NUMERO: 1022

DATA: 15/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Allavena

MATERIA: Meccanica Razionale

Prof. Delitala

3/03/2014

MECCANICA RAZIONALE:

Anello di congiunzione tra corsi analitici e corsi applicativi. Scopo del corso è quello di avere metodi e strumenti matematici per andare a studiare sistemi meccanici. L'idea è quella di rendere intellegibile la realtà fisica attraverso un modello matematico definito a partire da leggi della meccanica classica. Definito il modello si effettua un'analisi qualitativa per studiare le proprietà delle soluzioni ed eventualmente un'analisi computazionale, cioè delle simulazioni numeriche.

Alla base della modellistica vi è un processo di riduzione della complessità ovvero di semplificazione.

- Considero un CORPO DEFORMABILE in cui considero il sistema di PUNTI.
- Considero un CORPO RIGIDO in cui la distanza tra coppie di punti rimane costante.
- Si dovrà tenere in conto della distribuzione di massa all'interno del corpo (MATRICE DI INERZIA).
- Considero il PUNTO MATERIALE.

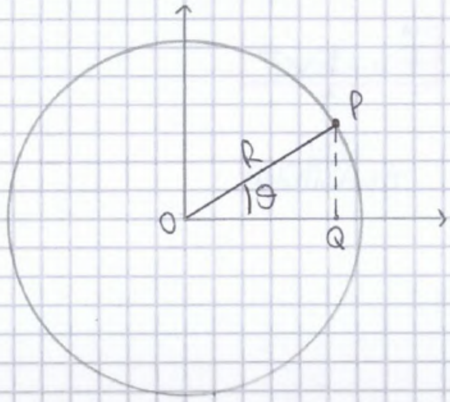
Queste sono varie semplificazioni a seconda delle quali ho varie tipologie di meccanica:

- analitica (formalismo matematico più spinto)
- dei continui (ad es. un fluido)
- statistica (tanti agenti)
- relativistica (velocità elevate)
- quantistica (molto piccolo).

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 154

① MOTO ARMONICO: moto della proiezione sull'asse x di un punto P che si muove in modo uniforme su una circonferenza.

a) Moto circolare uniforme:



$$\overline{OP} = \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = -R\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} = R\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

quando $|\vec{v}| = cost$ allora il moto è uniforme, quindi:

$$|\vec{v}| = \sqrt{R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + R^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2} = R|\dot{\theta}|$$

$$|\dot{\theta}| = cost \rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}t$$

Definiamo PERIODO (T) il tempo impiegato a descrivere un arco di 2π (θ ha compiuto un giro completo): $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$

da cui ricaviamo la FREQUENZA (f): $f = \frac{\dot{\theta}}{2\pi}$

$$\vec{a} = \begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \\ \ddot{y} = -R\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \end{cases} \qquad (\vec{a} \parallel \overline{PO})$$

La LEGGE DEL MOTO ARMONICO è data da: $\ddot{x} = -\dot{\theta}^2 x$

$$\ddot{x} + \dot{\theta}^2 x = 0$$

pongo $\dot{\theta} = \omega$: PULSAZIONE

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

Integriamo: $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i\omega$

$$\boxed{x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

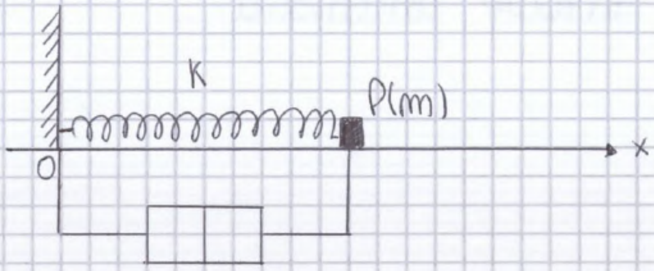
AMPIEZZA ($A \equiv R$)

FASE INIZIALE ($\varphi \equiv \theta_0$)

• $b^2 = 4ac \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \rightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$
avendo $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ è uno smorzamento critico in quanto avendo t è molto rapido.

• $b^2 < 4ac \rightarrow x(t) = e^{(-b/2a)}(C_1 \cos\sqrt{4ac-b^2}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{4ac-b^2}\,t)$
qui abbiamo una vera e propria oscillazione.

a) Massa-molla e smorzatore:



b = FATTORE DI SMORZAMENTO

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_{ee} = -Kx\vec{i} \\ A_{att} = -b\dot{x}\vec{i}\end{array}\right\} \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = 0$$

se b è molto grande lo smorzamento va subito in 0 senza oscillare mentre se b=0 sempre senza oscillare va in 0 ma molto più velocemente.
Si ha l'oscillazione smorzata solo quando $b<0$ in quanto riduce l'ampiezza dell'oscillazione nel tempo oscillando sino a 0.

③ MOTI CON FORZANTE:

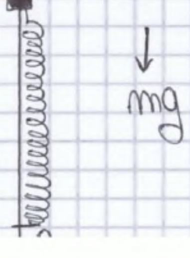
$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \quad \rightarrow a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = A\cos(\Omega t)$

poniamo $f(t) = K$ (costante)

$x_p(t) = C$ (da determinare)

$\dot{x}_p = \ddot{x}_p = 0 \rightarrow cC = K \Rightarrow C = \frac{K}{c}$

a)

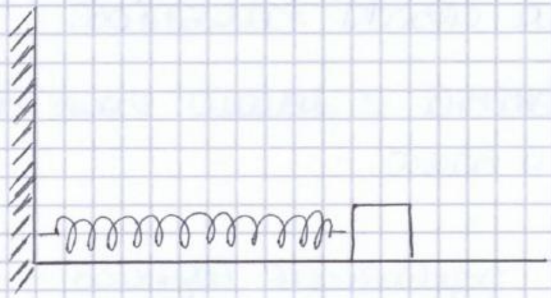


6/03/2014

MODELLISTICA E FISICA MATEMATICA:

Cos'è un modello?

Esempio: sistema massa-molla:



Faccio delle assunzioni e semplificazioni.
Identifichiamo la massa come puntiforme e supponiamo che il sistema si comporti come un punto massa identificato dalla variabile x.
L'azione della molla si esplica in una forza del tipo $-Kx$ (legge di Hook) dove K è la costante di elasticità.
Trascuriamo attrito e viscosità dell'aria; usiamo la legge di Newton:

$$F = ma$$

$$\hookrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx}$$

MODELLO DESCRITTO DA EQ. DI EVOLUZIONE CHE È EQ. DIFF. ORDINARIA.

Esempio: vogliamo provare a costruire un modello di dinamica di una popolazione isolata:
assumiamo di tenere in conto due fattori:
- tasso di natalità N
- tasso di mortalità M

Vogliamo il numero di individui nel tempo costruito da una eq. di evoluzione.
$P = P(t)$ indica il numero di individui.

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = NP - MP = P(N-M) = \alpha P}$$

LEGGE DI MALTUS

tasso di crescita al netto delle morte

- A priori nella costruzione di un modello vi è la scelta della scala di rappresentazione, cioè del livello di dettaglio che voglio ottenere (scala microscopica, mesoscopica, macroscopica).

microscopica: oggetti considerati individualmente
mesoscopica: sistemi con molti individui
macroscopica: faccio delle medie e considero la densità.

Il modello deve essere dimensionalmente coerente.

CLASSIFICAZIONE DEI MODELLI:

Se U è la variabile di stato cui voglio descrivere l'evoluzione e (x,t) sono eventuali variabili indipendenti:

- modello DINAMICO → U dipende da t (tempo)
- modello STATICO → U non dipende da t
- modello CONTINUO → U dipende da x
- modello FINITO → U non dipende da x

VAR. DI STATO	TIPOLOGIA	EQ. EVOLUZIONE
$U=U_0$	finito - statico	algebrica
$U=U(t)$	finito - dinamico	derivate ordinarie
$U=U(x)$	continuo - statico	derivate parziali
$U=U(t,x)$	continuo - dinamico	derivate parziali.

Le eq. differenziali sono il linguaggio della natura.

MODELLI ALLE DERIVATE ORDINARIE:

$$\frac{dU}{dt} = f(t, U)$$

f: campo vettoriale
t: variabile indipendente
U: variabile di stato.

Se $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ allora scrivo l'eq. esplicitando ogni componente, come:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 154

In funzione della tipologia del campo vettoriale si può fare la seguente classificazione:

- **Modello lineare**: $\bar{f}(t,\bar{U}) = \underset{=}{A}(t,\bar{U}) + \bar{b}(t)$

$\underset{=}{A}$: matrice $N \times N$ — $\bar{b}$: vettore a N componenti

$$\begin{cases} \dfrac{dU_1}{dt} = a_{11}(t)u_1 + \dots + a_{1N}(t)u_N + b_1(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dU_N}{dt} = a_{N1}(t)u_1 + \dots + a_{NN}(t)u_N + b_N(t) \end{cases}$$

- **Modello lineare omogeneo**: $\bar{f}(t,\bar{U}) = \underset{=}{A}(t,\bar{U})$
- **Modello lineare a coef. costanti**: $\dfrac{dU}{dt} = \underset{=}{A}(U) + \bar{b}$ (A e b non dipendono dal tempo t).

Esempio:

① $\dfrac{d^2U}{dt^2} + 2U\dfrac{dU}{dt} + U^2 = \operatorname{sen} t$

termine non lineare: variabile di stato moltiplicata per se stessa e una sua derivata

non omogeneo: dipendenza dal tempo esplicita

$\Rightarrow$ modello NON lineare.

② $\dfrac{d^3U}{dt^3} + 2t\dfrac{dU}{dt} + t^2U = 0$

termine lineare con coefficiente non costante nel tempo

omogeneo

$\Rightarrow$ lineare omogeneo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 154

TEOREMA DI DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE: se f è continua e soddisfa la cond. di Lipschitz, allora

$$\|\hat{U}(t) - \tilde{U}(t)\| \le \|\hat{U}_0 - \tilde{U}_0\| e^{(t-t_0)L}$$

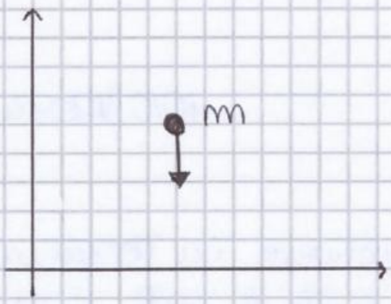
costante di Lipschitz

SOLUZ. MODELLI ALLE DERIVATE ORDINARIE:

Esempio:

① $x'(t) = 0 \xrightarrow{\text{integro}} x(t) = cost$: infinite soluzioni

② caduta del grave senza attrito:



$$m\ddot{x}(t) = -mg$$

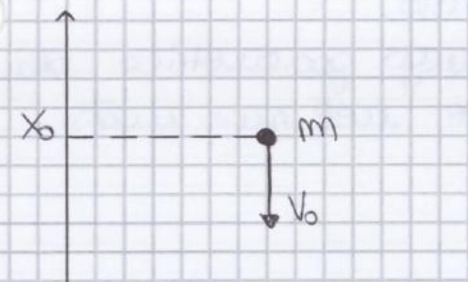
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \quad \text{integro: } \frac{dx}{dt} = -gt + a$$

integro ancora : $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$

$(a,b = cost.)$

soluz. generale

quando fisso le costanti a,b in funzione delle cond. iniziale, ottengo un integrale particolare:



$$x(0) = x_0 = b$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 = a$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

dopo quanto tempo il grave inizialmente fermo tocca terra?

$$x(t^*) = 0 = -\frac{1}{2}gt^{*2} + \cancel{v_0 t^*} + x_0 \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2x_0}{g}}$$

Tre versori $\{i, j, k\}$ ortonormali.

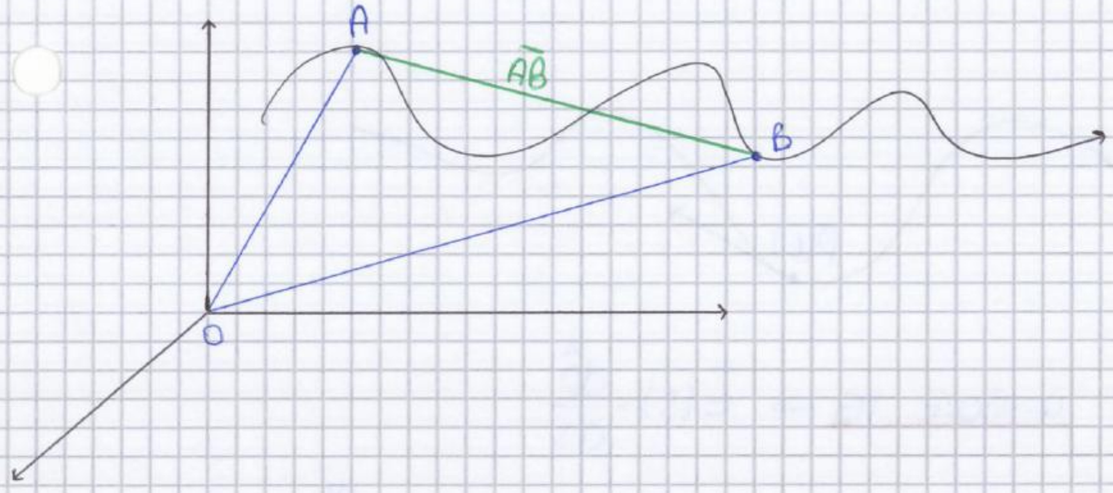
$OP = OP(t) \rightarrow$ VETTORE POSIZIONE $\rightarrow OP(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

l'insieme dei punti occupati da P (nel tempo) è la TRAIETTORIA o ORBITA del moto.

$v_P(t) \rightarrow$ VELOCITÀ $\rightarrow v_P(t) = \dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$

$a_P(t) \rightarrow$ ACCELERAZIONE $\rightarrow a_P(t) = \ddot{P}(t) = \frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$

SPOSTAMENTO INFINITESIMO $\rightarrow dP = v\,dt = (\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k})\,dt$



$AB = OB - OA$

$$\frac{d(AB)}{dt} = \frac{d}{dt}(OB - OA) = \frac{d(OB)}{dt} - \frac{d(OA)}{dt} = \bar{v}_B - \bar{v}_A$$

Considerando il modulo dello spostamento infinitesimo, allora:

$ds = |dP| = |v(t)|\,dt = \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\right)dt \rightarrow$ LUNGHEZZA D'ARCO (percorsa dal punto P)

ASCISSA CURVILINEA $\rightarrow s(t) = \int_{t_1}^{t} |v(\tau)|\,d\tau$: legge oraria.

S è una funzione invertibile per cui posso avere anche $t(s)$: $s(t) \leftrightarrow t(s)$

quindi $P(t) = P(t(s)) = \hat{P}(s)$.

e posso definire un versore che è uguale a $\bar{m} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{1}{c}$ ed è il VERSORE NORMALE PRINCIPALE che è ortogonale a $\bar{t}$.

Si definisce un terzo versore prodotto esterno tra $\bar{t}$ (tangente) e $\bar{m}$ (normale) detto VERSORE BINORMALE (indicato con $\bar{b}$) che è ortogonale ai precedenti.

Si definisce naturalmente la TERNA INTRINSECA in cui considero $\{\bar{t}, \bar{m}, \bar{b}\}$. Questo sistema è associato alla curva del moto.

VELOCITÀ $\rightarrow \vec{v}_P = \frac{dP}{dt} = \frac{d\hat{P}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\bar{t}$

ACCELERAZIONE $\rightarrow \vec{a}_P = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{t}) = \ddot{s}\bar{t} + \dot{s}\frac{d\bar{t}}{dt} = \ddot{s}\bar{t} + \dot{s}\left(\frac{d\bar{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}\right) =$

$$= \ddot{s}\bar{t} + \dot{s}c\bar{m} = \ddot{s}\bar{t} + c\dot{s}^2\bar{m}$$

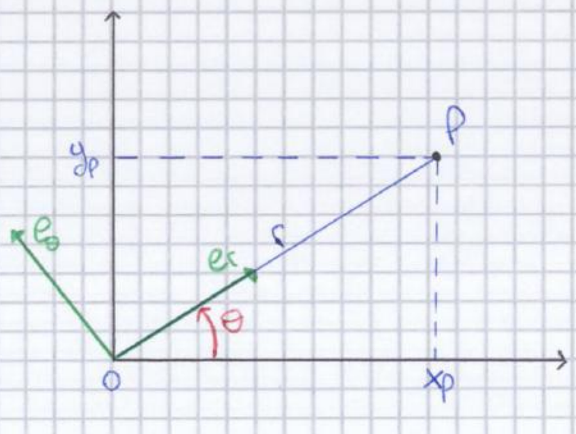
Quindi osservo che in generale l'accelerazione non è né tangente né normale alla curva, è però sempre rivolta verso il centro di curvatura della traiettoria.

In particolare, in un moto circolare uniforme, $\vec{a}_P = c\dot{s}^2\bar{m}$ mentre $\vec{v}_P = \dot{s}^2$ con $c = \frac{1}{R}$, allora $\vec{a}_P = \frac{v^2}{R}\bar{m}$, quindi l'accelerazione è centripeta.

MOTO IN COORD. POLARI:

Moto piano se la traiettoria è una curva piana.

Introduciamo le coord. polari (r, θ).



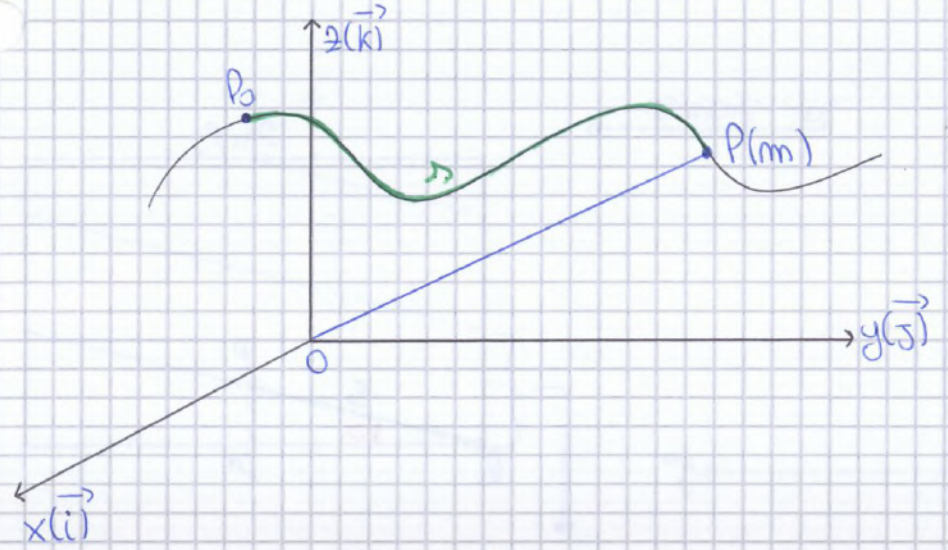
$e_r \perp e_\theta$

$\underline{OP} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} = r\cos\theta(\vec{i}) + r\sin\theta(\vec{j})$

ESERCITAZIONE 2:

12/03/2014

• Cinematica del punto:



TRAIETTORIA $\rightarrow$ $OP = OP(s)$ $\rightarrow$ ascissa curvilinea

LEGGE DI MOTO $\rightarrow$ $s = s(t)$ $\rightarrow$ funzione del tempo.

In componenti cartesiane e intrinseche abbiamo:

$$\overline{OP} = OP(t) = x(\vec{i}) + y(\vec{j}) + z(\vec{k})$$

$$\vec{v} = \frac{d(OP)}{dt} = \dot{x}(\vec{i}) + \dot{y}(\vec{j}) + \dot{z}(\vec{k}) = \dot{s}\frac{d\bar{P}}{dt} = \dot{s}\bar{t}$$ $\rightarrow$ versore tg.

$$\vec{a} = \frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{x}(\vec{i}) + \ddot{y}(\vec{j}) + \ddot{z}(\vec{k}) = \ddot{s}\frac{dP}{ds} + \dot{s}\frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{s}\bar{t} + cm\dot{s}^2$$

versore normale principale

curvatura: $\frac{dt}{ds}$

Il piano individuato tra $\bar{t}$ e $\bar{m}$ è il PIANO OSCULATORE e se la curva è piana è il piano su cui sta la curva, mentre se è sghemba è quello che meglio la approssima.

$(\bar{t}, \bar{m}, b)$: TERNA INTRINSECA

BINORMALE: $\frac{d\bar{b}}{ds} = \tau\bar{m}$

TORSIONE: andamento non sghembo della curva.

$$\vec{a} = (-R\cos\theta\,\dot\theta^2 - R\operatorname{sen}\theta\,\ddot\theta^2)\vec{i} + (-R\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2 + R\cos\theta\,\ddot\theta^2)\vec{j} + h\ddot\theta\vec{k} =$$

$$= (-R\dot\theta^2\bar\lambda + R\ddot\theta\bar\mu) + h\ddot\theta\vec{k} = -R\dot\theta^2\bar\lambda + (R\bar\mu + h\vec{k})\ddot\theta =$$

$$= -\frac{R\dot s^2}{R^2+h^2}(\vec\lambda) + (R\bar\mu + h\vec{k})\frac{\ddot s}{\sqrt{R^2+h^2}} = c\bar m\dot s^2 + \ddot s\bar t$$

$$\begin{cases} \bar m \equiv \bar\lambda \\ c \equiv \dfrac{R}{R^2+h^2} \end{cases}$$

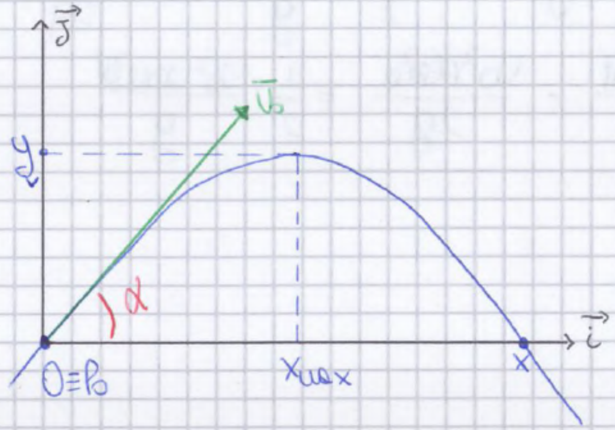
② Moti ad accelerazione costante:

$\vec{a} = \vec{a}_0$

$\vec{v} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$

$\vec{OP} = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \vec{v_0 t} + \vec{OP_0}$ se $O \equiv P_0 \Rightarrow \vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t$

un moto con $\vec{a}$ = cost è un moto piano $(\bar P_0, \bar a_0, \bar v_0)$. Se $\vec{a}_0 \parallel \vec{v}_0$ allora abbiamo un moto rettilineo.



$\vec{a}_0 = \vec{g} = -g\vec{k}$

$\bar{OP} = \frac{1}{2}\bar g t^2 + \vec{v}_0 t$

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$x = v_0 \cos\alpha\, t$

$y = -\frac{1}{2}g t^2 + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t$

traiettoria: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

12/03/2014

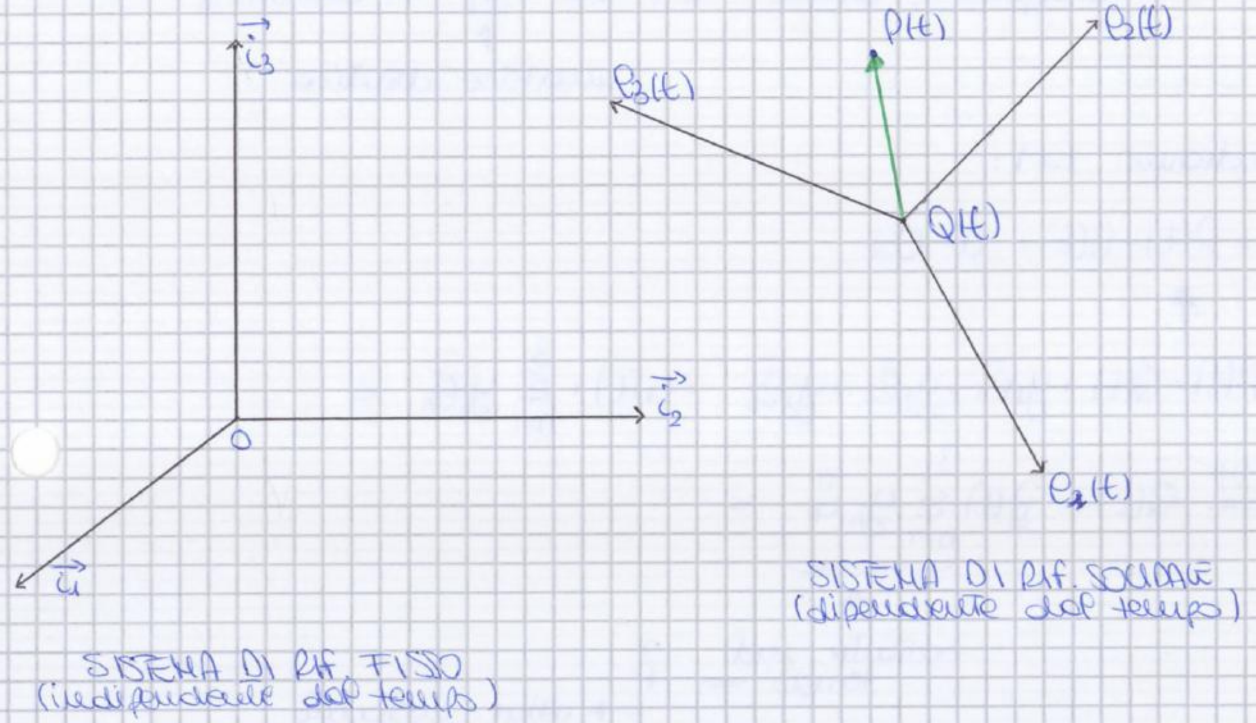
CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO:

Sfruttando l'ipotesi di rigidità del corpo, per cui la distanza tra coppie generiche di punti del corpo resta costante, per calcolare la cinematica cioè posizione, velocità e accelerazione del corpo rigido senza dover calcolare la cinematica di ogni punto.

Introduciamo un sistema solidale per cui i punti del corpo rigido mantengono inalterate le coordinate del sistema.

NB la scelta di un sistema solidale non è univoca, quindi esistono infiniti sistemi di riferimento solidali!

Il moto del corpo rigido è determinato quando si conosce il moto della terna solidale rispetto a un sistema di riferimento fisso.



La configurazione del corpo rigido è nota conoscendo la posizione Q(t) e l'orientamento della terna ortonormale solidale $\{e_h(t)\}$.

$$\overline{QP}(t) = y_1\bar{e}_1(t) + y_2\bar{e}_2(t) + y_3\bar{e}_3(t) \qquad (1)$$

: le coord. NON dipendono dal tempo, sono quantità costanti.

Tra le diverse possibili parametrizzazioni, una di queste è quella degli ANGOLI DI EULERO, oppure un'altra è quella degli ANGOLI DI CARDANO. La scelta è determinata in funzione dell'applicazione (comodità).

ANGOLI DI EULERO:
Si possono definire quando ho che $\boxed{i_3 \wedge e_3 \neq 0}$ per cui si individua il versore $m = \dfrac{i_3 \wedge e_3}{|i_3 \wedge e_3|}$ detto ASSE DEI NODI (è l'intersezione tra piani ortogonali delle direzioni i_3 ed e_3):

- ANGOLO DI PRECESSIONE $\rightarrow \psi$
- ANGOLO DI NUTAZIONE $\rightarrow \theta$
- ANGOLO DI ROTAZIONE $\rightarrow \phi$

Permettono di costruire la $\underline{\underline{R}}$ di (3)

Tralasciando i dettagli, si può mostrare che vi è una corrispondenza biunivoca (localmente) tra i valori degli angoli di Eulero e l'orientamento del sistema mobile. Inoltre si può trasformare la terna fissa in funzione della mobile: quindi nell'intervallo di tempo in cui sono definiti gli angoli di Eulero, il moto del corpo rigido può essere assegnato dando 6 quantità: $\{x_Q(t), y_Q(t), z_Q(t), \psi(t), \theta(t), \phi(t)\}$.
Allora un corpo rigido libero ha 6 GRADI DI LIBERTÀ (di quanti parametri ho bisogno per descrivere la posizione del corpo).

OSSERVAZIONE: in effetti per conoscere la posizione di un corpo rigido nello spazio mi basta conoscere la posizione di 3 suoi punti $\rightarrow 3 \times 3$ (coordinate x, y, z) = 9 quantità.
D'altra parte la RIGIDITÀ mi permette di individuare 3 relazioni (distanze reciproche dei 3 punti): $9 - 3 = 6$ parametri (quantità) necessarie per descrivere la posizione del corpo rigido nello spazio.

Ora, cosa possiamo dire su velocità e accelerazione?
Le velocità del corpo rigido non sono distribuite arbitrariamente ma sono legate dalla LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ: $\boxed{V_P(t) = V_Q(t) + \omega \wedge QP}$ $\forall P, Q$

La velocità angolare

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 154

quindi: $\dot{W} = \omega \wedge W$

$V_P - V_Q = \omega \wedge QP \longrightarrow V_P = V_Q + \omega \wedge QP$

(ho ottenuto ancora la formula di Poisson).

- sufficienza: verifico la rigidità del moto valutando la distanza:

$$\frac{d(QP)^2}{dt} = \frac{d}{dt}(QP \cdot QP) = \frac{dQP}{dt} \cdot QP + QP \cdot \frac{dQP}{dt} = 2\frac{dQP}{dt} \cdot QP =$$

commutatività del prodotto scalare.

$$= 2(V_P - V_Q) \cdot QP = 2(\omega \wedge QP) \cdot QP = 2\omega \cdot \underbrace{(QP \wedge QP)}_{=0} = 0$$

allora la distanza tra due punti generici non cambia, e quindi il moto è rigido.

Torniamo alle formule di Poisson per dimostrare che

$$\dot{e}_h = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} e_k \cdot \dot{e}_k\right) \wedge e_h$$

ricordiamo che i versori della terna solidale sono:

$$\{e_1, e_2, e_3\} \text{ tali che: } \begin{cases} e_1 = e_2 \wedge e_3 \\ e_2 = e_3 \wedge e_1 \\ e_3 = e_1 \wedge e_2 \end{cases} \quad (5a) \qquad e_i \cdot e_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad (5b)$$

quindi $e_k^2 = e_k \cdot e_k = 1$, derivando: $\frac{d(e_k^2)}{dt} = \dot{e}_k \cdot e_k + e_k \cdot \dot{e}_k = 0$

per la commutatività: $e_k \cdot \dot{e}_k = 0$ (5c), ovvero la derivata di un versore è perpendicolare al versore stesso.

Richiamiamo alcune formule: scomposizione del prodotto vettoriale:

$$\begin{cases} a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \\ (a \wedge b) \wedge c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a \end{cases} \quad (5d)$$

dunque: $\dot{e}_1 = \frac{d(e_1)}{dt} \overset{(5a)}{=} \frac{d}{dt}(e_2 \wedge e_3) = \dot{e}_2 \wedge e_3 + e_2 \cdot \dot{e}_3 =$

$\overset{(5a)}{=} \dot{e}_2 \wedge (e_1 \wedge e_2) + (e_3 \wedge e_1) \wedge \dot{e}_3 =$

$\overset{(5d)}{=} (\cancel{\dot{e}_2 \cdot e_2})^{0} e_1 - (\dot{e}_2 \cdot e_1)e_2 + (\cancel{e_3 \cdot \dot{e}_3})^{0} e_1 - (e_1 \cdot \dot{e}_3)e_3 =$

mostriamo (a) che $W = \dot{R}R^T$ è antisimmetrica:

$$RR^{-1} = RR^T = \mathbb{1} \longrightarrow \frac{d}{dt}(\mathbb{1}) = 0 = \frac{d}{dt}(RR^T) = \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0$$

allora: $\dot{R}R^T = -R\dot{R}^T$.

chiamo $W = \dot{R}R^T$ e calcolo W^T:

$$W^T = (\dot{R}R^T)^T = R^{T^T}\dot{R}^T = R\dot{R}^T = W^T$$

in definitiva: $W = -W^T \Rightarrow W$ è antisimmetrica.

mostriamo (b) che $WQP = \omega \wedge QP$:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & w_x \\ -w_y & -w_x & 0 \end{pmatrix}$$

W è antisimmetrica: $A_{ij} = -A_{ji}$.
e la diagonale è fatta da elementi $A_{ii} = -A_{ii} \Rightarrow$ zeri.

considero un vettore generico $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\text{allora: } WU = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & w_x \\ -w_y & -w_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega \wedge U$$

vettore: $\omega = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$

11/03/2014

MOTI RIGIDI:

legge delle velocità: $V_P(t) = V_Q(t) + \omega \wedge QP$

legge delle accelerazioni: $a_P(t) = a_Q(t) + \dot{\omega} \wedge QP + \omega \wedge (\omega \wedge QP)$

Supponiamo che ad un certo istante $t = t^*$ tale che $\omega(t^*) = 0$, allora: $V_P(t^*) = V_Q(t^*)$ ATTO DI MOTO TRASLATORIO in cui tutti i punti hanno la stessa velocità, ma in generale diverse accelerazioni (non è detto che $\dot{\omega} = 0$).

Se per un determinato istante di tempo $t = t^*$ tale che $V_Q = 0$, allora $V_P = \omega \wedge QP$ ATTO DI MOTO ROTATORIO attraverso un asse passante per Q e parallelo ad ω che è detto ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE.

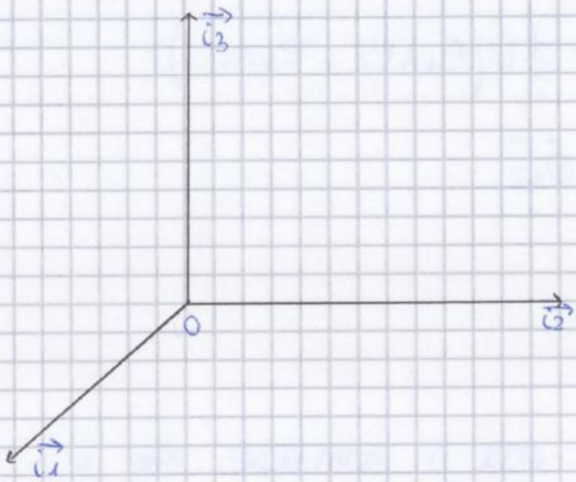
anche tutti i punti hanno la stessa velocità ma questa in generale può essere differente da istante a istante (a meno che il moto non sia uniforme e rettilineo).

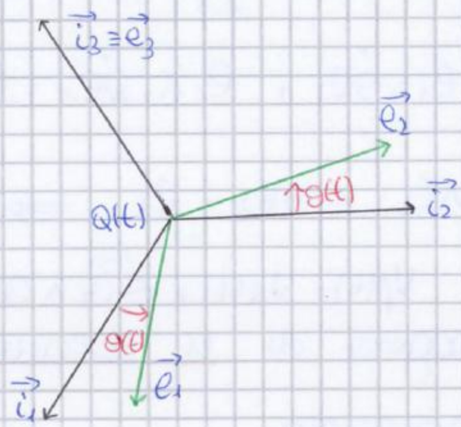
NB in effetti si può descrivere la posizione e la velocità del corpo rigido dando posizione e velocità di 1 dei suoi punti (ad esempio il baricentro).

Quindi devo definire 3 componenti del punto scelto: 3 gradi di libertà.

• MOTO ROTOTRASLATORIO:

quando l'orientamento solidale al corpo è invariabile nel tempo (costante rispetto l'osservatore fisso) e la direzione costante è quella di ω (velocità angolare):





Esiste una direzione che resta fissa rispetto all'osservatore del sistema di riferimento fisso:

Se scegliamo $i_3 \equiv e_3$ parallela alla direzione costante, allora $\dot{e}_3 = 0$.

D'altra parte dalle formule di poisson:

$$\boxed{\dot{e}_3 = \omega \wedge e_3 = 0 \xrightarrow{\text{Poisson}} \omega // e_3}$$

Ovviamente il moto traslatorio è un caso particolare del moto rototraslatorio in cui non solo un versore solidale ma tutti, si mantengono costanti.

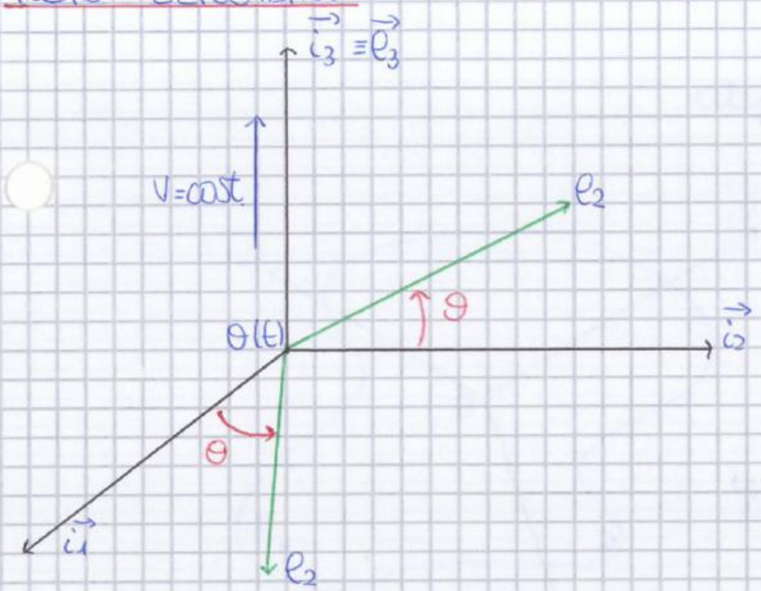
Di quanti parametri ho bisogno?

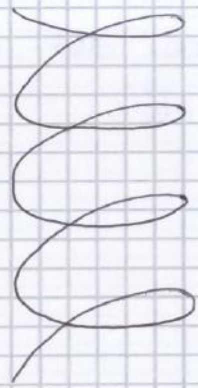
in questo caso mi basta 1 solo parametro (θ) per descrivere il moto rotatorio.

Per convenzione la direzione di ω è determinabile attraverso la regola della mano destra: in cui le dita "si avvolgono" nella direzione della rotazione e ω è identificato dal pollice.

Angolo di rotazione antiorario identifica una direzione ω_z positiva.

• MOTO ELICOIDALE:

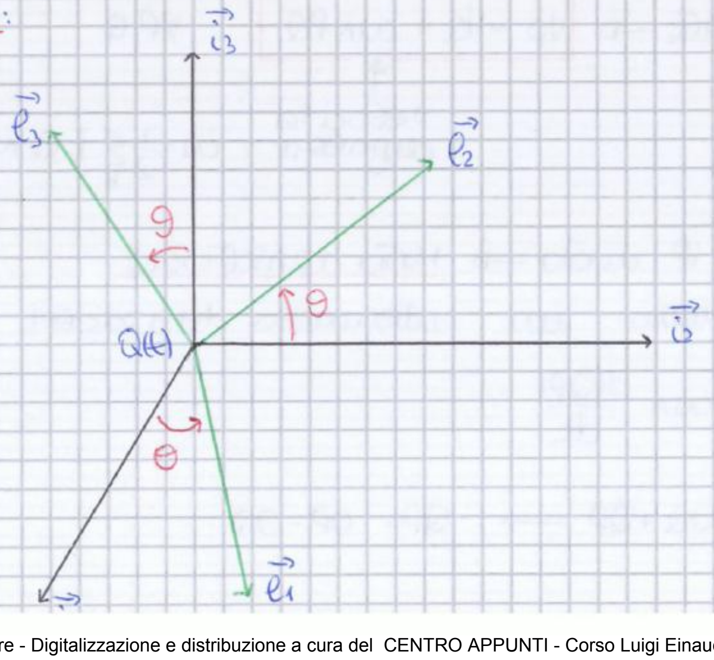




D: quanti parametri ho bisogno? 2 → angolo di rotazione (θ); quota dell'origine del sistema mobile $z(\Omega)$

Le coordinate $x(Q), y(Q)$ sono costanti

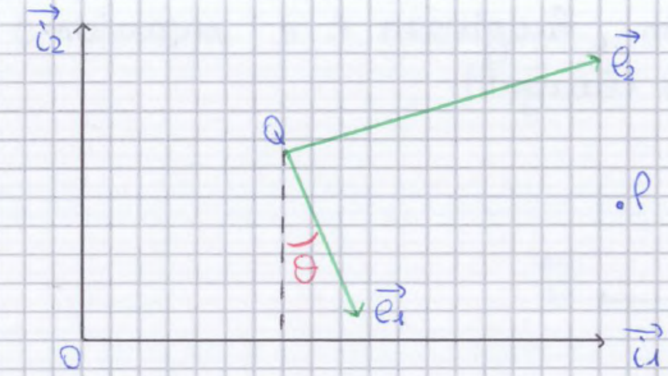
• MOTO POLARE:



allora: $\frac{d(QP)}{dt} = V_P - V_Q = \omega \wedge QP$

quindi: $\boxed{a_P = a_Q + \dot{\omega} \wedge QP + \omega \wedge (\omega \wedge QP) = a_Q + \dot{\omega} \wedge QP + (\omega \cdot QP)\omega - (\omega^2) QP}$

• Moti rigidi piani: le velocità di tutti i punti sono sempre parallele ad una giacitura fissata; quindi V_P e V_Q sono parallele al piano xy (fisso).
Si dimostra allora che $\omega = \omega \vec{i_3}$ e quindi ω è perpendicolare al piano.

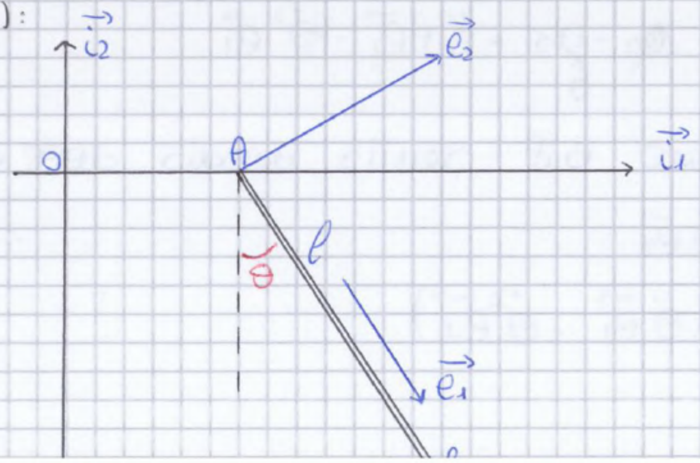


Studiare sul piano mi da informazioni su tutto il moto rigido piano.
Se riesco a determinare un angolo θ compreso tra la direzione fissa e quella solidale, allora: $\omega = \omega \vec{i_3} = \dot{\theta} \vec{i_3}$, allora nel caso piano avremo:

$$\boxed{\begin{aligned} V_P &= V_Q + \dot{\theta} \vec{i_3} \wedge QP \\ a_P &= a_Q + \ddot{\theta} \vec{i_3} \wedge QP - \dot{\theta}^2 (QP) \end{aligned}}$$

CINEMATICA RIGIDA PIANA

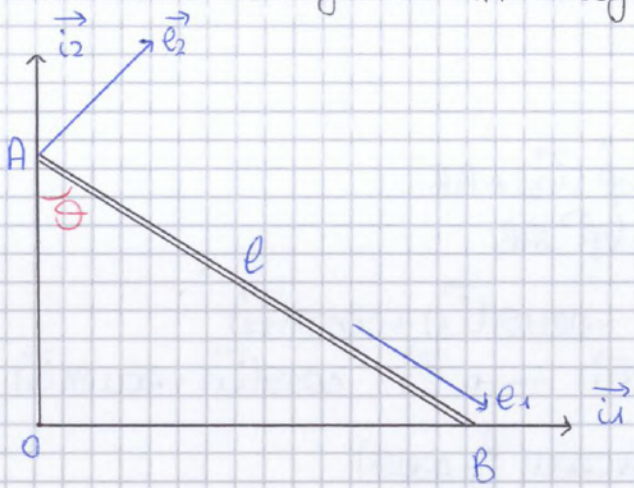
① ASTA RIGIDA lunga ℓ con estremo A vincolato a scorrere su un asse fisso (asse x):



Consideriamo solo il tratto AG:

$$V_G = V_A + \omega \wedge GA = \ell\dot{\vartheta}(\vec{e_2}) + \dot{\vartheta}(\vec{i_3}) \wedge \left(-\frac{\ell}{2}\vec{e_1}\right) =$$
$$= \ell\dot{\vartheta}(\vec{e_2}) - \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}(\vec{e_2}) = \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}(\vec{e_2})$$

③ ASTA RIGIDA lunga ℓ vincolata a entrambi gli estremi a due guide tra loro ortogonali (A lungo $\vec{i_2}$ e B lungo $\vec{i_1}$):

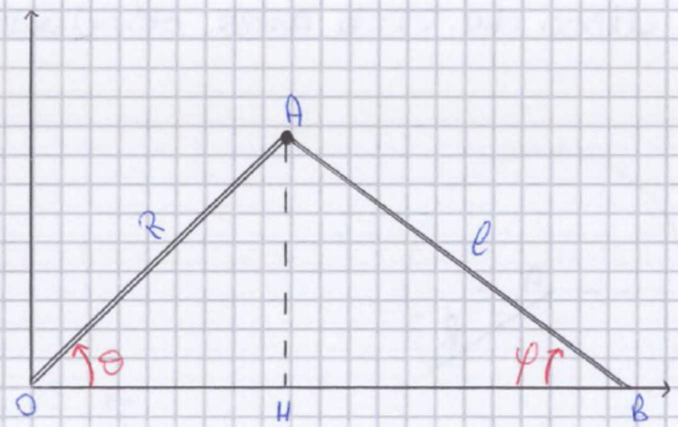


$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = \ell\cos\vartheta \end{cases} \longrightarrow V_A = -\ell\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}(\vec{i_2})$$

oppure $V_B = V_A + \dot{\vartheta}(\vec{i_3}) \wedge AB = -\ell\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}(\vec{i_2}) + \ell\dot{\vartheta}(\vec{e_2}) =$

$$= \cancel{-\ell\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}(\vec{i_2})} + \ell\dot{\vartheta}(\cos\vartheta(\vec{i_1}) + \cancel{\sin\vartheta(\vec{i_2})}) = \ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta(\vec{i_1})$$

④ Manovellismo:



asta OA → R : MANOVELLA
asta AB → ℓ : BIELLA

$\ell > R$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 154

$V_C = 0$: per la condizione di non strisciamento

$V_A = \dot{x}(\vec{i_1}) = \underset{0}{\cancel{V_C}} + \omega \wedge CA = \dot{\vartheta}(\vec{i_3}) \wedge R(\vec{i_2}) = -R\dot{\vartheta}(\vec{i_1}) \Rightarrow \omega = -\frac{\dot{x}}{R}(\vec{i_3})$

se $\dot{x} > 0 \Rightarrow$ il disco deve ruotare in verso orario $\Rightarrow$ negativo

$a_A = \ddot{x}(\vec{i_1}) = \ddot{\vartheta}(\vec{i_3}) \wedge \underbrace{R(\vec{i_2})}_{CA} - \dot{\vartheta}^2 R(\vec{i_2}) + a_C$

sappiamo che $\dot{x} = -R\dot{\vartheta}$

quindi $\vec{a}_A = -R\ddot{\vartheta}(\vec{i_1})$

da cui $\vec{a}_C = R\dot{\vartheta}^2(\vec{i_2})$

20/03/2014

Riassumiamo la cinematica del corpo rigido:

$V_P(t) = V_Q(t) + \omega \wedge QP$

6 parametri = gradi di libertà necessari a descrivere un corpo rigido.

- Moti traslatori: $\omega(t) = 0 \Rightarrow V_P(t) = V_Q(t) \longrightarrow 3$ parametri
- Moti rototraslatori: $\omega = \dot{\vartheta}(\vec{i_3}) \Rightarrow V_P(t) = V_Q(t) + \dot{\vartheta}(\vec{i_3}) \wedge QP \rightarrow 4$ parametri
- Moto rotatorio: $V_P = \dot{\vartheta}(\vec{i_3}) \wedge QP \longrightarrow 1$ parametro.

<u>Osservazione</u>: analogia tra moti di rotazione e traslazione (moto lungo una linea retta):

- rotazione con un asse fisso: $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z$

supponiamo di integrare: $\vartheta - \vartheta_0 = \int_0^t \omega_z d\tau = \omega_z \int_0^t d\tau \longrightarrow \vartheta = \vartheta_0 + \omega_z t$

se il moto ha acc. angolare ($\dot{\omega}$) costante, allora:

$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\omega_z) = \alpha$ quando integro:

$\omega_z(t) = \omega_{z0} + \alpha_z t$ ma $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z \Rightarrow \vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega_z d\tau$ e

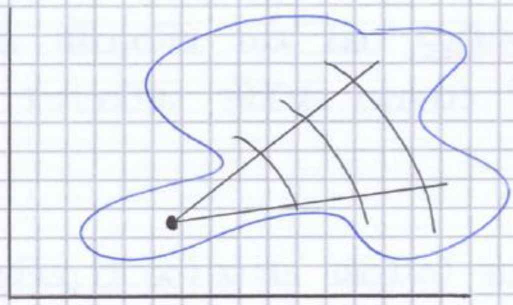
sostituendo si ha:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t (\omega_{z0} + \alpha_z t)\, d\tau = \vartheta_0 + \omega_{z0} t + \int_0^t \alpha_z t\, d\tau = \vartheta_0 + \omega_{z0} t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$$

- traslazione: immaginiamo la velocità costante:

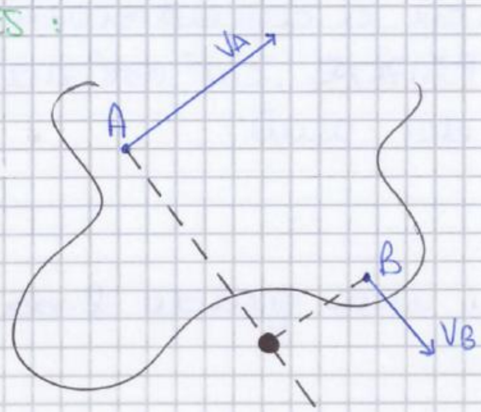
(~~piede~~ pedale della bici: moto traslatorio dello spazio).

• MOTO PIANO ROTATORIO (attorno ad asse fisso):



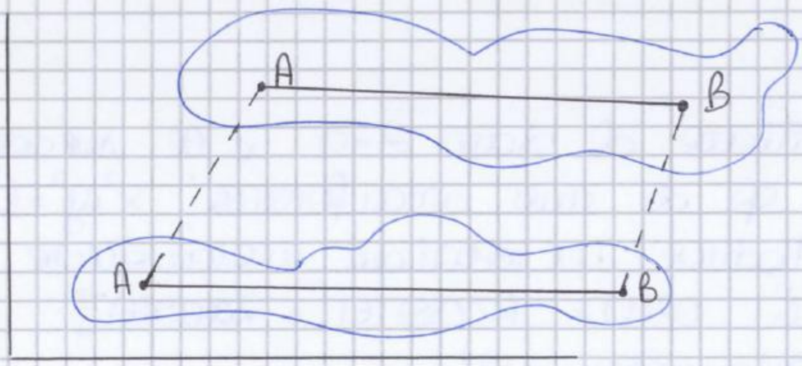
Corpo ruota attorno ad un asse di rotazione. Cerco l'intersezione tra il piano direttore e l'asse istantaneo di rotazione, definisce (il punto unico) il CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE, che si può determinare con il TEOREMA DI CHARLES:

"



Presi i due punti A e B e trovate le loro velocità, ne traccio la normale alla traiettoria e trovo così il centro istantaneo di rotazione nell'intersezione, il punto può essere fuori o dentro il corpo.".

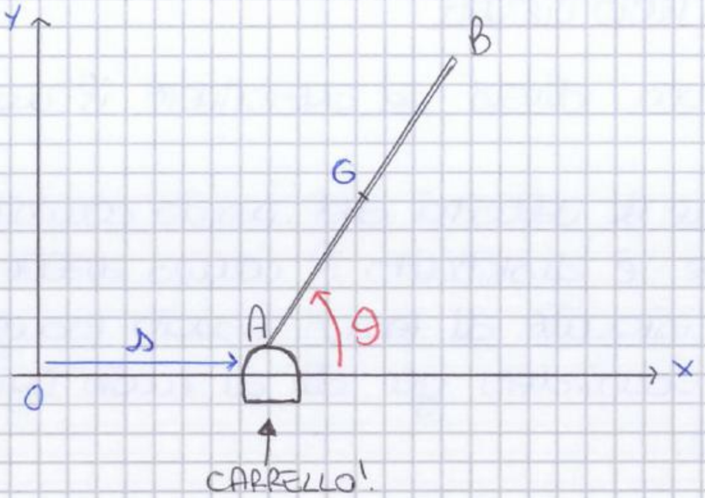
• MOTO PIANO ROTOTRASLATORIO:



Abbiamo visto una classificazioni di possibili moti rigidi,

$(x(P), y(P), z(P))$ per descrivere il suo moto. Il vincolo ha ridotto a 1 il numero di parametri necessari: θ può essere variato arbitrariamente per ottenere le configurazioni del sistema.
Ho espresso il vincolo con due relazioni: $\{z=0 \; ; \; x^2+y^2=R^2\}$

② consideriamo un'asta con un estremo vincolato su una guida fissa:



Il carrello può spostarsi e l'asta può inclinarsi. Asta AB, lunga l con G il suo punto medio. Il carrello scorre lungo x mantenendo la quota $y=0$ ($y=\text{cost}$).
Nel caso libero l'asta AB è un corpo rigido nel piano e necessita di 3 parametri indipendenti: le due coord dell'origine del sistema mobile solidale e l'angolo di rotazione tra il sistema fisso e quello mobile. Ora col vincolo di posizione, qualunque punto dell'asta è noto una volta conosciuti due parametri: $\{s(t), \theta(t)\}$.
Allora: 3 gl. − 1 vincolo = 2 parametri!
Per le coord del punto medio G: $OG = \left(s + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\vec{i} + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta$

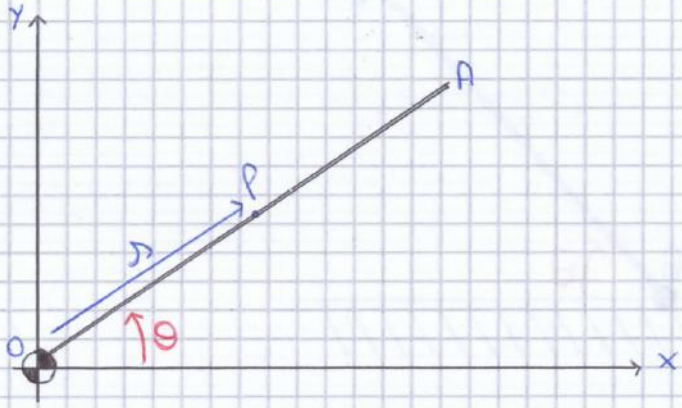
da cui posso calcolare la velocità di G come:
ricordiamoci che $s = s(t)$ e $\theta = \theta(t)$, allora:

$$v_G = \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{\partial G}{\partial \theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial G}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial G}{\partial \theta}\dot{\theta}$$

derivando OG ottengo: $\dot{OG} = \left(\dot{s} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{i} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta(\vec{j})$

Esempio:

Punto vincolato su una guida mobile:



$\theta = \omega(t)$

Asta in moto rotatorio uniforme con velocità angolare costante

La posizione del punto sulla guida è determinata dalla coord. libera s.

Il VINCOLO È MOBILE in quanto varia nel tempo (prima con vincoli fissi il tempo compariva attraverso le coord. libere implicitamente):

$$OP(s,t) = s\cos(\omega t)\vec{i} + s\sin(\omega t)\vec{j}$$

Valutiamo le velocità virtuali: sono le velocità col vincolo congelato ad un determinato istante di tempo, quindi la velocità virtuale è tangente alla guida (congelando il sistema il vincolo è fisso); mentre la velocità effettiva ha una componente ortogonale alla guida

Tra le infinite velocità virtuali, in questo caso, non si trovano le velocità effettive. Quindi:

$$\dot{V}_P = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$\dot{s}$

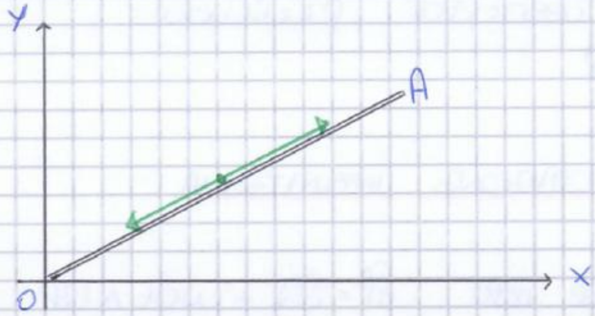
in quanto ho un vincolo mobile che si annulla se considero velocità virtuali in cui si congela il sistema.

Si parla di VINCOLI UNILATERI quando ad esempio considero un'asta che deve mantenersi al di sopra di un piano o di una guida orizzontale:

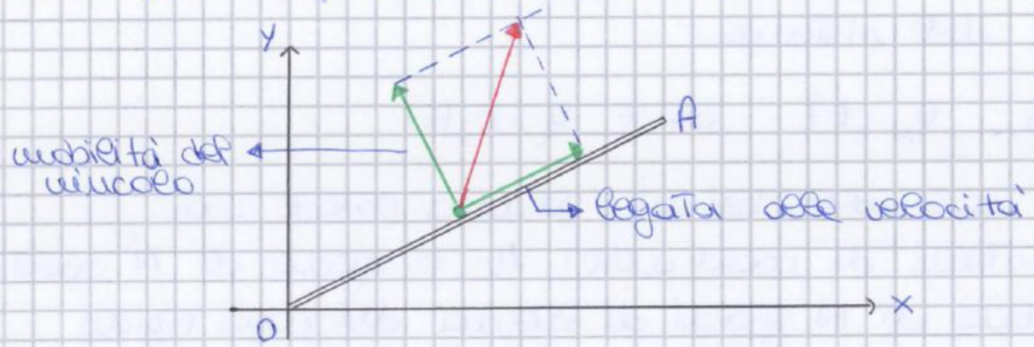
Se tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili, allora si parla di VINCOLI BILATERI

NB Tale definizione può essere fatta considerando gli spostamenti virtuali e non quelli effettivi.

Se ricordiamo ad esempio il punto su guida mobile

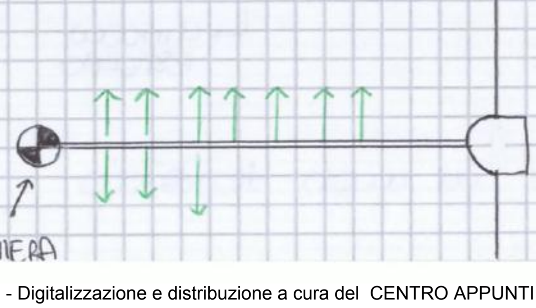


gli spostamenti virtuali sono legati alle velocità virtuali che sono tangenti alla guida; esclusi gli estremi dell'asta posso verificare la reversibilità.
Se considero lo spostamento effettivo invece:



L'altra è lo spostamento effettivo che col vincolo mobile ha una componente ortogonale alla guida e concorde col verso di rotazione.
La velocità effettiva opposta non è definita: ho irreversibilità.

NB In linea di principio gli spostamenti virtuali sono diversi da quelli effettivi, ma solo nel caso di vincoli mobili.



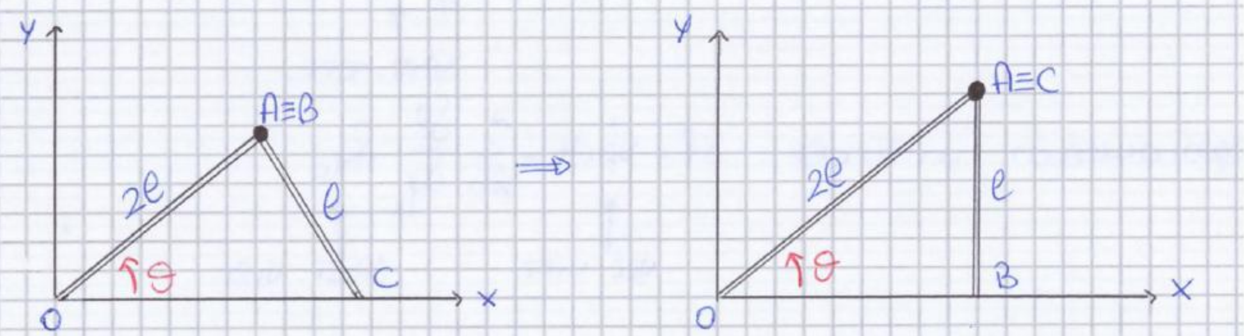
$\begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \end{cases}$ VINCOLO DOPPIO → definito da due eq.

$\begin{cases} x_A = x_C \\ y_A = y_C \end{cases}$ VINCOLO DOPPIO

$y_B = 0$ VINCOLO SEMPLICE

Ricordiamo che un corpo rigido nel piano ha 3 parametri liberi (3 gradi di libertà) e il nostro sistema è composto da due aste, allora ho 6 gradi di libertà (3+3) ma devo pur sempre "eliminare" i vincoli: 6 - 5 = 1 parametro libero! La scelta delle coordinate libere non è univoca

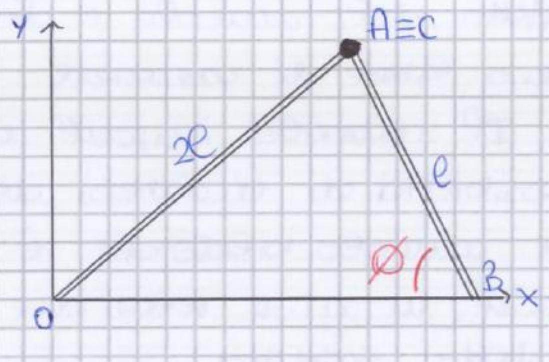
- scelta I:



$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$: config. max

allo stesso θ corrispondono due configurazioni diverse.

- scelta II:

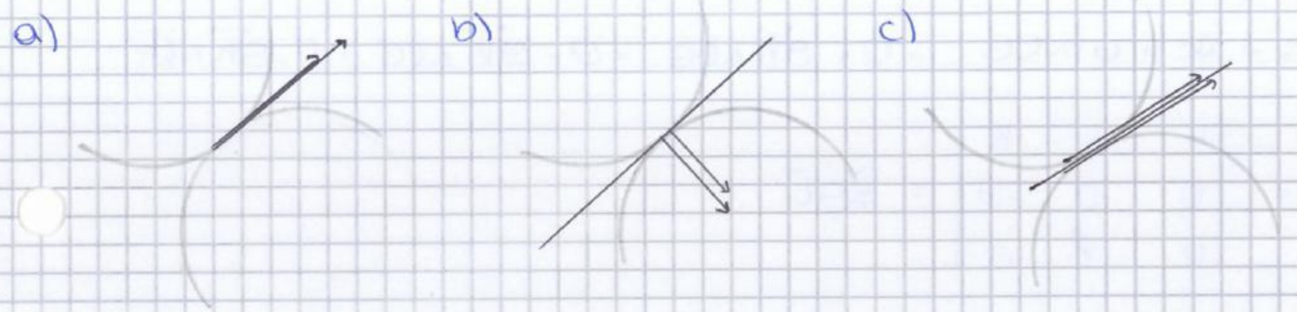


$0 < \varnothing < 2\pi$: config. globale.

La scelta della parametrizzazione non è univoca ma ci sono scelte migliori di altre!

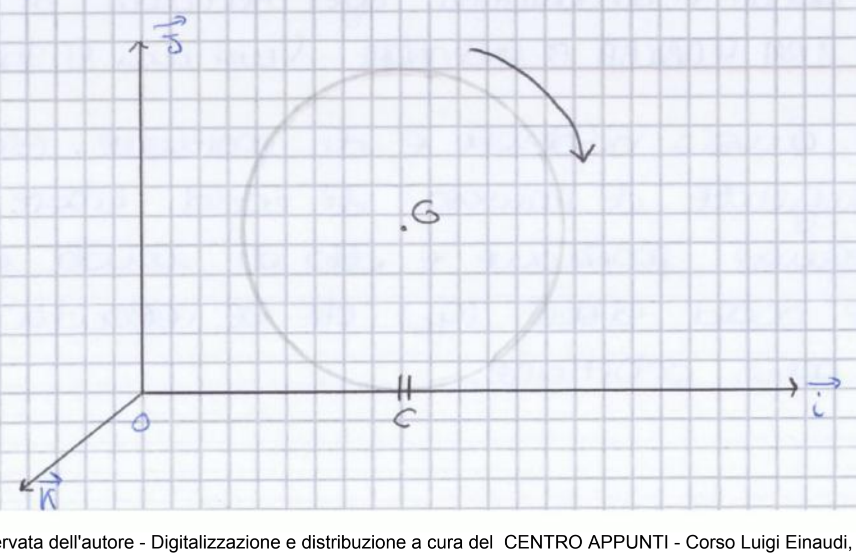
Si parla di VINCOLI DI MOBILITÀ come dei vincoli che limitano gli atti di moto del sistema (ovvero come ci spostiamo da una configurazione all'altra ma NON le posizioni).
In generale tali vincoli non si possono esprimere in forma olonoma cioè del tipo $f(q_1, q_2, \dots, q_N; t) = 0$, in alcuni casi però tali vincoli sono riconducibili a vincoli olonomi.

Esempio: vincolo di puro rotolamento: supponiamo che non vi sia strisciamento:



a) Le velocità nel punto di contatto devono essere uguali. Quindi il puro rotolamento si ha quando le velocità nel punto di contatto sono coincidenti.
b) Ho distacco se le velocità hanno una componente perpendicolare al piano tangente comune che è diversa.
c) Ho strisciamento se ho componenti delle velocità nelle direzioni tangenti che sono diverse. Quindi uno è più veloce dell'altra.

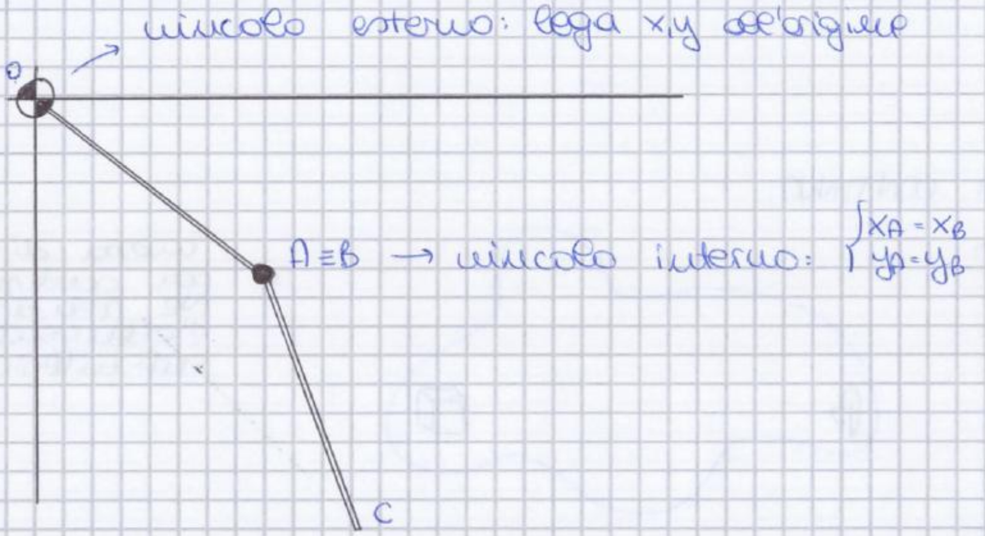
Noi lavoreremo sempre coi dischi che rotolano senza strisciare cioè nel caso di puro rotolamento che ad esempio possono modellare ruote dentate.



- VINCOLO DI MOBILITÀ: considero M vincoli, allora avrei che le velocità che posso assegnare arbitrariamente sono ridotte dai vincoli quindi N-M, e allora i gradi di libertà devono essere definiti in base agli spostamenti virtuali

Praticamente nei nostri casi con vincoli olonomi (bilaterali e di posizione) se considero un sistema composto da più corpi rigidi allora il numero di gradi di libertà che è uguale al numero di coord. libere necessarie a descrivere il sistema, lo ottengo sommando i gradi di libertà di ogni singola parte rigida (3 gradi nel piano e 6 nello spazio) e sottraendo il numero di vincoli.

Esempio:



gradi di libertà: $(3+3) - (2+2) = 2$

Introduciamo ora il BARICENTRO o CENTRO DI MASSA (def):

$$\begin{cases} OG = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (m_i \, OP_i)}{m} & \text{caso particellare} \\[2ex] OG = \dfrac{\int_B (OP \rho \, d\tau)}{m} & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Dinamica terrestre delle forze peso: non calcolo tutte le forze peso ma cerco il punto G e ne calcolo lì la massa come se lì fosse appunto concentrata tutta la massa del sistema.

La definizione del baricentro non dipende da O:

dim:

$O' \neq O$

$$O'G' = \frac{\sum_{i=1}^{m} (m_i \, O'P_i)}{m} \qquad \text{(quello che devo dimostrare)}$$

$$O'P_i = O'O + OP_i \qquad \frac{\sum (m_i O'P_i)}{m} = OG$$

$$O'O = \text{cost} \Longrightarrow O'G' = O'O + OG = O'G \Rightarrow G = G'$$

$$O'O \sum \frac{m_i}{m} = O'O \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} = O'O$$

Il punto G non dipende da dove ho preso l'origine di riferimento: in componenti si ha:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (m_i x_i)}{m} \\[2ex] y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (m_i y_i)}{m} \\[2ex] z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (m_i z_i)}{m} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_G = \dfrac{\int_B \rho x_i \, d\tau}{m} \\[2ex] y_G = \dfrac{\int_B \rho y_i \, d\tau}{m} \\[2ex] z_G = \dfrac{\int_B \rho z_i \, d\tau}{m} \end{cases}$$

↑ PARTICELLARE ↑ CONTINUO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 154

$P_i(m_i)$ con $i=1,\dots,n$.

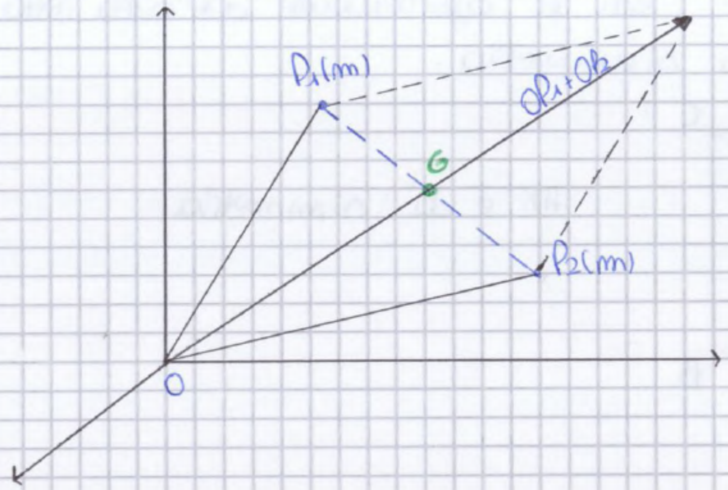
Spezzo in due il sistema e considero: $\begin{cases} P_i^{(1)} & i=1,\dots,m \\ P_i^{(2)} & i=m+1,\dots,n \end{cases}$

$$m_{TOT}\,OG = \sum_{i=1}^{n}(m_i\,OP_i) = \sum_{i=1}^{m}(m_i\,OP_i) + \sum_{i=m+1}^{n}(m_i\,OP_i) = m^{(1)}OG^{(1)} + m^{(2)}OG^{(2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{OG_{TOT} = \frac{m^{(1)}OG^{(1)} + m^{(2)}OG^{(2)}}{m_{TOT}}}$$

(G_{TOT} = G dei G_i dotati di m)

Esempio:



$m_1 = m_2 = m$

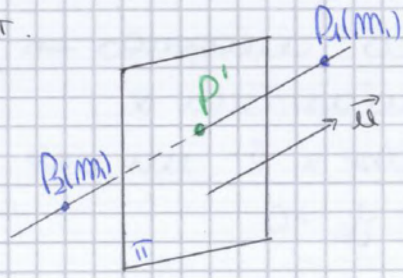
$$OG = \frac{m\,OP_1 + m\,OP_2}{2m} = \frac{1}{2}(OP_1 + OP_2)$$

pongo $OP_1 + OP_2 = \rho' \Rightarrow OG = \frac{1}{2}\rho'$

G appartiene alla retta P_1P_2 e ne dimezza il segmento!

Alcune conseguenze:

1) se π è un piano diametrale coniugato ad $\vec{u}$ (versore), allora G appartiene a π.
Allora prendiamo retta parallela ad $\vec{u}$ se c'è un punto P_1 appartenente alla retta con massa m_1, allora ce ne è un altro dall'altra parte di π (P_2) di massa $m_2 = m_1$, cosicché il punto medio dei due appartiene a π.

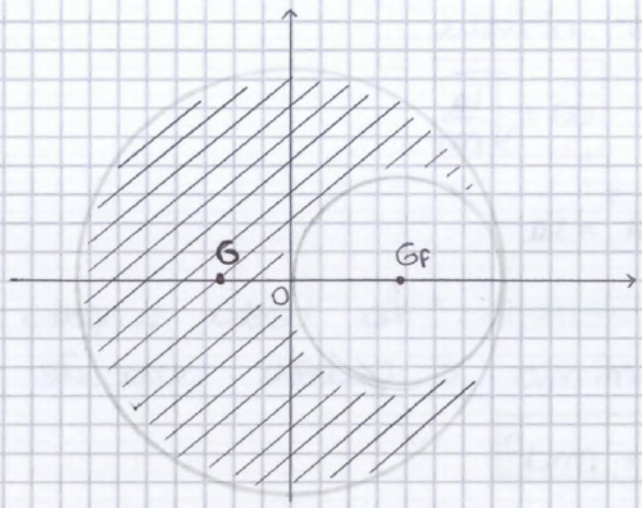


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 154

Ricavare quindi x_G:
$d\tau$ sarebbe un ds e in coord. polari con angolo θ si ha
$d\tau = R d\theta$ (lung. infinitesima dell'arco), allora

$$dm = \rho_0 R d\theta \Rightarrow x_G = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} (\rho_0 R\cos\theta) R d\tau}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_0 R d\theta} = \frac{R(\operatorname{sen}\theta)_{-\alpha}^{\alpha}}{2\alpha} = \frac{R\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$$

② sfera con buco al centro:



voglio il baricentro della parte tratteggiata, allora:

$$m_{TOT}\, \cancel{OG_{TOT}} = m OG + m_F OG_F$$

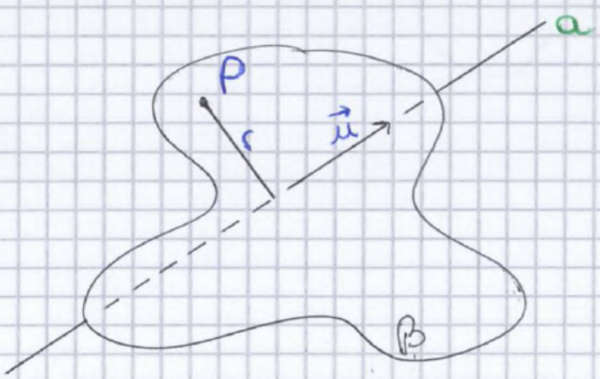
0: se fosse tutto $O \equiv G$

$$m = \rho_0 \pi R^2 - \rho_0 \pi \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}\pi R^2 \rho_0$$

$$m_F = \rho_0 \pi \frac{R^2}{4}$$

$$\Rightarrow OG = \frac{-\rho_0 \pi \frac{R^2}{4} \cdot \frac{R}{2}}{\frac{3}{4}\pi R^2 \rho_0} = -\frac{R}{6}$$: è negativo: ho più massa a sx che a dx

• Momenti di inerzia:
Si definiscono rispetto ad un asse (retta a) di versore $\vec{u}$:



$\vec{u} \parallel \vec{k}$

$r^2 = (x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2$

$dm = \rho d\tau$

quindi: $r^2 = (x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 = \underbrace{(x^2 + y^2)}_{I_{QG}} + \underbrace{(x_Q^2 + y_Q^2)}_{md^2} - (2x x_Q) - (2y y_Q)$

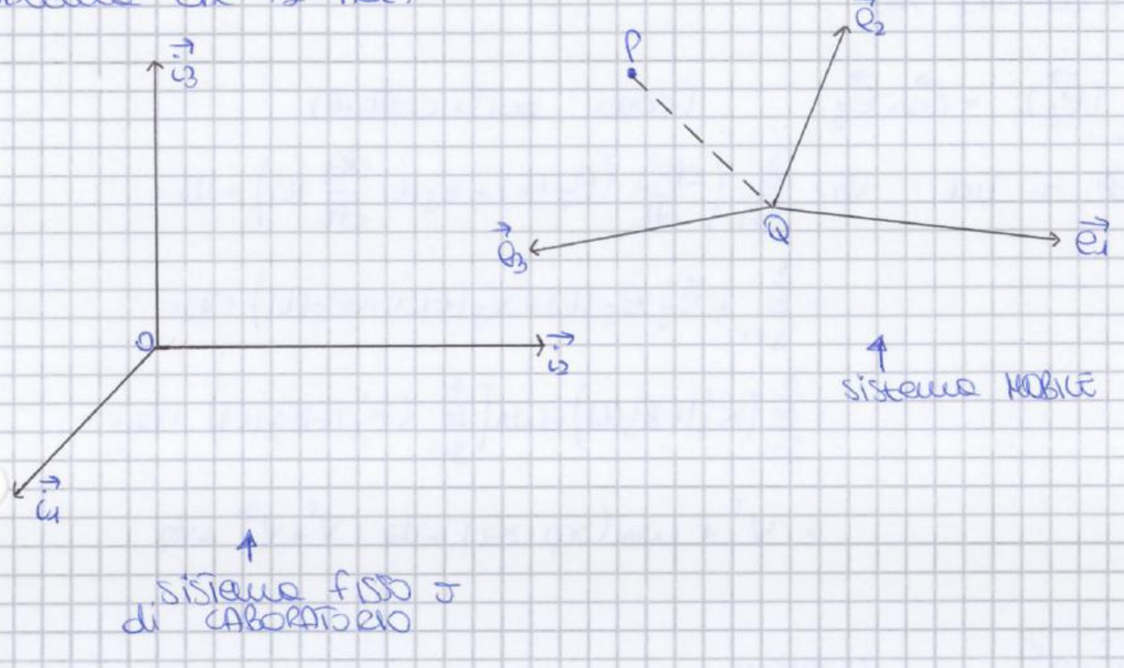
$$\Rightarrow I_Q = \int_\beta [(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2] \rho d\tau = I_{QG} + md^2 - 2x_Q \underbrace{\int_\beta x \rho d\tau}_{0\ (x_G = 0)} - 2y_Q \underbrace{\int_\beta y \rho d\tau}_{0\ (y_G = 0)}$$

ecco: $I_Q = I_{QG} + md^2$!

27/03/2014

CINEMATICA RELATIVA:

Scegliere bene il sistema di riferimento a seconda del problema che si ha.



$$\begin{cases} x_P = \sum_{j=1}^{3} (x_j \vec{i_j}) & \text{sist. fisso} \\ x_P = \sum_{j=1}^{3} (x'_j \vec{e_j}) & \text{sist. mobile} \end{cases}$$

se il punto si muove nel tempo, allora:

$$\begin{cases} x_P = \sum_{j=1}^{3} (x_j(t) \vec{i_j}) & \text{sist. fisso} \\ x_P = \sum_{j=1}^{3} (x'_j(t) \vec{e(t)}_j) & \text{sist. mobile} \end{cases}$$

$$a^a = \underbrace{a_Q + \dot{\omega} \wedge (x_P - x_Q) + \omega \wedge (\omega \wedge (x_P - x_Q))}_{a^\tau} + \underbrace{2\omega \wedge v^r}_{a^c} + a^r = a^\tau + a^c + a^r$$

ω: quanto ruota il sistema mobile rispetto al fisso

- Moti traslatori $\rightarrow \omega = 0 \Rightarrow a^a = a_Q + a^r$

Esempi:

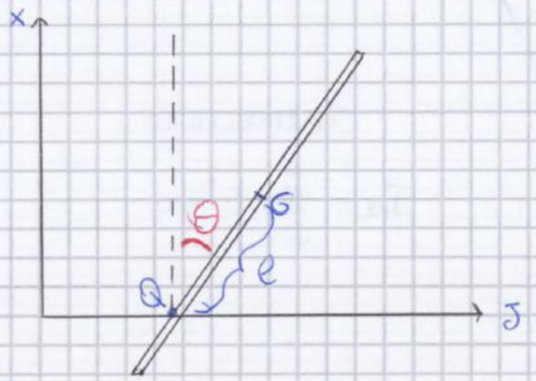
① $m\vec{a} = \vec{F}$

quale $\vec{a}$ è? $\rightarrow a = a^a \Rightarrow \vec{F} = ma^a$

quindi $\vec{F} = m(a_Q + a^r)$ quando $\omega = 0$

per cui $ma^r = \vec{F} - ma_Q$ sistema inerziale.

② Pendolo inverso: sta in piedi contro la gravità (cosa).



$a_Q = A\sin(\omega t)\vec{i}$

Il sistema si comporta come una molla perché oscilla. La molla esercita sul polo un momento di torsione: $M_Q^k = -h\theta$

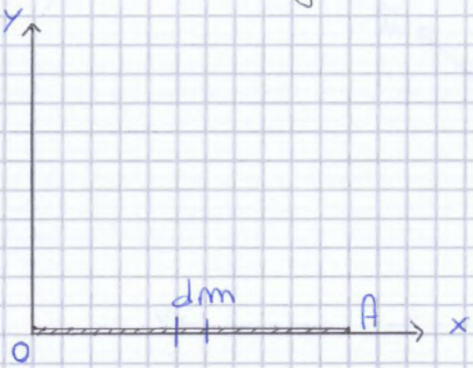
$I_Q\ddot{\theta} = M_Q^k + M_Q^G = -h\theta + mg\ell\sin\theta$ (ℓ = distanza $\overline{QG}$)

nell'oscillatore armonico si ha: $I_Q\ddot{\theta} + h\theta - mg\ell\sin\theta = 0$

per avere stabilità $\rightarrow h > mg\ell$.

Esempi:

① asta, massa m, lunghezza ℓ, omogenea (ρ = cost), $d\tau = dx$:

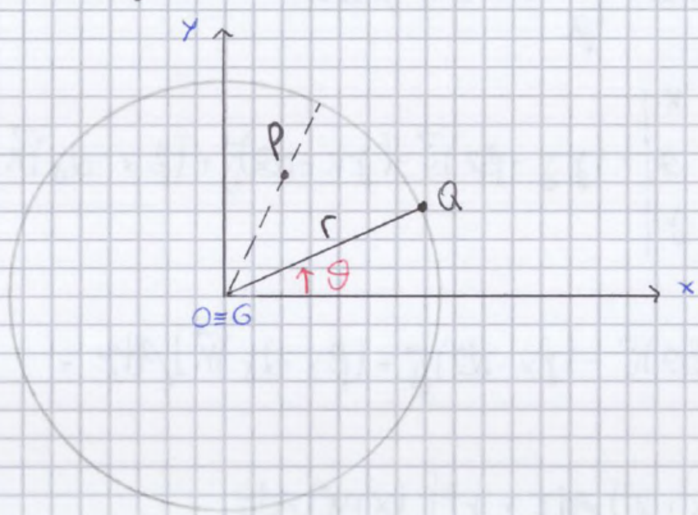


$$I_O = \int_0^\ell \rho x^2 dx = \rho \frac{\ell^3}{3}$$

ma $m = \rho \ell \Rightarrow I_O = \frac{m\ell^2}{3}$ (rispetto all'estremo).

Rispetto al baricentro G: $I_G = I_O - m\frac{\ell^2}{4} = m\frac{\ell^2}{3} - m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{12}m\ell^2$

② disco omogeneo, m, R, ρ = cost, r e θ coord. polari:



$$I_G = \iint \rho r^2 (r d\theta dr) = \quad \text{ma } r d\theta dr = d\tau$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi \frac{R^4}{4} \quad \text{ma } m = \rho\pi R^2$$

$$\Rightarrow I_G = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}mR^2 \quad \text{rispetto ad un punto } G$$

Rispetto ad un punto Q della circonferenza invece:

$$I_Q = I_G + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Matrice di inerzia:

$$I_O = \begin{vmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{vmatrix}$$

simmetrica e definita positiva, allora è diagonalizzabile, allora:

$$I_a = I_O \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Riferimento principale di inerzia: $\vec{e_i} \Rightarrow I_O \vec{e_i} = \lambda_i \vec{e_i}$

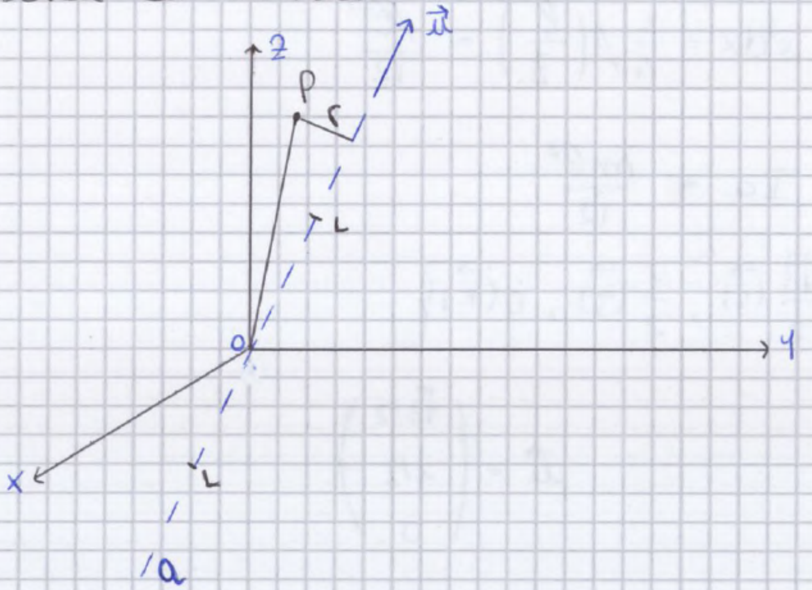
λ autovalore

quindi: $I_a = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z$

se $I_x = I_y$ corpo a struttura giroscopica rispetto a O. Asse z principale di inerzia.

se $O \equiv G$ e $I_x^G = I_y^G$ il corpo è un giroscopio e l'asse z è l'asse giroscopico.

Ellissoide di inerzia:



$$\vec{OL} = \frac{1}{\sqrt{I_a}} \vec{u}$$

$$\begin{cases} x_L = \dfrac{\pm \alpha}{\sqrt{I_a}} \\ y_L = \dfrac{\pm \beta}{\sqrt{I_a}} \\ z_L = \dfrac{\pm \gamma}{\sqrt{I_a}} \end{cases}$$

sostituiamola in $I_a = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z + 2\alpha\beta I_{xy} + 2\alpha\gamma I_{xz} + 2\beta\gamma I_{yz}$

e abbiamo che, semplificando e dopo alcuni passaggi:

$$I_a = I_a x^2 I_x + I_a y^2 I_y + I_a z^2 I_z + 2 I_a xy I_{xy} + 2 I_a xz I_{xz} + 2 I_a yz I_{yz}$$

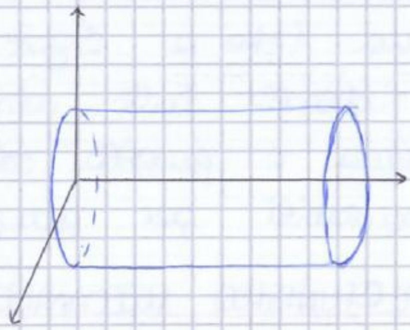
$$\Rightarrow 1 = I_x x^2 + y^2 I_y + z^2 I_z + 2xy I_{xy} + 2xz I_{xz} + 2yz I_{yz}$$: eq. ellissoide (quadrica definita).

ma $I_y = I_z = \frac{m\ell^2}{3}$

allora: $\frac{m\ell^2}{3}(y^2+z^2) = 1$: cilindro!

$y^2+z^2 = \frac{3}{m\ell^2}$ con $R = \sqrt{\frac{3}{m}} \cdot \frac{1}{\ell}$

cilindro a contatto dell' asse x



$|OL| = 2R = \frac{2}{\ell}\sqrt{\frac{3}{m}} = \frac{1}{\sqrt{I_a}} \Rightarrow I_a = \frac{m}{3}\left(\frac{\ell^2}{4}\right) = \frac{1}{12}m\ell^2$

4/04/2014

PRINCIPI DELLA DINAMICA:

Ci occupiamo (dopo la parte di descrizione cinematica) di individuare le cause che producono il moto

PRINCIPIO DI NEWTON

Si postula l'esistenza di un sistema di riferimento inerziale, rispetto a cui il moto di un corpo soddisfa le leggi seguenti:

- LEGGE DI INERZIA (I PRINCIPIO): ogni corpo non sollecitato da alcuna forza permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

(Preciseremo in seguito che sarà sollecitato da un sistema di forze a risultante nulla).

- LEGGE DI AZIONE (II PRINCIPIO): $F = \frac{d}{dt}(mv) = ma$

forza esercitata sul corpo — variazione quantità di moto — proporzionalità tra forza e accelerazione.

- LEGGE DI AZIONE E REAZIONE (III PRINCIPIO): ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

NB: stiamo parlando di accelerazione assoluta rispetto al sistema fisso.

- LAVORO: definito come la quantità scalare

$$dL = \vec{F}\,d\ell = \underbrace{f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz}$$

$d\ell$: spost. effettuato

forma differenziale esatta se è definita una funzione che ne rappresenta il differenziale.

$dL = dU$ per cui $F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$

e $L = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1$: per cui il lavoro di una forza conservativa dipende solo dalle condizioni iniziali e finali

IL LAVORO LUNGO UNA CURVA CHIUSA È NULLO!

- FORZE CONSERVATIVE: sono una sottoclasse importante delle forze posizionali e sono caratterizzate dall'esistenza di una FORZA POTENZIALE $U(xyz)$ costituita con derivate parziali tali che: $F = \nabla U$ ovvero $F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$

per cui si ha che la forma differenziale associata $(f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz)$ è esatta in un opportuno dominio se il campo vettoriale f è irrotazionale ($\text{rot}\, f = 0$), ovvero sono soddisfatte le condizioni di compatibilità:

$$\frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}$$

Alcuni esempi di questo tipo di forze:

- FORZE COSTANTI: $f = f_{ox}(\vec{i}) + f_{oy}(\vec{j}) + f_{oz}(\vec{k})$ dove il potenziale: $U(xyz) = f_{ox}(x) + f_{oy}(y) + f_{oz}(z)$ in particolare la forza peso vale $f = mg = -mg\vec{k}$.

$$L = \int_1^2 f \cdot d\ell = mg \int_1^2 dz = -mg(z_2 - z_1)$$

se le quote di arrivo e partenza sono uguali $\rightarrow L = 0$ $(z_2 = z_1)$

- FORZA ELASTICA: Legge di Hook : $\vec{f} = -k(r - r_0)\vec{u}$ (direzione del versore di allungamento della molla). $k > 0$!

$(r - r_0)$ è l'allungamento rispetto alla lunghezza di riposo della molla r_0 $(r_0 \geq 0)$.

$$U = -\frac{k}{2}(r - r_0)^2$$

così il vettore accelerazione soddisfa le restrizioni imposte al vincolo.

In generale, per un sistema di punti soggetto ad un sistema di forze:

$$m_i a_i = \underbrace{\sum_{j\neq i} f^{I}_{ij}(P_i, P_j, v_i, v_j)}_{\text{FORZE INTERNE}} + \underbrace{\sum_{h} f^{E}_{ih}(P_i, v_i, t)}_{\text{FORZE ESTERNE}} + \underbrace{\sum_{h} \phi_{ih}}_{\text{REAZIONI VINCOLARI}}$$

$\sum_{j\neq i} F^{I}_{ij} = \emptyset$ (nullo), infatti per il principio di azione e reazione le forze interne sono uguali e contrarie a due a due. Sommando ho un sistema di vettori con risultante nulla (e anche con momento risultante nullo).

• SISTEMI DI FORZE: una forza può essere rappresentata con un vettore applicato (P, f) → vettore (forza)

punto di applicazione

Vediamo le operazioni di calcolo vettoriale. La forza tende a muovere un corpo nella direzione della sua applicazione. Retta di applicazione di (P,f) è la retta passante per P e parallela ad f.

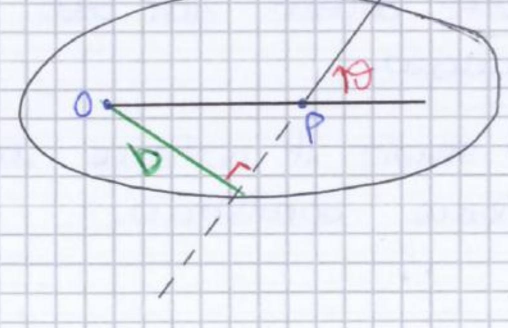
Vale il principio di trasmissibilità per cui la forza può essere applicata in un qualunque punto della retta di azione senza modificare gli effetti risultanti.

Il momento di una forza applicata (P,f) (ed in generale ad un vettore applicato) rispetto ad un polo, è definito come:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{OP}\wedge\vec{F} = bF\vec{K}}$$

braccio del vettore F rispetto ad O

versore ⊥ al foglio con verso dato dalla regola della mano dx

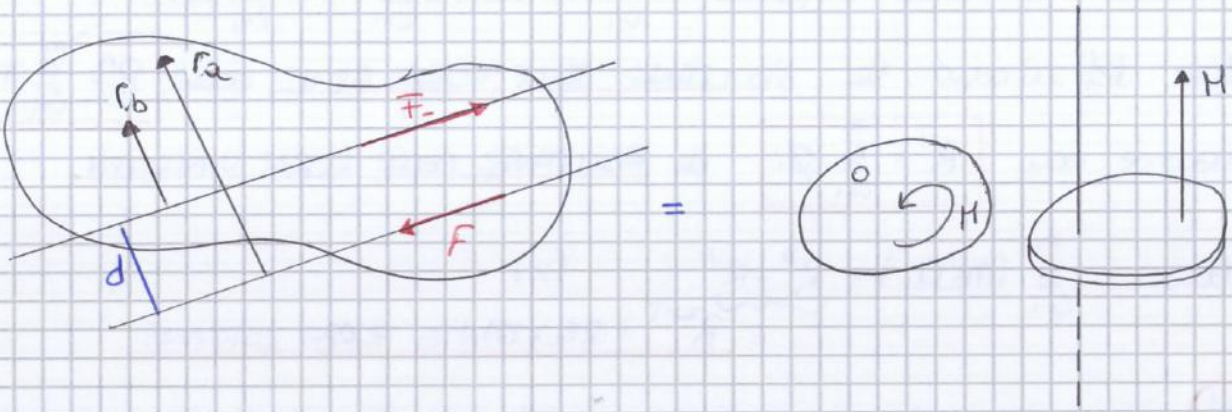


$$\boxed{b = OP\sin\theta}$$

$$|M_O| = |OP|_{\perp}\,|F|$$

braccio: componente $\vec{OP}\perp\vec{F}$

Coppia: sistema di due vettori applicati il cui risultante è nullo. $\{(P_+, F)(P_-, F)\}$ è il momento risultante (essendo un sistema di risultante nullo) e indipendente dal polo scelto.
In pratica si consideremo forze uguali ed opposte non allineate, il loro effetto è quello di far ruotare il corpo.



$\vec{M}$ è un vettore libero infatti dipende dalla intensità e dalle forze applicate ma non dal polo rispetto a cui si calcola:

$$M_O = r_b \wedge (-F) + r_A \wedge (F) = -r_b \wedge F + r_A \wedge F = (r_A - r_b) \wedge F = d \wedge F$$

• LAVORO DI UN SISTEMA DI FORZE CR:

$dL = \sum_{i=1}^{m} (f_i \cdot dP_i)$ se consideriamo il corpo rigido sappiamo che: $dP_i = dQ + \varepsilon \wedge QP_i$ con $\varepsilon = \omega dt$

$$dL = \sum_i (f_i \cdot dQ) + \sum_i (f_i \cdot \varepsilon \wedge QP_i) = R \cdot dQ + \left(\sum_i (QP_i \wedge f_i)\right) \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow dL = R \cdot dQ + M_Q \cdot \varepsilon$$

quindi il lavoro dipende solo dai vettori caratteristici del sistema di forze (e quindi non cambia se si sostituisce un sistema equivalente con gli stessi vettori caratteristici).

Vediamo di scrivere la relazione (2) introducendo una quantità dinamica che è la QUANTITÀ DI MOTO che tiene conto della massa e della velocità ed è una grandezza vettoriale:

$$\boxed{\vec{Q} = \sum_{i=1}^{m} (m_i \vec{v}_i)}$$

Ricordandoci la def. di baricentro: $OG = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (m_i OP_i)}{\sum_{i=1}^{m} (m_i)}$

→ particellare: $OG = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (m_i OP_i)}{m_{TOT}}$

→ continuo: $OG = \dfrac{\int_\beta OP_i \rho d\tau}{\int_\beta \rho d\tau}$

⇒ $mOG = \sum_{i=1}^{m} (m_i OP_i)$ derivandola otteniamo:

$m \dfrac{d}{dt}(OG) = m_i \sum_{i=1}^{m} \left(\dfrac{d}{dt} OP_i \right)$ ma $OG = G - O$

quindi $mv_G = \sum_i m_i v_i = Q$ ⇒ $\boxed{Q = mv_G}$

La quantità di moto di un sistema particellare è data dal prodotto tra m_{TOT} e v_G!

Deriviamo $Q = mv_G \rightarrow \dfrac{dQ}{dt} = m \dfrac{dv_G}{dt} = ma_G$.

d'altra parte derivando la def. di Q abbiamo che:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum (m_i v_i) \right] = \sum_i \left(m_i \frac{dv_i}{dt} \right) = \sum_i (m_i a_i)$$

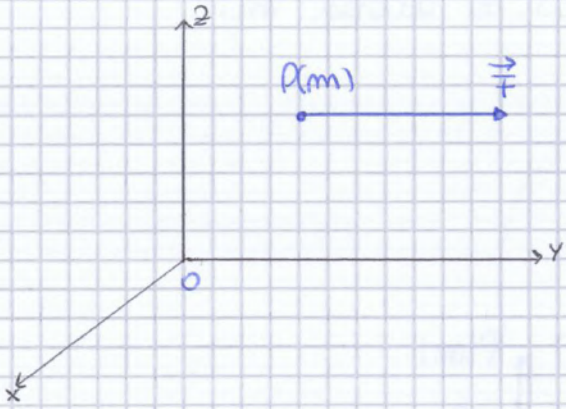
$$\boxed{R^{EXT} = R^A + R^V = \frac{dQ}{dt} = ma_G}$$

1° EQ. CARDINALE DELLA MEC.

ESERCITAZIONE 6.

9/04/2014

• Campi di forze conservative:



$\vec{F} = \vec{F}(P, v, t)$: caso generico

$\vec{F} = \vec{F}(P)$: caso posizionale

Le forze conservative sono casi particolari di forze posizionali e inoltre F è conservativa se: $\vec{F} = \vec{F}(P) = F_x(\vec{i}) + F_y(\vec{j}) + F_z(\vec{k})$ e in più se esiste un $U(xy)$ scalare tale che $\boxed{F = grad(U)}$.

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

con U il potenziale di forze.

In dominio semplicemente connesso in campo conservativo, condizione sufficiente per la conservatività è che:

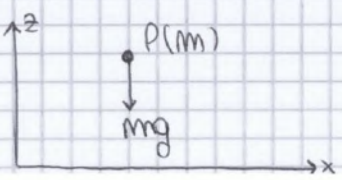
$$dL = F \cdot dP = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = dU.$$

Esempi:

① $\vec{F}$ costante ⇒ non dipende dalla posizione

$\vec{F} = F_x^0(\vec{i}) + F_y^0(\vec{j}) + F_z^0(\vec{k})$, esiste una funzione U tale che $U = grad(F)$? allora $U(xyz)$ del tipo $F_x^0(x) + F_y^0(y) + F_z^0(z) + cost$, questa funzione ammette come gradiente il campo dato ed è arbitraria.
Allora ci sono infinite funzioni che vanno bene al variare della costante arbitraria.

② forza peso: $F = mg$

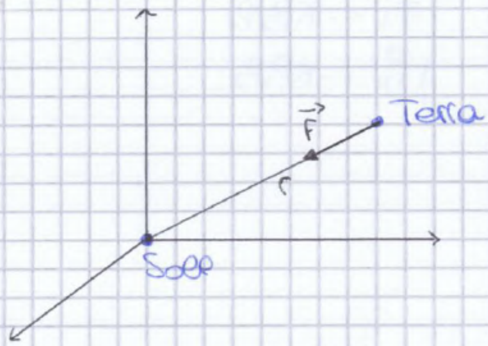


$F = -mg(\vec{k})$

$\Rightarrow U = -mgz + cost.$

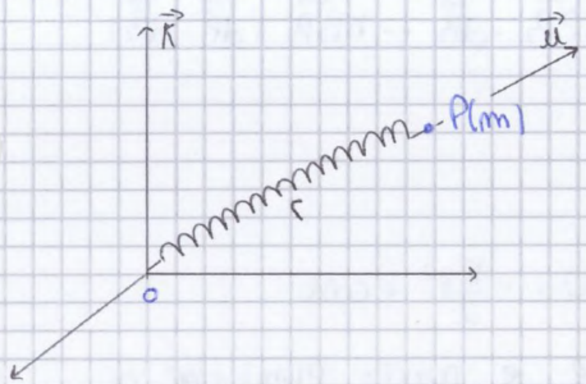
Esempi:

① forza di attrazione gravitazionale: $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\vec{u}$



$$U(r) = \int -\gamma \frac{Mm}{r^2}\,dr = +\gamma \frac{Mm}{r} + cost$$

② forza elastica:



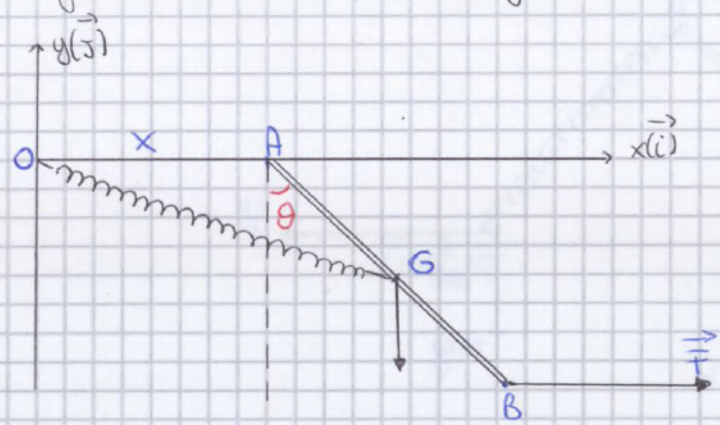
$\vec{F} = -K(OP)$ $(K>0)$

$\vec{F} = -K r \vec{u}$

$$U(r) = \int -Kr\,dr = -\frac{Kr^2}{2} + cost$$

NB Le forze centrali sono conservative!

③ Asta omogenea, massa m, lunghezza ℓ:



coord. libere: x_A, θ

forze applicate: mg, $-KOG$, $\vec{F} = F\vec{i}$

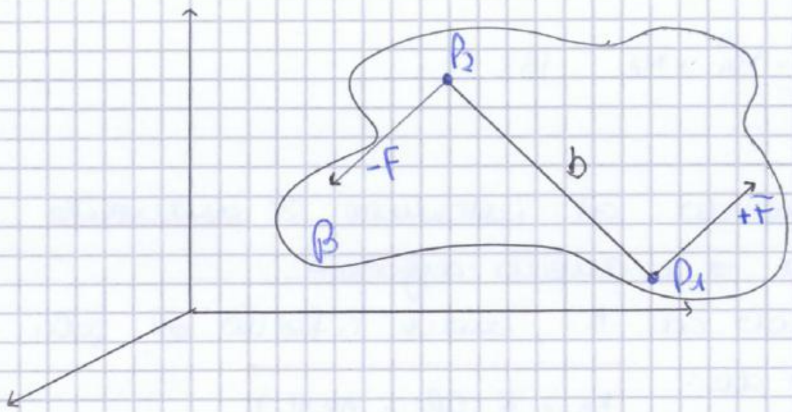
calcoliamoci U:

$$U(x,\theta) = -mgy_G - \frac{K}{2}(OG)^2 + Fx_B + cost$$

$$y_G = -\frac{1}{2}\ell\cos\theta \quad , \quad x_B = x + \ell\sin\theta \quad , \quad (OG)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\ell\sin\theta\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\ell\cos\theta\right)^2$$

$$\Rightarrow U(x,\theta) = \frac{1}{2}m\ell\cos\theta - \frac{1}{2}Kx^2 - \frac{1}{2}Kx\ell\sin\theta + Fx + F\ell\sin\theta + cost$$

⑥ Corpo rigido, mossa $M>0$ costante:



$M = Fb$

$$\begin{cases} dP_1 = v_1 dt \\ dP_2 = v_2 dt \\ \omega = \dot{\vartheta}\vec{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow dL = F\cdot dP_1 - F\cdot dP_2 = F\cdot(v_1 - v_2)dt =$$
$$= F\cdot(v_1 - (v_1 + \omega\wedge P_1P_2))dt = F\cdot(\cancel{v_1} - \cancel{v_1} - \omega\wedge P_1P_2)dt =$$
$$= F\cdot(-\omega\wedge P_1P_2)dt = F\cdot(-\dot{\vartheta}\vec{k}\wedge P_1P_2)dt = F\cdot(-\dot{\vartheta}\vec{k}\wedge b)dt =$$
$$= Fb\dot{\vartheta}dt = Md\vartheta = dL$$

$$\Rightarrow U(x,\vartheta) = \int M\, d\vartheta = M\vartheta + \text{cost.}$$

10/04/2014

I° eq. cardinale: $m_i a_i = F^{EXT} = F^A + F^V = F_i + \phi_i$ (1)

$$\sum m_i a_i = R^{EXT} = R^A + R^V$$

quantità di moto: $\begin{cases} Q = \sum m_i v_i & \text{(sistema discreto)} \\ Q = \int_\beta \rho v\, d\tau & \text{(sistema continuo)} \end{cases}$

$Q = m v_G$ (baricentro)

$\uparrow$

$\sum m_i$

$$\Rightarrow R^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m a_G \quad (2)$$

Relazione di causa-effetto per il moto traslatorio.

Ora andiamo invece a lavorare sul moto rotatorio andando a definire la 2° eq. cardinale.

Partiamo sempre dalla (1) per l'i-esima particella, indipendenti scalari che sono sufficienti a determinare i gradi di libertà.

Allora il moto di un corpo rigido qualunque è descrivibile come somma di un moto traslatorio del baricentro (1° eq. cardinale) e di un moto rotatorio attorno al baricentro (2° eq. cardinale):

$$\sum_i (AP_i \wedge m_i a_i) = \sum_i (AP_i \wedge F_i) + \sum_i (AP_i \wedge \phi_i)$$

$$\uparrow M_A^A \qquad \uparrow M_A^V$$

ottenuta moltiplicando vettorialmente la (1) ($m_i a_i = F_i + \phi_i$) per (AP_i) e sommando: $\sum_i (AP_i \wedge m_i a_i) = M_A^{EXT} = M_A^A + M_A^V$

Analogamente a quanto fatto per passare da (1) a (2), cerchiamo di caratterizzare questa quantità con una grandezza che sia propria del sistema materiale considerato. Introduciamo allora il momento delle quantità di moto o momento angolare come $K_A = \sum_i (AP_i \wedge m_i v_i)$, calcoliamone la derivata:

$$\frac{dK_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i AP_i \wedge m_i v_i\right) = \sum_i \left(\underbrace{\frac{dAP_i}{dt}}_{(v_i - v_A)} \wedge m_i v_i\right) + \sum_i \left(AP_i \wedge m_i \frac{dv_i}{dt}\right) =$$

$$= \sum_i (v_i \wedge m_i v_i) - \sum_i (v_A \wedge m_i v_i) + \sum_i (AP_i \wedge m_i a_i) = 0 - v_A \wedge Q + M_A^{EXT}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_A^{EXT} = M_A^A + M_A^V = \frac{dK_A}{dt} + v_A \wedge Q} \qquad \text{II° EQ. CARDINALE}$$

Valida per un qualsiasi sistema materiale, e qualsiasi scelta del polo arbitrario A.

Disponendo dell'arbitrarietà di A, possiamo far coincidere questo polo (A) con ad esempio il baricentro (G), oppure se esiste un punto (O) che resta fisso durante il moto:

$$\begin{cases} \text{se} \quad A \equiv G \Rightarrow v_A = v_G \rightarrow v_A \wedge Q = v_G \wedge M v_G = 0 \quad (v_G \parallel v_G) \\ \text{se} \quad A \equiv O \Rightarrow v_A = v_O = 0 \rightarrow v_A \wedge Q = 0 \end{cases}$$

Con queste due scelte si annulla il pezzo $v_A \wedge Q$ e allora la II° eq. cardinale diventa: $M_A^{EXT} = \frac{dK_A}{dt}$

(a): $\sum_i (m_i AP_i \wedge v_A) = m AG \wedge v_A$

$$AG = \frac{\sum m_i AP_i}{\sum m}$$

(b): $\sum (m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i)) =$

Introduciamo un sistema di riferimento solidale al corpo rigido con origine in A e assi (e_1, e_2, e_3) che individuano le coord. del punto P_i rispetto a questo sistema di riferimento solidale (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) e analogamente la velocità angolare ω rispetto a questa terna la scriviamo come $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$(AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i)) = \underbrace{\sum_{k=1}^{3} (x_{ik} e_k)}_{AP_i} \wedge \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} (x_{ik} e_k) \wedge \left[(x_{i3}\omega_2 - x_{i2}\omega_3) e_1 + (x_{i1}\omega_3 - x_{i3}\omega_1) e_2 + (x_{i2}\omega_1 - x_{i1}\omega_2) e_3 \right]$$

$$= \dots = \left[\omega_1 (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) - \omega_2 (x_{i1} x_{i2}) - \omega_3 (x_{i1} x_{i3}) \right] e_1 +$$
$$+ \left[-\omega_1 x_{i2} x_{i1} + \omega_2 (x_{i1}^2 + x_{i3}^2) - \omega_3 (x_{i2} x_{i3}) \right] e_2 +$$
$$+ \left[-\omega_1 x_{i3} x_{i1} - \omega_2 x_{i3} x_{i2} + \omega_3 (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \right] e_3$$

moltiplicando per m_i e sommando su tutti gli i, otteniamo:

$$\sum_i (m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i)) = (I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3) e_1 +$$
$$+ (I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3) e_2 + (I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3) e_3$$

dove I_{11}, I_{22}, I_{33} sono i momenti di inerzia del corpo rigido rispetto agli assi (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), quindi:

$$\begin{cases} I_{11} = \sum m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) \\ I_{22} = \sum m_i (x_{i1}^2 + x_{i3}^2) \\ I_{33} = \sum m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \end{cases}$$

e I_{kl} sono detti prodotti di inerzia con:

$$I_{kl} = -\sum_k (m_k x_{kh} x_{lh}) \qquad (k \neq l)$$

Se I_A = cost nel moto considerato: $M_A^{EXT} = I_A \frac{d\omega}{dt} = I_A \dot{\omega}$.

A parità di momento se I_A è grande allora $\dot{\omega}$ è piccolo e se I_A è piccolo allora $\dot{\omega}$ è grande.

La matrice di inerzia è legata alla resistenza del corpo a ruotare!

14/04/2014

Equazioni cardinali della dinamica:

1°) $R^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m a_G$ (3 eq. scalari, 1 eq. vettoriale)

2°) $M^{EXT} = \frac{dK_A}{dt}$ se $A \equiv G$ o $A \equiv O$ (3 eq. scalari, 1 eq. vettoriale).

nel caso di corpo rigido potevamo scrivere $K_A = I_A \omega$ sempre nel caso $A \equiv G$ o $A \equiv O$.

$$K_A = \sum_{k,l=1}^{3} (I_{kl}\, \omega_l\, e_k) = \underline{\underline{I_A}}\, \vec{\omega}$$

versore

$$\underline{\underline{I_A}} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

momenti di inerzia

prodotti di inerzia.

Essendo i prodotti di inerzia simmetrici $I_{kl} = I_{lk}$ per definizione, allora $\underline{I_A}$ è simmetrica. Permette di determinare i momenti di inerzia del nostro sistema rispetto a qualunque asse passante per A. La I_A è simmetrica e definita positiva quindi è diagonalizzabile, cioè:

$$\begin{pmatrix} \neq 0 & 0 & 0 \\ 0 & \neq 0 & 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 \end{pmatrix}$$

usando una terna di autovettori di I_A detta TERNA PRINCIPALE DI INERZIA rispetto agli assi principali di inerzia e i momenti non nulli sulla diagonale sono

Oss: nella derivazione della 2° eq. cardinale dobbiamo supposto che il polo arbitrario fosse solidale al corpo rigido. Cosa fare se vogliamo calcolare il momento della quantità di moto rispetto a $B \neq A$ non solidale al corpo rigido? Usiamo la formula di trasposizione dei momenti angolari:

$$K_B = \sum_h (BP_h \wedge m_h v_h) = \underbrace{\sum_h (AP_h \wedge m_h v_h)}_{K_A} + BA \wedge \underbrace{\sum_h (m_h v_h)}_{Q} =$$

$$BP_h = P_h - B = P_h - A + A - B = AP_h + BA$$

$$= K_A + \underbrace{BA \wedge Q}_{=0 \iff BA \parallel v_G} \qquad Q = m v_G$$

Vediamo ora la derivata del momento della quantità di moto per i corpi rigidi (rispetto a G):

$$\dot{K}_G = \frac{dK_A}{dt} = I_G \dot{\omega} + \omega \wedge I_G \omega$$

Si individuiamo un sistema di riferimento solidale con origine nel baricentro in cui l'osservatore solidale vede il corpo in quiete. Ricordando il risultato di cinematica relativa in cui consideriamo un generico vettore $\vec{c}$ e calcoliamo $\dot{\vec{c}}$ rispetto all'osservatore fisso:

$$\dot{c} = \underset{\text{solidale}}{c'} + \omega \wedge c$$

$$\Rightarrow c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

$$\dot{c} = \underbrace{(\dot{c}_1 e_1 + \dot{c}_2 e_2 + \dot{c}_3 e_3)}_{c'} + \underbrace{(\omega \wedge c_1 e_1 + \omega \wedge c_2 e_2 + \omega \wedge c_3 e_3)}_{\omega \wedge c}$$

quindi: $\dot{c} = c' + \omega \wedge c$ se pongo $c = \omega \Rightarrow \dot{\omega} = \omega' (\omega \wedge \omega = 0)$

quindi: $K_G = I_G \omega$

corpo rigido. Ad esempio la sollecitazione peso applicata a tutto il corpo può essere sostituita dalla risultante applicata al baricentro.

OSS: caso FORZE INTERNE: il sistema delle forze interne è EQUILIBRATO (vettori caratteristici nulli) e può essere trascurato e "sostituito" con un sistema nullo.

La dinamica del corpo rigido non è influenzata in alcun modo dalle forze interne, e le eq. cardinali forniscono tutte le informazioni per determinare la dinamica del corpo rigido.

Per un sistema generico (non rigido) invece sono necessarie, ma non sufficienti, a descrivere il moto e devono essere completate con eq. che dipendono dalle forze interne.

• Corpo rigido nello spazio:
ha 6 gradi di libertà (coord. Lagrangiane) eq. cardinali, sono 2 eq. vettoriali (ovvero 3+3=6 eq. scalari) e permettono di identificare i 6 parametri liberi necessari.

$$q = \bar{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_6)$$

$$R^A + R^V = m a_G(q, \dot{q}, \ddot{q})$$

$$M^A + M^V = \frac{dK_A}{dt} = \sum_K \left(I_{AK}\,\dot{\omega}(p,\dot{p},\ddot{p}) + \omega(p,\dot{p}) \wedge \underbrace{K_A(p,\dot{p})}_{I_A \omega(p,\dot{p})}\right)$$

$A \equiv G$ o $A \equiv O$

dette eq. DI EULERO!

• Corpo rigido nel piano:
3 gradi di libertà: $p = (p_1, p_2, q_3)$.

$$\left.\begin{aligned} R_x^A + R_x^V &= m\ddot{x}_G(p,\dot{p},\ddot{p}) \\ R_y^A + R_y^V &= m\ddot{y}_G(p,\dot{p},\ddot{p}) \end{aligned}\right\} \text{1° eq. cardinale (2 eq. scalari)}$$

$$M_z^A + M_z^V = I_{Az}\dot{\omega}(p,\dot{p},\ddot{p}) \;\}\; \text{(1 eq. scalare)}$$

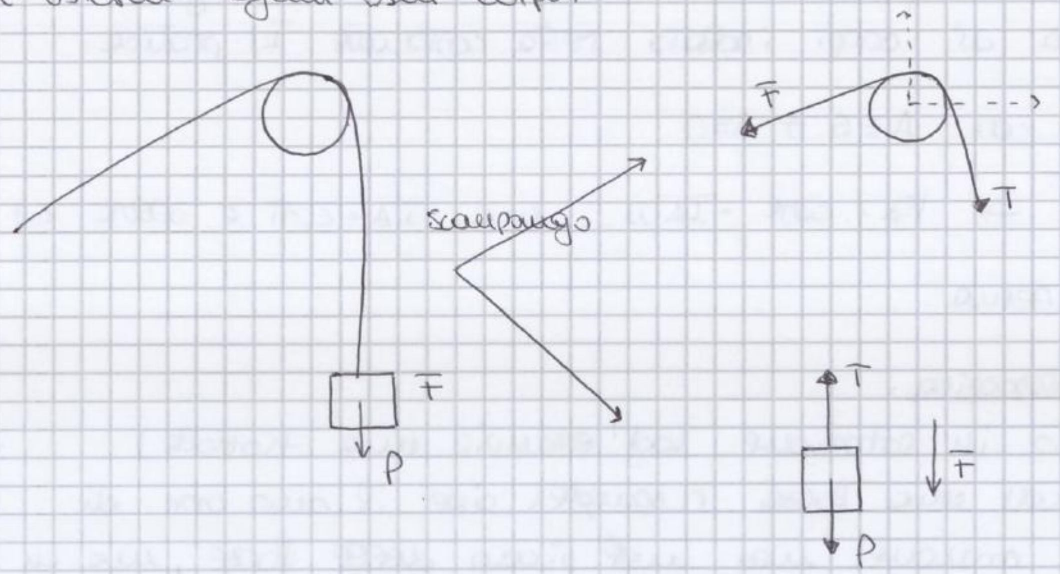
ben posto, ovvero ho esistenza e unicità della relazione (determinismo meccanico). Tuttavia, nel caso di più gradi di libertà (ad esempio un sistema articolato con n parti rigide connesse tra loro) tale processo algebrico che porta alla scrittura di eq. pure in forma normale può essere oneroso.

Si cercheranno altre vie per ottenere le eq. pure senza le reazioni vincolari che a differenza delle forze attive sono incognite.

Le vie possibili sono:
- integrali primi
- eq. cinetica e teorema en. cinetica
- eq. Lagrange
- principio dei lavori virtuali

per casi particolari di vincoli.

NB considerando sistemi articolati, si scompone il sistema considerando il DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO, ovvero isolo tutte le forze esterne agenti sul corpo.



• Integrali primi del moto:

Una funzione $F(P_1, P_2, \dots, P_n, V_1, V_2, \dots, V_m, t)$ è un integrale primo del moto se il suo valore è COSTANTE nel tempo (F è quantità conservata) (naturalmente, condizioni iniziali diverse determinano diversi valori delle quantità conservate).

Dalle eq. cardinali possiamo in alcuni casi ottenere integrali