



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1017

DATA: 14/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Frison

MATERIA: Tecnica delle Costruzioni, 10CFU Esercizi

Prof. Mancini_Allaix

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

TEOREMA DI BETTI:

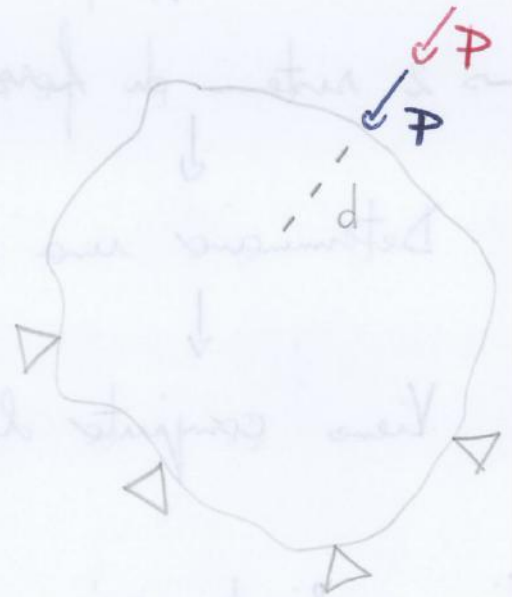
→ LAVORO DI DEFORMAZIONE

SOLIDO ELASTICO → 1° Viene applicata una forza P → Ne consegue una spostamento → Viene creato LAVORO

LAVORO DI DEFORMAZIONE

$$L = \frac{1}{2} P \cdot d$$

Dal teorema di Clapeyron



Viene applicata una 2° forza...
 ↳ si ha un altro lavoro!

$$L = \frac{1}{2} P \cdot d + \frac{1}{2} P \cdot d + P \cdot d$$

1° contributo della forza

2° contributo della forza

LAVORO DIRETTO

LAVORO MUTUO

spostamento del punto di applicazione della 1° forza per effetto della 2° forza.

dato all'intensità di entrambe le forze.

in questo contributo di lavoro, entrano in gioco entrambe le forze. È per questo che non compare il $\frac{1}{2}$.

tp: ELASTICITÀ LINEARE \rightarrow LAVORO DI DEFORMAZ. = $\int_{x_0}^{x_1} F dx$
 che lo stato della struttura alla fine è uguale.

\rightarrow Se i LAVORI DI DEFORMAZIONE sono uguali, lo sono anche i LAVORI MUTUI.

$$L_A + L_B + L_{AB} = L_B + L_A + L_{BA}$$

$$L_{AB} = L_{BA}$$

ENUNCIATO:

Date 2 \neq deformazioni di un solido elastico,
 date a 2 \neq sistemi di forze,
 il lavoro che le forze del 1° sistema compiono qualora
 ai loro punti di applicazione fossero attribuiti gli spostamenti
 che caratterizzano la 2° deformazione,
 è uguale al lavoro che le forze del 2° sistema compiono
 qualora ai loro punti di applicazione fossero attribuiti gli
 spostamenti che caratterizzano la 1° deformazione.

ANALISI:

1° eq.:

carico congiunto dal sistema di forze A.

Il sistema B determina una deformazione →

- assiale
- flessionale
- a taglio

2° eq.: (carico statico invertiti i ruoli)

carico congiunto dal sistema di forze B.

Il sistema A determina una deformazione →

- assiale
- flessionale
- a taglio

TP:

γ_A e $\gamma_B = 0$ che si suppone che non siano presenti cedimenti nella struttura.

$$\int_L N_A \frac{N_B}{EA} dz = \int_L N_B \frac{N_A}{EA} dz \quad \text{implica} \quad \sum F_A \cdot \eta_B = \sum F_B \cdot \eta_A,$$

quindi:

$$L_{AB} = L_{BA}$$

$\frac{\Delta l}{dz}$: variazione di lunghezza della fibra rispetto alla lunghezza dz (piccolo scorcio).

ϵ_z (se moltiplico per il modulo elastico del materiale E , ottengo la rispettiva tensione)

$$\epsilon_z = \frac{\Delta l}{dz} = \frac{\gamma}{-z}$$

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = -\frac{E \cdot \gamma}{z}$$

$$\int_A \sigma_z dA = \frac{E}{-z} \int_A \gamma dA = 0 \quad \text{1° equazione di equilibrio.}$$

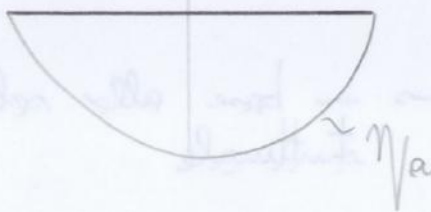
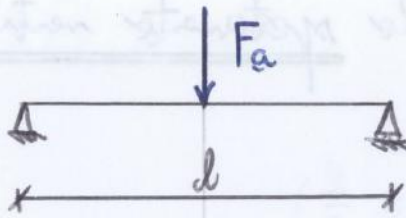
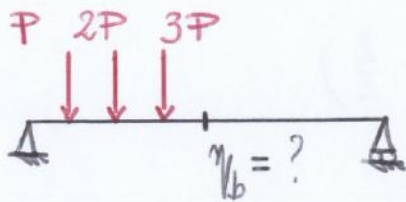
H_p : sforzo normale = 0 (cavo inflesso)
 momento statico = 0 \rightarrow sist. di riferim. γ_z baricentrico

$$I_x = \int_A \sigma_z \cdot \gamma dA = -\frac{E}{z} \int_A \gamma^2 dA \quad \text{2° equazione di equilibrio.}$$

$I_x \rightarrow$ momento baricentrico della sezione.

$$I_x = -\frac{E \cdot I_x}{z}$$

ESERCIZIO: LINEE DI INFLUENZA:



P applicata in $z = \frac{2}{10} l$

P applicata in $z = \frac{3}{10} l$

P applicata in $z = \frac{4}{10} l$

η_b ? \rightarrow potenziale verticale

$\eta_a \left(z = \frac{2}{10} l \right)$

$\eta_a \left(z = \frac{3}{10} l \right)$

$\eta_a \left(z = \frac{4}{10} l \right)$

Γ. Betti : $F_a \cdot \eta_b = \sum F_b \cdot \eta_a$

$0 \leq z \leq \frac{l}{2} \rightarrow M_x = \frac{F_a}{2} \cdot z \rightarrow \frac{d^2 \eta_a}{dz^2} = - \frac{M_x}{EI}$

$\frac{d^2 \eta_a}{dz^2} = - \frac{F_a}{2EI} z$ eq. diff. di potenza

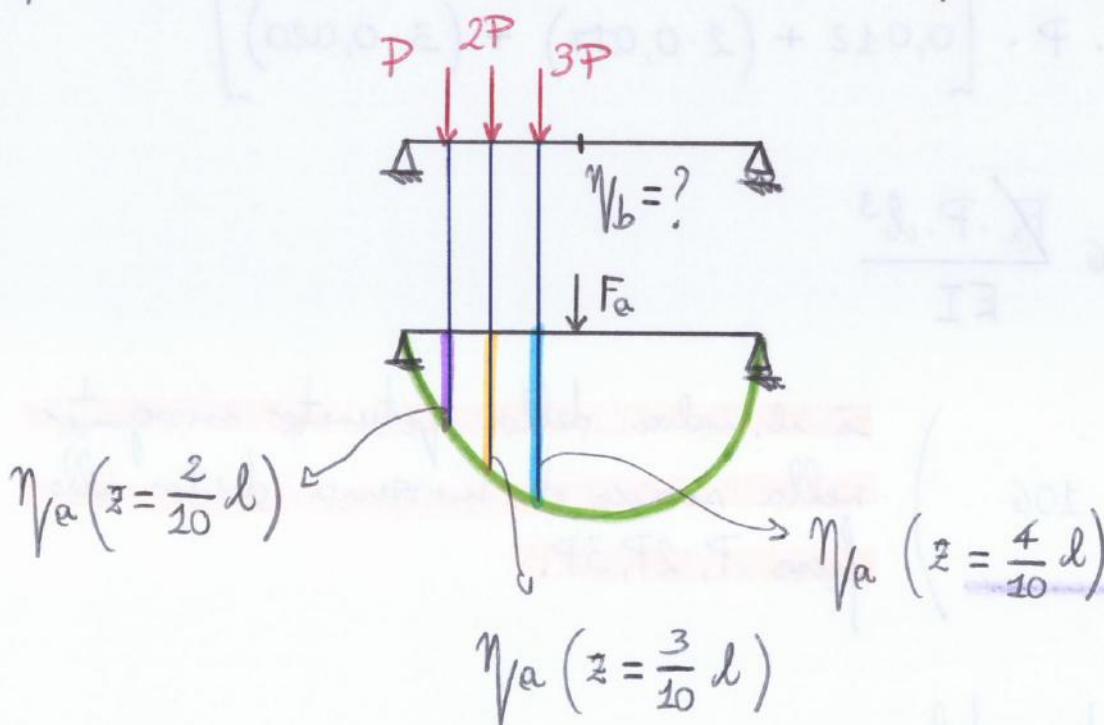
È possibile calcolare η_a nei diversi punti in cui sono applicate le forze $P, 2P, 3P$:

$$\eta_a \left(z = \frac{2}{10} l \right) = \frac{F_a}{EI} \cdot \left(-\frac{(0,2 \cdot l)^3}{12} + \frac{l^2 \cdot 0,2 l}{16} \right) =$$

$$= \frac{F_a \cdot l^3}{EI} \cdot \left(-\frac{0,2^3}{12} + \frac{0,2}{16} \right) = 0,012 \frac{F_a \cdot l^3}{EI}$$

$$\eta_a \left(z = \frac{3}{10} l \right) = \frac{F_a \cdot l^3}{EI} \cdot \left(-\frac{0,3^3}{12} + \frac{0,3}{16} \right) = 0,017 \frac{F_a \cdot l^3}{EI}$$

$$\eta_a \left(z = \frac{4}{10} l \right) = \frac{F_a \cdot l^3}{EI} \cdot \left(-\frac{0,4^3}{12} + \frac{0,4}{16} \right) = 0,020 \frac{F_a \cdot l^3}{EI}$$



$F_a \cdot \eta_b = \sum F_b \cdot \eta_a$ \leftrightarrow Relazione dal teorema di Betti

η_b : EFFETTO INCOGNITO

F_a : SISTEMA ESPLORATIVO

F_b : CAUSA DATA

η_a : FUNZIONE DI INFLUENZA

comporre
lavori
insieme.

\rightarrow lavorare
a coppie

comporre
lavori
insieme.

\rightarrow lavorare
a coppie

Se cambia l'EFFETTO INCOGNITO,
cambia il SISTEMA ESPLORATIVO,
che comporre lavori insieme.

$\hookrightarrow F_a$, quindi, non è presa in modo casuale!

Quindi la scelta del SISTEMA ESPLORATIVO,
dipende dall'EFFETTO INCOGNITO.

ES:

$\eta_b \rightarrow F_a$ (presa casuale)

DEVE ESSERE GENERATO

$\eta_b \rightarrow F_a$ (coppia)

LAVORO

quindi, si ottiene:

$$V_a = V_b$$

→ la spostamento verticale in presenza V_b ,
 uguale alle spostamento V_a in
 corrispondenza della forza F_b .

tutto questo discorso prende il nome:

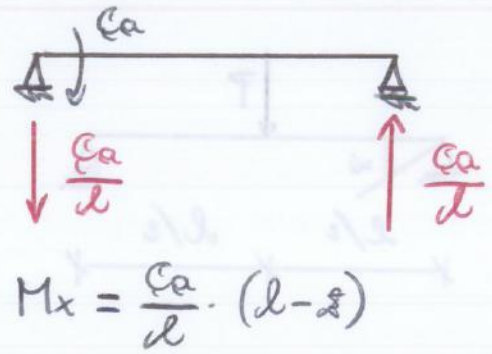
COROLLARIO DI MAXWELL del teorema di Betti.

ESEMPPIO:



Partiamo dall'equazione differenziale della linea elastica:

$$\frac{d^2 W_a}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI}$$



$$\frac{d^2 W_a}{dz^2} = -\frac{C_a}{lEI} \cdot (l-z)$$

$$\frac{d W_a}{dz} = -\frac{C_a}{lEI} \cdot \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) + C_1$$

$$W_a(z) = -\frac{C_a}{lEI} \cdot \left(l \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C_1 \cdot z + C_2 \quad \left(0 \leq z \leq \frac{l}{2} \right)$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} z=0 \rightarrow W_a = 0 \\ z=l \rightarrow W_a = 0 \end{cases}$$

→ C_1, C_2 :

$$z=0 \rightarrow W_a = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$z=l \rightarrow W_a = 0 \rightarrow 0 = -\frac{C_a}{lEI} \cdot \left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} \right) + C_1 \cdot l$$

$$C_1 \cdot l = \frac{C_a}{lEI} \cdot \frac{l^3}{3} \rightarrow C_1 = \frac{C_a \cdot l}{3EI}$$

TEOREMA DI BETTI GENERALIZZATO: Valido per VAZIONE

2) SISTEMI DI AZIONI: (è il caso più generale possibile)

	CAUSE	EFFETTI
SISTEMA a)	F_a	\mathbb{N}_a
	γ_a	E_{ea}
	\bar{E}_a	σ_a

F_a : forze
 γ_a : cedimenti nodali
 \bar{E}_a : deformazione imposta

questo sistema di azioni, determina \rightarrow

\mathbb{N}_a
 E_{ea}
 σ_a

N.B. Non esiste nessun rapporto diretto tra F_a, γ_a, \bar{E}_a e $\mathbb{N}_a, E_{ea}, \sigma_a$

	CAUSE	EFFETTI
SISTEMA b)	F_b	\mathbb{N}_b
	γ_b	E_{eb}
	\bar{E}_b	σ_b

\rightarrow Voglio ricavare una relazione di lavoro...

\rightarrow Scrivo 2 equazioni con il PLV:

1° eq.:

$$\sum F_a \cdot \mathbb{N}_b + \sum R_a \cdot \gamma_b = \int_V \{\sigma_a\}^T \{E_{eb}\} dV + \int_V \{\sigma_a\}^T \{\bar{E}_b\} dV$$

\downarrow Reaz. nodali \downarrow Cedimenti che causano i nodi

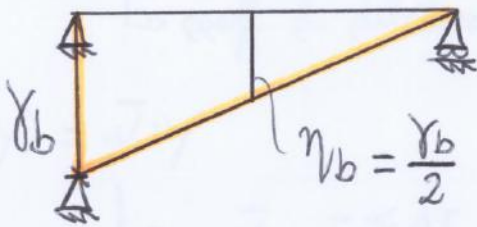
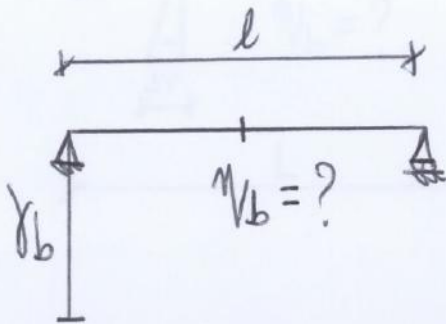
\rightarrow Vettore con le \odot componenti $(3\sigma, 3\gamma)$

SCRITTURA CONCISA

LAVORO DI DEFORMAZIONE ELASTICA

ESERCIZIO:

Calcolo delle spostamenti verticali in materia dovuta ad un cedimento rigolare:



SOLUZIONE
DEL
PROBLEMA

Se il vincolo "cerniera" cede verticalmente ma non può girare e l'asta resta rigidamente intesa al centro di rotazione individuabile nel "canale", che invece non cede.

N.B. Siamo nell'ipotesi di piccoli spostamenti (γ_b piccolo)

Lo per la teoria dell'elasticità lineare \rightarrow per applicare il teorema di Betti

Risultasse con il teorema di Betti generalizzato:

E.I. $\eta_b \rightarrow$ S.E. F_a in materia
↑ stesso
↓ pedice

C.D. $\gamma_b \rightarrow$ F.I. R_a (reazione vincolare)

Equazione in termini di lavoro: $\eta_b \cdot F_a = \gamma_b \cdot R_a$

Segni dell'equazione ??

1) da tabella con matrici.

2) scrivere 2 equazioni con PLV.

Scrive le 2 equazioni con il PLV:

1° eq.: $L \cdot E = L \cdot I$

$$\sum F_a \cdot \eta_b + \sum R_a \cdot \gamma_b = \int_V \{\sigma_a\}^T \{\epsilon_{ab}\} dV + \int_V \{\sigma_a\}^T \{\bar{\epsilon}_b\} dV$$

2° eq.: $L \cdot E = L \cdot I$

$$\sum \cancel{F_b} \cdot \cancel{\eta_a} + \sum \cancel{R_b} \cdot \gamma_a = \int_V \{\sigma_b\}^T \{\epsilon_{ea}\} dV + \int_V \{\sigma_b\}^T \{\bar{\epsilon}_a\} dV$$

↓

$$\int_V \{\sigma_b\}^T \{\epsilon_{ea}\} dV = 0$$

$$\int_V \{\sigma_b\}^T \{\epsilon_{ea}\} dV = 0 = \int_V \{\sigma_a\}^T \{\epsilon_{eb}\} dV \quad \text{per il T. Betti}$$

quindi, dalla 1° equazione si può scrivere:

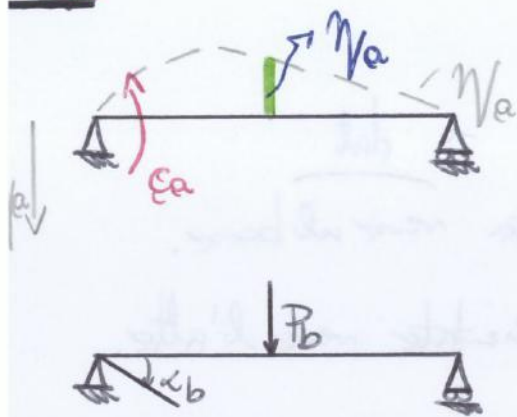
$$\sum F_a \cdot \eta_b = - \sum R_a \cdot \gamma_b \quad \rightarrow \quad \text{X} \quad \underline{\text{X}} \quad \text{che ha una sola forza che agisce e un solo cedimento che crea una sola reazione incidente.}$$

$$F_a \cdot \eta_b = - R_a \cdot \gamma_b$$

LAVORO POSITIVO
LAVORO NEGATIVO

OSSERVAZIONE:

3.1:



? α_a ? \rightarrow in quale verso da assumere?

\bar{E} indifferente...

DIM.

$$\alpha_a \cdot \alpha_b = \ominus P_b \cdot \frac{1}{16} \frac{P_b \cdot d^2}{EI}$$

(...)

$$\alpha_b = \frac{P_b \cdot d^2}{16 EI}$$

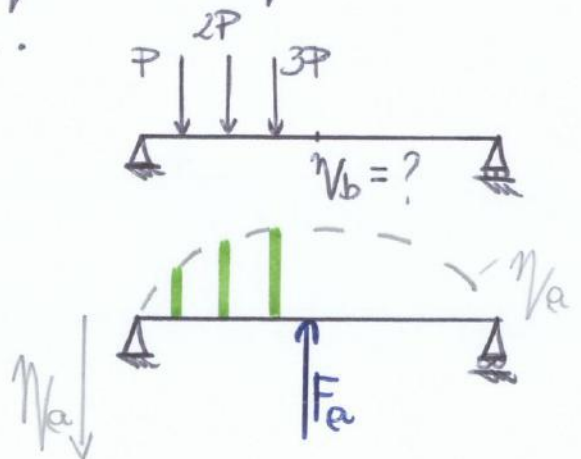
i 2 segni negativi si compensano e quindi vale la stessa relazione.

3.2:

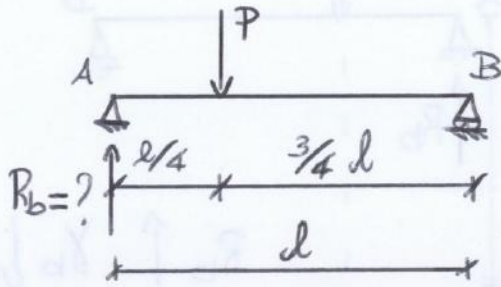
\rightarrow Stessa discorso può essere fatto per d' esempio rete con la F_a come sistema esecutivo...

ā:

- 1) potrebbe essere applicata in un verso.
- 2) deve essere applicata in maniera che li segni N_b
- 3) deve essere una forza verticale, che



SERIZIO :



$R_b = ?$

si può risolvere tranquillamente con 2 eq. di equilibrio.

E.I. $R_b \rightarrow$ S.E. γ_a in A (cedimento)

C.D. $F_b \rightarrow$ F.I. $\eta_a \rightarrow$ Il grafico della F.I. rappresenta la L.I. della reazione R_b (E.I.) per forze verticali F_b (C.D.)

$R_b \cdot \gamma_a = F_b \cdot \eta_a$

Sistema di assi:

a) $F_a = 0$
 $\gamma_a \neq 0$
 $\bar{E}_a = 0$

b) $F_b \neq 0$
 $\gamma_b = 0$
 $\bar{E}_b = 0$

rappresenta P , le note come date.

Equazioni con PLV:

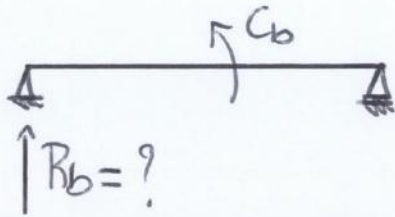
$\cancel{\Sigma F_a \cdot \eta_b} + \cancel{\Sigma R_a \cdot \gamma_b} = \int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \epsilon_{eb} \} dV + \int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \bar{E}_b \} dV$ 1° eq

$\Sigma F_b \cdot \eta_a + \Sigma R_b \cdot \gamma_a = \int_V \{ \sigma_b \}^T \{ \epsilon_{ea} \} dV + \int_V \{ \sigma_b \}^T \{ \bar{E}_a \} dV$ 2° eq

1° eq.: $\int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \epsilon_{eb} \} dV = 0 = \int_V \{ \sigma_b \}^T \{ \epsilon_{ea} \} dV$ per T. Betti

ESERCIZIO:

Classica domanda d'esame
del prof. V. I. Carasso



S.I. $R_b \rightarrow$ S.F. γ_a in A

S.D. $C_b \rightarrow$ F.I. θ_a
(coppie) (rotazioni)
(inaggianti)

$$R_b \cdot \gamma_a = C_b \cdot \theta_a$$

Sistema di assi:

a) $F_a = 0$

$\gamma_a \neq 0$

$\bar{E}_a = 0$

b) $C_b \neq 0$

$\gamma_b = 0$

$\bar{E}_b = 0$

2) eq. con PLV:

$$\cancel{F_a} \cdot \cancel{\gamma_b} + \cancel{\sum R_a} \cdot \cancel{\gamma_b} = \int_V \{C_a\}^T \{E_{eb}\} dV + \int_V \{C_a\}^T \{ \cancel{\bar{E}_b} \} dV$$

$$\underbrace{\sum C_b \cdot \theta_a + \sum R_b \cdot \gamma_a}_{\text{IMP.}} = \int_V \{C_b\}^T \{E_{ea}\} dV + \int_V \{C_b\}^T \{ \cancel{\bar{E}_a} \} dV$$

IMP.!

$$\int_V \{C_a\}^T \{E_{eb}\} dV = 0 = \int_V \{C_b\}^T \{E_{ea}\} dV \quad \text{per T. Betti.}$$

$$- R_b \cdot \gamma_a = - C_b \cdot \theta_a$$

$$R_b \cdot \gamma_a = C_b \cdot \theta_a \quad \rightarrow \quad \theta_a = \frac{\gamma_a}{l}$$

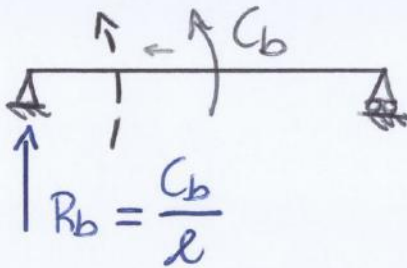
sostituendo, si ottiene:

$$R_b \cdot \gamma_a = C_b \cdot \frac{\gamma_a}{l}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{R_b = \frac{C_b}{l}}$$

lo stesso risultato si può verificare con le equazioni di equilibrio.

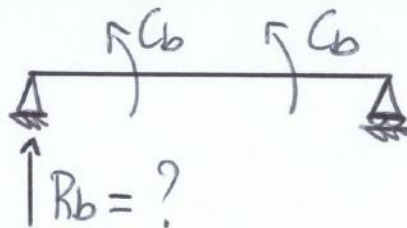
N.B.



Se ruota la coppia, la reazione risultante è sempre la stessa!

DOMANDA:

Se ho 2 coppie ruotanti che agiscono in 2 pti diversi?
 (C_b)



? R_b ?

B. Se passò da una configurazione 1 (struttura iperstatica e trave continua) ad una configurazione 2 (struttura isostatica) non avrà più tratti rettilinei, ma tratti curvilinei.

I. $M_b \rightarrow S.F. d\theta_a$

D. $P_b \rightarrow F.I. \mathbb{N}_a$ (deformata)

Il grafico di \mathbb{N}_a (F.I.) è la linea di influenza del momento flettente M_b incognita nella sezione C (E.I.) per forze verticali (C.D.)

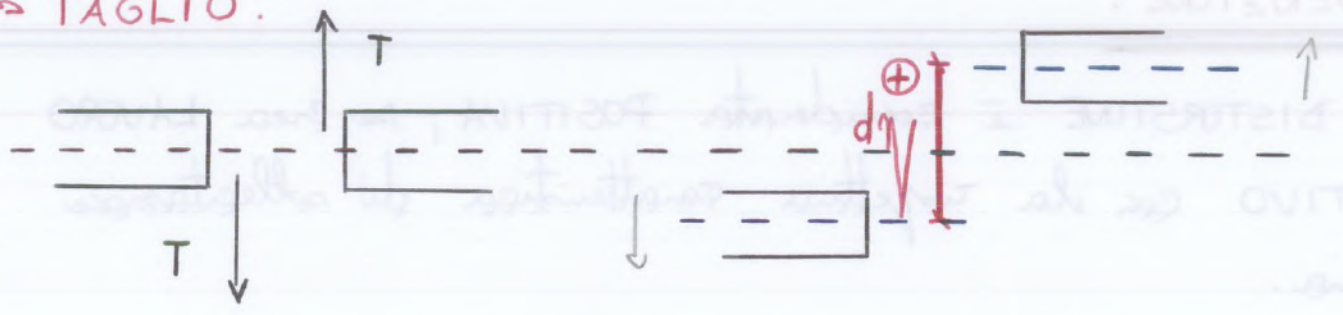
In che modo andiamo a scegliere la rotazione relativa $d\theta_a$?

$d\theta_a$ è una rotazione relativa che può essere definita in termini generali come una DISTORSIONE NEGATIVA

è un momento relativo
 pensato da una rotazione:
 (nel caso del momento flettente è una curvatura).



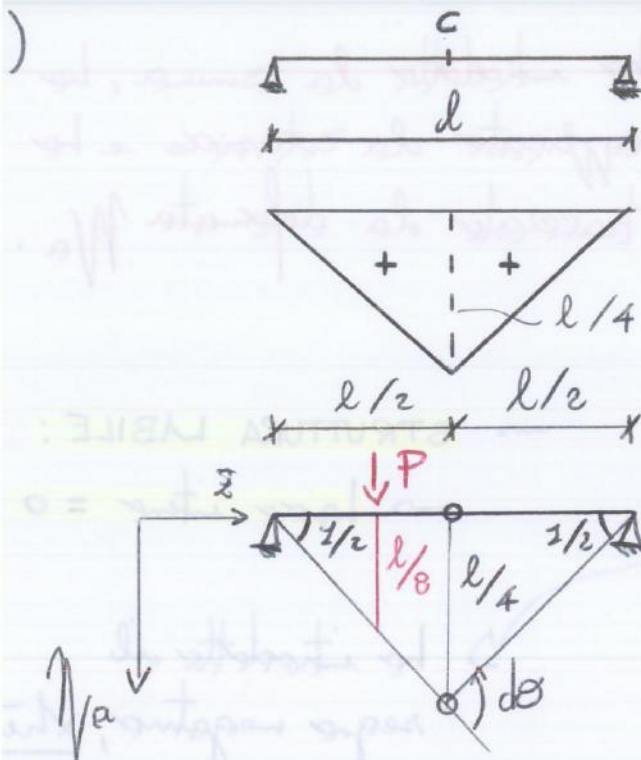
→ TAGLIO:



→ SFORZO NORMALE:



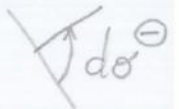
SEMPI:



L. I. M_c per forze verticali.
(con metodo diretto)

L. I. M_c per forze verticali.
(con introduzione della cerniera)

- 1 STR. ISO
- 2 STR. LABILE
- 3 DISTORS. NEGATIVA



Il diagramma tracciato è una deformata, un diagramma di spostamenti verticali.....

Quanto vale l'ordinata della linea di influenza ??

8 può essere scelta in modo arbitrario!

5. un valore unitario $\rightarrow dP = 1$

AVORO NEGATIVO.

ORDINATA: $l/2 \cdot \frac{1}{2} = l/4$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mc due a forza da forza } P \\ \text{Mc} \cdot \frac{1}{dP} = P \cdot \frac{l}{8} \\ \text{Mc} = P \cdot \frac{l}{8} \end{array} \right\}$$

RICORDA:

a scelta di una relazione unitaria, è adatta per i calcoli, per le linee di influenza valgono per elasticità lineare, quindi nel campo dei piccoli spostamenti e deformazioni.

è la delle forze che agiscono dall'alto verso il basso, in una
 ipotesi di struttura in cui lo spostamento è positivo, anche una
 linea di influenza positiva; che mi permette di comprendere che
 la sollecitazione è positiva, che ha LAVORO POSITIVO.

Quindi ragionare sul **segno del LAVORO**, che ha la CARATT. DI SEGNO
 dipende da relazioni legate ad esso, quindi il suo segno dipende
 dal segno del LAVORO.

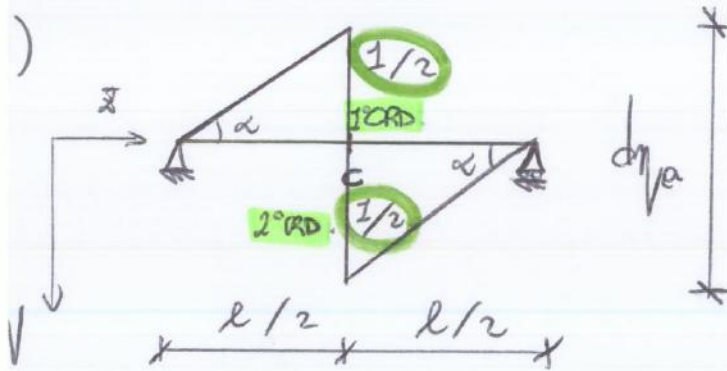
SEGNO CARATT. DI SOLLECITAZ. (SEGNO DEL LAVORO)



in questa modo comprende come **DISTRIBUIRE I CARICHI** considerando
 la condizione peggiore (più gravosa).

OSSERVAZIONI:

L.I.Tc



$$d\eta/a = 1^{\circ} \text{ORD.} + 2^{\circ} \text{ORD.} = 1$$

(somma di 2 spostamenti)

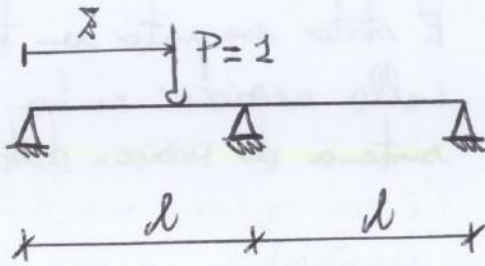
I 2 spostamenti verticali (ordinate)
 sono uguali, che
 abbiamo scelte di
 trazione da L.I. in
 tensione.

Questo è un caso particolare, ma è sempre così

PRINCIPIO DI RECIPROCIITÀ DI

LAND - COLONNETTI :

Consideriamo una trave a 2 campate soggetta ad una forza verticale applicata nella 1° campata:



L.I. di caratteristiche di sollecitazione per forze verticali.

Il grado di iperstaticità di una trave continua, caricata da sole forze verticali, è uguale al N° di appoggi interni.

↳ 1 volta IPERSTATICA.

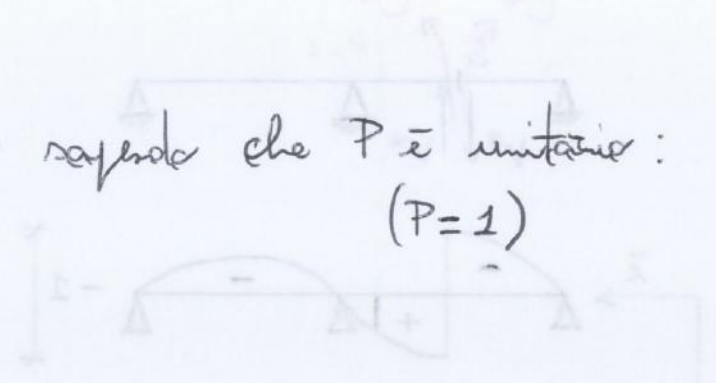
→ Quindi è un metodo che può essere impiegato per le strutture iperstatiche.

Quindi:

-ab = lavoro che le forze e coppie del sistema a esercitano per gli spostamenti dei due punti di applicazione valutati sul sistema b.

$M_s \cdot 1 = P \cdot W_b \rightarrow$ sapendo che P è unitario:
 $(P=1)$

$M_s = W_b$



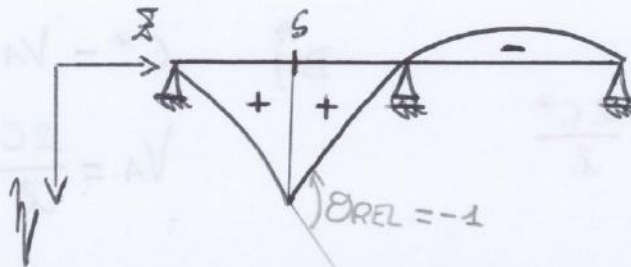
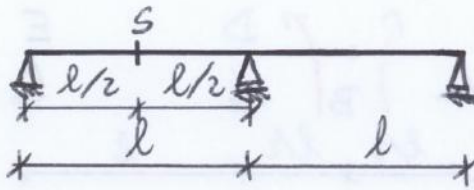
la L.I. M_s max è altro che la deformata della struttura ottenuta dopo aver applicato nella sezione S un sistema di azioni distanti che vai da duego ad una rotazione unitaria e negativa.

ESPRESSIONE ANALITICA DEL MF della L.I. :

I. Ms.

ANDAMENTO

QUALITATIVO :



EQUAZIONE ANALITICA :

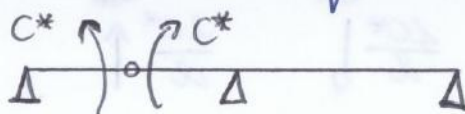
(I) ROTAZ. UNIT. NEG.

(NO) SPOSTAM. VERT. REL.

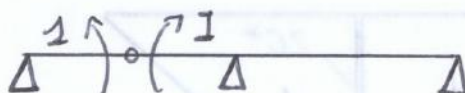
Nell'Hp di hand - Calometri si effettua un taglio in S e V^* senza per non avere spostamenti verticali relativi.

Adesso, inserendo una camera e non applicando più un taglio nella sezione, posso non avere più V^* , tanto non mi serve

SISTEMA 0)



SISTEMA 1)



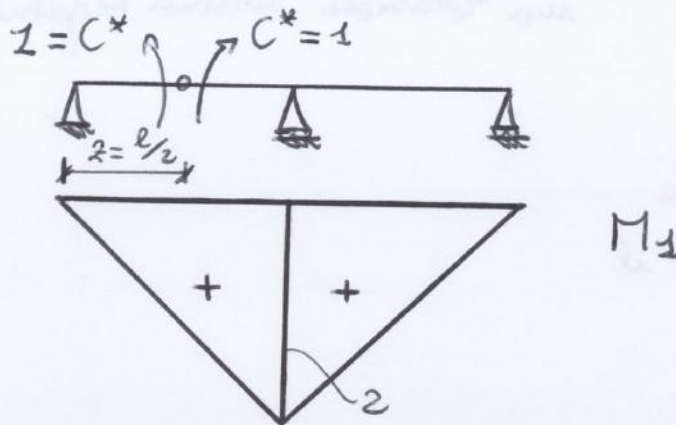
→ he applicate 2 coppie unitarie in corrispondenza della camera.

Applica il PLV: L.E. = L.I.

$$1 \cdot (-1) = \int_0^{2l} M_0 \frac{M_1}{EI} dx$$

M_0 : diagramma di M.F. dato alle 2 coppie C^*
 M_1 : diagramma di M.F. dato alle 2 coppie 1

Sistema 1) Trattare il diagramma di momento flettente del sistema σ , quello del sistema 1 è analogo, solo per $C^* = 1$.



→ Ora è possibile sviluppare e applicare la relazione:

$$1 \cdot (-1) = \int_0^{2l} M_0 \frac{M_1}{EI} dz$$

$$\int_0^{2l} M_0 \frac{M_1}{EI} dz = 2 \int_0^l M_0 \frac{M_1}{EI} dz = \rightarrow \text{Xhe il diagramma è simmetrico!}$$

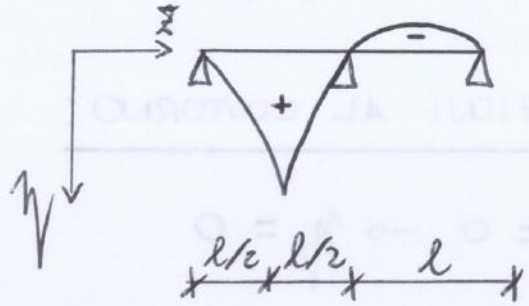
e utilizzando la formula di Simpson, si ottiene:
 ? Quale è? → SdC?

$$= 2 \frac{l}{6EI} \left[M_0(z=0) \cdot M_1(z=0) + 4 M_0(z=l/2) \cdot M_1(z=l/2) + M_0(z=l) \cdot M_1(z=l) \right]$$

$$= \frac{l}{3EI} (4C^* + 2 \cdot 2C^*) = \frac{8}{3} \frac{C^* l}{EI}$$

EQUAZIONE ANALITICA DELLA DEFORMATA DELLA STRUTTURA
SOGGETTA ALL'AZIONE DELLE 2 COPPIE C^* :

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{M_0}{EI} = \frac{2C^*}{lEI} \cdot z$$



$$0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

→ integro una volta, ottengo da rotazione:

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{C^*}{lEI} \cdot z^2 + C_1$$

→ integro ancora una volta, ottengo gli spostamenti:

$$\eta = \frac{C^*}{lEI} \frac{z^3}{3} + C_1 \cdot z + C_2$$

$$\frac{l}{2} \leq z \leq l$$

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{C^*}{lEI} z^2 + C_1 \quad (\text{da curvatura a rotazione})$$

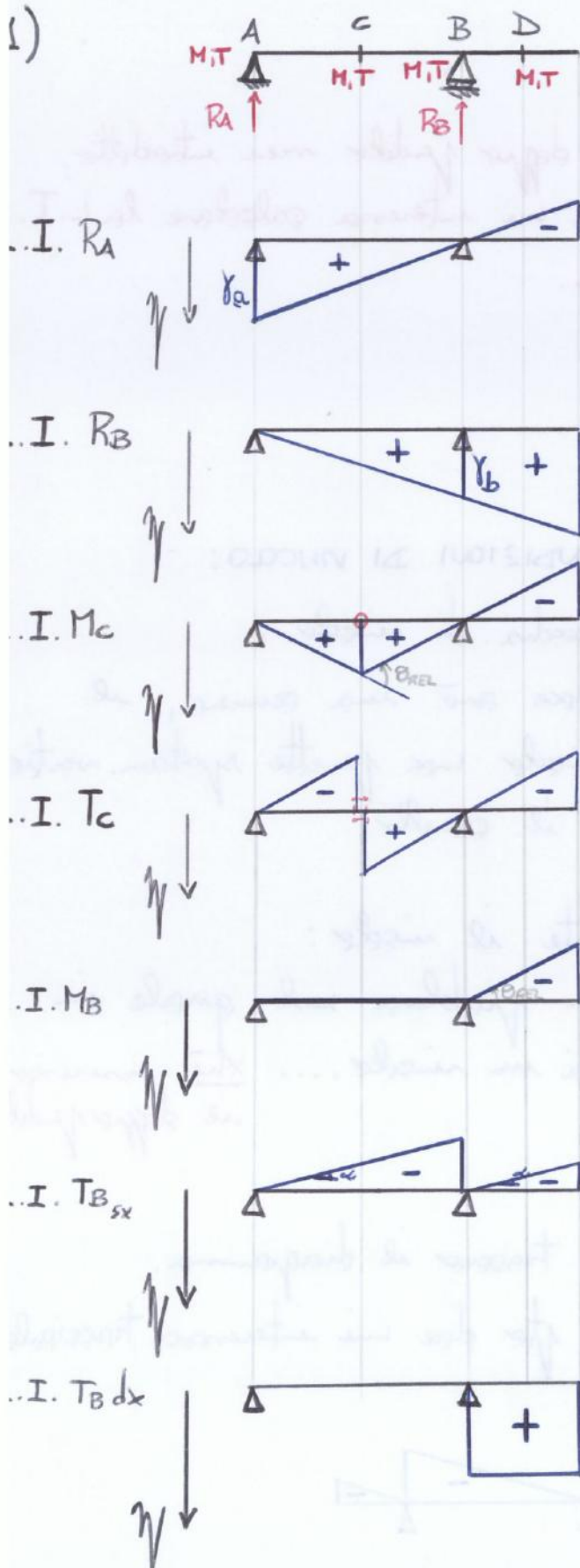
$$\eta = \frac{C^*}{lEI} \frac{z^3}{3} + C_3 \cdot z + C_4 \quad (\text{da rotazione a spostamenti})$$

si hanno 4 COSTANTI DI INTEGRAZIONE \neq !

ESERCIZI SULLE L.I. per forze verticali:

TRACCIAMENTO QUALITATIVO

TIPOLOGIA D'ESAME:



LA STRUTTURA È ISOSTATICA, DEGRADANDO UN VINCOLO, DIVENTERÀ LABILE ..., QUINDI AURÒ TUTTI TRATTI RETTILINEI!

Ho un cedimento di verso opposto alla forza per creare la zona negativa.

Ho un cedimento di verso opposto alla forza per creare la zona negativa.

Introduco una cerniera e imposto la rotazione negativa.

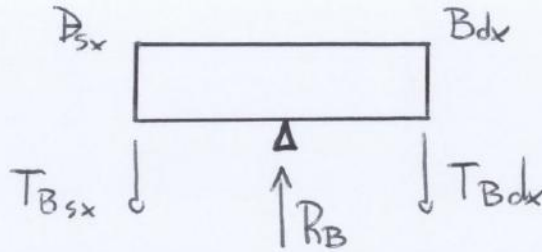
Introduco un doppio zoccolo nel pte che mi interessa traccio la L.I.T e applico una spostam. relativa verticale unitaria e negativa.

TRATTO \overline{AB} lungo da trarre, perché devono essere rispettate le condizioni di vincolo.

A differenza del caso del M.F. in cui è presente continuità di momento quando sono presenti eselli intermedi su travi continue, occorre calcolare per il taglio, da L.I. a dx e dell'appoggio intermedio.

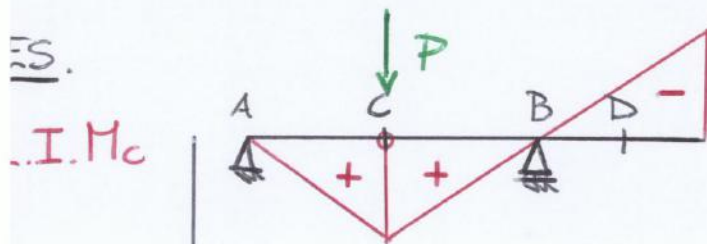
3) Perché su travi che presentano appoggi intermedi, deve calcolarsi 2 L.I. del taglio??

Chè la reazione e le 2 forze si fanno equilibrio!

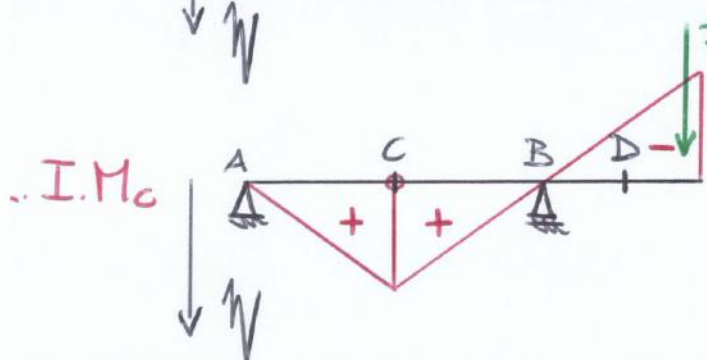


4) IMPORRE UN CEDIMENTO, È COME TOGLIERE UN VINCOLO NEL PTO IN CUI SI È APPLICATO! e quindi ha un capo rigido che resta liberante!

5) LA L.I. È MOLTO COMODA PER SAPERE IL SEGNO DI M.F. NELLA CAMPATA DOVE È APPLICATA LA FORZA.



① M_c^+ , Chè segue il segno della L.I.

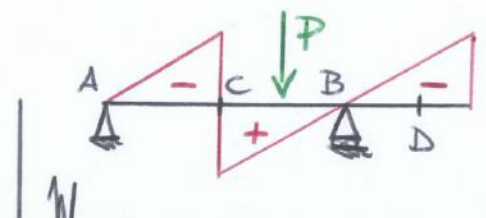


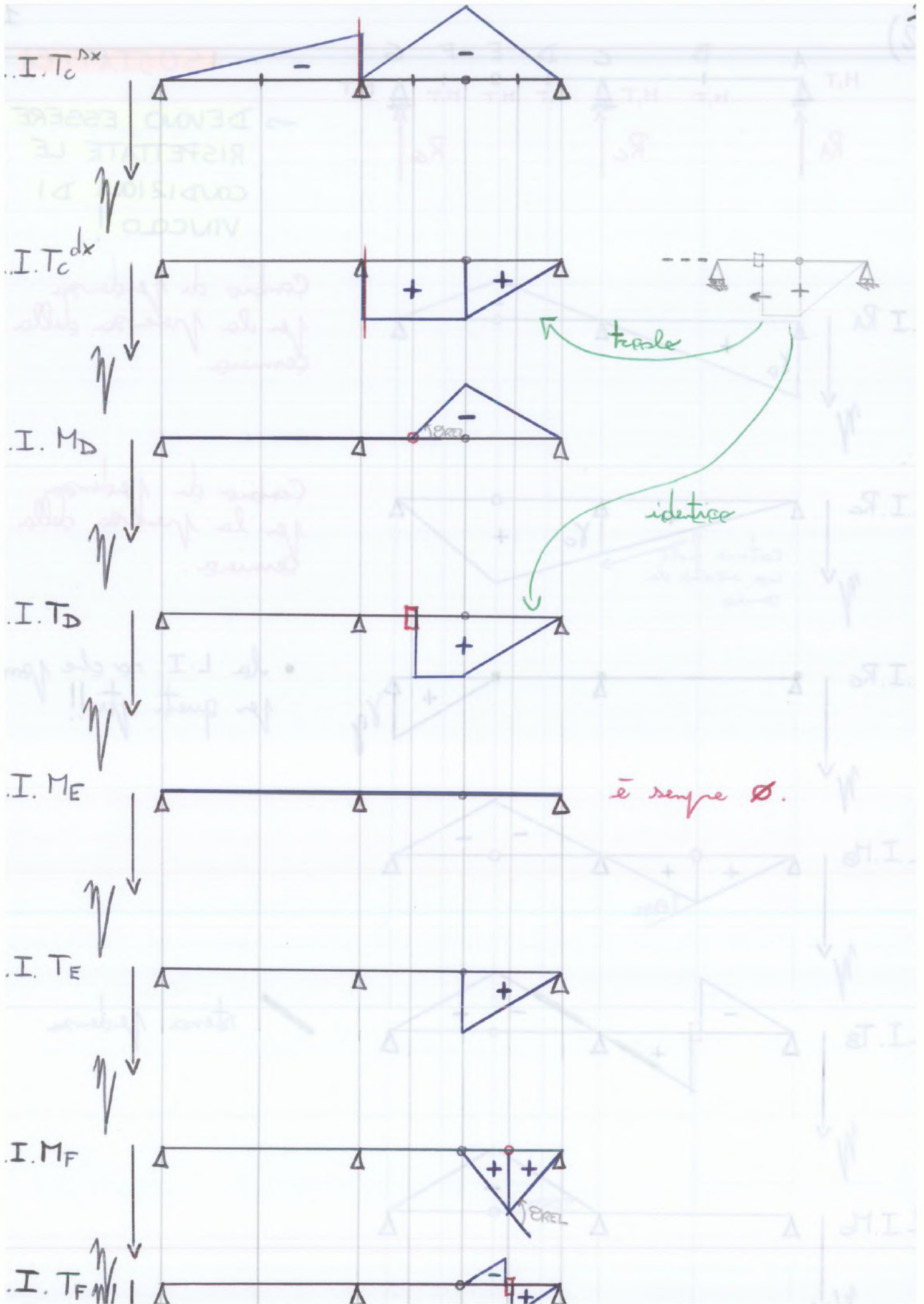
② M_c^- , Chè segue il segno della L.I.

LO STESSO PRINCIPIO VALE PER IL TAGLIO:

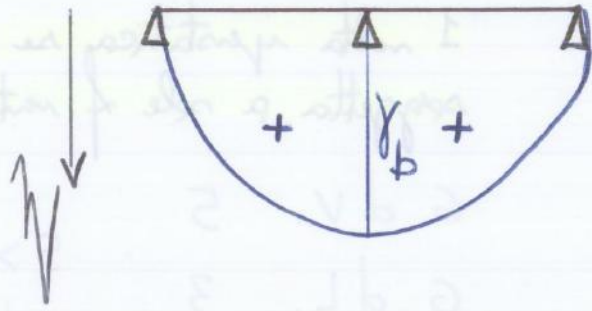
L.I.Tc

T_c^+

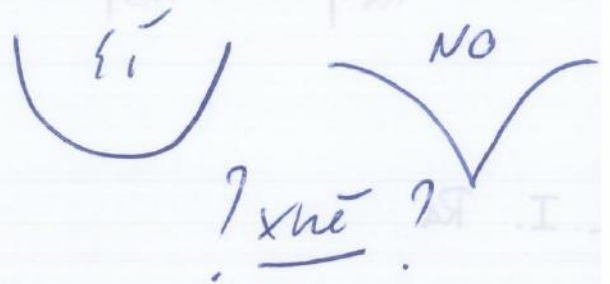




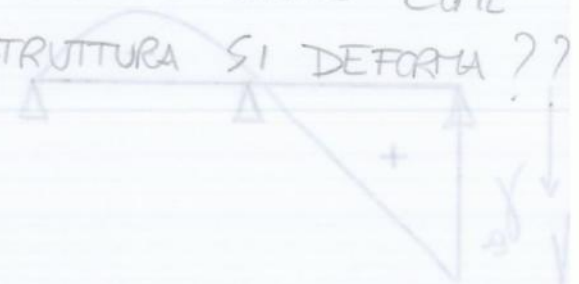
I. R_B



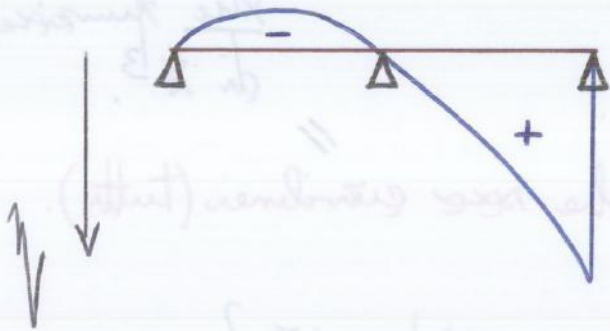
? Come faccio a comprendere
 che non è fatta da concavità



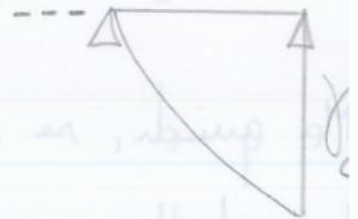
?? DEVO IMMAGINARE COME
 LA STRUTTURA SI DEFORMA ??



I. R_C



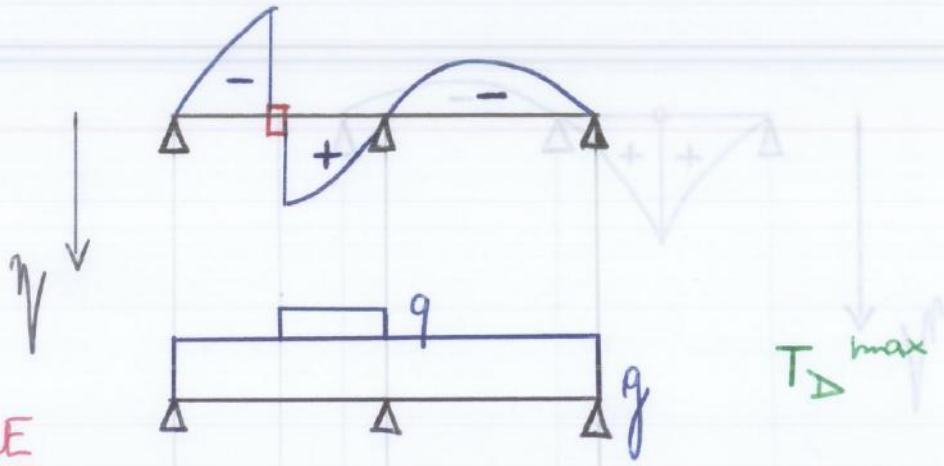
? xhe la concavità
 non dovrebbe essere
 così?



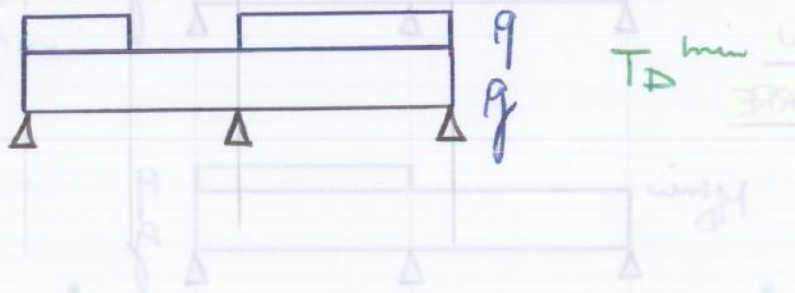
Quante volte ciascuna ordinata ??

Bisogna risolvere il problema con le equazioni per sapere,
 precedentemente fatto come nelle ultime esercitazioni.

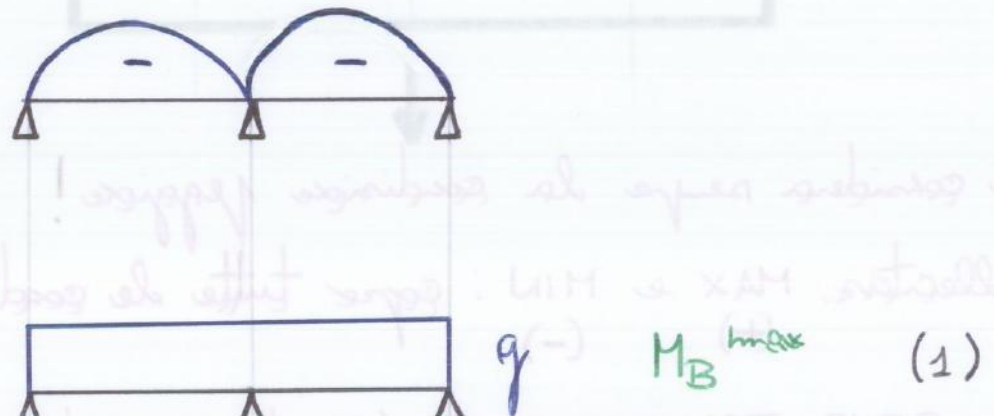
..I. T_D



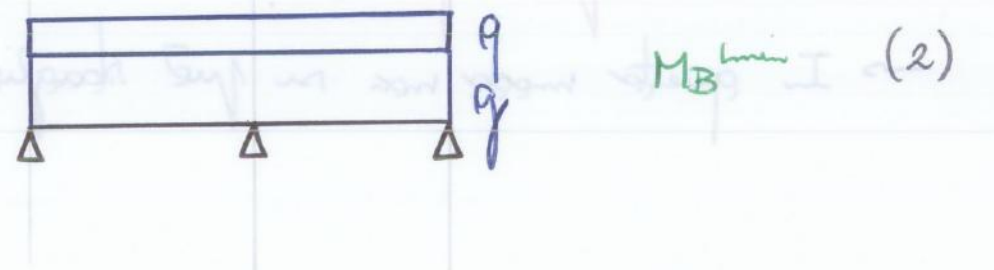
DISPOSIZIONE
DEI CARICHI:



..I. M_B



DISPOSIZIONE
DEI CARICHI:



1) Applicare solo q , max q , x h all'interno scesi a sfasce di sicurezza.

nel seguente caso, si potrebbe impiegare solo il caso (2), perché

LINEE DI INFLUENZA (COMPLETO)

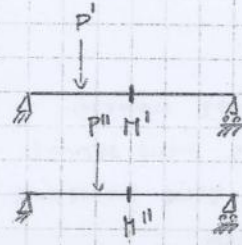
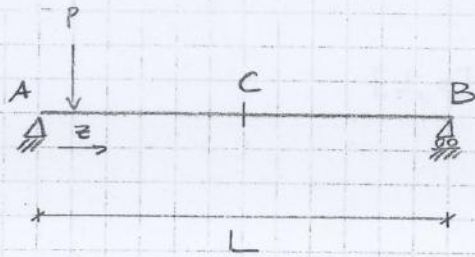
P.A.

LA STRUTTURA DEVE ESSERE DIMENSIONATA IN BASE AL TIPO DI AZIONI ALLE QUALI ESSA SARÀ SOGGETTA DURANTE IL SUO ESERCIZIO. LE AZIONI SONO PERMANENTI E VARIABILI:

PERMANENTI: PESO PROPRIO

VARIABILI: VENTO, NEVE, CARICO DI PERSONE

MA NEL TEMPO
MA NELLA POSIZIONE



SI PROGETTA ALLA CONDIZIONE PIÙ GRAVOSA PER LA STRUTTURA

LA LINEA DI INFLUENZA DI UN DETERMINATO EFFETTO (SPOSTAMENTO IN TERMINI GENERALI, REAZIONE VINCOLARE, CARATTERISTICA DELLA SOLLECITAZIONE) È UN DIAGRAMMA LE CUI ORDINATE, LETTE SOTTO LE DIVERSE POSIZIONI DEL CARICO, RAPPRESENTANO IL VALORE DELL'EFFETTO INDOTTO DA UN CARICO MOBILE UNITARIO.

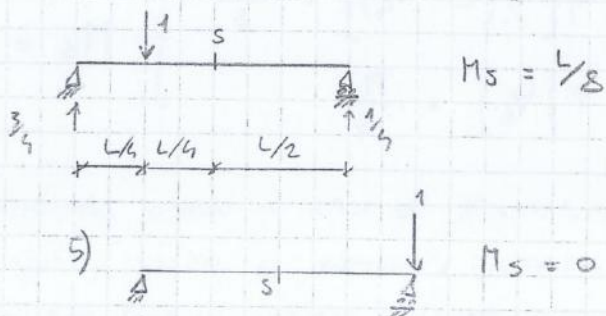
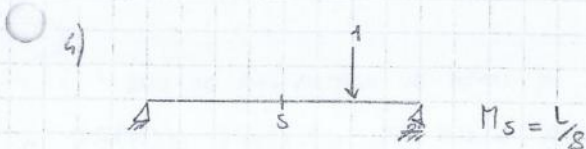
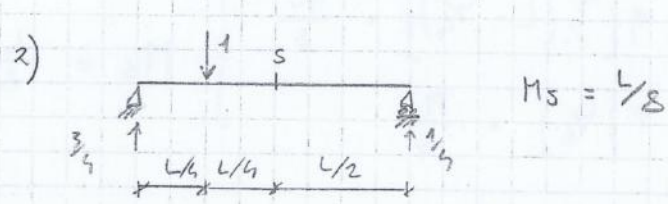
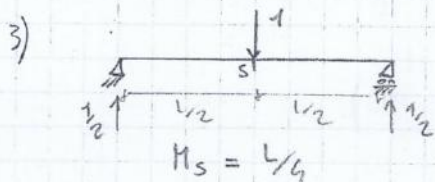
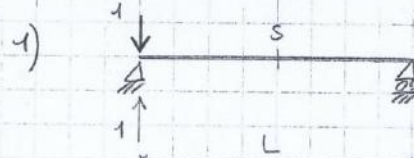
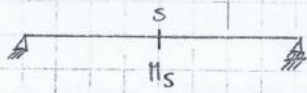
ESEMPPIO 1: L.I. SPOSTAMENTO VERTICALE IN UNO DEI

ESEMPPIO 2: L.I. REAZIONE VERTICALE IN A → SPECIFICAZIONE SEMPRE } EFFETTO POSIZIONE

ESEMPPIO 3: L.I. MOMENTO FLETTENTE NELLA SEZIONE C

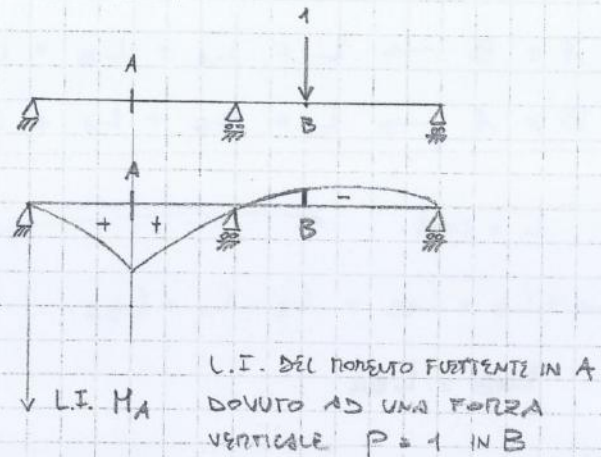
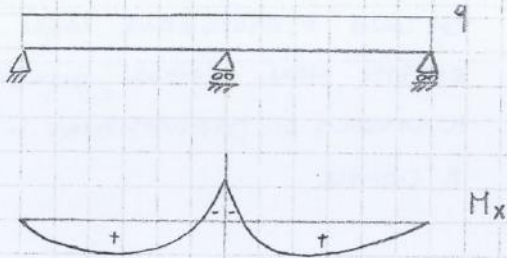
ESERCIZIO 1

L.I. MOMENTO SOLLECITAZIONE M_S NELLA SEZIONE SI



I METODI DIRETTI PER LA DETERMINAZIONE DELLE L.I. FUNZIONANO SOLO PER STRUTTURE SEMPLICI; PER STRUTTURE COMPESSE SI USANO I METODI INDIRETTI.

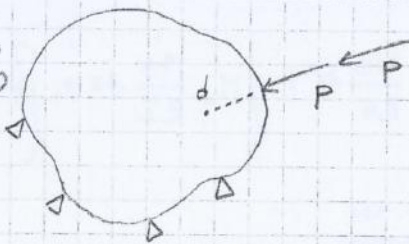
IX ESERCITAZIONE (23/4/2013)



IL DIAGRAMMA DI MOMENTO FUZZIENTE E QUELLO DELLA LINEA D'INFLUENZA SI TACCIANO SEGUENDO PROCEDIMENTI DIVERSI; INOLTRE IL DIAGRAMMA DELLA LINEA D'INFLUENZA E' UNICA PER UNA STESSA SEZIONE DELLA STRUTTURA (\neq CARICO), MENTRE IL DIAGRAMMA DI MOMENTO FUZZIENTE VARIA IN BASE ALLA DISTRIBUZIONE DEL CARICHI.

TEOREMA DI BETTI (LAVORO DI DEFORMAZIONE)

SOLDO ELASTICO VINCOLATO



PER VIA DELLO SPOSTAMENTO d DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA P SI HA UN LAVORO DI DEFORMAZIONE PARI A $\frac{1}{2} P \cdot d$
di CAPEYRON

SE SI APPLICA UNA SECONDA FORZA P E CONSIDERIAMO I DUE CONTRIBUTI SEPARATI AL LAVORO DI DEFORMAZIONE AVREMO:

$$L = \frac{1}{2} P \cdot d + \frac{1}{2} P \cdot d + P \cdot d$$

CONTRIBUTO DELLA 1° FORZA PER SPOSTAMENTO DEL SUO PUNTO DI APP.
 CONTRIBUTO DELLA 2° FORZA PER SPOSTAMENTO DEL SUO PUNTO DI APP.

LAVORO MUTUO

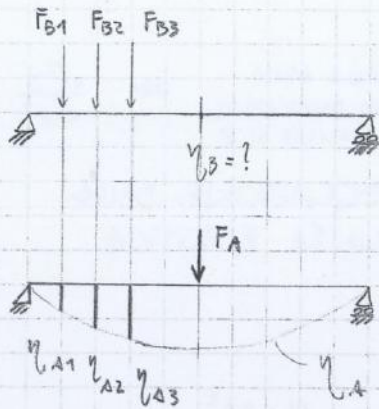
$P = 1^{\circ}$ FORZA
 $d =$ SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA 1° FORZA PER EFFETTO DELLA 2° FORZA

LAVORO DIRETTO (SI CONSIDERANO I DUE CONTRIBUTI ISOLATI)

QUINDI $L = 2P \cdot d$

IL PRINCIPIO DI SOVRAPPORZIONE DEGLI EFFETTI NON PUO' ESSERE APPLICATO AL LAVORO DI DEFORMAZIONE

ESEMPIO:



SISTEMA DI FORZE APPLICATE B QUALUNQUE
PUNTO DI INTERE VERTICALEMENTE



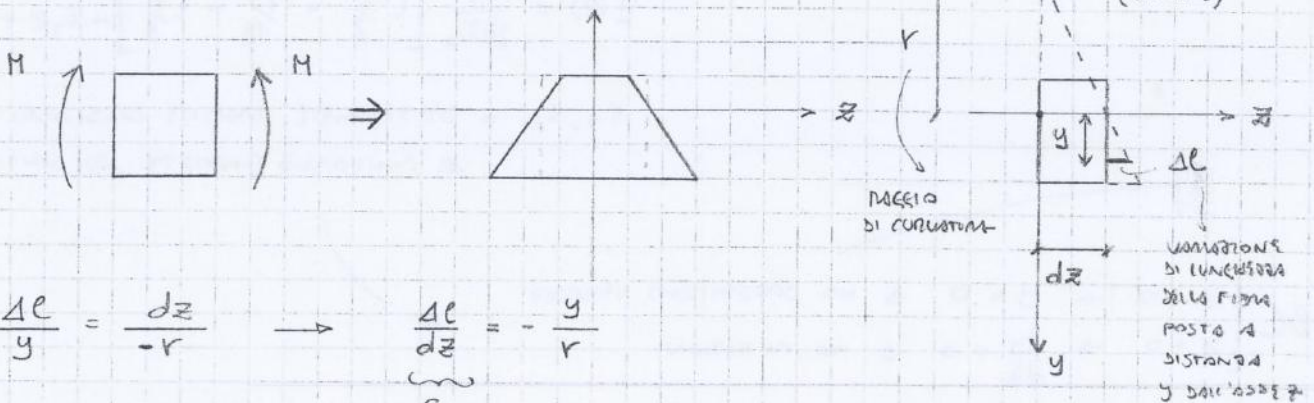
PER STUDIARE QUANTO VADE IL LAVORO DI UN SISTEMA DI FORZE APPLICATE A PER LE SPOSTAMENTI VERTICALI η_B PROVOCATI DAL SISTEMA B, IL SISTEMA A DEVE ESSERE DIRAMATO COME η_B (VERTICALEMENTE) E APPLICATO NEL SUO STESSO PUNTO, OLTRE IN MECCANICA, ALTREMENTE NON SI AVREBBE LAVORO PUFUO.

$$F_A \cdot \eta_B = F_{B1} \cdot \eta_{A1} + F_{B2} \cdot \eta_{A2} + F_{B3} \cdot \eta_{A3}$$

LA FONZA FA DEVE ESSERE SEMPRE COLLOCATA SULLA SEZIONE IN CUI SI VUOLE INDAGARE η_B .

ESERCIZIO 1

CONCIO SOCCETTO $M_x = M$



$$\frac{\Delta e}{y} = \frac{dz}{-r} \rightarrow \frac{\Delta e}{dz} = -\frac{y}{r}$$

$$\epsilon_z = E \cdot e_z = -\frac{E \cdot y}{r}$$

$$N_z = \int_A \epsilon_z dA = -\frac{E}{r} \int_A y dA = 0$$

ESSENDOCI SOLO MOMENTO FLESSORIE NON ABBIAMO SFORZO NORMALE.
↳ S.P. BARICENTRICO $\rightarrow S_x^{(A)} = 0$

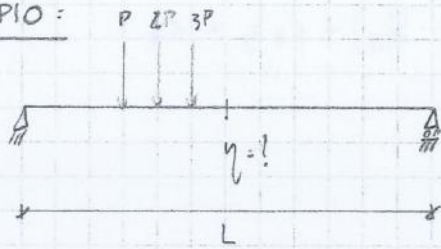
$$M_x = \int_A \epsilon_z y dA = -\frac{E}{r} \int_A y^2 dA \rightarrow M_x = -\frac{EI_x}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = -\frac{M_x}{EI_x}$$

CURVATURA

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \pm \frac{d^2y}{dz^2}$$

SERVE PER RICAVARE L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA \rightarrow DOBBIAMO CAPIRE SE SI HA "+" O "-"

ESEMPIO :



$$\sum F_B : P, 2P, 3P$$

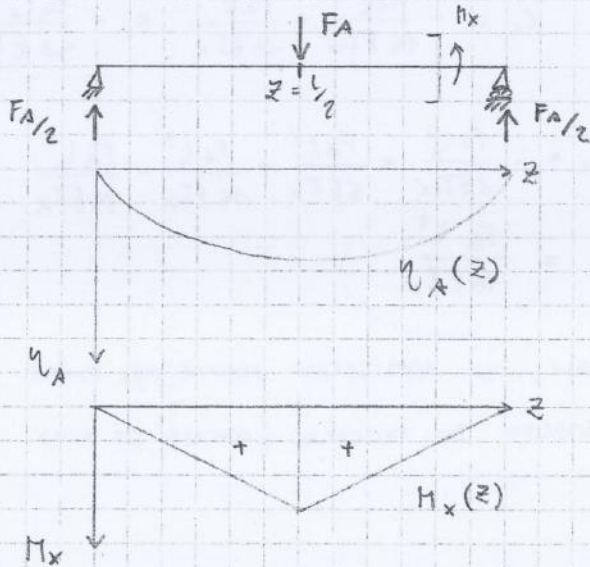
$$F_A \cdot \eta_B = \sum_i F_{B_i} \cdot \eta_{A_i}$$

DETERMINAZIONE η IN $z = \frac{L}{2}$ SOLO
ALLE 3 FORZE $\{P, 2P, 3P\}$.

$$P \text{ IN } z = \frac{2}{10}L$$

$$2P \text{ IN } z = \frac{3}{10}L$$

$$3P \text{ IN } z = \frac{5}{10}L$$



$$\frac{d^2 \eta_A}{dz^2} = \frac{-M_x}{EI_x}$$

CURVATURA DELLA TRAVE
POTENZO FUORIENTO DOVUTO A F_A

$$0 \leq z \leq \frac{L}{2} \quad M_x = \frac{F_A}{2} z$$

$$\frac{L}{2} \leq z \leq L \quad M_x = \frac{F_A}{2} (L-z)$$

$$0 \leq z \leq \frac{L}{2} \quad \frac{d^2 \eta_A}{dz^2} = -\frac{F_A}{2EI_x} z$$

$$\frac{d\eta_A}{dz} = -\frac{F_A}{2EI_x} \left(\frac{z^2}{2}\right) + C_1$$

$$\eta_A(z) = -\frac{F_A}{2EI_x} \left(\frac{z^3}{6}\right) + C_1 z + C_2$$

$$\frac{L}{2} \leq z \leq L \quad \frac{d^2 \eta_A}{dz^2} = -\frac{F_A}{2EI_x} (L-z)$$

$$\frac{d\eta_A}{dz} = -\frac{F_A}{2EI_x} (Lz - \frac{z^2}{2}) + C_3$$

$$\eta_A(z) = -\frac{F_A}{2EI_x} (Lz^2 - \frac{z^3}{6}) + C_3 z + C_4$$

2) CONTINUITÀ DELLA ROTAZIONE

3) CONTINUITÀ DELLO SPOSTAMENTO

BC 1) $z=0 \rightarrow \eta_A = 0$

2) $\left(\frac{d\eta_A}{dz}\right)_{z=\frac{L}{2}^-} = \left(\frac{d\eta_A}{dz}\right)_{z=\frac{L}{2}^+}$ PER $z = \frac{L}{2}$

$x = \frac{L}{2}^-$
 $x = \frac{L}{2}^+$

3) $\eta_A(z = \frac{L}{2}^-) = \eta_A(z = \frac{L}{2}^+)$ PER $z = \frac{L}{2}$

$C_2 = 0$

$$-\frac{F_A}{2EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L^3}{4}\right) + C_1 = -\frac{F_A}{2EI_x} \left(\frac{L^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{L^3}{4}\right) + C_3$$

$$C_1 = C_3 + \frac{F_A L^2}{16EI_x} - \frac{3F_A L^2}{16EI_x}$$

$$C_1 = C_3 - \frac{F_A L^2}{8EI_x}$$

• $z=0 \rightarrow \eta_v = 0 \rightarrow C_2 = 0$

• $z = \frac{L}{2} \rightarrow \frac{d\eta_v}{dz} = 0 \rightarrow -\frac{F_v}{4EI_x} \left(\frac{L^2}{4}\right) + C_1 = 0$

$C_1 = \frac{F_v L^2}{16EI_x}$

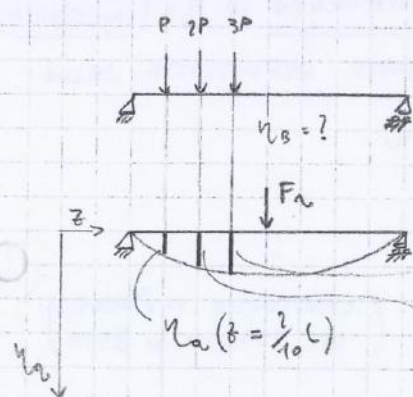
$\eta_v = -\frac{F_v z^3}{12EI_x} + \frac{F_v L^2}{16EI_x} \cdot z \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$

$\eta_v = \frac{F_v}{EI_x} \left(-\frac{z^3}{12} + \frac{L^2 z}{16} \right)$

• $P \rightarrow \eta_v(z = \frac{2}{10}L) = \frac{F_v}{EI_x} \left(-\frac{(0.2L)^3}{12} + \frac{L^2(0.2L)}{16} \right) = \frac{F_v L^3}{EI_x} \left(\frac{-(0.2)^3}{12} + \frac{0.2}{16} \right) = \frac{F_v L^3}{EI_x} 0.012$

• $2P \rightarrow \eta_v(z = \frac{3}{10}L) = \frac{F_v L^3}{EI_x} \left(-\frac{(0.3)^3}{12} + \frac{0.3}{16} \right) = \frac{F_v L^3}{EI_x} 0.017$

• $3P \rightarrow \eta_v(z = \frac{5}{10}L) = \frac{F_v L^3}{EI_x} \left(-\frac{(0.4)^3}{12} + \frac{0.4}{16} \right) = \frac{F_v L^3}{EI_x} 0.020$



$\eta_b = ?$

$F_v \cdot \eta_b = \sum_i F_{bi} \cdot \eta_{ai}$

$\sum_i F_{bi} \cdot \eta_{ai} = P \cdot \eta_v(z = \frac{2}{10}L) + 2P \cdot \eta_v(z = \frac{3}{10}L) + 3P \cdot \eta_v(z = \frac{5}{10}L)$

$= P \left(0.012 \frac{F_v L^3}{EI_x} \right) + 2P \left(0.017 \frac{F_v L^3}{EI_x} \right) + 3P \left(0.020 \frac{F_v L^3}{EI_x} \right) =$

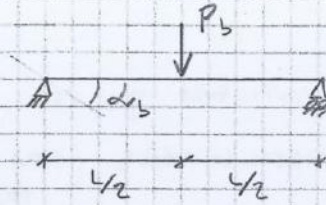
$= 0.106 \frac{P F_v L^3}{EI_x} = F_v \cdot \eta_b$

$\eta_b = 0.106 \frac{P L^3}{EI_x}$

$F_a \cdot \eta_b = \sum_i F_b \cdot \eta_a$ IN SINTESI

$\eta_b: E \cdot I_a \rightarrow S.E.: F_a$

$F_b: C.D. \rightarrow F.I.: \eta_a$

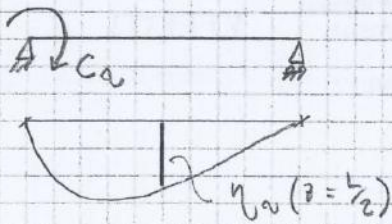


CALCOLARE LA NOTAZIONE INDOTTA α NELL'ESTREMO DI SX, OSSIA NEL VINCOLO

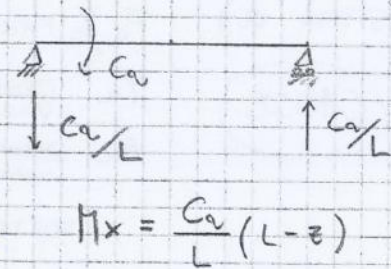
$E \cdot I_a: \alpha_b \Rightarrow S.E.: C_a$ COPPIA CHE LAVORA PER α_b NEL VINCOLO

$C.D.: P_b \Rightarrow F.I.: \eta_a$ SPOSTAMENTO VERTICALE PER CUI LAVORA P_b IN REAZIONE

$C_a \cdot \alpha_b = P_b \cdot \eta_a$



$\frac{d^2 \eta_a}{dz^2} = \frac{-M_x}{EI_x}$



$\frac{d^2 \eta_a}{dz^2} = \frac{-C_a(L-z)}{L EI_x} \rightarrow \frac{d\eta_a}{dz} = \frac{-C_a(L - \frac{z^2}{2})}{L EI_x} + C_1$

$\eta_a(z) = \frac{-C_a}{L EI_x} \left(Lz - \frac{z^3}{6} \right) + C_1 z + C_2 \quad 0 \leq z \leq L$

BC $\left\{ \begin{array}{l} z=0 \rightarrow \eta_a=0 \rightarrow C_2=0 \\ z=L \rightarrow \eta_a=0 \end{array} \right.$

$-\frac{C_a}{L EI_x} \left(L^3 - \frac{L^3}{6} \right) + C_1 L = 0$

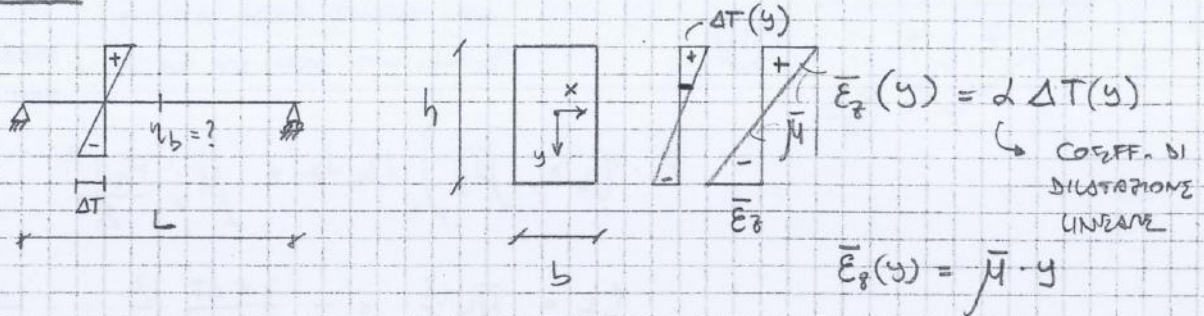
$\eta_a(z) = -\frac{C_a}{L EI_x} \left(Lz - \frac{z^3}{6} \right) + \frac{C_a L}{3 EI_x} z$

$C_1 = \frac{C_a L}{3 EI_x}$

$\eta_a(z = \frac{L}{2}) = -\frac{C_a}{L EI_x} \left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{48} \right) + \frac{C_a L^2}{6 EI_x} = -\frac{C_a}{EI_x} \left(\frac{5}{48} L^2 \right) + \frac{C_a}{EI_x} \left(\frac{L^2}{6} \right) = \frac{C_a L^2}{16 EI_x}$ 11

$\Rightarrow \sum F_a \cdot \eta_b = \sum F_b \cdot \eta_a \rightarrow$ IL TEOREMA DI BETTI PARTICOLARE ($\gamma, \bar{E} = 0$)
 RICADE NEL TEOREMA DI BETTI GENERALE

ESEMPIO:



E. I. : $\eta_b \Rightarrow$ S. E. : F_a VERTICALE IN PIEDERNA

C. D. : $\bar{\epsilon}_z \rightarrow \bar{\mu}_b \Rightarrow$ F. I. : M_a MOMENTO IN PIEDERNA

$\bar{\mu} = \frac{-\alpha \Delta T}{\frac{h}{2}} = \frac{-2\alpha \Delta T}{h}$

a) $F_a \neq 0$
 $\delta v = 0$
 $\bar{E}_a = 0$

b) $F_b = 0$
 $\delta b = 0$
 $\bar{E}_b \neq 0$

RISCRIVO LE EQUAZIONI MA LUCE DELLE CONSIDERAZIONI FATTE SU F, γ, \bar{E} PER a) e b):

$\sum F_a \cdot \eta_b = \int_V \{G_a\}^T \{E_{el,b}\} dV + \int_V \{G_a\}^T \{\bar{E}_b\} dV$
 LAVORO DI DEF. EL. LAVORO DI DEF. TERM.

$0 = \int_V \{G_b\}^T \{E_{el,a}\} dV$ PER BETTI $\rightarrow \int_V \{G_a\}^T \{E_{el,b}\} dV = \int_V \{G_b\}^T \{E_{el,a}\} dV$
 $\hookrightarrow 0 = 0$

$\sum F_a \cdot \eta_b = \int_V \{G_a\}^T \{\bar{E}_b\} dV$

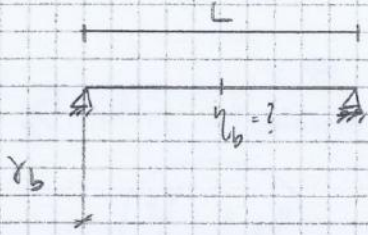
$\int_V G_a \cdot \bar{E}_b dV = \int_L d\tau \left[\int_{A_{SEZIONE}} G_a \bar{E}_b dA \right] =$ $G_a = \frac{M_a}{I_x} y$ (NAVIER)
 $\bar{E}_b = \bar{\mu}_b \cdot y$

$= \int_L d\tau \int_A \left(\frac{M_a}{I_x} y \right) (\bar{\mu}_b \cdot y) dA = \int_L \frac{M_a \cdot \bar{\mu}_b}{I_x} \left(\int_A y^2 dA \right) d\tau \rightarrow \int_L \frac{M_a \cdot \bar{\mu}_b}{I_x} d\tau$

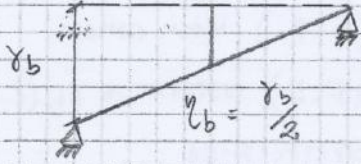
$\sum F_a \cdot \eta_b = \int_L M_a \cdot \bar{\mu}_b d\tau$

1) CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO VERTICALE IN PROBLEMA DATO AD UN CEMENTO

VINCONE



SE IL VINCOLO "CERNIERA" CHE È VERTICALE NON COME PIÙ LAVORO E L'ASTA NONA RIGIDAMENTE INTORNO AL CENTRO DI ROT. INDIVIDUABILE NEL "CAMBIO", CHE INVECE NON CHE.



IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI (y_b PICCOLO)

PER LA TEORIA DELL'ELASTICITÀ LINEARE

PER APPLICARE IL TEOREMA DI BERTINI NELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA

$E \cdot I \cdot \eta_b \rightarrow S \cdot E \cdot F_a$ IN NESSUNA

C.D. $y_b \rightarrow F_a \cdot I \cdot R_a$

IL GRAFICO DI R_a È LA L.I. DI η_b PER LE C.D., CHE SONO I CEDIMENTI VINCONE y_b .

$\eta_b \cdot F_a = R_a \cdot y_b$

PROCEDIMENTO PER SAPERE LA FORMULAZIONE GENERALE

SISTEMA DI AZIONI a)

$$\left. \begin{matrix} F_a \\ \gamma_a \\ \bar{\epsilon}_a \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{GENERANO COMPLESSIVAMENTE} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \eta_a \\ \epsilon_{el,a} \\ \bar{\epsilon}_a \end{matrix} \right. \quad \left. \begin{matrix} F_a \neq 0 \\ \gamma_a = 0 \\ \bar{\epsilon}_a = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \eta_a \neq 0 \rightarrow \text{SPOST. VERTIC.} \\ \epsilon_{el,a} \rightarrow \text{DEFORM. ELAST. INDOTTE} \\ \bar{\epsilon}_a \neq 0 \rightarrow F_a \text{ PRODUCE TOLLIO E ROTAZIONE} \rightarrow \text{TENSIONI} \end{matrix} \right.$$

SISTEMA DI AZIONI b)

$$\left. \begin{matrix} F_b \\ \gamma_b \\ \bar{\epsilon}_b \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{" " } \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \eta_b \\ \epsilon_{el,b} \\ \bar{\epsilon}_b \end{matrix} \right. \quad \left. \begin{matrix} F_b = 0 \\ \gamma_b \neq 0 \\ \bar{\epsilon}_b = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \eta_b \\ \epsilon_{el,b} \\ \bar{\epsilon}_b \end{matrix} \right.$$

L.V.

$$\sum F_a \cdot \eta_b + \sum R_a \cdot \gamma_b = \int_V \{G_a\}^T \cdot \{\epsilon_{el,b}\} dV + \int_V \{G_a\}^T \cdot \{\bar{\epsilon}_b\} dV$$

$$\sum F_b \cdot \eta_a + \sum R_b \cdot \gamma_a = \int_V \{G_b\}^T \cdot \{\epsilon_{el,a}\} dV + \int_V \{G_b\}^T \cdot \{\bar{\epsilon}_a\} dV$$

$L_c = L_i$

PROCEDIMENTO PER I SISTEMI

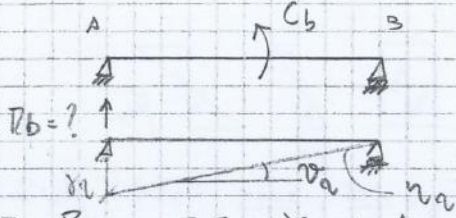
$$\int_V \{G_b\}^T \cdot \{\epsilon_{el,a}\} dV = 0 = \int_V \{G_a\}^T \cdot \{\epsilon_{el,b}\} dV$$

$$\sum F_a \cdot \eta_b + \sum R_a \cdot \gamma_b = 0 \rightarrow \sum F_a \cdot \eta_b = - \sum R_a \cdot \gamma_b$$

1 SOLA F_a
1 SOLA R_a 15

CARBONE

3



$$R_b \cdot \gamma_a = C_b \cdot \vartheta_a$$

E.I. $R_b \rightarrow$ S.E. γ_a IN A
 C.D. $C_b \rightarrow$ F.I. ϑ_a IN MEZZENA

a) $F_a = 0$ b) $F_b \neq 0$
 $\gamma_a \neq 0$ $\gamma_b = 0$
 $\bar{E}_a = 0$ $\bar{E}_b = 0$

P.L.V.

$$\sum F_a \cdot \gamma_b + \sum R_a \cdot \gamma_b = \int_V [G_a]^T [E_{el,b}] dU + \int_V [G_a]^T [\bar{E}_b] dU$$

$$\sum C_b \cdot \vartheta_a + \sum R_b \cdot \gamma_a = \int_V [G_b]^T [E_{el,a}] dU + \int_V [G_b]^T [\bar{E}_a] dU$$

$$\int_V [G_a]^T [E_{el,b}] dU = 0 \rightarrow \int_V [G_b]^T [E_{el,a}] dU = 0$$

$$\sum C_b \cdot \vartheta_a + \sum R_b \cdot \gamma_a = 0 \quad -R_b \cdot \gamma_a = -C_b \cdot \vartheta_a$$

(DISCONDI)

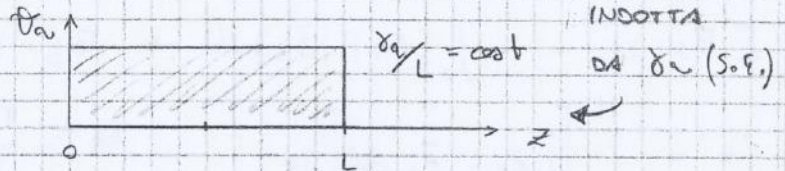
$$\vartheta_a = \frac{d\gamma_a}{dz} = \text{const.} \quad (\text{TAVOLE ISOSTATICHE} \rightarrow \text{PENDENZA DEFINITA COSTANTE})$$

$$\vartheta_a \sim \text{tg} \theta = \frac{\gamma_a}{L}$$

L.I. di R_b PER C_b IN MEZZENA = ENOPICO DI ϑ_a (F.I.)

$$R_b \cdot \gamma_a = C_b \cdot \frac{\gamma_a}{L}$$

$$R_b = \frac{C_b}{L} = \text{const.}$$



STESSA PENDENZA SU TUTTA LA TAVOLE

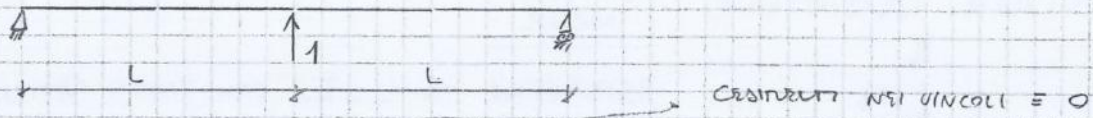
VERIFICO L'EQUILIBRIO STATICO

$$\rightarrow) H_A = 0$$

$$+\uparrow) V_A + V_B = 0 \quad V_A = +\frac{C}{L} = R_b \quad \uparrow$$

$$+(A) C + V_B \cdot L = 0 \quad V_B = -\frac{C}{L} \quad \downarrow$$

SCHEMA ISOSTATICO (C)



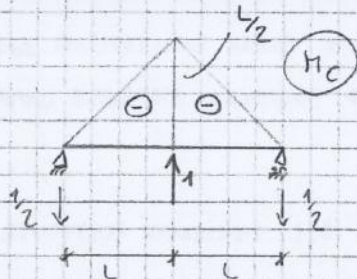
$$\sum F_c \cdot \eta_a + \sum R_c \cdot \delta_a = \int_0^{2L} M_c \cdot \frac{M_a}{EI_x} dz$$

NO CARICHI ESTERNI

$$-1 \cdot \gamma_a = \int_0^L M_c \frac{M_a}{EI_x} dz \quad M_a = M_0 + X M_c$$

$$-\gamma_a = \frac{X}{EI_x} \int_0^{2L} M_c^2 dz = \frac{X}{EI_x} \left[2 \frac{L}{3} \left(0 + \frac{L^2}{4} + 4 \left(\frac{L^2}{16} \right) \right) \right]$$

SI IDENTIFICA COSTANTE (M_c(z=0))^2 (M_c(z=L))^2 4(M_c(z=L/2))^2

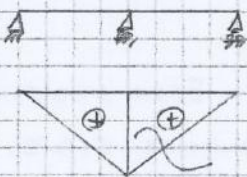


$$= \frac{X}{EI_x} \left[\frac{L}{3} \left(\frac{L^2}{2} \right) \right] = \frac{X}{EI_x} \left(\frac{L^3}{6} \right)$$

$$= X \frac{L^3}{6EI_x} \quad X = - \frac{6EI_x \gamma_a}{L^3}$$

$$M_a = X M_c$$

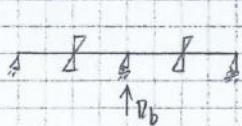
(M_a)



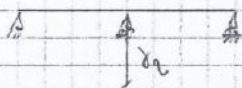
$$\frac{6EI_x \delta_a}{L^3} \cdot \frac{L}{2} = \frac{3EI_x \delta_a}{L^2}$$

RITORNO AL PROBLEMA DELLA DETERMINAZIONE DI R_b

$$R_b \cdot \delta_a = \int_0^{2L} M_a \bar{M}_b dz$$



$$R_b \cdot \delta_a = \bar{M}_b \int_0^{2L} M_a dz = \bar{M}_b \left[\frac{1}{2} (2L) \left(\frac{3EI_x \delta_a}{L^2} \right) \right]$$

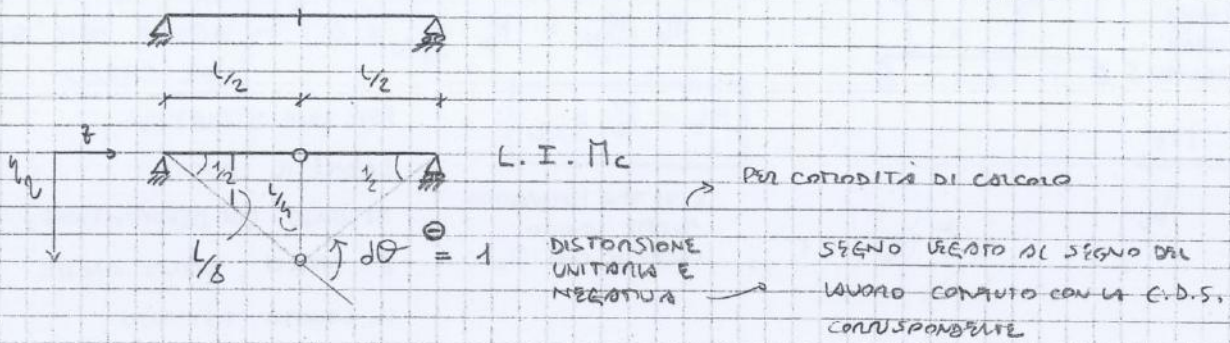


$$R_b \cdot \delta_a = \bar{M}_b \cdot \frac{3EI_x \delta_a}{L} \quad R_b = \frac{3\bar{M}_b EI_x}{L}$$

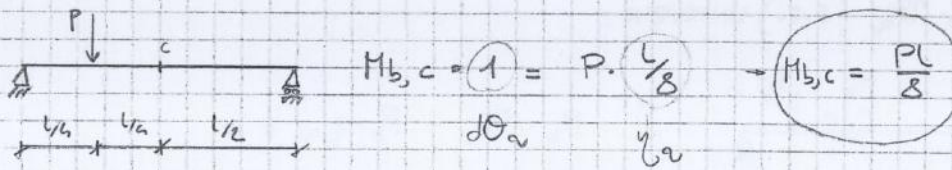
$$R_b = \frac{6 \Delta T E I_x}{h L}$$

TRACCIAMENTO QUALITATIVO DELLA LINEA DI INFLUENZA (NEL CASO DI PICCOLI SPOSTAMENTI)

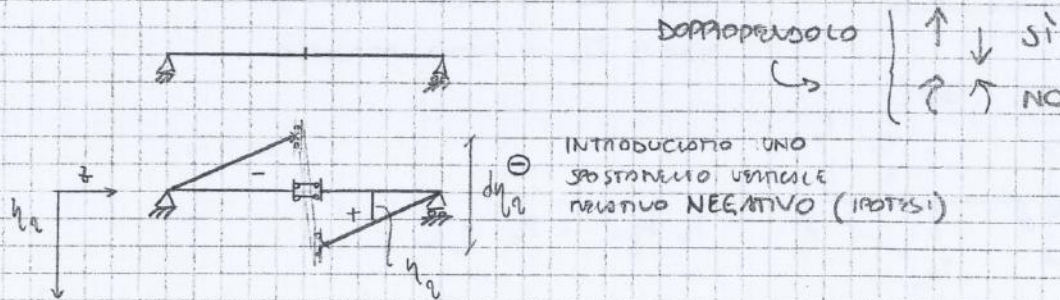
⊙ LINEA DI INFLUENZA DEL MOMENTO FLESSORIE IN NEODERMA



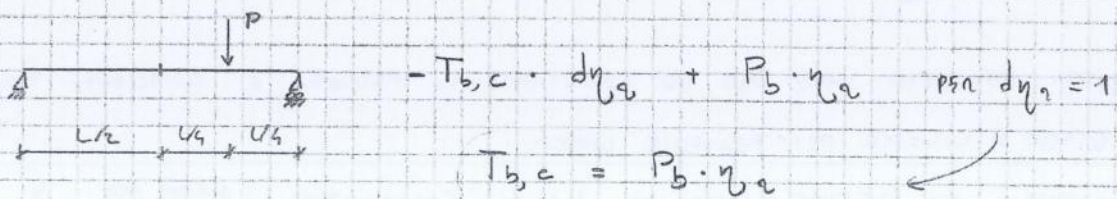
USANO LA L.I. PER TROVARE IL MOMENTO FL. PROVOCCATO DA P NELLA NEODERMA



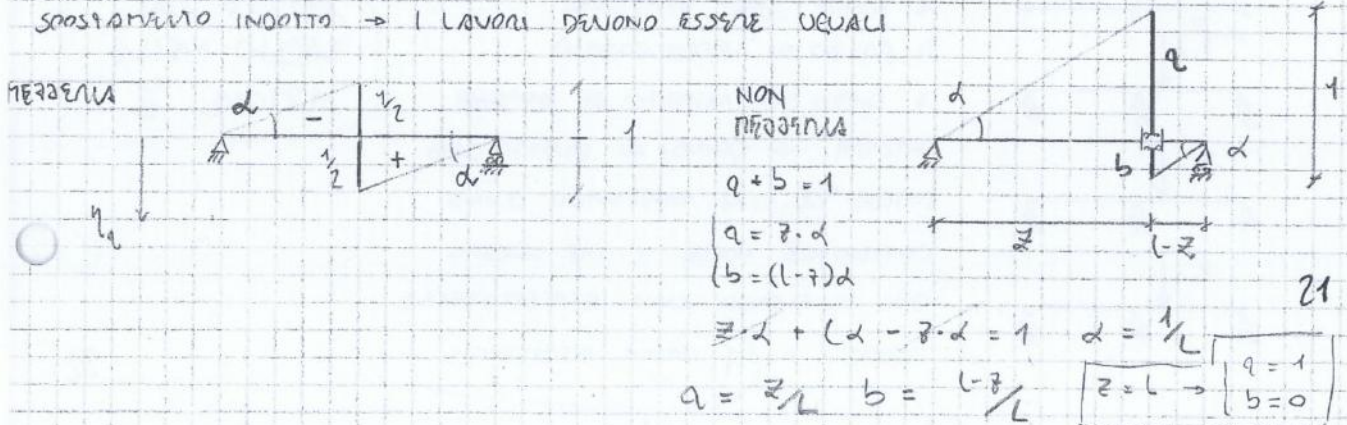
⊙ LINEA DI INFLUENZA DEL TAGLIO IN NEODERMA

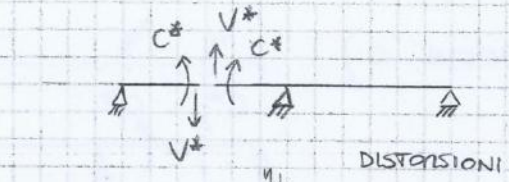
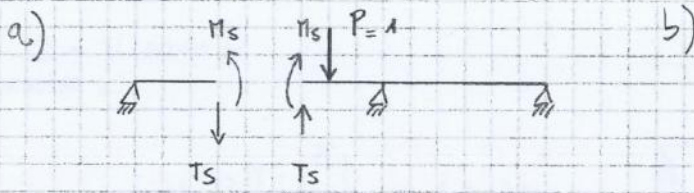
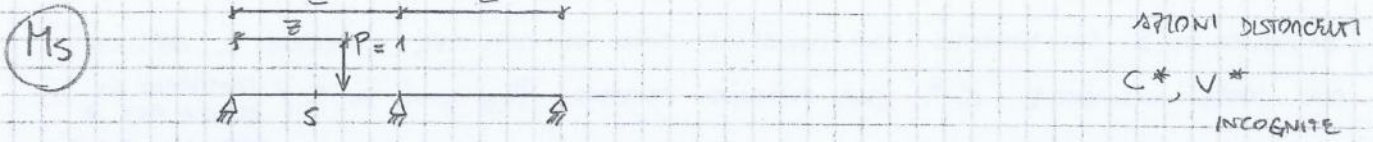


USANO LA L.I. PER TROVARE IL TAGLIO PROVOCCATO DA P NELLA NEODERMA



IL SEGNO DEL TAGLIO E' UEGUO AL SEGNO DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO ALLO SPOSTAMENTO INDOTTO → I LAVORI DEVONO ESSERE UEGUALI





M_s, T_s COMPT. DELLA SOL. DOVUTE A $P=1$, MISURATE NELLA SEZIONE "S"

LAVORO DELLE AZIONI DI a) PER GLI SPOSTAMENTI DI b)

$$M_s(-1) + T_s(0) + P \cdot \eta_b = C^*(0) + V^*(0)$$

NO ROT. NEL IN a) NO SPOST. VERT. NEL IN a)

NO SPOST. VERT. NEL IN b) LAVORO DELLE AZIONI DI b) PER GLI SPOSTAMENTI DI a)

TEOREMA DI BETTI

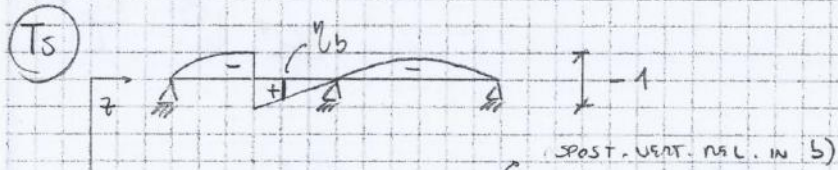
$L_{ab} = L_{ba}$

$$M_s \cdot 1 = P \cdot \eta_b \quad M_s = P \cdot \eta_b = \eta_b$$

↳ $P=1$

LA L.I. DI M_s PER $P=1$ È UGUALE ALO DEFORMATA η_b OTTENUTA APPLICANDO LE AZIONI DISTONCELT C^*, V^* IN S CHE LUI PRODUCONO UNO SPOST. VERT. NEL. PARI A -1.

NO ROT. NEL IN a) NO SPOST. VERT. NEL IN a)



$$M_s(0) + T_s(-1) + P \cdot \eta_b = C^*(0) + V^*(0)$$

NO ROT. NEL. IN b)

$$T_s \cdot 1 = P \cdot \eta_b \quad T_s = P \cdot \eta_b = \eta_b$$

↳ $P=1$

LA L.I. DI T_s PER $P=1$ È UGUALE ALLA DEFORMATA η_b OTTENUTA APPLICANDO LE AZIONI DISTONCELT C^*, V^* IN S CHE LUI PRODUCONO UNO SPOST. VERT. NEL. PARI A -1.

ESPANSIONE ANALITICO DI L.I. DI M_s

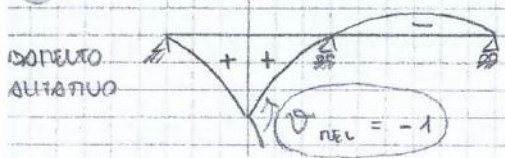
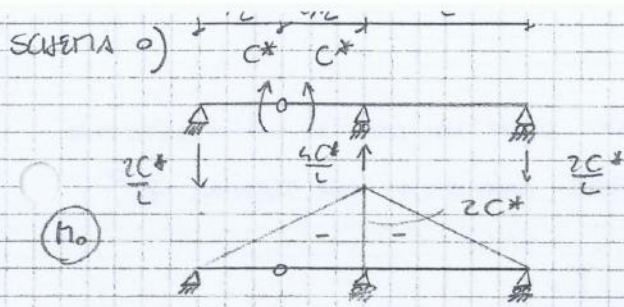


DIAGRAMMA UMCO
INDIPENDENTE DAL TIPO E DALL'INTENSITA' DEI CARICHI (P NON SI INSERISCE)



AVRO' DUE DIVERSE ESPRESSIONI DI η PERCHÉ NESSUNA ESPRESSIONE PUÒ VALERE PER ENTROSI TUTTI DELLA STRUTTURA

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{\pi_0}{EI} = \pm \frac{2C^*}{LEI} \cdot z$$

$$0 \leq z \leq \frac{L}{2} \rightarrow \frac{d\eta}{dz} = \frac{C^*}{LEI} z^2 + C_1 \quad \eta(z) = \frac{C^*}{LEI} \frac{z^3}{3} + C_1 z + C_2$$

$$\frac{L}{2} \leq z \leq L \rightarrow \frac{d\eta}{dz} = \frac{C^*}{LEI} z^2 + C_3 \quad \eta(z) = \frac{C^*}{LEI} \frac{z^3}{3} + C_3 z + C_4$$

BC \rightarrow VINCOLI DELLA STRUTTURA

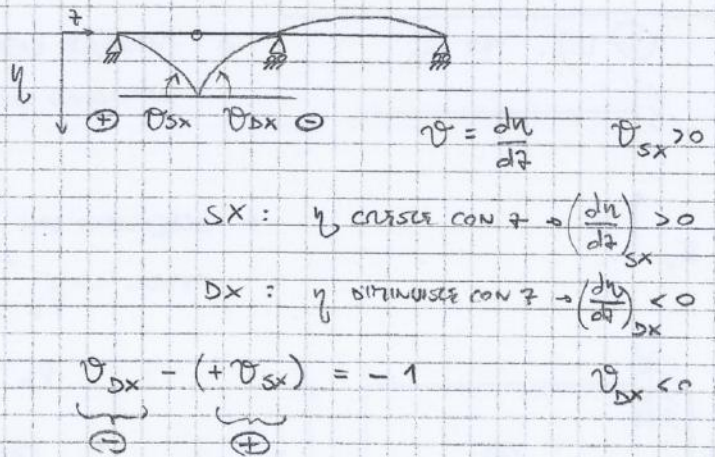
1) $z=0 \rightarrow \eta=0$

2) $z=L \rightarrow \eta=0$

3) $z=L/2 \rightarrow \vartheta_{\text{nel}} = \vartheta_{\text{DX}} - \vartheta_{\text{SX}} = -1$

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{\text{DX}} - \left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{\text{SX}} = -1$$

4) $z=L/2 \rightarrow \eta_{\text{DX}} = \eta_{\text{SX}}$



SX: η CRESCE CON $z \rightarrow \left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{\text{SX}} > 0$

DX: η DIMINUISCE CON $z \rightarrow \left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{\text{DX}} < 0$

$$\vartheta_{\text{DX}} - (+\vartheta_{\text{SX}}) = -1 \quad \vartheta_{\text{DX}} < 0$$

$z=0 \rightarrow \eta=0 \rightarrow C_2=0$

$z=L \rightarrow \eta=0 \rightarrow 0 = \frac{C^*}{LEI} \frac{L^3}{3} + C_3 L + C_4 = \frac{C^*}{EI} \frac{L^2}{3} + C_3 L + C_4$

$z=L/2 \rightarrow \left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{\text{DX}} - \left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{\text{SX}} = -1 \quad \frac{C^*}{LEI} \frac{L^2}{4} + C_3 - \frac{C^*}{LEI} \frac{L^2}{4} - C_1 = -1$

$C_3 = C_1 - 1$

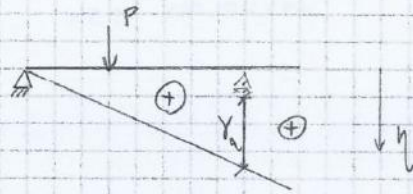
$z=L/2 \rightarrow \eta_{\text{SX}} = \eta_{\text{DX}} \quad \frac{C^*}{3EIL} \frac{L^3}{8} + C_1 \frac{L}{2} = \frac{C^*}{3EIL} \frac{L^3}{8} + C_3 \frac{L}{2} + C_4$

$\frac{C^*}{EI} \frac{L^2}{3} + C_3 L + \frac{1}{2} = 0 \quad C_3 = -\frac{1}{2} - \frac{C^* L}{3EI}$

$C_1 \frac{L}{2} = C_3 \frac{L}{2} + C_4$
 $C_3 \frac{L}{2} + \frac{1}{2} = C_3 \frac{L}{2} + C_4 \quad C_4 = \frac{1}{2}$

$C_1 = \frac{1}{2} - \frac{C^* L}{3EI}$

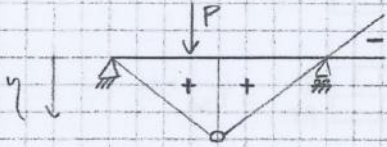
2) L.I. R_B PER FORZE VERTICALI



• NUNDO LASIARE LA STRUTTURA PER AVERE UN CEDIMENTO IN B

$\forall B, R_B > 0$ (L.I. POSITIVA)

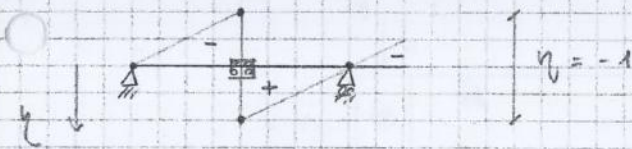
3) L.I. M_C PER FORZE VERTICALI



$P \downarrow$ SU $[A, B], M_C > 0$ (L.I. POSITIVO)

$P \downarrow$ SU $[B, \dots], M_C < 0$ (L.I. NEGATIVA)

4) L.I. T_C PER FORZE VERTICALI

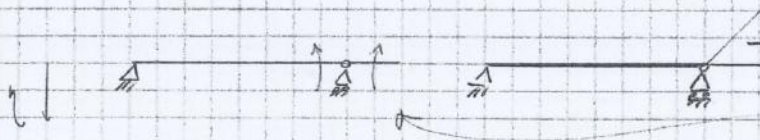


$P \downarrow$ SU $[A, C], T_C < 0$

$P \downarrow$ SU $[C, B], T_C > 0$

$P \downarrow$ SU $[B, \dots], T_C < 0$

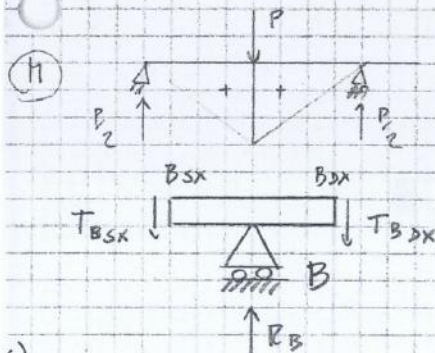
5) L.I. M_B PER FORZE VERTICALI



$P \downarrow$ SU $[A, B], M_B = 0$

$P \downarrow$ SU $[B, \dots], M_B < 0$

PER T, M SI USA LA CONVENZIONE DI S. DI C. $\Downarrow \uparrow \square, \Downarrow \uparrow \square$,
MENTRE PER LE REAZIONI VINCOLARI SI SCEGLIE UN VERSO ARBITRARIO INIZIALE.

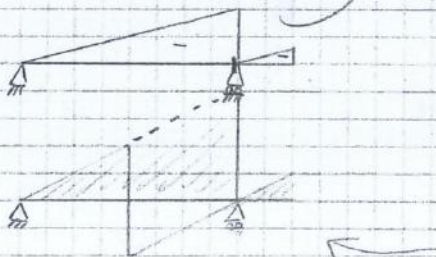


PER T, IN B, DEVO CONSIDERARE UNA L.I. PER LA PARTE SX E PER LA PARTE DX PERCHÉ T È DIVERSO IN QUANTO C'È LA REAZIONE VINCOLARE IN MEZZO. IN A NON SERVE PERCHÉ È UN APPOGGIO DI ESTREMITÀ.

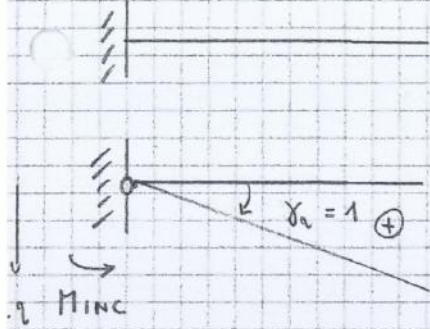
6) L.I. PER $T_{B, SX}$

PIUTTOSTO CHE USARE \rightarrow

SI OTTIENE TRASFERENDO LA L.I. T_C PER FORZE VERTICALI IN UNA SEZIONE QUALUNQUE TRA A e B, COME SI È FATTO PER T_C ; POI SI TRASFERISCE IL GRAFICO VERSO DX E SI PROLUNGANO I TRACCI.

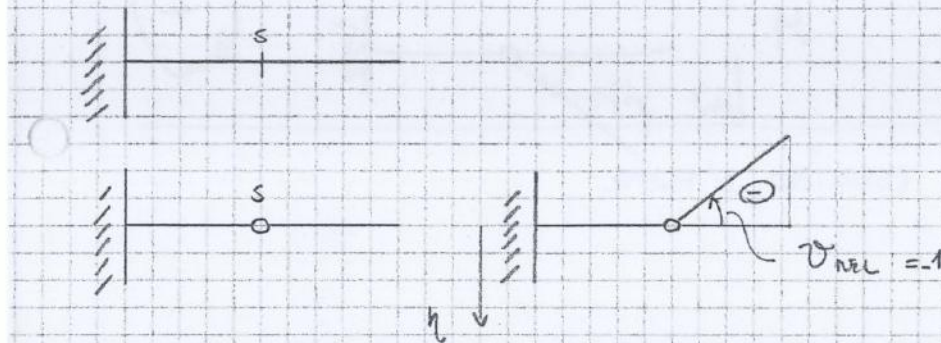
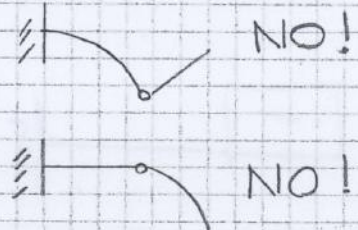


2) L.I. PER M_{INC}



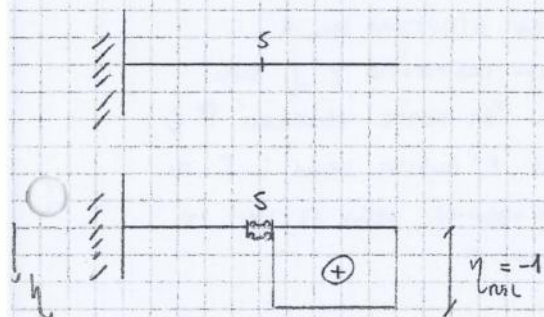
3) L.I. PER M_S

ISOSTATICA \rightarrow TAGLI PERTINENTI



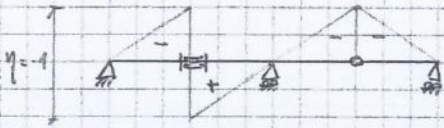
4) L.I. PER T_S

IL SEGNO DIPENDE DALLA SCELTA DEL S.O.T. \downarrow
 MA IL FATTO DI FAR AVVENIRE UN CERTO
 TIPO DI DEFORMAZIONE È LEGATO ALLA
 VOLONTÀ DI OTTENERE UN
 LAVORO NEGATIVO TRS
 L'E.I. E IL S.E. \downarrow

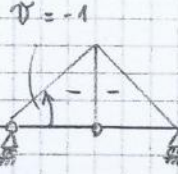


A DX DEL SEPENDO SI CONSIDERA
 POSITIVO IL TAGLIO \uparrow (CONVENZIONE
 DI S.O.C.) QUINDI LO SPOSTAMENTO
 UNITARIO SI PRENDE NEL SEGNO
 OPPOSTO (\downarrow)

5) L.I. T_B



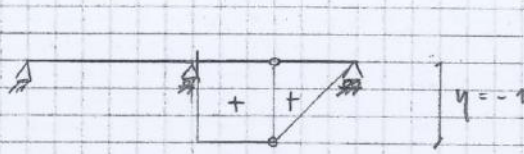
6) L.I. M_C



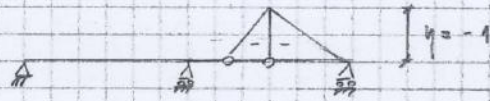
7) L.I. $T_{C_{sx}}$



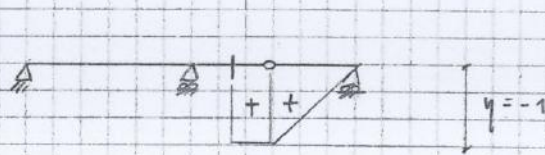
8) L.I. $T_{C_{dx}}$



9) L.I. M_D

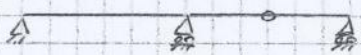


10) L.I. T_D

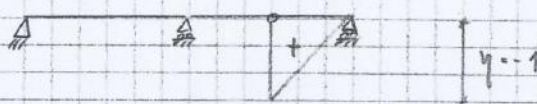


11) L.I. N_E

$N = 0$

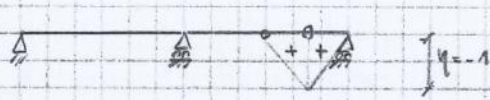


12) L.I. T_E

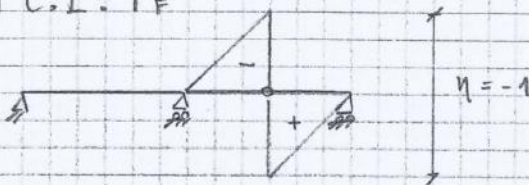


$N_E = 0$ $V_E = 0$ (NON PUO' ESSERE MONOTONO IN UNA COSTANTE)

13) L.I. M_F

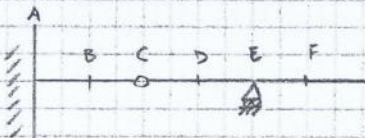


14) L.I. T_F



ESERCIZIO A CASA :

A : R_A, M_{inc} B, C, D, F : T, M
E : R_E

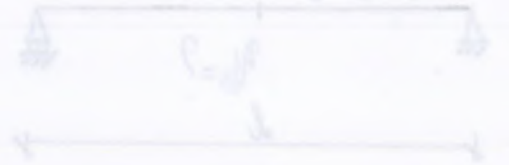


$$0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

NOTAZIONE CORRETTA

$$\frac{d^2 v_A}{dz^2} = -\frac{M_x}{E \cdot I_x} \rightarrow M_x = \frac{F_A}{2} \cdot z$$

$$\frac{d^2 v_A}{dz^2} = -\frac{F_A \cdot z}{2 E I_x}$$



$$\frac{dv_A}{dz} = -\frac{F_A}{2 E I_x} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1$$

ATTENZIONE

$$v_A(z) = -\frac{F_A}{2 E I_x} \cdot \frac{z^3}{6} + C_1 \cdot z + C_2$$

$$\frac{l}{2} \leq z \leq l$$

$$\frac{d^2 v_A}{dz^2} = -\frac{M_x}{E \cdot I_x} \rightarrow M_x = \frac{F_A}{2} \cdot (l - z)$$

$$\frac{d^2 v_A}{dz^2} = -\frac{F_A}{2 E I_x} \cdot (l - z)$$

$$\frac{dv_A}{dz} = -\frac{F_A}{2 E I_x} \cdot \left(l z - \frac{z^2}{2} \right) + C_3$$

$$v_A(z) = -\frac{F_A}{2 E I_x} \cdot \left(l \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C_3 \cdot z + C_4$$



$$\eta_{VA} \left(z = \frac{3}{10} l \right) = \frac{F_A \cdot l^3}{EI_x} \cdot \left(\frac{0,3^3}{12} + \frac{0,3}{16} \right) = 0,012 \frac{F_A \cdot l^3}{EI_x} \quad \underline{\text{Ans.}}$$

$$\eta_{VA} \left(z = \frac{4}{10} l \right) = \frac{F_A \cdot l^3}{EI_x} \cdot \left(-\frac{0,4^3}{12} + \frac{0,4}{16} \right) = 0,020 \frac{F_A \cdot l^3}{EI_x} \quad \underline{\text{Ans.}}$$

$$F_A \cdot \eta_{VB} = \sum F_B \cdot \eta_{VA}$$

$$F_A \cdot \eta_{VB} = P \cdot \left(0,012 \cdot \frac{F_A \cdot l^3}{EI_x} \right) + 2P \cdot \left(0,017 \cdot \frac{F_A \cdot l^3}{EI_x} \right) + 3P \cdot \left(0,020 \cdot \frac{F_A \cdot l^3}{EI_x} \right)$$

$$F_A \cdot \eta_{VB} = P \cdot \left(\frac{F_A \cdot l^3}{EI_x} \right) \cdot \left[(0,012) + (2 \cdot 0,017) + (3 \cdot 0,020) \right]$$

0,106

$$F_A \cdot \eta_{VB} = 0,106 \cdot P \cdot \frac{F_A \cdot l^3}{EI_x}$$

$$\eta_{VB} = 0,106 \frac{P \cdot l^3}{EI_x}$$

Ans.

F.I. $\eta_{VB} \rightarrow S.E. F_A$

C.D. $F_B \rightarrow F.I. \eta_{VA}$