 a x_+ lungo la parabola.

$t_{A_+}(0 \rightarrow x_+) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{A_+}}$ lungo la curva di coeff. A_+ la curva di un oscillatore armonico con $k=A_+$ (è meglio ma non importa)

Analogamente:

$$t_{B_+}(0 \rightarrow x_+) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{B_+}}$$

OSS! $t_{B_+} \leq t(0 \rightarrow x_+) \leq t_{A_+}$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V_{B_+}(x)}} \leq \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \leq \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V_{A_+}(x)}}$$

Se si ottiene l'energia E

$$A_+ \xrightarrow{E \rightarrow 0} V''(0)$$

$$t_{B_+} \leq t(E) \leq t_{A_+}$$

$$B_+ \xrightarrow{E \rightarrow 0} V''(0)$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{B_+}} \leq t(E) \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{A_+}}$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{V''(0)}} \leq t(E) \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{V''(0)}}$$

$$\Rightarrow t(E) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{V''(0)}} \text{ per. Teor. dei 2 Coefficienti}$$

Ripetendo il ragionamento nell'intervallo a sinistra si ottiene infine

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} t(E) = \tau_{p.o.} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(0)}}$$

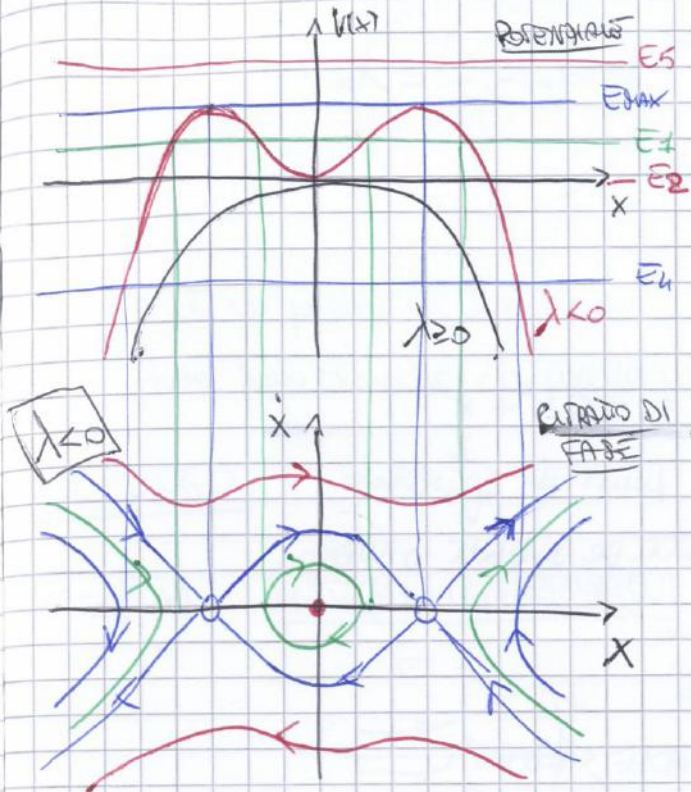
PERIODO DELLE

PICCOLE OSCILLAZIONI

ESEMPIO; Pendolo $V(x) = -\frac{gm}{e} \cos \theta \approx -\frac{gm}{e} (1 - \frac{\theta^2}{2}) \approx \frac{gm}{e} \frac{\theta^2}{2}$ $\tau_{p.o.} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{gm}{e}}} = 2\pi \sqrt{\frac{e}{g}}$

ES=APCO

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^2$$



Per \forall valore di E \exists regione ammissibile!
 OSS: Per E_{max} \exists φ traiettorie di fase!

Per $\lambda \geq 0$ $\exists!$ punto di equilibrio

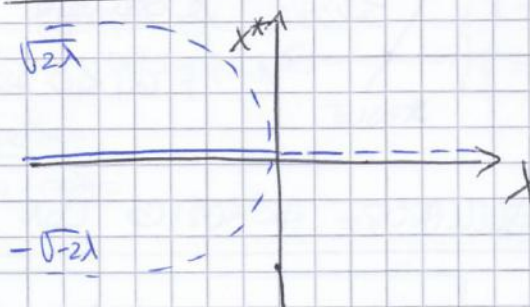
$$x^* = 0 \text{ INSTABILE}$$

Per $\lambda < 0$ \exists 3 punti di equilibrio

$$x^* = 0 \text{ STABILE}$$

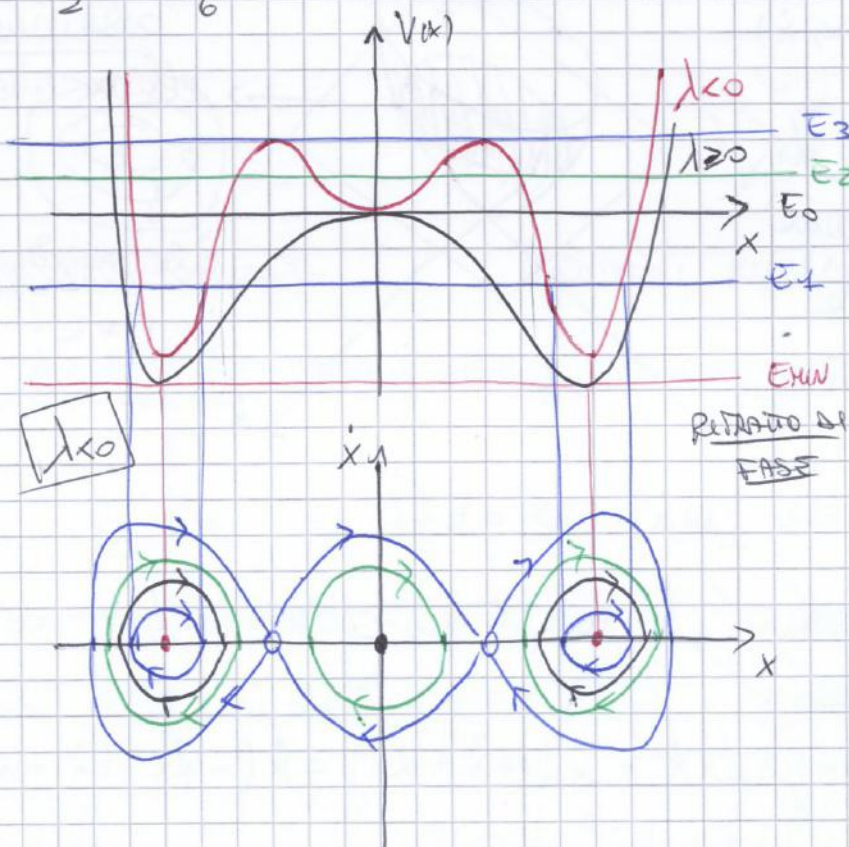
$$x_{1,2}^* = \pm \sqrt{-2\lambda} \text{ INSTABILI}$$

DIAGRAMMA DI BIFURCAZIONE

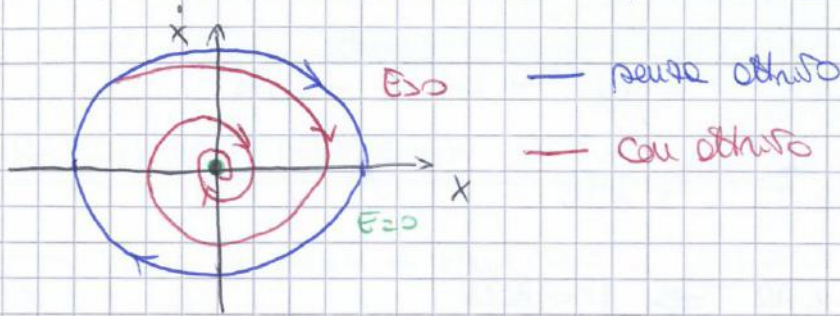


Per l'intero \mathbb{R} potenziale del bene è sufficiente aggiungere il termine $+\frac{x^6}{6}$

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^6}{6}$$



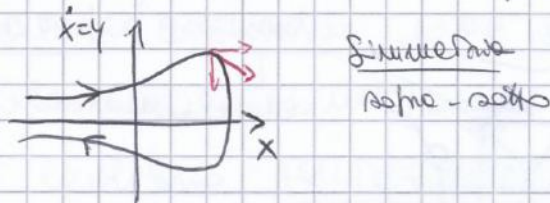
Con l'ottenuto le traiettorie di fase si modificano:



NB: 0 è un punto di equilibrio - tuttavia, vicino allo 0 le traiettorie di fase sono diverse da quelle viste precedentemente.

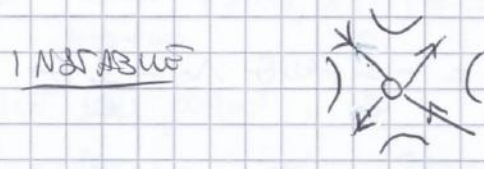
RIEPIUGO

$\ddot{x} = f(x)$ SISTEMI CONSERVATIVI → campo di velocità nello spazio $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$



Le curve di fase \equiv curve di livello di E
- hanno simmetria sopra-sotto

PUNTI DI EQUILIBRIO



Prototipo: oscillatore armonico

Prototipo: Repulsore armonico

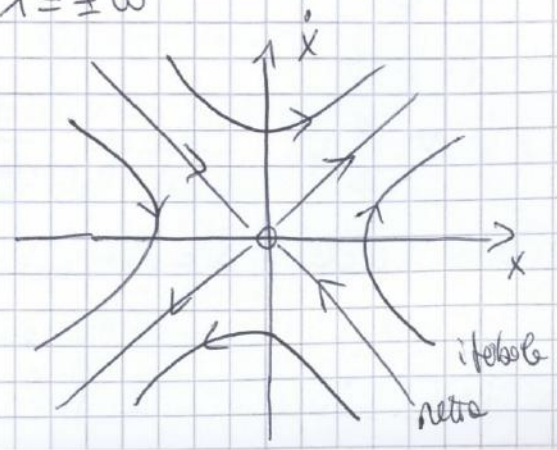
REPULSORE ARMONICO È un sistema elementare non-lineare:

$m\ddot{x} = kx$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \ddot{x} = \omega^2 x \Rightarrow \lambda^2 = \omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm \omega$

$\Rightarrow x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = \omega Ae^{\omega t} - \omega Be^{-\omega t}$



Se $A, B = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \forall t$

$A \neq 0, B = 0$

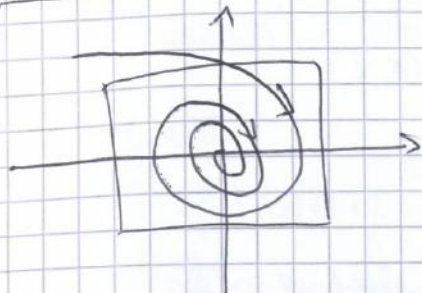
$\Rightarrow x(t) = Ae^{\omega t} \quad \dot{x}(t) = \omega x(t)$

$A = 0, B \neq 0$
 $\Rightarrow x(t) = Be^{-\omega t}$
 $\dot{x}(t) = -\omega Be^{-\omega t}$
 $\dot{x}(t) = -(\omega x(t))$

Se $f(x) < 0 \Rightarrow$ il sistema lineare è l'OSCILLAZIONE ARMONICA

Se $f'(x) > 0 \Rightarrow$ il sistema lineare è il PENDOLO ARMONICO (p. eq. instabile)

OSCILLAZIONE ARMONICA (PENDOLO STORTATO)



Il punto di equilibrio è INSTABILE: non è stabile per $t \rightarrow -\infty$
 è STABILE nel futuro
 è ASINT. STABILE nel futuro.

EQUILIBRIO STABILE (NOC FUTURO)

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |x(0)| + |\dot{x}(0)| < \delta \Rightarrow |\dot{x}(t)| + |x(t)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\forall t \in \mathbb{R}^+)$$

OSS: Per un sistema conservativo esiste solo equilibrio stabile (se lo è nel futuro lo sarà anche nel passato)

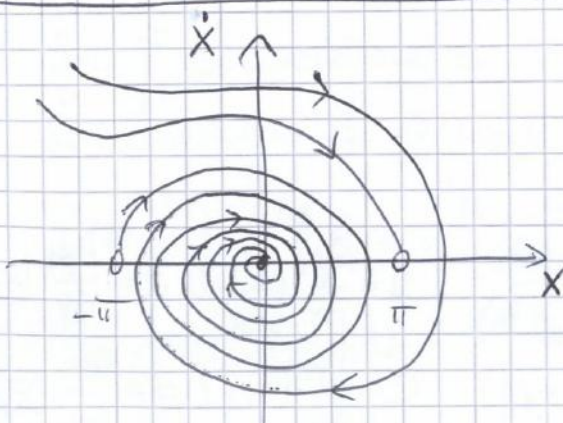
\bar{x} è punto di equilibrio ASINTOTICAMENTE STABILE (nel futuro) se:

- ① \bar{x} è STABILE nel futuro;
- ② \exists un intorno del punto $(\bar{x}, 0)$ nel piano delle fasi tale che $\forall (x, \dot{x})$ in quell'intorno $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), \dot{x}(t)) = 0$

Def: $(\bar{x}, 0)$ ASINTOTICAMENTE STABILE nel futuro

$\exists (x, \dot{x})$ t.c. la traiettoria che parte fu l'origine fu (x, \dot{x}) tende a $(\bar{x}, 0)$ per $t \rightarrow +\infty$ si dice BAKIN DI ATTIRAZIONE del punto \bar{x}

PENDOLO DEBOLMENTE STORTATO



$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

\bar{x} è punto di equilibrio se $f(\bar{x}, 0) = 0$

Lo smorzamento \rightarrow introduce inertezia

\rightarrow freccia del tempo

Non numeraria sopra-sotto

① e ② differiscono: ② è lineare \rightarrow sempre esattamente risolubile.

Reverse of Superposition (vale solo per ②)

Se $(x_1(t), y_1(t))$ è soluzione con dato iniziale $(x_1(0), y_1(0))$ e $(x_2(t), y_2(t))$ è soluzione con dato iniziale $(x_2(0), y_2(0))$ allora,

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$(\lambda x_1(t) + \mu x_2(t), \lambda y_1(t) + \mu y_2(t))$ è anche soluzione con dato iniziale $(\lambda x_1(0) + \mu x_2(0), \lambda y_1(0) + \mu y_2(0))$.

Si può scrivere ② in un altro modo:

② $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\boxed{\dot{U} = AU}$$

ANALISI SPETTRALE di A (ovvero analisi autovalori e autovettori di A)

CASI

① Autovalori λ_1, λ_2 reali distinti \Rightarrow autovettori $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$

② Autovalori $\lambda_1 = \lambda_2$ reali coincidenti

③ Autovalori complessi $\lambda_1 = \lambda' + i\lambda'' \Leftrightarrow \vec{\xi}_1 = \vec{\xi}' + i\vec{\xi}''$
 $\lambda_2 = \lambda' - i\lambda'' \Leftrightarrow \vec{\xi}_2 = \vec{\xi}' - i\vec{\xi}''$

CASO ① $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

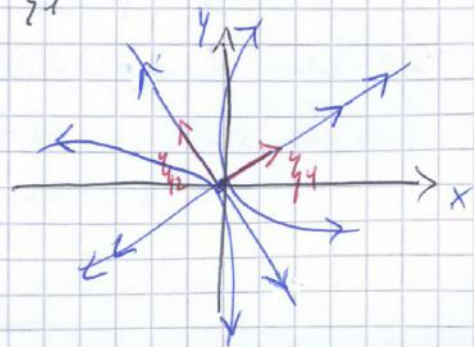
① $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ NONO INSTABILITÀ

Se $\vec{\xi}_1$ un autovettore di λ_1 $A\vec{\xi}_1 = \lambda_1\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1 \neq 0$

È conveniente la soluzione $U(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{\xi}_1$

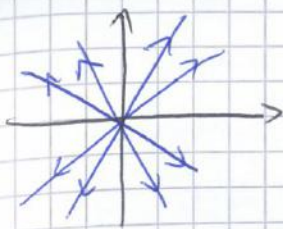
$$\dot{U}(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \vec{\xi}_1 = e^{\lambda_1 t} \lambda_1 \vec{\xi}_1 = \lambda_1 U$$

$$\lambda_1 A e^{\lambda_1 t} \vec{\xi}_1 = \lambda_1 U \quad A \vec{\xi}_1$$



OSS: $A(e^{\lambda_1 t} \vec{\xi}_1) = e^{\lambda_1 t} A\vec{\xi}_1 = e^{\lambda_1 t} \lambda_1 \vec{\xi}_1$

$\dot{U}(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \vec{\xi}_1 = A(e^{\lambda_1 t} \vec{\xi}_1) = AU$



NODO A STELLA
INSTABILE

∃ 2 autovettori indipendenti
⇒ tutti i vettori sono autovettori
⇒ NODO A STELLA

1e4 Non esistono 2 autovettori indipendenti

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

NODO INSTABILE DEGENERATO

Se $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

NODO STABILE DEGENERATO

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore

Si dimostra ora che ogni autovettore v della forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, AV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dove } V = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(t) = e^{tA} V$$

$$\dot{U}(t) = e^{tA} V = e^{tA} AV = A(e^{tA} V) = A(U(t))$$

Si consideri l'eq. diff. con dato iniziale $U(0) = W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\dot{U}(t) = AU(t)$$

Decomponendo $U(t) = U_v(t) + U_w(t)$

$$U_v(t) = c_1(t) V$$

$$U_w(t) = c_2(t) W$$

$$c_1(0) = 0, c_2(0) = 1$$

$$\dot{U}(t) = \dot{c}_1(t) V + \dot{c}_2(t) W$$

$$\dot{U}(t) = AU(t) = A[U_v(t) + U_w(t)] = \dot{U}_v(t) + \dot{U}_w(t) = 2U_v(t) + U_w(t)$$

$$\dot{c}_1(t) V = 2U_v(t) = c_1(t) V = 2c_1(t) V$$

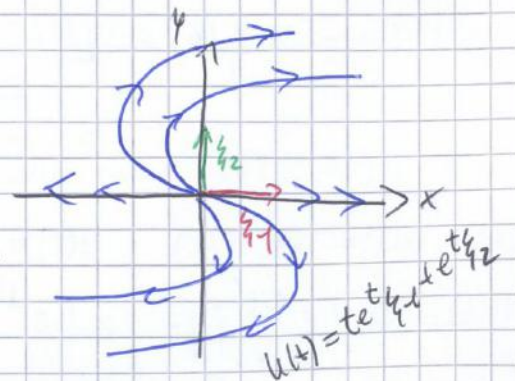
$$\dot{c}_2(t) W = U_w(t) = c_2(t) W$$

$$\Downarrow$$

$$c_2(t) = e^t$$

$$c_1(t) = te^t$$

NODO
INSTABILE
DEGENERATO



Essendo che V e W sono lin. indipendenti

$$\dot{c}_1 = c_1 + c_2 \Rightarrow \dot{c}_1 - c_1(t) = c_2(t) = e^t \Rightarrow c_1(t) = Ae^t + te^t; c_1(0) = Ae^0 = A = 0$$

$$c_2 = c_2 \Rightarrow c_2(t) = e^t c_2(0) = e^t$$

$$\Rightarrow c_1(t) = te^t$$

$$v(t) = \text{Im} \left(e^{\lambda t} (G_3(\lambda''t) + i \text{sen}(\lambda''t)) (\xi' + i \xi'') \right) =$$

$$= e^{\lambda t} (G_3(\lambda''t) v(0) + \text{sen}(\lambda''t) u(0))$$

CASO PARTICOLARE $\lambda' = 0$

$u(t)$ = Opere di oscillazioni armonici (uno dei quali componente) anche $v(t)$

Costo iniziale generale $x(0) = \alpha u(0) + \beta v(0)$

$$x(t) = \alpha u(t) + \beta v(t)$$

Notazione $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$

Prevedo $G_3(\lambda''t) = c$ $\text{sen}(\lambda''t) = s$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1(t) + \beta v_1(t) \\ \alpha u_2(t) + \beta v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha c u_1 - \alpha s v_1 + \beta c v_1 + \beta s u_1 \\ \alpha c u_2 - \alpha s v_2 + \beta c v_2 + \beta s u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha u_1 + \beta v_1) c + (\beta u_1 - \alpha v_1) s \\ (\alpha u_2 + \beta v_2) c + (\beta u_2 - \alpha v_2) s \end{pmatrix}$$

OSS: $\exists!$ φ tale che

$$A \cos(z) + B \text{sen}(z) = Q \cos(z - \varphi)$$

Infatti ponendo $Q = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$A \cos z + B \text{sen} z = Q \left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos z + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{sen} z \right]$$

OSS: $-1 \leq \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \leq 1$

Inoltre $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1$

$-1 \leq \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \leq 1$

$\exists!$ ϕ tale che $\cos \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\text{sen} \phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

La \otimes diventa: $Q [\cos z \cos \varphi - \text{sen} z \text{sen} \varphi] = Q \cos(z - \varphi)$

Quindi $u(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\lambda''t - \varphi) \\ b \text{sen}(\lambda''t + \theta) \end{pmatrix}$

$$u_2(t) = b (\text{sen}(\lambda''t - \varphi + \varphi + \theta)) = b (\text{sen}(\lambda''t - \varphi) \cos(\varphi + \theta) + \cos(\lambda''t - \varphi) \text{sen}(\varphi + \theta)) =$$

$$= b \cos(\varphi + \theta) \text{sen}(\lambda''t - \varphi) + \frac{b}{Q} \text{sen}(\varphi + \theta) Q \cos(\lambda''t - \varphi)$$

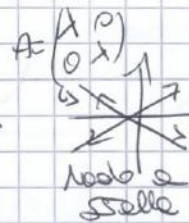
$u_1(t)$

non possibile

$\det A > 0, \text{Tr} A > 0$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = (\lambda' - i\lambda'') + (\lambda' + i\lambda'') = 2\lambda' > 0$

$\lambda_1 \lambda_2 > 0 \quad \lambda_1 + \lambda_2 > 0$



$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Se $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr} A}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$

sono autovalori propri \Rightarrow

una facile perturbazione dei

elementi della matrice può cambiare la natura

del, nodi e focoli sono invece configurazioni robuste.

Un caso estremo sulla parabola

Esempio OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

$\ddot{x} + w^2 x + b\dot{x} = 0 \quad b > 0$

$\dot{x} = y$

$\dot{y} = -bx - w^2 x = -by - w^2 x$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -b \end{pmatrix}$

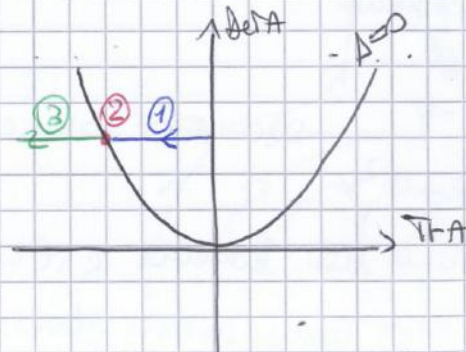
$pc(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -w^2 & -b-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + b\lambda + w^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4w^2}}{2}$

$\text{Tr} A = -b < 0$

$\det A = w^2 > 0$

$\Delta = b^2 - 4w^2$



Se $\Delta < 0$

$b^2 < 4w^2$
 $b < 2w$

(1)

FOCOLE STABILE

"piu' b piu' smorzamento" - regime sovrasmorzato



$\Delta = 0$

$b = 2w$

(2)

NODO DEGENERO STABILE

"smorzamento critico"



$\Delta > 0$

$b > 2w$

(3)

NODO STABILE

"meno smorzamento"



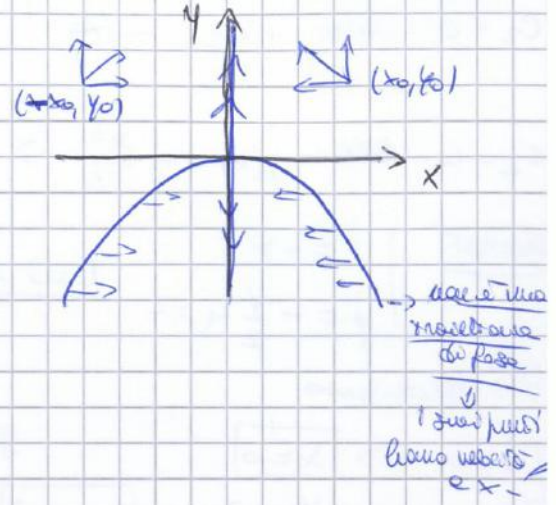
Esempio SISTEMA NON LINEARE

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases} \text{ non lineare}$$

Punti di equilibrio

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \dot{y} = 0 \Leftrightarrow y + x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

OSS: il campo di velocità "è destra" si ottiene riflettendo il campo di velocità "a sinistra". Il punto di fase "a destra" ($x > 0$) è il riflesso del punto di fase "a sinistra".
 Dunque è sufficiente lo studio per $x > 0$.



Curve su cui la velocità \dot{x} // agli assi conduttori:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ \dot{y} = 0 &\Leftrightarrow y = -x^2 \end{aligned}$$

Si considerano le curve di fase come grafici di funzioni $y(x)$ (ove permittibile)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{y}{x} - x$$

$$\begin{aligned} y' > 0 &\Rightarrow -\frac{y}{x} > x \\ x > 0 &\Rightarrow -y > x^2 \Rightarrow y < -x^2 \end{aligned}$$

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} - 1 = \frac{y}{x^2} + 1 + \frac{y}{x^2} - 1 = \frac{2y}{x^2}$$

Sign $y'' = \text{sign } y$

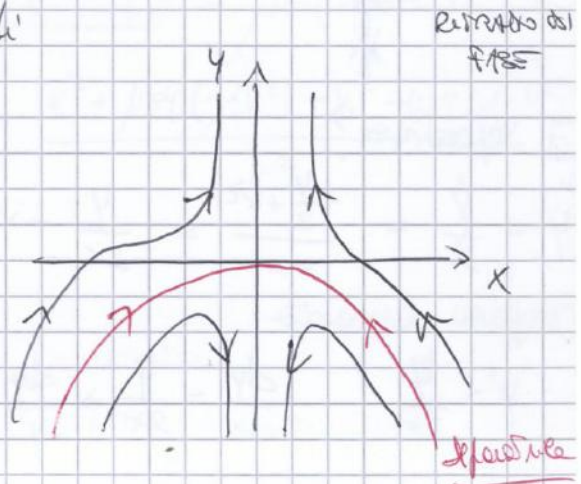
È una separazione?

Trovare le soluzioni $y' = -\frac{y}{x} - x$ Eq. diff. lineare non omogenea

Eq. omogenea associata: $y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x + c \Rightarrow \ln y = \ln \frac{1}{x} + c$
 $\Rightarrow y_{om}(x) = \frac{c_1}{x}, c_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y_p(x) = cx^2 \rightarrow 2cx = -\frac{cx^2}{x} - x \Rightarrow 2c = -(c+1) \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$

$y_{gen}(x) = \frac{c_1}{x} - \frac{x^2}{3}$ Eq. retto di fase (eccetto $x=0$)



Esercizio Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x_0 e^{-t} \\ \dot{y} = y + x_0^2 e^{-2t} \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \dot{y} = y \text{ omogenea } y_{\text{hom}}(t) = ce^t$$

$$y_p(t) = ce^{-2t} \quad -2ce^{-2t} = ce^{-2t} + x_0^2 e^{-2t}$$

$$y(t) = ce^t - \frac{x_0^2}{3} e^{-2t} \quad c = -\frac{x_0^2}{3}$$

Imponendo le c.i.:

$$y_0 = c - \frac{x_0^2}{3} \Rightarrow c = y_0 + \frac{x_0^2}{3}$$

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{x_0^2}{3}\right) e^t - \frac{x_0^2}{3} e^{-2t}$$

Esercizio

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu x (1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y (1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

↳ eq. ciclot. → conviene usare coord. polari.

Formule utili

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}$$

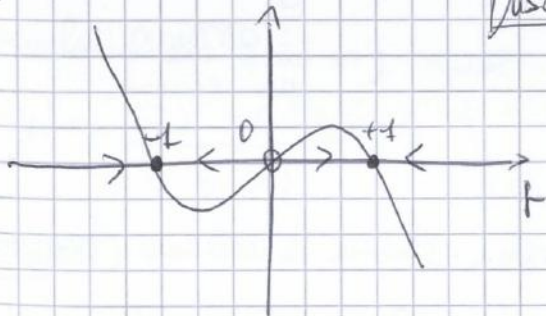
$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{-yx + \mu x^2(1-x^2-y^2) + xy + \mu y^2(1-x^2-y^2)}{r}$$

$$= \frac{\mu(1-x^2-y^2)(x^2+y^2)}{r} = \mu r (1-r^2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{x^2 + \mu xy(1-r^2) + y^2 - \mu xy(1-r^2)}{r^2}$$

$$= \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r (1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$



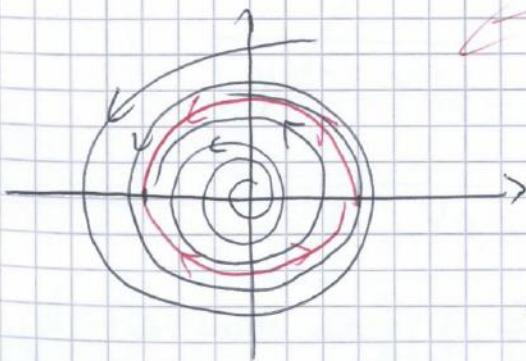
$\mu > 0$

lineare

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{centro}$$

pericolosa

trasforma in fase non lineare



Ciclo limite $r=1$

Attrattore se $\mu > 0$

instabile se $\mu < 0$

non raggiunge $r=1$ in tempo finito.

Sistema Coupled:

$$\dot{X} = -\frac{bc}{d} Y$$

$$\dot{Y} = \frac{ad}{b} X$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} A = 0$$

$$\text{Det} A = bc > 0$$

Centro Omeo

↓
 è conf. "pioggia"

Soluzioni "semplici"

No perdite: $y(t) = 0 \forall t \rightarrow$ la seconda eq. è nulla

$$\dot{x} = dx \Rightarrow x(t) = e^{dt} x_0$$

$$\text{No perde } \dot{y} = -cy \Rightarrow y(t) = e^{-ct} y_0$$

I centri omomeo centri nei sistemi meccanici \rightarrow integrale primo: ovvero l'energia si conserva.

Il modello LRC-Volterra non è un sistema meccanico!

Si può vedere la presenza di un centro del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a-by) \\ \dot{y} = y(-c+dx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\dot{x}}{x} = a-by \cdot (-c+dx) \\ \frac{\dot{y}}{y} = -c+dx \cdot (a-by) \end{cases}$$

$$\int (-c+dx) \frac{\dot{x}}{x} = \int (a-by) (-c+dx)$$

$$\int (a-by) \frac{\dot{y}}{y} = \int (-c+dx) (a-by)$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{c}{x} + d\right) \dot{x} = \left(\frac{a}{y} - b\right) \dot{y}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{c}{x} + d\right) \dot{x} + \left(b - \frac{a}{y}\right) \dot{y} = 0 = \frac{d}{dt} \left(-c \ln x + dx + by - a \ln y \right) = 0$$

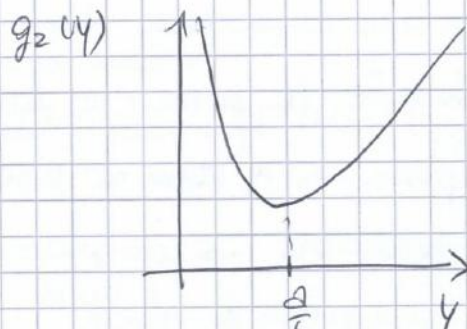
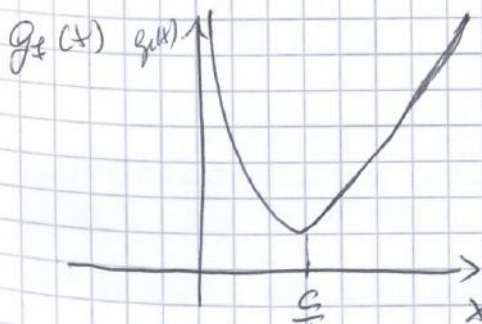
\hookrightarrow queste funzioni si conservano!

Dunque la presenza:

$$E(x,y) = \underbrace{d \cdot x - c \ln x}_{g_1(x)} + \underbrace{by - a \ln y}_{g_2(y)}$$

si conservano durante l'evoluzione.

Studio



Qualitativamente è come se fossero delle parabole

$$g'_1(x) = d - \frac{c}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{c}{d}$$

$$g'_2(y) = b - \frac{a}{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{b}$$

PROBABILITÀ

Def: ESPERIMENTO ALEATORIO (STOCASTICO, NON DETERMINISTICO) ^{casuale}: è un esperimento il cui esito non è prevedibile con certezza.

S = l'insieme di possibili esiti (o risultati) dell'esperimento.

ESEMPIO Esperimenti discreti

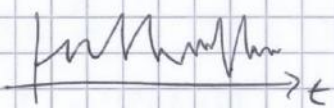
LANCIO DI UN DADO $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

LANCIO DI 2 TETRAEDRI (I e II) $S = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\} =$
 $= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4),$
 $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

CORSA DI 7 CAVALI $S = \{\text{insieme delle possibili classifiche} \mid = 7! \text{ per le}$
 possibili classifiche (PERMUTAZIONI)

Esperimenti continui

MISURA DI UNA RESISTENZA $S = \mathbb{R}^+ =$ insieme di numeri reali positivi

TEST dell'ECG  $S =$ insieme di funzioni (tracce)

Def: EVENTO: è un sottoinsieme di S . Denotato con A, B, E, A_1, A_2 e suscettibile di descrizione verbale.

Esempio DADO

$A =$ " esce un numero pari " $= \{2, 4, 6\}$ $B =$ " esce il numero 3 " $= \{3\}$
 $E_1 =$ " esce 1 " $= \{1\}$

In questo caso E_1 è un evento che un esito A non è un esito.

Esempio 2 TETRAEDRI A è un evento

$A =$ " la somma di tetraedri è pari " $= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1), (3, 1), (4, 2)\}$

Esempio CORSE CAVALI

$A =$ " il 6 a posto tra i primi 3 "

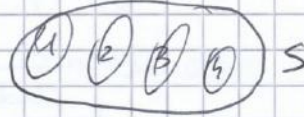
$B =$ " il 6 vince "

Relazione: $B \subset A \subset S$ B implica A $B \Rightarrow A$

PROBABILITÀ

Nell'insieme omogeneo di Kolmogorov la probabilità è una funzione d'insieme (definita sugli eventi \mathcal{F}) che gode di:

- ① $0 \leq P(E) \leq 1$ con $E \in \mathcal{F}$
- ② $P(S) = 1$
- ③ Se A_1, A_2, \dots sono 2 a 2 disgiunti, cioè $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall A_i \neq A_j$
allora $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$



Nota: - (*) A ben guardare, a volte, non tutti i sottoinsiemi di S possono avere probabilità.

- L'insieme ③ vale per una collezione finita A_1, A_2, \dots, A_n oppure numerabili $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$ Ma non tutti sono d'accordo su questa definizione omogenea.

Esempio DADO EQUO (ovvero non truccato)

$$P(s) = \frac{1}{6} \quad \forall s \in S \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E_1 = \text{"esce 1"} \quad P(E_1) = \frac{1}{6} = P(\{1\})$$

$$A = \text{"esce numero pari"} \quad P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$$

disgiunti fra loro
per il teorema ③

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Esempio DADO NON EQUO.

Non è facile assegnare probabilità se non riusciamo i dettagli. In un caso estremo, potrebbe essere $P(\{6\}) = 1$.

Esempio TETRAEDRI EQUI

$$P(\{i, j\}) = \frac{1}{6} \quad \forall i, j = 1, 2, 3, 4$$

Distribuzioni di probabilità uniformi \rightarrow riproducibili per simmetria su molti pochi d'evento equi (senza bias).

Esempio TETRAEDRI EQUI

$B^c =$ "almeno uno dei 2 mezzoni o uguale a 3"

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

CALCOLO COMBINATORIO ELEMENTARE

Principio elementare del conteggio: in una scelta a 2 passi, in cui il primo passo ha m opzioni e il 2° ha n opzioni, le scelte possibili sono $m \times n$.

Esempio: Quante coppie si possono formare da 50 uomini e 20 donne?

Le coppie possibili sono: 20×50

Esempio: Fila di 13 posti, classe di 70 persone.

Quanti modi di occuparli?

$$\frac{70!}{(70-13)!} = 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot \dots \cdot 58$$

DISPOSIZIONI SENZA
RIPETIZIONI

$$\frac{m!}{(m-k)!}$$

m oggetti, k alla volta

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

$$\underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{k \text{ volte}} = m^k$$

Esempio: Numero di 13 possibili intersezioni, di 70 studenti

PERMUTAZIONI

$$m(m-1)(m-2)\dots = m!$$

sono le disposizioni senza ripetizioni

di m elementi, k alla volta.

COMBINAZIONI

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!}$$

un sottoinsieme lungo k presi da un insieme di m elementi: alcune combinazioni

di m elementi, k alla volta.

Esempio BITA

$k=13$ studenti devono andare tra $n=70$ in fila.

Quante sfilate sono possibili?

$$\frac{70!}{13!} = \# \text{ sfilate} = \# \text{ combinazioni di } 70, 13 \text{ alla volta}$$

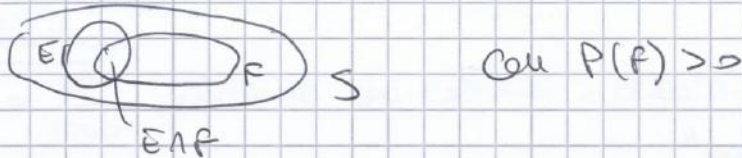
$$\frac{70!}{13!(70-13)!} = \binom{70}{13} \text{ coefficiente binomiale "70 su 13" = } \# \text{ di combinazioni di } 70 \text{ elementi, } 13 \text{ alla volta.}$$

$$P(C) = \frac{\#CF}{\#CP} = \frac{\binom{2}{1} 10^2 20^3}{30^5} = \frac{\binom{2}{2} 10^2 20^3}{30^5} = \frac{10^2 20^3}{30^5} = 32,9\%$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Per formulare il cambiamento di probabilità dovuto ad un aumento di informazione -

Si ipotizzi un evento F verificabile (aumento di informazione)



Si definisce

$$P(E|F) = \text{"evento E"} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Esempio TARGHE

A = "non ci sono ripercussioni"

C = "2 numeri e 3 lettere in posizione qualsiasi"

$$P(A) = \frac{\#CP}{\#CP} = \frac{30!}{(30-5)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{30^5}$$

$$P(C) = \frac{\binom{5}{2} 10^2 20^3}{30^5} = \frac{\#CF}{\#CP} \quad P(A \cap C) = \frac{\#CF}{\#CP} = \frac{\binom{5}{2} 10 \cdot 9 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{30^5}$$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{10^2 \cdot 9 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{30^5}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{30^5}} \cong 0,36$$

Esempio Casa col numero dei figli maschi -

Janes ha 2 figli -

Probabilità che entrambi sono figli maschi?

$$P(M) = P(F) = 0,5$$

e si suppone $P(MM) = P(MF) = P(FM) = P(FF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$

Neve domanda $P(MM | \text{almeno un maschio}) =$

$$= P(MM | \{MM, MF, FM\}) = \frac{\frac{1}{4}}{3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

	C cattolici	V VALDES	A ANGIOSCI	
SI	200	80	850	1130
NO	300	20	50	370
	500	100	900	1500

distribuzione marginale del voto -

$\frac{200}{500}$ frazione = proporzione sul totale
 $\frac{200}{1500}$ proporzione su colonna
 $\frac{200}{1130}$ proporzione su riga

distribuzione marginale della religione

Estreendo 200 (prob. uniformi!) un campione di quella città:

$$P(C) = \frac{500}{1500} \approx 33\%$$

$$P(C|S) = \frac{200}{1500} \text{ dividente tra cattolici e due si}$$

$$P(S|C) = \frac{\frac{200}{1500}}{\frac{500}{1500}} = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} \text{ dividente che due si se cattolici}$$

Allora la formula della partizione:

$$P(S) = \frac{1130}{1500} = P(C)P(S|C) + P(V)P(S|V) + P(A)P(S|A)$$

$$= \frac{500}{1500} \frac{200}{500} + \frac{100}{1500} \frac{80}{100} + \frac{900}{1500} \frac{850}{900}$$

Dato una partizione (F_1/F_2)

Si fini l'estrazione su un particolare J e relativo F_j .

FORMULA DI BAYES

Si può calcolare la probabilità inversa:

$$P(F_j|E) = \frac{P(F_j|E)P(E)}{P(E)} \text{ per def. prob. condizionata} = \frac{P(F_j)P(E|F_j)}{P(E)} = \frac{P(F_j)P(E|F_j)}{\sum_i P(F_i)P(E|F_i)}$$

E' alla base della statistica Bayesiana - E = evidenze empiriche

F_1, F_2 = teorie in competizione

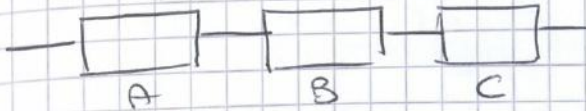
Esempio REURIONI

$$P(C|S) = \frac{P(C)P(S|C)}{P(C)P(S|C) + P(V)P(S|V) + P(A)P(S|A)} = \frac{\frac{500}{1500} \frac{200}{500}}{\frac{500}{1500} \frac{200}{500} + \frac{100}{1500} \frac{80}{100} + \frac{900}{1500} \frac{850}{900}} = \frac{200}{1130}$$

Esempio

SISTEMA IN SERIE

funzione se A, B, C funzionano

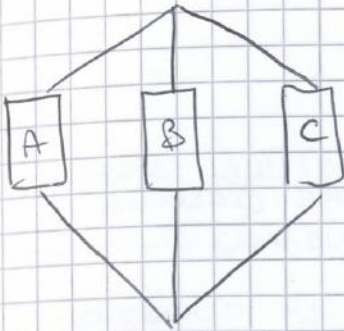


$S =$ "sistema funziona"

$A =$ "A funziona" $B =$ "B funziona" $C =$ "C funziona"

Se i componenti sono indipendenti allora $P(S) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

SISTEMA IN PARALLELO



Se A, B, C indipendenti.

S funziona se almeno A o B o C funziona.

cioè

$S^c = A^c \cap B^c \cap C^c$ non funziona se non funzionano A, B e C.

allora per l'indipendenza

$$P(S^c) = P(A^c \cap B^c \cap C^c)$$

$$1 - P(S) = [(1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C))]$$

VARIABILI ALEATORIE V.A.

Esempio

LANCIO DADO EQUO

1 lancio di dado

successo: " esce il 6 "

insuccesso = successo^c: " non esce il 6 "

↳ Esempio

Quindi perché probabilità uniforme

$$P(\text{"successo"}) = \frac{1}{6} = 1 - P(\text{"insuccesso"})$$

Si definisce $X =$ n° di successi (in questo caso può essere solo 0 o 1 o 0)

X è una variabile aleatoria suscettibile di assumere valori 0 e 1.

$$P(X=0) = 1 - \frac{1}{6}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{6}$$

Esempio

Si lancia 5 volte un dado equo 5 volte. 2 caso = non indipendenti

Definendo $X_5 =$ n° di successi

X_5 può assumere: 0, 1, 2, 3, 4, 5

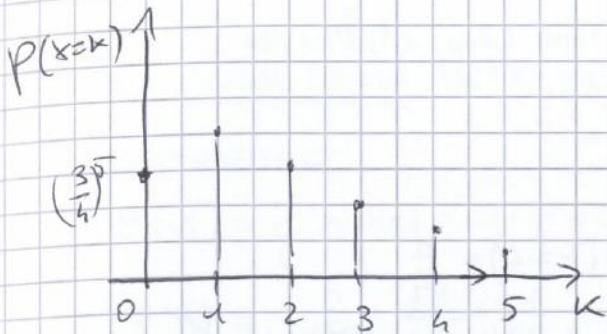
$$P(X=0) = (1 - \frac{1}{6})^5 = \binom{5}{0} (\frac{1}{6})^0 (1 - \frac{1}{6})^5$$

$$P(X=1) = P(S1111 \cup 1S111 \cup 11S11 \cup 111S1 \cup 1111S) = P(S1111) + \dots = \frac{1}{6} (1 - \frac{1}{6})^4 + \frac{5}{6} (\frac{1}{6})^4 + \dots =$$

MAXIMA AB PAPA! AB figlio mio zio BB BB $P(BB) = P(B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Se n prove $n=5$, si ottiene uno schema binomiale

$$P(X=k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-k} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



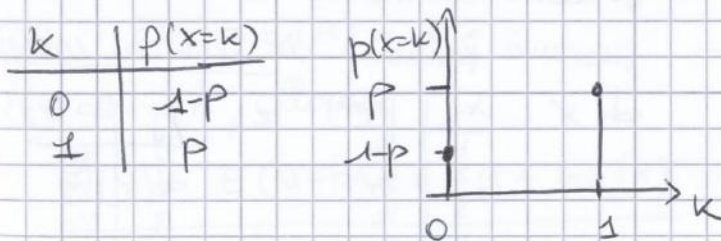
In generale, una variabile aleatoria è un aspetto numerico di interesse di un esperimento aleatorio.

Si indicano le v.a. con X (ovvero Y, \dots variabile latine)

Se i valori che X può assumere (a seconda del caso) sono un insieme finito o numerabile, allora X si dice v.a. discreta con f.m.p. $P(X=k)$.

Si è esemplificato \bullet X binomiale con parametri n e p .

\bullet Nel caso $n=1 \rightarrow X$ è binomiale (2 valori) si chiama v.a. binomiale.



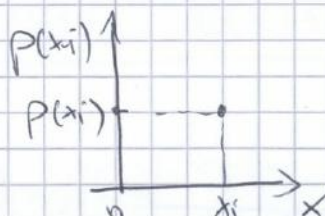
VARIABILI ALEATORIE V.A. DISCRETE

Una variabile aleatoria X discreta può assumere valori x_1, x_2, \dots (in un insieme finito o numerabile) con rispettive probabilità: $P(x_i) = P(X=x_i)$

La funzione $x_i \rightarrow P(x_i)$ è chiamata funzione di massa di probabilità f.m.p. e può anche essere descritta in forma tabolare

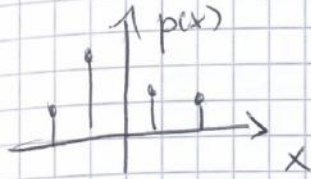
x_i	$P(x_i)$
x_1	$P(x_1)$
x_2	$P(x_2)$
\dots	\dots

\bullet in forma grafica



NB: X variabile aleatoria
 x_1, x_2, \dots solo numeri

Si torna ad esaminare v.a. X generica e la sua f.m.p. Un modo di disegnare la legge (o distribuzione) di probabilità di X



Si definisce valore atteso di X , $E(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$

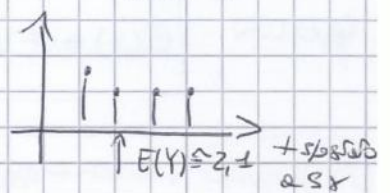
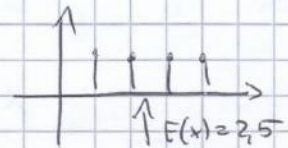
$E(X)$ è come il baricentro delle distribuzioni

Esempio

TETRAEDRO

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2,5$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \approx 2,2$$



Esempio Bernoulli

x	$p(x)$
0	$1-p$
1	p

$$E(x) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$$

Perché x è un valore di evento di un certo evento (successo) $p = E(x)$ è una specie di suo grado di possibilità.

Il valore atteso gode delle seguenti proprietà:

- Se x è una costante a , cioè una v.a. degenera $p(x=a) = 1$, allora $E(x) = E(a) = a$.
- Se $Y = a + bX$, allora

$$E(Y) = E(a + bX) = a + bE(x) \quad \text{lineare}$$

In generale, se $Y = g(x)$ è una funzione,

$$E(Y) = E(g(x)) = \sum g(x) p(x)$$

e se $g(x)$ è lineare allora $g(x) = a + bx$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} E(g(x)) &= E(a + bx) = \sum g(x) p(x) = \\ &= \sum (a + bx) p(x) = \sum a p(x) + \sum b x p(x) = a \sum p(x) + b \sum x p(x) \\ &= a + b E(x) \end{aligned}$$

Ulteriore proprietà: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Esempio TETRAEDRO

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2,5 + 2,2 = 4,7$$

Si è sempre visto che il valore atteso è:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{j+1}}{j!} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

Si scopre dunque che, se X è poissoniana, il suo valore atteso $E(X) = \lambda$

Altri esempi: n° medio di veicoli oltre

- n° di termini di attesa
- n° medio di difetti sulla confezione $\lambda = 0,2$ (pochi difetti)

Esercizio Il # di difetti su una confezione nuova è una v.a. di Poisson con "media" (cioè valore atteso) $\lambda = 0,2$

Calcolare (1) la probabilità di aver una confezione senza difetti

(2) // // // // con più di 2 difetti.

In questo caso "popolazione" (di una grande quantità di prodotto) = "infinita".

(1) $P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}}{0!} \lambda^0 = e^{-\lambda} = e^{-0,2} = 0,818 = 81,8\%$

(2) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 1 - e^{-0,2} - 0,2e^{-0,2} - \frac{0,2^2}{2} e^{-0,2} \approx 0,003 = 0,3\%$

ALGEBRA DEI VALORI ATTESI

Def: Il valore atteso della f.z. di v.a. $f(x)$ è:

$$E(g(X)) = \sum g(x) p(x)$$

Per esempio, se $f(x) = x$ è l'identità $\rightarrow E(X) = \sum x p(x)$

Si considera, per esempio, la funzione SCARTO $g(x) = X - E(X) = X - \mu_X$

che $E(X) = \mu_X$. Allora il valore atteso dello scarto sarà:

$$E(X - E(X)) = E(X - \mu_X) = E(X) - E(\mu_X) = \mu_X - \mu_X = 0$$

la media degli scarti è zero.

Si è sfruttato la linearità di E .

Per qualunque funzione lineare $g(x) = a + bx$

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

È naturale definire il valore atteso di una f.z. di vettore aleatorio $f(X, Y)$ come

$$E(g(X, Y)) = \sum_x \sum_y g(x, y) p(x, y)$$

I.M.D. Campione

$$\begin{aligned} \text{Var}(X+Y) &= E((X+Y) - (\mu_X + \mu_Y))^2 = E((X - \mu_X) + (Y - \mu_Y))^2 = \\ &= E((X - \mu_X)^2 + (Y - \mu_Y)^2 + 2E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))) = \\ &= E(X - \mu_X)^2 + E(Y - \mu_Y)^2 + 2E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

PROPRIETÀ: $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$

dove n: definisce COVARIANZA di X e Y

$\text{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))$ valore atteso del prodotto degli scarti

NB: Se X e Y sono indipendenti $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

PROPRIETÀ: $\text{Var}(X-Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X-Y) &= \text{Var}(X + (-Y)) = \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(-Y) + 2 \text{Cov}(X, -Y) = \\ &= \text{Var}(X) + (-1)^2 \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

Esercizi di Statistica

ES 8) n = 15 pulei

k = 3 insieme di numeri

1- Insieme degli esiti $S = \{ (i, j, k) : i, j, k \in \{1, \dots, 15\} \}$ tutte le tuple da 1 a 15

2 - a) $\#S = \frac{15!}{(15-3)!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ modi disponibili di 15 elementi 3 alla volta.

$P(\{1, 2, 3\}) = P(\{4, 15, 12\}) = P(S) = \frac{1}{\#S} = \frac{1}{2730}$
è la p di un certo numero di fatto

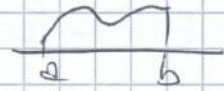
b) non è un esito \rightarrow favoriscono possibili di tale risultato
 $P(\{7, 14, 15 \text{ in qualsiasi ordine}\}) = 3! \cdot \frac{1}{2730} = \frac{6}{2730}$
è un'Unione di esiti

c) $P(\{5 \text{ si muove}\}) = P(\{5 \times \times \cup \times 5 \times \cup \times \times 5\}) = 3 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2730}$
 $\# \text{CF} = 3 \cdot (14 \cdot 13) = \frac{14!}{(14-2)!} \cdot 3$

d) $P(\{5 \text{ viene}\} | \{5 \text{ si muove}\}) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{14 \cdot 13}{2730}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3}$
perché $A \subset B$

VARIABILI ALGEBRAICHE V.A. CONTINUE

Una v.a. X si dice continua se esiste una funzione di densità $f(x) \geq 0$
 e tale che per ogni $A \subset \mathbb{R}$ $P(X \in A) = \int_A f(x) dx$



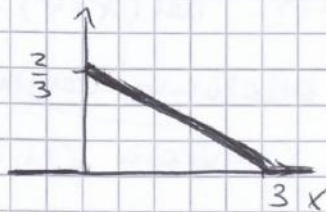
Per esempio, se A è un intervallo $A = (a, b)$

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{Completezza} = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

Esempio $X =$ tempo di attesa di una cura postume

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^3 (\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x) dx + \int_3^{+\infty} 0 dx$$

$$= \int_0^3 (\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x) dx = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{2} = 1$$

Qual è la probabilità che la postume eliminerà tutti + di virus?

$$\text{ovvero } P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f(x) dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Probabilità che restano tutti i e zone

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 (\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x) dx = \frac{1}{3}$$

Nota: $P(1 \leq X < 2) = P(X=1) + P(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x) dx$

" \Rightarrow in un continuo la probabilità che sia esattamente un numero è sempre 0!

NB: La densità di probabilità in un certo punto può essere > 1 !! Non ha nulla a che vedere con la probabilità, il suo integrale è la probabilità.

Se X è una v.a. con densità $f(x)$ e $g(x)$ una sua funzione, il valore atteso di $g(x)$ è

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Esempio: $f(x) = x$

$$E(x) = \int x f(x) dx \quad \text{valore atteso di } x$$

$$g(x) = (x - E(x))^2 \quad \text{scarto al quadrato}$$

$$E(g(x)) = \int (x - E(x))^2 f(x) dx = \text{varianza di } x = \text{var}(x)$$

$$= \int (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

$$g(x) = x^2$$

$$E(x^2) = \int x^2 f(x) dx = \text{Momento secondo di } x$$

Valgono proprietà analoghe a quelle di $E(x)$, $\text{var}(x)$, per x discreto:

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = E(x^2) - \mu_x^2$$

$$E(a+bx) = a + bE(x)$$

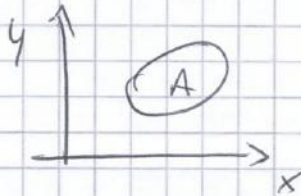
$$\text{Var}(a+bx) = b^2 \text{Var}(x)$$

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

$$\text{Var}(x+y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y) + 2\text{cov}(x,y)$$

e se x, y indipendenti $\text{Var}(x+y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y)$

Se (x, y) è un vettore aleatorio continuo (regolare), allora esiste una densità binomiale congiunta $f(x, y)$ tale che per ogni $A \subset \mathbb{R}^2$



$$P(x, y) \in A = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Se x e y indipendenti $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$

dove $f_x(x)$ è la densità della singola x

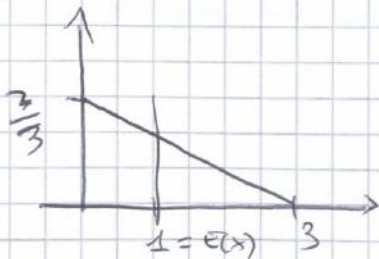
$f_y(y)$ " " " " " y

Esempio x = tempo di risposta dell'esercizio precedente

y = altezza dello studente

è ragionevole pensare x e y indipendenti.

Esempio Calcolare il valore atteso di x nell'esempio response



$$E(x) = \int_0^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right) x dx = \frac{9}{3} - \frac{2 \cdot 27}{9 \cdot 3} = 1$$

Per la varianza:

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \int_0^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right) x^2 dx - (1)^2$$

VARIABILI ALGEBRICHE V.A.

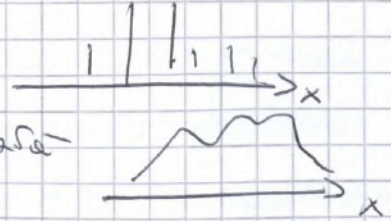
V.A.

discrete

$p(x) = f.m.p$

continue

$f(x) =$ funzione di densità

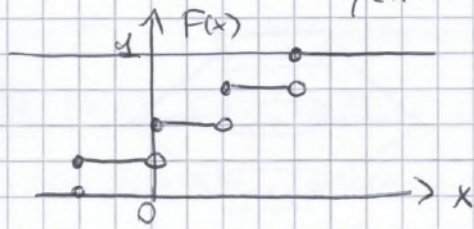


Si definisce FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$F(x) = P(X \leq x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

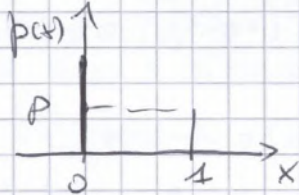
DISCRETE

$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} p(y)$



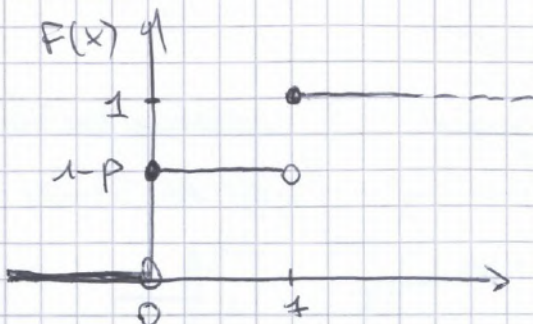
esempio la più semplice è la Bernoulliana

$p(x) = \begin{cases} p & \text{se } x=1 \\ 1-p & \text{se } x=0 \end{cases}$



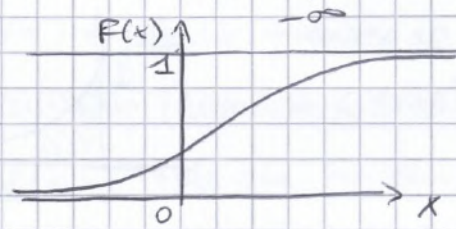
la sua funzione di ripartizione è

$F(x) = P(X \leq 1) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & x = 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$



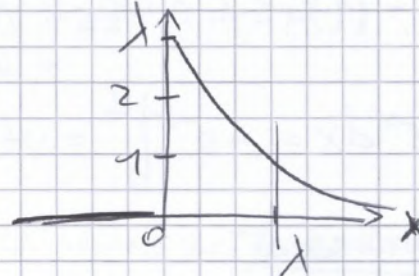
CONTINUE

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$



Def: la v.a. X si dice esponenziale con parametro λ se ha densità:

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

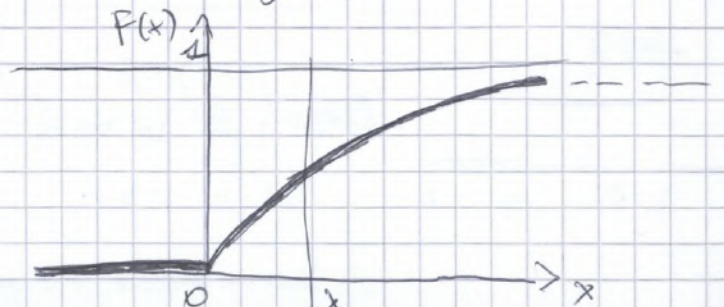


La sua funzione di ripartizione è:

$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

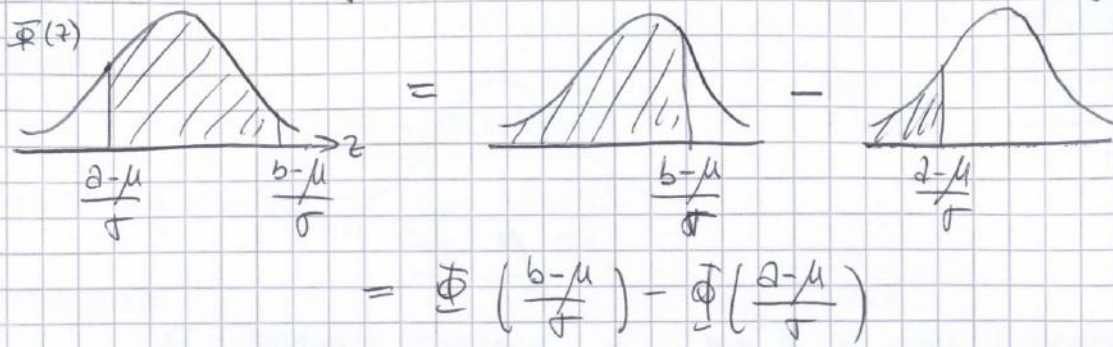
Se $x > 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$



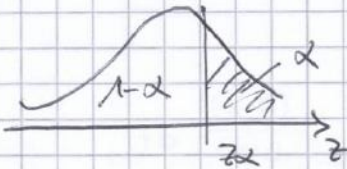
In generale σ standardizzazione

$$P(a < X < b) \stackrel{\sigma}{=} P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$



Densità standard $f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \pm\sigma$

numero z_α tale che $P(Z > z_\alpha) = \alpha$



Si nota che è possibile scrivere z_α usando l'inversa di Φ $z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

MODELLO STATISTICO PROBABILISTICO

CAMPIONI CASUALI (si vuole ripetere n volte una l'insieme di una variabile)

Un insieme di v.d. X_1, \dots, X_n si dice CAMPIONI CASUALI se

- 1) le X_i hanno la stessa distribuzione
- 2) le X_i sono indipendenti

Se si indica con f la comune densità (ovvero con p la comune f.m.p., ovvero con F la comune funzione di ripartizione) allora si dice anche che

X_1, \dots, X_n sono i.i.d. (indipendentemente distribuiti)
secondo $f(p, F, \dots)$

Se X è la generica v.d. con densità f , si dice anche che X_1, \dots, X_n sono i.i.d. X .
(l'idea fondamentale è che si hanno n copie indipendenti della stessa struttura probabilistica).

Esempio Il tempo di vita utile di un fessibile fessibile sia X e $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ("X ha distribuzione esponenziale con parametro λ ")

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. $\text{Exp}(\lambda)$, allora si dice che sono un campione casuale secondo quella densità esponenziale.

$$P(\bar{X} < 170) = P\left(\frac{\bar{X} - 175}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{170 - 175}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P(Z < -1,337) = 1 - P(Z < 1,337) \approx 0,091 = 9,1\%$$

Generalizzato: Una struttura comune è il campione casuale x_1, \dots, x_n i.i.d. f. Una statistica è una funzione dei dati x_1, \dots, x_n .

Se sono usati negli esempi: 1) $V_s =$ conteggio superiore = $\# \{i: x_i > c\}$ per soglia fissa c
 1 bis) $C_s =$ conteggio inferiore = $\# \{i: x_i \leq c\}$

Allora $C_s \sim$ Binomiale $(n, F(c) = P(X \leq c))$

2) \bar{X} = Media Campionaria

In generale $E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = E(X) = \mu$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{\text{Var}(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

per poter usare legge comune delle x_i .

Se, in aggiunta, la legge delle singole x_i è normale

o.e. $x_i \sim N(\mu, \sigma^2) \forall i$ allora $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Def: X_1, \dots, X_n i.i.d. con (f, p_i, \dots)

proprio 1) sono indipendenti

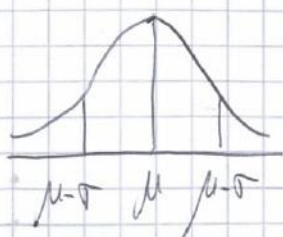
2) ciascuna x_i ha la stessa legge $f(x)$

Se x ha densità f , allora la densità congiunta di x_1, \dots, x_n è

$$f_c(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \dots f(x_n) = \prod_i f(x_i)$$

Esempio: CAMPIONE NORMALE

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } N(\mu, \sigma^2)$$

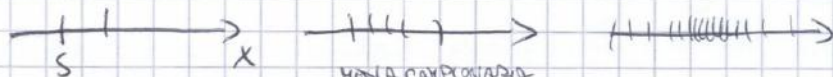


Esperimento
casuale
→

$n=1$

$n=5$

n molto grande



Più aumenta n e più $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$ tende al valore teorico μ

(infatti) $E(\bar{X}) = \mu$, $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow$ tende a 0 per $n \rightarrow \infty$

Def: VARIANZA CAMPIONARIA

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2$$

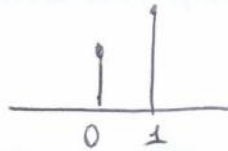
TEOREMA LIMITE CENTRALE DELLA STATISTICA

Per qualsiasi distribuzione che abbia valore atteso μ e varianza σ^2 , la distribuzione delle medie campionarie \bar{x} è, per n grande, approssimabile da una normale: $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Analogamente, la somma campionaria $S = n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$ è, per n grande, approssimabile da una normale: $\sum_{i=1}^n x_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

Esempio DE MOIVRE e LAPLACE

x_1, \dots, x_n i.i.d. Bernoulli(p)



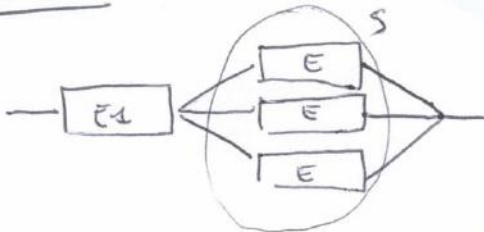
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\# \text{ successi}}{n} = \text{proporzione di successi}$$

$\mu = p, \sigma^2 = p(1-p)$ per il Te. Limite Centrale, approssimativamente, per n suff. grande, $\bar{x} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$ *proporzione di successi*

Medie $\sum_{i=1}^n x_i \overset{\text{appross.}}{\sim} N(np, np(1-p))$ *numero di successi*
binomiale (n, p)

ESERCIZI

①



$E_1 \sim \text{Esp}(\lambda)$
 $E \sim \text{Esp}(\mu)$
 Indipendenti

Calcolare probabilità intero sistema S di non più di tempo x

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$P\{x_i < x\}$

$T =$ tempo di vita sistema $S =$ tempo di vita *più piccolo* \downarrow *id.*

$$P(T > x) = P(E_1 > x \cap S > x) \stackrel{\text{ind.}}{=} P(E_1 > x) P(S > x) = [1 - P(E_1 \leq x)] [1 - P(S \leq x)] =$$

$$= [1 - (1 - e^{-\lambda x})] [1 - P(E_2 \leq x) P(E_3 \leq x) P(E_4 \leq x)] = e^{-\lambda x} [1 - (1 - e^{-\mu x})^3]$$

tutti E si verificano prima di t=x

② \rightarrow su $n=10 \rightarrow$ espressione per la probabilità di avere combinate non è lecito usare Binomiale (lo è usare lo stesso per il due se problema)

$n=10$ prova binomiale (quasi indipendenti) $p=0,15$

$X =$ n° successi su 10 (lotto ottenuto) $X \sim$ Binomiale ($n=10, p=0,15$)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$

$$= 1 - \binom{10}{0} 0,15^0 (1-0,15)^{10} - \binom{10}{1} 0,15^1 (1-0,15)^9 = 0,4557 \approx 46\%$$

$\rightarrow n=1000$ $Y =$ n° successi su 1000 $Y \sim$ Binomiale ($N=1000, p=0,15$)

$$P(Y \geq 160) = 1 - P(Y < 160) = 1 - \sum_{k=0}^{159} \binom{1000}{k} 0,15^k (1-0,15)^{1000-k}$$

Prof. Mauro Gasparini - Politecnico di Torino
METODI NUMERICI E STATISTICI
Esercizi di fine Statistica - 16 Dicembre 2013

Abbiamo coperto il capitolo 1, il capitolo 2 (esclusi 2.4, 2.5 e 2.6), il capitolo 3, il capitolo 4 (esclusi 4.3.5, 4.8 e 4.9) il capitolo 5 (escluso 5.3 e da 5.6.1 in poi) e il capitolo 6 (escluso da 6.5.2 in poi) di *Probabilità e Statistica per l'ingegneria e le scienze*, di Sheldon Ross, Apogeo, seconda edizione 2008.

1. Un componente con tempo di vita esponenziale E_1 di parametro λ è collegato in serie a un sistema di tre componenti in parallelo, ciascuno con tempo di vita esponenziale E di parametro 2λ . Supponiamo che tutti i componenti siano mutuamente indipendenti. Calcolare la probabilità che l'intero sistema duri più di un tempo x .
2. In una popolazione molto grande la frequenza delle persone con il lobo attaccato sia $0.15=15\%$.
 - (a) Si campionino 10 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 2 di esse abbiano il lobo attaccato (nota: usare l'approssimazione binomiale perché la popolazione è molto più grande di 10).
 - (b) Si campionino 1000 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 160 di esse abbiano il lobo attaccato.
 - (c) Si campionino 1000 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 200 di esse abbiano il lobo attaccato.
3. (esempio 6.3.5 dal Ross) Un astronomo vuole stimare la distanza d di una stella lontana con la media campionaria \bar{X} di n misurazioni indipendenti, ciascuna affetta da un errore di misura con deviazione standard 2 (anni-luce). Quante misurazioni deve effettuare per avere il 95% di probabilità che la sua stima sia accurata entro ± 0.5 anni luce?
4. (esempio 6.3.2 dal Ross) Gli ingegneri responsabili valutano che il peso W (in tonnellate) che una singola campata di un ponte può sostenere senza subire danni strutturali sia approssimativamente una variabile aleatoria normale con valore atteso $\mu_W = 200$ e deviazione standard $\sigma_W = 20$. Supponiamo che il peso degli autoveicoli che passano sul ponte sia una variabile aleatoria con valore atteso $\mu_X = 1.5$ e deviazione standard $\sigma_X = 0.15$. Quante automobili dovrebbero trovarsi contemporaneamente sulla campata, affinché la probabilità di danno strutturale superi il 10%?

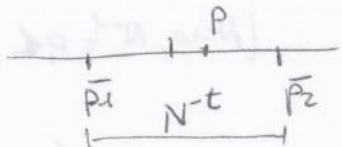
ERRORE degli ERRORI

\bar{a} è un'ottimizzazione di a !

ERRORE ASSOLUTO $e_a = |a - \bar{a}|$ ERRORE RELATIVO $e_r = \frac{|a - \bar{a}|}{|a|}$

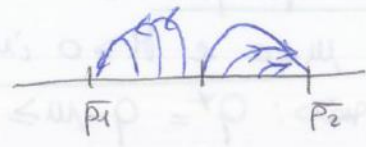
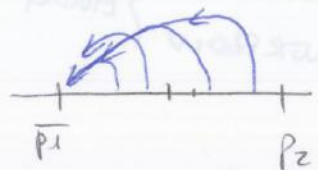
Se $a = (-1)^s p N^q$, $N^{-1} \leq p < 1$ e $\bar{a} = (-1)^s \bar{p} N^q$ \bar{p} ottenuto per arrotondamento o troncamento

NB: \bar{p} ha al più t cifre; distanza tra 2 numeri di macchina è pari a N^{-t}



TRONCAMENTO

ARROTONDAMENTO



$\bar{p} = \bar{p}_1 \Rightarrow |p - \bar{p}| < N^{-t}$
 se $p \in (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ con $\bar{p}_2 = \bar{p}_1 + N^{-t}$

Se $p \in (\bar{p}_1, \bar{p}_1 + \frac{1}{2} N^{-t}) \Rightarrow \bar{p} = \bar{p}_1$
 Se $p \in [\bar{p}_1 + \frac{1}{2} N^{-t}, \bar{p}_2) \Rightarrow \bar{p} = \bar{p}_2$
 $\Rightarrow |p - \bar{p}| \leq \frac{1}{2} N^{-t}$

ERRORE ASSOLUTO

$|a - \bar{a}| \begin{cases} \leq N^{q-t} & \text{nel TRONCAMENTO} \\ \leq \frac{1}{2} N^{q-t} & \text{nel ARROTONDAMENTO} \end{cases}$

ERRORE RELATIVO NB: $|p| \geq N^{-1} \Rightarrow |a| \geq N^{q-1}$

$e_a = \frac{|a - \bar{a}|}{|a|} \leq \frac{|a - \bar{a}|}{N^{q-1}} \begin{cases} < \frac{N^{q-t}}{N^{q-1}} = N^{1-t} & \text{TRONCAMENTO} \\ \leq \frac{\frac{1}{2} N^{q-t}}{N^{q-1}} = \frac{1}{2} N^{1-t} & \text{ARROTONDAMENTO} \end{cases}$

PRECISIONE DI MACCHINA

$\epsilon_{ps} \begin{cases} N^{1-t} & \text{TRONCAMENTO} \\ \frac{1}{2} N^{1-t} & \text{ARROTONDAMENTO} \end{cases}$

OPERAZIONI DI MACCHINA

Il risultato di un'operazione aritmetica tra 2 numeri di macchina generalmente non è un numero di macchina \rightarrow non è possibile in un'elaborazione eseguire esattamente le operazioni aritmetiche \rightarrow introduzione OPERAZIONI DI MACCHINA

OPERAZIONE di MACCHINA

\bar{a}_1, \bar{a}_2 2 numeri di macchina $\rightarrow \bar{a}_3$ n° di macchina

- ① si esegue operazione aritmetica esatta tra \bar{a}_1 e \bar{a}_2
 - ② si applica arrotondamento o troncamento ad $a_3 \rightarrow$ si ottiene \bar{a}_3
- risultato esatto

Esempio

$y = x_1 + x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\bar{x}_1 = x_1(1 + \epsilon_1)$

$\bar{x}_2 = x_2(1 + \epsilon_2)$

$$\frac{|x_1 + x_2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)|}{|x_1 + x_2|} = \frac{|x_1 + x_2 - x_1(1 + \epsilon_1) - x_2(1 + \epsilon_2)|}{|x_1 + x_2|} = + \frac{|x_1|}{|x_1 + x_2|} |\epsilon_1| + \frac{|x_2|}{|x_1 + x_2|} |\epsilon_2|$$

Ma condizionato se $x_1 + x_2 = 0 \rightarrow K \rightarrow \infty$

STABILITÀ DI UN ALGORITMO

soluzione precisione infinita di calcolo
soluzione al problema precisione finita

$$\frac{\|f(\bar{x}) - y^*\|}{\|f(x)\|} \approx \epsilon_{ps}, \quad f(x) \neq 0$$

se errore relativo più det. di output ha lo stesso ordine precisione di macchina \Rightarrow algoritmo numericamente stabile

Esercizio

Dimostrare che non vale la proprietà osservativa

$N=10 \quad t=4$

~~non è~~

$(\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c} \neq \bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c})$

$\bar{a} = 0,1111 \cdot 10^1 \quad \bar{c} = 0,5555 \cdot 10^2$
 $\bar{b} = 0,6666 \cdot 10^1$

$\oplus \begin{array}{r} 0,1111 \cdot 10^1 \\ 0,6666 \cdot 10^1 \\ \hline 0,7777 \end{array}$	$\oplus \begin{array}{r} 0,7777 \cdot 10^1 \\ 0,5555 \cdot 10^1 \\ \hline 0,53325 \end{array}$	$\oplus \begin{array}{r} 0,7777 \cdot 10^2 \\ 0,5555 \cdot 10^1 \\ \hline 0,63327 \cdot 10^2 \end{array}$	$\oplus \begin{array}{r} 0,6666 \cdot 10^2 \\ 0,5555 \cdot 10^2 \\ \hline 0,62216 \cdot 10^2 \end{array}$	$\oplus \begin{array}{r} 0,1111 \cdot 10^2 \\ 0,62216 \cdot 10^2 \\ \hline 0,63327 \cdot 10^2 \end{array}$
---	--	---	---	--

in fatto così impresso cose i numeri sono buoni per l'esempio / de si valore di precisione

[Faded handwritten notes and calculations, including the definition of relative error and stability analysis.]

Riduzione numero di sistemi lineari: Condizionamento

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \dots a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Problema trovare $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax=b$. Il problema accettato ed è soluzione -

CONDIZIONAMENTO: $\bar{A} = A + \delta A$ e $\bar{b} = b + \delta b$ dei disturbi $\bar{x} = x + \delta x$ soluzione in un'incertezza esatta del sistema perturbato $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$

Si confrontano pesanti relazioni delle soluzioni con quella dei dati:

Si ottiene: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 2 K(A) \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$ $K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ note di Condizionamento

$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$ ben condizionato se $K(A) \approx 1$

$K(A) \gg 1 \rightarrow$ mal condizionato

Esempio sistemi MAE Condizionati

MATRICE DI HILBERT

MATRICE DI VANDERMONDE

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \quad K(H_n) = 10^{n+1}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

RISOLUZIONE NUMERICA $Ax=b$

\hookrightarrow METODO DI CRAMER \rightarrow CALCOLO IDEALE! \rightarrow richiede $(n+1)!$ operazioni di moltiplicazione
 troppo oneroso dunque in termini di tempo!

METODI NUMERICI

- DIRETTI
- ITERATIVI

METODI DIRETTI

INDIRETTO
 SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO (BACKWARD SUBSTITUTION)

Utile per sistemi triangolare superiori:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - \sum_{j=n}^m a_{n-1,j}x_j}{a_{n-1,n-1}} \\ \vdots \\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^m a_{i,j}x_j}{a_{i,i}} \end{matrix}$$

Costo computazionale

$O\left(\frac{n^2}{2}\right)$

SOSTITUZIONE IN AVANTI (FORWARD SUBSTITUTION)

Utile per sistemi triangolare inferiori

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}} \end{matrix}$$

Costo computazionale

$O\left(\frac{n^2}{2}\right)$

Punto ② $\mu_{32} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ $\mu_{42} = -\frac{2}{2} = -1$

$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{8}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $b^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$

Punto ③ $\mu_{43} = -\frac{1}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$ $A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{8}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{10} \end{pmatrix}$ $b^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{23}{10} \end{pmatrix}$

Se offriamo back ward substitution:

$x_4 = \frac{23}{10} = 1$

$x_3 = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^m a_{ij}x_j}{a_{ii}} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{8}{4} \cdot 1}{-\frac{5}{2}} = 1$

$x_2 = \frac{1 - (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)}{2} = 1$

$x_1 = \frac{0 - (-1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)}{2} = +1$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

PIVOTING PARZIALE

Condizione necessaria per metodo di Gauss diretto è che $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

Questa condizione è soddisfatta se A è:

- diagonale per righe
- diagonale per colonne
- tutti elem. positive.
- $\det A \neq 0$

Se subito il pivoting è superfluo!

Se $|a_{kk}^{(k)}| = 0$ offre "problemi"

Altre scelte individuare il massimo valore $|a_{ik}^{(k)}|$ e sostituire la k riga con la i-esima riga \rightarrow a essere $|a_{ik}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq m} |a_{ik}^{(k)}| \Rightarrow$ PIVOTING PARZIALE

FAATTORIZZAZIONE DI MATRICI

GAUSS + PIVOT PARZIALE: $GAx = Gb \Leftrightarrow Ux = \bar{b}$

$G = M_{n-1} P_{n-1} \dots M_1 P_1$ e $GA = U$ Permutazione di Gauss

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix}$ Fattorizzazione $PA = LU$ con $L = M^{-1}$ form + pivot parziale cost $O(\frac{n^3}{3})$
 P matrice di permutazione (scambia le righe)

APPLICAZIONI PA=LU

- Risolvere $Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$ $\begin{cases} Ly = Pb \Rightarrow y \ O(\frac{n^2}{2}) \\ y = Ux \Rightarrow x \ O(\frac{n^2}{2}) \end{cases}$ $O(n^2)$

- Calcolo $\det(A)$ cost $O(n)$
- Calcolo A^{-1} cost $O(n^3) \Rightarrow A^{-1} = U^{-1} L^{-1} P$
- Risoluzione p. sist. lineari steno A \rightarrow cost $O(\frac{n^3}{3} + pn^2)$
- risolvere $APx = b$ cost $O(\frac{n^3}{3} + pn^2)$ (almeno $O(p-1)n^3$ altro!)