NUMERO: 1008 DATA: 14/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Verduci

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Barbero

La fisica si occupa dei fenomeni naturali, è una scienza sperimentale. Si guarda il fenomeno e lo si descrive, cerchiamo un'equazione che descrive il fenomeno. La fisica si occupa di grandezze, grandezze che vengono chiamate ARCHIMEDEE o MISURABILI: grandezza misurabile vuol dire che scelgo una unità e riesco a stabilire un procedimento, un confronto tra la grandezza x e questa che chiamo unità di misura.

$$x = u \qquad u(x)$$

Grandezze Fondamentali (grandezze che mi permettono di esprimere le altre grandezze)

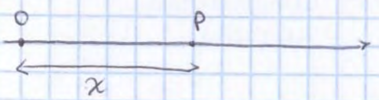
- Lunghezza $\mathcal{L}$ m ---> 10 000 000 parte del meridiano terrestre.
- Massa M Kg ---> massa di un dm^3 di acqua a 4°C
- Tempo $\mathcal{T}$ s ---> 86 400 esima parte di un giorno solare medio
- Temperatura Temp K
- Intensità di corrente $\mathcal{J}$ A

La FISICA è composta da diverse parti:
- CINEMATICA che si occupa del movimento dei corpi indipendentemente dalle cause;
- DINAMICA che mette in relazione il movimento con le cause;
- FLUIDI;
- GRAVITAZIONE, interazione particolare, e si occupa della forza che si esercita tra i corpi celesti.
- TERMODINAMICA.

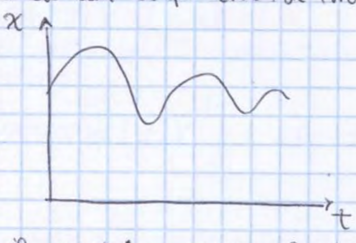
La Cinematica

La Cinematica si occupa del movimento dei corpi indipendentemente dalle cause. Immaginiamo che la posizione di un corpo cambi rispetto ad un sistema di riferimento (origine) e diamo la posizione del corpo rispetto al punto O, che chiamiamo P.

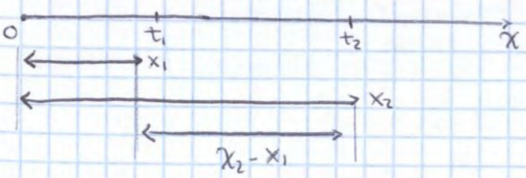
Il corpo è un PUNTO MATEMATICO cioè un punto privo di dimensioni geometriche. Quando gli spostamenti che noi consideriamo sono molto più grandi delle dimensioni del corpo allora assumere il corpo come puntiforme è una buona approssimazione. Dimensioni trascurabili rispetto agli spostamenti. CORPO IN MOTO significa la posizione di P cambia con il tempo. Il moto più semplice è quello di un corpo che si muove lungo una retta.



x è l'ascissa di P.
grafico della posizione di P nel tempo, diagramma orario che ci dice come cambia la x nel tempo



La velocità è collegata al corpo in moto, supponiamo che il nostro corpo al tempo t_1 sia in x_1, al tempo t_2 sia in x_2; Qual è lo spazio percorso in t_1 e t_2 è $x_2 - x_1$

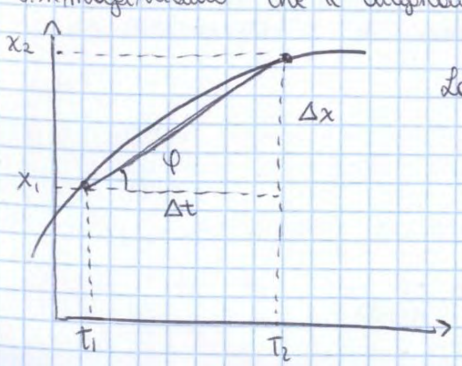


$$V_m(t_1 - t_2) = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$ VELOCITÀ MEDIA

equazione dimensionale:

$$[V_m] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{T}} = \frac{m}{s}$$

Immaginiamo che il diagramma orario sia questo:



La velocità media rappresenta la pendenza della secante passante per i due punti (P_1, P_2).

$$x(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} v(t')\,dt'$$

$$x(t_2) = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt'$$

$$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt$$

$$\dashrightarrow \quad x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt'$$

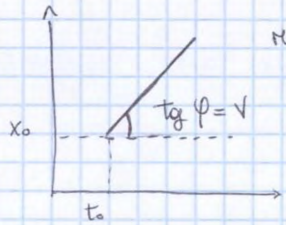
$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt'$$

$$\boxed{v_m = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt'}$$

uno è il valore medio dell'altro sull'intervallo considerato

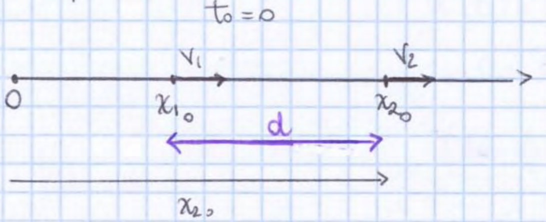
Moto rettilineo Uniforme Moto per il quale la velocità è costante, indipendente dal tempo, quindi la nostra formula

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' \quad \text{diventa} \quad x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt' = x_0 + v(t - t_0)$$



retta la cui pendenza è v.

Problema: Due punti materiali si trovano all'istante $t_0 = 0$ sullo stesso asse x rispettivamente nella posizione x_{10} e x_{20} tale che $x_{20} = x_{10} + d$, considerando che $v_1 > v_2$ determinare dopo quanto tempo e a che distanza dall'origine il corpo 1 sorpassa il corpo 2.



$v_1 > v_2$

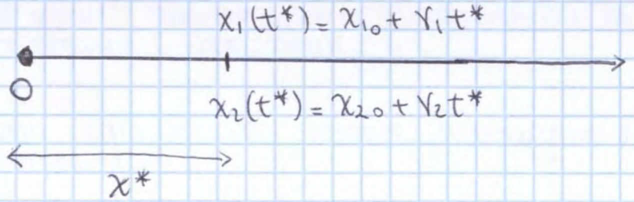
$x_1(t) = x_{1_0} + v_1 t$

$x_2(t) = x_{2_0} + v_2 t$

Quando avviene il sorpasso i due corpi sono nella stessa posizione

$t^* =$ tempo del sorpasso

Avremo una situazione di questo tipo:



$$x_{1_0} + v_1 t^* = x_{2_0} + v_2 t^*$$

$$(v_1 - v_2)\,t^* = x_{2_0} - x_{1_0} = d$$

$$t^* = \frac{d}{v_1 - v_2}$$

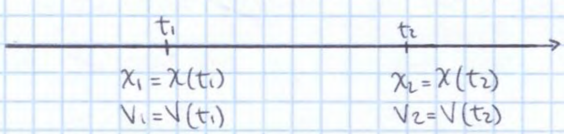
Lo spazio sarà:

$$x^* = x_1(t^*) = x_{1_0} + \frac{v_1}{v_1 - v_2}\,d$$

Definiamo un'altra grandezza che chiamiamo accelerazione. Abbiamo detto

$x(t)$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$



Analogamente alla velocità si definisce accelerazione media nell'intervallo (t_1, t_2)

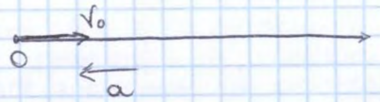
$$a_m(t_1, t_2) = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

può essere positiva o negativa

Problema: Un punto materiale parte dall'origine al tempo 0 con velocità iniziale V_0 ed è sottoposto ad un'accelerazione negativa costante. Calcolare la massima distanza dall'origine raggiunta dal punto lungo il semiasse positivo l'istante t_1 in cui si ferma e l'istante t_2 in cui ripassa per l'origine. Determinare la velocità con cui ripassa per l'origine.

a = costante $\Rightarrow$ moto RETT. UNIF. ACC.

$t_0 = 0 \qquad x(0) = 0$



$$t=0 \begin{cases} V(t) = V_0 - at \\ x(t) = V_0 t - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

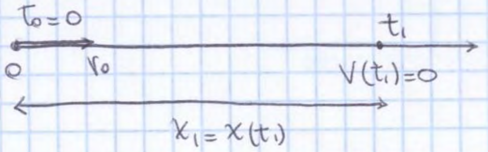
c'è il meno perché è una decelerazione

t_1 = tempo necessario a fermarsi $\Rightarrow V(t_1) = 0$

$$V(t_1) = V_0 - at_1$$
$$0 = V_0 - at_1$$
$$t_1 = \frac{V_0}{a}$$

Quindi il corpo si ferma dopo un tempo uguale a V_0/a.

Abbiamo una situazione di questo tipo:



$$x_1 = V_0 t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = V_0\frac{V_0}{a} - \frac{1}{2}a\frac{V_0^2}{a^2} = \frac{V_0^2}{2a}$$

t_2 = tempo dopo il quale P ripassa per l'origine, l'origine ha ascisse zero quindi $x(t_2) = 0$

$$x(t_2) = V_0 t_2 - \frac{1}{2}at_2^2$$
$$0 = V_0 t_2 - \frac{1}{2}at_2^2$$
$$\left(V_0 - \frac{1}{2}at_2\right)t_2 = 0$$

$t_2 = 0$ ---> è il momento iniziale, non ci interessa

$t_2 = \frac{2V_0}{a}$ ---> il corpo ripassa dall'origine dopo questo tempo

La velocità, passato questo tempo, sarà:

$$V(t_2) = V_0 - at_2 = V_0 - \cancel{a}\frac{2V_0}{\cancel{a}} = V_0$$

Il corpo ripassa per l'origine con la stessa velocità che aveva ma direzione contraria.

Abbiamo visto queste formule che valgono soltanto quando a è uguale a costante:

$$V = V_0 + at$$
$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Problema: Un punto materiale parte dall'origine al tempo $t_0 = 0$ con velocità iniziale nulla e accelerazione uguale kt cioè aumenta linearmente con il tempo. Trovare come varia la velocità e la posizione in funzione del tempo

$a = kt$
$t_0 = 0$
$x(0) = 0$
$V(0) = 0$

Noi sappiamo che $a = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = kt \Rightarrow dV = kt\,dt$

Adesso integro: $\int_0^V dV = \int_0^t kt\,dt \qquad V = \frac{1}{2}kt^2 \qquad V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$

$$V^* = -V_0 - gt^* = -V_0 - g\left\{-\frac{V_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}\right\} = \cancel{V_0} - \cancel{V_0} - \sqrt{V_0^2 + 2gh} = -\sqrt{V_0^2 + 2gh}$$

Moto Armonico.

Questo moto e' descritto da un'equazione di questo tipo

$$\boxed{x(t) = A\ sen\,(\omega t + \varphi)}$$

A = ampiezza
ω = pulsazione, frequenza circolare
φ = fase iniziale.

Mentre A e φ dipendono dalle condizioni iniziali del movimento, dalla v e dalla x al tempo zero, ω e' una caratteristica del sistema che vibra.
Il moto armonico e' limitato perche' la x e' sempre contenuta tra -A e A perche il seno e' sempre contenuto tra -1 e 1. Quindi limitato nello spazio.
Il moto e' periodico, cioe' esiste un tempo T, detto periodo, dopo cui si ripete identico.

MOTO PERIODICO $\Rightarrow \exists\, T : x(t) = x(t+T)$

Nel caso del nostro moto

$x(t) = A\ sen\,(\omega t + \varphi)$

$x(t+T) = A\ sen\,[\omega(t+T) + \varphi)$

se il moto e' periodico questi due devono essere uguali:

$$\cancel{A}\ sen\,(\omega t + \varphi) = \cancel{A}\ sen\,[\omega(t+T) + \varphi]$$

$$sen\,(\omega t + \varphi) = sen\,(\omega t + \varphi + \omega T)$$

ma il seno e' periodico di 2π quindi quell'uguaglianza sussiste se e solo se

$\omega t = 2\pi$ quindi $t = \frac{2\pi}{\omega}$

Quanto vale la velocita'? E l'accelerazione?

$$V = \frac{dx}{dt} = \omega A \underbrace{\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{per la trigonometria}} \quad \cos(\omega t + \varphi) = sen\,(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

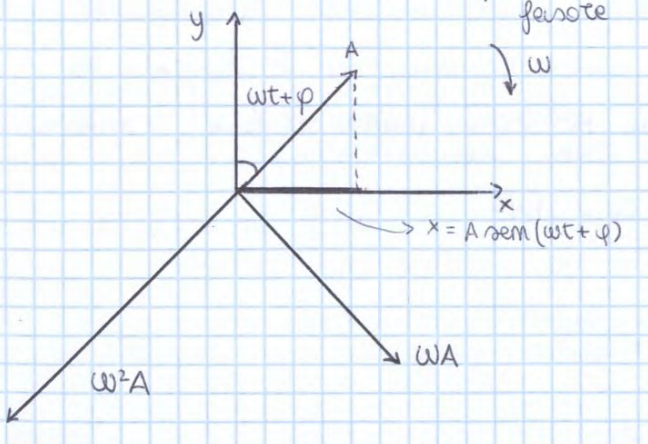
$$\boxed{V = \omega A \cdot sen\,(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$a = \frac{dV}{dt} = -\omega^2 A\ sen\,(\omega t + \varphi) \quad \text{ma} \quad -sen\,(\omega t + \varphi) = sen\,(\omega t + \varphi + \pi)$$

quindi

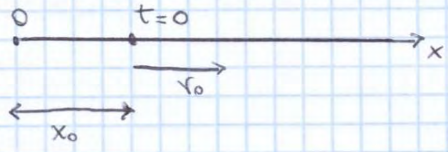
$$\boxed{a = \omega^2 A \cdot sen\,(\omega t + \varphi + \pi)}$$

Per le difficolta' che presentava il moto armonico hanno inventato il FASORE vettore rotante. Immaginiate un sistema x,y e un vettore lungo A che ad un certo tempo faccia un angolo $\omega t + \varphi$, vettore che ruota con velocita' angolare ω. Il moto armonico e' la proiezione sull'asse delle x del vettore rotante. Il fasore e' un vettore rotante che ruota con velocita' angolare ω la cui proiezione sull'asse delle x si muove di moto armonico. $+\frac{\pi}{2}$ otteniamo il versore della velocita' che ha modulo ωA, il terzo che otteniamo aggiungendo π ha modulo $\omega^2 A$, e' in anticipo di π ed e il versore accelerazione.



Il moto armonico semplice e' la proiezione sull'asse delle x di un vettore rotante con velocita' e di lunghezza A, la velocita' e' la proiezione sull'asse delle x di un vettore che ha lunghezza ωA e che e' in anticipo di $\frac{\pi}{2}$, l'accelerazione e' la proiezione di un

Problema: Abbiamo un corpo sottoposto ad una azione viscosa, siamo in grado di determinare come cambia la velocità con il tempo? Siamo in grado di determinare come cambia la sua posizione con il tempo? Il moto è limitato o no?



Siamo in regime viscoso quindi $a = -kv$
k si chiama coefficiente di ???
dipende dal modo in cui si muove il corpo e dalla forma geometrica, nel caso di una sfera vale:

$$k = 6\pi\eta R$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv$$

questa è un'eq. diff. perché mette in relazione la derivata della funzione con la funzione. L'eq. è a variabili separabili, porto la v al I membro e t al II.

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt$$

Possiamo integrare e sappiamo che le condizioni iniziali sono v_0 e t_0

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt$$

l'integrale al I membro è uguale a ln di v

$$\Big[\ln v\Big]_{v_0}^{v} = -kt \Rightarrow \ln v - \ln v_0 = -kt$$

La diff. di log è il log. di un rapporto

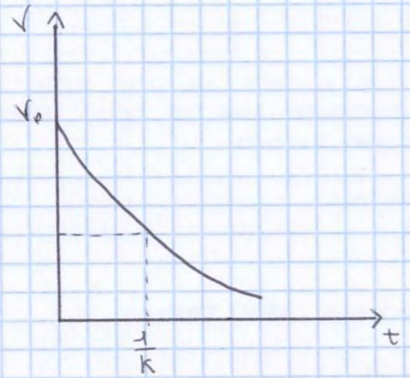
$$\ln\frac{v}{v_0} = -kt$$

passando all'esponenziale

$$\frac{v}{v_0} = e^{-kt} \rightarrow v(t) = v_0\, e^{-kt}$$

In presenza di azione viscosa la velocità diminuisce esponenzialmente

Come si misura k? t è un tempo k·t deve essere un numero quindi k si misura come 1/s.



Quando $t = \frac{1}{k}$ l'esponente fa 1 quindi se $t^* = \frac{1}{k}$ la velocità:

$$v(t^*) = v_0 \cdot e^{-1} = \frac{v_0}{e}$$

la velocità è circa 1/3 della velocità iniziale

Cosa possiamo dire sulla posizione?
Sappiamo che la velocità è

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot e^{-kt} \Rightarrow dx = v_0 \cdot e^{-kt}\,dt \quad \text{integro}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 e^{-kt}\,dt \Rightarrow x - x_0 = \frac{v_0}{k}\int_0^t e^{-kt}\,d(kt) = -\frac{v_0}{k}\Big[e^{-kt}\Big]_0^t = -\frac{v_0}{k}\left\{e^{-kt} - 1\right\}$$

Quindi:

$$\boxed{x = x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

Notiamo che quando $t \to \infty$ questo va a zero quindi:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left\{x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\right\} = x_0 + \frac{v_0}{k}$$

Il corpo praticamente non si ferma mai perché la velocità diminuisce in modo esponenziale ma lo spazio totale percorso è $\frac{v_0}{k}$

Questa è la formula generale se andiamo ad applicarla troviamo due casi molto importanti:

1) a = costante è un moto unif. accelerato, la formula è $V^2 = V_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a\,dx$

quindi $\boxed{V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0)}$

2) Cosa capita quando il moto è armonico? Nel moto armonico semplice l'accelerazione a è

$a = -\omega^2 x$ la nostra formula diventa

$$V^2 = V_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} -\omega^2 x \, dx$$

$$\boxed{V^2 = V_0^2 - \omega^2 (x^2 - x_0^2)}$$

ci dice come cambia la velocità nel moto armonico

Se $x_0 = 0$

$V^2 = V_0^2 - \omega^2 x^2$

V^2 è una quantità positiva quindi $V_0^2 - \omega^2 x^2$ deve essere ≥ 0 quindi

$x^2 \leq \frac{V_0^2}{\omega^2}$ e quindi la x

$-\frac{V_0}{\omega} \leq x \leq \frac{V_0}{\omega}$

Il moto è limitato.

Esempio: $|A| = 3$
$|B| = 2$
$\alpha = 60°$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

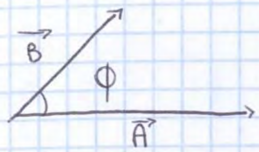
Il prodotto scalare ci permette di dire una cosa importante sulla lunghezza di un vettore, se prendo un vettore e lo moltiplico per sé stesso, l'angolo tra i vettori vale zero, il coseno di zero vale 1 e quindi si dice che il modulo di un vettore A è semplicemente la radice quadrata del prodotto scalare per sé stesso.

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A \cdot A \cdot \cos 0°$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$$

Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si definisce invece PRODOTTO VETTORIALE o PRODOTTO ESTERNO il vettore che ha per modulo il prodotto di $A \cdot B \cdot \text{sen}\,\phi$, direzione perpendicolare al piano su cui i vettori giacciono, il verso ci viene dato dalla REGOLA DELLA MANO DESTRA: si mettono le 4 dita della mano destra sul vettore A, si chiude la mano verso B e il pollice ci dice come è orientato il prodotto, il verso in questo caso è uscente.



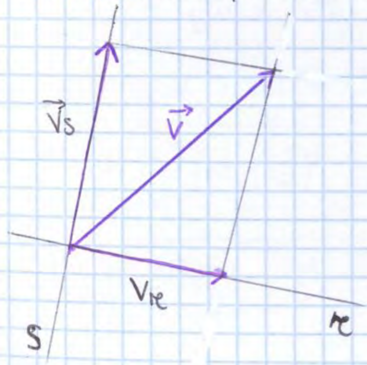
$$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \text{sen}\,\phi$$

Si può notare che mentre il prodotto scalare è commutativo, il prodotto vettoriale non gode di questa proprietà. Si nota infatti che facendo $B \times A$ i moduli dei due vettori e il seno dell'angolo sono analoghi ma il verso, sempre secondo la regola della mano destra è contrario, i due vettori sono uno l'opposto dell'altro quindi il prodotto vettoriale è ANTICOMMUTATIVO.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A}$$

Abbiamo definito la somma di due vettori grazie alla regola del parallelogramma, questa regola ci permette di definire le COMPONENTI.
Immaginate di avere un vettore $\vec{V}$, e considerate due rette che passano per l'origine del vettore che chiamiamo r e s, si chiamano COMPONENTI DEL VETTORE le proiezioni di $\vec{V}$ su r e s, e le indichiamo con V_r e V_s; è chiaro che $\vec{V}$ è la somma di V_s e V_r. Come abbiamo detto prima ogni vettore si può pensare come la sua lunghezza moltiplicata per un vettore unitario, per cui:



$$\vec{V} = \vec{V_r} + \vec{V_s} = V_r \cdot \vec{u_r} + V_s \cdot \vec{u_s}$$

$$\vec{V_r} = V_r \cdot \vec{u_r}$$

$$\vec{V_s} = V_s \cdot \vec{u_s}$$

Un vettore che giace su un piano possiamo immaginarlo composto lungo due direzioni che si intersecano nell'origine

Abbiamo detto che la lunghezza del vettore $\vec{V}^2$ è uguale al prodotto scalare di V per sé stesso, se moltiplico il secondo membro ottengo...

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = V^2$$

$$V^2 = (V_r \cdot \vec{u_r} + V_s \cdot \vec{u_s})(V_r \cdot \vec{u_r} + V_s \cdot \vec{u_s}) =$$

$$= V_r^2 \cdot \vec{u_r} \cdot \vec{u_r} + V_r \cdot V_s\, \vec{u_r} \cdot \vec{u_s} + V_s \cdot V_r \cdot \vec{u_r} \cdot \vec{u_s} + V_s^2 \cdot \vec{u_s} \cdot \vec{u_s} =$$

$$\boxed{V^2 = V_r^2 + V_s^2 + 2\, V_r \cdot V_s \cos\phi}$$

Teorema di Carnot

Essendo $\vec{u_r}$ un vettore unitario abbiamo che $\vec{u_r} \cdot \vec{u_r}$ è uguale ad 1. Stessa cosa per $\vec{u_s} \cdot \vec{u_s}$. Il prodotto scalare $\vec{u_r} \cdot \vec{u_s}$ è uguale al $\cos\phi$ perché i moduli sono unitari.

"Date due direzioni, la lunghezza del vettore risultante è la radice quadrata del quadrato del primo componente più il quadrato del secondo componente più il doppio del prodotto fra i moduli dei vettori componenti e il coseno dell'angolo

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_x - \frac{1}{2}\vec{u}_y\right) \times \left(-\sqrt{2}\,\vec{u}_x + 2\vec{u}_y\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\left(\vec{u}_x \times \vec{u}_x\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,2\left(\vec{u}_x \times \vec{u}_y\right) + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\left(\vec{u}_y \times \vec{u}_x\right) - \frac{1}{2}\cdot 2\left(\vec{u}_y \times \vec{u}_y\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\vec{u}_z - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_z =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{u}_z =$$

$$\boxed{\vec{V_1} \times \vec{V_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_z}$$

NB Il prodotto vettoriale di un vettore per sé stesso vale zero perché l'angolo compreso tra i due vettori è zero ed il seno di zero è zero

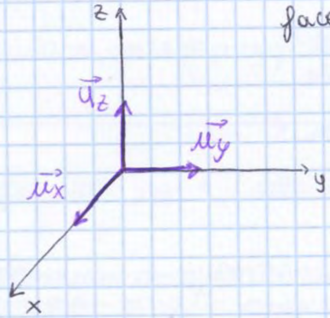
$\Rightarrow \vec{u}_x \times \vec{u}_x =$

$1 \cdot 1 \cdot \text{sen}\,0° = 0$

$\vec{u}_y \times \vec{u}_y =$

$1 \cdot 1 \cdot \text{sen}\,0° = 0$

Per il prodotto vettoriale di $\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$ il discorso è più complesso:



facendo $\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z$

dove $\vec{u}_z$ ha modulo unitario ed un verso preciso dato dalle regole della mano destra.

facendo invece $\vec{u}_y \times \vec{u}_x = -\vec{u}_z$

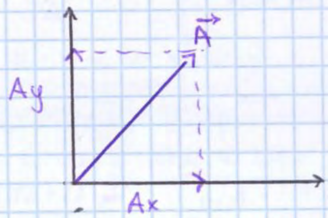
ottengo un vettore opposto a quello precedente

Per rispondere al quarto quesito faccio il seguente ragionamento: so che il prodotto vettoriale $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ è

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = V_1 \cdot V_2 \cdot \cos\varphi$$

Se considero un vettore A, applicando il teorema di Pitagora, vedo che il modulo di A è dato dalla radice quadrata dei quadrati delle sue componenti cartesiane.

applicando questo ragionamento a V_1 e V_2:



$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$V_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V_2 = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (2)^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$$

Dai calcoli precedenti so che il prodotto vettoriale $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ vale -2, sostituendo ottengo

$$-2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos\varphi$$

$$-2 = \frac{\sqrt{18}}{2}\cos\varphi$$

$$-2 = 3\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

Questo ragionamento fatto per le derivate possiamo farlo anche per l'integrale.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{V}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[V_x(t)\vec{u}_x + V_y(t)\vec{u}_y\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} V_x(t)\vec{u}_x\,dt + V_y(t)\vec{u}_y\,dt$$

L'integrale di una somma è la somma degli integrali quindi

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{u}_x V_x(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{u}_y V_y(t)\,dt =$$

$\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$ sono delle costanti e posso portarle fuori dal segno di integrale.

$$= \vec{u}_x \int_{t_1}^{t_2} V_x(t)\,dt + \vec{u}_y \int_{t_1}^{t_2} V_y(t)\,dt$$

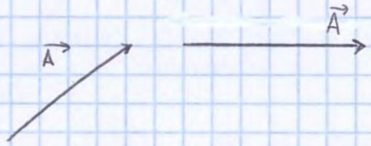
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{V}(t)\,dt = \vec{u}_x \int_{t_1}^{t_2} V_x(t)\,dt + \vec{u}_y \int_{t_1}^{t_2} V_y(t)\,dt}$$

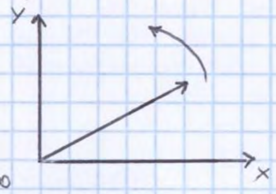
Il vettore integrale è un vettore che ha per componenti l'integrale delle componenti

Tutto questo vale se e solo se i vettori $\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$ sono costanti.

- Dato un vettore di modulo costante che dipende da un parametro t dimostrare che la derivata rispetto a quel parametro del vettore è sempre perpendicolare al vettore stesso.

Abbiamo questo vettore $\vec{A}$ che ha un certo modulo che è costante, il vettore cambia ma il modulo è sempre lo stesso. Immaginate il vettore su un sistema xy che gira così:





Noi sappiamo che A = costante e dobbiamo calcolare $\frac{d\vec{A}}{dt}$ e dimostrare che è sempre perpendicolare al vettore stesso.

Io so che il prodotto scalare tra due vettori è : $\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos\phi$ e da qui possiamo dire che due vettori sono tra loro perpendicolari quando il loro prodotto scalare è nullo. Due vettori sono perpendicolari quando

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $\quad = 0$ vuol dire che è $\cos\frac{\pi}{2}$ che è zero.

La lunghezza di un vettore abbiamo detto che è uguale alla radice quadrata del prodotto scalare del vettore per sé stesso.

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

deriviamo questa quantità rispetto al parametro

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{A})}{dt} = \frac{d(A^2)}{dt} = 0$$

se A ha una lunghezza costante, A^2 è una costante, la derivata di una costante è zero quindi è $= 0$

Facciamo la derivata del I membro che è la derivata di un prodotto

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{A} + \vec{A}\,\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$$

il prodotto scalare della proprietà commutativa

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}\,\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \vec{A}\,\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$$

Il prodotto scalare fra $\vec{A}$ e la sua derivata è nullo quindi i due vettori sono tra loro perpendicolari

Definiamo la VELOCITÀ MEDIA VETTORIALE come la variazione del vettore posizione nell'intervallo di tempo.

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Come è definito $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$?

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$[\vec{V}_m] = \frac{[L]}{[T]}$

Come è diretto $\vec{V}_m$? $t_2 - t_1$ è un numero quindi $\vec{V}_M$ è diretto come $\Delta\vec{r}$. Quindi la velocità vettoriale media è diretta come la secante che va da P_1 a P_2

Possiamo anche scriverla:

$$\vec{V}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

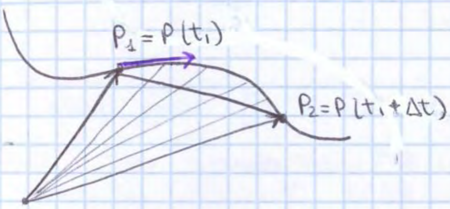
dove Δt è l'intervallo di tempo necessario al corpo per passare da P_1 a P_2.

Quando abbiamo definito l'analoga quantità nel moto rettilineo uniforme abbiamo detto che la velocità media è importante sì ma non ci dice cosa capita in prossimità di un tempo t_1 o di un tempo t_2; per far ciò occorre definire una velocità in cui questo $\Delta t \to 0$, definiamo VELOCITÀ VETTORIALE ISTANTANEA il seguente limite:

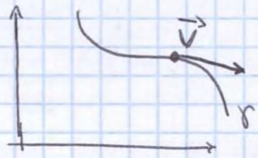
$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

che non è altro che la derivata del vettore posizione rispetto al tempo

Se voi avete questo pezzo di traiettoria con P_1 al tempo t_1 e P_2 al tempo t_2, notate

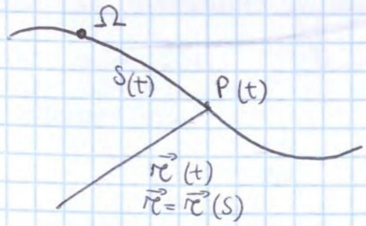


che quando Δt diventa più piccolo il punto P_2 è sempre più vicino al punto P_1, quindi man mano che Δt diminuisce P_2 si avvicina a P_1 e quando $\Delta t \to 0$ anche secante $\to 0$ ma il vettore è diretto così. Abbiamo la I conclusione importante: questo vettore è un vettore tangente alla traiettoria nel punto in cui viene valutata la velocità, quindi data qualunque curva, se la traiettoria è questa (γ) il vettore velocità istantanea è un vettore tangente alla traiettoria in ogni suo punto.



Man mano che $\Delta t \to 0$ la secante tende alla tangente.

Adesso possiamo fare un ragionamento: Quando il corpo si muove sull'ascissa curvilinea, se al tempo zero era in Ω man mano che il tempo passa, il punto P assume diverse posizioni quindi se questo è il vettore $\vec{r}$ posso pensare che dipenda dal tempo o, se voglio, che dipenda dall'ascissa curvilinea. All'istante t è in una certa posizione, ad una certa distanza rispetto ad Ω, quindi posso pensare o che $\vec{r}$ dipenda da t o che dipenda da s che a sua volta dipende da t. Quella derivata posso anche scriverla:



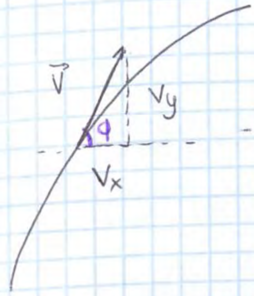
$\vec{r} = \vec{r}[s(t)]$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V \cdot \vec{u}_t$$

è tangente alla traiettoria γ. Questo ha modulo 1 ed è un VERSORE. $(\vec{u}_t)$

questo è quello che abbiamo definito VELOCITÀ SCALARE (V)

Quanto vale il modulo di questo vettore V? Il modulo è la radice quadrata delle componente lungo x al quadrato più la componente lungo y al quadrato



$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dt} = \frac{ds}{dt} = V$$

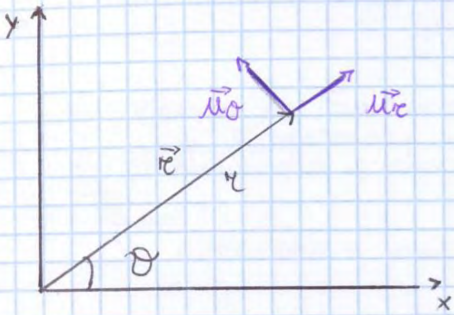
$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ non è altro che ds

È chiaro che se usiamo questa rappresentazione cartesiana notiamo che le componenti di V saranno V_x e V_y e teta, tale che:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{V_y}{V_x}$$

note le componenti cartesiane possiamo trovare l'angolo teta

Abbiamo detto che le componenti cartesiane vanno bene, in genere, quando i problemi sono piani, delle volte si usano delle COMPONENTI RADIALI. Note le componenti cartesiane come dobbiamo moltiplicare quelle poche cose ... ?? Vogliamo calcolare il vettore velocità usando le coordinate polari anziché quelle cartesiane e troveremo altre informazioni che queste formule viste non ci danno. Il vettore si può scrivere come la sua lunghezza che moltiplica il vettore unitario che sta sulla sua direzione e con il verso del nostro vettore

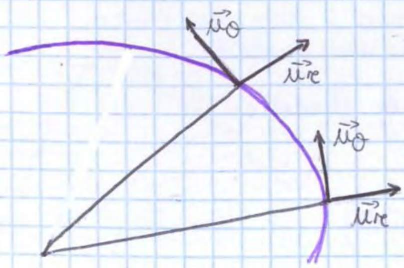


$$\vec{r} = r \cdot \vec{u_r}$$

Il mio scopo è esprimere tutto in funzione di r e di ϑ. Il versore $\vec{u_r}$ prende il nome di VERSORE RADIALE; quando si usano le coordinate polari si usa anche un altro versore che è perpendicolare al versore radiale e si chiama VERSORE TRASVERSO diretto nel verso per cui ϑ aumenta, quindi $\vec{u_\vartheta}$ ci dice come aumenta l'angolo ϑ, $\vec{u_r}$ ci dice come aumenta la distanza $\vec{r}$.

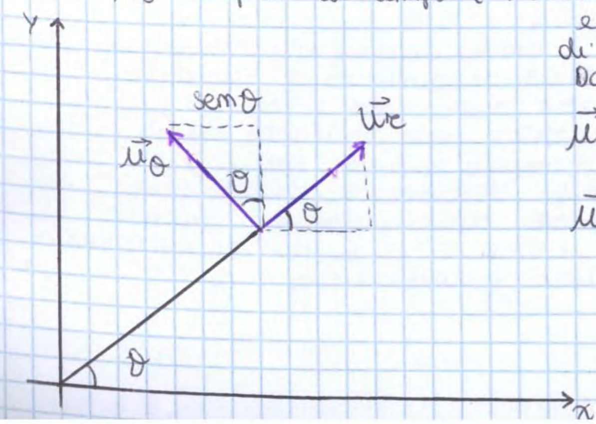
$\vec{u_r}$ VERSORE RADIALE

$\vec{u_\vartheta}$ VETTORE TRASVERSO



Se ad un certo istante di tempo questo è $\vec{u_r}$ e questo è $\vec{u_\vartheta}$, se il corpo si muove secondo questa traiettoria, in un altro istante $\vec{u_r}$ e $\vec{u_\vartheta}$ saranno questi, quindi prima osservazione: quando uso una rappresentazione polare, al cambiare del tempo, il versore radiale e trasverso cambia, mentre prima quando usavamo la rappresentazione cartesiana $\vec{u_x}$ e $\vec{u_y}$ erano gli stessi; se cambiano vuol dire che la loro derivata rispetto al tempo non è zero.

Vediamo quindi se siamo in grado di calcolare la derivata del versore $\vec{u_r}$ e del versore $\vec{u_\vartheta}$ rispetto al tempo t. Quando il corpo si muove cambia la distanza r e cambia l'angolo ϑ. Calcoliamo le derivate di $\vec{u_r}$ e $\vec{u_\vartheta}$.



Dal disegno notiamo che

$$\vec{u_r} = \cos\vartheta\, \vec{u_x} + \operatorname{sen}\vartheta\, \vec{u_y}$$

$$\vec{u_\vartheta} = -\operatorname{sen}\vartheta\, \vec{u_x} + \cos\vartheta\, \vec{u_y}$$

Se provate a fare il prodotto scalare di questi due fa zero, si vede dalle formule e anche perché sono tra loro perpendicolari.

Il vettore $\vec{dr}$ sarà uguale al vettore che va da AC più il vettore che va da C a B

$$\vec{dr} = \vec{AC} + \vec{CB} =$$

$$= r\, d\vartheta \cdot \vec{u}_\vartheta + dr \cdot \vec{u}_r$$

$AC = r \cdot d\vartheta$ ed è orientato come il versore che noi abbiamo definito TRASVERSO

$$\vec{AC} = r\, d\vartheta \cdot \vec{u}_\vartheta$$

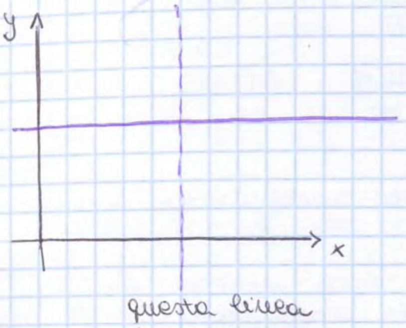
$\vec{CB}$ ha modulo dr ma è orientato come il versore RADIALE.

$$\vec{CB} = dr \cdot \vec{u}_r$$

A cosa è uguale la velocità?

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vartheta}{dt}\vec{u}_\vartheta + \frac{dr}{dt}\cdot\vec{u}_r$$

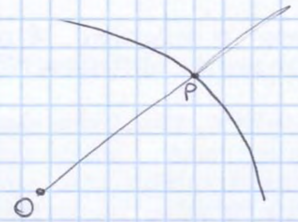
L'abbiamo calcolata in un altro modo.
La VELOCITÀ TRASVERSA ci dice quanto in fretta il corpo procede in questa direzione
La VELOCITÀ RADIALE ci dice invece quanto in fretta si allontana dall'origine.



qui varia x ma non y

questa linea ha x costante e varia la y

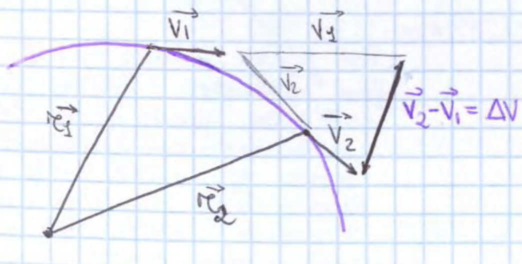
Nelle coordinate polari ci sono anche questi tipi di linee, fissato O e preso P, se cambia solo r allora è una linea coordinata r, se cambia solo ϑ, r rimane costante e quindi siamo su una circonferenza



Quindi nel caso delle coordinate polari, le linee coordinate sono linee radiali e circonferenze che hanno per centro l'origine.

Adesso analizziamo l'accelerazione. Disegno la traiettoria e posso considerare sia un sistema di riferimento cartesiano che polare, sto pensando alla DESCRIZIONE INTRINSECA. Nel moto rettilineo abbiamo definito l'accelerazione come

$$a = \frac{dV}{dt} \qquad a_m = \frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1}$$



Al tempo t_1 la particella è qui, individuata da questo vettore $\vec{r_1}$, la velocità è tangente quindi sarà $\vec{V_1}$. Al tempo 2 questa sarà $\vec{r_2}$ e la velocità sarà $\vec{V_2}$ allora si definisce accelerazione media vettoriale

$$\vec{a}(t_1, t_2) = \frac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

Se facciamo il prolungamento della prima e il prolungamento della seconda, unendoli troviamo $\Delta V = \vec{V_2} - \vec{V_1}$. Il vettore $\vec{V_2} - \vec{V_1}$ è sempre rivolto verso la curva della traiettoria.

L'accelerazione istantanea sarà il limite per $\Delta t \to 0$ di $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ cioè $\frac{d\vec{V}}{dt}$ nonché la derivata fatta rispetto al tempo della velocità vettoriale.

ACCELERAZIONE MEDIA: (caso della cinematica lineare) = vettore diretto sempre verso la concavità

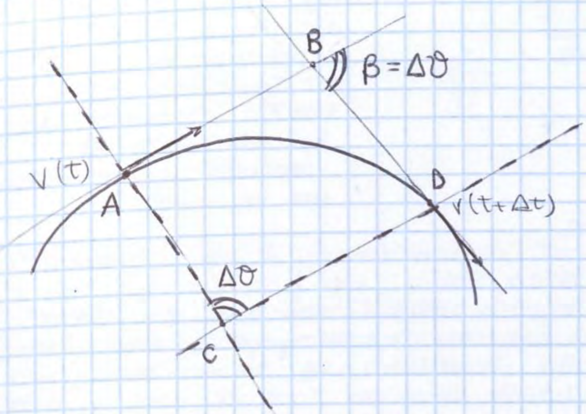
ACCELERAZIONE ISTANTANEA: derivata del vettore velocità rispetto al tempo

Quindi l'accelerazione ha due componenti, una che nasce dalla variazione, dalla rapidità con cui si sta muovendo il corpo e questa accelerazione si chiama ACCELERAZIONE TANGENZIALE perché è diretta lungo $\vec{u}_t$, l'altra accelerazione come è messa? Tutte le volte che abbiamo un vettore di modulo costante la sua derivata è $\perp$ al vettore stesso. Se A è tale che A è costante cioè il suo modulo è costante allora dA/dt è $\perp$ ad A. Quindi la derivata di $\vec{u}_t$ rispetto ad $\vec{u}_t$ sarà uguale ad un vettore $\perp$ ad $\vec{u}_t$ che chiamiamo $\vec{u}_N$ diretto dalla parte della concavità, quindi se $\vec{u}_t \perp$ a $\vec{u}_N$, avremo che

$\frac{d\vec{u}_t}{dt}$ e $/\!/$ $\vec{u}_N$. quindi dobbiamo calcolare queste quantità:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = L \cdot \vec{u}_N$$

L: variazione con t del modulo



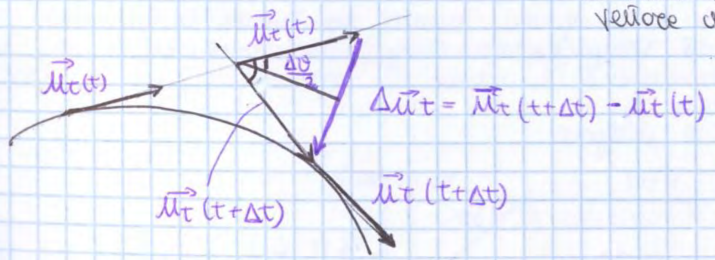
Guardiamo la figura e i vettori al tempo t e al tempo $t+\Delta t$. Questa figura è un quadrilatero ACDB. Chiamiamo l'angolo in C $\Delta\vartheta$ cioè quel punto individuato dalle rette che passano per i punti occupati dalla particella al tempo t e $(t+\Delta t)$. Quando $\Delta t \to 0$, $\Delta\vartheta \to 0$.
Adesso affermiamo che $\beta = \Delta\vartheta$. Vediamo perché:

$\hat{C} = \Delta\vartheta$, $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ per costruzione, $\hat{B} = \pi - \beta$, perché c'è un angolo piano mentre $\hat{D} = \frac{\pi}{2}$. La somma degli angoli interni di un quadrilatero vale 2π quindi:

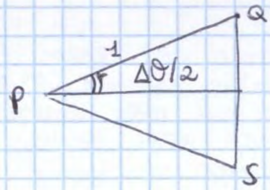
$$\hat{C} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 2\pi$$

$$\Delta\vartheta + \frac{\pi}{2} + \pi - \beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi \implies \Delta\vartheta - \beta = 0 \implies \beta = \Delta\vartheta$$

Rifaccio la figura: versore $\vec{u}$ al tempo t, versore $\vec{u}_t$ al tempo $(t+\Delta t)$, li facciamo scorrere uno sull'altro, hanno modulo 1, il vettore che mi interessa è $\Delta\vec{u}_t$, la variazione del vettore $\vec{u}_t$ avvenuta nel tempo Δt.



Quanto è lungo $\Delta\vec{u}_t$? Dato che il vettore $\vec{u}_t$ ha modulo 1 $\vec{u}_t(t)$ e $\vec{u}_t(t+\Delta t)$ sono uguali, è un triangolo isoscele, quest'angolo vale $\Delta\vartheta$ quindi la metà sarà $\frac{\Delta\vartheta}{2}$.
Dalla trigonometria sappiamo



Possiamo dire che

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta t}$$ = è diretto come $\vec{u}_N$ =

$$= \vec{u}_N \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{u}_t|}{\Delta t} = \vec{u}_N \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \vec{u}_N \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\overline{QS} = |\Delta\vec{u}_t| = 1 \cdot \operatorname{sen}\frac{\Delta\vartheta}{2} \cdot 2$$

Quando $\frac{\Delta\vartheta}{2} \to 0$ il seno di $\frac{\Delta\vartheta}{2} \to 0$

$$|\Delta\vec{u}_t| = 2\,\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\Delta\vartheta}{2}}_{= \frac{\Delta\vartheta}{2}} = \cancel{2} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{\cancel{2}} = \Delta\vartheta$$

Quando $\Delta t \to 0$ la derivata del versore normale è data da quella formula. Quindi la formula di prima che ci dava l'accelerazione del nostro corpo la possiamo scrivere così:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \underbrace{v\,\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \vec{u}_N}$$

Questa prende il nome di ACCELERAZIONE NORMALE

$$a_{//} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_{//}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t)\cdot \overbrace{\cos \Delta\vartheta}^{1} - V(t)}{\Delta t} =$$

quando $\Delta t \to 0$ $\Delta\vartheta \to 0$ e il coseno di zero tende ad 1, quindi...

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

Questa non e' altro che la definizione di derivata del vettore velocità, ed e' diretta lungo la tg alla traiettoria

Per la componente dell'accelerazione $\perp$ alla velocità:

$$a_{\perp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_{\perp}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t)\cdot \overbrace{\operatorname{sen} \Delta\vartheta}^{\Delta\vartheta}}{\Delta t} =$$

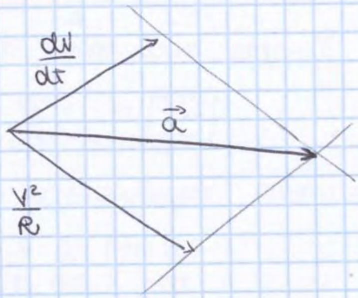
quando $\Delta t \to 0$, $\Delta\vartheta \to 0$, $\operatorname{sen}\Delta\vartheta \to \Delta\vartheta$ il modulo della velocità tende alla velocità che aveva al tempo t, quindi...

$$= \lim_{\Delta t \to 0} V(t) \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = V(t) \cdot \frac{d\vartheta}{dt} =$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{R} \cdot V$$

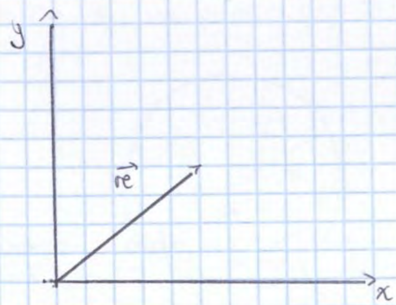
$$= \frac{V^2}{R}$$

Qualunque sia il procedimento troviamo sempre una componente dell'accelerazione tg alla traiettoria che nasce dalle variazioni della lunghezza del vettore velocità e una $\perp$ che nasce dalle variazioni di direzioni. Quanto vale il modulo della velocità In ogni istante se uno usa coordinate intrinseche? Il modulo di un vettore e' uguale alla lunghezza del vettore. Il nostro vettore qui ha 2 componenti: uno lungo la tg che vale dV/dt uno lungo la $\perp$ che vale V^2/R. L'accelerazione complessiva e' questo vettore la cui lunghezza a e' uguale alla somma di queste componente dV/dt al quadrato + V^2/R al quadrato quindi il vettore e' diretto dalla parte della concavità, ha una componente tg che nasce dalle variazioni del modulo, una componente normale che nasce dalle variazioni di direzione.



$$a = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2}$$

Se non voglio scrivere l'accelerazione sotto forma intrinseca, ma volessi scriverla sotto forma cartesiana il calcolo e' il seguente: Nella forma cartesiana tutto e' semplice perchè se questo e' $\vec{r}$ avremo che



$$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$$

La velocità $\vec{V}$ sarà:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y$$

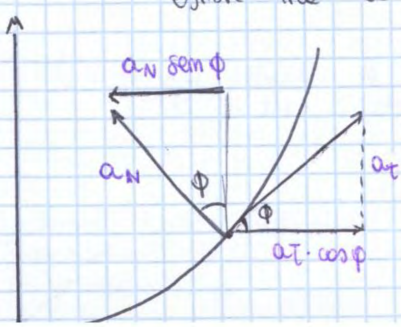
L'accelerazione $\vec{a}$ sarà:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dV_y}{dt}\vec{u}_y$$

oppure possiamo anche scrivere

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\vec{u}_y$$

<u>Problema</u>: Data una particella che si muove di moto piano trovare il legame che esiste tra le componenti cartesiane ed intrinseche dell'accelerazione.



Disegnamo la traiettoria, consideriamo la particella in un determinato punto, in coordinate intrinseche avrà un'accelerazione a_t dove a_t e'

$$a_t = \frac{dV}{dt}$$

e una componente $\perp$ che sarà a_N, a_T e a_N sono tra loro $\perp$. chiamiamo l'angolo ϕ.

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u_r} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot\vec{u_\theta} + \frac{r\,d^2\theta}{dt^2}\vec{u_\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cdot\vec{u_r} =$$

Considerando il moto su un piano, ho soltanto due componenti: uno lungo $\vec{u_r}$ e uno lungo $\vec{u_\theta}$, possiamo raggruppare i termini tra loro paralleli e otteniamo:

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}_{\text{acc. radiale}}\vec{u_r} + \underbrace{\left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}}_{\text{acc. trasversa}}\vec{u_\theta}}$$

Quando abbiamo un corpo che si muove su una traiettoria qualunque, in coordinate polari, l'accelerazione ha sempre una componente radiale che si chiama ACCELERAZIONE RADIALE e un'ACCELERAZIONE TRASVERSA.
Questa formula può ancora essere scritta in un altro modo.
Se si calcolasse questa derivata cosa si troverebbe?

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 2r\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

apparentemente questa non ha nulla a che vedere con la precedente ma se dividere per r ottenere:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Quindi la formula precedente in generale viene scritta così:

$$\boxed{\vec{a} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{u_r} + \left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\}\vec{u_\theta}}$$

Prende il nome di FORMULA DI BINET

Si chiama ACCELERAZIONE RADIALE il termine

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

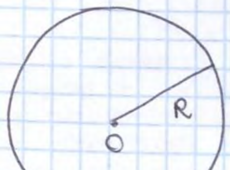
mentre l'ACCELERAZIONE TRASVERSA sarà

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2\,d\theta}{dt}\right)$$

NB Quando i pianeti si muovono hanno solo accelerazione radiale, a_θ è nulla.

Moto circolare.

Se la particella descrive una traiettoria circolare il moto si chiama circolare. Se la traiettoria è circolare, la distanza tra il corpo in moto e un punto (O) è costante. Quindi nel caso di un corpo la cui traiettoria è circolare conviene usare un sistema di riferimento O e con R il raggio, la traiettoria è circolare quindi R è costante; se R è costante, la formula precedente si semplificherà. Quello che prima chiamavamo r, coordinata radiale è costante quindi



$$r = R \implies \frac{dr}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$$

$$\text{e} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = 0$$

Le formule che ci danno velocità e accelerazione del nostro corpo si scrivono.
In generale $\vec{V}$ è uguale:

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$$

se abbiamo un moto circolare questa formula diventa

$$\vec{V} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$$

e l'accelerazione sarà

$$\vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u_r} + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_\theta}$$

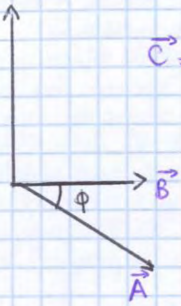
Quando una particella si muove di moto circolare la velocità è tutta trasversa, l'accelerazione ha una componente radiale e una componente trasversa.

Di conseguenza:

$$\begin{cases} x(t) = R \cdot \cos[\omega t + \vartheta(0)] \\ y(t) = R \cdot \text{sen}[\omega t + \vartheta(0)] \end{cases}$$

Queste formule le abbiamo già viste a proposito del moto armonico. Quindi quando una particella descrive una traiettoria circolare con velocità angolare costante, la proiezione del suo punto sull'asse delle x e delle y rappresenta un moto armonico semplice.

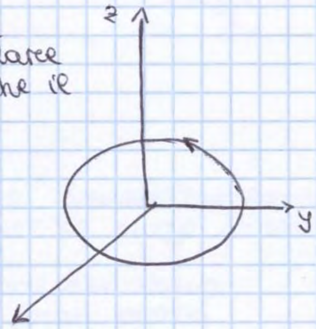
Dati due vettori A e B chiamiamo prodotto esterno C, un vettore di modulo $A \cdot B \cdot \text{sen}\phi$ e la direzione si trova con la regola della mano destra. Quando la gente parla di velocità angolare introduce un vettore che si chiama VELOCITÀ ANGOLARE.



$$\vec{C} = A \times B$$

$$C = A \cdot B \cdot \text{sen}\,\phi$$

Parliamo sempre di moto circolare. Se questa è la traiettoria circolare della particella, sia questo il sistema di rif. xyz e supponiamo che la particella ruoti in questa direzione, si chiama VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE un vettore che ha per ampiezza $d\vartheta/dt$ e direzione e verso è dato dal pollice, secondo la regola della mano destra, quindi andrà moltiplicato per $\vec{u}_z$ se $\vec{u}_z$ è il vettore parallelo all'asse z. Naturalmente se la particella va nell'altro verso allora avremo che $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \vec{u}_z$, quindi bisogna applicare la regola della mano destra. Nel caso del moto circolare uniforme, oppure no, abbiamo visto che il VETTORE VELOCITÀ $\vec{V}$ è uguale a



$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

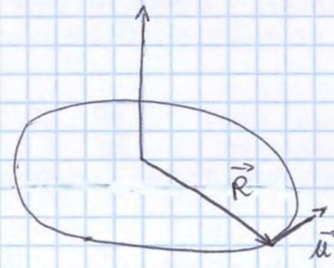
$$\vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{V} = R\,\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \vec{u}_\vartheta$$

questa formula può anche essere scritta:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

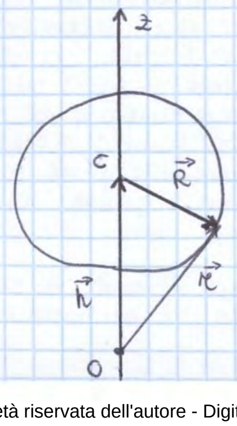
perché se R è il vettore posizione e questo è il versore $\vec{u}_z$ in questo caso la velocità angolare è $\vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt}$ che è uguale ad ω.



Se fate il prodotto esterno di ω esterno $\vec{u}_z$ andate dalla direzione $\vec{z}$ e chiudete verso $\vec{R}$ e in questo caso è proprio il vettore $\vec{u}_\vartheta$ e quindi quando la particella si muove e vogliamo introdurre il vettore velocità angolare: sarà $\perp$ al piano in cui avviene il moto, il verso viene determinato con la regola della mano destra.

$$\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \vec{u}_z = \vec{\omega} \cdot \vec{u}_z$$

A questo punto potremmo chiederci se prendendo un'origine diversa cambia qualcosa. Supponete che ci sia la traiettoria circolare, che questo sia l'asse delle z e l'origine (O) la prendiamo più in basso, chiamiamo questo vettore $\vec{\ }$ e questo vettore $\vec{h}$ che va dal punto in cui abbiamo deciso di prendere l'origine sull'asse di rotazione il centro della circonferenza. Chiamo $\vec{\ }$ la posizione della particella mobile rispetto all'origine O. Quanto vale $\vec{r} \times \omega$? ω è sempre



$$\vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \vec{u}_z$$

Il vettore $\vec{r}$ sarà uguale a $\vec{r} = \vec{h} + \vec{R}$

Ma se è costante vuol dire che non cambia, il valore che aveva al tempo zero è sempre quello, al tempo zero la velocità valeva:

$$V_x = V_x(0) = V_0 \cdot \cos\vartheta_0$$

Il proiettile si muove in modo tale che la componente della velocità // al suolo è costante.

Dalla II troviamo che

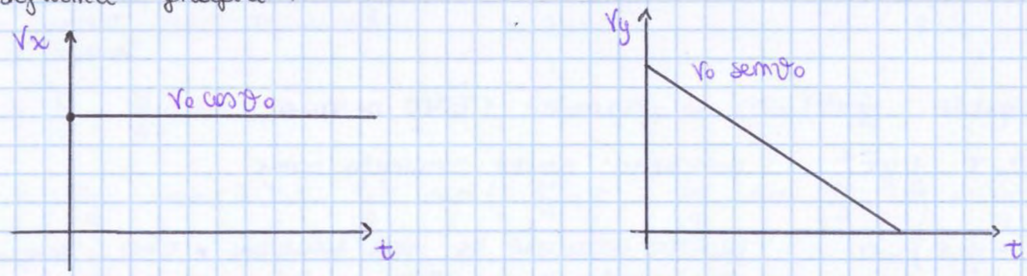
$$dV_y = -g\,dt \quad \text{integrando} \quad \int_{V(0)}^{V(t)} dV_y = -\int_0^t g\,dt =$$

$$V_y(t) - V_y(0) = -gt$$

La velocità lungo l'asse y dipende dal tempo ed è:

$$\Rightarrow V_y(t) = V_y(0) - gt = V_0 \cdot \operatorname{sen}\vartheta_0 - gt$$

Dato che la velocità diminuisce linearmente con il tempo il moto nella direzione della y è un moto uniformemente decelerato. Dalle equazioni trovate ricavo i seguenti grafici:



Al variare del tempo V_y si annullerà, ma si annullerà dopo quale tempo?

Quando $V_0(t^*) = 0$?

$$V_0 \cdot \operatorname{sen}\vartheta_0 - gt^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t^* = \frac{V_0}{g} \cdot \operatorname{sen}\vartheta_0}$$

A seconda dell'angolo di sparo, il tempo affinché la velocità lungo l'asse delle y si annulli dipende dall'angolo.

Conosciamo il moto lungo l'asse delle x, lungo l'asse delle y, allora possiamo calcolare come cambia la posizione. La velocità $\vec{V}$ in coordinate cartesiane era:

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y \quad \text{Da cui} \quad V_x = \frac{dx}{dt} \quad V_y = \frac{dy}{dt}$$

Dalle relazioni precedenti otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_0 \cdot \cos\vartheta_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = V_0 \cdot \operatorname{sen}\vartheta_0 - gt \end{cases}$$

Sono delle equazioni che dobbiamo integrare:

$$dx = V_0 \cdot \cos\vartheta_0 \, dt \longrightarrow \int_{x(0)}^{x} dx = \int_0^t V_0 \cdot \cos\vartheta_0 \, dt$$

$$\longrightarrow x(t) - x(0) = V_0 \cdot \cos\vartheta_0 \cdot t$$

NB $x(0)$ abbiamo detto essere zero; V_0 e $\cos\vartheta_0$ sono costanti e le porto fuori dal simbolo di integrale.

Quindi la legge oraria lungo l'asse delle x è: $\boxed{x(t) = V_0 \cdot \cos\vartheta_0 \cdot t}$

Il moto lungo l'asse delle x è RETTILINEO UNIFORME.

Integrando la II equazione:

$$dy = (V_0 \cdot \operatorname{sen}\vartheta_0 - gt)\,dt \Rightarrow \int_{y(0)}^{y(t)} dy = \int_0^t (V_0 \operatorname{sen}\vartheta_0 - gt)\,dt \Longrightarrow$$

e poi la soluzione che annulla la parentesi graffa:

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 - \frac{g}{2V_0^2 \cdot \cos^2\vartheta_0} R = 0$$ ricaviamo R

$$R = \frac{2V_0^2}{g} \cdot \operatorname{tg}\vartheta_0 \cdot \cos^2\vartheta_0$$ scriviamo $\operatorname{tg}\vartheta_0$ come $\operatorname{sen}\vartheta_0 / \cos\vartheta_0$

$$R = \frac{2V_0^2}{g} \frac{\operatorname{sen}\vartheta_0}{\cancel{\cos\vartheta_0}} \cdot \cos^{\cancel{2}}\vartheta_0 = \frac{V_0^2}{g} \cdot 2\operatorname{sen}\vartheta_0 \cdot \cos\vartheta_0$$

dalla trigonometria sappiamo che $2\operatorname{sen}\vartheta_0 \cdot \cos\vartheta_0$ è uguale a $\operatorname{sen}(2\vartheta_0)$

$$\boxed{R = \frac{V_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen}(2\vartheta_0)}$$

Galileo si era accorto che se uno spara con angoli di sparo che differiscono da $\frac{\pi}{4}$ per lo stesso angolo, la gittata è la stessa. A parità di angolo di sparo e a parità di acc. gravità la gittata massima si ha quando

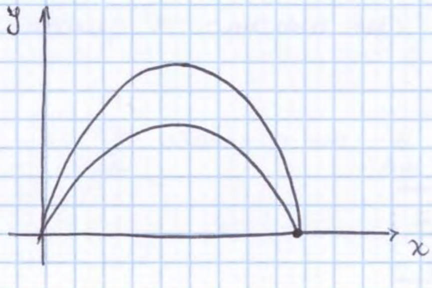
$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$$ GITTATA MASSIMA e la R massima sarà: $R_M = \frac{V_0^2}{g}$

Se $\vartheta_1 = \frac{\pi}{4} + \varepsilon$ e $\vartheta_2 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ la gittata è la stessa. Calcolando R_1 e R_2:

$$R_1 = \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen}(2\vartheta_1) = \frac{V_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) = \frac{V_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\varepsilon\right) = \frac{V_0^2}{g} \cdot \cos\varepsilon$$

$$R_2 = \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen}(2\vartheta_2) = \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) = \frac{V_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\right) = \frac{V_0^2}{g} \cos\varepsilon$$

Per angoli di tiro che differiscono da $\frac{\pi}{4}$ per la stessa quantità, la gittata è la stessa. La gittata è la stessa ma il tempo di volo è diverso. Cadono nello stesso punto ma l'altezza MAX e tempo di volo sono diversi.



Qual è la parabola di sicurezza? Qual è la curva che mi dice la zona che non verrà mai raggiunta dal proiettile? Le grandezze definite sono V_0 velocità di sparo e poi quella che conta è la gravità.
Chiamiamo momentaneamente la tangente di ϑ_0 K che varia da 0 a $+\infty$

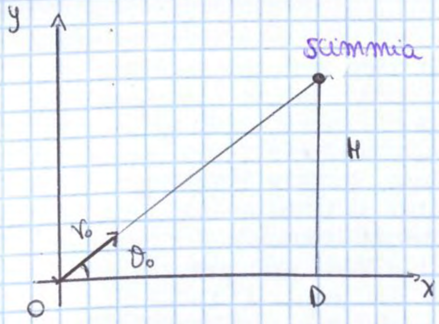
$\operatorname{tg}\vartheta_0 = K$ sappiamo anche che

$$\cos\vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta_0}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\vartheta_0} = 1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_0 = 1 + K^2$$

Scriviamo l'equazione della traiettoria in termini di questa nuova grandezza K; che è legato all'angolo di tiro quindi può variare mentre V_0 e g sono fissi

$$y = K \cdot x - \frac{g}{2V_0^2}(1+K^2)x^2$$ pongo $\frac{g}{2V_0^2} = B$

$$y = K \cdot x - B(1+K^2)x^2$$ Dividiamo per x^2



Le eq. che descrivono il moto del proiettile del cacciatore sono:

$$\begin{cases} x_p = v_0 \cdot \cos\vartheta_0 \cdot t \\ y_p = v_0 \cdot \operatorname{sen}\vartheta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

La scimmia cade e rispetto a questo sistema di riferimento avrà coordinate

$$\begin{cases} x_s = D \\ y_s = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Se avviene l'impatto, ad un certo tempo t^* si deve avere

$$\begin{cases} x_p(t^*) = x_s(t^*) \\ y_p(t^*) = y_s(t^*) \end{cases}$$

Queste definiscono il tempo in cui vengono a contatto

$$\begin{cases} v_0 \cos\vartheta_0 t^* = D \\ v_0 \cdot \operatorname{sen}\vartheta_0 t^* \cancel{- \frac{1}{2} g t^{*2}} = H \cancel{- \frac{1}{2} g t^{*2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 \cos\vartheta_0 t^* = D \\ v_0 \operatorname{sen}\vartheta_0 t^* = H \end{cases}$$

dividendo membro a membro la II per la I.

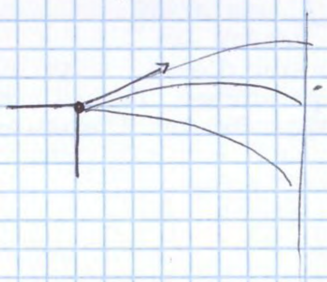
$$\operatorname{Tg}\vartheta_0 = \frac{H}{D}$$

Dalla figura emerge però che

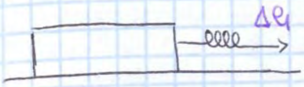
$$H = D \cdot \operatorname{Tg}\vartheta_0$$

Quindi quella relazione è sempre verificata.

(NB) la colpisce sempre se non c'è la terra! Cioè se il cacciatore è qui su e mira in questa direzione la scimmia cade e comunque vadano le cose la colpisce sempre, se c'è la terra il problema è che la D deve essere almeno uguale alla gittata, altrimenti tocca terra prima.

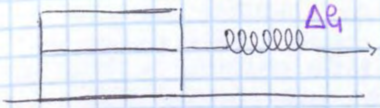


Si fa anche questo tipo di esperimento: uno prende un oggetto, lo collega ad una deformazione Δl_1 e misura un'accelerazione a_1



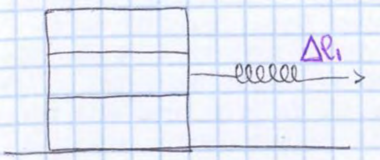
a_1

Adesso, invece di considerare un unico oggetto ne considero due, uno sull'altro, e applicando lo stesso Δl_1 ho un'accelerazione $a_1/2$



$$a_2 = \frac{a_1}{2}$$

Se invece di metterne uno ne metto 3 lasciando sempre la stessa deformazione l'accelerazione a_3 e' $a_1/3$. Quindi l'accelerazione e' inversamente proporzionale al numero di blocchi che metto uno sull'altro che indico con una grandezza che si chiama massa. Quindi l'esperimento ci dice che



$$a_3 = \frac{a_1}{3}$$

$$a \propto \frac{1}{\text{numero di blocchi}}$$

$$\rightarrow a \propto \frac{1}{M}$$

Questi esperimenti ci hanno fatto capire che l'accelerazione e' direttamente prop. alla deformazione dell'oggetto dell'oggetto diviso il numero di oggetti, o se volete a, essendo Δl prop. alla Forza ed il numero di blocchi e' prop. alla massa, e' proporzionale a F/M. Questa e' una legge sperimentale e prende il nome di legge fondamentale della dinamica. Stabilito un certo sistema di unita' di misura la formula posso scriverla:

$$a \propto \frac{\Delta l}{N}$$

$$a \propto \frac{F}{M}$$

$$a = \frac{F}{M}$$

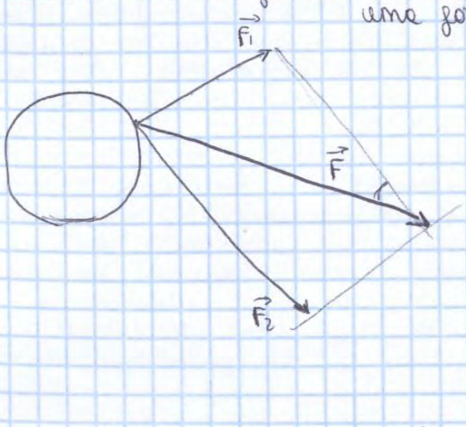
si chiama legge fondamentale della dinamica e ci dice che l'accelerazione di un corpo sottoposto ad una forza e' direttamente prop. alla forza e' inv. proporzionale alla massa. Detta anche LEGGE DI NEWTON.

Analisi dimensionale della forza: (grandezza derivata)

$$[F] = [M] \cdot [a] = M \cdot \frac{L}{T^2} = kg \ \frac{m}{s^2} = N$$

Non e' sempre stato così: fino al 1960 gli ingegneri avevano il loro sistema di misura dove la forza era l'unita' fondamentale e la massa una grandezza derivata.

Prossimo passo: l'accelerazione e' un vettore, quindi quella relazione va intesa in senso vettoriale? Si. Se guardiamo questo disco dall'alto ed applicare una forza F_1 ed una forza F_2, si vede che il corpo si muove come se fosse sotto l'azione della forza $\vec{F}$ (risultante di F_1 e F_2).



Quindi la forza e' una grandezza vettoriale ed il loro effetto sul nostro disco e' quello d'avere e' l'effetto di un vettore somma ottenuto con la regola del parallelogramma. Quindi la relazione di Newton che abbiamo visto prima si può scrivere:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{M}$$

Questa forza come si manifesta? La forza e' collegata a qualche proprietà che hanno i corpi, la forza e' responsabile dell'accelerazione. La forza e' collegata alla NATURA DEI CORPI. Esistono dei corpi ELETTRICAMENTE CARICHI, la carica elettrica e' una proprietà di un corpo, e quando un corpo ce l'ha e' in

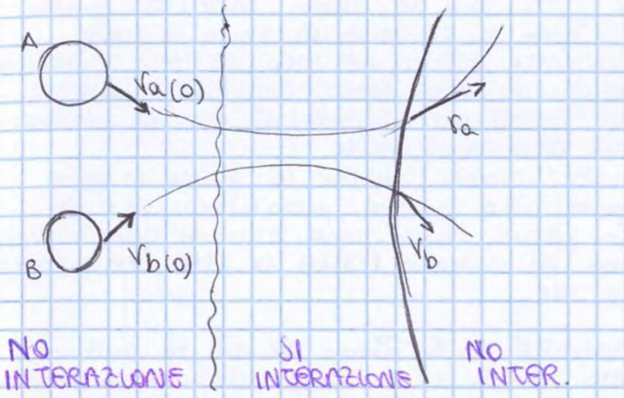
Se io conosco come la forza dipende con il tempo, da lì posso ricavare delle informazioni importanti.
Se è noto $F = F(t)$ allora dalla formula precedente otteniamo:

$$d\vec{P} = \vec{F}\,dt \quad \text{integriamo} \quad \int_{P(0)}^{P(t)} dP = \int_0^t \vec{F}\,dt \quad \text{otteniamo}$$

$$= \vec{P}(t) - \vec{P}(0) = \int_0^t \vec{F}\,dt = \vec{J}$$

questo integrale prende il nome di IMPULSO e si indica con $\vec{J}$. Impulso di $\vec{F}$ ceduto ad M.
Quindi la variazione di quantità di moto è uguale all'impulso della forza.

Cartesio, filosofo francese, diceva che Dio ha creato il mondo con una precisa quantità di movimento. Se Dio non continua a mettere qualcosa nel sistema, la quantità di moto rimane costante.
Vediamo questo esperimento: consideriamo due cuscini ad aria A e B che hanno una certa massa ed una certa velocità e li lanciamo in modo tale che ad un certo punto si urtino. Se invece sono dei magneti si avvicinano fino ad un certo punto e poi si respingono. Sia $V_a(0)$ e $V_b(0)$ le velocità iniziali dei corpi, i corpi si avvicinano e poi dopo un po', quando non risentono più della loro interazione, quindi a sinistra non c'è interazione, a destra nemmeno, mentre al centro sì, cioè uno si accorge dell'altro. È chiaro che se i corpi non sono magnetici i corpi si urtano e poi si respingono.
Alla fine il corpo A avrà una velocità $\vec{V_a}$ e il corpo B avrà una velocità $\vec{V_b}$.



Scriviamo il Teorema della quantità di moto per il corpo A; che è sottoposto alla forza $\vec{F}_{B,A}$

$$\vec{P_A}(t) - \vec{P_A}(0) = \int_0^t \vec{F}_{B,A}\,dt$$

Se prendo il corpo B esso risente di una forza generata dal corpo A cioè $\vec{F}_{A,B}$

$$\vec{P_B}(t) - \vec{P_B}(0) = \int_0^t \vec{F}_{A,B}\,dt.$$

Sommando membro a membro le due relazioni ottengo:

$$\left[\vec{P_A}(t) + \vec{P_B}(t)\right] - \left[\vec{P_A}(0) + \vec{P_B}(0)\right] = \int_0^t (F_{B,A} + F_{A,B})\,dt$$

$$\vec{P_A}(t) - \vec{P_B}(t) = \vec{P_A}(0) + \vec{P_B}(0)$$

Sperimentalmente si è riusciti a calcolare le traiettorie di questi oggetti e noti gli spostamenti si sono calcolate le velocità, le masse erano note e quindi sono risaliti alle quantità di moto.
Sperimentalmente si è trovato che queste somme non cambia mai. La quantità di moto ad un certo tempo T è uguale alla quantità di moto al tempo iniziale. La quantità di moto complessiva delle particelle che si muovono rimane costante. Se questa somma rimane costante è chiaro che questo secondo membro deve essere zero

$$\int_0^t (\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB})\,dt = 0$$

sempre! Qualunque sia t. L'integrale di una funzione è sempre zero, indipendentemente dagli estremi di integrazione solo quando la funzione è zero:

$$\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = 0 \longrightarrow \vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Abbiamo ritrovato il principio di azione - reazione.

La pallina tocca terra quando $y = 0$ quindi $0 = h_0 - \frac{1}{2} g T_c^2$ dove T_c e' il tempo di caduta.
che sara' uguale a:

$$t_C = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

passato questo tempo quanto vale il modulo della velocita'?

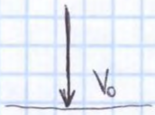
Noi sappiamo che

$$V_0 = g \cdot T_c$$

sostituendo T_c che abbiamo precedentemente ricavato

$$V_0 = g \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{2gh_0}$$

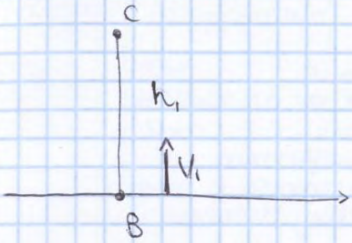
Quindi la velocita' sara'



e' diretta lungo y ed ha un segno meno davanti perche' ha verso contrario rispetto alla direzione degli assi.

$$V_0 = -\sqrt{2gh_0}$$

Andiamo adesso ad analizzare la fase di salita: durante questa fase il corpo va dal punto B al punto C che si trova ad un'altezza h_1, con velocita' V_1
Quindi la velocita' V e lo spazio y saranno



$$\begin{cases} V = V_1 - gt \\ y = V_1 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Nel punto di altezza massima che e' il punto C, la velocita' e' uguale a zero:

$$V = 0 \implies V_1 - g t_s = 0$$

t_s = tempo di salita

da cui si ricava che

$$t_S = \frac{V_1}{g}$$

Arrivata al punto C si verifica che y e' uguale ad h_1

$$h_1 = V_1 T_s - \frac{1}{2} g t_s^2$$

$$h_1 = V_1 \cdot \frac{V_1}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_1^2}{g^2} \longrightarrow h_1 = \frac{V_1^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{V_1^2}{g} = \frac{V_1^2}{2g}$$

Quindi la velocita' con cui il corpo riparte per andare verso l'alto, se deve raggiungere l'altezza h_1 e'

$$V_1 = \sqrt{2gh_1}$$

e quindi dopo l'urto la velocita' e'

$$\vec{V}(\tau) = \sqrt{2gh_1} \cdot \vec{u_y}$$

Quanto vale la forza media?

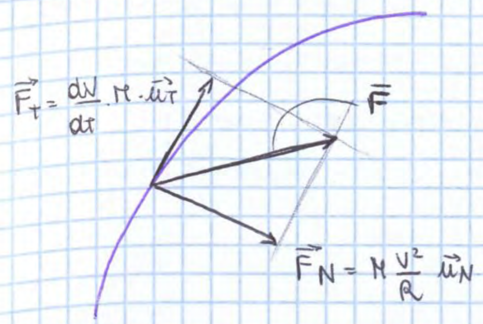
$$\vec{P}(0) = M \cdot \vec{V}(0) = M\sqrt{2gh_0} \cdot \vec{u_y}$$

$$\vec{P}(\tau) = M \, \vec{V}(\tau) = M\sqrt{2gh_1} \cdot \vec{u_y}$$

Sostituendo queste espressioni nella relazione precedente, troviamo che la forza media e':

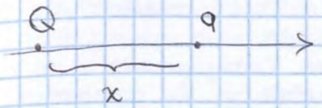
$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{M\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_0}\right)}{\tau} \cdot \vec{u_y}$$

NB La forza media si trova facendo la differenza tra la variazione di quantita' di moto al tempo t meno quella al tempo zero fratto l'intervallo.



Anche per la forza $\vec{F}$ è possibile stabilire una forza tangente ed una forza normale. Quindi risolvendo un problema occorre ricordare queste cose.

Abbiamo detto che le forze sono sempre legate ad una proprietà dei corpi. La forza di Coulomb dice che data una carica Q e una carica q, messe ad una certa distanza x, fra queste due particelle, si esercita una forza repulsiva (le cariche hanno lo stesso segno), uguale a



$$\vec{F} = k \frac{Q \cdot q}{x^2}$$

dove k è una costante il cui valore è 9×10^9

Questo è un esempio di forza. Può essere di natura sia attrattiva che repulsiva, c'è una forza simile che è la forza di natura gravitazionale che è solo attrattiva.

Problema: Supponiamo di avere queste condizioni iniziali

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = x_0 \\ v = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che Q è fissa, quando lascio libera q, questa è respinta e si muoverà verso dx. Per la legge di Newton avremo che la massa della particella per l'accelerazione con cui la particella si muove è uguale alla forza che si esercita sulla particella. (la particella si muove in linea retta lungo l'asse delle x)

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

L'accelerazione sarà $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x$ quindi...

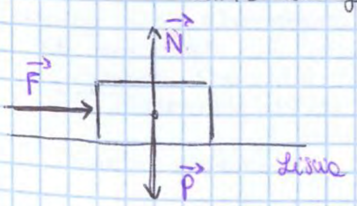
$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x = k \frac{Q \cdot q}{x^2} \vec{u}_x$$

questa è l'eq. differenziale del moto. C'è un'unica componente x,

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = k \frac{Q \cdot q}{x^2}$$

eq. differenziale, risolverla è complicato. L'accelerazione cambia, infatti quando la particella è lontana l'accelerazione tende a zero perché la forza quando la distanza tra le particelle è infinita è zero.

Problema: siamo su una superficie liscia e abbiamo un corpo e gli applichiamo una forza, come si muoverà il corpo. La superficie liscia vuol dire che il sistema è come se fosse a cuscino d'aria. La forza che applico è costante e parallela al piano. Le forze in gioco sono: sono la forza peso, poi il piano dà origine ad una reazione vincolare, e $\vec{F}$ è la forza che io applico. Noi consideriamo forze costanti anche se una caratteristica fondamentale delle forze è che queste in genere cambiano con la ~~forza~~ posizione relativa dei corpi in interazione. La legge di Newton dice che la risultante di queste forze è uguale alla massa x l'accelerazione



$$\vec{R} = M \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P} = M \cdot \vec{a}$$

questa è l'equazione vettoriale. Da questa eq. vettoriale dobbiamo scomporre il movimento lungo gli assi:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{N} = N \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{P} = -P \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{a} = a \cdot \vec{u}_x$$

In questo caso il movimento può soltanto avvenire lungo l'asse delle x. La forza $\vec{N}$ nasce perché il corpo è su un piano

$$F\cos\varphi\,\vec{u_x} + F\sin\varphi\,\vec{u_y} + N\vec{u_y} - P\vec{u_y} = M\cdot a\cdot\vec{u_x}$$

$$F\cos\varphi\,\vec{u_x} + (F\sin\varphi + N - P)\,\vec{u_y} = M\cdot a\cdot\vec{u_x}$$

$$\begin{cases} F\cos\varphi = M\cdot a \\ F\sin\varphi + N - P = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{F}{M}\cdot\cos\varphi \\ N = P - F\sin\varphi \end{cases}$$

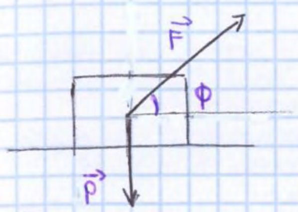
La reazione N e' sempre positiva perche' il piano può solo spingere verso l'alto, quindi tutto questo e' valido se $\underline{N > 0}$ cioe' se

$$P - F\sin\varphi > 0$$

$$P > F\sin\varphi$$

Se questa condizione NON e' verificata, cioe $\underline{N < 0}$ il corpo non e' a contatto con il piano, impossibile.

Supponiamo che il calcolo ci dica che $\vec{P}$ e' minore di $F\cdot\sin\varphi$ allora vuol dire che il piano non regge nulla, non c'e' reazione vincolare, la risultante sarà data solo da



$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}$$

$$\vec{F} + \vec{P} = M\cdot\vec{a}$$

in cui $\vec{F}$ e' sempre:

$$\vec{F} = F\,(\cos\varphi\,\vec{u_x} + \sin\varphi\,\vec{u_y})$$

e $P = -P\,\vec{u_y}$

Se non c'e' reazione vincolare allora l'accelerazione avrà una componente x e una componente y

$$\vec{a} = a_x\,\vec{u_x} + a_y\cdot\vec{u_y}$$

L'equazione vettoriale diventa:

$$F\cos\varphi\,\vec{u_x} + F\sin\varphi\,\vec{u_y} - P\vec{u_y} = M\cdot(a_x\,\vec{u_x} + a_y\cdot\vec{u_y})$$

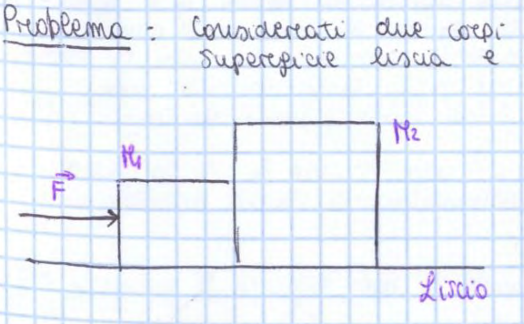
$$F\cos\varphi\,\vec{u_x} + (F\sin\varphi - P)\,\vec{u_y} = M a_x\cdot\vec{u_x} + M\cdot a_y\,\vec{u_y}$$

$$\begin{cases} F\cos\varphi = M\cdot a_x \\ F\sin\varphi - P = M\cdot a_y \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = \frac{F}{M}\cos\varphi \\ a_y = \frac{F-P}{M}\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

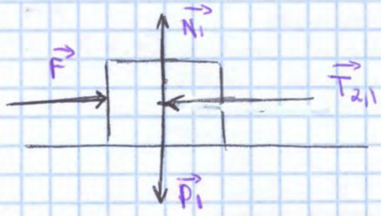
→ questa quantità e' positiva perche' stiamo considerando il caso in cui $P < F\sin\varphi$

(NB) Quando la reazione vincolare e' negativa il corpo non appoggia sulla superficie ma si muove liberamente.
Stessa cosa vale per un filo, il filo può essere solo in trazione, non può essere in compressione.

<u>Problema</u>: Considerati due corpi uno di massa M_1 e uno di massa M_2, appoggiati su una superficie liscia e applico su M_1 una forza parallela al piano



Per risolvere questo problema facciamo il DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO; diagramma in cui non si considera il sistema dei corpi ma un corpo solo alla volta. Consideriamo prima il corpo 1 che e' soggetto al peso, alla reazione vincolare, alla forza che noi applichiamo



Il corpo si muove lungo l'orizzontale quindi

$$N_1 = P_1$$

$$\vec{F} - T = M_1\cdot a_1$$

Il movimento lungo l'asse delle x sarà:

$$\begin{cases} T = M_1 \cdot a \\ F - T = M_2 \cdot a \end{cases}$$

sommando membro a membro ottengo

$$F = (M_1 + M_2)\,a \quad \text{da cui} \quad a = \frac{F}{M_1 + M_2}$$

La tensione T sarà:

$$T = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot F$$

ma se la fune sopporta al massimo il carico T_0 dobbiamo avere che

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot F < T_0$$

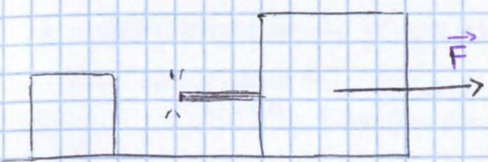
Quindi può essere applicata una forza massima F il cui modulo è

$$\boxed{F \leq \frac{M_1 + M_2}{M_1} \cdot T_0}$$

Se questa relazione non è verificata e

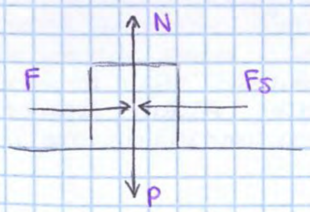
$$F > \frac{M_1 + M_2}{M_1} \cdot T_0$$

la fune si spezza, i due corpi sono liberi, non è più un sistema, e solo il corpo M_2 è sottoposto alla forza, ed in questo caso l'accelerazione a è semplicemente



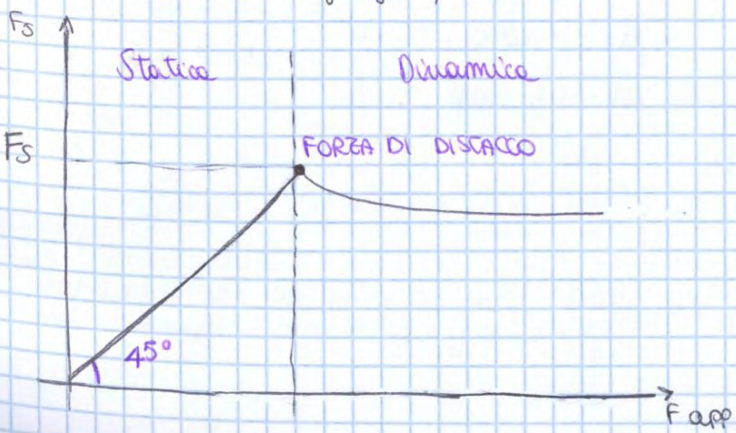
$$a = \frac{F}{M_2}$$

Fino ad ora abbiamo sempre definito il piano liscio. Se io prendo una moneta e la tiro questa dopo un po' si ferma. La forza responsabile di questo effetto viene chiamata ATTRITO RADENTE. L'attrito radente è una reazione orizzontale che ha verso opposto al movimento, qual è l'origine di questa forza? Non si sa ancora di preciso. Un corpo a livello macroscopico sembra liscio ma a livello microscopico è come se ci fossero delle asperità e quindi quando il corpo si muove deve rompere tutti questi contatti, questa è la I interpretazione, la II interpretazione è: quando due corpi sono vicini ci sono delle forze di coesione, forze di Van der Vaals che danno origine a dei collegamenti che impediscono che il corpo si muova. Queste forze che noi chiamiamo di ATTRITO RADENTE cioè legate al corpo che si muove su un altro corpo perchè ci sono anche fenomeni di ATTRITO VOLVENTE che si manifestano invece quando un corpo ruota. Se consideriamo una sedia su di essa agiscono: la forza peso, la reazione del piano, se il piano è inclinato la sedia man mano che inclino il piano scivola. Questa forma di attrito si chiama ATTRITO STATICO. Questo vuol dire che se ad un corpo inizialmente fermo, applico una forza, nasce subito nell'altro verso una forza che la bilancia.



F_s = forza di attrito statico, uguale a quella che applichiamo noi.

Consideriamo un grafico, dove sull'asse x inserisco la forza applicata e sull'asse y la forza di attrito statico. Applico una forza ed il corpo sta fermo, applico una forza ancora più grande ed il corpo sta fermo, tutte le volte che il corpo sta fermo, la forza di attrito è uguale a quella applicata, e quindi trovo una retta inclinata a 45°.



Se immaginiamo di spingere una cassa notiamo che una volta messa in moto la forza applicata per tenerla in moto è più piccola di quella che servirà per farla muovere. Quindi in questa I regione c'è una certa forza max

$-f_s + P\,sen\varphi = 0$ da cui $f_s = P \cdot sen\varphi \longrightarrow f_s = M \cdot g \cdot sen\varphi$

Quindi f_s deve contemporaneamente essere uguale a questa quantità $(M \cdot g \cdot sen\varphi)$ ed essere minore di $\mu_s \cdot M g \cos\varphi$. Si ha equilibrio fino a che

$$\cancel{M} \cdot \cancel{g} \cdot sen\varphi \le \mu_s \cdot \cancel{M} \cdot \cancel{g} \cdot \cos\varphi$$

$$Tg\,\varphi \le \mu_s$$

Se questa relazione è soddisfatta il corpo sta fermo, altrimenti si muove. Se $tg\,\varphi > \mu_s$ si ha movimento. Se si ha movimento, l'attrito è dinamico

f = attrito dinamico (f_K)

f_K è noto, ed è uguale $f_K = \mu_K \cdot N = \mu_K \cdot P \cdot \cos\varphi = \mu_K \cdot M \cdot g \cdot \cos\varphi$

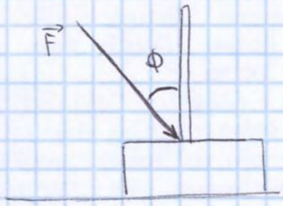
Abbiamo movimento. La forza totale lungo l'asse delle x è

$P\,sen\varphi - f_K = M \cdot a$ sostituendo il valore trovato otteniamo

$\cancel{M} \cdot g \cdot sen\varphi - \mu_K \cancel{M} \cdot g \cos\varphi = \cancel{M} \cdot g$ raccogliendo g, a risulta:

$a = g\,(sen\varphi - \mu_K \cos\varphi)$ In presenza di attrito dinamico, il corpo si muove con questo valore di accelerazione, si muove di moto uniformemente accelerato.

<u>Problema per casa</u>: Data una scopa se usata con una certa inclinazione si spacca il manico. Voi applicate una forza e dovete studiare il minimo valore di φ affinché il manico non si rompa e la scopa scorra in avanti.



Se la parentesi è positiva esiste movimento, se $\phi > \Phi$, allora il corpo m è in equilibrio fino a che

$$F \leq \mu_s \frac{m \cdot g}{\operatorname{sen}\phi - \mu_s \cos\phi}$$

Se questa condizione non è verificata abbiamo movimento.

quindi se $\phi > \Phi$

m è in equilibrio solo se la forza è più piccola di questo valore

Se la forza è più grande di questo valore, riscriviamo l'equazione, (il corpo si muove) quindi f è la forza di attrito dinamico ed è:

$$f = f_k = \mu_k \cdot N$$

L'eq. vettoriale diventa $\vec{F} + \vec{N} + m \cdot \vec{g} + \vec{f_k} = m \cdot \vec{a}$

$$\left(F \operatorname{sen}\phi \, \vec{u_x} - F \cos\phi \, \vec{u_y}\right) + N \, \vec{u_y} - m \cdot g \, \vec{u_y} - \mu_k N \, \vec{u_x} = m \cdot a \, \vec{u_x}$$

$$\left(F \operatorname{sen}\phi - \mu_k \cdot N\right) \vec{u_x} + \left(N - m \cdot g - F \cos\phi\right) \vec{u_y} = m \cdot a \, \vec{u_x}$$

Da questa deduciamo:

$$\begin{cases} F \operatorname{sen}\phi - \mu_k N = m \cdot a \\ N - m \cdot g - F \cdot \cos\phi = 0 \end{cases}$$

dalla II equazione deduciamo:

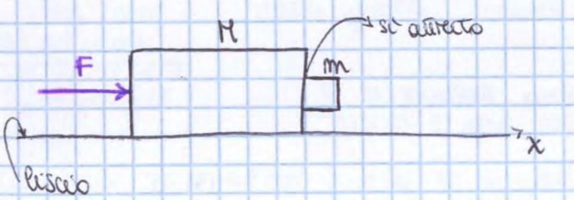
$$N = m \cdot g + F \cdot \cos\phi$$

sostituendolo nella I equazione:

$$F \operatorname{sen}\phi - \mu_k \left(m \cdot g + F \cos\phi\right) = m \cdot a \longrightarrow a = \frac{F}{m} \left(\operatorname{sen}\phi - \mu_k \cos\phi\right) - \mu_k g$$

NB) Tutte le volte che c'è attrito, l'attrito statico è l'incognita e stabilire sotto quali condizioni il movimento è possibile.

2° ESERCIZIO: Messa la moneta su di un palmo, tra moneta e mano c'è attrito, se io muovo sufficientemente forte la moneta non cade, però c'è un valore critico. Qual è la minima accelerazione con cui devo muovere la mano affinché la moneta non cade? Metto un piano d'appoggio ma solo come riferimento e ovviamente è liscio.

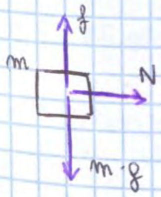


M è la mano, m è la moneta, quanto deve valere F grande affinché il corpo m non cada? Se la forza F = 0 m cade.

Facciamo il diagramma di corpo libero: se m non cade, l'accelerazione della moneta e quella della mano è la stessa

$$a_m = a_M$$

(fino a quando il corpo non cade)

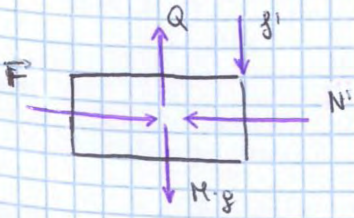


N è la forza trasmessa da M; m·g è la sua forza peso; se c'è attrito da mano e moneta, dato che il corpo tende a scendere la forza di attrito è diretta verso l'alto.

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} N = m \cdot a \\ f_s = m \cdot g \end{cases}$$

Il corpo si muove solo sull'asse della x, sull'asse della y c'è equilibrio, il corpo non si muove quindi f è una f_s e f_s deve essere

$$f_s \leq \mu_s \cdot N$$



F è la forza che io applico; M·g è la sua forza peso; Q è la reazione del piano, ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria quindi dal contatto reciproco nascono N' e f' uguali ed opposte a N e f.

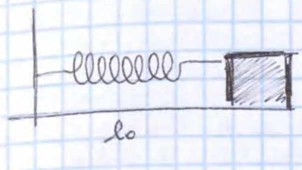
La condizione affinché non ci sia movimento relativo diventa:

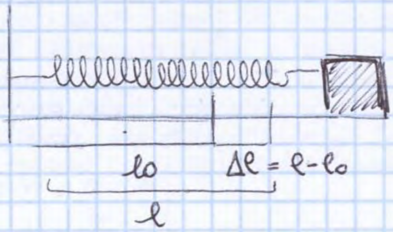
$$T \le \mu_s \cdot m \cdot g \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{m}}{m+M} \cdot F \le \cancel{m} \cdot g \quad \Rightarrow \quad \boxed{F \le \mu_s (m+M) g}$$

La forza di attrito deve essere più piccola di questo valore.

Se questa disuguaglianza se non è soddisfatta, l'attrito non ce la fa a spingere la cassa, la cassa comincia a slittare indietro e quindi c'è un movimento della cassa rispetto al camion, un moto relativo.

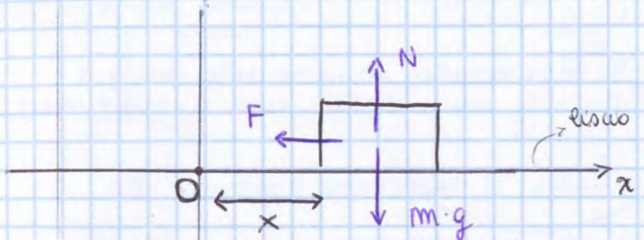
Parlando della dinamica, abbiamo definito la forza come la grandezza che si misura con il dinamometro, se prendiamo un corpo e lo deformiamo, c'è una forza proporzionale alla deformazione. Abbiamo una parete, una molla che ha una certa lunghezza l_0 e a questa attacchiamo un corpo. Se la molla non è deformata non c'è forza. Adesso immaginiamo di modificare la molla, di dare al corpo questa nuova posizione e allungare la molla di una quantità l, questa sarà l_0 e quindi Δl è l'allungamento.





Quando Δl è positivo viene richiamato nella posizione iniziale, se $\Delta l < 0$ il corpo sarebbe spinto verso dx.

Usiamo un sistema di riferimento, dove 0 coincide con la posizione della molla indeformata, quando x è > 0 la molla è allungata, quando x è < 0 la molla è negativa.



Quando siamo nella posizione individuata dalla coordinata x, sul nostro corpo si esercita una forza F proporzionale alla deformazione x e se la molla è deformata la forza è verso sx, se la molla è compressa la forza è verso dx.

Se il corpo è appoggiato su un piano liscio che le forze verticali si equilibrano.

$N = m \cdot g$

Sulla componente orizzontale possiamo dire che m * una certa accelerazione è uguale a F, però quando x è positivo è dalla parte opposta ed è proporzionale allo spostamento.

$m \cdot a = F$

$$\boxed{m \cdot a = -Kx}$$

K si chiama, nel caso di una molla, COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA, è una proprietà della molla. x è la deformazione.

Questa vale solo se la molla è poco deformata.

$$F = -Kx \quad \rightarrow \quad [K] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{N}{m} = kg\,\frac{\cancel{m}}{s^2} \cdot \frac{1}{\cancel{m}} = \frac{kg}{s^2}$$

più K è grande, più è difficile deformare il sistema, più K è piccolo, più il sistema è facilmente deformabile.

Il corpo una volta spostato dalla posizione di equilibrio si muove soltanto su una retta orizzontale. Dalle relazioni precedenti risulta che

$$\boxed{a = -\frac{K}{m} \cdot x}$$

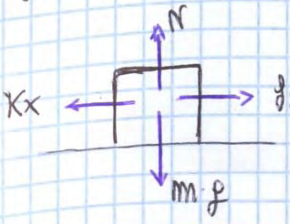
Quest'equazione l'abbiamo già vista in forma leggermente diversa. Parlando del moto armonico semplice abbiamo detto che x è

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$ dove ω si misura in $1/s$

e abbiamo anche detto:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad e \quad a = \frac{\Delta v}{dt} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow \boxed{a = -\omega^2 x}$$

forza di attrito statico. Se la molla cerca di portare il corpo verso sx, l'attrito va verso dx. Quindi qui c'è una forza che fino a quando siamo in equilibrio è f_s. In condizioni di equilibrio la somma di tutte queste forze deve essere zero.



Quindi:

(x) $f_s - Kx = 0 \longrightarrow f_s = k \cdot x$

(y) $N - m \cdot g = 0 \longrightarrow N = m \cdot g$

Ma noi sappiamo che f_s deve essere minore all'attrito massimo quindi

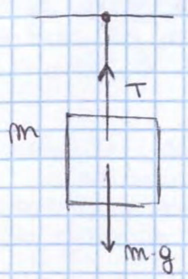
$$f_s \leq \mu_s \cdot N \implies k x \leq \mu_s \cdot m \cdot g$$

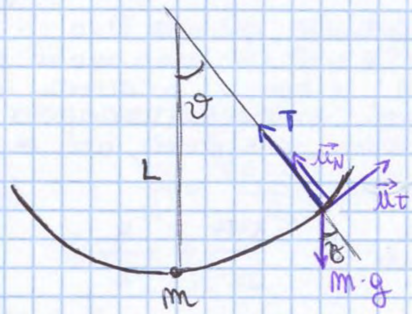
quindi la max deformazione deve essere

$$x \leq \mu_s \frac{m \cdot g}{k}$$

Se è verificata questa condizione il corpo rimane in equilibrio altrimenti no.

Tutti questi moti facevano intervenire il moto solo lungo una direzione. Se abbiamo un corpo messo nel campo della gravità, ha una sua massa, un suo peso e quando è in equilibrio $T = m \cdot g$. Se lo sposto dalla verticale cosa capita? Parleremo di fili cioè di sistemi che sopportano la trazione ma non la compressione, a differenza delle barre. Cosa capita quando un corpo di questo tipo viene allontanato dalla posizione di equilibrio? Il filo è nullo cioè ha massa nulla. Se il corpo occupa una II posizione, chiamiamo con ϑ l'angolo che il filo (teso!) forma con la verticale, se il filo è collegato ad un punto di sospensione ci sarà una tensione T (blu)





La legge di Newton sarà:

$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ dove $\vec{F}$ è risultante $\vec{F} = \vec{T} + m \cdot \vec{g}$

Dato che il moto non è lungo una retta, dobbiamo tenere conto che l'accelerazione ha una componente tg e una normale, quindi l'eq. di Newton diventa:

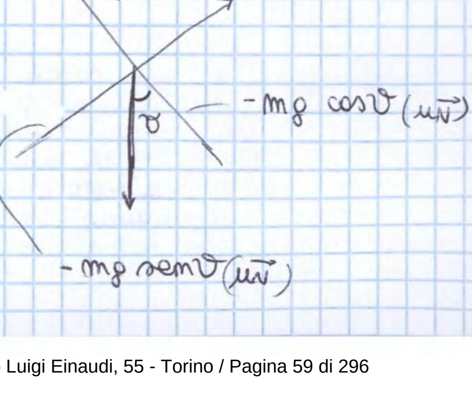
$$\vec{T} + m \cdot \vec{g} = m \left\{ \frac{dv}{dt} \vec{u_T} + \frac{v^2}{L} \vec{u_N} \right\}$$

(NB) Al posto di R metto L cioè la lunghezza del filo, descrive una circonferenza di raggio L

In ogni punto posso definire il versore normale e uno tg. ~~Qual è la~~ La caratteristica del vettore tg è che è diretto sempre verso la curva, la forza peso sarà invece scomposta:

$\vec{T} = T \vec{u_N}$

$m\vec{g} = -mg\,(\operatorname{sen}\vartheta\, \vec{u_T} + \cos\vartheta\, \vec{u_N})$



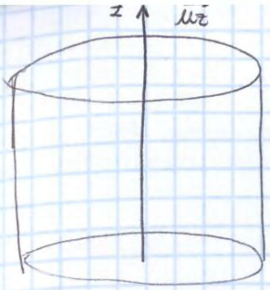
sostituendo avremo:

$$T\vec{u_N} - mg \operatorname{sen}\vartheta\, \vec{u_T} - mg\cos\vartheta\, \vec{u_N} = m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u_T} + \frac{v^2}{L}\vec{u_N}\right)$$

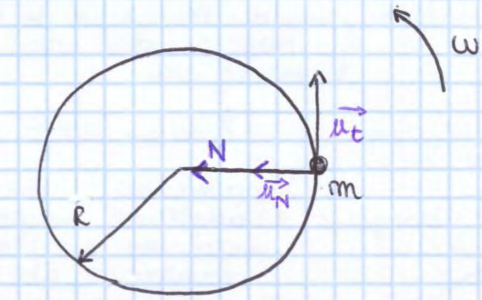
da questa deduciamo le equazioni scalari:

$\vec{u_N}$: $T - mg\cos\vartheta = m\frac{v^2}{L}$

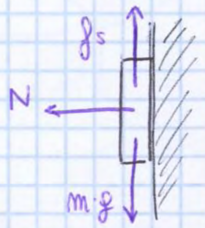
$\vec{u_T}$: $-\cancel{m}g \operatorname{sen}\vartheta = \cancel{m}\frac{dv}{dt}$



Dall'alto avremo la seguente situazione: raggiunta ω essa poi rimane costante. I versori u_N e u_T individuano la posizione dell'uomo rispetto al piano. Il bimbo è sottoposto ad una forza che lo tiene quasi schiacciato contro la parete del cilindro, al peso, e se l'individuo non cade c'è una forza diretta verso l'alto che è f_s che si ha quando l'uomo scorre sulla parete. se l'uomo non cade



L'attrito è Statico e abbiamo un f_s.



La condizione affinché il bimbo non cada nel momento in cui viene tolto il pavimento è che f_s sia tale da tenere su il bambino. Le eq. del movimento sono:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{f_s} = m \cdot \vec{a}$$

Il bimbo si muove di moto circolare, ed in un moto circolare c'è accelerazione, che

$$a = \frac{dv}{dt}\vec{u_T} + \frac{v^2}{R}\vec{u_N} \qquad \text{se } \omega = \frac{d\vartheta}{dt} \text{ è costante}$$

dato che $v = R\frac{d\vartheta}{dt}$ è anche costante quindi $\frac{dv}{dt} = 0$ e inoltre dato che

$v = R \cdot \omega$ avremo che: $\frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R$. Quindi l'accelerazione quando l'individuo si muove con velocità costante si può scrivere

$$\vec{a} = 0 + \omega^2 R\,\vec{u_N}$$

(acc. di un corpo che si muove di moto circ. unif.)

L'eq. vettoriale corrisponde a 3 eq. scalari una su u_N su u_T e su u_z:

$\vec{u_N}$) $N = m\omega^2 R$

$\vec{u_T}$) $0 = 0$ Nessuna forza ha componente lungo la Tg.

$\vec{u_z}$) $-mg + f_s = 0$ Il bambino non cade quindi è uguale a zero.

$\longrightarrow f_s = m \cdot g$. Se l'uomo non cade la f_s deve bilanciare la forza peso.

L'attrito statico deve essere minore o uguale.

$$f_s \leq \mu_s \cdot N \longrightarrow m \cdot g \leq \mu_s \cdot N \longrightarrow \cancel{m} \cdot g \leq \mu_s \cdot \cancel{m} \cdot \omega^2 R$$

La massa si semplifica quindi nessun bimbo cade! Se la rotazione è > di questa quantità quando si toglie il pavimento il bimbo non cade.

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s \cdot R}}$$

NB Un'eq. vettoriale corrisponde ad

- 2 eq. scalari se siamo nel piano (x, y)
- 3 eq. scalari se siamo nello spazio (x, y, z)

$\frac{g}{\omega^2 L} \leq 1 \rightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}}$

Fino ad ora abbiamo studiato sempre forze costanti nel tempo ma se abbiamo una F che dipende

$F = F(t)$

Noi sappiamo che $F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m}$ nota l'accelerazione calcoliamo le cose che ci servono

Nel caso delle cariche elettriche o di due magneti la forza dipende dalla posizione di un corpo rispetto all'altro; in un problema reale abbiamo:

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ se siamo nello spazio corrisponde a 3 eq.

$$\begin{cases} F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

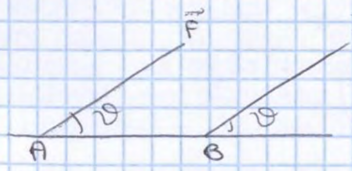
e anche condizioni sulla velocità:

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = V_{x_0} \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = V_{y_0} \\ \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = V_{z_0} \end{cases}$$

Cominciamo a definire grandezze accessorie, non fondamentali, che sono utili. Data una certa forza F costante in modulo, direzione e verso, definiamo LAVORO fatto dalla forza quando il corpo si sposta da A a B e chiamiamo W della forza per andare da $A \rightarrow B$ il prodotto della forza * la componente dello spost. * lo spostamento

$W_{A\rightarrow B} = F * \cos\theta * S$ Questo ci fa venire in mente il prodotto scalare

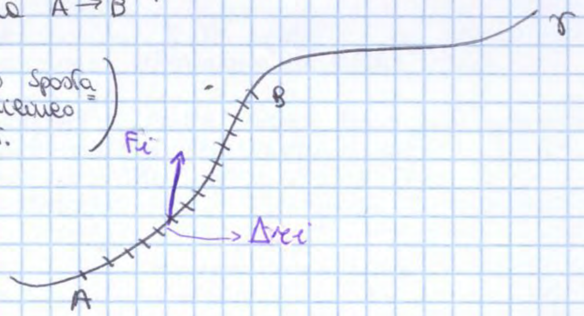
Questa vale quando F è costante. $\leftarrow$ $W_{A\rightarrow B} = \vec{F} \cdot \vec{S}$ $\rightarrow$ $\vec{F}$ scalare $\vec{S}$



Se F non è costante, supponiamo che una forza si muova sotto l'effetto di tante forze lungo la traiettoria γ. ~~Pre~~ Divido la traiettoria in tanti segmentini, ognuno è così piccolo che al suo interno la forza si possa considerare costante, F_i è la forza e Δr_i è lo spostamento misurato sulla traiettoria, possiamo dire che il lavoro fatto sulla traiettoria per andare da $A \rightarrow B$

$$W_{A\rightarrow B}(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \Delta\vec{r_i}$$

(assumo che lo spostamento sia rettilineo e la forza cost.)

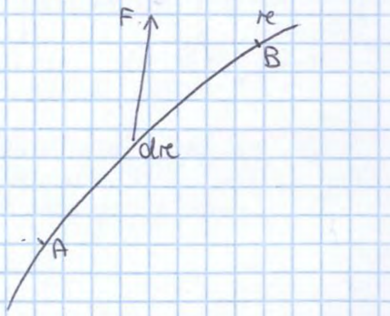


Ovviamente l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più n sarà grande

$$W_{A\rightarrow B}^{(\gamma)} = \lim_{n\rightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \Delta\vec{r_i}$$

INTEGRALE DI LINEA e viene indicato come:

$$W_{A\rightarrow B}^{(\gamma)} = \int_{A}^{B} F \, d\vec{r}$$



La forza viene detta MOTRICE quando l'angolo tra forza e spostamento è < di 90°, se l'angolo è > di 90° la forza viene detta RESISTENTE. Se angolo + piccolo lavoro > 0.
Quando forza e spostamento sono $\perp$ il lavoro è zero.

Quando faccio una misura vado incontro a due tipi di problemi, errori di strumento per esempio penso di misurare con il cronometro un tempo ma è fatto male e invece di battere il secondo batte il secondo e 3 centesimi. Tipi di problemi legati al fatto che in essi ... vengono chiamati ERRORI SISTEMATICI e noi di questi non ci occuperemo, ci sono invece altri errori che noi possiamo prevedere. Se voglio misurare quanto è profondo un pozzo: sono qui in alto, lascio cadere la pallina, misuro un tempo t di caduta e poi applico la relazione:

$$t \rightarrow H = \frac{1}{2} g t^2$$

Anche se ho dei buoni cronometri ci sono degli errori:
- la formula vale se il corpo è puntiforme;
- la pallina è sottoposta alla forza di attrito viscoso dell'aria che in questa formula non compare.
- la forza di attrito viscoso dipende dalla temperatura dell'aria. dipende dalle correnti.

Tutti questi problemi non possiamo prevederli. Quindi ci sono questi errori CASUALI che giocano un ruolo importante quando le misure sono di precisione. Quindi ci sono errori di misura, alcuni dipendono dallo strumento e li chiamiamo sistematici e altri che dipendono dall'ambiente e chiamiamo casuali:

ERRORI DI MISURA $\begin{cases} \text{ERRORI SISTEMATICI} \\ \text{ERRORI CASUALI} \end{cases}$

Quando faccio una misura posso evitare di farla più volte, misuro poi vedo che lo strumento non va sotto il decimo. La misura è sempre la nostra lettura $\pm$ la precisione dello strumento:

$$X = X_m \pm \mathcal{E}$$

$X_m \to$ misura letta; $\mathcal{E} \to$ minima divisione

$\mathcal{E}$ viene chiamato ERRORE ASSOLUTO, è chiaro che su una misura di 1 m l'errore di un mm è importante ma su una misura di 24 Km, l'errore di 1 mm è irrilevante; in questo caso è importante il rapporto:

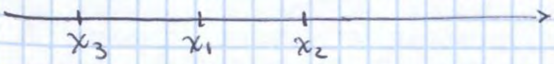
$$\frac{\mathcal{E}}{X_m}$$ che viene chiamato ERRORE RELATIVO.

Questa è una misura SINGOLA e una misura DIRETTA cioè misuro direttamente cosa mi interessa. Nel caso del pozzo la misura era diversa perché misuravo un tempo per misurare un'altezza ed utilizzavo una formula, quella è una MISURA INDIRETTA. Per adesso parleremo di misure dirette. Faccio una misura e trovo un valore, la rifaccio e trovo un altro valore, la rifaccio e trovo ancora un altro, allora quale numero devo prendere affinché il numero rappresenti proprio la grandezza che voglio misurare? Adesso parliamo di misure di precisione dove rifacendo la misura, avendo strumenti poco precisi troviamo valori diversi però il numero di misure che facciamo è dell'ordine di 10. $N \sim 10$.

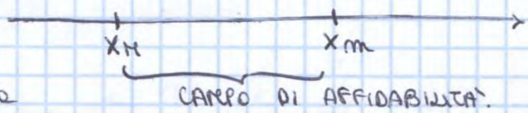
MISURE RIPETUTE NELLE STESSE CONDIZIONI $N \sim 10$. Abbiamo un pendolo e ne misuriamo il periodo 1, 2, 3 ... volte e indichiamo il periodo con la lettera x, quindi sia x la grandezza che vogliamo misurare, la misuriamo tante volte:

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \; ... \; x_n$ abbiamo una collezione di dati $\{x_i\}$

Quindi su una retta avremo:



Tra tutti questi x ce ne sarà uno più grande e uno più piccolo, indichiamo con: x_M il massimo tra $\{x_i\}$ e con x_m il minimo tra le $\{x_i\}$. Rifacendo il disegno:



L'intervallo in cui cadono tutti i valori si chiama CAMPO DI AFFIDABILITÀ definito da x_M e x_m. Più la grandezza è precisa più l'intervallo è piccolo. In questa situazione si prende come esempio del valore che ci interessa la media aritmetica: sommo i valori e li divido per il numero di misure, il VALORE MEDIO

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

e si prende come esempio di errore della misura la metà del campo di affidabilità:

$$\Delta x = \frac{x_M - x_m}{2}$$

Ricordiamo alcune proprietà della sommatoria:

Questa che rappresenta la somma dei quadrati degli scarti è fatta da una quantità che non dipende da x, da una quantità lineare in x e da una quantità quadratica in x. Adesso vado a fare la derivata prima e la derivata seconda:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2x\sum_{i=1}^{N} x_i + Nx^2\right\} = 0 - 2\sum_{i=1}^{N} x_i + 2Nx$$

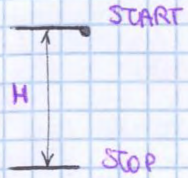
$$\frac{d^2g}{dt^2} = 0 + 2N$$

$2N$ è certamente maggiore di x quindi una volta posta la derivata prima uguale a zero, sono sicura che il valore trovato sia un minimo.

$$\frac{dg}{dx} = 0 \implies -\cancel{2}\sum_{i=1}^{N} x_i + \cancel{2}Nx = 0 \rightarrow x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \bar{x}$$

Quindi la media aritmetica annulla la somma degli scarti e rende minima la somma dei quadrati degli scarti.

Adesso ritorniamo all'esempio da cui siamo partiti: vogliamo calcolare la profondità di un pozzo e misuriamo il tempo di caduta di un sasso. Dalle affermazioni precedenti deduco che il temp sarà



$$t = \bar{\tau} \pm \Delta\tau \quad \text{e varierà tra} \quad \begin{cases} \tau_M = \tau + \Delta\tau \\ \tau_m = \tau - \Delta\tau \end{cases}$$

Quale errore commettiamo su H, noto l'errore che commettiamo su T? Anche per H possiamo fare un discorso analogo al tempo cioè H sarà:

$$H = \bar{H} + \Delta H \qquad e \qquad \Delta H = \frac{H_M - H_m}{2}$$

Se il sasso cade dal punto di START con velocità nulla H è dato da questa formula:

$$H = \frac{1}{2}gT^2$$, calcolo H_M e H_m

$$H_M = \frac{1}{2}gt_M^2 = \frac{1}{2}g(\bar{\tau} + \Delta\tau)^2 = \frac{1}{2}g(\bar{\tau}^2 + 2\bar{\tau}\Delta\tau + (\Delta\tau)^2)$$

$$H_m = \frac{1}{2}gt_m^2 = \frac{1}{2}g(\bar{\tau} - \Delta\tau)^2 = \frac{1}{2}g(\bar{\tau}^2 - 2\bar{\tau}\Delta\tau + (\Delta\tau)^2)$$

Se faccio delle misure di precisione le quantità in gioco devono essere molto piccole, per esempio se

$$\bar{\tau} \sim 1\,s \rightarrow \Delta\tau \sim 0{,}1\,s \qquad \text{se così fosse} \qquad 2\bar{\tau}\Delta\tau \sim 0{,}2\,s$$

$$(\Delta\tau)^2 = 0{,}01\,s$$

Quindi i termini al quadrato sono infinitesimi del II ordine, rispetto a $\bar{\tau}\Delta\tau$ quindi capita:

$$(\Delta\tau)^2 \ll 2\bar{\tau}\cdot\Delta\tau \implies \Delta\tau \ll 2\bar{\tau}$$

Nelle formule precedenti i termini $(\Delta\tau)^2$ posso trascurarli e ottengo:

$$H_M = \frac{1}{2}g(\bar{\tau}^2 + 2\bar{\tau}\Delta\tau + (\Delta\tau)^2) \approx \frac{1}{2}g(\bar{\tau}^2 + 2\bar{\tau}\Delta\tau)$$

$$H_m = \frac{1}{2}g(\bar{\tau}^2 - 2\bar{\tau}\Delta\tau + (\Delta\tau)^2) \approx \frac{1}{2}g(\bar{\tau}^2 - 2\bar{\tau}\Delta\tau)$$

Alla luce di questo, l'incertezza su H vale:

$$\Delta H = \frac{H_M - H_m}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}g\left(\cancel{\bar{\tau}^2} + 2\bar{\tau}\Delta\tau - \cancel{\bar{\tau}^2} + 2\bar{\tau}\Delta\tau\right) \rightarrow \Delta H = \frac{1}{\cancel{4}}\cancel{4}\,\bar{\tau}\Delta\tau$$

Da cui: $u = u(\bar{x} \pm \Delta x, \bar{y} \pm \Delta y)$ una funzione in due variabili, se per ogni variabile facciamo il ragionamento precedente ricavo:

$$= u(\bar{x}, \bar{y}) + \left|\frac{du}{dx}\right| \Delta x + \left|\frac{du}{dy}\right| \Delta y$$

Quando una funzione ha più variabili si preferisce scriverla come: $u(\bar{x}, \bar{y}) + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \Delta y$

Quindi nel caso in cui ci sono più variabili:

$$= u(\bar{x}, \bar{y}) + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\text{medio}} \Delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\text{medio}} \Delta y$$

Quando abbiamo una funzione misurata indirettamente che dipende da più variabili, allora il valore medio è uguale al valore di u calcolato nel valore medio delle due variabili:

$$\bar{u} = u(\bar{x}, \bar{y})$$

L'incertezza sarà:

$$\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}} \Delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}} \Delta y$$

Particolare importanza ha un caso particolare che si chiama FORMULA MONOMIA. (formule monomie: formule dove ci sono soltanto operazioni di moltiplicazione e divisione). Parlando di formule monomie si può ottenere un'espressione semplice per quanto riguarda il valore medio e l'errore relativo. Supponiamo di avere una formula che fa intervenire delle quantità misurate direttamente che chiamiamo x, y, z e supponiamo che la formula in genere abbia questa forma:

$$u = A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$$

Quanto vale l'incertezza su u? e quanto vale l'incertezza relativa?

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm \Delta x \\ y = \bar{y} \pm \Delta y \\ z = \bar{z} \pm \Delta z \end{cases}$$

Il valore medio lo ricaviamo dalla formula precedente:

$$\bar{u} = u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = A \bar{x}^{\alpha} \bar{y}^{\beta} \bar{z}^{\gamma}$$

$$\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \Delta z =$$

anche in questo le derivate $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ ecc... sono valutate nel valore medio

Ora la derivata di u fatta rispetto ad x è:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha A x^{\alpha-1} y^{\beta} z^{\gamma} = \frac{\alpha}{x} \underbrace{A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}}_{u} = \frac{\alpha}{x} u$$

facendo calcoli analoghi per y e z avremo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \beta A x^{\alpha} y^{\beta-1} z^{\gamma} = \frac{\beta}{y} \underbrace{A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}}_{u} = \frac{\beta}{y} u$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \gamma A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{z} \underbrace{A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}}_{u} = \frac{\gamma}{z} u$$

sostituendo queste 3 derivate nella formula precedente, otteniamo: (ovviamente tali derivate vanno considerate nel valore medio)

$$= \left|\frac{\alpha}{\bar{x}} \bar{u}\right| \Delta x + \left|\frac{\beta}{\bar{y}} \bar{u}\right| \Delta y + \left|\frac{\gamma}{\bar{z}} \bar{u}\right| \Delta z =$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ e $\bar{u}$ sono grandezze misurate, certamente positive e quindi risulta:

$$= |\alpha| \bar{u} \frac{\Delta x}{\bar{x}} + |\beta| \bar{u} \frac{\Delta y}{\bar{y}} + |\gamma| \bar{u} \frac{\Delta z}{\bar{z}}$$

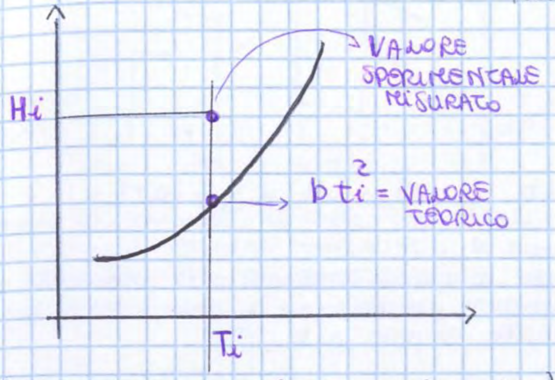
quindi abbiamo

$$\Delta u = |\alpha| \bar{u} \frac{\Delta x}{\bar{x}} + |\beta| \bar{u} \frac{\Delta y}{\bar{y}} + |\gamma| \bar{u} \frac{\Delta z}{\bar{z}}$$

L'incertezza relativa è $\frac{\Delta u}{\bar{u}}$ quindi:

La cosa importante è che i punti che abbiamo misurato non cadono proprio sulla parabola, alcuni stanno sopra, altri sotto. Quale prendo come parabola che rappresenta la legge? Con che criterio vado a scegliere il valore b? Il criterio che scegliamo deve essere valido qualunque sia il numero di parametri che determinano la legge (qui ce n'è uno solo), la somma degli scarti deve essere zero quindi tanti punti sopra quanti sono i punti sotto la parabola. Occorre quindi minimizzare la somma dei quadrati degli scarti tra il punto sperimentale e il punto teorico.

Facendo uno zoom della figura precedente: la parabola è ciò che io vorrei trovare poi ho il punto (T_i, H_i) individuato dalla i-esima misura. Il valore sulla parabola è bt_i^2 cioè il VALORE TEORICO



(Vogliamo trovare la parabola che interpreta meglio i nostri dati)

Noi chiamiamo SCARTO la differenza tra il valore misurato e il valore teorico se conoscessimo b.

$$S_i = H_i - bT_i^2$$

Calcoliamo la somma dei quadrati degli scarti che dipenderà da b:

$$G(b) = \sum_{i=1}^{N} (H_i - bT_i^2)^2$$

Sviluppiamo il quadrato

$$G(b) = \sum_{i=1}^{N} (H_i^2 - 2bH_iT_i^2 + b^2T_i^4) =$$

Applichiamo la IV proprietà della sommatoria

$$= \sum_{i=1}^{N} H_i^2 - \sum_{i=1}^{N} 2bH_iT_i^2 + \sum_{i=1}^{N} b^2T_i^4 =$$

applichiamo la II proprietà al secondo addendo e otteniamo:

$$G(b) = \sum_{i=1}^{N} H_i^2 - 2b\sum_{i=1}^{N} H_iT_i^2 + \sum_{i=1}^{N} b^2T_i^4$$

Dobbiamo imporre la condizione di minimo quindi deriviamo:

$$\frac{dG}{db} = \frac{d}{db}\left\{\sum_{i=1}^{N} H_i^2 - 2b\sum_{i=1}^{N} H_iT_i^2 + b^2\sum_{i=1}^{N} t_i^4\right\}$$

I vari H_i e T_i sono numeri quindi tutto il I addendo è un numero quindi la derivata è zero:

$$= 0 - 2\sum_{i=1}^{N} H_iT_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{N} T_i^4$$

Questa è la derivata prima; adesso calcolo la derivata seconda:

$$\frac{d^2G}{db} = 2\sum_{i=1}^{N} T_i^4$$

che è sicuramente maggiore di zero quindi se trovo un valore che annulla la derivata I quello è sicuramente un minimo. Poniamo quindi la derivata I uguale a zero:

$$\frac{dG}{db} = 0 \rightarrow -\cancel{2}\sum_{i=1}^{N} H_iT_i^2 + \cancel{2}b\sum_{i=1}^{N} T_i^4 = 0$$

da cui ricavo che b è

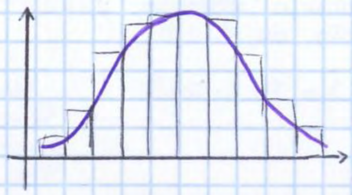
$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} H_iT_i^2}{\sum_{i=1}^{N} T_i^4}$$

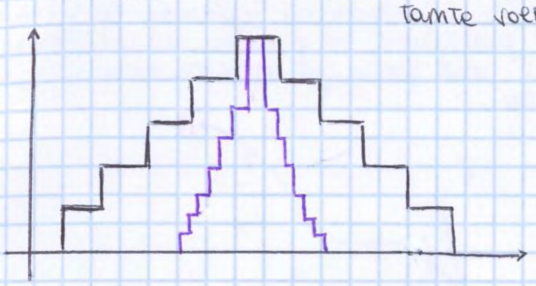
Se la parabola che voglio determinare non passa per l'origine, i parametri da determinare erano due, ma mai abbiamo solo una condizione. Quindi imporre l'annullarsi dello scarto o minimizzare la somma dei quadrati degli scarti, queste due condizioni sono equivalenti solo nel caso in cui c'è un unico parametro da determinare ma in generale il fatto che la somma dei quadrati degli scarti sia minima ci dà tante equazioni quante sono le variabili. C'è un modo più semplice?

$$D_a = \begin{vmatrix} \langle y\rangle & \langle x\rangle \\ \langle xy\rangle & \langle x^2\rangle \end{vmatrix} = \langle y\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle\langle xy\rangle \longrightarrow a = \frac{D_a}{D} = \frac{\langle y\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 1 & \langle y\rangle \\ \langle x\rangle & \langle xy\rangle \end{vmatrix} = \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle \longrightarrow b = \frac{D_b}{D} = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

Tutto questo è valido se il numero di misure è una decina. Se la misura è condotta con ulteriore precisione e la ripete un numero maggiore di volte: ottengo un grafico dove ogni casella rappresenta il numero di volte che quel valore è stato registrato. Una figura di questo tipo si chiama ISTOGRAMMA. Sull'asse delle x abbiamo il campo di affidabilità. Se aumento il numero di misure, la curva che prima era abbastanza irregolare diventa più regolare e si chiama CURVA DI GAUSS: la curva diventa tanto più regolare quanto noi aumentiamo il numero di misure. La curva ha una larghezza precisa, se io facessi due tipi di misure tante volte otterrei due curve:





La curva ha un'espressione matematica:

$$f(x) = Ae^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\varepsilon^2}}$$

ε ci dà un'idea di quanto è larga la curva

La probabilità di trovare un valore tra il valor medio ed ε è:

$\bar{x} - \varepsilon \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon$ 68 %

probabilità di trovare un valore che differisca dal valor medio di 2 o 3 ε è:

$\bar{x} - 2\varepsilon \leq x \leq \bar{x} + 2\varepsilon$ 95 %

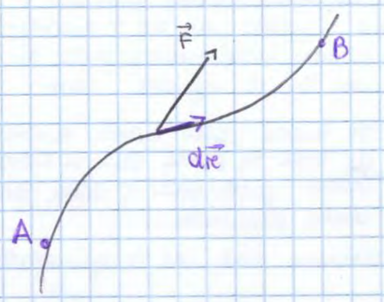
$\bar{x} - 3\varepsilon \leq x \leq \bar{x} + 3\varepsilon$ 99,7 %

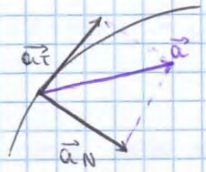
Dato una serie di misure ripetute con calcoli difficili, si può calcolare ε.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Dato che $N >> 1$ N e $N-1$ quasi coincidono quindi: $\varepsilon = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (O DELLE FORZE VIVE). Consideriamo un corpo che si muove da A a B e sia $\vec{F}$ la forza risultante che si esercita sul corpo. Se io ho un corpo che da un punto A arriva ad un punto B ed $\vec{F}$ è la forza risultante che agisce su m, la forza è diretta sempre dalla parte della concavità della traiettoria:





la somma di queste due accelerazioni mi dà l'accelerazione totale che è a e dato che la forza totale è legata all'accelerazione totale dalla relazione: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ allora la forza è sempre diretta dalla parte della concavità.

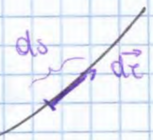
Il teorema dell'energia cinetica mette in relazione il lavoro fatto dalla forza totale lungo il percorso con la variazione di velocità della particella. $d\vec{r}$ è tg rispetto alla traiettoria. Il lavoro sarà:

$$W_{A\to B}(\gamma) = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A\,\gamma}^{B} m \cdot \vec{a} \cdot (ds \cdot \vec{u_T}) =$$

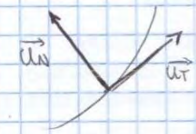
Inizialmente abbiamo parlato anche di ascissa curvilinea cioè del tratto di curva preso sulla traiettoria stessa. Quindi se questo è il pezzo di traiettoria che stiamo considerando, notiamo che questa lunghezza è ciò che chiamavamo ds cioè l'ascissa curvilinea misurata sulla traiettoria quindi:

$$= \int_{A\,\gamma}^{B} m \left(\frac{dv}{dt} \vec{u_T} + \frac{v^2}{R} \vec{u_N} \right) \cdot (ds\, \vec{u_T}) =$$

Il versore u_T e u_N sono tra loro $\perp$ cioè dato questo pezzo di curva il versore u_T è il versore tangente e u_N è il versore normale diretto verso il centro della concavità. Quindi quando faccio il prodotto scalare di $\vec{u_T} \cdot \vec{u_T} = 1$



$\vec{dr} = ds \cdot \vec{u_T}$ dove $\vec{u_T}$ è il versore Tg alla traiettoria in un punto



perché i due vettori sono // ed il coseno dell'angolo compreso è 1 perché l'angolo è zero. Quando invece faccio $u_N \cdot u_T$ fa zero perché i vettori sono tra loro $\perp$ ed il coseno di 90° è zero e quindi la formula diventa:

$$= \int_{A\,\gamma}^{B} m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = \left(\begin{array}{l} \text{La definizione di velocità scalare era:} \\ v = \frac{ds}{dt} \longrightarrow ds = v \cdot dt \end{array} \right) = \int_{A\,\gamma}^{B} m \frac{dv}{\cancel{dt}} v \cdot \cancel{dt} = \int_{A\,\gamma}^{B} m v\, dv$$

Svolgendo l'integrale otteniamo:

$$W_{A\to B}(\gamma) = \frac{1}{2} m \left\{ v^2(B) - v^2(A) \right\}$$

formula che viene scritta generalmente:

$$\boxed{W_{A\to B}(\gamma) = \frac{1}{2} m v^2(B) - \frac{1}{2} m v^2(A)}$$

Quando la particella passa da A a B sotto l'effetto della risultante di tutte le forze il lavoro fatto dalla forza risultante è uguale alla variazione di quella quantità. Quella quantità quadratica nella velocità della particella è legata al movimento e una volta veniva chiamata FORZA VIVA, oggi ENERGIA CINETICA:

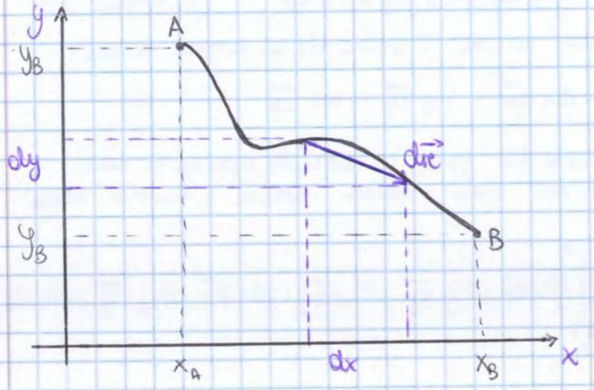
$E_k = \frac{1}{2} m v^2$ Quindi la formula precedente diventa: $W_{A\to B}(\gamma) = E_k(B) - E_k(A)$

Enunciato: "Il lavoro fatto dalla forza totale per spostare il corpo dal punto A al punto B è uguale alla variazione dell'energia cinetica".

Teoricamente avrei potuto scrivere anche: $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + C$ perché quello che

Quindi quando consideriamo il lavoro fatto dalla forza di attrito questo non dipende soltanto dal punto iniziale e quello finale ma dipende anche dal percorso su cui viene calcolato. LAVORO = costante x lunghezza della curva da A a B quindi cambiando curva, cambia la sua lunghezza e quindi il lavoro cambia.

Ho un punto A ed un punto B e voglio calcolare il lavoro fatto dalla forza peso per andare da A a B.



La forza peso $\vec{P}$ è uguale a: $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

Il lavoro fatto dalla forza peso lungo γ_1 per definizione:

$$W_{A\to B}(\gamma_1) = \int_{A\,\gamma_1}^{B} \vec{P} \cdot d\vec{r} =$$

In ogni punto, g è così diretta ↓ quindi in ogni punto P sarà:

$$P = m \cdot (-g)\,\vec{u_y} = -m \cdot g \cdot \vec{u_y}$$

In coordinate cartesiane lo spostamento ∞ino dr sarà:

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{u_x} + dy\, \vec{u_y}$$

Quindi il lavoro sarà:

$$= \int_{A\,\gamma_1}^{B} -m \cdot g\, \vec{u_y} \cdot (dx\, \vec{u_x} + dy \cdot \vec{u_y}) =$$

Ricordo che $u_x \cdot u_y = 0$ mentre $u_y \cdot u_y = 1$ quindi:

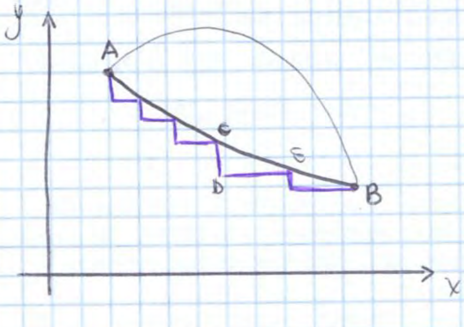
$$= \int_{A\,\gamma_1}^{B} -m \cdot g\, dy = -m\, g \int_{A\,\gamma_1}^{B} dy =$$

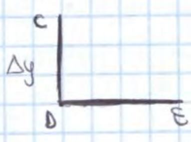
L'integrale di dy è semplicemente y nel punto B − y nel punto A, la x non c'è più e quindi scompare la dipendenza dal percorso:

$$= -mg\,[y(B) - y(A)] = mg\,y(A) - mg\,y(B) \longrightarrow W_{A\to B}(\cancel{\gamma_1}) = mg\,y(A) - mg\,y(B)$$

(NB) mentre la forza di attrito dipende dal percorso la forza peso fa un lavoro per andare da A a B che è uguale a $mg\,y(A) - mg\,y(B)$, γ_1 scompare ed il lavoro fatto è uguale ad una proprietà del punto di partenza $mg\,y(A)$ − proprietà nel punto finale $mg\,y(B)$. Questa quantità si chiama ENERGIA POTENZIALE.

Potevamo giungere a questo risultato anche non conoscendo gli integrali: se vogliamo andare da A a B attraverso questo percorso, questo percorso può essere approssimato con una scala (una serie di spostamenti orizzontali e verticali). Negli spostamenti verticali la forza peso compie lavoro perché forza e spostamento sono tra loro //. Se consideriamo il triangolino CDE; quando andiamo da C verso D e da D verso E, dato che è il prodotto scalare di forza per spostamento, quando andiamo da C→D il lavoro sarà: $P \cdot \overline{CD}$, quando andiamo da D verso E il lavoro è zero perché il peso forma con lo spostamento un angolo di 90°. Quindi:



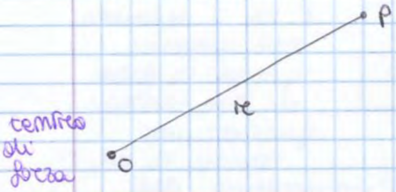


$$P \cdot \overline{CD} = m \cdot g \cdot \Delta y$$

Quindi gli spostamenti orizzontali non danno contributo al lavoro, lo spostamento verticale è l'unico che conta ed il lavoro che viene fatto è massa * acc. di gravità * spostamento verticale. Quindi se io scegliessi un'altra curva, un'altra traiettoria, lo spostamento orizzontale sarebbe sempre lo stesso, sarebbe sempre coordinata del punto finale − quella del punto iniziale.

(NB) Il lavoro compiuto dalla forza peso è indipendente dal percorso ma dipende solo dallo stato finale e dallo stato iniziale.

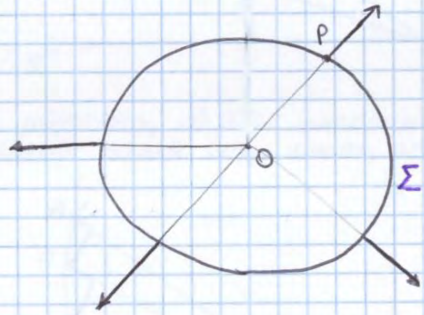
Ci sono delle forze particolari, che si chiamano FORZE CENTRALI. Una forza centrale è una forza che gode di questa proprietà: Una forza si dice centrale quando è sempre diretta verso un punto chiamato CENTRO DI FORZA ed il modulo dipende soltanto dalla distanza del punto considerato P ed il centro di forza. P è il punto in cui si trova la nostra particella, O è il centro di forza, r è la distanza tra P e O. Allora la forza centrale è di questo tipo: una quantità che dipende da r * il versore u_r



$$\vec{F} = f(r)\,\vec{u_r}$$

Se $f_r > 0$ la forza si chiama FORZA REPULSIVA; se $f_r < 0$ la forza si chiama FORZA ATTRATTIVA.

La caratteristica di una forza centrale è la seguente: se mi trovo sul punto P ad una certa distanza da O e considero la circonferenza che ha per raggio tale distanza cioè considero tutti i punti che hanno la stessa distanza di P dal centro, osservo che il modulo della forza è lo stesso. Se la forza è repulsiva avremo la seguente situazione: il modulo della forza è lo stesso: (per qualunque $P \in$ alla sfera Σ)



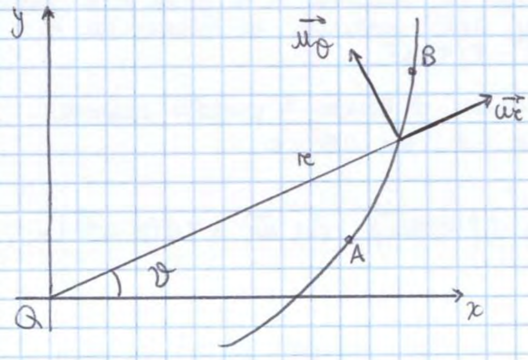
$\forall P \in \Sigma$ il modulo della forza è lo stesso.

La forza di Coulomb dice che, data una carica in un certo punto Q ed un'altra carica q a distanza r da Q essa sarà sottoposta ad una forza:

$$\vec{F} = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}\,\vec{u_r}$$

Quando le cariche hanno lo stesso segno la forza è repulsiva, quando hanno segno opposto è attrattiva.

Supponiamo che la carica Q sia fissa in un punto e non possa muoversi. Quanto vale il lavoro fatto dalla forza centrale quando la particella si sposta da A a B? (Ciò che deduciamo lo allargheremo a tutte le forze centrali). Consideriamo un asse x e un asse y con origine coincidente con la carica Q. Consideriamo una generica posizione r. r rappresenta la distanza tra q e l'origine (Q). ϑ è l'anomalia, se consideriamo le coordinate polari. Il lavoro sarà:

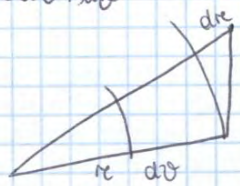


$$W_{A\to B}(\gamma) = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

Parlando di coordinate polari abbiamo detto:

$$d\vec{r} = dr \cdot \vec{u_r} + r\,d\vartheta\,\vec{u_\vartheta}$$

Il vettore spostamento $d\vec{r}$ ha una parte radiale e una trasversa.
Tenendo conto di quest'espressione il lavoro sarà:



$$= \int_{A,\gamma}^{B} \left(K \frac{Q \cdot q}{r^2}\,\vec{u_r}\right) \cdot \left(dr\,\vec{u_r} + r\,d\vartheta\,\vec{u_\vartheta}\right) =$$

Il versore radiale ed il versore trasverso sono $\perp$ quindi $u_r \cdot u_r = 1$ ma $u_r \cdot u_\vartheta = 0$ perché u_r e u_ϑ sono tra loro $\perp$.

$$= \int_{A,\gamma}^{B} K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}\,dr =$$

ϑ è scomparso ma l'unico che mi dice qual è la curva è il legame che c'è tra r e ϑ.

Riassumendo ...

NB A e' sempre punto iniziale, B e' sempre punto finale.

FORZA DI ATTRITO: $W_{A\to B}^{(\gamma_1)} \neq W_{A\to B}^{(\gamma_2)}$

FORZA PESO: $W_{A\to B} = m \cdot g\, y(A) - m \cdot g \cdot y(B)$ (NON DIPENDE DA γ)

FORZA COSTANTE: $W_{A\to B} = \vec{F} \cdot \vec{r_B} - \vec{F} \cdot \vec{r_A}$

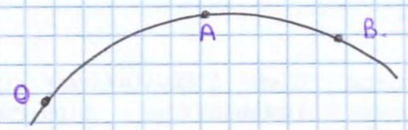
FORZA DI COULOMB: $W_{A\to B} = k\dfrac{Q \cdot q}{r_A} - k\dfrac{Qq}{r_B}$

FORZA ELASTICA: $W_{A\to B} = \dfrac{1}{2}k r_A^2 - \dfrac{1}{2}k r_B^2$

Le forze si dividono in due categorie: quelle che fanno un lavoro che dipende dal percorso e quelle che fanno un lavoro che non dipende dal percorso. Quelle che non dipendono dal percorso le chiamiamo FORZA CONSERVATIVE. Una forza conservativa e' una forza che gode di questa proprietà. Le forze a livello microscopico sono tutte conservative, ma quando guardo tanti corpi messi assieme, a livello macroscopico, le forze non sono conservative. Una forza conservativa gode della seguente proprietà: $W_{A\to B}$ non dipende da γ, cioè

$W_{A\to B} = f(A,B)$ (Il lavoro e' una funzione che dipende solo da A e da B)

Consideriamo tre punti O, A e B generici; considerando la forza conservativa vogliamo calcolare il lavoro fatto dalla forza stessa. Considero una delle infinite curve che posso immaginare, tanto non e' importante.



Ip. $\vec{F}$ é conservativa.

Il lavoro sarà:

$$W_{O\to B} = \int_O^B \vec{F}\,d\vec{r} = \int_O^A \vec{F}\,d\vec{r} + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

dove il I addendo non e' altro che $W_{O\to A}$ ed il II e' $W_{A\to B}$.

Se la forza e' conservativa qualunque sia O, A e B io ho questa relazione:

$$W_{O\to B} = W_{O\to A} + W_{A\to B}$$

$$f(O,B) = f(O,A) + f(A,B)$$

Dato che la forza per ipotesi e' conservativa, vale la relazione secondo cui il lavoro e' funzione del punto iniziale e di quello finale.

$$\boxed{f(A,B) = f(O,B) - f(O,A)}$$

Al I membro non compare il punto O ma solo A e B, al II membro c'e' O,B e O,A. Questa relazione si chiama RELAZIONE FUNZIONALE. Relazione che ci dice che la funzione deve godere di certe proprietà. E' chiaro che se O deve scomparire la relazione diventa:

$$f(O,B) = U(O) - U(B)$$

$$f(O,A) = U(O) - U(A)$$

e facendo la sottrazione di queste due trovo:

$$f(O,B) - f(O,A) = \cancel{U(O)} - U(B) - \cancel{U(O)} + U(A) = U(A) - U(B).$$

Se una forza e' conservativa, il lavoro e' uguale alla differenza di una proprietà del punto di partenza meno una proprietà del punto di arrivo.

Ho espresso in due modi diversi la stessa quantità quindi posso eguagliarle:

$E_k(B) - E_k(A) = E_p(A) - E_p(B)$

$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A)$

portiamo tutti gli elementi caratteristici del punto B da una parte e quelli del punto A dall'altro, otteniamo

Quindi il movimento da A a B avviene in modo tale che la particella sottoposta a tutte le forze soddisfi quella relazione.

$E = E_k + E_p \longrightarrow E(B) = E(A)$ TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA.

ENERGIA MECCANICA

Quando non tutte le forze sono conservative quest'ultima relazione non e' più valida. Sia $\vec{F_c}$ la risultante delle forze conservative e sia $\vec{F}_{nc}$ la risultante di quelle non conservative. Come si modifica il teorema che abbiamo appena visto?

$\vec{F} = \vec{F_c} + \vec{F}_{nc}$ e' la risultante delle forze su m

Questa relazione non vale più: $W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B)$ mentre il teorema dell'energia cinetica e' sempre valido. Quindi:

$$W_{A\to B}^{(\gamma)} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\,\gamma}^{B} (\vec{F_c} + \vec{F}_{nc})\cdot d\vec{r} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F_c}\cdot d\vec{r} + \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}_{nc}\, d\vec{r} =$$

Il I addendo e' il lavoro fatto dalle forze conservative ed e' il lavoro per andare da $A \to B$ lungo γ delle forze conservative + ...

$$W_{A\to B}^{(\cancel{\gamma},c)} + W_{A\to B}^{(\gamma,nc)} =$$

Il lavoro fatto dalle forze conservative non ha niente a che vedere con γ, quindi:

$$E_p(A) - E_p(B) + W_{A\to B}^{(\gamma,nc)} \longrightarrow W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B) + W_{A\to B}^{(\gamma,nc)}$$

Questo e' il lavoro totale quindi quando andiamo ad eguagliare l'espressione del teorema dell'energia cinetica che vale sempre con questo che abbiamo appena calcolato, troviamo che:

$$E_k(B) - E_k(A) = E_p(A) - E_p(B) + W_{A\to B}^{(nc)}$$

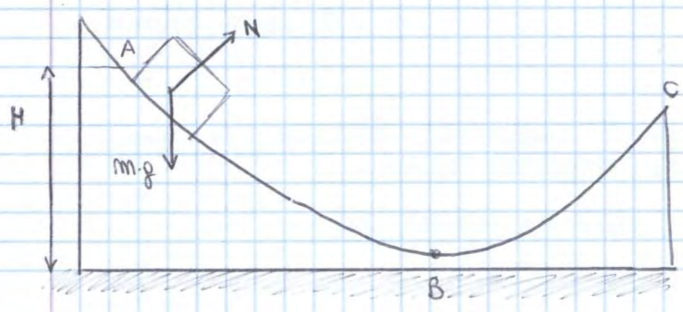
Se portiamo questi due termini al I membro otteniamo che:

$$\underbrace{\{E_k(B) + E_p(B)\}}_{\text{energia totale della particella nel punto finale}} - \underbrace{\{E_k(A) + E_p(A)\}}_{\text{energia totale della particella nel punto iniziale.}} = W_{A\to B}^{(nc)}$$

quindi: $\boxed{E(B) - E(A) = W_{A\to B}^{(nc)}}$

Quando sono presenti forze non conservative, la variazione dell'energia totale e' uguale al lavoro delle forze non conservative.

<u>Esercizio:</u>



Supponiamo di avere un corpo che scende su un piano inclinato. Siamo nel campo della gravità, lasciamo un corpo da un'altezza H, lo lasciamo andare e supponendo che non ci sia nessun attrito. Fino a che punto arriva il corpo. Le forze che fanno lavoro e' la forza di gravità. La reazione del piano N e' sempre ⊥ alla traiettoria quindi il lavoro fatto da N e' sempre zero

$\underline{W(\vec{N})} = \int \underline{\vec{N}\cdot d\vec{r} = 0}$ N e' ⊥ alla traiettoria, $d\vec{r}$ e' Tg quindi e' sempre zero.

Per il teorema visto prima: $E(f) - E(i) = W_{i \to f}^{(mc)}$ per i nostri punti sarà:

$E(C) - E(A) = W_{A \to C}\ f(mc)$

L'energia totale nel punto C (il corpo è fermo e l'altezza è zero) sarà:

$$E(C) = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2_{(C)}}_{=0} + \underbrace{m g H(C)}_{=0} = 0$$

Nel punto A invece la velocità è zero: $E(A) = \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{=0} + mgH = mgH$

Calcoliamo adesso il lavoro fatto dalle forze non cons. Tra A e B il piano è liscio quindi non c'è questo tipo di lavoro; quando andiamo da B verso C:

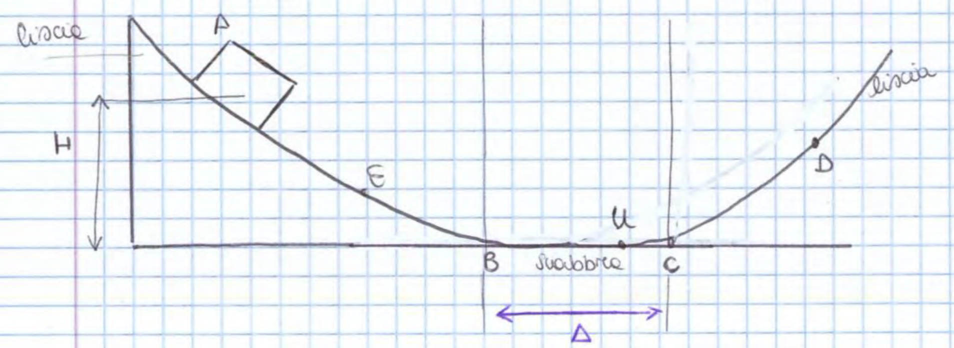
$$W_{A \to C}^{mc} = \underbrace{W_{A \to B}(mc)}_{=0 \text{ non ci sono forze dissipative}} + W_{B \to C}(mc) = \int_B^C \underbrace{(-\mu_K m \cdot g\, \vec{u_T})}_{\text{forza di attrito}} \cdot \underbrace{(\vec{u_T}\, dx)}_{\times \text{ spostamento}} = \int_B^C - \mu_K m \cdot g\, dx$$

Se chiamiamo L la distanza tra B e C, otteniamo: $= - \mu_K m \cdot g [x]_0^L = \underbrace{- \mu_K m \cdot g \cdot L}_{\text{lavoro fatto dallo spazio percorso.}}$

Sostituendo nelle formule i contributi otteniamo:

$$0 - \cancel{m}\cancel{g}H = - \mu_K \cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot L \quad \to \quad L = \frac{H}{\mu_K}.$$

<u>Compito d'esame</u>: Considerata una superficie (liscia - scabra - liscia) e lasciato un corpo dal punto A. Determinare dove questo corpo si fermerà. Il corpo parte da A, scende e prende velocità, arriva in B, rallenta salirà in un punto D, si fermerà, invertirà il movimento, scenderà arriverà in E e così via. Ad un certo punto non ce la farà più a compiere questo movimento e si ferma nel punto U. Applicando la nostra equazione:



$$E(f) - E(i) = W_{i \to f}(mc)$$ che nel nostro caso sarà:

$$E(U) - E(A) = W_{A \to U}(mc)$$

L'energia totale in U è:

$$E(U) = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2(U)}_{=0} + \underbrace{m g H(U)}_{=0} = 0$$

Quella in A sarà:

$$E(A) = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2(A)}_{=0} + mgH = mgH$$

La dinamica è racchiusa nella formula: $F = m \cdot a$ scritta anche $F = \frac{dP}{dt}$ dove $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$ e abbiamo definito una grandezza scalare, il lavoro cioè l'integrale di linea:

$$W_{A \to B}(\gamma) = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

siamo poi arrivati al Teorema dell'energia cinetica: Il lavoro fatto da un corpo quando va da A a B è uguale

$$W_{A \to B} = E_K(B) - E_K(A) \quad \text{dove } E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{P^2}{2m}$$

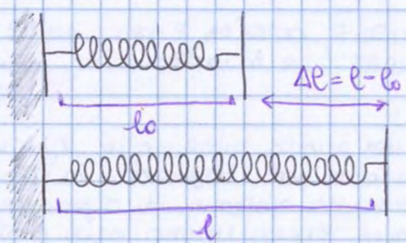
Il Teorema dell'energia cinetica vale per la risultante di tutte le forze.
Le forze si dividono in due grandi categorie: le forze conservative sono quelle forze per cui il lavoro per andare da A a B non dipende da γ. Quindi il lavoro è funzione soltanto del punto A e del punto B. Abbiamo poi visto che il lavoro deve soddisfare questa relazione

$W_{A \to B} = U(A) - U(B)$ dove U è l'energia potenziale: $W_{A \to B} = E_p(A) - E_p(B)$

Le forze di attrito appartengono alle forze non conservative, perché cambiando percorso cambia il lavoro; ci sono altre forze che soddisfano questo requisito:

- La forza peso: $W_{A \to B} = mgy(A) - mgy(B)$ quindi $E_p = mgy$ dove y è la quota.
- Una forza costante: $W_{A \to B} = \vec{F} \vec{r}_B - \vec{F} \vec{r}_A$ dove $E_p = -\vec{F} \vec{r}_B$
- La forza di coulomb:
  $F = k \frac{Q \cdot q}{r^2} \hat{u}_r$ per cui: $W_{A \to B} = k \frac{Q \cdot q}{r_A} - k \frac{Q \cdot q}{r_B}$ quindi $E_p = k \frac{Q \cdot q}{r}$ dove r è la distanza dal centro di forza.
- La forza elastica:
  $\vec{F} = -k \vec{r}$, $W_{A \to B} = \frac{1}{2} k r_A^2 - \frac{1}{2} k r_B^2$ quindi $E_p = \frac{1}{2} k r^2$

L'ultima è una forza proporzionale alla distanza della particella. La forza elastica è la forza di una molla, in condizioni normali ha una lunghezza l_0 quando noi applichiamo una forza e la lunghezza diventa l, Tale forza è prop. all'allungamento

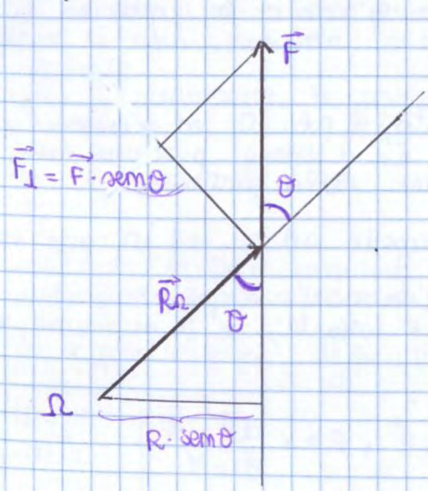


$F = -k \Delta l$

$\Delta l = x$

$F = -kx$

Attraverso la forza e la posizione possiamo definire una grandezza vettoriale. Quando abbiamo due vettori possiamo definire il prodotto esterno di questi due. Data una forza generica $\vec{F}$ e dato un punto (polo) Ω, e questo è il vettore posizione rispetto ad Ω quindi R_Ω. Definiamo una grandezza che è il momento della forza rispetto al polo, chiamiamo MOMENTO della forza rispetto al polo Ω il prodotto esterno di R e F.



$b = R_\Omega \cdot \operatorname{sen}\theta$

$$\vec{M}_\Omega = \vec{R}_\Omega \times \vec{F}$$

Equazione dimensionale:

$[M] = L \; M \frac{L}{T^2} = M \frac{L^2}{T^2}$

$[M] = m \cdot N$ $\neq$ Joule! è vettoriale il momento mentre il lavoro è scalare.

Se θ è l'angolo, il momento ha modulo:

$|\vec{M}_\Omega| = |\vec{R}_\Omega| \cdot |\vec{F}| \cdot \operatorname{sen}\theta$. Dal disegno appare ovvio che il prodotto $R \cdot \operatorname{sen}\theta$ è proprio quel segmento e viene chiamato BRACCIO ed indica la distanza tra la retta di azione della forza ed il polo.

Abbiamo detto che la quantità di moto è tale che $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ e quindi il secondo addendo diventa:

$\underbrace{\vec{R_\Omega} \times \vec{F}}_{\vec{M_\Omega}}$ che non è altro che il momento della forza rispetto Ω.

Semplificare il I addendo è un po' più difficile. Dal disegno appare chiaro che:

$\vec{r} = \vec{r_\Omega} + \vec{R_\Omega}$ derivandola rispetto al tempo:

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r_\Omega}}{dt} + \frac{d\vec{R_\Omega}}{dt}$ il I membro è la velocità con cui si sta spostando la particella, il I addendo è la velocità con cui si muove il polo (V_Ω). Quindi otteniamo $V = V_\Omega + \frac{dR_\Omega}{dt}$

$\frac{d\vec{L_\Omega}}{dt} = (\vec{V} - \vec{V_\Omega}) \times \vec{P} + M_\Omega$ $\qquad (\vec{V} - \vec{V_\Omega}) \times \vec{P} = \underbrace{\vec{V} \times \vec{P}}_{\vec{V} \times (m\vec{V}) \,\equiv\, 0} - \vec{V_\Omega} \times \vec{P}$

i due vettori sono tra loro // quindi il loro prodotto esterno è zero.

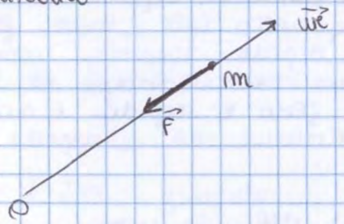
$$\boxed{\frac{d\vec{L_\Omega}}{dt} = \vec{V_\Omega} \times \vec{P} + \vec{M_\Omega}}$$

Se il polo è fermo allora r_Ω è costante e, di conseguenza, $V_\Omega = 0$ ed il teorema diventa:

$\frac{d\vec{L_\Omega}}{dt} = \vec{M_\Omega}$ (polo fisso)

Supponiamo di trovarci nel caso in cui l'unica forza che agisce sulla particella sia una forza centrale. Se su di una particella si esercita solo una forza centrale quella particella si muove su di un piano. Supponiamo che Ω coincida con O.

Se m si trova qui, essendo F una forza centrale attrattiva questa forza è così diretta



$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{u_r}$

$O \equiv \Omega$

Se voglio calcolare il momento della forza rispetto ad O: per definizione

$\vec{M_O} = \vec{r} \times \vec{F} = (r \cdot \vec{u_r}) \cdot \{F_r \cdot (\vec{u_r})\} = 0$

$\vec{u_r}$ e $\vec{u_r}$ sono paralleli quindi il prodotto fa zero. Se il momento fa zero, la legge che rappresenta la conservazione della quantità di moto mi dice che:

$\frac{dL_O}{dt} = M_O$ dato che $M_O = 0$ $\quad \frac{dL_O}{dt} = 0$ ma se $\frac{dL_O}{dt} = 0$ allora L_O è costante.

Consideriamo un tempo che chiamiamo tempo zero, ed in questo tempo zero, consideriamo il piano che passa per la particella e l'origine del corpo, il momento angolare è $R \times P$ quindi è un vettore ⊥ a questo piano, se la particella uscisse dal piano R sarebbe ⊥ al nuovo piano ma questo non può capitare quindi si muove solo sul piano. Se una particella si muove sotto l'effetto di sole forze centrali il momento angolare è costante.

Prima di analizzare le conseguenze del teorema ricordiamo il teorema della quantità di moto:

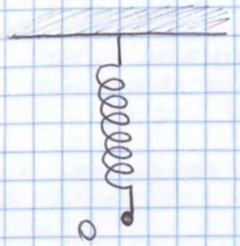
$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ $\qquad d\vec{P} = \vec{F}dt$ $\qquad \int_i^f d\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = P(t_f) - P(t_i) = J(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} F\, dt.$

Conoscendo la forza possiamo calcolare la variazione di quantità di moto.

Se il polo è fisso $\frac{d\vec{L_\Omega}}{dt} = \vec{M_\Omega}$, posso fare allora un calcolo analogo:

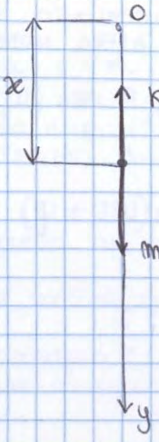
$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{L_\Omega} = \int_{t_i}^{t_f} M_\Omega dt \rightarrow L_\Omega(t_f) - L_\Omega(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} M_\Omega\, dt$ $\qquad$ La variazione del momento angolare rispetto ad Ω è = all'integrale di ...

Esercizi: Consideriamo un corpo sottoposto all'azione della gravità e ad una molla di costante elastica k, a questa molla viene appeso un corpo di massa m; calcolare la velocità del corpo in funzione di x e la posizione in cui il corpo si ferma.



Al tempo $T=0$ all'chiamo una massa m quindi $x(0)=0$ e $v(0)=0$

Se tolgo la mano che sosteneva m il corpo va giù. Sul corpo si esercita il peso $(m \cdot g)$, la forza di richiamo kx. Prendo l'asse y diretto verso il basso. Quando il corpo m si allontana di una quantità x da 0 è soggetto ad una forza verso l'alto che è kx e una verso il basso $m \cdot g$.



Quindi $F = mg - kx$ $\quad$ F ha un'unica componente (verticale) che ha questo valore.

Il teorema dell'en. cinetica dice che la variazione dell'en. cinetica è = al lavoro fatto dalle forze, posso usare questo teorema.

$$E_K(x) - E_K(0) = W_{0 \to x}$$

$E_K(0) = 0$ perchè il corpo era fermo inizialmente

$$\frac{1}{2} m v^2(x) - 0 = \int_0^x F\,dx$$

$$W_{0 \to x} = \int_0^x F dx = \int_0^x mg - kx \, dx = mgx - \frac{1}{2} kx^2$$

La formula diventa: $\frac{1}{2} m v^2(x) = mgx - \frac{1}{2} kx^2$

$$v^2 = 2gx - \frac{k}{m} x^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = x\left(2g - \frac{k}{m} x\right)$$

$v^2 = 0$ quando:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2g - \frac{k}{m} x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ → è la condizione iniziale quando il corpo è fermo quindi non interessa

$$\frac{k}{m} x = 2g \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{2mg}{k}$$

(NB) calcoliamo la forza in x_1 e x_2.

$F(x_1) = mg - kx_1 = mg$ $\quad$ perchè $x_1 = 0$

$F(x_2) = mg - kx_2 = mg - 2mg = -mg$

} quindi questi punti in cui la particella si ferma, la velocità è = a zero ma la forza no quindi non sono punti di equilibrio; sono punti di equilibrio dinamico.

Quando il corpo si muove occupa una posizione x che dipende dal tempo, quindi la velocità e l'accelerazione saranno

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Allora la legge di Newton diventa $F = m \cdot a$ $\rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg$

(ricorda un po' l'oscillatore armonico ma il termine $m \cdot g$ disturba un po')

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - k\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

chiamo: $X = x - \frac{mg}{k}$

X e x differiscono per una costante quindi $\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$

quindi l'equazione la riscrivo così: $m \frac{d^2X}{dt^2} = -kX$ $\quad$ questa è l'eq. dell'oscillatore armonico che posso scrivere come:

L'energia totale del nostro corpo è uguale $E = E_k + \underbrace{E_p}_{=0} = \frac{1}{2} m v^2$

=0 perché siamo su un piano

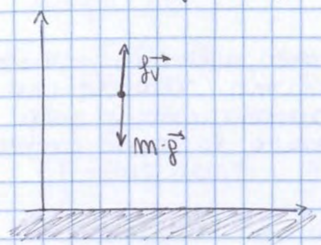
RAPIDITÀ = derivata rispetto al tempo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} v \frac{dv}{dt} = -f_k \cdot v \qquad \text{perché } m \cdot \frac{dv}{dt} = -f_k$$

Questo risultato è importante perché è sempre valido. La rapidità con cui un corpo perde la sua energia totale è uguale alla potenza della forza dissipativa.

In cinematica abbiamo detto che un corpo in caduta è soggetto ad una resistenza viscosa:

$$\vec{f_v} = -\eta \vec{v}$$



La forza responsabile della resistenza viscosa, quando il corpo cade è una forza di questo tipo.
Con che velocità viene dissipata l'energia?
L'equazione di Newton in questo caso sarà:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + \eta v$$

L'energia totale del nostro corpo è: $E = E_k + E_p =$

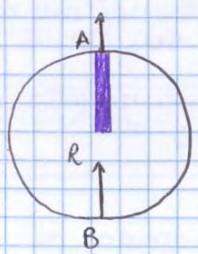
$= \frac{1}{2} m v^2 + mgy$ Per conoscere la rapidità con cui essa varia facciamo la derivata:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2 + mgy\right) = \frac{1}{2} m 2v \frac{dv}{dt} + mg \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\text{velocità della particella}} = mv \frac{dv}{dt} + mgv =$$

$$= v\Big(\underbrace{m \frac{dv}{dt} + mg}_{f_v}\Big) = f_v \cdot v = \eta v^2$$

(NB) Quando è presente una forza dissipativa, il decremento di energia è uguale alla potenza della forza dissipativa.

o) Un sasso $m = 1\,kg$ attaccato ad una bacchetta di massa trascurabile viene fatto ruotare a velocità costante v lungo una circonferenza posta in un piano verticale di raggio R. Nel punto più alto della circonferenza la tensione nella bacchetta è nulla. Calcolare la velocità del sasso, il valore della tensione nel punto più basso della circonferenza.



La bacchetta ha lunghezza R, chiamiamo A la posizione + alta e B quella più in basso. Se in A la bacchetta fosse ferma la tensione sarebbe così diretta e nel punto + basso non dovrebbe farla cadere. Non è così, il sistema muove con velocità v = costante. Se v è costante, il corpo descrive una traiettoria circolare

$$v = \omega R \qquad \text{se } v = \text{cost} \Rightarrow \omega = \text{costante}$$

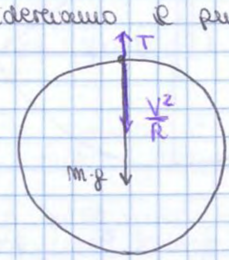
L'accelerazione del nostro corpo in ogni punto è:

$$a = \frac{dv}{dt} \vec{u_t} + \frac{v^2}{R} \vec{u_N}$$

$$= \frac{v^2}{R} \vec{u_N}$$

ma v è costante ed il 1 addendo è zero. Quindi in ogni punto l'accelerazione del corpo è diretta verso il centro.

Consideriamo il punto A:



Legge di Newton applicata nel punto A:

$$mg - T_A = m \frac{v_A^2}{R}$$

(prendendo la direzione di y verso il basso)

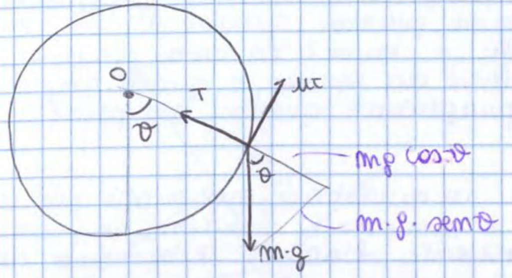
Il problema dice che nel punto A la tensione è nulla, quindi se $T_A = 0$ abbiamo

$$\cancel{m} g = \cancel{m} \frac{v_A^2}{R} \longrightarrow v_A^2 = g \cdot R$$

Dato che il corpo si muove con velocità costante questa è anche la velocità nel punto B.

$$v_B^2 = g R$$

In questa condizione quanto vale la forza che deve esercitare la barra?
In una posizione generica, sia questo ϑ, il peso e la tensione T. Per la tensione dobbiamo fare ricorso alle leggi di Newton:



$$\vec{T} + m\vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

Adesso la T non possiamo più trascurarla! È vero che non compie lavoro, ma tra le forze dobbiamo considerarla.

$$\vec{T} + m\vec{g} = m \cdot \left(\frac{dv}{dt} \vec{u_t} + \frac{v^2}{L} \vec{u_n} \right)$$

Scomponiamo le forze: T è diretta tutta lungo $\vec{u_n}$:

$$T(\vartheta) \vec{u_n} - mg\, sen\vartheta\, \vec{u_t} - mg \cos\vartheta\, \vec{u_n} = m \left(\frac{dv}{dt} \vec{u_t} + \frac{v^2}{L} \vec{u_n} \right)$$

da questo deduciamo le seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} -mg\, sen\vartheta = m \dfrac{dv}{dt} \\ T(\vartheta) - mg\cos\vartheta = m \dfrac{v^2}{L} \end{cases}$$

Dalla II equazione ricaviamo che la tensione T cambia con l'angolo come:

$$T(\vartheta) = m \frac{v^2}{R} + mg\cos\vartheta$$

Vediamo come varia V al variare di ϑ: dato che l'energia è costante, in ogni momento, questa quantità deve essere = alla energia nel punto inferiore, cioè:

$$\underbrace{E(\vartheta) = E(0)}_{\text{energia totale nel punto più basso}} \quad \text{da cui:} \quad \frac{1}{2} m v^2(\vartheta) + mgL(1-\cos\vartheta) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

quindi la velocità in un punto generico:

$$v^2(\vartheta) = v_0^2 - 2gL(1-\cos\vartheta)$$

Quindi la nostra relazione sarà:

$$T(\vartheta) = \frac{m}{L} \left[v_0^2 - 2gL(1-\cos\vartheta) \right] + mg\cos\vartheta$$

$$T(\vartheta) = \frac{m}{L} v_0^2 - 2mg(1-\cos\vartheta) + mg\cos\vartheta$$

$$\boxed{T(\vartheta) = \frac{m}{L} v_0^2 + mg(3\cos\vartheta - 2)}$$

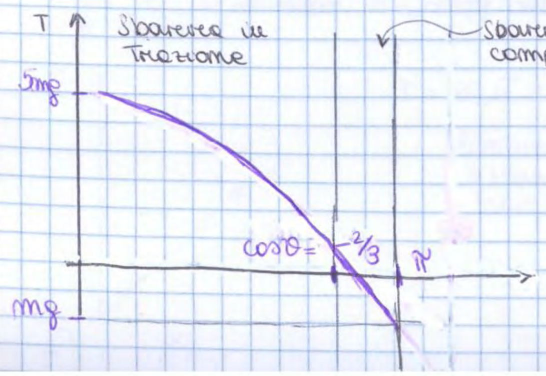
Questo è valido in generale! Nel nostro caso, abbiamo trovato che la velocità critica per fare un giro è:

$$v_0 = 2\sqrt{gL}$$

Quindi nel caso della barra, la formula diventa:

$$T(\vartheta) = \frac{m}{\cancel{L}} 4g\cancel{L} + mg(3\cos\vartheta - 2) = 4mg + mg(3\cos\vartheta - 2) = mg(3\cos\vartheta + 2)$$

La tensione T cambia di segno perché quando $\vartheta = 0$ vale 5g, quando $\vartheta = \pi$ vale -1. Quindi la tensione passa da un valore positivo ad un valore negativo.



Se invece di un'asta avessi un filo la condizione affinché faccia un giro completo è che:

$$T \geq 0$$

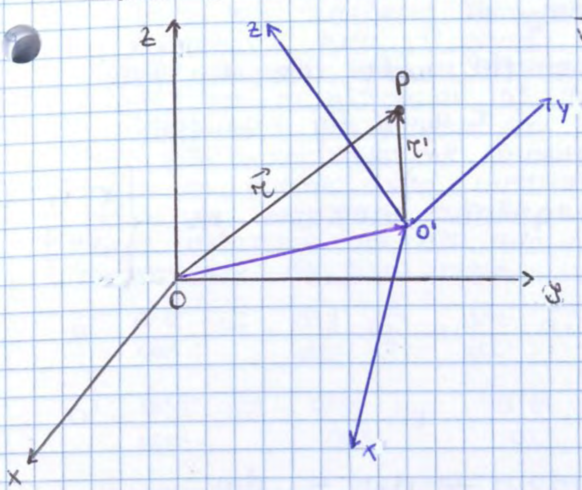
in particolare deve essere ≥ 0 nel punto B, quindi:

$$T(\pi) \geq 0 \quad \text{Quindi:}$$

$$\frac{\cancel{m}}{L} v_0^2 + \cancel{m}g(\underbrace{3\cos\pi - 2}_{=-5}) \geq 0$$

$$v_0^2 \geq 5gL$$

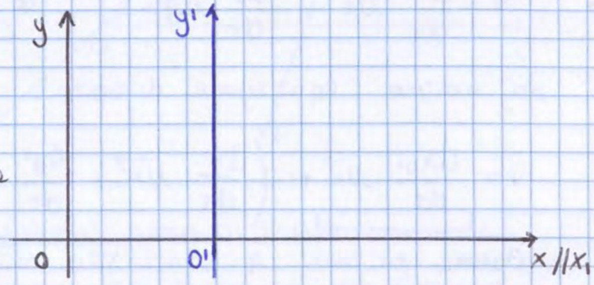
Definito un sistema di riferimento qualunque (O, x, y, z), considerato un punto P caratterizzato da un certo vettore $\vec{r}$. Se considero poi un altro sistema (O', x', y', z') il punto P rispetto a questo nuovo sistema sarà individuato da un altro vettore $\vec{r'}$. Le velocità nei due casi saranno:



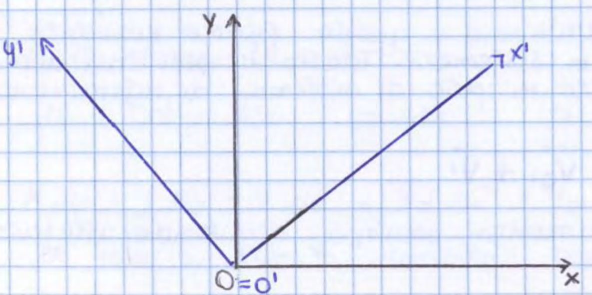
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{V'} = \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

$\overrightarrow{OO'}$ è il vettore che individua l'origine della II terna di assi rispetto alla I.

Le situazioni sono due: una è che l'orientazione della terna (O', x', y', z') non cambi al passare del tempo, l'inclinazione dell'asse x rispetto all'asse x' l'inclinazione dell'asse y rispetto ad y' e quella di z rispetto a z' non cambia mai.
Quando l'orientazione di (O', x', y', z') NON cambia rispetto a quella di (O, x, y, z) si dice che una è in MOTO DI TRASLAZIONE rispetto all'altra:
Traslazione pura: l'orientazione della terna di O' non cambia rispetto alla terna che consideriamo fissa.



Quando una terna non ruota rispetto all'altra i suoi versori fondamentali, $\vec{u_x}$ $\vec{u_y}$ e $\vec{u_z}$ non cambiano con il tempo.
Oltre la traslazione pura abbiamo quella che si chiama ROTAZIONE PURA. In una rotazione pura abbiamo un sistema di riferimento (O, x, y) e ne abbiamo un altro $(O' x' y')$ che ruota.
(L'angolo tra x' e y' è sempre 90°)



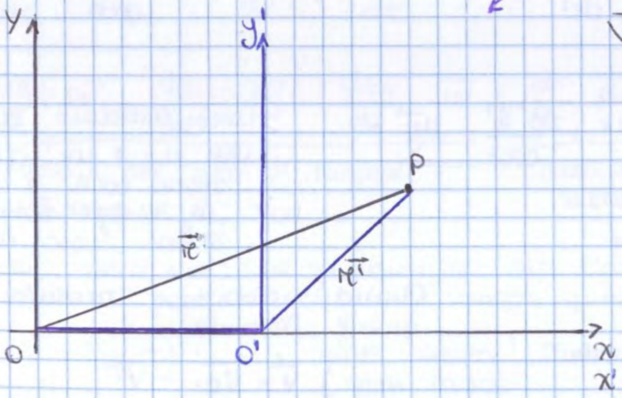
Consideriamo un punto generico punto P e i suoi rispettivi r e r'. In generale, se abbiamo coordinate di tipo cartesiano questo osservatore dice che la velocità è:

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}\vec{u_y} + \frac{dz}{dt}\vec{u_z}$$

(VELOCITÀ RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE IN O)

$$\vec{V'} = \frac{dx'}{dt}\vec{u_{x'}} + \frac{dy'}{dt}\vec{u_{y'}} + \frac{dz'}{dt}\vec{u_{z'}}$$

(VELOCITÀ RISPETTO A O'x'y'z')

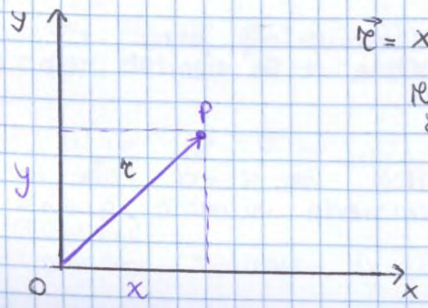


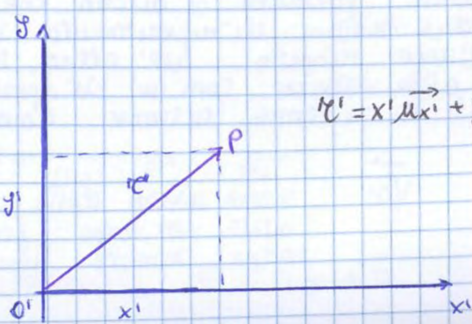
Per il I sistema di riferimento (O, x, y) $\vec{r}$ sarà:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{u_x} + y\,\vec{u_y}$$

mentre nell'altro sistema di riferimento sarà:

$$\vec{r'} = x'\vec{u_{x'}} + y'\vec{u_{y'}}$$



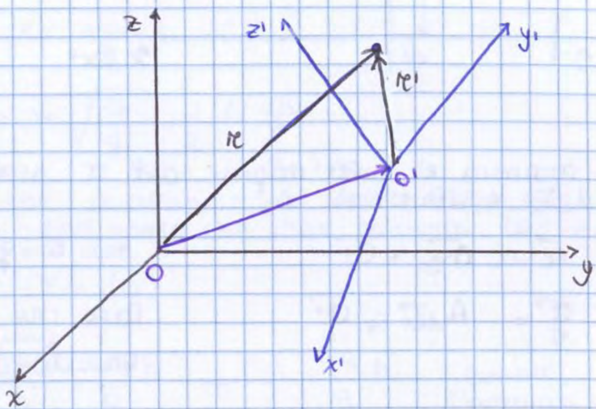


$\vec{a}_{O'}$ si chiama ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO.

Dalla II delle due equazioni ricaviamo che: $\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a'}$ formula di fondamentale importanza. Immaginare di avere due sistemi di riferimento, in moto rett. uniforme uno rispetto all'altro. Se è così $a_{O'} = 0$ e le due accelerazioni sono le stesse. L'accelerazione di un corpo è la stessa in tutti i sistemi di rif. che si muovono di moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro. Questo tipo di sistemi di rif. si chiamano SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI, la cui caratteristica è che in essi un corpo NON sottoposto a forze sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme. Trovato un sistema di rif. inerziale in realtà ne abbiamo trovati ∞ perchè sono inerziali anche tutti i sist. di rif. che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto ad esso.

Questa relazione non vale solo quando l'asse x e l'asse x' coincidono ma vale sempre.

In generale a e a' sono:



$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u_z}$$

$$\vec{a'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u_{x'}} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u_{y'}} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{u_{z'}}$$

Consideriamo sempre dei sistemi di rif. in moto traslatorio cioè l'orientazione non cambia rispetto all'orientazione dell'altra terna.

$$\vec{r} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} + z\,\vec{u_z}$$

$$\vec{r'} = x'\,\vec{u_{x'}} + y'\,\vec{u_{y'}} + z'\,\vec{u_{z'}}$$

$$\vec{OO'} = x_{O'}\,\vec{u_x} + y_{O'}\,\vec{u_y} + z_{O'}\,\vec{u_z}$$

I sistemi sono in traslazione uno rispetto all'altro se $u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}$ non variano con il tempo, in questo caso quindi (O', x', y', z') trasla rispetto (O, x, y, z).

Vale sempre la relazione:

$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r'}$ quindi:

$$x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} + z\,\vec{u_z} = x_{O'}\,\vec{u_x} + y_{O'}\,\vec{u_y} + z_{O'}\,\vec{u_z} + x'\,\vec{u_{x'}} + y'\,\vec{u_{y'}} + z'\,\vec{u_{z'}}$$

Se vado a fare la derivata al tempo:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}\vec{u_y} + \frac{dz}{dt}\vec{u_z} =$$

NB $u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}$ NON cambiano con il tempo quindi vanno considerate come costanti.

$$= \underbrace{\frac{dx_{O'}}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy_{O'}}{dt}\vec{u_y} + \frac{dz_{O'}}{dt}\vec{u_{z}}}_{\text{velocità del polo } O' \text{ rispetto all'origine } O,\ \vec{V_{O'}}} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{u_{x'}} + \frac{dy'}{dt}\vec{u_{y'}} + \frac{dz'}{dt}\vec{u_{z'}}}_{\text{velocità relativa al II sistema di riferimento, } \vec{V'}}$$

Quindi troviamo che qualunque sia l'orientazione del sistema mobile rispetto al sistema fisso allora vale sempre questo teorema di composizione

$$\vec{V} = \vec{V_{O'}} + \vec{V'}$$

Vale sempre! Non solo nel caso in cui $x \equiv x'$ ma in ogni caso.

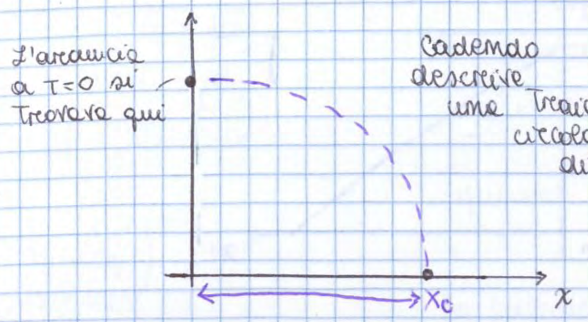
È facile notare che derivando ulteriormente, e quindi calcoliamo $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u_z} =$$

$$= \frac{d^2x_{O'}}{dt^2}\vec{u_x} + \frac{d^2y_{O'}}{dt^2}\vec{u_y} + \frac{d^2z_{O'}}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u_{x'}} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u_{y'}} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{u_{z'}}$$

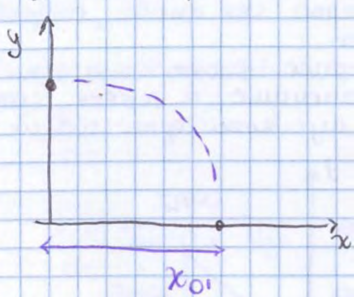
otteniamo l'analogo teorema DI COMPOSIZIONE DELLE ACCELERAZIONI: $\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a'}$

Dalle formule precedente abbiamo: $h - \frac{1}{2} g t_c^2 = 0$ quindi $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$



$$x_c = v_0 t_c = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Nel frattempo l'individuo che era qui si è spostato, e la quantità $x_{O'}$ sarà:



$$x_{O'} = v_0 t_c - \frac{1}{2} A t^2 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{1}{2} A \frac{2h}{g}$$

L'avanzamento, che chiamiamo Δ dell'arancia rispetto ai piedi dell'uomo che l'ha lasciata cadere è:

$$\Delta = x_c - x_{O'}(t_c)$$

$$= \cancel{v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}} - \cancel{v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}} + \frac{A}{g} h \rightarrow \Delta = \frac{A}{g} h$$

quindi l'arancia cade rispetto ai piedi dell'uomo che l'ha lasciata cadere di questa quantità.

Cosa capita invece per l'individuo che è solidale con il treno?
Per l'osservatore in O':
nel momento in cui l'arancia cade la sua velocità è zero;
quindi:

$$\text{per } t=0 \quad \begin{cases} v_{x'} = \left(\frac{dx'}{dt}\right)_0 = 0 \\ v_{y'} = \left(\frac{dy'}{dt}\right)_0 = 0 \end{cases}$$

La coordinata $x'(0)$ è = a quella dell'osservatore cioè è zero, mentre la y al tempo zero vale h:

$$\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = h \end{cases}$$

$\vec{a}'$ sarà uguale:

$$\vec{a}' = \frac{dv_{x'}}{dt} \vec{u_x} + \frac{dv_{y'}}{dt} \vec{u_y} = A \vec{u_x} - g \vec{u_y}$$

da questo ricaviamo:

$$\begin{cases} \frac{dv_{x'}}{dt} = A \\ \frac{dv_{y'}}{dt} = -g \end{cases}$$

integrando otteniamo:

$$\begin{cases} v_{x'} = At \\ v_{y'} = -gt \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = At \\ \frac{dy'}{dt} = -gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} A t^2 \\ y' = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

integrando ancora:

Queste sono le eq. parametriche dell'arancia rispetto all'individuo che l'ha lasciata cadere.

La traiettoria NON è più una parabola; dalla I potete ricavare: $t^2 = 2 \frac{x'}{A}$ se lo sostituite nella II trovate:

$$y' = h - \frac{1}{\cancel{2}} g \cancel{2} \frac{x'}{A} \rightarrow \boxed{y' = h - \frac{g}{A} x'}$$

Quindi la traiettoria, nel sistema di rif. solidale con il treno è una retta.

L'arancia tocca terra quando $y' = 0$.
Dove cade il corpo rispetto ad O'?

$$0 = h - \frac{g}{A} x'_c \quad \text{da cui} \quad \boxed{x'_c = \frac{A}{g} h}$$

Stesso risultato di prima.
L'arancia cade sempre nello stesso punto però l'impressione degli individui è diversa!

Per i versori $\vec{u_x}$ $\vec{u_y}$ e $\vec{u_z}$ valgono le seguenti regole:

$\vec{u_x} \times \vec{u_y} = \vec{u_z}$

$\vec{u_z} \times \vec{u_x} = \vec{u_y}$

$\vec{u_y} \times \vec{u_z} = \vec{u_x}$

$$\begin{pmatrix} u_x = u_{x'} \\ u_y = u_{y'} \\ u_z = u_{z'} \end{pmatrix}$$

Il seguente prodotto scalare vale:

$$\vec{\omega} \times \vec{u_{x'}} = \frac{d\vartheta}{dt}\left(\vec{u_{z'}} \times \vec{u_{x'}}\right) = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{u_{y'}}$$

quindi:

$$\vec{\omega} \times \vec{u_{x'}} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{u_{y'}}$$

Se facciamo il prodotto:

$$\vec{\omega} \times \vec{u_{y'}} = \frac{d\vartheta}{dt}\left(\vec{u_{z'}} \times \vec{u_{y'}}\right) = -\frac{d\vartheta}{dt}\vec{u_{x'}}$$

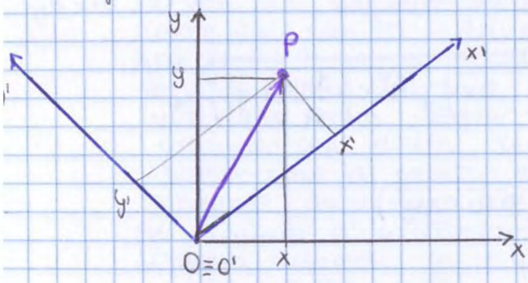
Le formule precedenti possono essere scritte come:

$$\frac{d\vec{u_{x'}}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u_{x'}}$$

$$\frac{d\vec{u_{y'}}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u_{y'}}$$

Queste sono anche dette FORMULE DI POISSON e ci permettono di calcolare la derivata temporale dei versori, nota la velocità angolare.

Se consideriamo il punto P esso avrà certe coordinate rispetto al sistema (Ox, y) e altre rispetto al sistema di riferimento mobile. Rispetto al sist. di riferimento fisso il vettore posizione sarà $\vec{r}$, mentre rispetto al sistema di rif. mobile sarà $\vec{r'}$.



$$\vec{r} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y}$$

$$\vec{r'} = x'\vec{u_{x'}} + y'\vec{u_{y'}}$$

Il vettore r è uno ma si può scomporre in modo diverso a seconda del sistema di riferimento preso in considerazione.

Velocità e acc. per il sistema di riferimento fisso saranno:

$$\begin{cases} \vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}\vec{u_y} \\ \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u_y} \end{cases}$$

Per l'altro osservatore velocità e accelerazione saranno:

$$\begin{cases} \vec{V'} = \frac{dx'}{dt}\vec{u_{x'}} + \frac{dy'}{dt}\vec{u_{y'}} \\ \vec{a'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u_{x'}} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u_{y'}} \end{cases}$$

Il nostro scopo è trovare come sono legate queste formule tra di loro.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(x'\vec{u_{x'}} + y'\vec{u_{y'}}\right)}_{\text{te la scompongo come mi pare.}} = \frac{dx'}{dt}\vec{u_{x'}} + x'\underbrace{\frac{d\vec{u_{x'}}}{dt}}_{=\vec{\omega}\times\vec{u_{x'}}} + \frac{dy'}{dt}\vec{u_{y'}} + y'\underbrace{\frac{d\vec{u_{y'}}}{dt}}_{=\vec{\omega}\times\vec{u_{y'}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{u_{x'}} + \frac{dy'}{dt}\vec{u_{y'}}}_{V'} + \underbrace{x'\left(\vec{\omega}\times\vec{u_{x'}}\right) + y'\left(\vec{\omega}\times\vec{u_{y'}}\right)}_{\omega \times r'} =$$

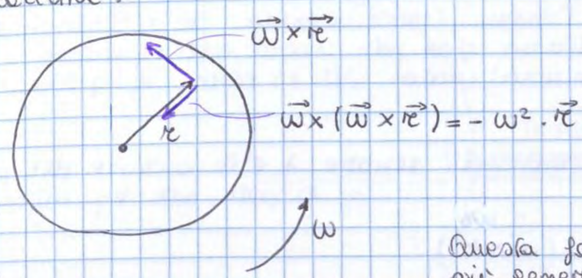
I due termini: $x'\left(\vec{\omega}\times\vec{u_{x'}}\right) + y'\left(\vec{\omega}\times\vec{u_{y'}}\right) = \vec{\omega}\times\left(x'\vec{u_{x'}}\right) + \vec{\omega}\times\left(y'\vec{u_{y'}}\right) =$

Dato che x' è un numero posso scambiarlo col segno di prodotto esterno

$$= \vec{\omega}\times\underbrace{\left(x'\vec{u_{x'}} + y'\vec{u_{y'}}\right)}_{\vec{r'}} = \vec{\omega}\times\vec{r'}$$

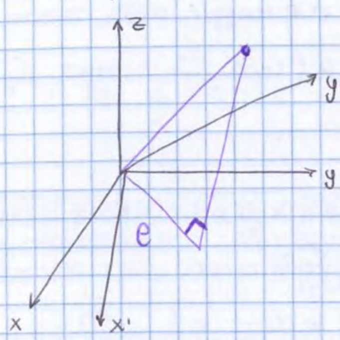
I primi due termini rappresentano la velocità rispetto al sistema di riferimento mobile, V'.

Il francese Foucol ha fatto un esperimento importante: ha attaccato una fune al centro del Pantheon e andava a vedere come ruotava il piano di oscillazione.



Prendiamo un punto P caratterizzato da r ed il sistema sta ruotando così, in modo antiorario. Se P è fermo come è diretta la sua accelerazione? Secondo la regola della mano destra. Quindi l'ultimo termine è l'acc. centripeta diretta verso il centro.

Questa formula vale per una situazione leggermente più generale. Qui supponevamo che il moto avvenisse semplicemente sul piano xy. In realtà se abbiamo una situazione di questo tipo la formula continua a valere, vale tutte le volte che c'è una rotazione attorno ad un asse che rimane fisso. Quando mettete tutte le formule l'ultimo contributo diventa:



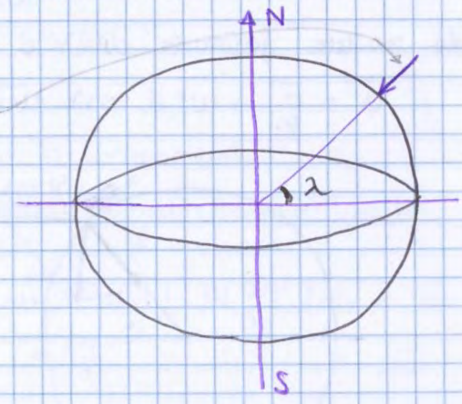
$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \cdot \vec{\rho}$$

dove ρ è la proiezione sul piano xy del punto.

Tutte le formule scritte valgono anche in quel caso. Vediamo qualche applicazione. Dobbiamo rispondere a due domande importanti: l'acc. di gravità o la direzione del filo a piombo sulla Terra è sempre la stessa? Se lascio cadere da una torre un corpo, questo cade sulla verticale oppure no?

Quando lasciamo cadere un corpo in prossimità della Terra, questo cade lungo la verticale, questo accadrebbe se noi stessimo fermi, ma la Terra si muove ed anche noi con lei.

Asse N-S, λ angolo rispetto al piano equatoriale. Se giriamo cosa vediamo? Se fossi Dio e guardassi fuori dalla Terra vedrei l'accelerazione di gravità così diretta. Indichiamo con g_0 l'accelerazione di gravità rispetto ad un sistema di rif. inerziale; chiamiamo con a' quella che vediamo noi, quindi a': accelerazione di gravità in sistema rotante. g_0 è quella che sarebbe, a' è quella che vedo io.



Applicando il teorema di scomposizione dell'acc.:

$$\vec{g_0} = \vec{a'} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v'}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$ ricavo a'

$$\vec{a'} = \vec{g_0} - 2(\vec{\omega} \times \vec{v'}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

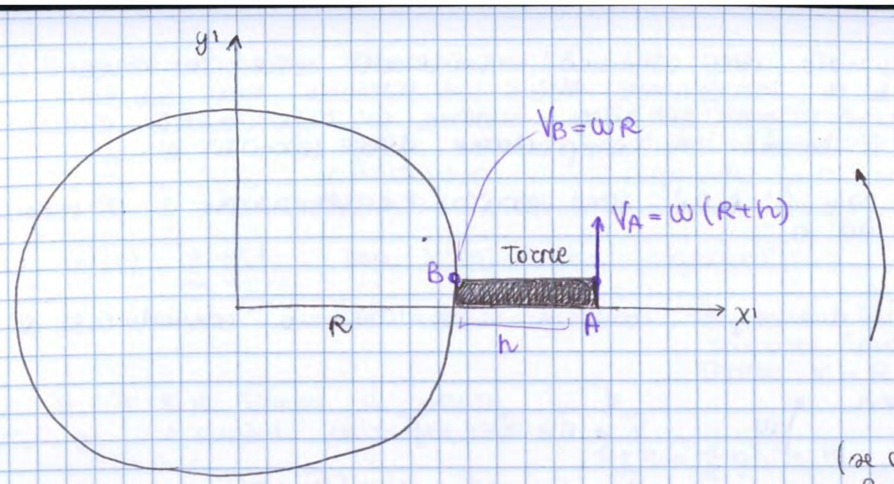
g_0 è una caratteristica della Terra; poi ho due termini: uno dipende dalla velocità del corpo e uno che dipende dalla posizione del corpo. Il fatto che il corpo si muova è sempre importante o no? Quando lo stato di velocità gioca un ruolo importante? La velocità di rotazione della Terra è la seguente:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{la Terra per fare un giro impiega 24 h, 86400 s} \quad = \frac{2\pi}{86400} \sim 7{,}3 \cdot 10^{-5} \ \frac{rad}{s}$$

Il raggio della Terra R è dell'ordine di 6000 Km, $R \sim 6{,}3 \cdot 10^6$ m.
Il secondo termine vale al massimo $2\omega v'$ quando i vettori sono tra loro $\perp$, quindi i due termini sono confrontabili quando:

$$2\cancel{\omega} v' = \omega^{\cancel{2}} R \quad \rightarrow \quad v' \sim \frac{\omega R}{2} \simeq 230 \ m/s$$

Se siamo sulla Terra affinché l'effetto di Coriolis sia importante il corpo deve avere più o meno questa velocità.



Mentre il corpo cade avrà una velocità relativa rispetto alla base che è

$$V_r = \omega \cdot h.$$

Quanto tempo impiega a cadere?

$$T_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e quindi avanzerebbe (se ad A c'è la massima e a B la minima mediamo la metà quindi $1/2\, V_r$) di un Δ circa uguale

$$\Delta \approx \frac{1}{2} V_r \cdot T_c = \frac{1}{2}\,\omega \cdot h \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Se ω è $\neq$ da zero il corpo non cade lungo la verticale ma avanza un po'.

Questo è il ragionamento di Galileo. Se invece andassimo a fare i calcoli quindi ci mettessimo all'equatore possiamo sfruttare le formule della composizione delle velocità, supponiamo che l'accelerazione $a_{sa} = a\ g$.

$$\vec{a'} = \underbrace{\{ g_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \}}_{} - 2(\vec{\omega} \times \vec{V'})$$

questa è l'acc. che ha il corpo nel sistema solidale con noi che giriamo con la terra.

All'equatore questa quantità è:

$(g_0 - \omega^2 R)\, \vec{u_{x'}}$ e la chiamiamo $\vec{g}$ quindi:

$$\vec{a'} = -\vec{g}\, \vec{u_{x'}} - 2(\omega \times \vec{V'})$$

La velocità V' nel momento in cui il corpo cade ha 2 componenti:

$$\vec{V'} = \frac{dx'}{dt}\vec{u_{x'}} + \frac{dy'}{dt}\vec{u_{y'}}$$

quando faccio l'accelerazione di coriolis sarà:

$$\vec{W} \times \vec{V'} = (\omega \cdot \vec{u_{z'}}) \times \left(\frac{dx'}{dt}\vec{u_{x'}} + \frac{dy'}{dt}\vec{u_{y'}} \right) = \omega \frac{dx'}{dt} \underbrace{(\vec{u_{z'}} \times \vec{u_{x'}})}_{=\vec{u_{y'}}} + \omega \frac{dy'}{dt} \underbrace{(\vec{u_{z'}} \times \vec{u_{y'}})}_{=-\vec{u_{x'}}}$$

L'accelerazione complessiva, da conoscere per calcolare la traiettoria è:

$$\vec{a'} = -g\,\vec{u_{x'}} - \omega \frac{dx'}{dt}\vec{u_{y'}} + \omega \frac{dy'}{dt}\vec{u_{x'}}$$

$$\boxed{\vec{a} = -\left(g - \omega \frac{dy'}{dt}\right)\vec{u_{x'}} + \omega \frac{dx'}{dt}\vec{u_{y'}}}$$

Questa è l'accelerazione nel sistema di riferimento solidale con la terra.

L'accelerazione per definizione è

$$\vec{a'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u_{x'}} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u_{y'}}$$

Quindi avrò che nel piano equatoriale:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} = -\left(g - \omega \dfrac{dy'}{dt}\right) \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -\omega \dfrac{dx'}{dt} \end{cases}$$

Quando un corpo cade la sua velocità è piccola, quindi nella I di queste equazioni abbiamo che

$\omega \frac{dy'}{dt} \ll g$ quindi la possiamo trascurare, nella II non la possiamo trascurare. Il nostro problema si riduce a risolvere queste equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} = -g \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -\omega \dfrac{dx'}{dt} \end{cases}$$

Dalla I di quelle equazioni otteniamo: $\frac{dx'}{dt} = c - gt$

questa costante c deve essere zero, perchè la velocità verso il basso al tempo zero è zero quindi $c = 0$ perchè $\frac{dx'}{dt} = 0$

Quindi: $\frac{dx'}{dt} = -gt$ integriamo ancora:

$x'(t) = x'(0) - \frac{1}{2} g t^2$ ma $x'(0) = R + h$ quindi

$$x'(t) = R + h - \frac{1}{2} g t^2$$

Quanto tempo impiega il corpo a toccare terra? Quando tocca terra $x' = R$ (Raggio della terra)

Quindi se T_c è il tempo di caduta, $x'(T_c) = R$ e quindi avremo che:

$$R + h - \frac{1}{2} g t^2 = R \rightarrow T_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Quale spostamento subisce il corpo durante la caduta? guardiamo la II equazione e vediamo che:

$\frac{d^2y'}{dt^2} = -2w(-gt)$ perchè $\frac{dx'}{dt} = -gt$ quindi troviamo $\frac{d^2y'}{dt^2} = 2wgt$ integriamo:

$\frac{dy'}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dy'}{dt}\right)_0}_{=0} + wgt^2 \longrightarrow \frac{dy'}{dt} = wgt^2$ integriamo ancora: $y'(t) = \underbrace{y'(0)}_{=0} + \frac{1}{3} w g t^3$

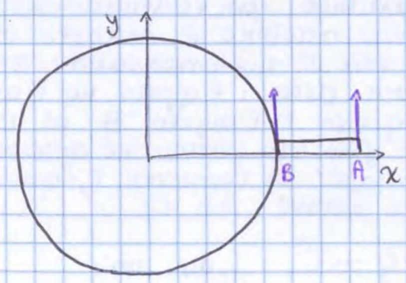
$y'(t) = \frac{1}{3} w g t^3$ man mano che il corpo scende la y cambia in questo modo.

$y' \text{ è } > 0$ quindi cade davanti al piede della torre, di quanto cade davanti? Basta mettere il tempo di caduta così da trovare l'avanzamento rispetto alla base della torre quindi:

$$\boxed{y'(T_c) = \frac{wg}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}}$$

Questa è la DEVIAZIONE VERSO ORIENTE, il corpo non cade lungo la verticale.

Ieri abbiamo fatto un altro tipo di ragionamento: Quando il corpo cade da A il corpo ha una velocità $V_A = w(R+h)$ il punto B invece ha velocità $V_B = w \cdot R$ Quindi la pietra quando viene abbandonata va più forte della base, va più forte della base di una quantità V:



$V_A = w(R+h)$

$V_B = wR$

$$V = V_A - V_B = w(R+h) - wR = wh$$

Man mano che la pietra cade è sempre più vicina a quella della base e possiamo immaginare che la velocità con cui avanza sia la metà di questa, se la velocità è la metà di questa, dato che il tempo di caduta è sempre:

$T_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ di quanto avanza?

$S = \frac{V}{2} T_c = \frac{wh}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ = moltiplichiamo per due $= \frac{wg}{4}\frac{2h}{g}\sqrt{\frac{2h}{g}} =$ dividiamo e moltiplichiamo per g

$$\boxed{\frac{wg}{4}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}}$$

Questa è la formula ottenuta da un incompetente, da uno che non sa delle forze di Coriolis. Dove sta la differenza? In una al denominatore c'è il 3 nell'altra il 4. L'effetto quindi si poteva prevedere anche con conoscenze elementari.

Galileo però non è arrivato a queste conclusioni perchè se $h = 100$ m allora $y' \sim 1$ cm e quindi questo valore è difficilmente misurabile soprattutto quando galileo ha cercato di fare questi calcoli.

Noi abbiamo considerato i due casi di rotazione pura e traslazione pura separati. Però ovviamente un sistema rispetto ad un altro può ruotare e traslare contemporaneamente. Quindi le formule:

Trasl. PURA) $\vec{V} = \vec{V_0'} + \vec{V'}$ $\vec{a} = \vec{a_0} + \vec{a'}$

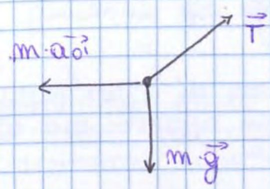
Rotaz. PURA) $\vec{V} = \vec{w} \times \vec{r'} + \vec{v'}$ $\vec{a} = 2(\vec{w} \times \vec{v'}) + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r'}) + \vec{a'}$

L'osservatore sul treno scrive: accelerazione del corpo sarebbe visto che i sistemi di riferimento stanno traslando uno rispetto all'altro, :

$\vec{a} = \vec{a_{O'}} + \vec{a_i}$ dato che il sistema non è inerziale le forze apparenti sono: $\vec{F}_{app} = -m \cdot \vec{a_{O'}}$

Quindi scriverebbe la legge di Newton così: $m \cdot \vec{a_i} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a_{O'}}$

c'è la forza peso, la tensione della fune e questa forza di modulo $m\vec{a_{O'}}$.



Per l'individuo seduto sul treno, il corpo è sottoposto ad una forza che va verso dietro legata alla situazione che il sist. di riferimento non è inerziale. Se m è ferma in O' questo vuol dire che $a_{O'} = 0$ e allora troviamo che:

$\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a_{O'}} = 0$ questa equazione che rappresenta l'equilibrio nel sist. di rif. $x'y'$ è uguale all'altra.

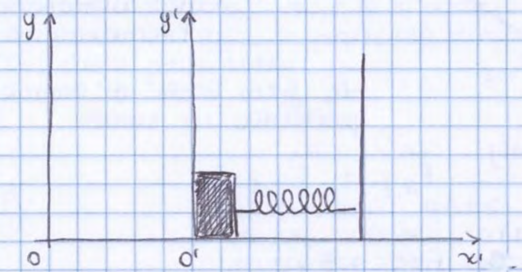
(NB) Per l'osservatore sul treno sembra esserci una forza che spinge indietro il corpo.

<u>Problema</u>: Dato il sistema Oxy ed un sistema mobile $O'x'y'$ ed una molla attaccata ad un corpo su un piano liscio. Quando il treno accelera l'osservatore sul sistema fisso, dice:

$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ la forza è dovuta alla molla quindi:

$m \cdot \vec{a} = Kx$ quindi il sistema ha un'accelerazione:

$$\boxed{a = \frac{K}{m} x}$$

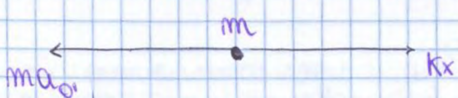


L'osservatore in moto, invece, dice: $\vec{a} = \vec{a_{O'}} + \vec{a'}$ quindi $\vec{F}_{app} = -m\,\vec{a_{O'}}$
quindi scrive la seguente legge:

$m \cdot \vec{a'} = Kx\,\vec{u_x} - m \cdot \vec{a_{O'}}$ Quindi oltre la forza della molla c'è una forza nella direzione opposta che è legata al fatto che il sistema non è inerziale.

Quando la massa m non vibra più, sta ferma, quando m è in equilibrio $a' = 0$ quindi:

$Kx\,\vec{u_x} - m\,\vec{a_{O'}} = 0$



Per l'individuo solidale con il vagone vede una massa m con una forza Kx e una forza $m \cdot a_{O'}$ ed il sistema è in equilibrio perché la forza che applica la molla è = ed opposta alla forza che viene dalla non inerzialità del sistema.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 111 di 296

Nella sommatoria l'indice possiamo indicarlo come ci pare:

$$\sum_{i=1}^{N} b_k = \sum_{k=1}^{N} b_i \qquad \text{SONO LA STESSA COSA.}$$

In particolare potete scambiare j con i. Allora posso scrivere:

$$\sum_{i,j} \vec{F}_{j,i} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j} \vec{F}_{j,i} + \sum_{j,i} \vec{F}_{ij}\right\}$$

Dato che le somme vanno tutte da 1 ad N, questo posso anche scriverlo come:

$$\vec{R}^{(int)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\vec{F}_{j,i} + \vec{F}_{i,j}\right) = 0$$

Le forze soddisfano il principio di azione e reazione quindi la loro somma è zero.

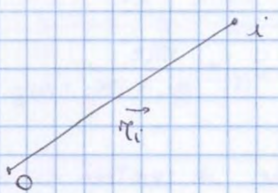
Quanto vale allora la risultante di tutte le forze del sistema? Su di una particella generica i si esercita una forza esterna + una forza legata all'interazione con le altre particelle.

$$\vec{F_i} = \vec{F_i}^{(int)} + \vec{F_i}^{(ext)}$$

Dunque la risultante sarà:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F_i} = \sum_{i=1}^{N}\left\{\vec{F_i}^{(est)} + \vec{F_i}^{(int)}\right\} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}^{(est)} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}^{(int)} = R^{(est)} + R^{(int)} = R^{(est)}$$

La risultante delle forze che si esercitano su un sistema si riduce alla risultante delle forze esterne. Studiamo adesso il movimento del sistema. Abbiamo visto delle equazioni per una particella singola; se i è la particella, r_i il suo vettore posizione, Ω il polo, $r_{\Omega i}$ la posizione rispetto al polo abbiamo definito delle grandezze:



$$\begin{cases} \vec{P_i} = m \cdot \vec{V_i} \\ \vec{L}_{\Omega i} = \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{P_i} \\ \vec{E}_{K_i} = \frac{1}{2} m \vec{V_i}^2 \end{cases}$$

dove $V_i = \frac{d\vec{r_i}}{dt}$

Estendiamo questo discorso ad un sistema di particelle. Per il sistema occorre sommare tutti i contributi:

$$\begin{cases} \vec{P_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P_i} \\ \vec{L}_{\Omega} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{\Omega i} \\ \vec{E}_K = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_{K_i} \end{cases}$$

Avevamo anche trovato che:

$$\frac{d\vec{P_i}}{dt} = \vec{F_i}$$

$$\frac{d\vec{L}_{\Omega i}}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P_i} + \vec{M}_{\Omega i}$$

Siamo interessati a vedere come queste proprietà ad un intero sistema.

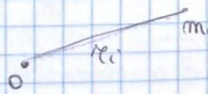
In un sistema di particelle si definisce un punto geometrico, questo punto si chiama CENTRO DI MASSA. Dato un sistema di m_i particelle si chiama MASSA TOTALE la somma delle masse di tutte le particelle.

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Si definisce CENTRO DI MASSA la quantità:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}$$

In coordinate cartesiane avremo:



$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\vec{u_x} + y_{CM}\vec{u_y} + z_{CM}\vec{u_z}$$

$$\vec{r_i} = x_i\vec{u_x} + y_i\vec{u_y} + z_i\vec{u_z}$$

Quindi:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

$$= \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{P_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{P_i}}{dt} =$$ (la derivata della quantità di moto è = alla forza che si esercita sulla particella) $$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\vec{F_i} =$$

(Ma la forza che si esercita su una particella è data dalla somma di FORZA INTERNA e FORZA DI ORIGINE ESTERNA) $$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F_i}^{(int)} + \vec{F_i}^{(ext)}\right) = \frac{1}{M}\left\{\vec{R}^{(int)} + \vec{R}^{(ext)}\right\} =$$

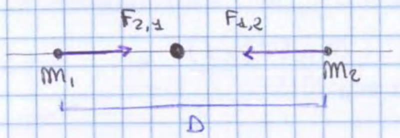
(dato che la prima delle risultanti è sempre nulla otteniamo..) $$= \frac{1}{M}\vec{R}^{(ext)}$$

Se la risultante delle forze esterne è nulla, l'acc. del centro di massa è nulla e la velocità del centro di massa è costante. Se la risultante delle forze ext è ≠ da zero il CM si muove di moto vario. Scriviamo la formula che abbiamo appena trovato in maniera diversa:

$$\vec{R}^{(est)} = M \cdot \vec{a}_{CM} = M\frac{d}{dt}(\vec{V}_{CM}) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

La quantità di moto totale di un sistema di particelle cambia se la risultante delle forze esterne è diversa da zero.

<u>Problema</u>: Due punti materiali sono sottoposti solo alla loro interazione che è attrattiva. Se essi sono inizialmente ad una distanza D e lasciati liberi in quale posizione si incontrano?



I corpi non interagiscono con altre particelle diverse da quelle del sistema: $\vec{R}^{(est)} = 0$

Il centro di massa al tempo $t=0$ si troverà in una determinata posizione, caratterizzato da una ascissa che abbiamo già trovato essere:

$$x_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot D.$$

All'inizio è tutto fermo quindi $t=0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$.

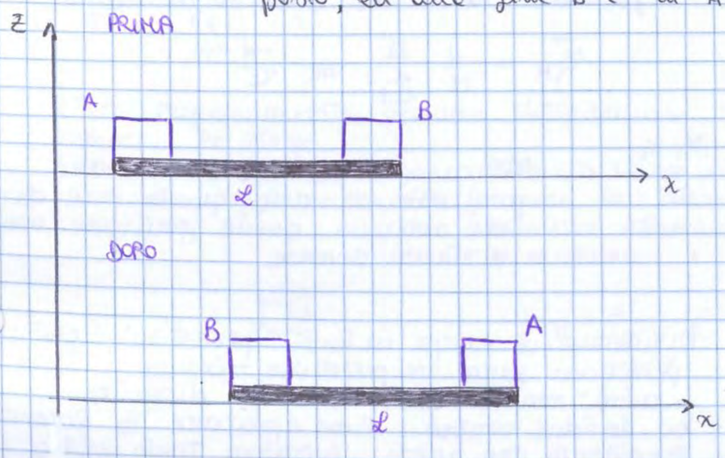
Essendo $\vec{R}^{(ext)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ ma poiché le particelle interagiscono solo fra di loro: $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{P} = $ costante.

Se $\vec{P} =$ cost. vuol dire che non varia con il tempo e cioè continua ad avere il valore che aveva al tempo $t=0$. La P al tempo zero vale:

$$\vec{P}(0) = m_1 \cdot \vec{V_1}(0) + m_2\vec{V_2}(0) = 0$$

Quindi P è costante ma è anche zero. Se $\vec{P} = 0$ vuol dire che $M \cdot V_{CM} = 0$ Quindi $V_{CM} = 0$. Il centro di massa non si muove quindi le due particelle si muovono e si incontrano ad un certo tempo. Le particelle si muovono ma il centro di massa rimane fermo.

<u>Problema</u>: C'è una barca praticamente senza massa e su di essa una persona A ad un'estremità ed all'altra un'altra persona B. Non c'è attrito tra barca ed acqua e le due persone si scambiano di posto, ed alla fine B è in A, ed A in B. Di quanto si sposta la barca?



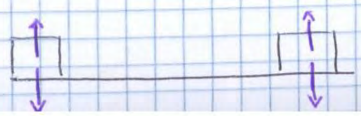
La relazione che abbiamo ricavato è che: $\frac{dP}{dt} = \vec{R}^{(est)}$

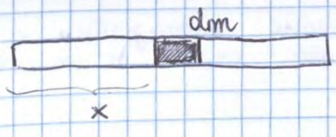
Questa è un'equazione vettoriale quindi ci da 3 equazioni scalari:

- lungo l'asse z non abbiamo movimento quindi avremo:

$$0 = \vec{R}^{(est)}_z \quad \text{quindi}$$

$$N_A + N_B = (m_A + m_B)g$$





quando i pezzettini sono piccoli, quindi:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\, x_i = \frac{1}{M}\int_{masse} x\, dm$$

quando il numero di elementi di una sommatoria → ∞ questa tende all'integrale!

Dove dm è la massa ∞-esima messa a distanza x dal punto rispetto al quale calcolo la distanza dal centro di massa.

Quando si parla di sistema lineare si introduce il concetto di DENSITÀ LINEARE DI MASSA (λ) definita come la massa contenuta nella lunghezza unitaria,

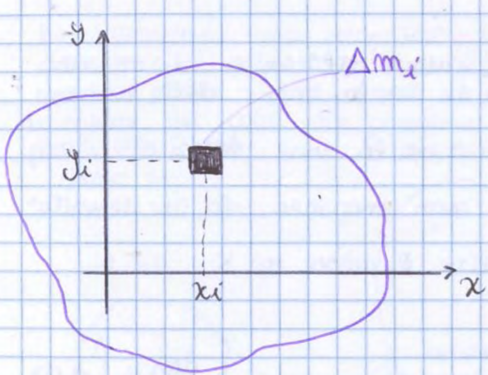
$$\lambda = \frac{dm}{dx} \qquad \left[\frac{kg}{m}\right]$$

da questa ricaviamo che $dm = \lambda\, dx$ quindi la posizione del centro di massa per un corpo che ha forma lineare diventa:

$$\boxed{x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L \lambda x\, dx}$$

Tutte le volte che avete un corpo distribuito su una linea la x del centro di massa si trova in questo modo.

Questa la possiamo generalizzare, se invece di avere una linea abbiamo un piano è esattamente la stessa operazione.



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} x_i m_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} y_i m_i$$

Ripetendo lo stesso calcolo di prima abbiamo:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int_{corpo} x\, \Delta m$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} y_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int_{corpo} y\, \Delta m$$

Quando si deve considerare la distribuzione della massa su di un piano, in genere si introduce una quantità chiamata DENSITÀ SUPERFICIALE DI MASSA (σ)

$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

"massa contenuta in una piccola superficie S" da questa otteniamo che $dm = \sigma\, ds$

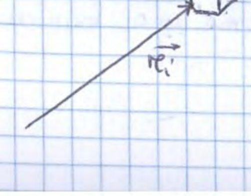
Quindi la posizione del centro di massa per un corpo piano è

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_S \sigma x\, ds$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_S \sigma y\, ds$$

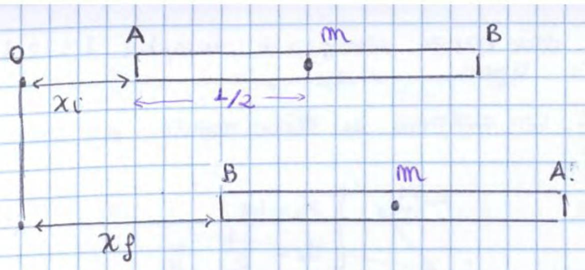
$$[\sigma] = \left[\frac{kg}{m^2}\right]$$

Stesso ragionamento per una distribuzione volumica, il processo è sempre lo stesso.
Si considera la massa contenuta in un volumetto, individuato da un vettore $\vec{r_i}$ con una massa Δm_i e facendo lo stesso calcolo, si introduce questa volta una densità volumica di massa dm/dV, e le formule diventano:



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \rho\, x\, dV \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \rho\, y\, dV$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \rho\, z\, dV$$



Il punto m è il centro di massa della barca e si trova ad $L/2$. La posizione del centro di massa iniziale vale:

$$x_{CM}(i) = \frac{m_A x_i + m(x_i + L/2) + M_B(x_i + L)}{m_A + m_B + m} = \frac{(m_A + m_B + m)x_i + m_B \cdot L + m L/2}{m_A + m_B + m} = x_i + \frac{m_B + \frac{1}{2}m}{m_A + m_B + m} L$$

$$x_{CM}(f) = \frac{m_B x_f + m(x_f + L/2) + m_A(x_f + L)}{m_A + m_B + m} = \frac{(m_B + m + m_A)x_f + m_A \cdot L + m \cdot L/2}{m_A + m_B + m} = x_f + \frac{m_A + 1/2\, m}{m_A + m_B + m} \cdot L$$

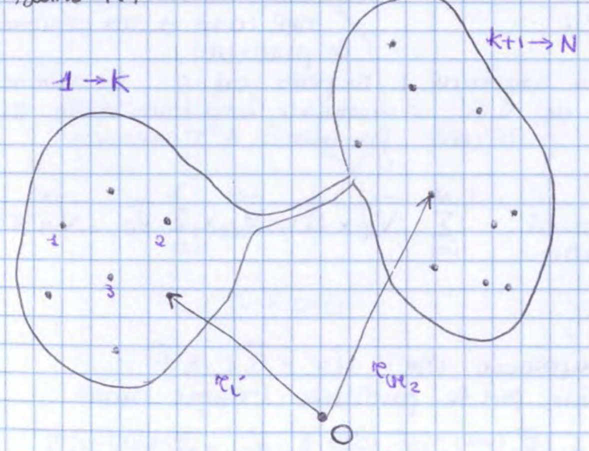
Se non ci sono forze orizzontali il centro di massa non si muove quindi in assenza di forze orizzontali: $x_{CM}(i) = x_{CM}(f)$ e quindi troviamo: $x_i + \frac{m_B + 1/2\, m}{m_A + m_B + m} \cdot L = x_f + \frac{m_A + 1/2\, m}{m_A + m_B + m} \cdot L$

da cui ricaviamo

$$\boxed{x_f - x_i = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B + m} L}$$

formula parecchio importante perché ci dice che se la massa della barca è molto grande praticamente non c'è spostamento, se la massa della barca è zero torniamo al caso di prima.

Dimostriamo una proprietà fondamentale: Tutte le volte che un corpo si può immaginare diviso in due parti, il centro di massa si può calcolare calcolando prima i centri di massa delle due parti e poi calcolando il centro di massa complessivo. Supponiamo di avere dei corpi che possiamo separare più o meno così: il I contiene un numero di particelle da 1 a k e quell'altro da k+1 ad N particelle. In totale le particelle sono N.



La posizione del centro di massa è:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \left\{ \sum_{i=1}^{k} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=k+1}^{N} m_i \vec{r}_i \right\}$$

Adesso chiamo M_1 la somma delle particelle che stanno nella prima parte ed M_2 la somma delle particelle che stanno nell'altra parte:

$$M_1 = \sum_{i=1}^{k} m_i \qquad M_2 = \sum_{i=k+1} m_i$$

quindi: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=k+1}^{N} m_i = M_1 + M_2$

Allora $\vec{r}_{CM}$ lo scrivo così:

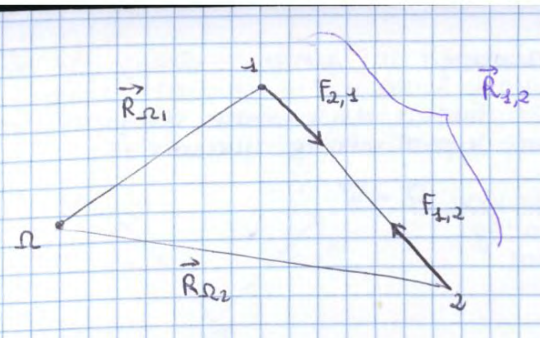
$$= \frac{1}{M} \cdot \left\{ M_1 \cdot \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{k} m_i \vec{r}_i + M_2 \cdot \frac{1}{M_2} \sum_{i=k+1}^{N} m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{1}{M} \left(M_1 \cdot \vec{r}_{CM_1} + M_2\, \vec{r}_{CM_2} \right)$$

questo è il centro di massa del I pezzo

questo è il centro di massa del II pezzo

questo è il centro di massa di due particelle puntiformi localizzati nei centri di massa delle rispettive parti. Quindi quando un corpo si può immaginare diviso in due o più parti, il centro di massa complessivo si può calcolare considerando le diverse parti come delle masse concentrate nei rispettivi centri di massa. Proprietà molto importante!

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \left(M_1\, \vec{r}_{CM_1} + M_2\, \vec{r}_{CM_2} \right)$$



$$\vec{M}^{(int)} = \vec{R}_{\Omega 1} \times \vec{F}_{21} + \vec{R}_{\Omega 2} \times \vec{F}_{1,2}$$

Dato che $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ allora $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$ e quindi M diventa:

$$\vec{M} = -\vec{R}_{\Omega 1} \times \vec{F}_{1,2} + \vec{R}_{\Omega 2} \times \vec{F}_{1,2} = (\vec{R}_{\Omega 2} - \vec{R}_{\Omega 1}) \times \vec{F}_{1,2} =$$
$$= \vec{R}_{1,2} \times \vec{F}_{1,2}$$

Chiamiamo $R_{1,2}$ il vettore che $\vec{R}_{1,2} = \vec{R}_{\Omega 2} - \vec{R}_{\Omega 1}$ da cui: $\vec{R}_{\Omega 2} = \vec{R}_{\Omega 1} + \vec{R}_{1,2}$
le forze di azione e reazione sono dirette lungo la congiungente quindi i vettori sono $\parallel$, ed il prodotto esterno di due vettori $\parallel$ e' zero, cosa importante: il momento delle forze interne e' nullo. Il momento angolare complessivo di un sistema di particelle cambia se e solo se il momento delle forze esterne e' $\neq$ da zero

$$\frac{dL_\Omega}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P} + M_\Omega^{(est)}$$

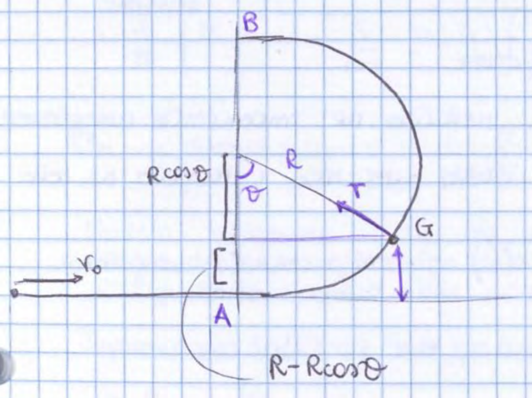
questo diventa semplice in due casi. I caso: quando Ω e' fisso, la sua velocita' e' zero, $V_\Omega = 0 \implies$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = M_\Omega^{(ext)}$$

II caso: se $\Omega \equiv CM$ allora $\vec{V}_\Omega = \vec{V}_{CM}$ allora il termine

$$-\vec{V}_\Omega \times \vec{P} = -V_{CM} \times (M\vec{V}_{CM}) = 0$$ perche' i vettori sono $\parallel$ $\rightarrow \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = M_\Omega^{(ext)}$

Problema: abbiamo un corpo che avanza di moto rettilineo con una certa velocita' V_0. Entra in una guida circolare di raggio R. Quanto deve valere la velocita' V_0 di questa particella affinche' non perda contatto con la guida?



A contatto con una guida la reazione T puo' essere diretta solo così. Non basta applicare la conservazione dell'energia! Sarei portato a dire:

$$mV_0^2 = m2gR \qquad \text{SBAGLIATO!}$$

Devo imporre che in ogni punto T sia > 0 così che preme sull'orlo della guida.

$$E = E(A) = \frac{1}{2} m V_0^2 = \text{costante}.$$

Nel punto generico G l'energia vale:

$$E(G) = \frac{1}{2} m v^2(\vartheta) + mgR(1-\cos\vartheta) = E(A)$$

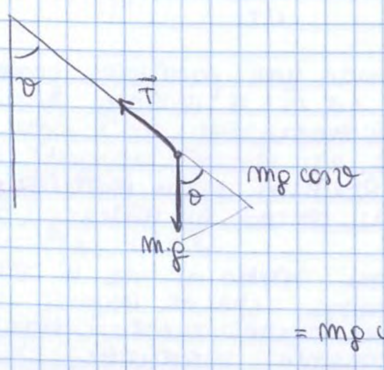
che e' uguale all'energia che il punto ha.

$$\frac{1}{2} m V^2(\vartheta) + mgR(1-\cos\vartheta) = \frac{1}{2} m V_0^2$$

quindi la velocita' in ogni punto sara':

$$V^2(\vartheta) = V_0^2 - 2gR(1-\cos\vartheta).$$

Calcoliamo le forze:



per la legge di Newton

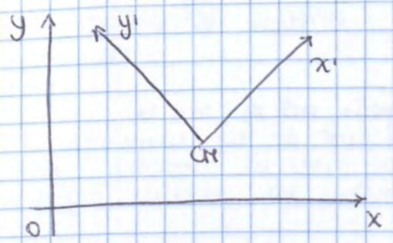
$$T + mg = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{u}_\tau + \frac{V^2}{R}\vec{u}_n\right)$$

$$T - mg\cos\vartheta = \frac{mV^2(\vartheta)}{R}$$ da cui T sarà:

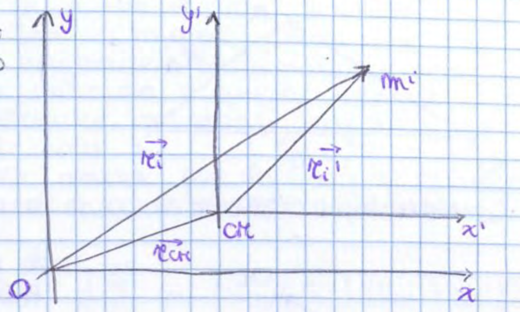
$$T = mg\cos\vartheta + \frac{m}{R}\left\{V_0^2 - 2gR(1-\cos\vartheta)\right\} =$$

$$= mg\cos\vartheta + \frac{m}{R}V_0^2 - 2mg(1-\cos\vartheta) = mg(3\cos\vartheta - 2) + \frac{m}{R}V_0^2.$$

Se ho questo sistema di riferimento x,y con origine O, e poi fissato il centro di masse considero un altro sistema di rif. con origine nel centro di massa che gli rimane solidale, x'y' non ruotano. Traslano e due sistemi traslano se l'orientazione degli assi non cambia. x'y' possono essere così messi.



Ovviamente per comodità gli assi x'e y' li prendo così orientati:



Dal disegno emerge subito la relazione che lega queste quantità:

$$r_i = \vec{r_{cm}} + \vec{r_i}' \quad \text{(REGOLA DELLA POLIGONALE)}$$

Se questa relazione la inserisco nella definizione di centro di massa ottengo:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_{cm} + \vec{r_i}') = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{r}_{cm} + m_i\vec{r_i}') =$$

La sommatoria di una somma e' la somma delle sommat.

$$= \frac{1}{M}\left\{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_{cm} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i}'\right\} =$$

r_{cm} non dipende da i quindi possiamo scambiarlo con Σ

$$= \frac{1}{M}\left\{\vec{r}_{cm}\sum_{i=1}^{N} m_i + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i}'\right\} =$$

La somma di tutte le masse e' la massa totale del sistema (M)

$$= \frac{1}{M}\left\{M\cdot\vec{r}_{cm} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i}'\right\}$$

Da cui ricaviamo che:

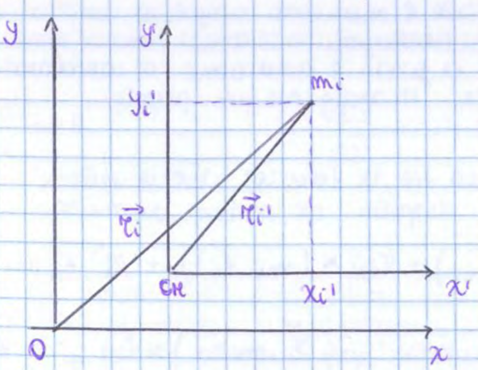
$$\vec{r}_{cm} = \vec{r}_{cm} + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i}'$$

r_{cm} si semplifica: $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\cdot\vec{r_i}' = 0$ da cui otteniamo che

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i}' = 0}$$

Questa relazione ci dice che nel sistema del centro di massa, il centro di massa coincide con l'origine, la somma delle masse per il vettore posizione rispetto al centro di massa e' zero.

Supponiamo di essere nel piano e se siamo nella stessa situazione vediamo che



$$\vec{r_i}' = x_i'\,\vec{u_{x'}} + y_i'\,\vec{u_{y'}}$$

dato che il sistema del CM trasla $u_{x'}$ e $u_{y'}$ sono costanti quindi derivando:

$$\frac{d\vec{r_i}'}{dt} = \frac{dx_i'}{dt}\vec{u_{x'}} + \frac{dy_i'}{dt}\vec{u_{y'}} = \vec{v_i}'$$

non e' altro che la velocità delle particelle rispetto al CM. $\vec{V_i}'$

Derivando ulteriormente:

$$\frac{d\vec{v_i}'}{dt} = \frac{d^2x_i'}{dt^2}\vec{u_{x'}} + \frac{d^2y_i'}{dt}\vec{u_{y'}} = \vec{a_i}'$$

Trovo così l'acc. delle particelle rispetto al centro di massa. Tenendo conto di queste relazioni trovate che sono valide anche queste relazioni:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i' v_i' = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a_i}' = 0$$

La quantità di moto delle particelle rispetto al CM e' nulla.

Quindi il momento rispetto al sistema di rif. inerziale:

$$\vec{\mathcal{L}}_0 = \underbrace{\vec{\mathcal{L}}_{0,CM}}_{\text{ORBITALE}} + \underbrace{\vec{\mathcal{L}}'_{CM}}_{\text{SPIN}}$$

Quando hai un corpo che si muove pensa in questo modo: pensa come se tutta la massa fosse concentrata nel CM e che il corpo si muova con la velocità del centro di massa, questa particella ha un suo momento angolare. Poi immagina le diverse parti che ruotano e queste danno origine ad un ulteriore momento angolare che si chiama di spin.

Questo teorema in una versione molto simile esiste anche per l'energia cinetica. L'energia cinetica del sistema è la somma delle energie cinetiche delle particelle:

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} E_{Ki} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \underbrace{v_i^2}_{\substack{\text{velocità} \\ \text{relative al sist. di rif. inerziale}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')\cdot(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_{CM}^2 + \vec{v}_{CM}\cdot\vec{v}_i' + \vec{v}_i'\cdot\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'^2) =$$

Il prodotto scalare è commutativo II e III termine si possono sommare

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{CM}\cdot\vec{v}_i' + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)}_{\substack{\text{massa tot.} \\ \text{del sistema } (M)}} \vec{v}_{CM}^2 + \vec{v}_{CM}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i'}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2$$

quindi trovo che:

$$E_K = \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2}_{\substack{\text{energia cinetica delle} \\ \text{particelle rispetto al} \\ \text{centro di massa } E_K'}}$$

Quindi il II teorema di König sull'energia cinetica è questo

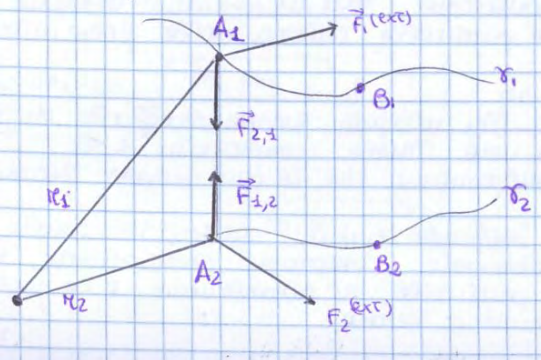
$$E_K = \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{\substack{\text{energia} \\ \text{cinetica rispetto} \\ \text{al CM}}} + \underbrace{E_K'}_{\substack{\text{energia cinetica relativa} \\ \text{al centro di massa}}}$$

I teoremi di König ci dicono che il momento angolare o l'energia cinetica di un sistema sono uguali a quelle che spettano al centro di massa + il moto relativo al centro di massa. MOTO DEL CENTRO DI MASSA + MOTO RELATIVO AL CENTRO DI MASSA.

Uno potrebbe essere tentato di dire: "le forze interne non servono a nulla!". Noi abbiamo visto che:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} \qquad \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}$$

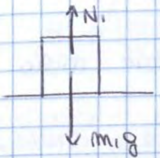
In questo tipo di calcolo questo veniva fuori dall'ipotesi che le forze interne soddisfacessero la III legge di Newton, che sono = ed opposte e dirette lungo la congiungente. (questo per la I relazione). Per la II relazione è che la forza interna è // al vettore posizione relativa quindi non dà contributo al momento. Adesso faremo un problema in cui occorre fare attenzione perché non è detto che le forze interne non servano a nulla. Prendiamo due particelle che si spostano sotto l'effetto di forze interne e forze esterne da una configurazione iniziale ad una finale. Da A_1 e A_2 sotto l'eff. di forze ext e interne le particelle assumono le posizioni di A_1 e A_2.



$A \equiv (A_1, A_2)$ iniziale

$B \equiv (B_1, B_2)$ finale

Quanto vale la velocità delle particelle nel momento in cui si allontanano.
Se risolviamo il problema con metodi energetici ci dobbiamo preoccupare delle forze che fanno lavoro. Se prendo la particella 1 essa sarà sottoposta alla forza peso, alla reazione e se non c'è attrito queste forze non fanno lavoro (lo stesso vale per la particella 2). L'unica forza che fa lavoro è la forza della molla. La molla però è una forza interna alle particelle, ed essendo una forza interna, non può cambiare lo stato di moto del sistema. Le forze che vengono esercitate sono = ed opposte a



Le forze esterne sono: N_1 ed $m_1 g$ si bilanciano, N_2 e $m_2 g$ si bilanciano quindi l'unica forza che agisce è la forza interna, se scrivo la mia relazione:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} = 0$$

perché non ci sono forze esterne agenti sul sistema. Consideriamo il caso in cui il sistema è in equilibrio.

Ipotesi: sistema inizialmente fermo.

Se le due velocità sono v_1 e v_2 dato che la P deve rimanere zero perché dato che $\frac{dP}{dt} = 0$ abbiamo che P è = a costante e se inizialmente era tutto fermo questa costante è zero, la relazione diventa

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

→ il cm non si muove, le particelle si muovono ma in modo tale che la quantità di moto complessiva sia zero.

Se a noi interessa soltanto il centro di massa allora con questo ragionamento sappiamo che rimane fermo. Se invece vogliamo sapere come si muovono le particelle nel momento in cui le masse lasciano la molla dobbiamo fare qualche ragionamento in più: Quanto vale l'energia totale del sistema: somma delle E_k delle diverse particelle e delle E_p dell'intero sistema:

$$E_i = \underbrace{E_{k_1}(i)}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ \text{particelle ferme}}} + \underbrace{E_{k_2}(i)}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ \text{particelle ferme}}} + \underbrace{E_p^{(est)}(i)}_{\substack{=0 \\ \text{perché le forze} \\ \text{non fanno lavoro}}} + \underbrace{E_p^{(int)}(i)}_{\substack{\text{questa c'è perché all'inizio} \\ \text{la molla è compressa } = \frac{1}{2}k\Delta^2}} = \frac{1}{2} k \Delta^2$$

L'energia finale sarà:

$$E_f = \underbrace{E_{k_1}(f)}_{=\frac{1}{2}m_1 v_1^2} + \underbrace{E_{k_2}(f)}_{=\frac{1}{2}m_2 v_2^2} + \underbrace{E_p^{(est)}(f)}_{=0} + \underbrace{E_p^{(int)}(f)}_{\substack{=0 \text{ perché la} \\ \text{molla staccata dal sistema} \\ \text{rimane a riposo}}} =$$

Se non ci sono forze di tipo dissipativo l'energia totale si conserva: $E_i = E_f$ quindi avremo che:

$$\boxed{\frac{1}{2} k \Delta^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}$$

Possiamo quindi creare un sistema:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \\ \frac{(m_1 v_1)^2}{2m_1} + \frac{(m_2 v_2)^2}{2m_2} = \frac{1}{2} k \Delta^2 \end{cases}$$

$$\frac{(m_1 v_1)^2}{m_1} + \frac{(m_1 v_1)^2}{m_2} = k\Delta^2 \rightarrow \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(m_1 v_1)^2 = k\Delta^2$$

$$\rightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (m_1 v_1)^2 = k\Delta^2 \rightarrow (m_1 v_1)^2 = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) k \Delta^2$$

$$\rightarrow m_1 v_1 = -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} k}\, \Delta$$

da cui Trovo:

$$v_1 = -\frac{1}{m_1} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} k}\, \Delta \qquad v_2 = +\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} k}\, \Delta$$

$$v = \frac{1}{\cancel{m}} \sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}} \left(\cancel{m} M\right) = \sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}}\, M$$

$$V = -\frac{1}{\cancel{M}} \sqrt{\frac{2G}{(m+M)}} \left(m \cdot \cancel{M}\right) = -\sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}}\, m$$

C'è un meno davanti perché M si muove dal lato opposto al verso dell'asse x; si muove verso sinistra.

Le particelle si muovono in questi versi; qual è la velocità relativa? La differenza delle velocità:

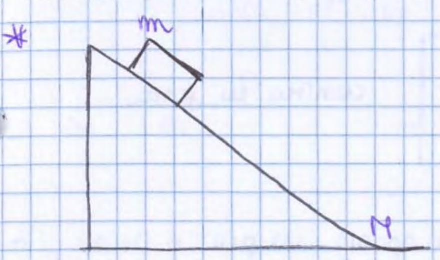
$v \longrightarrow \qquad \longleftarrow V$

$$v_{re} = v - V$$

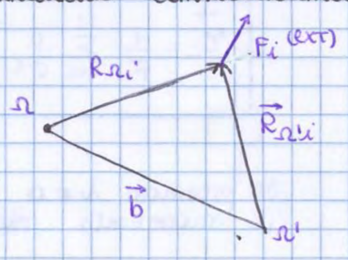
$$v_{re} = \sqrt{\frac{2G}{(m+M)x}}\,(M+m) = \text{portandolo sotto radice otteniamo} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{x}}$$

Supponiamo adesso di volere risolvere questo problema: c'è un corpo di massa M, non ci sono attriti, c'è un corpo di massa m che viene abbandonato e vogliamo sapere che cosa capita quando i due corpi si staccano

*



cominciamo considerando il corpo m



$$\vec{R}_{\Omega' i} = \vec{b} + \vec{R}_{\Omega i}$$

$$\vec{M}_\Omega^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

$$\vec{M}_{\Omega'}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega' i} \times \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{b} + \vec{R}_{\Omega i}\right) \times \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{b} \times \vec{F}_i^{(ext)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(ext)}}_{\vec{M}_\Omega^{(ext)}}$$

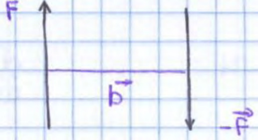
- $$\sum_{i=1}^{N} \vec{b} \times \vec{F}_i^{(ext)} = \vec{b} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(ext)}}_{\vec{R}^{(ext)}} = \vec{b} \times \vec{R}^{(ext)}$$

$$\boxed{\vec{M}_{\Omega'}^{(ext)} = \vec{b} \times \vec{R}^{(ext)} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}}$$

nuovo polo — vecchio polo

Se $\vec{R}^{(ext)} = 0$ il momento è indipendente dal polo: $\vec{M}_{\Omega'}^{(ext)} = \vec{M}_\Omega^{(ext)}$

Esempio:



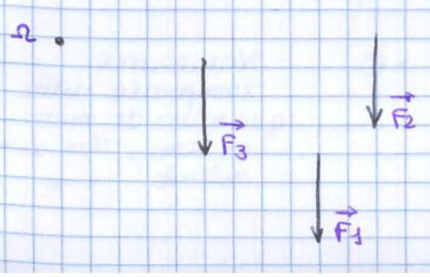
Supponiamo di avere più forze:

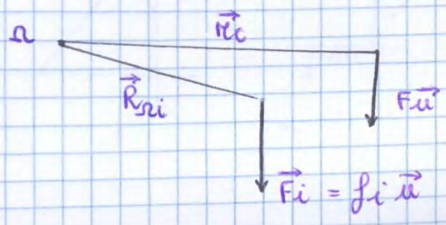
$$\vec{R}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(ext)} \quad e \quad \vec{M}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

Una distribuzione qualunque di forze è uguale ad una forza che è la risultante di tutte le forze più a coppia che quella il momento della forza (attorno al polo)

Se invece le F sono tutte // si calcola $\vec{R}$ e la si applica in un centro di forza.

ANALISI DI UNA FORZA EQUIVALENTE a una distribuzione di forze //.
(se non sono // devo mettere una forza e una coppia (momento))





INIZIO $M\vec{V_x} + m\vec{v_x} = 0$ perche' il sistema era fermo e vale anche alla fine.

FINE $M\vec{V_x} + m\vec{v_x} = 0$

Ora consideriamo l'energia:

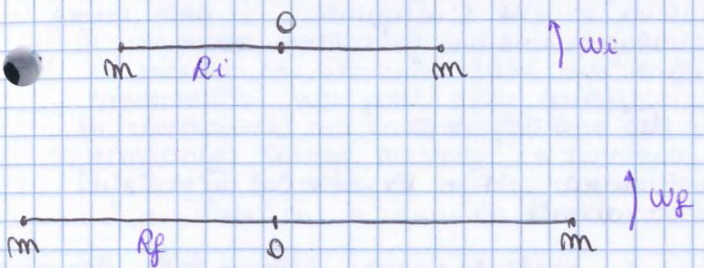
$E_i = E_i(M) + E_i(m) = mgh + MgH$ dove H è altezza del CM rispetto al suolo.

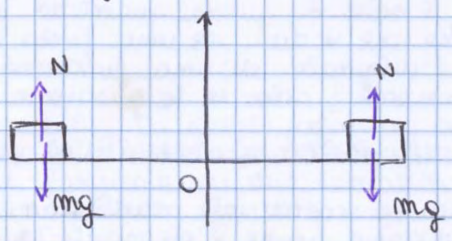
$E_f = E_f(m) + E_f(M) = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}MV_x^2 + MgH$

$E_i = E_f$ perche' non c'e' attrito.

$$\begin{cases} MV_x + mv_x = 0 \\ \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}MV_x^2 = mgh \end{cases}$$ e lo risolvo...

Problema: Un'asta rigida ruota su un piano liscio con velocità angolare ω_i attorno al suo centro. L'asta e' lunga $2R_i$, alle estremità sono attaccate due masse puntiformi di massa m. Durante il moto la lunghezza dell'asta e' $2R_f$, con $R_f > R_i$. Determinare ω_f.





$\frac{dL_0}{dt} = \vec{M_0}^{(ext)} = 0$ $\vec{L_0} = \text{costante}$

Esercizio risolto durante l'esercitazione 08-04-2014

Da queste relazioni otteniamo che:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Se una forza e' conservativa le componenti cartesiane della forza sono = e opposte alle derivate spaziali dell'energia potenziale rispetto a quella coordinata.

La relazione può anche essere scritta:

$$\vec{F} = -\vec{u_x}\frac{\partial E_p}{\partial x} - \vec{u_y}\frac{\partial E_p}{\partial y} - \vec{u_z}\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

mettiamo in evidenza un meno ed E_p e otteniamo:

$$\vec{F} = -\underbrace{\left(\vec{u_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{u_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{u_z}\frac{\partial}{\partial z}\right)}\, E_p$$

Questi termini tra parentesi vengono anche detti GRADIENTE e vengono indicati sui libri anglosassoni ∇ mentre sui libri latini così: grad

Quindi la formula può essere scritta:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

in cui ∇ e' un operatore così definito:

$$\vec{\nabla} = \vec{u_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{u_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{u_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Quindi se una forza e' conservativa si scrive:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p$$

Se usassimo coordinate polari il gradiente come diventa?

Il calcolo che abbiamo fatto non ci permette ancora di dire se una forza e' o no conservativa, non pone delle condizioni sulle componenti. Da queste relazioni segue la condizione di conservatività. Per dimostrare la proprietà di conservatività dobbiamo tenere presente un teorema: Data una funzione in due variabili $f(x,y)$ la derivata mista cioe' quella fatta prima rispetto ad x e rispetto ad y e' identica a quando l'ordine viene scambiato:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Esempio: Consideriamo la funzione in due variabili

$f = 3x^2 \ln y$ calcoliamo la derivata di f rispetto ad y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{3x^2 \ln y\right\} = \frac{3x^2}{y}$$ adesso derivo rispetto ad x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x^2}{y}\right) = 6\frac{x}{y}$$

Adesso faccio il contrario, cioè derivo prima rispetto ad x e poi rispetto ad y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{3x^2 \ln y\right\} = 6x \ln y \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(6x \ln y) = \frac{6x}{y}$$

Le derivate miste NON dipendono dall'ordine!

Questo prende il nome di TEOREMA DI INVERSIONE.

Prendiamo la relazione e la deriviamo rispetto ad x e rispetto a z.

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} \;\text{❀} \quad ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial x} \;\heartsuit$$

Adesso prendo la II delle precedenti relazioni e le derivo rispetto ad x e rispetto a z.

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} \;\text{❀} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial y} \;*$$

Infine prendo la III e derivo rispetto ad x e poi rispetto ad y:

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} \;\heartsuit \qquad \frac{\partial F_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} \;*$$

Se tengo conto del fatto che le derivate II non dipende dall'ordine i termini contrassegnati con lo stesso simbolo sono uguali. Quindi arriviamo a questa conclusione: Per campi di forza caratterizzati da un'energia potenziale normale (che non abbia punti di discontinuità) troviamo che:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Queste sono le CONDIZIONI DI CONSERVATIVITÀ

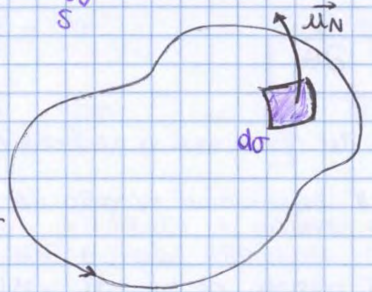
$\vec{F} = \vec{u_x} F_x + \vec{u_y} F_y + \vec{u_z} F_z$.

Se vado a scrivere il determinante ottengo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{u_x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \vec{u_y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \vec{u_z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Dato un vettore che dipende dal punto si definisce ROTORE di quel vettore, un vettore fatto con le derivate parziali di quel vettore. Se un vettore F è conservativo quanto vale il rotore? Tutte le quantità tra parentesi sono identicamente nulle, il rotore di un vettore conservativo è zero; Tutti i vettori conservativi sono IRROTAZIONALI. Abbiamo dimostrato che se una forza è conservativa valgono quelle condizioni ed è irrotazionale. Esiste un Teorema in analisi che dice che l'integrale su un certo percorso chiuso di un vettore è uguale all'integrale sulla superficie del rotore per il vettore per $u_N \, d\sigma$.

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \, \vec{u_N} \, d\sigma$$



Questo Teorema dice: prendi un percorso qualunque, sul quale ti interessa la circuitazione (I membro). La circuitazione è = all'integrale fatto su un'area (S) (γ è il percorso su cui avete scelto un certo verso positivo) che ha per bordo γ e $\vec{u_N}$ è un versore. Questo prende il nome di Teorema di STOCKS. La circuitazione di un vettore è = al II membro che si chiama FLUSSO DEL ROTORE calcolato sulla superficie che ha per bordo il percorso su cui vogliamo calcolare la circuitazione.

Prendiamo un vettore qualunque e voglio calcolare la circuitazione di questo vettore su questo percorso γ, il teorema mi dice che l'integrale che mi da la circuitazione possiamo calcolarlo calcolando il flusso del rotore di una superficie qualunque che ha per bordo γ, qualunque superficie. Quelle condizioni sono necessarie e sufficienti affinché la forza sia conservativa. Se una forza è conservativa quelle relazioni valgono, allora il rotore è nullo allora la circuitazione è nulla; d'altra parte se la circuitazione è nulla se il rotore è nullo la circuitazione è nulla quindi le condizioni di conservatività che abbiamo scritto sono condizioni necessarie e sufficienti affinché il vettore F sia conservativo.

Dedichiamoci ai vettori che dipendono soltanto da due coordinate $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ possiamo anche scriverlo come:

$$F = -\vec{u_x} \frac{\partial E_p}{\partial x} - \vec{u_y} \frac{\partial E_p}{\partial y}$$

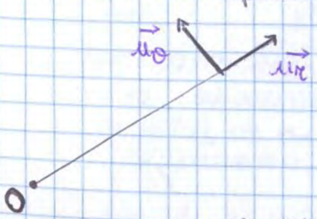
che scriviamo in forma simbolica: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

dove ∇ è:

$$\vec{\nabla} = \vec{u_x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u_y} \frac{\partial}{\partial y}$$

Cosa capita se invece di usare coordinate cartesiane uso coordinate polari? Che espressione prendono queste relazioni?

In coordinate polari, il vettore lo scompongo lungo $\vec{u_r}$ e $\vec{u_\theta}$. La forza F si scompone come:



$$\vec{F} = F_r \vec{u_r} + F_\theta \vec{u_\theta}$$

e l'elemento di linea, sempre in coordinate polari sarà:

$$\vec{dr} = dr \, \vec{u_r} + d\theta \, \vec{u_\theta}$$

Se io adesso faccio il prodotto scalare tra F e dr ottengo

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = F_r \cdot dr + F_\theta \cdot d\theta$$

questo è dW cioè l'elemento di lavoro elementare in coordinate polari. Questo deve essere uguale a $-dE_p$ dove E_p adesso dipende da r e da θ.

$$dW = -dE_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial r} dr + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} d\theta\right)$$

E_p adesso cambia quando cambiano r e θ. Le quantità linearmente indipendenti sono dr e $d\theta$.

Dalle precedenti relazioni troviamo che:

$$E_p(x,y,z) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + \varphi(y,z)$$
$$E_p(x,y,z) = -\frac{1}{3}\beta y^3 + \psi(x,z)$$
$$E_p(x,y,z) = -\gamma z + \beta(x,y)$$

Quello che va bene per tutte è:

$$E_p = -\frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{1}{3}\beta y^3 - \gamma z$$

Questa funzione, una volta trovata, provare a derivarla e verificare che sono soddisfatte le condizioni.

Dato che le componenti del corpo sono legate alla derivata dell'E_p, la derivata fa sempre zero, e questa è una caratteristica generale, l'energia potenziale è sempre definita (?) a meno di una costante additiva perché le forze che sono le quantità fisicamente determinabili sono legate all'E_p da una derivata.

Facciamo un altro esempio: una particella è sottoposta ad una forza di questo tipo:

$$\vec{F} = -A\,\vec{u_x} - mg\,\vec{u_y}$$

Qual è l'energia potenziale?

$$\begin{cases} F_x = -Am \\ F_y = -gm \end{cases}$$

Le componenti sono costanti quindi la forza è conservativa.

Abbiamo che:

$$-Am = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$
$$-gm = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = Am \rightarrow E_p = mAx + \varphi(y)$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = gm \rightarrow E_p = mgy + \varphi(x)$$

Dato che l'E_p è unica, quindi l'E_p che stiamo cercando è:

$$\boxed{E_p = (Ax + gy)\,m}$$

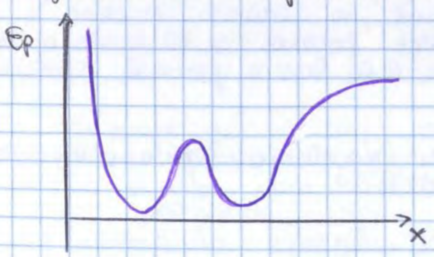
L'energia potenziale, in generale, dà informazioni sul movimento. Se uno conosce la forma dell'energia potenziale riesce a dire qualcosa sul moto.

Moto unidimensionale. Il moto avviene solo lungo una coordinata, se non ci sono attriti, il sistema è conservativo. Nel moto unidimensionale senza attrito, la forza avrà una componente lungo x, non ci sono forze lungo y e lungo z quindi il sistema è automaticamente conservativo.

Dato che l'unica forza che agisce sul nostro corpo è del tipo $\vec{F} = F(x)\,\vec{u_x}$ questa forza è necessariamente conservativa ed $E_p = E_p(x)$. Abbiamo una particella che si muove sottoposta a questa forza, forza conservativa che sarà legata ad un'energia potenziale

$$\vec{F} = F(x)\,\vec{u_x} \rightarrow \text{CONSERVATIVA} \rightarrow E_p = E_p(x)$$

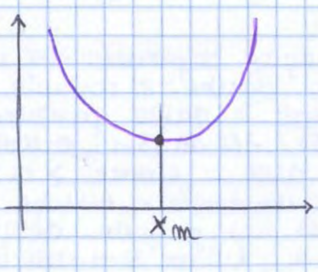
Vogliamo determinare delle caratteristiche del movimento quando si conosce la forma dell'energia potenziale. Supponiamo che l'E_p abbia la seguente forma:



La curva può presentare dei massimi, può presentare dei minimi, può presentare dei punti in cui è costante. Tutti i massimi sono punti di EQUILIBRIO INSTABILE, tutti i punti in cui l'E_p è costante sono punti di EQUILIBRIO INDIFFERENTE, tutti i minimi sono punti di EQUILIBRIO STABILE.

Cominciamo a considerare il moto di una particella attorno ad un punto di minimo. Quindi consideriamo x_m UN PUNTO DI MINIMO DI E_p, il fatto che x_m sia un punto di minimo implica che:

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{x_m} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x}\right) > 0$$



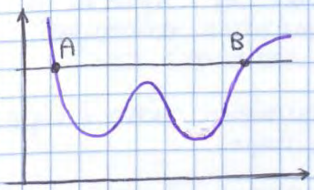
Se io prendo la particella e la metto ferma in x_m questa è ferma quindi la forza in x_m vale zero.

$$F(x_m) = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{x_m} = 0$$

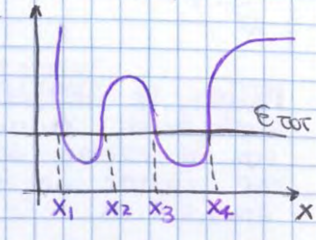
La particella è ferma, la forza che agisce su di lei è zero, la particella rimane ferma.

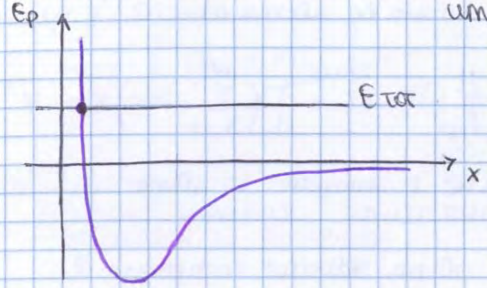
Dalla formula ricaviamo che $V = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p]}$

Quindi quando $E_p = E_{TOT}$ la velocità della particella è nulla, la particella si ferma ma dato che non sono punti di equilibrio il movimento si inverte per questo vengono detti punti di INVERSIONE.



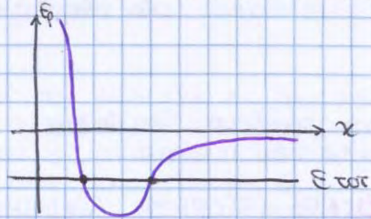
La particella parte da A e procede in questo senso →, arriva in B ed inverte il moto ← La particella oscilla tra le posizione A e B. Il moto è LIMITATO.
La situazione può anche essere più complicata: in queste caso occorre sapere dove si trovava la particella al tempo $T=0$. Il moto può avvenire o tra X_1 e X_2 o tra X_3 e X_4 e questo dipende dalle condizioni iniziali ed anche in questo caso il moto è LIMITATO. Oppure possiamo avere una situazione di questo tipo:





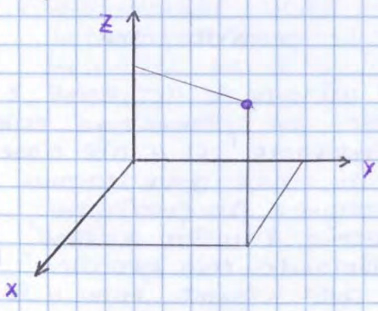
un solo punto di inversione: moto ILLIMITATO.

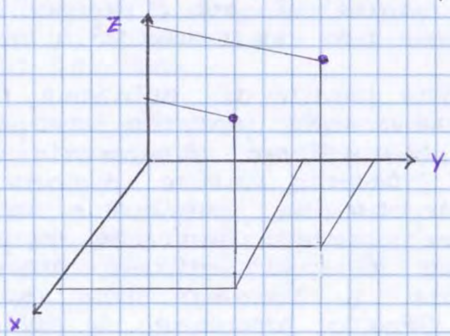
Se la particella si muoveva in questo verso ← allora arriva nel punto segnato e poi scompare, se ne va. Oppure può anche essere così:
in questo caso oscilla sempre tra le due posizioni che sono punti di inversione.



Corpo Rigido

Quando abbiamo un corpo qualunque ci chiediamo: qual è il numero di coordinate che dobbiamo dare per definire completamente la posizione? Il numero di coordinate che dobbiamo dare per descrivere la posizione vengono detti GRADI DI LIBERTA'. Se ho una particella puntiforme i gradi di libertà sono 3 (coordinate x, y, z). Se di particelle ne ho due allora il numero di gradi di libertà è sei (3 per una e 3 per l'altra). In generale, se ho n particelle libere il numero di gradi di libertà è 3n.





Un corpo rigido è fatto da un numero di punti. Un corpo libero è definito come un corpo che mantiene la distanza tra i suoi punti costante nel tempo. Quanti numeri devo dare per caratterizzare completamente la posizione di un corpo rigido? Devo dare 6 numeri. Fisso un punto e quindi devo dare 3 coordinate per quanto riguarda questo punto; fissato questo punto, il corpo può soltanto girare su di una sfera il cui raggio va da questo punto fissato all'altro estremo, e se voglio determinare la posizione sulla sfera devo dare due coordinate e infine devo anche dare una coordinata che mi dica qual è l'orientazione della sedia. Quindi dato un corpo rigido qualunque il numero di gradi di libertà è sei.

3 coordinate per un punto
2 coordinate per II punto (latitudine e longitudine)
1 coordinata per l'orientazione

} 6 GRADI DI LIBERTA'

Se io prendo un corpo rigido qualsiasi ad esempio una sedia e do 3 punti:

$P_1: x_1\ y_1\ z_1$

$P_2: x_2\ y_2\ z_2$

$P_3: x_3\ y_3\ z_3$

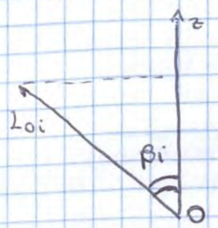
così le coordinate da dare sono 9 però abbiamo detto che se il corpo è rigido le distanze tra questi punti è fissata quindi le coordinate non sono libere!

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2} = D_{12}$$

$$\sqrt{(x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2 + (z_1-z_3)^2} = D_{1,3}$$

$$\sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2 + (z_2-z_3)^2} = D_{23}$$

Quanto vale la componente del momento angolare lungo l'asse delle z?



$L_{0iz} = L_{0i} \cos\beta_i = L_{0i} \cdot \operatorname{sen}\vartheta_i$

perchè β_i e ϑ_i sono complementari quindi $\cos\beta_i = \operatorname{sen}\vartheta_i$

Quindi:

$$L_{0iz} = r_i m_i \omega r_i \operatorname{sen}\vartheta_i \cdot \operatorname{sen}\vartheta_i = m_i \underbrace{(r_i \operatorname{sen}\vartheta_i)}_{\text{questa è la distanza del punto dall'asse di rotazione } (R_i)}{}^2 \omega = m_i R_i^2 \omega$$

Quindi il momento angolare totale lungo z:

$$L_{0z} = \sum_{i=1}^{N} L_{0iz} = \sum_{i=1}^{N} (m_i R_i^2 \omega) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2\right) \omega$$

ω è la stessa per tutte le particelle quindi posso portarla fuori dal simbolo di sommatoria.

$$\boxed{L_{0z} = \sum_{i=1}^{N} (m_i R_i^2)\, \omega}$$

È INDIPENDENTE DALLA POSIZIONE DI O SULL'ASSE DI ROTAZIONE.

La componente lungo z non dipende da dove prendo O. Se invece di prendere quel punto ne avessi preso un altro sempre sullo stesso asse, il momento angolare non cambierebbe. Il pedice O non serve.

La sommatoria tra parentesi mi dice che, ai fini del momento angolare quello che conta è la distribuzione della massa attorno all'asse di rotazione. Questa quantità è una caratteristica del corpo perchè mi dice come sono messe le particelle rispetto all'asse di rotazione. Questa quantità tra parentesi viene chiamata MOMENTO DI INERZIA e viene indicata con

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

uno sarebbe portato a dire che è una quantità scalare in realtà non lo è perchè dipende da dove è posizionato l'asse di rotazione. Quindi quella z sotto la I non si riferisce alla componente ma si riferisce al fatto che l'asse di rotazione è l'asse delle z. I dipende da dove passa l'asse di rotazione, ma non dipende dalla posizione di O. E quindi siamo arrivati alla conclusione che la componente lungo l'asse di rotazione è = una caratteristica del corpo lungo l'asse di rotazione per la velocità angolare.

$$L_z = I_z \omega$$

Ma come faccio a calcolare il momento angolare? L'unica equazione che conosciamo per il momento angolare è:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{(ext)}$$

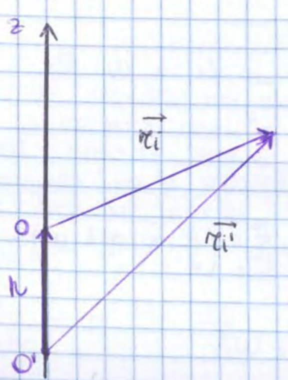
dato che O è fisso sull'asse di rotazione. Quest'equazione corrisponde a tre equazioni una per ogni asse coordinato. Prendiamo la componente lungo l'asse z e avremo:

$$\underbrace{\vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{L}_0}{dt}}_{\text{componente del momento angolare lungo l'asse z}} = \underbrace{\vec{u}_z \cdot \vec{M}_0^{(ext)}}_{\text{momento lungo l'asse z delle forze esterne}}$$

Abbiamo visto che il I membro non dipende dal polo O quindi diventa

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{0,z}^{(ext)}$$

Il II membro apparentemente dipende da O quindi andiamo a verificare che la componente del momento delle forze esterne lungo l'asse di rotazione è indipendente dalla posizione del polo. Considerato il punto O ed il vettore r_i, e considerato poi O' e r_i', r_i e r_i' sono i vettori posizione rispetto al polo O ed al polo O'. I momenti delle forze ext rispetto ad O ed O' saranno:



$$\vec{M}_0^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

$$\vec{M}_{0'}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

Dalla figura emerge che O e O' sono ≠ ma sono entrambi sull'asse di rotazione quindi posso scrivere:

$$\vec{r}_i' = h\,\vec{u}_z + \vec{r}_i$$

14 - 04 - 2014

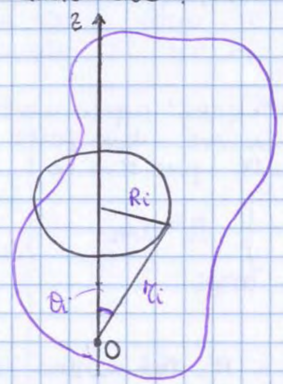
L'ultima volta abbiamo cominciato a studiare il corpo rigido.
Per studiare come si muove il corpo, le equazioni sono le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega^{(ext)} \end{cases}$$

Poi abbiamo visto dei casi che semplificano il problema, se Ω coincide con il CM, le equazioni che dobbiamo risolvere sono:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} \\ \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}_{CM}^{(ext)} \end{cases}$$

Quando si studia un corpo rigido ci sono due movimenti particolari: il I movimento è la traslazione, dove tutte le particelle hanno la stessa velocità che coincide con la V_{cm}, e poi c'è un altro moto semplice ossia la rotazione pura dove tutti i punti del corpo che stanno su di un asse chiamato asse di rotazione stanno fermi e tutti gli altri si muovono di moto circolare. Considerato un corpo, l'asse di rotazione z e la generica particella i, questa descrive una traiettoria circolare di raggio R_i, e, se ricordate, per questo tipo particolare di moto, abbiamo visto che:



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(ext)}$$

perciò la componente z di tutte queste quantità è indipendente da O e si può anche scrivere:

$$\boxed{\frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z^{(ext)}}$$

Questa è la I eq. fondamentale di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso e la quantità che abbiamo chiamato I_z è una proprietà del corpo rispetto al CM e, se il corpo è discreto, è definito come:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

questa quantità si chiama MOMENTO DI INERZIA e si misura in $kg \cdot m^2$

Dopo abbiamo calcolato l'energia cinetica di un corpo che ruota attorno ad un asse fisso e abbiamo visto che è:

$$\boxed{E_K = 1/2\ I_z\, \omega^2}$$

Supponiamo di avere un corpo rigido che ruota attorno ad un asse. Quando il corpo gira il CM non cambia la sua altezza e l'E_p del corpo rimane costante; le forze applicate sull'asse non fanno lavoro perché non c'è spostamento ed il lavoro è forza per spostamento. Prese due posizioni A e B ci chiediamo cosa possiamo dire sul teorema dell'E_K. Il corpo passa da $A \rightarrow B$, quindi il lavoro fatto dalle forze che fanno lavoro per andare da A a B è:

$$W_{A\rightarrow B} = E_k(B) - E_k(A)$$

Supponiamo che A e B siano molto vicini ed il lavoro diventa una quantità infinitesima (dw) che sarà:

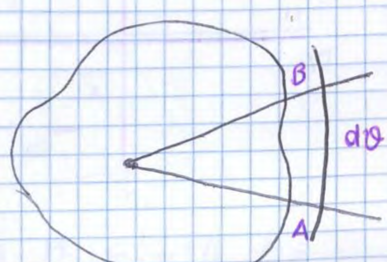
$$dw = d\,E_k = d\left\{\frac{1}{2} I_z \omega^2\right\} = \frac{1}{\cancel{2}} I_z \cancel{2}\omega\, d\omega$$

Se il corpo è rigido mentre ruota attorno all'asse, le posizioni delle masse non cambia, I_z è costante e la formula diventa: $(d(\omega^2) = 2\omega\, d\omega)$

Quindi abbiamo che la variazione di lavoro fatto nell'unità di tempo:

$$\frac{dw}{dt} = I_z\,\omega \frac{d\omega}{dt} = \omega\, \underbrace{I_z \frac{d\omega}{dt}}_{\text{componente del momento lungo l'asse di rotazione } M_z^{(ext)}} = M_z^{(ext)} \cdot \omega$$

ω è la velocità angolare, quindi è la variazione del'angolo nell'unità di tempo, abbiamo indicato l'angolo con θ, se guardiamo il corpo in sezione, questa è la posizione A e la posizione vicina B e quindi questa quantità è $d\theta$.
Allora la formula diventa:

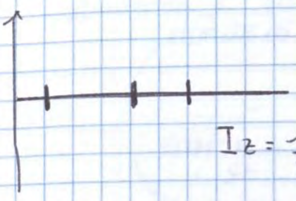


$$\frac{dw}{dt} = \vec{M}^{(ext)} \frac{d\theta}{dt}$$

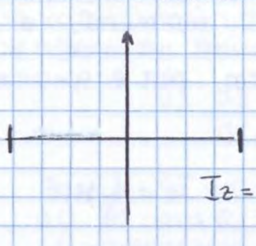
o più semplicemente:

Quando cambia la posizione dell'asse di rotazione, il momento di inerzia cambia. Nel I caso consideravo i punti avevano tutti la stessa distanza dall'asse di rotazione nel II caso tutti i punti sono vicini all'asse di rotazione, dato che il momento di inerzia ci da un'idea di quanto lontano sono i punti dall'asse di rotazione, nel II caso, il momento di inerzia è più piccolo.

COSA FONDAMENTALE: il momento di inerzia dipende dall'asse rispetto al quale il corpo ruota.



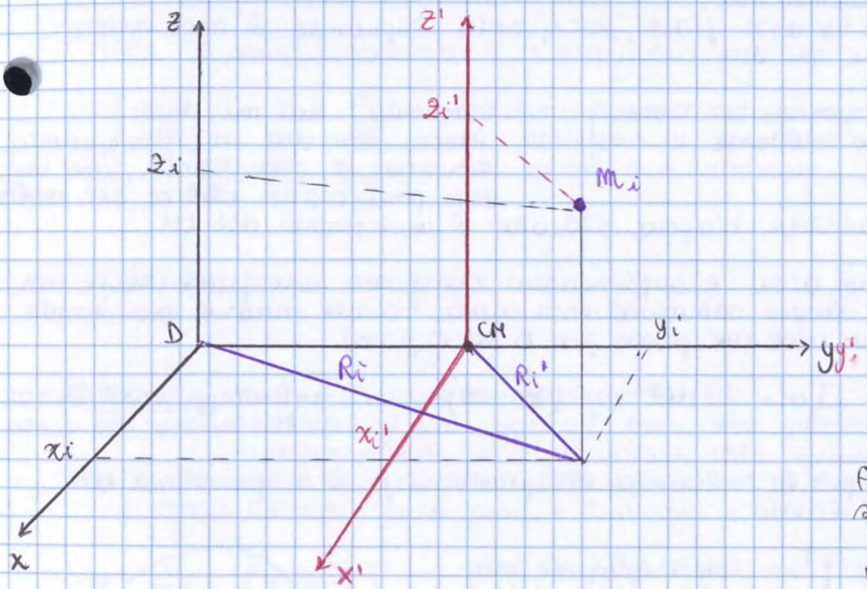
$I_z = \frac{1}{3} MD^2$



$I_z = \frac{1}{12} MD^2$

Teorema degli assi paralleli o Teorema di Huygens-Steiner.

Se conosci il momento di inerzia rispetto ad un asse che passa per il CM allora puoi calcolare il momento di inerzia rispetto a tutti gli altri assi // a questo, nel modo seguente.
Noi abbiamo un corpo, un asse di rotazione attorno a cui ruota il nostro corpo, chiamiamo O l'ORIGINE attorno a cui passa l'asse, avremo un sistema di riferimento x, y, z solidale con il corpo, quindi x, y, z sono assi di un sistema di riferimento passanti per O, solidali con il corpo e z è l'asse di rotazione. Una particella generica m_i avrà coordinate x_i, y_i, z_i.



Applicando la definizione di momento di inerzia, I rispetto all'asse che passa per O (z) sarà:

$$I_O = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Adesso supponiamo che il CM si trovi qui e andiamo a prendere un asse parallelo a z, z' che passa per il CM e prendiamo degli assi // a quelli di prima.
Rispetto a questo nuovo sistema di riferimento, le coordinate saranno:

$$\begin{cases} x_i = x_i' \\ y_i = y_i' + D \\ z_i = z_i' \end{cases}$$

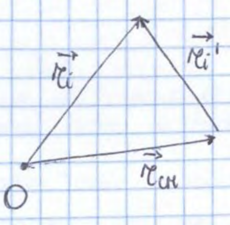
L'unica cosa che cambia è la y_i'. Sostituendo in I_O trovo:

$$I_O = \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ x_i'^2 + (y_i' + D)^2 \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \{ \underbrace{x_i'^2 + y_i'^2}_{R_i'^2} + 2D y_i' + D^2 \} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i R_i'^2}_{\text{momento di inerzia del nostro corpo quando ruota attorno all'asse passante per il CM } (I_{CM})} + 2D \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i'}_{=0} + MD^2 = I_{CM} + MD^2$$

$R_i'^2$ distanze delle particelle dall'asse di rotazione

=0 il CM gode della proprietà che se O è il centro:

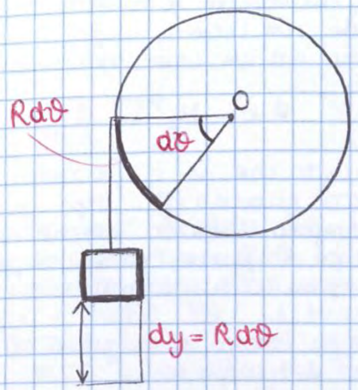


$$\sum_{i=1}^{N} m_i R_i' = 0$$

Quindi il teorema dice che il momento di inerzia attorno ad un asse passante per O è = al momento di inerzia attorno ad un asse // a quello passante per il CM + MD^2.

$$\boxed{I_O = I_{CM} + MD^2}$$

$T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\omega}{dt}$. Se questo è il disco, quando si muove di una quantità $d\theta$ questa lunghezza (arco) vale $Rd\theta$, e se la massa prima era qui e si sposta di una quantità dy verso il basso che sarà uguale ad $Rd\theta$ se la fune non si allunga. Quindi la velocità:



$$v = \frac{dy}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \quad , \quad v = \omega R$$

Quindi la velocità del corpo che scende è uguale ad ω per il raggio del disco.
L'accelerazione invece:

$$a = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$ quindi a e $\frac{d\omega}{dt}$ sono legati.

Quindi arriviamo a questo sistema risolvente:

$$\begin{cases} mg - T = mR\dfrac{d\omega}{dt} \\ TR = \dfrac{1}{2} MR^2 \dfrac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

Qui le incognite sono solo due: accelerazione angolare e la tensione T.

Nella II semplifichiamo R e otteniamo:

$$\begin{cases} mg - T = mR\dfrac{d\omega}{dt} \\ T = \dfrac{MR}{2} \dfrac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

sommando membro a membro la tensione se ne va e troviamo

$$mg = \left(m + \frac{M}{2}\right) R \frac{d\omega}{dt}$$

L'accelerazione angolare è: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{\left(m+\frac{M}{2}\right)} \frac{g}{R}$ e l'accelerazione con cui cade il corpo:

$$a = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{\left(m+\frac{M}{2}\right)} g$$

Domanda: siamo in grado di calcolare la reazione f sul perno? Facciamo intervenire l'equazione del CM (variazione della quantità di moto del CM è = risultante delle forze ext). FORZE EXT che agiscono sul disco: f legata all'asse, forza peso e T. Quindi:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{f} + M\vec{g} + \vec{T} = 0$$

finché l'asse tiene il punto O è fermo e quindi questa quantità è = a zero.
$P = M \cdot V_{CM}$ (se il punto è fermo la sua velocità è = a zero)

Le forze sono tutte lungo la verticale:

$$f - Mg - T = 0 \longrightarrow f = Mg + T$$

La forza che deve esercitare l'asse è data da questa somma.

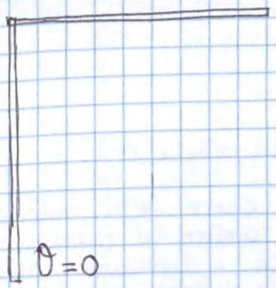
Ricaviamo T da quest'equazione: $mg - T = m \cdot a$

$$T = m(g-a) = m\left\{g - \frac{m}{m+M/2} g\right\} = m\left(1 - \frac{m}{m+M/2}\right) g = \frac{m + M/2 - m}{m+M/2} g = \frac{m \cdot M/2}{m + M/2} g$$

La forza sul perno è: $$f = Mg + \frac{m \cdot M/2}{m+M/2} g = \left(1 + \frac{m/2}{m+M/2}\right) M \cdot g$$

La cosa importante è che questa forza è + grande di quando il sistema non ruota.

NB Quando un corpo ruota attorno ad un asse fisso possiamo studiarne il movimento anche se non conosciamo le reazioni sul perno. Se interessa solo il movimento abbiamo: $\frac{d}{dt}(I \cdot \omega) = M^{(ext)}$; se vogliamo sapere se il sistema tiene, dobbiamo calcolare le reazioni sui perni e dobbiamo far intervenire le equazioni sul CM.

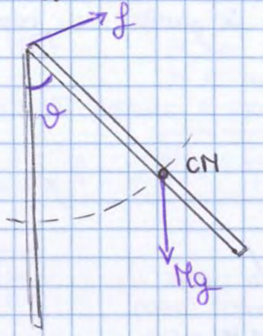


$$\begin{cases}\omega(\theta=0)=\sqrt{3\frac{g}{\ell}}\\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\theta=0}=0\end{cases}$$

L'accelerazione angolare vale zero quando passa per la verticale.

Quanto vale la forza che deve esercitare il chiodo? Usiamo l'equazione del CM: $\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{R}^{(ext)}$

Quali sono le forze ext sulla barra? Io so che ci sono delle forze f sul perno che non so come sono messe ma so che ci sono, poi ci sono Mg e bisogna proprio calcolare f sul perno per sapere se il sistema si spacca o no. Il CM si muove di moto circolare descrivendo una traiettoria; l'acc. del CM in ogni momento sarà:



$$\vec{a}_{CM}=\frac{dV_{CM}}{dt}\vec{u}_T+\frac{V^2_{CM}}{\ell/2}\vec{u}_N$$

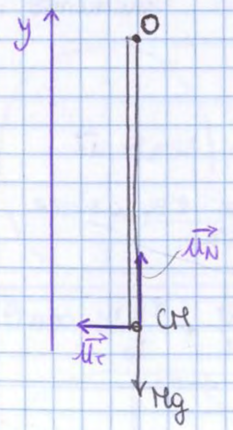
dato che descrive una traiettoria circolare, la velocità del CM sarà: $V_{CM}=\omega\frac{\ell}{2}$ allora la relazione precedente posso scriverla come:

$$\vec{a}_{CM}=\frac{\ell}{2}\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_T+\omega^2\frac{\ell}{2}\vec{u}_N$$

quindi la legge di Newton sarà: $M\cdot\vec{a}_{CM}=\vec{f}+M\vec{g}$

Quindi in ogni istante la forza f sarà: $\boxed{\vec{f}=M\cdot\vec{a}_{CM}-M\vec{g}}$

Quando l'asta è in posizione verticale u_T ed u_N sono così posizionati. Quanto vale l'accelerazione del CM quando $\theta=0$?



$$\vec{a}_{CM}(0)-\vec{g}=\frac{\ell}{2}\underbrace{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\theta=0}}_{=0}\vec{u}_T+\omega^2(0)\frac{\ell}{2}\vec{u}_N-M\vec{g}=$$

Se consideriamo l'asse y così avremo

$$=\omega^2(0)\frac{\ell}{2}\vec{u}_y+Mg\vec{u}_y=$$

ω(0) lo avevamo calcolato, quindi:

$$=\left(3\frac{g}{\ell}\frac{\ell}{2}+g\right)\vec{u}_y=\frac{5}{2}g\vec{u}_y$$

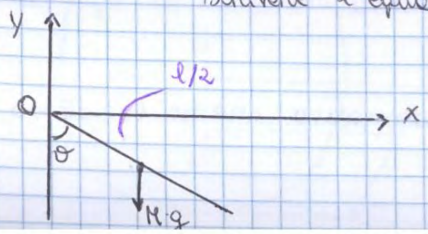
Quindi la forza che deve esercitare il perno è:

$$\vec{f}=M(\vec{a}_{CM}-\vec{g})=\frac{5}{2}Mg\vec{u}_y$$

<u>Ricapitoliamo</u>: quando dobbiamo studiare semplicemente il movimento o usiamo l'equazione derivata rispetto al tempo di I·ω è uguale momento delle forze ext o usiamo l'energia. Se ci interessa calcolare anche la forza che si esercita sul perno dobbiamo passare tramite l'eq. del CM che è l'unica equazione che ci permette di calcolare le forze ext che si esercitano sul perno.

Abbiamo calcolato la velocità partendo dalla conservazione dell'energia e ho calcolato l'acc. angolare derivando l'equazione. Potevo farlo diversamente? Sì. Siano questi gli assi xy, sia questo il CM su cui si esercita M·g, sia questo θ, se vado a scrivere l'equazione:

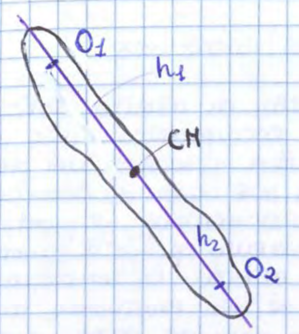
$$\frac{d}{dt}(I\cdot\omega)=M_O^{(ext)}$$



$$\underbrace{I}_{\frac{1}{3}m\ell^2}\frac{d\omega}{dt}=\underbrace{-\frac{\ell}{2}M\cdot g\sin\theta}$$

momento della forza peso, unica forza che fa lavoro

Adesso dimostriamo che preso un pendolo fisico qualunque, fissato il CM esistono due punti O_1 e O_2 tali che se uno fa oscillare il corpo questi hanno lo stesso periodo.



Il Teorema di Steiner mi dice che se ho un sistema con un certo CM e lo faccio oscillare attorno ad un altro punto:

$$I_O = I_{CM} + Mh^2$$

dove h è la distanza tra il punto di sospensione e il CM.

Se ricavo I_O dalla precedente equazione, ho che: $I_O = M\ell h$. E uguagliando avrò:

$$M\ell h = I_{CM} + Mh^2$$

se hai fissato il periodo h è data da quell'eq.

Questa è un'equazione di II grado e possiamo scriverla:

$$h^2 - \ell h + \frac{I_{CM}}{M} = 0$$

, le cui soluzioni sono:

$$h = \frac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 - 4\frac{I_{CM}}{M}}}{2}$$

quindi

$$h_1 = \frac{\ell}{2} + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - \frac{I_{CM}}{M}} \quad , \quad h_2 = \frac{\ell}{2} - \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - \frac{I_{CM}}{M}}$$

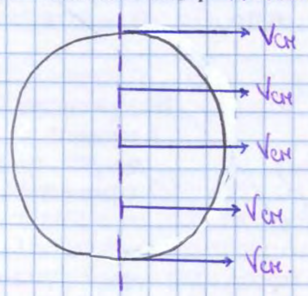
. Ci sono due punti da parti opposte del CM che danno origine allo stesso periodo.

Notiamo che: $\boxed{h_1 + h_2 = \ell}$

la distanza fra due assi // attorno a cui il sistema ha un determinato periodo è uguale alla lunghezza del pendolo.

RICORDA: Quando un corpo ruota attorno ad un asse il moto è descritto da $\frac{d(I\omega)}{dt} = M^{(ext)}$ per calcolare le reazioni bisogna sempre fare uso delle equazioni del CM.

Immaginiamo di avere una ruota, di spostarla in questo senso e quindi abbiamo un moto di TRASLAZIONE, TRASLAZIONE PURA. Quando la ruota trasla tutti i punti hanno la stessa velocità.

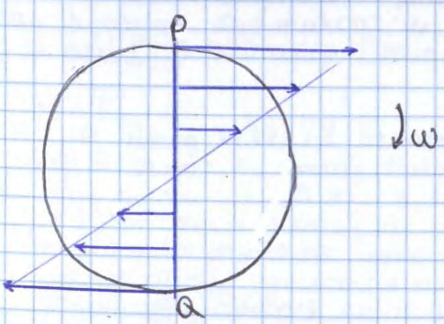


Guardiamo in particolare tutti i punti della ruota che stanno su quest'asse, tutti i punti avranno queste velocità fra loro uguali e contemporaneamente uguali alla velocità del CM. Se invece la ruota sta ferma ma ruota attorno ad un asse passante per il suo centro, ruota con una velocità angolare ω, questa la chiameremo ROTAZIONE PURA. Se la ruota ha raggio R il punto P avrà velocità:

$$V_P = \omega \cdot R$$

mentre il punto Q avrà una velocità uguale a quella di P in modulo, ma è diretta dall'altra parte.

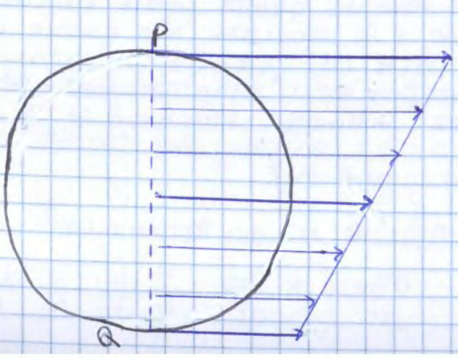
$$V_Q = -\omega R$$



In questo II caso il CM sta fermo e tutti gli altri punti hanno una velocità che nella parte superiore, se la ruota gira in senso orario, è positiva, nella parte inferiore è negativa. Chiediamoci: esiste un moto intermedio tra questi due.

Supponiamo di avere una ruota che mentre si sposta, il cui CM si sposta con V_{CM} e contemporaneamente ruota.

CM si sposta con V_{CM} + ROTAZIONE con ω attorno al CM



Quindi le velocità saranno date dalla somma delle due velocità trovate nei casi precedenti. Il punto P avrà velocità:

$$V_P = V_{CM} + \omega R$$

e Q avrà velocità

$$V_Q = V_{CM} - \omega R$$

Questo è un moto di ROTO-TRASLAZIONE.

In questo caso sappiamo che $f = f_s \leq \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot M \cdot g$

[La derivata del momento angolare relativo al centro di massa è uguale al momento delle forze ext.] Il nostro sistema si scrive:

$$\begin{cases} M \dfrac{dV_{cm}}{dt} = F_0 - f_s \\ \dfrac{I_{cm}}{R} \dfrac{dV_{cm}}{dt} = f_s \cdot R \end{cases}$$

Dividendo per R la II equazione possiamo scriverla:

$$\begin{cases} M \dfrac{dV_{cm}}{dt} = F_0 - f_s \\ \dfrac{I_{cm}}{R^2} \cdot \dfrac{dV_{cm}}{dt} = f_s \end{cases}$$

sommando membro a membro:

$$\left(M + \frac{I_{cm}}{R^2}\right) \frac{dV_{cm}}{dt} = F_0$$

quindi l'accelerazione attorno al cm vale:

$$\frac{dV_{cm}}{dt} = \frac{F_0}{M + \frac{I_{cm}}{R^2}}$$

Da questa possiamo calcolare la forza di attrito statico, dalla II equazione abbiamo che:

$$f_s = \frac{I_{cm}}{R^2} \frac{dV_{cm}}{dt} = \frac{\frac{I_{cm}}{R^2}}{M + \frac{I_{cm}}{R^2}} \cdot F_0$$

Adesso applichiamo la definizione e cioè questa forza sia $\leq$ dell'attrito statico massimo che il sistema può sopportare.

$$\frac{\frac{I_{cm}}{R^2}}{M + \frac{I_{cm}}{R^2}} F_0 \leq \mu_s \cdot M \cdot g$$

supponiamo di avere un disco e quindi $I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$ quindi la formula diventa:

$$\frac{\frac{1}{2} M}{M + \frac{1}{2} M} F_0 \leq \mu_s \cdot M \cdot g$$

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{3} F_0 \leq \mu_s \cdot M g$$

Quindi nel caso di un disco, abbiamo un moto di PURO ROTOLAMENTO implica che

$$\boxed{F_0 < 3 \mu_s \cdot M \cdot g}$$

Cosa capita se la forza è più grande di quel valore? Supponiamo che la forza sia il doppio.

II CASO: se $F_0 > 3 \mu_s M \cdot g$, se $F_0 = 6 \mu_s \cdot M \cdot g$ il moto non è più di rotolamento puro, c'è un moto di ROTO-TRASLAZIONE con slittamento, il punto Q NON è fermo (istantaneamente) e allora l'attrito è dinamico quindi:

$$f = f_k = \mu_k \cdot M \cdot g$$

Inoltre quando si ha slittamento, la velocità del cm è $V_{cm} \neq \omega R$ perché se fossero uguali il corpo sarebbe fermo.

Avanzamento del cm e rotazione del cm sono due fenomeni indipendenti. Il problema si risolve esattamente come prima:

$$\begin{cases} M \dfrac{dV_{cm}}{dt} = F_0 - \mu_k M g \\ I_{cm} \cdot \dfrac{d\omega}{dt} = \mu_k M \cdot g \cdot R \end{cases} \longrightarrow \frac{dV_{cm}}{dt} = \frac{F_0 - \mu_k M \cdot g}{M}$$

il moto del cm è uniformemente accelerato perché accelerazione è costante, e la velocità sarà

$$V_{cm} = \frac{F_0 - \mu_k M g}{M} t \longrightarrow \text{se a } t = 0 \;\; V_{cm} = 0$$

La II equazione dice invece che:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu_k M \cdot g R}{I_{cm}} \longrightarrow \omega = \frac{\mu_k M \cdot g R}{I_{cm}} t \qquad \text{se a } t=0 \;\; \omega = 0$$

Se abbiamo un disco $I = \frac{1}{2} M R^2$ quindi:

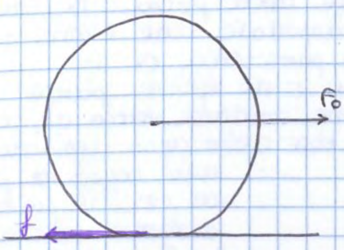
$$\begin{cases} V_{cm} = \dfrac{F_0 - \mu_k M \cdot g}{M} t \\ \omega = 2 \mu_k \dfrac{g}{R} t \end{cases}$$

La velocità del punto Q adesso vale:

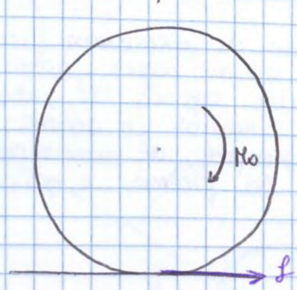
$$V_Q = V_{cm} - \omega R = \frac{F_0 - \mu_k M \cdot g}{M} t - 2 \mu_k g t =$$

$$= \left(\frac{F_0}{M} - 3 \mu_k g\right) t$$

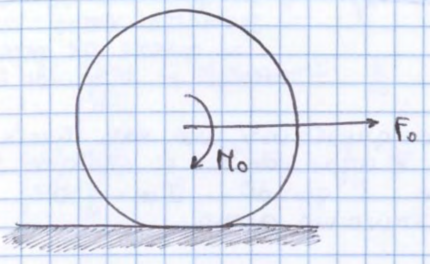
Come capire in che verso va la forza di attrito?
Nel problema precedente era così:



Quando invece gli viene applicato un momento la forza è così:



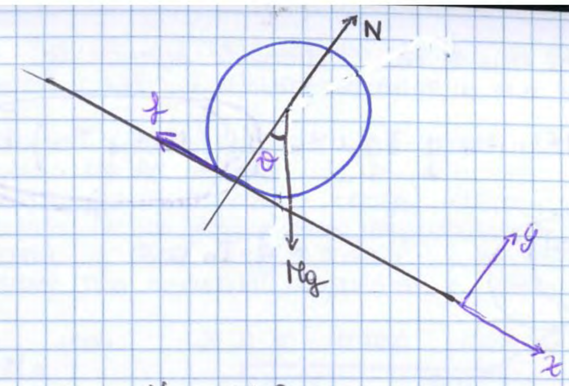
Se invece abbiamo una situazione intermedia e cioè applichiamo sia una forza che un momento, la forza di attrito può essere sia da una parte che dall'altra



PICCOLO PROBLEMA: Quando c'è attrito non c'è energia dissipata perché il punto di contatto è momentaneamente fermo e quindi il lavoro $F \cdot \delta$ è zero. Quando c'è attrito statico, la forza di attrito non dissipa energia, quindi se ho rotolamento puro dove l'attrito è statico l'energia si conserva. Se l'energia si conserva uno potrebbe risolvere i problemi con la conservazione dell'energia.

Le equazioni saranno:

$$\begin{cases} M \dfrac{dV_{cm}}{dt} = Mg \sin\vartheta - f \\ N = Mg\cos\vartheta \\ I_{cm} \dfrac{d\omega}{dt} = fR \end{cases}$$



Se il corpo si muove di rotolamento puro: $V_{cm} = \omega \cdot R$ e

$f = f_S \leq \mu_S \cdot N = \mu_S \cdot M \cdot g \cdot \cos\vartheta$ e le equazioni diventano:

$$\begin{cases} M \dfrac{dV_{cm}}{dt} = Mg \sin\vartheta - f_S \\ \dfrac{1}{2} M \cancel{R^2} \dfrac{1}{\cancel{R}} \dfrac{dV_{cm}}{dt} = f_S \cdot \cancel{R} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M \dfrac{dV_{cm}}{dt} = M \cdot g \sin\vartheta - f_S \\ \dfrac{1}{2} M \dfrac{dV_{cm}}{dt} = f_S \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro

$$\frac{3}{2} M \frac{dV_{cm}}{dt} = Mg\sin\vartheta \longrightarrow \frac{dV_{cm}}{dt} = \frac{2}{3} g \sin\vartheta$$

NB) Il corpo rotola solo perche' c'e' l'attrito altrimenti il corpo verrebbe giu' senza ruotare; il punto a contatto viene frenato.

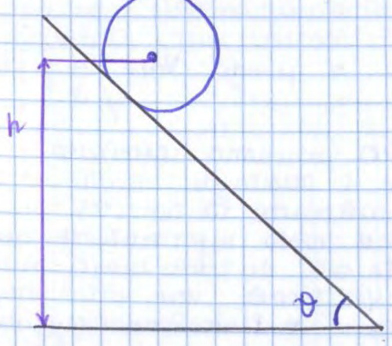
Questa accelerazione e' costante, il moto sara' uniformemente accelerato. L'attrito, se lo ricaviamo dalla I equazione vale:

$$f_S = \frac{1}{2} M \frac{dV_{cm}}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}} M \frac{\cancel{2}}{3} g\sin\vartheta = \frac{1}{3} Mg \sin\vartheta$$

Il movimento esiste quando la forza di attrito e' minore di quella massima:

$$f_S \leq \mu_S \cdot N \longrightarrow \frac{1}{3} \cancel{M}\cancel{g} \sin\vartheta \leq \mu_S \cdot \cancel{M} \cdot \cancel{g} \cdot \cos\vartheta \longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}\vartheta \leq 3\mu_S}$$

Quindi se la $\operatorname{tg}\vartheta$ e' piu' piccola di quel valore, il corpo rotola, l'accelerazione del cm e' $\frac{2}{3} g \sin\vartheta$; se parte da fermo possiamo calcolare la velocita': $V = at$ e poi conosciamo lo spazio. Supponiamo invece che il problema dica: Il corpo rotola, calcolami la velocita' con cui arriva al fondo. Se siamo sicuri che il corpo rotola, ma solo in quel caso, possiamo dire l'attrito e' statico, se l'attrito e' statico il punto di contatto e' momentaneamente fermo e se il punto di contatto e' momentaneamente fermo, l'attrito non fa lavoro, se l'attrito non fa lavoro l'energia si conserva. Se l'energia si conserva, posso calcolare l'energia all'inizio la eguaglio a quella alla fine e risolvo il problema con la conservazione dell'energia. Se il corpo non rotola, il punto non e' momentaneamente fermo e l'attrito non fa lavoro e l'energia non si conserva. Se il corpo rotola posso calcolare l'E_p che e' uguale all'E_p in ogni momento sara' l'E_p rispetto al cm. L'energia cinetica sara': (Energia cinetica di un corpo e' = alla somma dell'E_K rispetto al cm + l'E_K del movimento relativo al cm) $\longrightarrow$ TEOREMA DI KÖNIG



$$E_K = \underbrace{E_{K\,cm}}_{E_K \text{ del cm}} + \underbrace{E_K'}_{E_K \text{ attorno al cm}} = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

Quindi questa e' l'energia cinetica del nostro corpo e vale sempre! Sia che il corpo rotoli, sia che il corpo strisci.

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2}$$

Impulso angolare. (CALCOLO DELLE REAZIONI QUANDO CI SONO DEI FENOMENI IMPULSIVI)

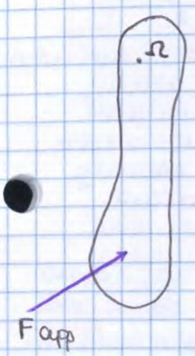
Quando un giocatore di baseball colpisce con la mazza una palla si ha un fenomeno impulsivo, la palla rimane a contatto con la mazza un tempo piccolissimo. Immaginiamo di avere una barra tenuta fissa ad una certa altezza, se do una martellata sulla barra anche questo è un fenomeno impulsivo, il chiodo tiene o no? Il teorema del momento angolare ci dice che, calcolati i momenti rispetto ad un certo polo noi abbiamo questa relazione tra momento angolare e momento delle forze:

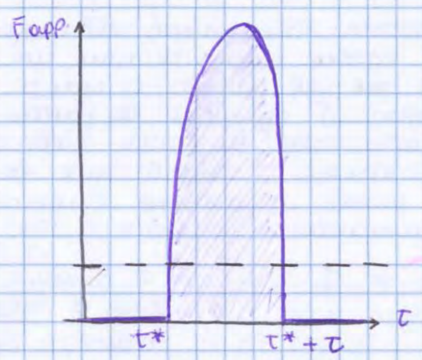
$$\frac{dL_\Omega}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}$$

se Ω è fermo avremo

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{M}^{(ext)}}$$

Consideriamo un caso semplice, dove c'è una forza generica, qui c'è il mio polo Ω e se applico qui una forza di tipo impulsivo (una martellata, ad esempio) la situazione è sempre questa: la forza prima è zero in modulo fino all'istante prima che io dia la martellata, quando do la martellata c'è una forza intensissima per un 100esimo di secondo e dopo torna ad essere zero. La forza è piccolissima ma questo integrale è finito. Immaginiamo di avere una barra incernierata nel punto Ω potremmo effettivamente notare che oltre la forza applicata c'è anche la forza peso, la forza peso è una forza costante, ma quello che a noi interessa è l'impulso (integrale della forza sul tempo di urto). Quindi se questa è la forza Mg quanto vale l'impulso della forza Mg?



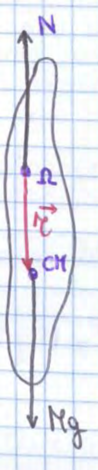


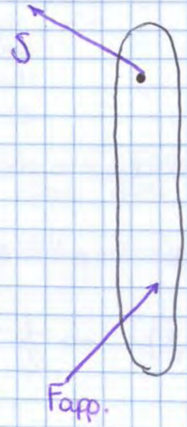
$$J_{Mg} = \int_{t^*}^{t^*+\tau} Mg\, dt = Mg\tau$$

perchè se il tempo di impulso è piccolissimo, l'impulso della forza peso e di ogni forza costante è trascurabile rispetto a quello della forza applicata (quest'ultimo infatti ha un'area finita mentre l'altro tende a zero quando τ tende a zero:

$$J_{app} = \int_{t^*}^{t^*+\tau} F_{app}\, dt$$

I OSSERVAZIONE FONDAMENTALE:
Quando si hanno dei fenomeni impulsivi le forze costanti non contano perchè l'impulso che danno tende a zero. Prima che io dia una martellata, prima che io applichi la forza quali sono le forze in gioco? Se questo è il corpo, con il polo Ω, il CM, ci sarà la forza peso, la reazione N che si bilanciano $N = Mg$; se Mg è costante, anche N lo sarà e quindi anche N non interessa, avrà un impulso molto piccolo. Quando do la martellata, se tiene si devono sviluppare sul chiodo delle forze bestiali perchè impediscono che il sistema se ne vada per i fatti suoi: quando applico F_{app} devono necessariamente svilupparsi delle forze (chiamiamola S) che per il momento non conosco. Quando studio un fenomeno di urto, le uniche forze che mi interessano sono quelle impulsive, cioè quelle molto grandi nel momento che considero.





FENOMENO IMPULSIVO → massimo delle forze ext che sono grandissime per tempi piccolissimi. Queste forze impulsive sono importanti perchè ci dicono se il sistema è stabile o no dopo la sollecitazione esterna. Torniamo al momento angolare, da questa relazione:

$$d\vec{L}_\Omega = \vec{M}^{(ext)}\, dt$$

Da questa relazione dobbiamo calcolare la variazione del momento angolare. Le forze ext sono quelle collegate al nostro sistema ed il mondo esterno. Quindi la variazione di momento angolare è:

$$\Delta\vec{L}_\Omega = \int^{t^*+\tau} M_\Omega^{(ext)}\, dt =$$

Dalla formula precedente ricaviamo quanto deve valere l'impulso: $J = \frac{\omega_0 I_0}{r} = \frac{1}{3}\frac{Ml^2}{r} \cdot \sqrt{\frac{3g}{l}}$

Il chiodo tiene o non tiene? È chiaro che il chiodo non interviene nella condizione di rotazione perché dato che le forze che esercitano il chiodo sono applicate in un punto non riguarda il momento (?); ma c'è un'altra equazione che non abbiamo usato, cioè quella del CM, il CM è sensibile a tutte le forze quindi l'altra equazione mi dice:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} \quad \text{da cui} \quad d\vec{P} = R^{(ext)}\,dt$$

Quindi la variazione di quantità di moto dovuta alla martellata sarà:

$$\Delta\vec{P} = \int_{t^*}^{t^*+\tau} R^{(ext)}\,dt = \int_{t^*}^{t^*+\tau} (F_{app} + J)\,dt$$

Le forze ext sono la forza applicata + la reazione vincolare J.

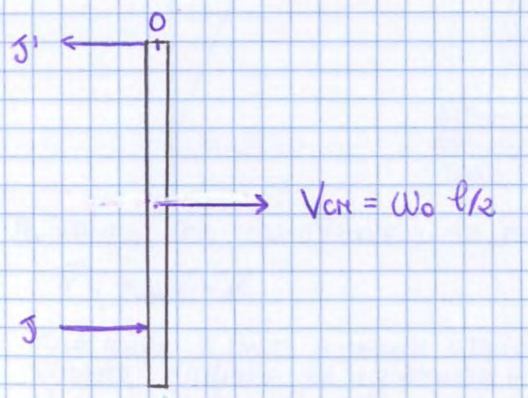
Quindi questa formula vi dice che la variazione di quantità di moto è uguale all'impulso delle forze applicate + l'impulso delle reazioni sul perno:

$$\Delta\vec{P} = \vec{J}_{APP} + \vec{J}_{REAZIONI}$$

dove J_{app} è: $\vec{J}_{app} = \int_{t^*}^{t^*+\tau} \vec{F}_{app}$ e $J_{reazioni}$ è: $J_{reazioni} = \int_{t^*}^{t^*+\tau} \vec{J}\,dt$

Tutte le altre forze le abbiam buttate via perché sono forze costanti che non danno nessun contributo.

Prima della martellata il CM è sulla verticale e sta fermo, la situazione è questa: abbiamo l'asta, il punto O, viene applicata una martellata ed il sistema comincia a muoversi; prima dell'urto il ΔP che è:



$$\Delta\vec{P} = \vec{P}(dopo) - \vec{P}(prima) =$$
$$\vec{P}(dopo) = M \cdot \vec{V}_{CM}(dopo)$$

dato che all'inizio l'asta era ferma $\vec{P}(prima) = 0$

Dopo la martellata l'asta comincia a ruotare ed ha una velocità: $V_{CM} = \omega_0\, l/2$

velocità appena dopo l'urto — ruota attorno al punto O di raggio $l/2$

Quindi, in modulo, la ΔP sarà:

$$\Delta P = M \cdot \omega_0 \cdot l/2$$

Ma $\Delta P = \vec{J}_{APP} + \vec{J}_{REAZIONI}$ quindi avremo che:

$$M \cdot \omega_0 \cdot l/2 = \vec{J}_{APP} - \vec{J}'$$

L'impulso che noi diamo è J ed è diretto così $\rightarrow$ quindi la reazione del chiodo J' sarà così orientata $\leftarrow$. Ricaviamo che J' è uguale

$$J' = J - M\omega_0\, l/2 = J - M\frac{l}{2}\frac{Jr}{I_0}$$

Prima avevamo trovato che $J \cdot r = I_0\omega_0$ da cui: $\omega_0 = \frac{J \cdot r}{I_0}$, quindi

L'impulso che si verifica nel punto di vincolo è:

$$\boxed{J' = \left(1 - \frac{Mlr}{2I_0}\right)J}$$

Se teniamo conto che la nostra barra è incernierata ad un estremo, come detto prima la I rispetto ad O è:

$I_0 = \frac{1}{3}Ml^2$ quindi la nostra formula diventa così:

$$J' = \left(1 - \frac{\cancel{M}\cancel{l}r}{2\frac{1}{3}\cancel{M}l^{\cancel{2}}}\right)J \longrightarrow J' = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{r}{l}\right)J$$

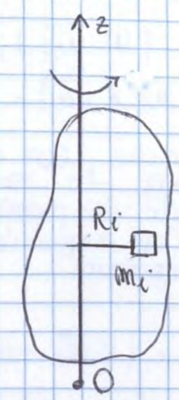
Questa formula ci dice alcune cose importanti, se la parentesi vale zero il chiodo non è sottoposto a nessuna forza

28-04-2014

Abbiamo visto che per risolvere i problemi di questo tipo utilizziamo le formule:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} \\[2ex] \dfrac{dL_0}{dt} = \vec{M}_0^{(ext)} \end{cases}$$

Se si parla di un corpo rigido abbiamo introdotto altre quantità, momento di inerzia e abbiamo visto come è definito. In particolare se abbiamo un corpo che ruota attorno ad un asse fisso z



$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

ed L_0 non è // all'asse di rotazione

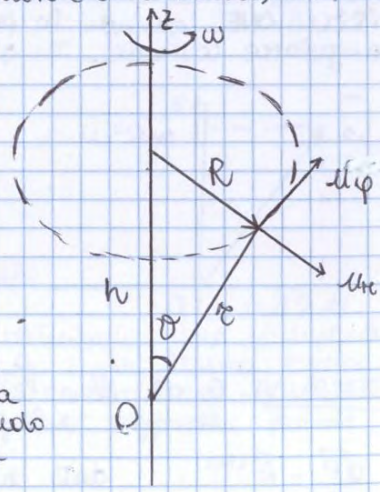
$\vec{L_0} \not\parallel z$ ed abbiamo visto che la componente momento angolare lungo l'asse di rotazione si scrive come:

$$L_{0,z} = I\omega$$

Esercizio: Prendo una particella e la collego con una barretta molto leggera ad un sistema che si chiama giunto e che mantiene l'asse di rotazione fisso e metto in rotazione la particella di massa m attorno a quest'asse di rotazione. Vogliamo vedere quali forze vengono esercitate su quel giunto di connessione.

NB Quando abbiamo dei vincoli, ci sono delle forze e ci sono delle coppie. Un sistema di forze si può sempre pensare equivalente ad una forza rispetto ad un certo punto e ad una coppia rispetto a quel punto. Una coppia si può immaginare come due forze uguali ed opposte messe ad una certa distanza.

Rifaccio l'immagine: la particella ruota attorno ad z con velocità angolare ω, chiamo la distanza che va dal piano della traiettoria al punto O dove c'è il vincolo, h.



Il vettore che caratterizza la mia particella

$$\vec{r} = h\,\vec{u_z} + \vec{R}$$

Studiando il moto circolare abbiamo introdotto un versore radiale ed un versore trasverso. u_r sarà l'equivalente del nostro versore RADIALE nel caso piano e chiamiamo il versore tg u_φ.
Quindi R sarà:

$\vec{R} = R\,\vec{u_r}$ e quindi il vettore posizione sarà:

$\vec{r} = h\,\vec{u_z} + R\,\vec{u_r}$. Noi immaginiamo che il vincolo faccia sì che la particella si muova descrivendo questo cerchio di raggio R con velocità angolare ω costante: $\omega = \omega \cdot \vec{u_z}$

La velocità della nostra particella sarà:

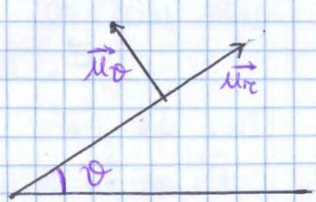
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{h\,\vec{u_z} + R\,\vec{u_r}\right\} =$$

h e u_z sono costanti: perché l'asse di rotazione è sempre quello quindi la derivata del I termine è zero. R è costante quindi:

$$= R\,\frac{d\vec{u_r}}{dt} =$$

La derivata del versore radiale:

$$= R\,\frac{d}{dt}\,\vec{u}$$



Abbiamo visto:

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u_\theta}$$

$$\frac{du_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u_r}$$

ma

$\dfrac{d\varphi}{dt}$ ci dice come si sposta il corpo attorno all'asse di rotazione, cioè ω.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\omega R\vec{u_\varphi}) = \left(\begin{array}{l} m, \omega, R \text{ sono costanti} \\ \text{se la particella ruota} \\ \text{con velocità angolare} \\ \text{costante.} \end{array}\right) = m\omega R \underbrace{\frac{d\vec{u_\varphi}}{dt}}_{=-\omega\vec{u_r}} = -m\omega^2 R\vec{u_r}$$

e questa quantità, per definizione, deve essere uguale alla forza applicata:

$$-m\omega^2 R\vec{u_r} = \vec{F}$$

Quindi otteniamo che: $\vec{S} + m\vec{g} = -m\omega^2 R\vec{u_r} \longrightarrow \vec{S} = m\vec{g} - m\omega^2 R\vec{u_r}$

L'accelerazione di gravità è diretta lungo z ma ha verso contrario, quindi:

$\vec{S} = +mg\vec{u_z} - m\omega^2 R\vec{u_r}$ Quindi lo sforzo che occorre esercitare è: $S_z = mg$ $S_r = -m\omega^2 R$

Quanto vale la forza che si esercita sul perno? Faccio uso della formula della derivata del momento angolare per calcolare la coppia:

$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{M}^{(ext)}$ il momento totale rispetto al punto O delle forze ext è dato dalla formula: $L_0 = -mRh\omega\vec{u_r} + mR^2\omega\vec{u_z}$

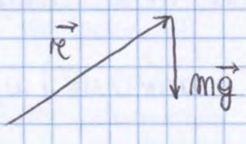
Le forze che danno momento sono: forza peso, forza $\vec{S}$ no! perché passa per quel punto e poi ci sarà la coppia che esercita il vincolo. Cominciamo a calcolare la derivata:

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{-mRh\omega\vec{u_r} + \underbrace{mR^2\omega\vec{u_z}}_{\text{la derivata di questa quantità è } = 0 \text{ perché tutti i termini sono costanti.}}\right\} = -mRh\omega\underbrace{\frac{d\vec{u_r}}{dt}}_{=\omega\vec{u_\varphi}} = -mRh\omega(\omega\cdot\vec{u_\varphi})$$

Quindi: $\boxed{\frac{d\vec{L_0}}{dt} = -mRh\omega^2\vec{u_\varphi}}$ Questa quantità sarà uguale al momento delle forze ext: $-mRh\omega^2\vec{u_\varphi} = \vec{M}_0^{(ext)}$

Cominciamo a calcolare il momento:

$M_{0(peso)} = \vec{r} \times (m\vec{g}) = mgR\vec{u_\varphi}$



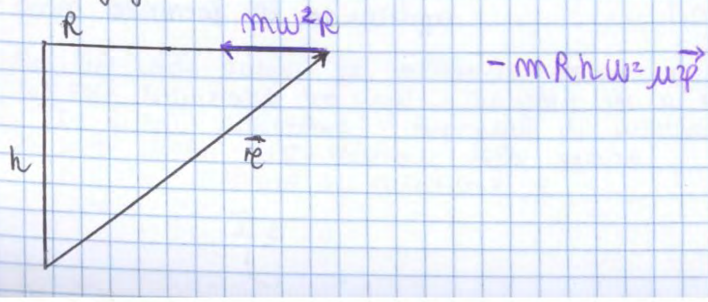
quindi la formula diventa:

$-mRh\omega^2\vec{u_\varphi} = mgR\vec{u_\varphi} + \underbrace{C}_{}$ → coppie esercitate dal vincolo

$$\boxed{\vec{C} = -mgR\vec{u_\varphi} - mRh\omega^2\vec{u_\varphi}}$$

Questa coppia ha due contributi: uno indipendente dalla velocità che è la coppia statica, l'altra invece è proporzionale al quadrato di ω quindi se va troppo forte il sistema si spacca perché non ce la fa a tenerlo.

Quando un corpo descrive una traiettoria circolare di raggio R, c'è una forza che vale $m\omega^2 R$ ed è la forza centripeta, se calcolo il momento rispetto a questo punto sarà forza × braccio dove il braccio è la distanza R quindi quando faccio te che moltiplica questa forza il pollice viene verso di voi, ha direzione opposta ad $\vec{u_\varphi}$ quindi il momento sarà: $-mRh\omega^2\vec{u_\varphi}$, questi si chiamano momenti centrifughi



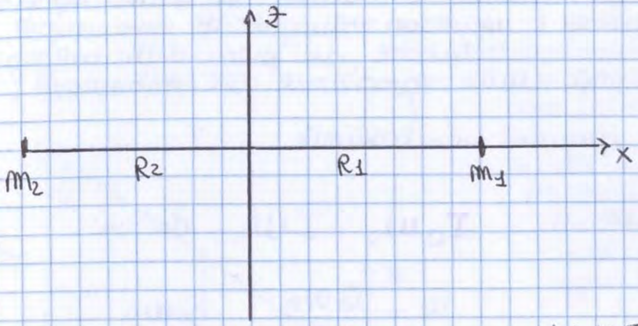
$= -m_1 R_1 h \omega \vec{u_{R_1}} + m_1 R_1^2 \omega \vec{u_z} - m_2 R_2 h \omega \vec{u_{R_2}} + m_2 R_2^2 \omega \vec{u_z} =$

(E' chiaro che se $\vec{u_{R_1}}$ lo chiamo $\vec{u_R}$, $\vec{u_{R_2}}$ sarà uguale a $-\vec{u_R}$ perchè hanno direzioni opposte.)

$$\boxed{\vec{L_0} = (-m_1 R_1 + m_2 R_2) h \omega \vec{u_R} + \omega (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \vec{u_z}}$$

Questo non è costante perchè al variare del tempo u_R cambia

La componente verticale $(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)$ che sappiamo essere il momento di inerzia delle due particelle. Posso far ruotare il sistema attorno ad un asse tale che il momento angolare sia // all'asse di rotazione z. Ci basta che questo termine sia zero e questo termine è zero quando l'asse passa per il CM perchè se ho due particelle da parti opposte ... Supponiamo di essere in questa situazione:
La posizione del CM sarà:



$$x_{CM} = \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 + m_2}$$ (Stanno da parti opposte)

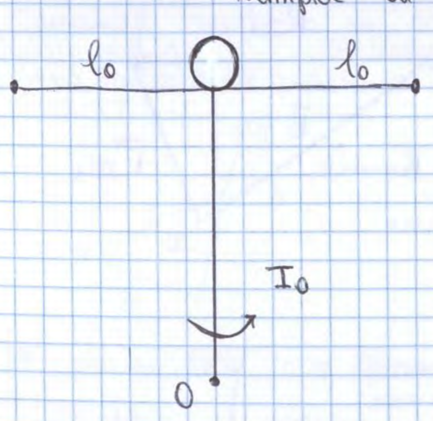
Il CM cade sulla retta z quando il denominatore fa zero.

In generale quando un corpo ruota attorno ad un asse, il momento angolare non è // all'asse di rotazione, quando però l'asse di rotazione passa per il CM può avere questa proprietà. Si chiama ASSE CENTRALE DI INERZIA quell'asse che gode di questa proprietà: Un asse centrale di inerzia è un asse tale che, quando il corpo ruota attorno a quell'asse il momento angolare è // all'asse di rotazione. Questo è importantissimo perchè se

$m_1 R_1 = m_2 R_2$ allora $\rightarrow \vec{L_0} = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \omega \vec{u_z}$

non c'è coppia sul perno che sollecita il sistema, perchè L_0 è costante e la sua derivata è = a zero.
Di assi centrali di inerzia ne esistono sempre almeno 3. (autovettori di una matrice simmetrica) esistono sempre almeno 3 assi che passano per il CM e che godono di questa proprietà.
Tutte le volte che abbiamo un corpo rigido, dall'equazione $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)}$ calcoliamo la forza che si esercita sul perno, per il calcolo della coppia dobbiamo usare la formula $\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{M}$

Problema - Ballerina comincia a ruotare, aumenta fortissimamente la velocità angolare. Lei comincia a girare, man mano che chiude le braccia aumenta sempre di più la sua velocità angolare. La ballerina fa perno sulle scarpe che hanno le punte di gesso e la ballerina viene messa in moto dal partner; supponiamo che abbia massa nulla, corpo esile che poggia su O, e le braccia che portano la massa. In questa situazione, quando le braccia portano la massa ad una distanza l_0 lei viene messa in rotazione.
All'inizio avrà un momento di inerzia, ruota attorno all'asse che passa per il suo corpo e quest'asse è un asse centrale di inerzia, in questa situazione il momento angolare che possiede inizialmente la ballerina è



$$\vec{L_0}(0) = I_0 \omega_0 \vec{u_z}$$

Ad un certo punto la ballerina comincia a contrarre le braccia e passa da questa situazione ad una situazione in cui è così:
In questa situazione, il momento di inerzia dipende dalla distribuzione delle masse rispetto all'asse di rotazione e sarà:

$I < I_0$

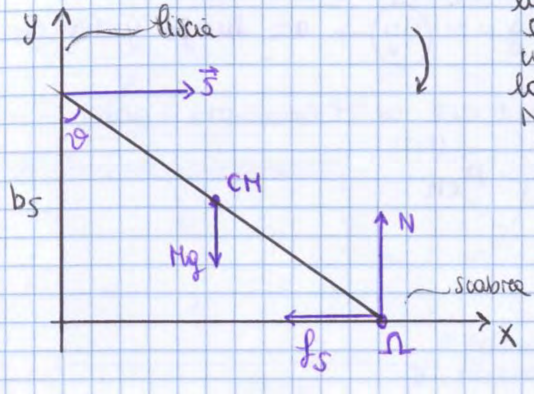
Siamo giunti a questa conclusione: Quando il polo rispetto a cui calcoliamo il momento sono spostati di un vettore b l'uno rispetto all'altro

$$M_{\Omega'} = \underbrace{\vec{b} \times \vec{R}}_{=0 \text{ IN STATICA}} + \vec{M}_{\Omega}$$

Però in statica, dato che la risultante $\vec{R}^{(ext)} = 0$ il I termine è nullo, quindi in statica IL MOMENTO È INDIPENDENTE DAL POLO.

Quindi le equazioni sono: $\begin{cases} \vec{R}^{(ext)} = 0 \\ \vec{M}_0^{(ext)} = 0 \end{cases}$ Rispetto ad ogni polo!

Problema: La scala appoggia su una superficie orizzontale scabra e sulla superficie verticale liscia. Determinare la massima inclinazione ϑ per la quale si ha equilibrio. Supporre che la scala si possa rappresentare come una barra omogenea. (TIPICO PROBLEMA DI STATICA). Se la superficie è liscia abbiamo che la forza che la superficie può esercitare è soltanto lungo la normale. Ci sarà una forza $\vec{S}$ dovuta all'interazione tra la parete liscia e la scala. Sulla superficie scabra ci sarà una forza N che regge la scala e poi ci sarà una forza orizzontale dovuta all'attrito che si oppone allo scorrimento. Finché siamo in condizioni di equilibrio f è f_s (ATTRITO STATICO). In condizioni di equilibrio la somma di tutte le forze è $=0$ e la somma di tutti i momenti rispetto ad un polo qualunque è $=0$. La somma di tutte le forze ext:



$$S + N + f_s + Mg = 0$$

(La scala è omogenea quindi la forza peso posso pensarla applicata al CM che per simmetria compare a metà)

Se l è la lunghezza della scala ed M è la massa della scala, le equazioni saranno:

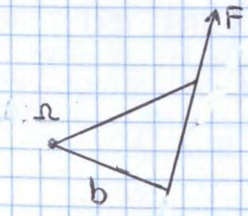
$$\begin{cases} (x) \quad S - f_s = 0 \\ (y) \quad N - Mg = 0 \end{cases}$$

Dalla I equazione trovo:

$f_s = S$ e dalla II che:

$N = Mg$ Dato che l'attrito è statico $\begin{cases} f_s \leq \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot M \cdot g \\ N = M \cdot g \end{cases}$

Per la rotazione: Stabiliamo un verso completamente arbitrario che considereremo positivo e poi prendiamo un polo, anch'esso possiamo prenderlo dove vogliamo però conviene sempre prendere come polo il punto in cui vanno a finire il più grande numero di forze incognite; stabilito Ω andiamo a calcolare i momenti rispetto ad Ω. (Il braccio è sempre la $\perp$ tra la retta d'azione della forza e il polo rispetto al quale si calcola il momento)

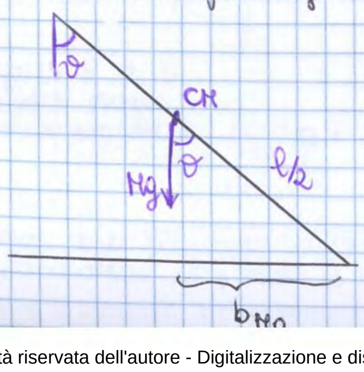


$$M_{\Omega} = F \cdot b$$

N e f_s non danno momento perché passano per il polo, le uniche forze che danno momento sono S ed Mg. Il braccio di S è la distanza fra la retta d'azione di S ed il polo quindi lo chiamo b_S.

$$b_S = l \cos\vartheta$$

Il braccio della forza Mg invece sarà:



$$b_{Mg} = \frac{l}{2} \operatorname{sen}\vartheta$$

Quindi l'equazione per la rotazione sarà:

$$\underbrace{S \cdot l \cos\vartheta}_{\text{positivo perché cerca di farla ruotare lungo la direzione che ho scelto positiva}} - Mg \cdot l/2 \cdot \operatorname{sen}\vartheta = 0$$

$mg\frac{x}{\ell} - T\cos\vartheta - \ell = 0$ dalla II equazione troviamo: $T = g\frac{x}{\ell}\cdot\frac{1}{\cos\vartheta}$

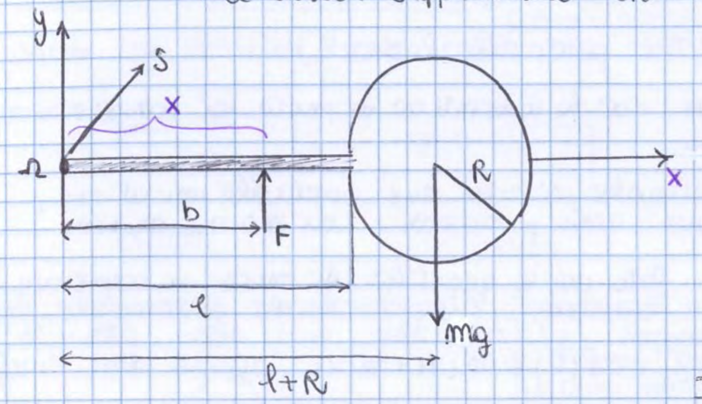
Sostituiamo nella prima: $S_x = T\sin\vartheta = mg\frac{x}{\ell}\,Tg\vartheta$

Calcoliamo la componente y:

$$S_y = mg - T\cos\vartheta = mg - mg\frac{x}{\ell}\frac{1}{\cancel{\cos\vartheta}}\cdot\cancel{\cos\vartheta} = mg\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

$$\boxed{S_y = mg\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}$$

Problema: Data un'asta incernierata qui, con un disco omogeneo. Qual è la forza che dobbiamo applicare affinché il sistema rimanga in equilibrio? Supponiamo che l'asta non abbia massa e che sia concentrata tutta nel disco. Supponiamo che la distanza sia ℓ e che il raggio sia R.



La relazione per quanto riguarda la somma delle forze è:

$$\vec{S} + \vec{F} + m\vec{g} = 0$$

Stabiliti x e y avremo:

x) $S_x = 0$

y) $S_y + F - mg = 0$

Il problema chiede: Quanto deve valere F affinché il sistema sia in equilibrio?

Calcoliamo i momenti che ci conviene calcolare rispetto a Ω, avremo che

$-Fb + mg(\ell+R) = 0$ adesso ricaviamo F

$$F = mg\frac{\ell+R}{b}$$

Quindi S_y sarà:

$$S_y = mg - F = mg\left(1-\frac{\ell+R}{b}\right)$$

Gli Urti

Gli urti sono dei fenomeni nei quali si manifestano forze grandissime per tempi brevissimi (tra due o più particelle). Se le particelle sono libere il problema è semplice, in caso contrario sono + complicati. URTI: due corpi vengono a contatto per un tempo brevissimo, le forze che si manifestano in questo caso sono forze interne sono grandissime e durano per un tempo molto piccolo. Quando ci sono fenomeni di urto le forze ext, in genere, non giocano.

URTI TRA PARTICELLE LIBERE. In questo caso abbiamo due particelle che si urtano, si scambiano un'azione e quest'azione porta a delle variazioni delle quantità di moto delle singole particelle. Noi sappiamo che:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} \qquad \text{da cui:} \qquad d\vec{P} = \vec{R}^{(ext)}\,dt$$

le forze ext sono in genere il peso, la forza elettrica... che cambiano nel tempo, allora:

$$P(t_f) - P(t_i) = \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}^{(ext)}\,dt$$

ma se: $t_f - t_i \to 0$

allora: $P(t_f) - P(t_i) \approx \langle \vec{R}^{ext} \rangle (t_f - t_i) \approx 0$

Teorema della media

ma se la forza è continua e $t_f - t_i \to 0$ questa quantità $\to 0$.

Quindi

$$\boxed{P(t_f) = P(t_i)}$$

Questa variazione di energia è sempre negativa in un urto anelastico.

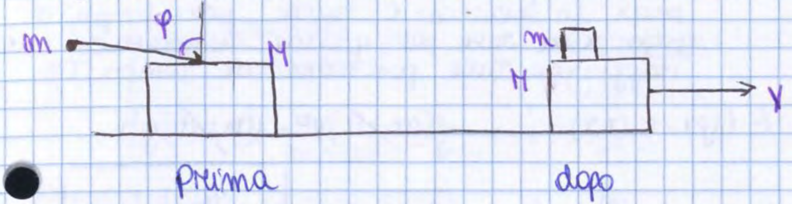
Se non fossimo in una situazione unidimensionale ma bidimensionale vale ancora quello che abbiamo scritto?
Immaginiamo che m_1 si muova con V_1 ed m_2 con V_2, dopo che si urtano ci sarà una particella m_1+m_2 che si muove con velocità V.

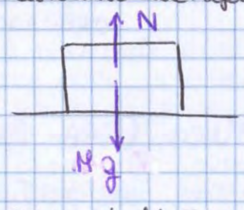
Tutto quello che abbiamo detto vale ancora.

$$\Delta E_K = -\frac{1}{2}\mu(V_1-V_2)^2$$

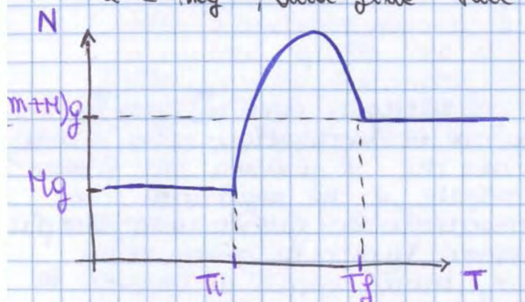
Se le particelle sono libere, le forze sono come la gravità, cioè l'impulso di tali forze per un tempo che tende a zero, tende a zero.

Problema (dato nei compiti!!) C'è una slitta di massa M su una superficie completamente liscia, un uomo ci butta sopra un sacco con velocità V_0 che batte sulla slitta e si ferma sulla slitta. Dopo avremo il corpo $m+M$ che si muove in questa direzione. Domanda: si conserva la quantità di moto? NO. Le forze ext che si applicano sono: la forza di gravità per m e M, la reazione N. Quando m non c'è avremo la seguente situazione.





La reazione N al variare del tempo, all'inizio è $= Mg$, alla fine vale $(m+M)g$. Supponendo che il sacco cominci ad urtare al tempo T_i, allora le sospensioni subiscono un colpo:



La forza ext in questo caso è di tipo impulsivo.
Orizzontalmente non abbiamo forze, quindi la nostra equazione:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} \longrightarrow \frac{d\vec{P}_x}{dt} = 0 \longrightarrow P_x = \text{costante}$$

$$P_x(T_i) = P_x(T_f) \longrightarrow \underbrace{mV_0 \sin\varphi}_{P\ \text{iniziale}} = \underbrace{(m+M)V}_{P\ \text{finale}} \longrightarrow \text{velocità dopo l'urto: } \boxed{V = \frac{m}{m+M}\sin\varphi\, V_0}$$

Per l'altra componente, invece sappiamo che la variazione di quantità di moto è uguale all'impulso delle forze, quindi sappiamo che:

$$\frac{dP_y}{dt} = R_y^{(ext)} = \left(\text{le uniche forze impulsive lungo y sono dovute alla forza N perché le altre sono costanti}\right) = N \Rightarrow dP_y = N\,dt$$

$$P_y(T_f) - P_y(T_i) = \int_{T_i}^{T_f} N\,dt = J =$$

La $P_y(T_f) = 0$ perché la particella si muove lungo l'asse delle x
La $P_y(T_i) = mV_0\cos\varphi$ ma col segno −

$$= 0 - (-mV_0\cos\varphi) = J$$

$$\boxed{J = mV_0\cos\varphi}$$

È positivo. (NB) Se le particelle non sono libere, dobbiamo tenere conto delle forze impulsive che si manifestano durante l'urto.

Come Galileo misurava la velocità dei proiettili: si prendeva una fune di una certa lunghezza l e si attaccava ad un pezzo di legno di massa M, si sparava un proiettile di massa m con velocità V_0, il proiettile batteva su M e questo M cominciava a salire fino ad un'altezza h, allora si calcolava h e da lì si deduceva quanto vale V_0:

La I equazione si può scrivere come: $V_{1i} + V_{1f} = V_{2f} + V_{2i}$ da cui:

$$\boxed{V_{1i} - V_{2i} = V_{2f} - V_{1f}}$$

Questa formula ci dice una cosa importante: la velocità di avvicinamento prima dell'urto è uguale alla velocità di allontanamento dopo l'urto.

Il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} V_{2f} - V_{1f} = V_{1i} - V_{2i} \\ m_1 (V_{1i} - V_{1f}) = m_2 (V_{2f} - V_{2i}) \end{cases}$$

equazione che segue dalla conserv. dell'energia

Questo è il sistema da risolvere dove le incognite sono V_{1f} e V_{2f}. Il risultato è questo:

$$V_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) V_{1i} + 2 m_2 V_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad V_{2f} = \frac{2 m_1 V_{1i} + (m_2 - m_1) V_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Queste sono le formule per il moto UNIDIMENSIONALE tra particelle libere.

I CASO: PARTICELLA e FERMA.

Quindi abbiamo $V_{2i} = 0$. Le formule diventano:

$$\begin{cases} V_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1i} \\ V_{2f} = 2 \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} V_{1i} \end{cases}$$

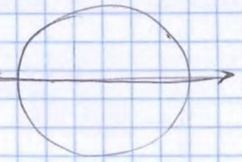
se $m_2 \gg m_1$
$$\begin{cases} V_{1f} = -V_{1i} \\ V_{2f} = 0 \end{cases}$$

se $m_2 \ll m_1$
$$\begin{cases} V_{1f} = V_{1i} \\ V_{2f} = 2 V_{1i} \end{cases}$$

se $m_1 = m_2$
$$\begin{cases} V_{1f} = 0 \\ V_{2f} = V_{2i} \end{cases}$$

REAZIONE NUCLEARE:
Avete un nucleo, in genere di Uranio (Reazione Nucleare) e mandate dentro un neutrone questo arriva dentro, lo mette in agitazione e si spacca in due pezzi, e libera a sua volta 3 neutroni, quindi io parto da un neutrone, poi ne ho 3 poi nove poi 27 e si innesca quella che si chiama REAZIONE A CATENA. Se il neutrone va troppo in fretta, quello che capita è una cosa del genere: il neutrone passa dall'altra parte, il nucleo non se ne accorge e non si spacca, quindi c'è il problema di rallentare questi neutroni; allora hanno inventato il moderatore nucleare, per rallentarlo occorre una sostanza che abbia la stessa massa

Se l'elettrone va troppo veloce



L'ipotesi che l'urto sia unidimensionale come abbiamo supposto fino ad adesso è fondamentale? Supponiamo di essere in una situazione diversa: conosciamo le velocità iniziale delle particelle e dalla conservazione della quantità di moto sappiamo che:

$$\begin{cases} m_1 \vec{V_{1i}} + m_2 \vec{V_{2i}} = m_1 \vec{V_{1f}} + m_2 \vec{V_{2f}} \\ \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2f}^2 \end{cases}$$

Queste sono 4 equazioni: 3 dall'equazione vettoriale della conservazione della quantità di moto ed una dalla conservazione dell'energia cinetica.
Le incognite sono: V_{1f}, V_{2f} ognuna ha 3 componenti quindi sei incognite, noi di equazioni ne abbiamo solo 4 quindi se vogliamo risolvere il problema occorre dare qualche informazione in più. Il caso dell'urto elastico tra particelle puntiformi può essere trattato completamente solo nel caso in cui l'urto è unidimensionale, se l'urto non è unidimensionale occorrono altre informazioni!

Problema: Supponiamo di avere un urto tra due particelle identiche che si muovono su di un piano, di cui una all'inizio è ferma; sappiamo che l'urto è elastico, cosa possiamo dire sulle traiettorie dopo l'urto? Una avrà velocità V_1 e l'altra V_2. Allora si può vedere che le traiettorie delle particelle dopo l'urto sono $\perp$.

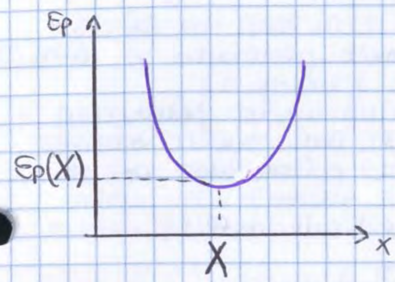
05/05/2014

Con l'altro prof. avete visto in dettaglio l'urto con sistemi vincolati. Il prossimo passo è l'OSCILLATORE ARMONICO. Abbiamo già parlato di questo all'inizio quando ci siamo occupati di dinamica. Un corpo si muove di moto armonico semplice quando la forza che agisce su questo corpo è proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio:

$$F = -kx$$

Un corpo che si muove in linea retta, si muove di moto armonico semplice quando la forza è di questo tipo, dove x indica la distanza dalla posizione di equilibrio, e k è una costante. Quindi $x=0$ è la POSIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE.

Questo moto è importante perchè ogni sistema disturbato dalla sua posizione di equilibrio si muove di moto armonico semplice. Se abbiamo un corpo che si muove di moto unidimensionale, ed indichiamo con x la coordinata ed E_p la sua energia potenziale, se $X=0$ è una posizione di equilibrio stabile allora l'E_p deve avere un minimo. X è il valore del minimo ed $E_p(X)$ il rispettivo valore di E_p, allora:



$$E_p(X) = E_p(x) + \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_X (x-X) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_X (x-X)^2 \dots$$

Se X è un punto di minimo di E_p allora:

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_X = 0 \qquad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_X > 0$$

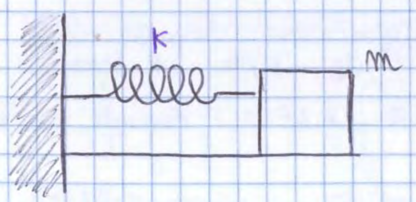
Se indichiamo con k la derivata seconda calcolata nel punto di minimo: $k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_X$ allora l'eq. possiamo scriverla:

$$E_p(X) = E_p(X) + \frac{1}{2}k(X-x)^2$$

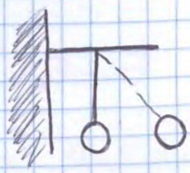
Se l'E_p ha un punto di minimo in X quando il corpo si sposta di poco da X, l'E_p è prop. al quadrato dello spostamento e quindi la forza è lineare.

Tutti i piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio sono descrivibili con un moto armonico.

Moto armonico semplice. Immagino una parete, una superficie liscia, una molla alla quale è attaccato un corpo di massa m, dove k è la costante elastica della molla. Ci sono tanti sistemi che posso immaginare così: immaginiamo la membrana dell'orecchio, se esercito una piccola pressione la membrana si deforma e anche in questo caso esiste una forza, dove al posto della costante k ci sarà una caratteristica della membrana:



Oppure posso avere una carica elet. vicino ad una superficie carica, la particella si sposta un po' ed al posto della costante della molla ci sarà qualcosa legato alla densità di carica:



Tutto questo per dire che k è una proprietà che manifesta il sistema che vuole tornare nella posizione di equilibrio.

Se non ci sono attriti (I grande approssimazione), la legge di Newton ci dice che:

$$m \cdot a = F$$

non mettiamo vettori perchè il corpo si muove solo su x.

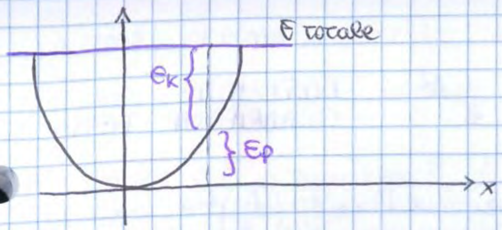
In questo caso sarà:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

Questa è l'equazione fondamentale e da questa vediamo molte cose importanti. (m è la massa del corpo che vibra, k è una proprietà della molla). Quest'equazione viene scritta in un altro modo cioè:

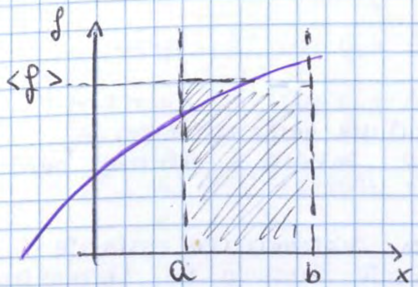
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Il rapporto k/m è una proprietà del sistema. Qualunque sia x la quantità k/m deve avere come dimensione l'inverso del quadrato di un tempo. Questa proprietà viene indicata con ω_0^2.



La somma di E_p ed E_k è sempre E totale

Vediamo le caratteristiche immediate di questi moti abbiamo detto: se abbiamo una certa funzione f che cambia così, il punto media fra a e b della coordinata x, la quantità:



$$\boxed{\langle f\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Valor media: altezza del rettangolo avente base $b-a$ ha la stessa area delimitata dalla funzione e dall'asse delle ascisse. Nel caso del moto ARMONICO, il valore medio della funzione viene valutato in genere sul periodo, quindi se la funzione è periodica cioè:

$f(t+T) = f(t)$, quando si parla di valore medio si parla di:

$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$ cioè il valore medio di una funzione armonica è normalmente valutato sul periodo del moto. Il motore per mezzo di qualche azione ext fa vibrare il nostro sistema e potrebbe essere importante sapere qual è il movimento media sotto l'azione di questa forza ext. Quanto vale la posizione media e la velocità media di una particella che si muove di moto armonico semplice? calcoliamo $\langle x\rangle$.

$$\langle x\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T A\,\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)\,dt = \frac{A}{T}\int_0^T \text{sen}(\omega_0 t+\varphi)\,dt =$$

pongo $u = \omega_0 t + \varphi \rightarrow du = \omega_0 dt \rightarrow dt = \frac{1}{\omega_0}du$

Tenendo conto di questa osservazione:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ quindi $\omega_0 T = 2\pi$

quando $t=0$ $u=\varphi$, quando $t=T$ avrò: $\omega_0 T + \varphi = 2\pi+\varphi$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{\omega_0 T}\int_\varphi^{2\pi+\varphi} \text{sen}\,u\,du = \frac{1}{2\pi}\int_\varphi^{2\pi+\varphi}\text{sen}\,u\,du =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\cos u\right]_\varphi^{2\pi+\varphi} = 0$$

questo è zero perché il coseno è una funzione di periodo 2π quindi $\langle x\rangle = 0$

La posizione media di un corpo che si muove di moto armonico è zero. se avessi calcolato la velocità

$V(t) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ se avessi calcolato il valore medio di V:

$$\langle V\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \omega_0 A\cos(\omega_0 t+\varphi)\,dt = \omega_0\frac{A}{T}\int_0^T \cos(\omega_0 t+\varphi)\,dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_\varphi^{2\pi+\varphi}\cos u\,du = \frac{A}{T}\int_\varphi^{2\pi+\varphi}\cos u\,du = \frac{A}{T}\left[\text{sen}\,u\right]_\varphi^{2\pi+\varphi} \equiv 0$$

La velocità media è nulla, il corpo va tanto verso dx quanto verso sx.

Per sapere quanto vale l'E_k media e l'E_p media, calcoliamo quanto vale il valore medio del sen^2:

$$\langle \text{sen}^2(\omega_0 t+\varphi)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \text{sen}^2(\omega_0 t+\varphi)\,dt =$$ (poniamo $u = \omega_0 t+\varphi$ e quindi $dt = \frac{1}{\omega_0}du$)

$$\langle \text{sen}^2 u\rangle = \frac{1}{\omega_0 T}\int_\varphi^{2\pi+\varphi}\text{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2\pi}\int_\varphi^{2\pi+\varphi}\text{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}$$

Facendo lo stesso calcolo per il valor medio del $\cos^2()$ troviamo esattamente lo stesso risultato,

$\langle\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\rangle = \frac{1}{2}$ quindi è un risultato di una certa importanza che ci dice

$$\begin{cases} A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \\ A\,\text{sen}\,\varphi = A_1\,\text{sen}\,\varphi_1 + A_2\,\text{sen}\,\varphi_2 \end{cases}$$

Questo per l'indipendenza lineare di seno e coseno; dividendo membro a membro: $\operatorname{Tg}\varphi = \dfrac{A_1\,\text{sen}\,\varphi_1 + A_2\,\text{sen}\,\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

Quanto vale l'ampiezza? L'ampiezza è importante perché l'energia è $\frac{1}{2}kA^2$ quindi è importantissimo conoscere l'ampiezza. Eleviamo al quadrato le due precedenti relazioni

$$\begin{cases} A^2\cos^2\varphi = A_1^2\cos^2\varphi_1 + A_2^2\cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 \\ A^2\,\text{sen}^2\varphi = A_1^2\,\text{sen}^2\varphi_1 + A_2^2\,\text{sen}^2\varphi_2 + 2A_1A_2\,\text{sen}\,\varphi_1\cdot\text{sen}\,\varphi_2 \end{cases}$$

sommando membro a membro:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\{\underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \text{sen}\,\varphi_1\cdot\text{sen}\,\varphi_2}_{=\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\}$$

Questo dentro la parentesi è il coseno dell'angolo della differenza.

Quindi l'ampiezza risultante è:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$$

caratteristica importante: a seconda della differenza di fase dei due moti aventi componenti l'ampiezza è contenuta tra un valore max ed un valore minimo.

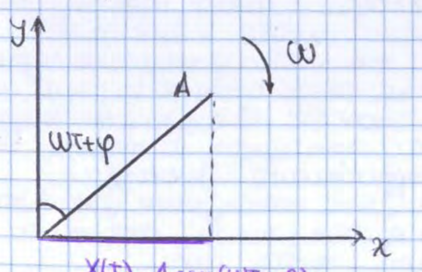
È chiaro che se $(\varphi_1-\varphi_2) = 2n\pi$ il $\cos(\varphi_1-\varphi_2) = 1$ e allora abbiamo

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

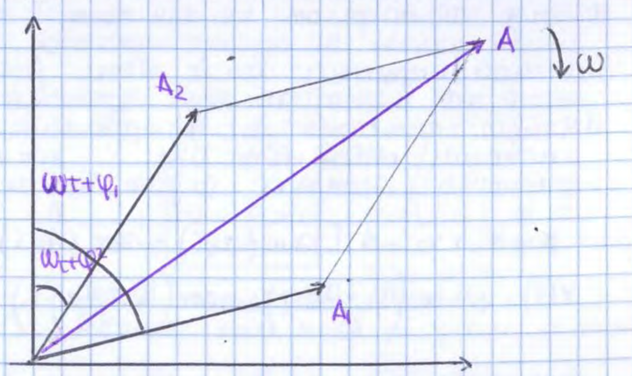
(valore max). Queste sono fenomeni di interferenza COSTRUTTIVA: se ricevo due pressioni che inducono una variazione nel mio timpano, se la diff. di carica tra le perturbazioni è multiplo pari di π allora l'ampiezza è la somma delle ampiezze. Se invece $\varphi_1-\varphi_2 = (2n+1)\pi$ il coseno vale -1 allora A ha il valore minimo:

$$A_m = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$$

e questa si chiama interferenza DISTRUTTIVA, nel caso particolare in cui le ampiezze siano uguali cioè $A_1 = A_2 = a$, l'ampiezza in fase costruttiva è $A_M = 2a$ e l'ampiezza in fase distruttiva è $A_m = 0$. L'energia totale è $E_K = \frac{1}{2}kA^2$, se sono in queste situazione capita $E = \frac{1}{2}k(2a)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ka^2\right) = 4E_1$ (4 energia totale di 1, sto immaginando che i due siano uguali) nell'altro caso invece $E = 0$. L'energia può andare da 4 volte l'energia di una sorgente a zero. Il valor medio tra 4 e 0 è 2 quindi l'energia media è 2 volte l'energia di una sorgente poi ci sono dei punti in cui l'energia è molto grande e altri in cui è zero. Se uno usa questo formalismo che chiamiamo FORMALISMO DEI FASORI il calcolo è + facile ed è anche facilmente generalizzabile. Se ho un vettore che ruota e questo angolo è $\omega t + \varphi$ e questa la sua proiezione è $X(t) = A\ldots$ e questo è un FASORE, se uno usa i fasori il moto armonico è la proiezione di un fasore, di un vettore rotante con velocità angolare ω. Se anziché un vettore ce ne sono due:



$X(t) = A\,\text{sen}(\omega t+\varphi)$



Dato che hanno la stessa pulsazione supponiamo che si muovano con velocità angolare ω, dato che ruotano con la stessa velocità angolare ω, la diff. di fase tra questi due vettori δ è:

$$\delta = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2$$

questa differenza è sempre la stessa, allora posso calcolare il vettore risultante A tra questi due che è:

$$\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2} = A\cdot A \;\left(\text{per sapere quanto è lungo lo moltiplichiamo per se stesso}\right) = (\vec{A_1}+\vec{A_2})\cdot(\vec{A_1}+\vec{A_2})$$

$$A^2 = A_1^2 + \vec{A_1}\cdot\vec{A_2} + \vec{A_2}\cdot\vec{A_1} + A_2^2 \quad \left(\text{il prodotto scalare è commutativo}\right) \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2\vec{A_1}\vec{A_2}$$

Allora la formula diventa $X(\tau) = a(\tau)\,\text{sen}(\omega\tau)$ se la confrontate con $x(\tau) = A\,\text{sen}(\omega\tau + \varphi)$ vedete che la sovrapposizione di due moti armonici semplici per i quali la differenza di fase è ε è uguale a qualcosa che somiglia ad un moto armonico ma l'ampiezza dipende da τ. La funzione $a(\tau)$ è una funzione periodica, perché è legata al $\cos(\varepsilon\tau)$ ed il periodo di questa ampiezza sarà uguale a

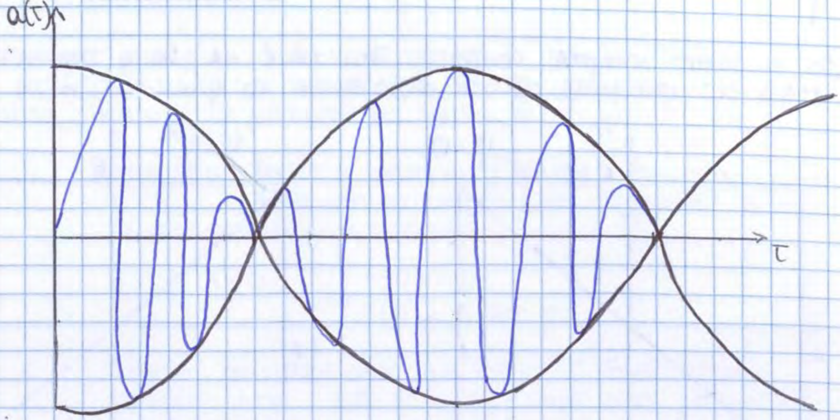
$$T_M = \frac{2\pi}{\varepsilon}$$

se ε è piccolo il periodo è molto grande, per $\tau = 0$ quest'ampiezza vale $2a$.

Se A fosse costante il periodo della funzione $\text{sen}(\omega\tau)$ sarebbe:

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega}$$

dato che $\omega \gg \varepsilon$ questo periodo è molto più piccolo quindi avremo il grafico blu.



Dal grafico vedete che la sovrapposizione di due moti armonici semplici con pulsazioni molto vicine è all'incirca un moto armonico semplice la cui ampiezza è modulata.

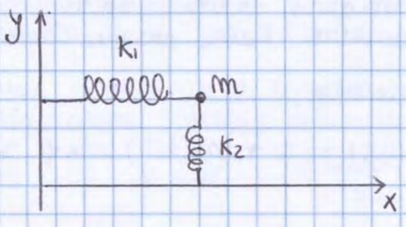
Quando i due moti armonici componenti hanno la stessa ampiezza e sono in fase, il moto complessivo è dato dalla formula che abbiamo visto prima, se la diff. di fase è piccola si può scrivere come $x(\tau) = 2A\cos(\varepsilon\tau)\,\text{sen}(\omega\tau)$, se introduciamo un'ampiezza modulata cioè $a(\tau)$ dove ε è molto piccolo e quindi varia molto lentamente con il tempo e la nostra soluzione si può scrivere così: la somma di due moti armonici semplici di diversa pulsazione dà origine ad un moto armonico semplice con ampiezza modulata e l'ampiezza dipende dalla differenza di pulsazione dei due moti. Un'altra cosa importante è la sovrapposizione di moti armonici lungo direzioni perpendicolari. Immaginiamo di avere un moto armonico lungo l'asse x ed un moto armonico lungo l'asse y che seguono queste leggi:

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega\tau + \varphi_1) \\ y = B\,\text{sen}(\omega\tau + \varphi_2) \end{cases}$$

Abbiamo un corpo di massa m, ad esempio, attirato qui con una molla k_2 e qui con una molla k_1 e quindi in generale ω_1 e ω_2 saranno:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

Questo è un esempio di due moti armonici lungo direzioni $\perp$.



Domanda: come si muove la particella? Qual è il luogo dei punti descritti dalla particella sottoposta a delle forze di quel tipo. Cominciamo a studiare un caso semplice:

SOVRAPPOSIZIONE DI DUE MOTI ARMONICI SEMPLICI LUNGO DIREZIONI $\perp$ CON STESSA ω (i moti armonici hanno la stessa pulsazione). Supponiamo che uno ha fase zero e l'altro φ, quindi $\varphi(\tau)$ sia la differenza di fase tra i due moti.

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega\tau) \\ y = B\,\text{sen}(\omega\tau + \varphi) \end{cases}$$

Qual è il luogo dei punti descritti dalla particella? A, B, φ sono dati. I CASO: se $\varphi = 0$ le equazioni diventano:

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega\tau) \\ y = B\,\text{sen}(\omega\tau) \end{cases}$$

dividendo membro a membro troviamo:

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \longrightarrow \boxed{y = \frac{B}{A}x}$$

Quando due MAS sono in fase il punto rappresentativo della combinazione di questi due moti descrive una retta di questa equazione.

II CASO: se $\varphi = \pi$ cioè se i moti sono in controfase, quindi le equazioni diventano:

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega\tau) \\ y = -B\,\text{sen}(\omega\tau) \end{cases}$$

da cui

$$\frac{y}{x} = -\frac{B}{A} \longrightarrow \boxed{y = -\frac{B}{A}x}$$

Questi due casi sono noti come POLARIZZAZIONE LINEARE. Il punto che rappresenta la sovrapposizione di due moti armonici semplici descrive una retta o dal III al I quadrante o dal II al IV quadrante.

III CASO: se $\varphi = \frac{\pi}{2}$

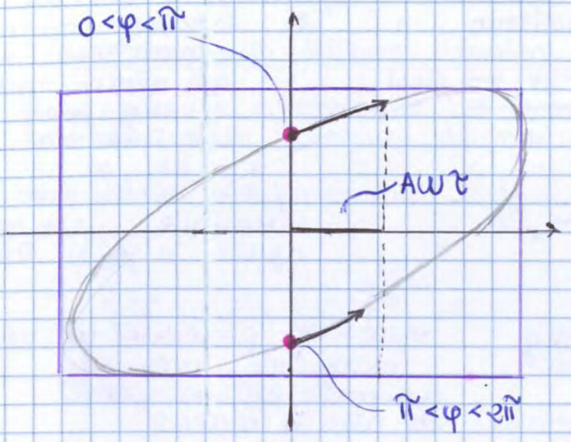
$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega\tau) \\ y = B\cos(\omega\tau) \end{cases}$$

se le scriviamo come:

Se $\varphi = \pi$ $\quad \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 + 2\frac{x}{A}\frac{y}{B} = 0 \longrightarrow \left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)^2 = 0 \longrightarrow y = -\frac{B}{A}x$

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$

La sovrapposizione di due moti armonici semplici lungo direzioni $\perp$ con la stessa pulsazione danno origine ad una particella che si muove ed il luogo dei punti descritto è dato dalla formula incorniciata. Quindi in generale la curva è di questo tipo:



<u>Domanda</u>: Come è percorsa l'ellisse? Prendiamo un φ generico e per $T=0$ il nostro punto è rappresentato da:

$$T=0 \qquad \begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=B\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

Adesso consideriamo un tempo τ molto molto piccolo cioè $\omega\tau \ll 1$. Al tempo zero, la nostra particella ha $x=0$ quindi si può trovare in uno dei due punti fucsia dipende da φ, se il seno di φ è >0 siamo sopra, se è <0 siamo sotto. La $x(\tau)$ vale:

$$x(\tau) = A\,\text{sen}(\omega\tau) \;\left(\begin{matrix}\text{ma se } \tau \text{ è sufficientemente} \\ \text{piccolo il seno è uguale} \\ \text{all'argomento}\end{matrix}\right) \approx A\omega\tau > 0$$

Passato un piccolo tempo, la nostra particella si trova a destra di una quantità $A\omega\tau$. La $y(\tau)$ vale:

$$y(\tau) = B\,\text{sen}(\omega\tau+\varphi) \;\left(\begin{matrix}\text{se } \tau \text{ è molto piccolo lo} \\ \text{si può trascurare} \\ \text{rispetto a } \varphi.\end{matrix}\right) \approx B\,\text{sen}\,\varphi = y(0)$$

La y praticamente non cambia invece la x si sposta verso destra. Come viene percorsa? Ci troviamo nel punto sopra (fucsia) quando $y(0)>0$ cioè quando

$y(0)>0 \rightarrow B\,\text{sen}\,\varphi > 0 \rightarrow 0<\varphi<\pi$ quando la diff. di fase è tra 0 e π il punto è qui e si muove $\nearrow$ in questa direzione, l'ellisse è percorsa in senso orario. Invece se:

$y(0)<0 \rightarrow B\,\text{sen}\,\varphi<0 \rightarrow \pi<\varphi<2\pi$ il punto si muove in questa direzione $\nearrow$.

La sovrapposizione di due moti armonici lungo assi $\perp$ con le stesse pulsazione da origine ad un movimento di tipo ellittico della particella. Queste ellisse degenera in una retta quando la diff di fase è 0 o π (polarizzazione lineare) negli altri casi si parla di polarizzazione ellittica. È chiaro che se $A=B$ l'ellisse degenera in un cerchio e si parla di POLARIZZAZIONE CIRCOLARE. L'ellisse è percorsa in senso orario quando la differenza di fase dei moti componenti è $<$ di π, in senso antiorario quando la differenza di fase è $>$ di π. Se i due moti armonici sono diversi cioè non hanno la stessa pulsazione si ottengono figure particolari che vanno sotto il nome di FIGURE DI LISSAJOU; le figure possono essere anche molto complicate, se il rapporto tra le pulsazioni è un numero irrazionale la curva è aperta quindi non passa mai due volte dallo stesso punto se invece il rapporto tra le ω è un numero razionale la curva è chiusa. Potete considerare le curve:

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega t) \\ y = A\,\text{sen}(2\omega t)\end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega t) \\ y = B\,\text{sen}(2\omega t)\end{cases} \quad \text{scrivo} \quad \text{sen}\,\omega t = \frac{x}{A}, \quad \cos\omega t = \pm\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

Sostituisco nella II: $\left(\frac{y}{B}\right) = \text{sen}(2\omega t) = 2\,\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{y}{B} = 2\frac{x}{A}\left\{\pm\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\right\}$

Quindi $\left(\frac{y}{B}\right)^2 = 4\left(\frac{x}{A}\right)^2\left[1-\left(\frac{x}{A}\right)^2\right]$

Questo per dire che le sovrapposizione di due MAS lungo direzioni $\perp$ può dare cose abbastanza complicate.

$\frac{k}{m}$ pulsazione al quadrato, (proprietà del sistema)

$\frac{\lambda}{m}$ legato alle proprietà dissipative, qui è viscosità ma nel circuito elettrico è la resistenza.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Quindi questa formula viene scritta introducendo altri parametri che sono: $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$ COEFFICIENTE DI DISSIPAZIONE

e poi la pulsazione al quadrato del sistema $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e l'equazione diventa:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Equazione di un sistema elastico dissipativo.

È un'equazione differenziale del II ordine a coefficienti costanti e ha come soluzione $x=0$; si risolve con la risonanza, dicendo: $x =$ una certa costante $c \cdot e^{at}$

$x = c \cdot e^{at}$ e osservando che: $\frac{dx}{dt} = ace^{at}$ e $\frac{d^2x}{dt^2} = a^2ce^{at}$ se sostituiamo tutte queste cose lì dentro allora quello che otteniamo raccogliendo c è:

$$c\left\{a^2 + 2\gamma a + \omega_0^2\right\}e^{at} = 0$$

c deve essere $\neq$ da zero, l'esponenziale è $\neq$ da zero quindi questa vale se e solo se la quantità tra parentesi è uguale a zero.

Troviamo l'equazione:

$$a^2 + 2\gamma a + \omega_0^2 = 0 \longrightarrow \boxed{a = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

La natura di queste soluzioni dipende da quanto importante è il termine dissipativo rispetto al termine elastico. È chiaro che:

1) se $\gamma > \omega_0$, la radice è >0 e le due soluzioni sono reali e negative

$$\begin{cases} a_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ a_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

In questo caso la soluzione rilassa esponenzialmente con il tempo

2) se $\gamma < \omega_0$, troviamo che:

$$\begin{cases} a_1 = -\gamma + i\omega \\ a_2 = -\gamma - i\omega \end{cases}$$

dove $i\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ che viene chiamata PSEUDO-PULSAZIONE

Esiste anche un caso intermedio quando $\gamma = \frac{1}{2}\omega_0$

Ciò che è importante è il II caso, il caso in cui attrito abbastanza piccolo, quindi:

$x(t) = c_1e^{a_1t} + c_2e^{a_2t}$ però se $\gamma < \omega_0$ $\rightarrow x(t) = c_1e^{-\gamma t}e^{i\omega t} + c_2e^{-\gamma t}e^{-i\omega t}$

possiamo anche scriverla:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left\{c_1e^{i\omega t} - c_2e^{-i\omega t}\right\}$$

dato che $e^{i\omega t}$ è un numero complesso c_1 e c_2 sono numeri complessi perché la soluzione deve essere reale, quindi andiamo a calcolare il COMPLESSO CONIUGATO:

$$\bar{x}(t) = e^{-\gamma t}\left\{\bar{c}_1e^{-i\omega t} + \bar{c}_2e^{i\omega t}\right\}$$

Dato che x è reale $x(t) = \bar{x}(t)$, la parte immaginaria deve essere nulla, quindi ho:

$c_1e^{i\omega t} + c_2e^{-i\omega t} = \bar{c}_1e^{-i\omega t} + \bar{c}_2e^{i\omega t}$ portando tutto al I membro rimane:

$(c_1 - \bar{c}_2)e^{i\omega t} + (c_2 - \bar{c}_1)e^{-i\omega t} = 0$

$$\begin{cases} c_1 = \bar{c}_2 \\ c_2 = \bar{c}_1 \end{cases}$$

però $e^{-i\omega t}$ ed $e^{i\omega t}$ sono linearmente indipendenti quindi quella combinazione esiste se e solo se:

La soluzione la scrivo così:

$c_1 = \frac{1}{2}ae^{i\delta}$ dove a e δ sono numeri reali (un numero complesso si può sempre scrivere sotto forma esponenziale)

$c_2 = \frac{1}{2}ae^{-i\delta}$ sostituendo ottengo:

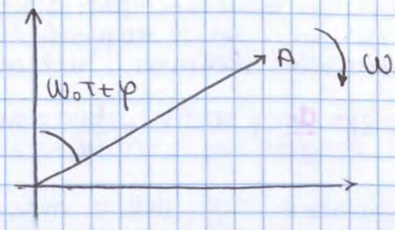
07-05-2014

In un moto armonico semplice non smorzato l'equazione e' $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ dove m e' la massa e k e' la costante elastica. Questa l'abbiamo scritta come:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

e' perfettamente elastico, e' importante perche' i sistemi leggermente perturbati sono definiti da quest'equazione

$x(t) = A\,sen(\omega_0 t + \varphi)$ dove A e φ sono ampiezza e fase iniziale del moto e dipendono dalle condizioni iniziali. E' un moto periodico la cui frequenza e': $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ dove $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$



Posso immaginarmi un fasore di lunghezza A che forma un angolo $\omega_0 t + \varphi$ che ruota con velocita' angolare ω. Questo e' un sistema persistente perche' l'Energia Totale si conserva quindi va bene quando il periodo di conservazione del movimento e' piccolo.
Se osserviamo il sistema per un periodo piu' lungo allora effetti dissipativi fanno si che l'energia si perda, quell'equazione non descrive piu' il sistema in maniera corretta ma occorre aggiungere la forza di attrito e l'attrito che consideriamo e' quello viscoso perche' il sistema perturbato dalla posizione di equilibrio dopo un tempo torni alla posizione di equilibrio iniziale (con l'attrito statico cio' non capiterebbe) quindi abbiamo generalizzato in questo modo:

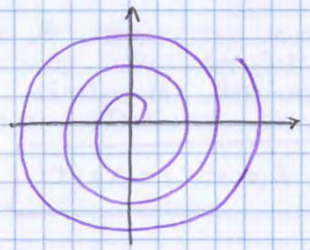
$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt}$ e l'abbiamo poi scritta $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ dove $2\gamma = \frac{\lambda}{m}$

ed $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ($\gamma$ rappresenta la dissipazione) ed in questo caso la soluzione e':

$x(t) = Ae^{-\gamma t}\,sen(\omega t + \varphi)$ dove il moto non e' piu' propriamente periodico perche' al passare del tempo cambia l'ampiezza, e abbiamo visto che

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ chiamata pseudo-pulsazione. L'energia NON si conserva in questo caso e la rapidita' con cui l'energia viene dissipata e':

$\frac{dE}{dt} = -\lambda v^2$. Se vogliamo pensare al fasore dobbiamo pensare ad una cosa così, cioe' la lunghezza del fasore decresce in maniera esponenziale.



In questo caso sono problemi relativi ad un sistema libero, cioe' ho un sistema con o senza dissipazione, prendo questa particella la sposto dalla configurazione di equilibrio e la lascio andare quindi nel I caso agisce solo la forza elastica, nel II caso agisce la forza elastica e viscosa ed il sistema e' libero. Noi sappiamo che se vogliamo avere un moto persistente, che va avanti nel tempo, il sistema deve essere forzato.

Oscillatore forzato

Sul mio sistema altre questi effetti (inerziale, elastico e viscoso) devo aggiungere un altro termine se voglio che questo sistema funzioni. L'equazione sarà:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-kx}_{\text{forza elastica}} \underbrace{-\lambda\frac{dx}{dt}}_{\text{forza viscosa}} + \underbrace{F}_{\text{forza esterna}}$$

Pensiamo al bambino sull'altalena: ogni turno il papa' deve dare una spinta, deve fornire quell'Energia che viene dissipata dalle forze dissipative in modo periodico. Quindi se vogliamo un moto persistente quella forza deve essere applicata dopo un certo periodo. Divido per m:

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$ equazione diff. lineare, del II ordine a coeff. costanti non omogenea quindi $x=0$ non e' piu' soluzione.

Siamo interessati al caso in cui F e' una funzione periodica. La funzione periodica piu' semplice che conosciamo e' il seno e il coseno (Qualunque funzione periodica si puo' immaginare come somma di tanti seni o di tanti coseni o seni e coseni). Quindi siamo interessati a tale equazione, nel caso in cui F e' di questo tipo: dipende dal tempo in questo modo:

$$\boxed{x_p = B\,\mathrm{sen}(\Omega t - \Delta)}$$

Vediamo se sostituendo questa proposta di soluzione che qualcuno chiama **ANSATZ** riesco a soddisfare l'equazione. Calcolo derivata prima e derivata seconda:

$$\frac{dx_p}{dt} = \Omega B \cos(\Omega t - \Delta) \quad ; \quad \frac{d^2x_p}{dt^2} = -\Omega^2 B\,\mathrm{sen}(\Omega t - \Delta)$$

Sostituendo queste relazioni trovo:

$$-\Omega^2 B\,\mathrm{sen}(\Omega t - \Delta) + 2\gamma\Omega B\cos(\Omega t - \Delta) + \omega_0^2 \times B\,\mathrm{sen}(\Omega t - \Delta) = \frac{F_0}{m}\mathrm{sen}(\Omega t)$$

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B\,\mathrm{sen}(\Omega t - \Delta) + 2\gamma\Omega B\cos(\Omega t - \Delta) = \frac{F_0}{m}\mathrm{sen}(\Omega t)$$

Se il nostro ANSATZ è soluzione deve essere valida per ogni tempo t, cioè questa equazione deve essere valida per ogni tempo t, cominciamo ad applicare le formule di addizione e sottrazione del seno/coseno:

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B\,[\underbrace{\mathrm{sen}(\Omega t)\cos\Delta - \cos(\Omega t)\,\mathrm{sen}\,\Delta}_{\mathrm{sen}(\Omega t - \Delta)}] + 2\gamma\Omega B\,[\underbrace{\cos(\Omega t)\cos\Delta + \mathrm{sen}(\Omega t)\,\mathrm{sen}\,\Delta}_{\cos(\Omega t - \Delta)}] = \frac{F_0}{m}\mathrm{sen}(\Omega t) =$$

(fattorizzando $\mathrm{sen}(\Omega t)$)

$$= \{(\omega_0^2 - \Omega^2) B\cos\Delta + 2\gamma\Omega B\,\mathrm{sen}\,\Delta\}\,\mathrm{sen}(\Omega t) + \{-(\omega_0^2 - \Omega^2) B\,\mathrm{sen}\,\Delta + 2\gamma\Omega B\cos\Delta\}\cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m}\mathrm{sen}(\Omega t)$$

Questa deve essere valida in qualsiasi istante di tempo. Dato che seno di (Ωt) e $\cos(\Omega t)$ sono linearmente indipendenti, questa relazione sussiste se e solo se il coefficiente del seno(Ωt) al I membro è = al coeff. del sen (Ωt) al II membro e se il coeff. del $\cos(\Omega t) = 0$. Quindi troviamo: che: la soluzione che abbiamo proposto implica che i coeff. di B e Δ soddisfino questa condizione:

$$\forall t \quad \begin{cases} (\omega_0^2 - \Omega^2) B\cos\Delta + 2\gamma\Omega B\,\mathrm{sen}\,\Delta = \frac{F_0}{m} \\ -(\omega_0^2 - \Omega^2) B\,\mathrm{sen}\,\Delta + 2\gamma\Omega B\cos\Delta = 0 \end{cases}$$

I parametri particolari della soluzione particolare devono soddisfare questa condizione perché la relazione deve essere valida per ogni istante di tempo.

Inoltre B deve essere diverso da zero perché se B fosse zero anche la soluzione particolare sarebbe zero ma questa non è soluzione perché l'eq. non è omogenea; dato che B deve essere ≠ da zero nella II posso semplificarla:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \Omega^2) B\cos\Delta + 2\gamma\Omega B\,\mathrm{sen}\,\Delta = \frac{F_0}{m} \\ -(\omega_0^2 - \Omega^2)\,\mathrm{sen}\,\Delta + 2\gamma\Omega\cos\Delta = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{possiamo scriverla come}$$

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)\,\mathrm{sen}\,\Delta = 2\gamma\Omega\cos\Delta$$

Quindi l'angolo Δ di ritardo nella risposta è dato da questa formula:

$$\mathrm{tg}\,\Delta = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Una volta noti i coefficienti, l'angolo lo calcoliamo subito. Qual è la caratteristica di quest angolo? Quando $\Omega \to 0$ cioè

$\Omega \ll \omega_0$ al denominatore posso trascurare Ω quindi:

- se $\Omega \ll \omega_0$, $\mathrm{tg}\,\Delta \approx \frac{2\gamma}{\omega_0^2}\Omega \implies \Delta \approx 2\frac{\gamma}{\omega_0^2}\Omega$
- se $\Omega \to \omega_0$, $\mathrm{tg}\,\Delta \to \pm\infty \implies \Delta = \frac{\pi}{2}$;
- se $\Omega \gg \omega_0$, $\mathrm{tg}\,\Delta \approx -\frac{2\gamma}{\Omega} \implies \Delta \to \pi$ (tende a zero per valori negativi)

Quando la frequenza è piccola la tg del ritardo è proporzionale ad Ω, ma se $\Omega \to 0$, questa quantità è piccola e la tg è piccola e quindi anche Δ è piccolo. Quando il segnale ext ha una frequenza molto bassa il ritardo nella risposta è proporzionale alla frequenza del motore, alla pulsazione del motore.

Abbiamo una situazione di questo tipo; Δ è sempre contenuto tra 0 e π

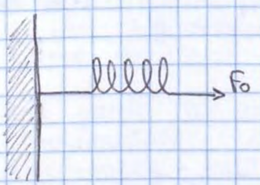
Quando $\Omega \to 0$ significa applichiamo un segnale costante.

Se $\Omega \to 0$ (vuol dire che $\Omega \ll \omega_0$) la formula diventa: (trascurando i termini)

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{F_0}{m\,\omega_0^2} = \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m} \right) = \frac{F_0}{\cancel{m}\frac{k}{\cancel{m}}} = \frac{F_0}{k}$$

RISULTATO CORRETTO: se prendo una molla e applico una forza F_0 costante il suo allungamento vale $F_0 = kx$ quindi

l'allungamento vale $x = \frac{F_0}{k}$ che è proprio quello che ho trovato. Quindi se la forza è costante lo spostamento è proprio questo.



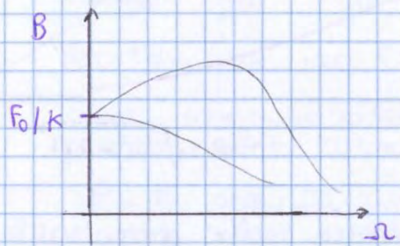
Cosa capita quando la pulsazione tende ad ∞? Se la causa esterna è troppo rapida il sistema non se ne accorge e quindi ci aspettiamo che non ci sia deformazione, il sistema non si accorge di essere eccitato.

Se $\Omega \to \infty$ cioè $\Omega \gg \omega_0$ la formula diventa:

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{\Omega^4}} = \frac{F_0}{m \cdot \Omega^2}$$

e se $\Omega \to \infty$ $B \to 0$ quindi un sistema se viene eccitato con una frequenza troppo grande questo non se ne accorge.

Domanda: Sappiamo che nel grafico $B - \Omega$ se $\Omega = 0$, $B = F_0/k$, ma da qui come si muove, se c'è un massimo allora potremmo eccitare il sistema in un modo + intelligente.



Per il momento introduciamo una nuova grandezza che chiamiamo D:

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{D(\Omega)}} \quad \text{dove } D(\Omega) = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2$$

Se D è monotono B è monotono, se D presenta un max B presenta un minimo e viceversa, per sapere l'andamento di tale funzione che rappresenta l'ampiezza della funzione particolare dobbiamo studiare come cambia D al variare dei parametri del nostro problema. Calcoliamo la derivata di D (dove il parametro è la pulsazione del sistema).

$$\frac{dD}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega}\left\{ (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2 \right\} = -4\Omega\,(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma^2)$$

, la derivata seconda è:

$$\frac{d^2D}{d\Omega^2} = -4(\omega_0^2 - 2\gamma^2) + 12\,\Omega^2$$

Presenta max o minimi?

$$\frac{dD}{d\Omega} = 0 \implies -4\Omega\,(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma^2) = 0$$

e le soluzioni sono:

$$\begin{cases} \Omega = 0 \\ \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \end{cases}$$

Le soluzioni devono essere reali. Se $\omega_0^2 < 2\gamma^2$ esiste solo la soluzione $\Omega = 0$ l'altra non esiste perché sarebbe immaginaria. In questo caso la derivata II vale:

$$\left(\frac{d^2D}{d\Omega^2}\right)_0 = -4(\omega_0^2 - 2\gamma^2) > 0$$

Derivata I $= 0$
Derivata II > 0 $\longrightarrow$ PUNTO DI MINIMO PER D ED È UN MASSIMO PER B

Quindi in questo caso la curva B in funzione di Ω ottengo:

In questo caso la funzione che rappresenta l'ampiezza al variare della pulsazione del motore tende a zero in modo monotono. Questo caso dal punto di vista tecnico non è bello perché significa che abbiamo degli

$$\begin{cases} x(0)=x_0 \\ v(0)=v_0 \end{cases}$$

Domanda: come faccio a trovare quella soluzione che soddisfa le condizione al contorno? La soluzione sarà:

$$x(t)=Ae^{-\gamma t}\,\text{sen}(\omega t+\varphi)+B\,\text{sen}(\Omega t-\Delta)$$

per trovare la soluzione completa devo prendere la x calcolare il valore della funzione al tempo zero fare la derivata e trovare A e B. Quindi la soluzione omogenea che non abbiamo ancora considerato in realtà è molto importante perchè è soltanto per mezzo della soluzione omogenea che riusciamo a soddisfare le condizioni; dopo un po' il sistema va comunque sulla soluzione particolare, se ci va perchè se si spacca prima perchè ci sono condizioni che non riusciamo a soddisfare allora questo capita in questo periodo particolare, quindi in problema tecnico importante, reale, A e B vanno determinate imponendo le condizioni al contorno, ~~diverse condizioni al contorno~~ la soluzione dell'omogenea associata serve per determinare le condizioni al contorno, diverse condizioni al contorno vengono in diverse condizioni che hanno la stessa soluzione particolare.

L'altra parte del problema è: qual è l'energia che riusciamo a trasferire dal nostro motore al sistema? Per semplicità continuiamo a pensare ad un sistema massa-molla-motore ext. Quando su una particella si esercita una forza, la potenza P della forza è uguale in generale ad:

$P=F\cdot V$ nel nostro caso che è un moto unidimensionale: POTENZA = FORZA APPLICATA × VELOCITÀ PARTICELLA

Se vogliamo sapere la potenza trasferita dal motore al sistema, la velocità della particella è:

$$V=\frac{dx}{dt}=\frac{dx_{om}}{dt}+\frac{dx_p}{dt}$$

Quando il tempo diventa molto grande ammesso che il sistema non si sia spaccato prima la velocità è

Per t grande cioè $t\gg\frac{1}{\gamma}$ la velocità tende a $V\to\frac{dx_p}{dt}$

allora dobbiamo calcolare la potenza P usando questa formula:

$$P=F_0\,\text{sen}(\Omega t)\frac{dx_p}{dt}$$

La forza applicata dal motore al sistema, dopo un po' di tempo quando il è finito è dato dal questa formula. Dato che la x_p la conosciamo ed è data dalla formula:

$$X_p=B\,\text{sen}(\Omega t-\Delta)$$

La nostra formula della potenza a regime, passato un certo tempo è: $P=\underbrace{F_0\,\text{sen}(\Omega t)}_{\text{forza applicata}}\ \underbrace{\Omega B\cos(\Omega t-\Delta)}_{\text{velocità particella}}$

Questa è la potenza trasferita dal motore al sistema.

Questa potenza dipende dal tempo. Se vogliamo sapere più in dettaglio cosa capita allora: (provare a studiare un oscillatore armonico non forzato)

$$P=\Omega BF_0\,\text{sen}(\Omega t)\{\cos(\Omega t)\cos\Delta+\text{sen}(\Omega t)\,\text{sen}\,\Delta\}=$$

$$P=\underbrace{\frac{1}{2}\Omega BF_0\cos\Delta\,\text{sen}(2\Omega t)}+\underbrace{\Omega BF_0\,\text{sen}\Delta\,\text{sen}^2(\Omega t)}$$

$\left(\begin{array}{l}\text{sen}\cdot\cos=\frac{1}{2}\\ \text{sen}\cdot\text{sen}=\text{sen}^2\end{array}\right)$

Questo I termine contiene il $\cos\Delta$ che è >0 ... è ... poichè il sen$(2\Omega t)$. Quando il tempo passa il coseno passa per zero, valori positivi, valori negativi, quindi il I termine qualunque sia il valore di Ω è un po' positivo e un po' negativo. Quando è positivo va dalla macchina al sistema, quando è negativo va dal sistema alla macchina e questo termine si chiama POTENZA SCAMBIATA o POTENZA PALLEGGIATA

Questo termine contiene il sen Δ che è sempre positivo ed il sen² idem quindi è sempre >0.

Quello che ci serve è il valor medio di questa quantità calcolato sul valore medio del motore. Il valore medio è 1/periodo · integrale della funzione tra 0 e periodo: quindi:

$$\langle P\rangle=\frac{\Omega BF_0}{2}\,\omega\Delta\,\underbrace{\langle\text{sen}(2\Omega t)\rangle}_{=0\text{ in questo caso}}+\Omega BF_0\,\text{sen}\Delta\,\underbrace{\langle\text{sen}^2(\Omega t)\rangle}_{=1/2}$$

$\Omega_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}$ calcoliamo l'altra soluzione prendendo il segno $-$: $\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\gamma\Omega} = -1 \longrightarrow$

$\omega_0^2 - \Omega^2 = -2\gamma\Omega \longrightarrow \Omega^2 - 2\gamma\Omega - \omega_0^2 = 0 \rightarrow \Omega_2 = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}$ anche qui dato che la frequenza e' >0 prendo il segno $+$.

$\Omega_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}$ Quindi Ω_1 e Ω_2 definiscono la larghezza di banda, ed e' una quantita' importante per le applicazioni per capire se un sistema e' selettivo o non selettivo, viene indicato con

$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\gamma$ Quindi cio' che e' importante e' sapere quanto vale il rapporto tra la frequenza di risonanza e questa. Se il sistema ha una piccola attenuazione la curva e' stretta, piu' il sistema e' smorzato piu' la curva diventa larga. Quindi se $\Delta\Omega$ e' la larghezza di banda allora si introduce un fattore detto FATTORE Q, detto FATTORE DI QUALITA (?) di un sistema oscillante che e' il rapporto fra la frequenza di risonanza e $\Delta\Omega$:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Piu' il moto e' smorzato piu' la curva e' larga ed il sistema e' poco selettivo in frequenza. Se invece il sistema e' piu' selettivo in frequenza 2γ e' molto piu' grande.

Esercizio: Considerare un oscillatore armonico non smorzato, sollecitato da una forza costante e dovete rifare tutto questo calcolo qui e vedrete che saranno + facili i conti.

Considerare un sistema di questo tipo: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \sin(\Omega t)$ e cercare di imporre le condizioni iniziali cioe' trovare la soluzione supponendo che:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

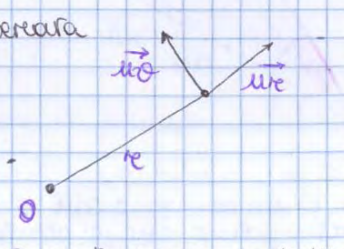
Questo caso corrisponde a $\gamma = 0$ e permette di studiare anche la sovrapposizione dei moti armonici semplici lungo lo stesso asse che danno i battimenti e altre cose...

L'equazione omogenea e' $A \sin \omega_0 t + \dots$ quindi la soluzione particolare e' $B \sin(\Omega t - \Delta)$. Quindi dovete fare seno + seno, ma $\sin(\ ) + \sin(\ )$ e' la sovrapposizione di due moti armonici lungo lo stesso asse.

Gravitazione.

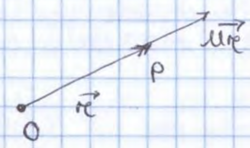
Prima di parlare di gravitazione facciamo un riassunto delle cose che abbiamo visto. Una forza centrale e' del tipo

$\vec{F} = f(r)\,\vec{u_r}$ dove r è la distanza tra la particella considerata ed il punto O chiamato CENTRO DI FORZA.



Questa forza centrale gode di alcune proprieta': se una particella e' sottoposta ad una forza centrale il suo moto e' piano. Se $f(r) > 0$ la forza e' REPULSIVA, se $f(r) < 0$ la forza si chiama ATTRATTIVA. Se una particella e' sottoposta ad una forza centrale il suo moto e' contenuto nel piano. Se calcoliamo il momento angolare rispetto al punto O sara': $\frac{dL_0}{dt} = \vec{M_0}$ se questo e' il vettore posizione rispetto ad O allora il momento rispetto ad O e'

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$



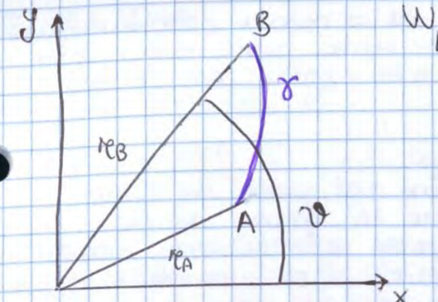
se la forza e' centrale:

$\vec{M_0} = \vec{r} \times \{ f(r)\,\vec{u_r} \} = 0$ ma $\vec{r}$ e $\vec{u_r}$ sono $\parallel$ quindi questo e' $=$ a zero.

Quindi $\frac{dL_0}{dt} = 0$,

$\vec{L_0}$ = costante Se L_0 e' costante vuol dire che non cambia con il tempo ed il valore che aveva al tempo zero ce l'avra' in qualunque momento. Al tempo zero avremo polo O, vettore r posizione e velocita' v_0, vettore posizione e velocita' individuano un piano. Sia $\vec{r_0}$ il vettore posizione al tempo zero e questa la velocita' al tempo zero, quindi il momento angolare e':

$\vec{L_0}(0) = \vec{r} \times (m\vec{v_0})$ e viene verso di noi, e' uscente.



$$W_{A\to B}^{(\gamma)} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \{f(r)\,\vec{u_r}\}\{\vec{u_r}\,dr + \vec{u_\vartheta}\,r\,d\vartheta\} =$$

la forza è centrale, A e B stanno su di un piano.

$\vec{u_r}\cdot\vec{u_r} = 1$, $\vec{u_r}\cdot\vec{u_\vartheta} = 0$, quindi trovo:

$$= \int_A^B f(r)\,dr$$

γ non c'entra quindi è indipendente da γ ⟹ quindi F è conservativa

L'amore per l'oo rinasce nel 1600, (dopo i Greci), avevano inventato il cannocchiale addirittura e quindi si comincia a studiare il moto dei pianeti con i monaci polacchi e gli olandesi. cominciano a raccogliere dati non molto diversi da quelli dei greci ma utilizzano un altro sistema di riferimento, anziché un sistema di riferimento centrato nella Terra cominciano ad usare un sistema di riferimento centrato nel sole e dopo aver osservato per tanto tempo il moto dei pianeti Keplero enuncia 3 leggi; non aveva evidenze sperimentali però c'ha azzeccato:

- I pianeti descrivono orbite ellittiche attorno al sole;
- la velocità areolare dei pianeti è costante;
- Il quadrato del periodo di Rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore:
  $$T^2 \propto a^3$$

Queste leggi hanno portato poi Newton a ricavare la Teoria. Newton arriva alla formula ma ci mette 10-12 anni prima di pubblicarla.

Newton pensa: velocità areolare costante la forza è centrale, poi le orbite ellittiche sono praticamente circolari, l'eccentricità è molto vicina a quella di una traiettoria circolare. Forza centrale, velocità areolare costante allora la forza centripeta

MOTO ELLITTICO ≈ MOTO CIRCOLARE

$$F = m\frac{v^2}{R} = m\,\omega^2 R$$ dove R è il raggio dell'orbita.

Il moto avviene all'incirca su di una traiettoria circolare, se la velocità areolare è $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega$, se questa è costante vuol dire che ω = costante quindi ϑ si muove con velocità angolare costante sulla sua traiettoria.

Se la velocità angolare è costante il periodo di Rivoluzione vale: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ o se volete:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$. se sostituiamo troviamo che se una particella che descrive una traiettoria circolare con velocità areolare costante, la forza centripeta è: $F = m\frac{4\pi^2}{T^2}R$

Se si tiene conto della III legge di Keplero: $T^2 = KR^3$ allora la formula diventa:

$$F = 4\pi^2\frac{m}{KR^3}R = 4\pi^2\frac{m}{K}\cdot\frac{1}{R^2}$$

Newton arriva a questa conclusione: se le leggi di Keplero sono vere, la forza che si esercita su un pianeta dovuta al sole è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza. Se queste 3 leggi sono vere allora la forza F deve essere centrale, c'è una certa costante B e deve essere:

$$\vec{F} = B\cdot\frac{1}{r^2}\,\vec{u_r}$$

Studiando la forza di Coulomb, vi hanno detto che questa è uguale ad: $\vec{F} = \gamma\frac{m_{G_1}\cdot m_{G_2}}{r^2}\,\vec{u_r}$

Quando c'è una forza tra due oggetti c'è sempre la proprietà di un oggetto, la proprietà di un altro oggetto che devono comparire in modo simmetrico e c'è anche una costante. Quindi Newton giunge ad una legge:

$$F = \underset{\text{costante}}{\gamma}\,\frac{\overbrace{m_{G_1}\cdot m_{G_2}}^{\text{proprietà gravitazionale delle particelle}}}{r^2}\,\vec{u_r}$$

Che significato do a questa proprietà gravitazionale? È una massa gravitazionale. abbiamo un'informazione grande: possiamo metterla in relazione con la massa inerziale: la massa gravitazionale è ∝

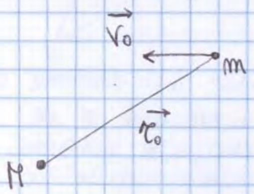
12-05-2014

Se la forza è centrale il momento angolare è costante, il moto avviene su un piano. La forza di Newton è:

$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{u_r}$ e la legge di Coulomb è: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cdot Q}{r^2} \vec{u_r}$ queste formule si riferiscono ad interazioni diverse la prima è un'interazione gravitazionale, la seconda è un'interazione elettrostatica, però i risultati che vedremo per l'interazione gravitazionale saranno valide anche per le interazioni elettriche a patto di variare: $-\gamma m M \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ$. Se il moto avviene su un piano il momento angolare L è:

$\vec{L} = mr^2 \frac{d\vartheta}{dt} \vec{u_z}$ è costante ed in particolare è costante $\boxed{\vec{L} = mr^2 \frac{d\vartheta}{dt}}$

Quando la forza gravitazionale, la forza è conservativa e la sua E_p è: $\boxed{E_p = -\gamma \frac{mM}{r}}$
Il momento angolare si conserva perché abbiamo supposto che l'unica forza presente fosse la forza gravitazionale e questa è conservativa; se la forza è conservativa si conserva anche l'energia. Se la forza è conservativa si conserva l'energia. Quindi in questo caso si conserva momento angolare ed energia, queste due quantità prendono il nome di COSTANTI DEL MOTO o INTEGRALI PRIMI. Il momento angolare si conserva vuol dire: fissate iniziali del movimento, posizione e velocità quella quantità rimane costante (per questo il protone e l'elettrone anche se si attraggono uno non cade sull'altro). Supponiamo di avere due masse protone ed elettrone o massa del Sole e pianeta e la velocità del pianeta sia V_0. Supponiamo inoltre che la massa M sia così grande che praticamente il sole non si muove. Se facciamo una foto all'istante zero se $\vec{r_0}$ è la distanza tra M e m allora $\vec{r_0} \times \vec{v_0}$ da una quantità verso di voi, se la particella finisse sul sole il momento angolare alla fine sarebbe zero perché la distanza M-m sarebbe zero ma il momento angolare non può diventare zero perché si deve conservare, se il momento angolare non è zero la particella non cade sul centro. E allora quando la particella cade sul centro?
Sparo la particella verso il centro, il momento angolare iniziale in quel caso vale zero e quindi in questo caso batte contro il Sole. La conservazione di L ci dice che se $L=0$ il pianeta non va a finire sul sole perché deve rimanere costante. L'energia totale del pianeta che sta ruotando attorno al Sole è:



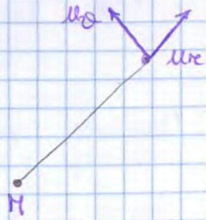
$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{K}{r}$

Ip. $M \gg m$ in modo tale che M si può supporre ferma.

L'E_p sarebbe: $E_p = -\gamma \frac{mM}{r}$ per comodità chiamo: $K = \gamma mM$ quindi $E_p = -\frac{K}{r}$.

Dato che la particella si muove su un piano abbiamo visto che usiamo coordinate polari, la velocità è:

$\vec{V} = \frac{dr}{dt} \vec{u_r} + r \frac{d\vartheta}{dt} \vec{u_\vartheta}$ se $\vec{u_r}$ e $\vec{u_\theta}$ sono i versori radiale e trasverso questi sono tra loro $\perp$ e se faccio il quadrato di V è semplicemente: $V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$



Io so che anche quando il moto va avanti L rimane costante quindi questo $d\vartheta/dt$ guardando l'equazione del momento angolare è:

$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ allora posso scrivere: $V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \cancel{r^2} \frac{L^2}{m^2 r^{\cancel{4}\, 2}} \rightarrow V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$

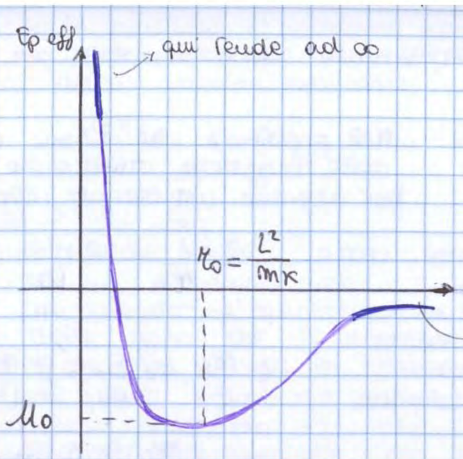
Allora l'E tot del mio sistema è:

$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$ Non compare ϑ!! Ad ogni istante di tempo quale è la distanza tra la particella e il centro (questo ce lo dice questa formula)

Studiando i problemi unidimensionali (non è questo il caso perché il moto avviene su di un piano) abbiamo detto: $E = \frac{1}{2} mv^2 + E_p(x)$ dove E_p dipendeva da x, quindi

$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x)$ Questa è la generica energia per un corpo che si muove di moto unidimensionale.

$$E_{p\,eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

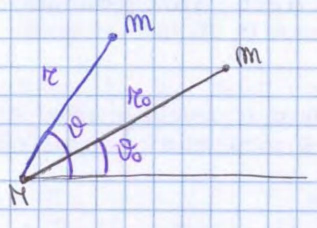


c'è soltanto un punto di estremo e quindi la curva può solo fare così! È chiaro che deve avere un minimo perché deve poi tendere a zero per valori negativi e da qualche punto deve annullarsi. Il minimo è proprio r_0 e la sua ordinata che chiamiamo U_0 vale

$$U_0 = E_{p\,eff}(r = r_0) = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{k}{r_0} = \frac{L^2}{2m\frac{L^4}{m^2k^2}} - \frac{k}{\frac{L^2}{mk}} = \frac{mk^2}{2L^2} - \frac{mk^2}{L^2} = -\frac{mk^2}{2L^2}$$

quindi l'energia che corrisponde al valore di minimo è negativa ed è: $U_0 = -\frac{mk^2}{2L^2}$

Adesso passiamo allo studio del moto. La particella si muove e se andiamo a scrivere la conservazione dell'energia del sistema rotante vediamo che c'è un potenziale effettivo e che il potenziale effettivo è il potenziale vero + un potenziale centrifugo legato al fatto che usiamo un sistema di rif. non inerziale. Abbiamo quindi due equazioni di conservazione L ed E. Supponiamo che qui ci sia il Sole M e qui un pianeta m, dopo un po' di tempo il pianeta cambia posizione (quella in blu è la nuova posizione), $r_0 - \vartheta_0$ è la posizione iniziale, $r - \vartheta$ è la posizione dopo un certo tempo. Per conoscere la TRAIETTORIA ad ogni tempo t devo assegnare la r che dipende dal tempo e la ϑ che dipende dal tempo



$$\begin{cases} r = r(t) \\ \vartheta = \vartheta(t) \end{cases}$$

questa è la traiettoria in forma parametrica. In ogni istante di tempo so quale spazio angolare ha percorso il pianeta e so quanto vale la distanza pianeta - Sole. Se fossi capace di costruire la traiettoria, invece di darla sottoforma parametrica, potrei costruire l'eq. polare cioè ricavare il parametro da una di quelle equazioni e sostituirlo nell'altra cioè trovo $r = r(\vartheta)$ come quando avevamo $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ eliminavamo il tempo, calcolavamo la x la mettevamo nella II ecc... la stessa cosa la facciamo qui: se faccio il calcolo bene trovo che

$r = r(\vartheta)$ e questa sarà l'Equazione della Traiettoria sottoforma polare.

Nell'equazione fondamentale cioè questa:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

ho il quadrato di dr fatto rispetto a dt $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ ma dr/dt se tengo conto che r dipende da ϑ e che poi ϑ dipende da t posso scriverla come:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

ma $\frac{d\vartheta}{dt}$ dall'equazione del momento angolare: $L = mr^2\frac{d\vartheta}{dt} \rightarrow \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$

quindi risulta:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\right\} = \left(\text{se vi ricordate che } \frac{d}{d\vartheta}\left\{\frac{1}{r}\right\} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\vartheta}\right) = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right) \quad ??$$

Allora tenendo conto di questo l'equazione diventa:

$$E = \frac{L^2}{2m}\left\{\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

notiamo che in questa non compare mai r ma sempre $1/r$. Quindi chiamiamo (era) $\eta = \frac{1}{r}$ quindi la nostra equazione diventa

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{d\eta}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}\eta^2 - k\eta$$

come tutte le eq. diff. conviene riscriverla in modo tale che il coeff. della derivata più alta sia uno cioè

Se l'energia è uguale a u_0 la traiettoria è circolare altrimenti quella soluzione non va bene e se la soluzione non va bene dobbiamo guardare la soluzione dell'altra. Quindi se $E \neq u_0$ la traiettoria della nostra particella è data dalla II di queste equazioni. La seconda equazione è:

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \eta = \eta_0$$

la soluzione di questa (oscillatore armonico) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ è

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ e questa non sono proprio uguali perché nella seconda c'è η_0, ma noi abbiamo visto che quando l'equazione non è omogenea la soluzione particolare è dello stesso tipo della causa che la rende non omogenea, qui la causa che la rende non omogenea è costante quindi la soluzione particolare è: $\eta = \omega_0$ e $\omega_0 = 1$ quindi la soluzione di questa equazione è $\eta = \eta_0 - A\cos\theta$

La soluzione di questa equazione $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ è $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ allora quella è l'equazione di un oscillatore armonico con pulsazione = ad 1 eccitato da una forza costante; A non lo conosciamo e per trovarlo prendo questa la metto qui dentro ed impongo che sia sempre verificata, quindi avremo che $d\theta/d\theta$ è

$$\frac{d\eta}{d\theta} = A\sin\theta \qquad \text{sostituendo avremo} \qquad A^2\sin^2\theta + (\eta_0 - A\cos\theta) - 2\eta_0(\eta_0 - A\cos\theta) = -\eta_0^2\frac{E}{u_0}$$

$$A^2\sin^2\theta + \eta_0^2 - 2\eta_0 A\cos\theta + A^2\cos^2\theta - 2\eta_0^2 + 2\eta_0 A\cos\theta = -\eta_0^2\frac{E}{u_0}$$

($\sin^2(\theta) + \cos^2\theta = 1$ e semplifico $2\eta_0 A\cos\theta$)

$$A^2 - \eta_0^2 = -\eta_0^2\frac{E}{u_0} \Rightarrow$$ quindi A, l'ampiezza è uguale a:

$$\boxed{A = \eta_0\sqrt{1 - \frac{E}{u_0}}}$$

davanti la radice ci sarebbe un $\pm$ ma dipende dal segno scelto prima.

Da fare attenzione questa formula nella radice quadrata è proprio uguale a quella che c'era prima nell' η_c, se vi ricordate.

$$\eta_c = \eta_0\left(\sqrt{1 - \dots}\right.$$

quando $E = u_0$, $A = 0$ ed η rimane una costante = ad η_0, quindi se il valore dell'energia è uguale all' E_p efficace la particella descrive una traiettoria circolare. La radice viene anche indicata con questo simbolo.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{u_0}}$$

Notare che u_0 è una quantità negativa quindi se vogliamo possiamo anche scriverla:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{E}{|u_0|}}$$

Domanda: L'energia deve essere positiva? No. Quello che deve essere positivo è l'E_K ma l'energia totale può essere positiva o negativa. La cosa importante è che l'energia totale non sia + bassa dell'E_p. deve essere più grande del minimo dell'E_p. perché l'E_K è sempre > 0 ma l'E tot può essere positiva o negativa!
Energia Totale deve essere + grande del minimo dell'E_p.

ε viene chiamato in genere ECCENTRICITÀ. La soluzione è di questo tipo: $\eta = \frac{1}{r}$ e quindi sappiamo che:

$$\frac{1}{r} = \eta - \eta_0\,\varepsilon\cos\theta = \eta_0(1 - \varepsilon\cos\theta) \qquad \text{oppure} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}(1 - \varepsilon\cos\theta)$$

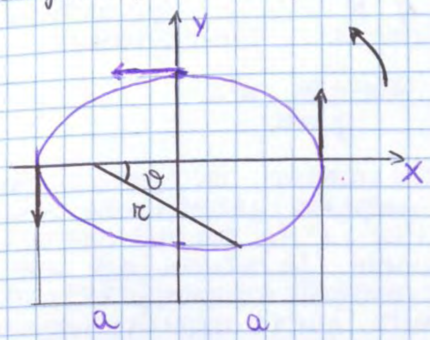
Se vogliamo ricavare $r(\theta)$ che è il raggio della nostra orbita, distanza tra pianeta ed il sole allora troviamo che

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

Questa (in geometria) è l'intersezione di un piano con un cono, ci immaginiamo un cono fatto così e questa curva è data dall'intersezione di un piano con un cono; questa curva ha delle caratteristiche legate al valore di ε:

Se $\varepsilon = 0$ allora $r(\theta) = r_0$ e questa curva degenera in un CERCHIO. Quindi quando l'eccentricità dell'orbita è = a zero cioè quando $E/u_0 = 1$ allora pertanto $E = u_0$ abbiamo che la traiettoria è CIRCOLARE. Se $0 < \varepsilon < 1$ il denominatore non può mai annullarsi perché il $\cos\theta$ è sempre fra -1 e 1 e quindi il denominatore $(1 - \varepsilon\cos\theta)$ è sempre una quantità finita; in questo caso la traiettoria è un' ELLISSE, quindi se $0 < \varepsilon < 1$ allora $r(\theta)$ è tutta al finito e questo vuol dire che $u_0 < E < 0$, l'energia è negativa e la traiettoria è ELLITTICA quindi ci sarà un punto di minimo avvicinamento e di max avvicinamento. Se $\varepsilon = 1$ allora il denominatore va al finito in un punto, in questo la curva è una PARABOLA, quindi vuol dire che $E = 0$; se $\varepsilon > 1$ cioè $E > 0$ la traiettoria è un' IPERBOLE. il sistema non è + legato

Consideriamo il caso di $U_0 < E < 0$, disegniamo l'ellisse nel sistema di riferimento, i due fuochi, in questo caso r e θ saranno questi, il semiasse maggiore è a. I punti estremi vengono detti ABSIDALI; i punti absidali sono quelli dove la velocità è $\perp$ al raggio-vettore. Supponiamo che il corpo ruoti in questo verso. Vediamo che quando $\theta = 0$ le formule ci dice che:



$$r(0) = \frac{r_0}{1-\varepsilon} = r_M$$ distanza massima, per $\theta = \pi$ abbiamo

$$r(\pi) = \frac{r_0}{1+\varepsilon} = r_m$$ distanza minima della particella rispetto un fuoco.

Dal disegno vediamo che: $a = \frac{1}{2}(r_m + r_M) = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{1+\varepsilon} + \frac{r_0}{1-\varepsilon}\right)$ quindi il semiasse maggiore è:

$$a = \frac{r_0 - \varepsilon r_0 + r_0 + \varepsilon r_0}{2(1-\varepsilon)^2} \rightarrow a = \frac{r_0}{1-\varepsilon^2}$$ ma $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{U_0}}$ quindi $a = r_0 \frac{U_0}{E}$

$$1 - \varepsilon^2 = 1 - \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) = \frac{E}{U_0} \rightarrow a = \frac{L^2}{mK}\left(-\frac{mK^2}{2L^2}\right)\cdot\frac{1}{E} \rightarrow a = -\frac{K}{2E} = +\frac{K}{2|E|}$$

l'energia è <0 perché stiamo considerando orbite ellittiche e quindi diventa + con il valore assoluto.

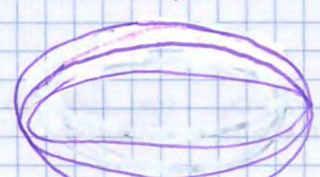
Il semiasse maggiore dipende soltanto dall'energia.

Dimostrare che nel caso delle orbite ellittiche il momento angolare dipende anche dall'eccentricità. Quindi a dipende solo dall'E mentre il momento angolare dipende anche dall'eccentricità.

Noi sappiamo che: $a = \frac{K}{2|E|}$ a è legato ad ε, ad r_0 ed ε^2. $a = \frac{r_0}{1-\varepsilon^2}$

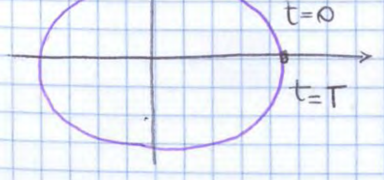
$r_0 = a(1-\varepsilon^2)$ ma r_0 è: $r_0 = \frac{L^2}{mK}$ quindi $\frac{L^2}{mK} = a(1-\varepsilon)^2$ e quindi

$L^2 = mKa(1-\varepsilon^2)$ Il momento angolare dipende anche dall'eccentricità. Questo implica una cosa importante: noi sappiamo che: $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ dove b e a sono semiasse minore e semiasse maggiore dell'ellisse. Se voi avere una a ed una certa eccentricità, b può variare, per un certo a potete avere tante ellissi fissata a, l'energia è fissata. Se voglio conoscere il momento angolare mi serve anche b. Posso avere più ellisse: tutte queste hanno la stessa energia ma cambia il momento angolare.



Problema: Dimostrare che nel caso di orbite ellittiche il periodo di rivoluzione T è proporzionale alla potenza 3/2 del semi-asse maggiore. Per la legge di Keplero $T^2 \propto a^3$ quindi il fatto di trovare questo risultato. La velocità areolare di una particella è data da

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$ Abbiamo un ellisse (a noi interessano orbite ellittiche o circolari perché le altre non danno origine a dei moti periodici quindi non ha senso il periodo di una conica parabolica o iperbolica. Quindi il periodo lo calcoliamo solo per i moti ellittici o circolari. Quindi se la particella al tempo 0 è qui e torna qui al tempo $T=T$ il tempo per fare un giro è T. Dato che la velocità areolare è costante allora dalle formule possiamo scrivere che:



$$dA = \frac{L}{2m}dt$$ integriamo tra il tempo zero ed il tempo T $$\int dA = \int_0^T \frac{L}{2m}dt$$ AREA traiettoria

Quindi l'area dell'ellisse è: A

$A = \frac{L}{2m}T$ ma l'area di un cerchio è πr^2 quella dell'ellisse è πab ($\pi \times$ semiassi) $\pi a \cdot b = \frac{L}{2m}T$ da cui $T = \frac{2m}{L}\pi \cdot a \cdot b$

Calcoliamo la b dalla definizione: $\varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \longrightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2} \longrightarrow b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

$$\vec{G} = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u_i} \qquad \phi = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i}$$

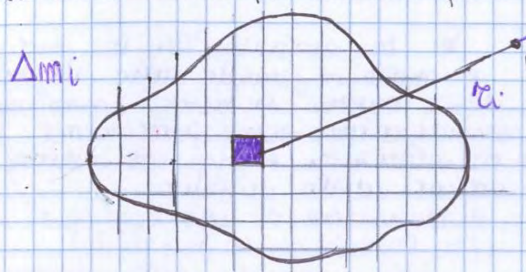
Quindi le formule che abbiamo scritto prima possiamo anche scriverle:

$\vec{F} = m \cdot \vec{G}$ ed $\vec{E_p} = m\phi$ Queste formule ci dice che dato una certa distribuzione di masse potenziali la forza di natura gravitazionale che si esercita sulla massa m è il prodotto della massa m x il campo creato dalla distribuzione di masse potenziali. (G è forza x unità di massa, φ è energia potenziale x unità di massa)

Dato che F è:

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$ se sostituiamo e semplifichiamo la massa troviamo: $\vec{G} = -\vec{\nabla}\phi$

Per la forza gravitazionale vale il principio di sovrapposizione. Quando abbiamo a che fare con un corpo continuo come la Terra è più difficile il calcolo. Supponiamo di avere un corpo continuo posso immaginarlo costruito da tante parti porzioni e quindi lo divido in tanti cubetti, abbiamo una massa Δm_i che sarà ad una certa distanza r_i dalla massa m, applicando la formula dico che F è: (dove N è il numero delle parti in cui ho diviso il corpo).



$$\vec{F} \sim \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m\, m_i}{r_i^2} \vec{u_i}$$

questo posso farlo solo se la massa m_i è molto piccola quindi devo scriverle così:

$$\vec{F} \sim \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m \Delta m_i}{r_i^2} \vec{u_i}$$

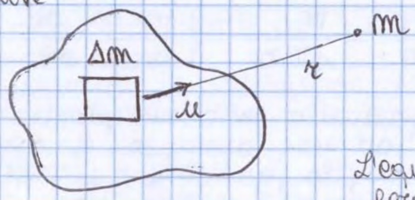
l'approssimazione è tanto migliore quanto più Δm è piccola e quindi N è grande quindi

$$\vec{F} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m \Delta m_i}{r_i^2} \vec{u_i}$$

Quando $N \to \infty$ la variabile i tende ad essere una variabile continua, la sommatoria diventa un integrale e la formula si scrive come:

$$\vec{F} = \int_{corpo} -\gamma \frac{m\, dm}{r^2} \vec{u}$$

dove



Analogamente l'energia potenziale si scrive come:

$$\vec{E_p} = \int_{corpo} -\gamma \frac{m\, dM}{r}$$

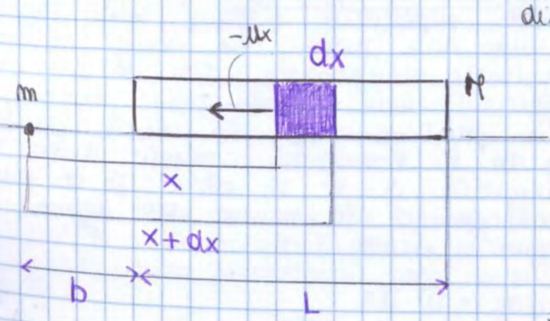
L'equivalente delle formule di G e φ sarà:

$$\vec{G} = \int_{corpo} -\gamma \frac{dM}{r^2} \vec{u} \qquad \phi = \int_{corpo} -\gamma \frac{dM}{r}$$

Tra questi è preferibile il potenziale φ perché è una quantità scalare!

Se il punto dove mettiamo m è esterno, sta fuori dal corpo non c'è nessun problema, se il punto è dentro le formule continuano a valere.

<u>Problema</u>: (Dato nei compiti). Immaginiamo di avere una barra lunga L e di massa M e supponiamo che sia omogenea, supponiamo che ci sia poi una massa m e vogliamo calcolare la forza con cui la barra attrae la massa. La distanza tra l'estremo della barra e la massa è b, se la barra è omogenea introduciamo la DENSITÀ LINEARE DI MASSA:



$$\lambda = \frac{M}{L}$$

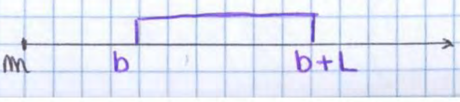
Adesso applichiamo il ragionamento fatto prima: prendiamo la porzione dx che individua x ed x+dx.

La massa dm contenuta in dx è

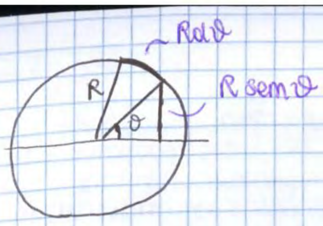
$dm = \lambda\, dx$. Applicando la formula trovo:

$$\vec{F} = \int_{corpo} -\gamma \frac{m\, dM}{x^2} (-\vec{u_x}) = \vec{u_x} \int_{corpo} \gamma \frac{m\, dM}{x^2} =$$

integrare sul corpo vuol dire che x va da b a b+L



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 209 di 296



La circonferenza interna vale:

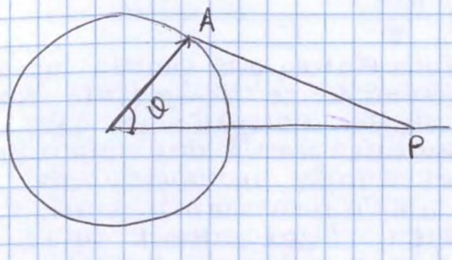
$$dA = 2\pi R \,\mathrm{sen}\theta \cdot R\, d\theta$$ quindi dM

$$dM = \underbrace{\frac{M}{4\pi R^2}}_{\sigma} \underbrace{\cancel{2\pi R^2}\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta}_{dA} = \left(\text{massa contenuta tra i due anelli}\right) = \frac{1}{2} M \,\mathrm{sen}\theta\, d\theta$$

L'energia potenziale della massa contenuta in quella regione tratteggiata, dato che tutti i punti hanno la stessa distanza, vale: $dE_p = -\gamma \frac{m\,dM}{s}$

Sostituendo l'espressione di dM otteniamo: $dE_p = -\frac{1}{2}\gamma m M \frac{\mathrm{sen}\theta\, d\theta}{s}$

Quando cambia θ cambia la posizione del punto A sulla sfera, quindi s dipende da θ; guardando la fig notiamo che:



$OA = R$ $\quad$ r e R sono dati
$AP = s$
$OP = r$

Dalla figura emerge anche che: $\vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OP}$
da cui ricaviamo che: $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$
eleviamo al quadrato e troviamo:

$$\vec{AP}\cdot\vec{AP} = (\vec{OP} - \vec{OA})(\vec{OP} - \vec{OA})$$

$$\vec{AP}^2 = \vec{OP}^2 \underbrace{- \vec{OP}\cdot\vec{OA} - \vec{OA}\cdot\vec{OP}}_{\text{questi due prodotti scalari sono uguali perché il prodotto scalare gode della proprietà commutativa.}} + \vec{OA}^2$$

$$\vec{AP}^2 = \vec{OP}^2 \underbrace{- 2\vec{OP}\cdot\vec{OA}}_{= -2|\vec{OP}|\cdot|\vec{OA}|\cdot\cos\theta} + \vec{OA}^2$$

Quindi otteniamo che: $\boxed{s^2 = r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}$ Questa formula fa vedere che al variare di θ cambia s. Differenziando

$$2s\,ds = 0 + 2rR\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta + 0 \;\rightarrow\; s\,ds = rR\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta \rightarrow \boxed{\mathrm{sen}\theta\, d\theta = \frac{s}{rR}\, ds}$$

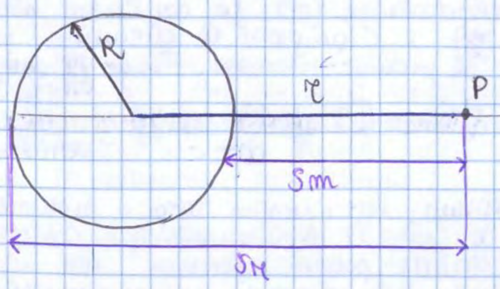
Questa formula la sostituiamo nella formula che abbiamo ottenuto prima e troviamo che:

$$dE_p = -\frac{1}{2}\gamma m M \frac{\cancel{s}}{rR}\, ds \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \Rightarrow \boxed{dE_p = -\frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{rR}\, ds}$$

L'Ep corrisponde a quella scarto tra A ed A'. L'energia potenziale totale vale:

$$E_p = -\frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{rR}(s_M - s_m)$$

cosa sono s_M ed s_m? s è la geometrica distanza tra un punto della sfera ed il punto P. Se P è ext avremo che s_M ed s_m valgono



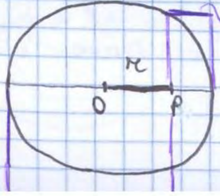
$s_m = r - R$ $\quad$ $s_M = r + R$

I risultato fondamentale: se P è ext ($\Rightarrow R<r$) $s_M = r+R$, $s_m = r-R$ e la loro differenza vale:

$$s_M - s_m = r + R - (r - R) = \cancel{r} + R - \cancel{r} + R = 2R$$

ed in questo caso: $E_p = -\frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{r\cancel{R}} 2\cancel{R} = -\gamma \frac{mM}{r}$

Questo vuol dire che se il punto è fuori l'unica cosa che conta è la distanza r. Il guscio si comporta come una particella puntiforme concentrata nel suo centro geometrico, per i punti esterni! Se P è interno ($\Rightarrow R>r$) allora:



$s_m = R - r$

$s_M = R + r$

$s_M = R + r$ $\quad$ $s_m = R - r$

$$s_M - s_m = R + r - (R - r) = \cancel{R} + r - \cancel{R} + r = 2r$$

$$E_p = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{\cancel{r}R} 2\cancel{r} = \gamma \frac{mM}{R}$$

(E_p è indipendente dalla distanza tra la particella ed il centro)

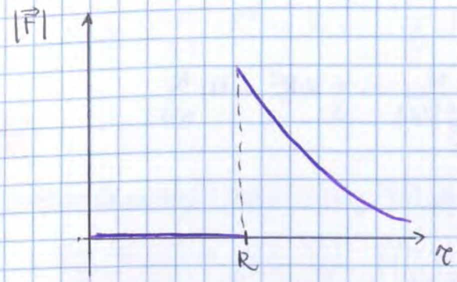
Adesso vedo che:

$$\vec{F}(r>R) = -\vec{u_r}\frac{d}{dr}\left\{-\gamma\frac{mM}{r}\right\} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\vec{u_r}$$

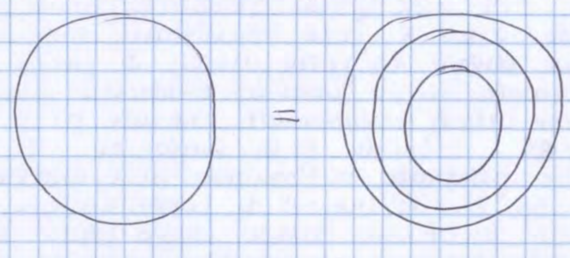
INTERAZIONE FRA PARTICELLE PUNTIFORMI AD UNA CERTA DISTANZA

$$\vec{F}(r<R) = -\vec{u_r}\frac{d}{dr}\left\{-\gamma\frac{mM}{R}\right\} = \left(\begin{matrix}\text{dato che}\\ R=\text{costante}\end{matrix}\right) = 0$$

L'equivalente di questa curva che rappresenta l'Ep è: da 0 ad R è nullo e poi varia come $1/r^2$.



COSA IMPORTANTE: se ho un guscio sferico per quanto riguarda gli effetti gravitazionali si comporta come una particella concentrata nel centro, per quanto riguarda l'interazione gravitazionale all'interno del guscio, l'Ep è costante e la forza è zero. Il fatto che l'Ep sia costante e che la forza sia zero vuol dire che per tutti i punti all'interno del guscio sono punti di EQUILIBRIO INDIFFERENTE perché comunque li sposti non succede nulla quindi tutti i punti all'interno del guscio sferico omogeneo sono punti di equilibrio indifferente. Se invece della forza gravitazionale avessi avuto la forza elettrica, avrei scritto, se ho una bolla di sapone caricata potrei dire le stesse cose. Le cose che diciamo per il campo gravitazionale valgono per il campo elettrostatico. Il prossimo passo da fare è: per un corpo celeste come la terra o come il sole, il corpo ha una certa simmetria sferica ma è pieno. Qual è dal punto di vista gravitazionale l'effetto di una sfera piena? Se la sfera è piena il calcolo fatto deve essere opportunamente generalizzato quindi le ipotesi che facciamo sono: abbiamo una SFERA OMOGENEA PIENA, una cipolla ad esempio è fatta da un guscio poi un altro guscio poi un altro ancora e così via, cioè una cipolla è una sfera piena fatta da tanti gusci e ragioniamo in termini di forze o di Ep. Consideriamo la sfera e la immagino così formata da un'infinità di gusci che vanno da $0 < R_K < R$ (R_K sono i diversi raggi)



Immagino la sfera come successione di gusci che hanno raggio che va da 0 a R e K è il numero di gusci. A questo sistema posso applicare il principio di sovrapposizione degli effetti: nelle forze di natura gravitazionale l'effetto complessivo è dato dalla somma degli effetti di ogni singola particella.

1° CASO: Prendiamo un r, distanza dal punto considerato al centro della sfera più grande di R. L'Ep in quel punto è: (somma energie potenziali legate al singolo guscio)

$$Ep(r) = \sum_{i=1}^{N} Ep,_K(r) = $$

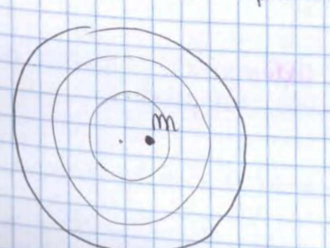
$$= \sum_{i=1}^{N} -\gamma\frac{mM_K}{r} = -\gamma\frac{m}{r}\sum_{i=1}^{N} M_K$$

il punto r è al di fuori di tutti i gusci, ogni guscio da un contributo che è $-\gamma$ — perché ogni guscio si comporta come se fosse concentrato nel suo centro, togliamo dalla sommatoria ciò che non dipende da K; dove M_K è la massa del singolo guscio ma la somma delle masse dei singoli gusci vi da la massa della sfera, quindi trovo:

$$Ep(r) = -\gamma\frac{mM}{r}$$

Per una sfera omogenea, per tutti i punti ext lei si comporta, dal punto di vista gravitazionale come se fosse concentrata nel suo centro geometrico. Quando abbiamo cercato un rapporto tra massa inerziale e gravitazionale, abbiamo detto: immaginiamo che la terra si comporti come una massa M concentrata nel suo centro geometrico. adesso lo abbiamo dimostrato.

2° CASO: Supponiamo che $r < R$, in questo caso la situazione è: qui ho una mia sfera, qui ho una mia particella e tutti i gusci, se la particella è dentro ed il numero di gusci va da zero ad N, ci sarà un certo numero in cui la particella passa per quel punto. Il nostro r coinciderà con un certo numero intero che è quello del guscio che passa per quel punto; chiamiamo questo numero intero i. Quindi i è un numero tale che $r = R_i$ quindi si avrà che per alcuni punti il punto i è ext e per tutti i gusci:



$\forall K < i$ il nostro punto è esterno

$\forall K > i$ il punto è interno

$E_p(r<R) = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R^3} r^2 + k$ (e la chiamo $E_{p\,int}(r)$)

Se l'Energia potenziale deve essere una funzione continua di R passando da dentro a fuori dovrò imporre che il limite destro e sinistro sia lo stesso, devo dire che la costante k viene determinata in modo che:

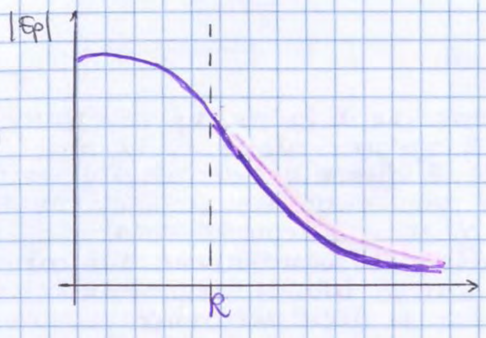
$E_{p\,int}(R) = E_{p\,ext}(R)$ deve essere continua all'interfaccia! E questa condizione mi dà:

$\frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R^3} R^2 + k = -\gamma \frac{mM}{R}$ Quindi k viene determinato in modo tale che la funzione sia continua; e risulta che:

$$\boxed{k = -\frac{3}{2}\gamma \frac{mM}{R}}$$

Quindi avrò che: $E_p(r<R) = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R^3} r^2 - \frac{3}{2}\gamma \frac{mM}{R}$ che posso anche scrivere così:

$$E_p(r<R) = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R}\left\{\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\right\}$$



Vedere che il modulo dell'Ep all'inizio è così e poi va più come una parabola come uno/r. La curva è continua la sua derivata prima è continua perché anche la forza è continua all'interfaccia.

Abbiamo visto che F è:

$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\vec{u_r}$ che nel caso elettrico diventa $\vec{F} = k\frac{q \cdot Q}{r^2}\vec{u_r}$

dove $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ Poi abbiamo visto che: $E_p = -\gamma\frac{mM}{r}$

che nel caso elettrostatico è $E_p = k\frac{qQ}{r}$. Abbiamo visto poi le relazioni per una sfera:

$\vec{F}(r>R) = -\gamma\frac{mM}{r^2}\vec{u_r}$, nel caso elettrostatico $\vec{F}(r>R) = k\frac{qQ}{r^2}\vec{u_r}$

$\vec{F}(r<R) = -\gamma\frac{mM}{R^3} r\,\vec{u_r}$ e la forza nel caso elettrostatico è: $\vec{F}(r<R) = k\frac{Qq}{R^3} r\,\vec{u_r}$

Queste sono ANALOGIE. Adesso abbandoniamo per un momento il campo gravitazionale, ed introduciamo un concetto molto importante:

L'Energia Propria. In generale si chiama energia propria l'energia necessaria per costruire un sistema.

Supponiamo di voler costruire un sistema con 27 protoni, voglio mettere qui una carica q_1, qui...

Queste cariche all'inizio sono all'∞, questo a fianco è quello che vogliamo costruire; io prendo la carica q_1 e la metto qui per fare questo non ho dovuto fare nessun lavoro perché su quella carica non si esercitava nessuna forza, non c'è nessuna forza né attrattiva né repulsiva quindi non viene fatto nessun lavoro, porto la carica q_1 ed il lavoro che faccio dal punto all'∞ a qui è zero. Adesso prendo la carica q_2 e la metto qui; la carica q_1 c'è già quindi eserciterà un'azione elettrica sulle altre cariche che io porto. Se voglio mettere lì la carica q_2 devo esercitare una forza ext F ed il lavoro che devo fare è:

$W_2 = \int_A^B \vec{F}_{ext}\, dr$ integrale, dall'∞, da dove sono partito diciamo A, a questo punto che chiamiamo B, della forza ext che devo applicare in dr. (Definizione di lavoro) se mi accontento di spostare la carica senza variare la sua velocità, la forza che devo applicare deve essere uguale ed opposta a quella con cui la carica viene respinta; se voglio spostare la carica in modo co-amente lento la forza ext (immaginiamo che le cariche siano dello stesso segno) allora la forza che io devo applicare è uguale ed opposta al campo creato dalla carica.

$dE_p = K\frac{Q_c \cdot dQ}{r}$

energia potenziale che spetta a questo guscio sferico quando viene aggiunto sulla parte centrale di raggio r

perché per gli effetti gravitazionali o elettrici tutto avviene come se la carica Q_c fosse concentrata nel suo centro e la carica dQ fosse ad una distanza r dalla distanza che esiste già. L'energia potenziale del guscio nel campo elettrico creato dalla sfera di raggio r. Detto in un altro modo questa dE_p è l'energia propria che devo spendere per aggiungere questo nuovo guscio sferico. Sostituiamo e troviamo che:

$$dE_p = KQ\frac{r^3}{R^3} \cdot 3\frac{Q}{R^3}\frac{r^2\,dr}{r} \rightarrow \boxed{dE_p = 3K\frac{Q^2}{R^6}r^4\,dr}$$

energia potenziale che spetta al guscio sferico di raggio dr che ho aggiunto alla sfera che c'era già. E coincide con l'energia propria che dobbiamo spendere, l'energia propria del guscio dr.

Per calcolare l'E_p propria integro questa quantità per r che va da 0 ad R

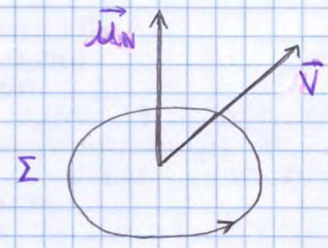
$$E_p = \int_0^R 3K\frac{Q^2}{R^6}r^4\,dr = 3K\frac{Q^2}{R^6}\cdot\frac{1}{5}R^5$$

$$\boxed{E_p = \frac{3}{5}K\frac{Q^2}{R}}$$

Per calcolare l'energia propria complessiva dobbiamo integrare quella quantità e troviamo l'energia necessaria per costruire tutta la sfera. Adesso definiamo un nuovo concetto.

Flusso di un vettore

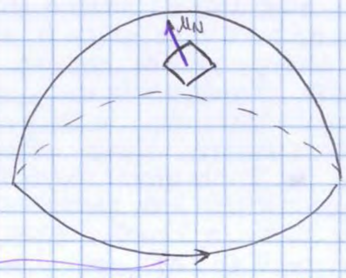
Dato un vettore costante V e data una superficie piana Σ dotata di una normale u_N (u_N la prendiamo dopo avere preso un verso positivo; preso questo come verso positivo, la normale è quella che si ottiene con la regola della mano dx) definiamo come flusso del vettore attraverso quella superficie il prodotto:



$$\varphi = \vec{V}\cdot\vec{u_N}\cdot\Sigma$$

Il flusso è una quantità scalare. Le limitazioni sono 2: $\vec{V}$ deve essere costante ed Σ deve essere piana determinato da un versore u_N che coincide con la sua normale.

Ovviamente questo lo possiamo generalizzare cioè supponiamo che V non sia costante e che Σ non sia piana. In generale: se $\vec{V}$ dipende dal punto e Σ non è piana, allora se questa è la nostra superficie la dividiamo in piccole porzioni, molto piccole all'incirca piane e dove la normale è ben definita e se prendo la superficie sufficientemente piccola, anche se il vettore è funzione del posto, in quella piccola superficie è all'incirca costante quindi:



anche qui definiamo un verso positivo

$$d\varphi = \vec{V}\cdot\vec{u_N}\,d\Sigma$$

$\vec{V}$ e $\vec{u_N}$ in quella precisa porzione

e noi chiamiamo flusso totale attraverso quella superficie finita:

$$\varphi = \iint_\Sigma \vec{V}\cdot\vec{u_N}\,d\Sigma$$

mettiamo due simboli perché integriamo su una superficie

Domanda: se la superficie è chiusa posso calcolare il flusso? Sì però in quel caso la normale viene definita in questo modo: quando la superficie è chiusa la normale è sempre dall'interno verso l'ext. (per ricordarci che è chiuso mettiamo un cerchio sul simbolo di integrale)

u_N è sempre verso fuori nel caso di una superficie chiusa:

$$\varphi_\Sigma = \oiint \vec{V}\cdot\vec{u_N}\,d\Sigma$$

bisogna sempre dire attraverso quale superficie.

L'angolo solido non dipende da r ma solo da ϑ e da φ. Domanda: quanto vale l'angolo solido di tutto lo spazio? Dobbiamo integrare tra 0 e 2π quindi Ω totale e':

$$\Omega_T = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\left[\cos\vartheta\right]_0^{\pi} \cdot 2\pi = -(-1-1) \cdot 2\pi = 4\pi.$$

Quindi l'angolo solido totale e' 4π.

Adesso possiamo dimostrare che il flusso del vettore campo elettrico e' zero se la carica e' fuori da una superficie chiusa ed equale al valore della carica diviso ε_0 $\left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\right)$ se la carica e' dentro. Parlando di gravitazione abbiamo detto che la forza di più cariche F e' uguale alla massa m per il vettore campo gravitazionale e nel caso del campo elettrico abbiamo che:

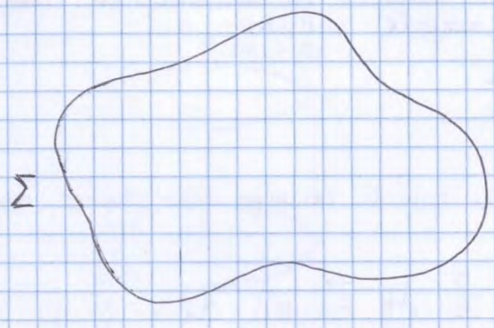
$$\vec{F} = m\vec{G} \longrightarrow F = q\underbrace{\vec{E}}_{\text{campo elettrostatico}}$$

Domanda: Quanto vale il campo elettrostatico legato alla carica Q?

La forza e': $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec{u_r} = q\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}\right\}$ Quindi il campo creato da una carica sola e':

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}}$$

Cominciamo a calcolare il flusso del vettore campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa. Data la superficie chiusa Σ una carica Q in essa contenuta, Σ e' dotata in ogni punto della sua normale, $\vec{u_N}$ e' la normale locale in questo punto dove la superficie vale $d\Sigma$. Quanto vale il flusso del vettore campo elettrost.?



$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u_N}\, d\Sigma = \oiint_\Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}\,\vec{u_N}\, d\Sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \oiint_\Sigma \vec{u_r}\cdot\vec{u_N}\frac{d\Sigma}{r^2}$$

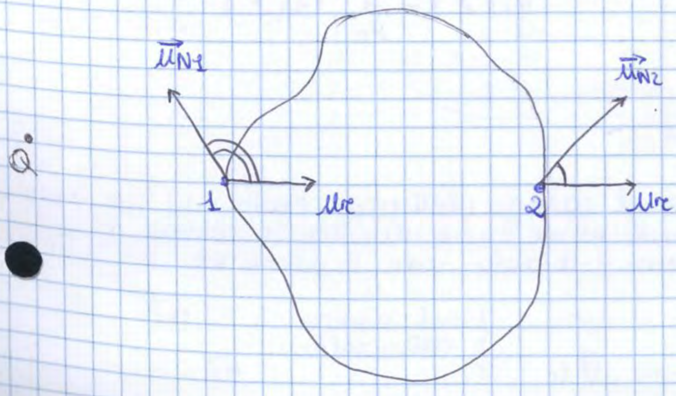
$\vec{u_r}\cdot\vec{u_N}\, d\vec{\Sigma}$ e' l'angolo solido della porzione delimitata da quella superficie. Quindi:

$$\Phi_\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \underbrace{\oiint d\Omega}_{\text{questo e' l'integrale su tutto lo spazio dell'angolo solido che vale } 4\pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\, 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Risultato fondamentale: Il flusso del vettore campo elettrico attraverso una superficie chiusa e': Q/ε_0 indipendentemente da dove si trova la carica che ne generato il campo!!!

Prima parte del teorema di Gauss: "Il flusso del vettore campo elettrico attraverso una superficie e' uguale a Q/ε_0 indipendentemente dalla posizione della carica all'interno della superficie."

Cosa capita se la carica e' esterna? Supponiamo di avere sempre una superficie chiusa e di avere una carica che sta fuori. Scriviamo il versore che nasce dalla superficie 1 e u_r il versore che nasce dalla superficie 2 che e' quello di uscita, mentre u_r e' sempre dello stesso tipo, u_N dipende, perche' in 1 e' così e in due sarà così perche' e' sempre verso fuori. Tra u_{N2} e u_r l'angolo e' acuto il coseno e' positivo nell'altro e' ottuso ed il coseno e' negativo.

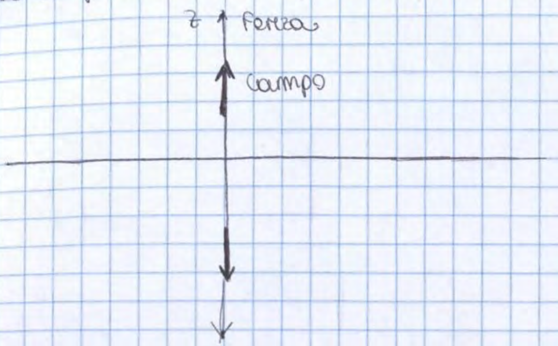


① $\cos(\ ) < 0$

② $\cos(\ ) > 0$

Calcoliamo il flusso attraverso le due superfici 1 e 2:

Immaginiamo che questo piano coincida con il piano xy (uniformemente carico) se il piano è uniformemente carico vuol dire che la densità di carica è la stessa in ogni punto. Il campo potrebbe essere inclinato? No perché se lo fosse la parte dx avrebbe delle proprietà diverse dalla parte sx quindi il campo deve essere verticale. Se il piano è ∞ la forza orizzontale si deve bilanciare, l'unica forza che ci può essere la forza di attrazione o di repulsione quindi il campo non può avere componente orizzontale. Se la forza è repulsiva dobbiamo avere in alto una cosa così ↑ ed così ↓, se il piano respinge una carica positiva sopra la respinge anche sotto. Inoltre se chiamiamo quest asse z

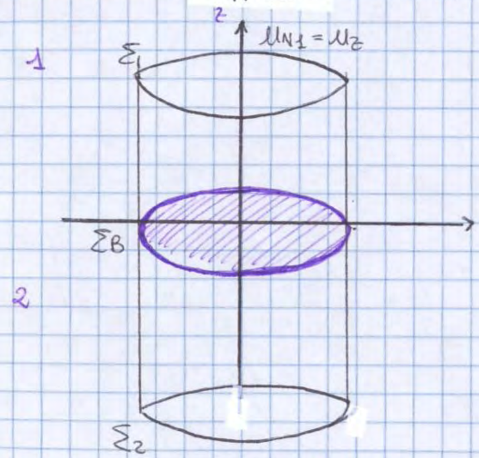


il campo può dipendere solo da z e non da x o da y perché lungo x e y la situazione è ∞. Quindi siamo arrivati alla conclusione che il piano che vorremmo conoscere dipende da z ed è diretto solo lungo u_z

$\vec{E} = \vec{E}(z)\,\vec{u_z}$ $\qquad \vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$ $\qquad$ Sopra è positivo sopra è negativo.

Se il piano è ∞ il campo può avere solo una componente normale al piano ed il campo è una funzione dispari.

Quando si è in questa situazione si costruisce una superficie che viene detta SUPERFICIE CHIUSA GAUSSIANA, costruisco cioè una superficie che abbia la simmetria del problema, è un po' sopra e un po' sotto (non cambia nulla, sotto=2, sopra=1) e andiamo ad applicare il teorema di Gauss



$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{u_N}\, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(\Sigma)$$

Se chiamo la superficie tratteggiata Σ_B allora la carica contenuta in Σ è Σ_B · la densità di carica:

$$Q(\Sigma) = \Sigma_B \cdot \sigma$$

Il flusso lo calcolo in questo modo:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\vec{u_{N_1}}\, d\Sigma_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\vec{u_{N_2}}\, d\Sigma_2 + \underbrace{\iint_{\Sigma_L} \vec{E}\cdot\vec{u_{N_L}}\, d\Sigma_L}_{\text{integrale sulla sup. laterale}} =$$

Sulla superficie laterale la normale, la normale è ⊥ ad u_z quindi: per ogni punto P che appartiene a Σ_L

$u_{N_L} \perp u_z$ $\quad$ però dato che $\vec{E} = E(z)\,\vec{u_z}$ allora il prodotto scalare:

$\vec{E}\cdot\vec{u_{N_L}} = 0$ $\quad$ quindi il contributo al flusso della superficie laterale è nullo. quindi il III di questi addendi è zero. Andiamo a calcolare i primi due:

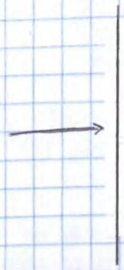
(1) $\displaystyle\iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot u_{N1}\, d\Sigma = \iint_{\Sigma_1} E(z)\,\underbrace{\vec{u_z}\cdot u_z}_{=1}\, d\Sigma$ $\quad$ l'integrale di $d\Sigma = \Sigma_B$ $\quad = E z\, \Sigma_B$

questo è uguale perché integriamo su un piano che ha lo stesso valore di z;

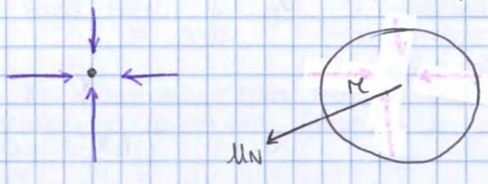
(2) $\displaystyle\iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\vec{u_{N_2}}\, d\Sigma = \iint_{\Sigma_2} E(-z)\,\vec{u_z}\cdot(-\vec{u_z})\, dz = -E(-z)\,\Sigma_B$

La normale sulla superficie 2, vale $-u_z$ $\qquad$ Siccome il cilindro è retto $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_B$

Quanto vale il campo elettrico di un filo uniformemente carico?
Prendiamo un filo ∞-amente lungo e ovviamente tale filo non può essere inclinato altrimenti il sopra ha proprietà diverse dal sotto ma se il filo è uniformemente carico ed è ∞ perché se il filo fosse inclinato da una parte ci sarebbe un ammasso di cariche. ma se il filo è omogeneo tutte le cariche devono essere distribuite allo stesso modo; le componenti del campo possono solo essere ⊥ al filo.



visto da sopra se al centro abbiamo il filo che esce dal quaderno il campo può solo avere componenti così:

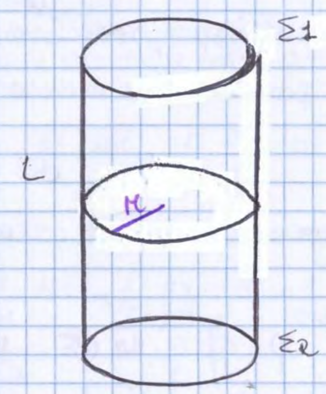


Se prendo il filo e poi un punto a 10 cm ci sarà una certa forza, se mi metto a 10 cm ma da un'altra parte mi aspetto che la forza in modulo sia la stessa, il modulo del campo dipende solo dalla distanza che c'è tra il filo ed il punto considerato. In altre parole: il campo che sto cercando deve avere lo stesso valore su una circonferenza di raggio r, quindi il campo E avrà un modulo che dipende solo da r ed è diretto come u_r cioè ⊥ al filo.

$$\vec{E} = \vec{E}(r)\,\vec{u_r}$$

(il versore non è il versore radiale di prima ma è un versore sempre ⊥ al filo.)

Qual è la superficie gaussiana che posso costruire per questo problema, che tenga conto di queste simmetrie?
Sarà un cilindro coassiale, con una superficie $\Sigma_1 = \Sigma_2$ ed una superficie laterale e la distanza r è la stessa. Se λ è la DENSITÀ LINEARE DI CARICA (il cilindro ha lunghezza L) applico la legge di Gauss: "Il flusso del campo elettrico attraverso quella superficie è = alla carica contenuta diviso ε_0
la carica contenuta nel cilindro sarà:



$$Q_{\substack{\text{contenuta}\\ \text{cilindro}}} = \lambda L$$

Quindi per la legge di Gauss il flusso φ del campo E attraverso la superficie sarà:

$$\varphi_\Sigma(E) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi = \oiint \vec{E}\,\vec{u_N} \cdot d\Sigma = \underbrace{\iint_{\Sigma_1} \vec{E}\,\vec{u_{N1}}\,d\Sigma}_{\text{SUP. SUPERIORE}} + \underbrace{\iint_{\Sigma_2} \vec{E}\,\vec{u_{N2}}\,d\Sigma}_{\text{SUP. INFERIORE}} + \underbrace{\iint_{\Sigma_L} \vec{E}\,\vec{u_{NL}}\,d\Sigma}_{\text{SUP. LATERALE}} =$$

Il I addendo è zero perché il campo è diretto lungo u_r ed u_r e u_N sono ⊥
quindi il I ed il II addendo sono zero. perché $\vec{u_{N1}} = \vec{u_z}$ ed $\vec{u_{N2}} = -\vec{u_z}$ però il campo è ⊥ all'asse quindi fanno zero!

Rimane solo l'ultimo termine dove $\vec{u_{NL}} = \vec{u_r}$, il campo E è costante sulla superficie del cilindro quindi rimane:
$u_r \cdot u_r = 1$

$$\varphi = E(r)\,\underbrace{2\pi r L}_{\text{superficie laterale}}$$

Eguagliando i due contributi otteniamo:

$$\varphi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} = 2\pi r L E \qquad \text{da cui} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Se tengo conto di questo trovo che: $= \oint\!\!\oint_{\Sigma ext} E(r)\, \underbrace{\vec{u_r} \cdot \vec{u_r}}_{1}\, d\Sigma =$ (dato che la sup. gaussiana considerata è una sfera il valore di $E(r)$ è = per tutti quindi avremo:

$= E(r) \oint\!\!\oint_{\Sigma ext} d\Sigma =$ (la superficie di una sfera è $4\pi r^2$) $= E(r)\, 4\pi r^2$ — sostituendo tale risultato nella relazione precedente trovo che:

• Se $r > R$, $4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}$ è esattamente la stessa relazione come se la particella fosse tutta contenuta nel suo centro.

• Se $r < R$ Tutto ciò che abbiamo detto vale ancora solo che avremo che Σ int avremo che la carica $q(\Sigma int) = 0$, facendo lo stesso calcolo di prima troviamo:

$$\varphi_{\Sigma int}(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_{\Sigma int} \vec{E} \cdot \vec{u_r}\, d\Sigma = \oint\!\!\oint_{\Sigma int} \vec{E} \cdot \vec{u_r} \cdot \vec{u_r}\, d\Sigma = \vec{E}(r) \oint\!\!\oint_{\Sigma int} d\Sigma = E(r)\, 4\pi r^2$$

Andiamo a scrivere la legge di Gauss però dobbiamo porre $Q = 0$ perchè non c'è carica all'interno, $Q = 0$ quindi $E(r) = 0$. Se $r < R \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 0 \Rightarrow E(r) = 0$
Quindi abbiamo trovato che:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

Il potenziale elettrico ed il campo sono legati sempre da questa formula

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Se il campo E è di questa forma $\vec{E} = E(r)\vec{u_r}$ allora il potenziale che è la derivata di questo dovrebbe dipendere solo da r cioè $V = V(r)$ facciamo finta per il momento di non saperlo. Quando usiamo coordinate polari sferiche, il gradiente si scrive così:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\vec{u_\vartheta} - \frac{1}{r \cdot \operatorname{sen}\vartheta}\frac{dV}{\partial \vartheta}\vec{u_\varphi}$$

I CASO: La nostra equazione diventa

$$-\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\vec{u_\vartheta} - \frac{1}{r \operatorname{sen}\vartheta}\frac{dV}{d\varphi}\vec{u_\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}$$

questa è un'eq. vettoriale quindi la componente r è = alla componente r, così anche per la componente ϑ e la componente φ.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0 \qquad -\frac{1}{r \operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

Da queste ultime due relazioni deduciamo che V non dipende da φ né da ϑ. Quindi $V = V(r)$ e la derivata parziale è una derivata totale.

Quindi abbiamo queste due equazioni:

$$\begin{cases} -\frac{\partial V_{ext}}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} & r > R \\ -\frac{\partial V_{int}}{\partial r} = 0 & r < R \end{cases}$$

Dalla II deduciamo che se la sua derivata è zero, V all'interno è costante, chiamiamo questa costante β.

$$V_{int}(r) = \beta$$

Dall'altra equazione ricaviamo che: $\frac{dV_{ext}}{dr} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \Rightarrow dV_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{dr}{r^2}$

e quindi troviamo che: $V_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \gamma$ (γ è una costante)

La costante additiva in generale si pone = a zero quando il corpo ha una superficie infinita (?); quindi γ lo poniamo = a zero

$\gamma = 0$ in modo tale che $V(\infty) = 0$

Abbiamo che:

$$\begin{cases} V_{ext}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \\ V_{int}(r) = \beta \end{cases}$$

Per determinare β impongo la condizione di continuità cioè V_{int} per R deve essere uguale a V_{ext} per R.

$$= \left\{ \vec{F}(P_1) \cdot -\vec{u_y} + \vec{F}(P_2) \cdot \vec{u_y} \right\} \Delta x \cdot \Delta z$$

il punto P_1 ha coordinate $P_1\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)$ ed il punto P_2 ha coordinate $P_2\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right)$

Quando un vettore lo moltiplico per u_y ottengo la componente di quel vettore lungo y. Quindi:

$$\left\{ -F_y\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) + F_y\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \right\} \Delta x \, \Delta z$$

Se vi ricordate per sviluppi in serie di Taylor allora la componente y è uguale al valore stesso + la derivata di questa funzione rispetto alla coordinata che ci interessa e poi ci sono i termini successivi

$$F_y\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) = F_y(x, y, z) - \frac{\partial F_y}{\partial y}\left(-\frac{\Delta y}{2}\right)$$

analogamente:

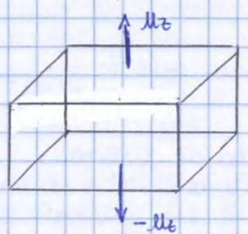
$$F_y\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) = F_y(x, y, z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)$$

Quando faccio il I meno il II trovo:

$$\Delta \varphi_y = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y \, \Delta x \, \Delta z = \left(\begin{array}{l}\text{dato che il parallelepipedo è} \\ \text{rettangolo } \Delta y \Delta x \Delta z \text{ è il} \\ \text{volume del parallelepipedo}\end{array}\right) = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta \tau$$

(dove $\Delta \tau$ è: $\Delta \tau = \Delta x \Delta y \Delta z$ è il volume del parallelepipedo)

Se avessi fatto lo stesso calcolo per le superfici sopra e sotto, cosa cambiava? i versori erano u_z e $-u_z$ ma per il resto i calcoli sarebbero rimasti identici; quindi avrei trovato:



$$\Delta \varphi_z = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta \tau \qquad \Delta \varphi_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta \tau$$

Il flusso elementare attraverso una scatola assimilabile ad un parallelepipedo rettangolo $\Delta \varphi$ è:

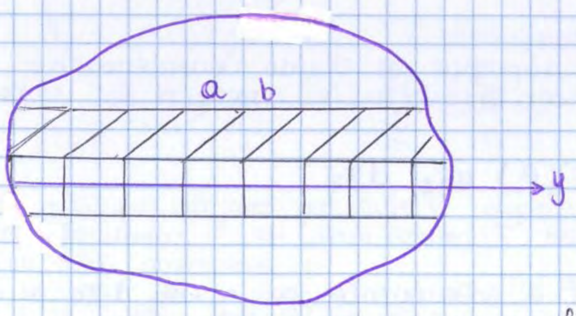
$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_x + \Delta \varphi_y + \Delta \varphi_z = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) \Delta \tau$$

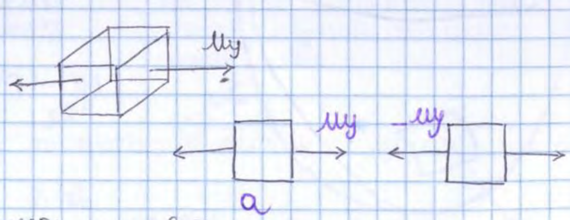
Quindi il flusso verso fuori di una scatola è uguale a quella parentesi tonda $\cdot \Delta \tau$.
Quella parentesi tonda ha un nome speciale e si chiama DIVERGENZA. Quindi si chiama DIVERGENZA di un vettore e si indica così la quantità:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \\ \operatorname{div} \vec{F}\end{array}\right\} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

è una quantità scalare ottenuta sommando le derivate lungo i diversi assi quando si usa una rappresentazione cartesiana.

In genere non abbiamo dei parallelepipedi ma prendiamo un volume generico e cerchiamo di vedere se le cose che abbiamo scritto sono applicabili. Immaginiamo di tagliare un parallelepipedo di lati Δy Δx e Δz. Consideriamo 2 volumetti a contatto **a** e **b**. Il flusso che esce lungo y della cella a





Le due pareti a contatto hanno le seguenti caratteristiche: il valore della funzione è lo stesso però le normali sono una l'opposto dell'altra, quindi quando sommo i flussi in questa direzione capita che si semplificano tutti e gli unici che sopravvivono sono il primo e l'ultimo, gli altri sono tutti uguali ed opposti. Lungo z capita la stessa cosa, che sopravvive saranno soltanto il I e l'ultimo. Allora arriviamo a questa conclusione: il flusso totale di un vettore attraverso una superficie chiusa (?) si può immaginare come la somma dei flussi di diversi cubi per mezzo dei quali approssimiamo il nostro corpo.

$$\varphi = \oiint \vec{F} \, \vec{u_n} \, d\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \Sigma \left(\vec{\nabla} \vec{F}\right)_i \Delta \tau_i$$

il numero N di lego/cubetti deve essere sufficientemente grande ed i cubetti devono essere sufficientemente piccoli. Dovrei scrivere:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$$

ma il limite di una sommatoria è l'integrale della funzione e quindi troviamo questo importantissimo risultato: l'integrale di un vettore su una

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{F}(P_1)\, \vec{u_{n1}}\, d\Sigma_1 = -\iint_{\Sigma_2} \vec{F}(P_2)\, u_{n2}'\, d\Sigma_2'$$

I flussi attraverso le superfici che hanno lo stesso bordo godono di quella proprietà:
Se prendiamo le normali in modo concorde cioè in modo tale che quando una superficie venga a coincidere con l'altra le due normali coincidano allora

$$-\vec{u_{n2}}' = \vec{u_{n2}}$$

Allora la formula diventa:

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{F}(P_1)\, u_{n1}\, d\Sigma_1 = \iint_{\Sigma_2} \vec{F}(P_2)\, u_{n2}\, d\Sigma_2$$

Dove la figura adesso è fatta in modo tale che le normali siano coincidenti quando le due superfici coincidono. Tuttavia il I non è altro che il flusso attraverso Σ_1 che ha per bordo γ, queste due superfici Σ_1 e Σ_2 hanno in comune il bordo γ e allora arriviamo alla conclusione che: se F è conservativo vale questa proprietà:

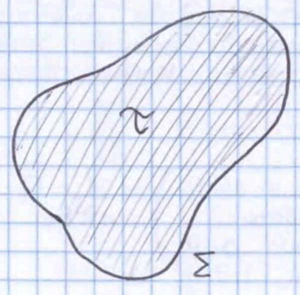
$$\varphi_{\Sigma_1}(\vec{F}) = \varphi_{\Sigma_2}(\vec{F})$$

Se Σ_1 e Σ_2 hanno lo stesso bordo γ. Il flusso dipende dal bordo ma non dalla superficie. Tutte le superfici che hanno lo stesso bordo hanno lo stesso flusso.

Da qui ricaviamo un'equazione che va sotto il nome di equazione di Poisson.
Andiamo a vedere una cosa che abbiamo dimostrato: dal teorema di Gauss abbiamo visto che il flusso φ del campo elettrico attraverso Σ è $= 1/\varepsilon_0$ Q contenuta in Σ.

$$\varphi_\Sigma(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u_n}\, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(\Sigma)$$

faremo la stessa dimostrazione senza usare il concetto di angolo solido.
Questa viene detta EQUAZIONE INTEGRALE perché mette in relazione la somma di tutti i valori del campo elettrico di una superficie con una quantità che è la carica elettrica limitata da quella superficie.
Le relazioni integrali vanno bene ma a volte hanno problemi, sarebbe meglio una relazione di tipo locale cioè si collega il campo in quel posto con una proprietà in quel posto e qui colleghiamo una quantità integrata su una superficie con una quantità integrata sul volume; se usiamo il teorema della divergenza, immaginiamo di avere un mare con tutte le cariche distribuite, immaginiamo una superficie chiusa e in questo mare consideriamo il volume τ. La carica contenuta in quel volume delimitato da Σ (per la definizione di densità).



$$Q(\Sigma) = \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho\, d\tau$$

Andiamo a prendere la legge di Gauss:

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\,\vec{u_n}\, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau(\Sigma)} \rho\, d\tau$$

ho scritto in un altro modo la legge di Gauss invocando che esiste una

Questa relazione vale però per tutte le superfici Σ che limitano un certo volume τ. Adesso il I membro lo scriviamo facendo uso del teorema della divergenza

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau(\Sigma)} \rho\, d\tau$$

questa vale qualunque sia τ, portiamo tutto al I membro e otteniamo:

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right) d\tau = 0 \qquad \forall \Sigma$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right\}$$

La divergenza complessiva è: (sommando membro a membro)

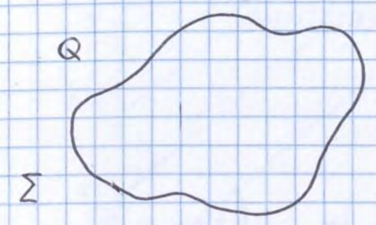
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3}{r^3} - 3\frac{(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right\} = 0$$

perché $x^2+y^2+z^2 = r^2$; $r^2/r^5 = 1/r^3$; $\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$.

In tutti i punti in cui il vettore campo elettrico creato da una particella puntiforme è definito, il vettore campo elettrico è un vettore solenoidale.

$$\vec{\nabla}E = 0 \quad \forall P \text{ dove è definito.}$$

Il teorema di Gauss ci dice che il flusso del vettore campo elettrico dovuto ad una carica attraverso una sup. chiusa è zero se la carica è fuori ed è Q/ε_0 se è dentro. Consideriamo una superf. chiusa Σ ed una carica Q.

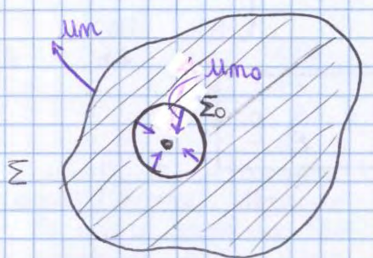


Se la carica Q è fuori per tutti i punti delimitati da quel volume il vettore è solenoidale

$$\forall P \in \tau(\Sigma) \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\varphi_\Sigma(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u_n}\, d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau = 0$$

Consideriamo adesso il caso in cui la particella carica sta all'interno della superficie chiusa. Adesso la divergenza di E nel punto occupato dalla carica non è più definito.



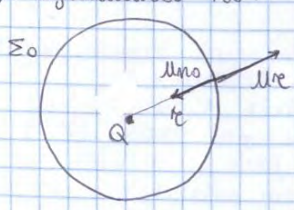
Prima l'origine non apparteneva al volume delimitato dalla sup., qui invece il punto dove c'è la carica è dentro e a noi interessa il flusso attraverso quella superficie. Esiste almeno un punto in cui la divergenza vale zero. Attorno alla carica consideriamo una superficie Σ_0 centrata sulla particella. Nel volume delimitato dalla superficie ext ed int cioè nella regione tratteggiata il campo elettrico è sempre definito (?) perché l'origine l'abbiamo tolta. Nella regione tratteggiata la divergenza di E è sempre nulla, quindi su una superficie chiusa limitata all'interno da Σ_0 ed all'esterno da Σ l'integrale è nullo perché la div. è sempre nulla; quindi:

$$\varphi_{\Sigma+\Sigma_0} = \oint\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_0} \vec{E}\cdot\vec{u_n}\, d\Sigma = \left(\begin{array}{l}\text{definite le due}\\ \text{normali che vanno}\\ \text{sempre fuori dal}\\ \text{volume}\end{array}\right) = \oint\!\!\oint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0)\, u_{n0}\, d\Sigma_0 + \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}(P)\, \vec{u_n}\, d\Sigma = 0$$

Quindi: $\oint\!\!\oint \vec{E}(P)\, u_n\, d\Sigma = -\oint\!\!\oint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0)\, u_{n0}\, d\Sigma_0$

Al I membro ho ciò che voglio calcolare cioè il flusso di E attraverso la superficie esterna quindi è semplicemente $\varphi_\Sigma(\vec{E})$

Se ingrandisco ho:



Per ogni punto di Σ_0 il campo vale

$$\vec{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}$$

Quindi andiamo a calcolare il II membro di quella relazione:

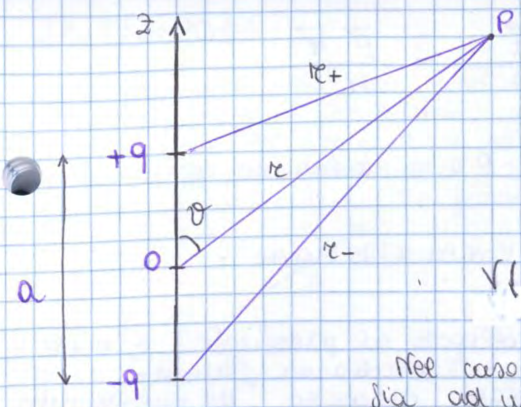
$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0)\,\vec{u_n}\, d\Sigma_0 = \oint\!\!\oint_{\Sigma_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\underbrace{(\vec{u_r}\cdot\vec{u_{n0}})}_{-1}\, d\Sigma_0 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\oint\!\!\oint_{\Sigma_0} d\Sigma_0}_{\text{sup. della sfera di raggio } r} = -\frac{Q}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\frac{1}{\cancel{r^2}}\cancel{4\pi r^2} = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

perché l'angolo tra i due vettori è π

Se sostituiamo otteniamo ciò che abbiamo già visto.

$$\boxed{\varphi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Questo è da sapere bene!! Se invece di una carica ce ne sono tante vale il principio di sovrapposizione. Adesso ci soffermiamo su una conseguenza importante dell'eq. di Poisson: l'eq. di Poisson ci dice che la divergenza del campo elettrico è $= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$



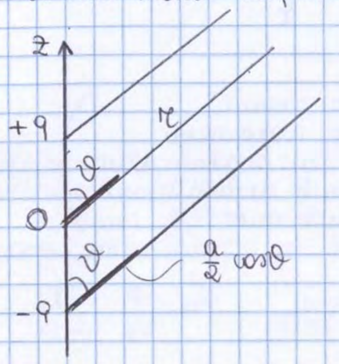
Quindi $V(r,\theta)$ è sempre lo stesso! Il potenziale nel punto P generico caratterizzato da r e θ.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

questo vale per una particella singola. In questo caso abbiamo due particelle ed il potenziale per il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE vale:

$$V(r,\theta) = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right\}$$

Nel caso che stiamo affrontando noi si pone sempre che il punto P sia ad una grande distanza dal punto O; cioè che $r >> a$.
Noi siamo interessati all'APPROSSIMAZIONE DIPOLARE cioè $r >> a$ questo vuol dire che r_+ ed r_- sono all'incirca // quindi la figura la possiamo fare così: (dove r_+ ed r_- si incontrano in punti molto lontani) abbiamo che



$$r_+ = r - \frac{a}{2}\cos\theta$$
$$r_- = r + \frac{a}{2}\cos\theta$$

quindi nella parentesi graffa diventa così:

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{1}{r - \frac{a}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2}\cos\theta} = \frac{r + \frac{a}{2}\cos\theta - r + \frac{a}{2}\cos\theta}{r^2 - \left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2} =$$

$$= \frac{a\cos\theta}{r^2}$$ e quindi il potenziale è:

$$V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}$$

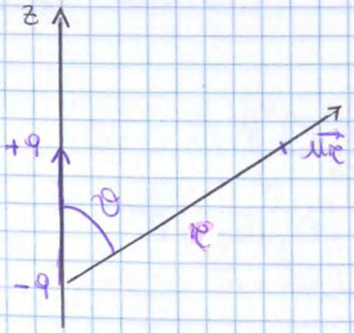
. Il campo creato da una carica Q puntiforme ed il potenziale sono:

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u_r} \\ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \end{cases}$$

Quindi il potenziale nel caso di una carica puntiforme decresce come $1/r$ nel caso di un dipolo decresce come $1/r^2$.
Le caratteristiche del dipolo sono **q** e **a** che compaiono sempre come prodotto $q\cdot a$; il prodotto $q\cdot a$ viene chiamato MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO e si misura come Coulomb × metri oppure in Debai, olandese che ha studiato queste cose. Tale quantità viene indicata con p, in realtà si usa anche il vettore momento di dipolo che è definito così: dove il vettore $\vec{a}$ va dalla carica negativa a quella positiva.

$$\vec{p} = q\cdot\vec{a}$$

Dipende dall'intensità della carica e dallo spostamento relativo di una carica rispetto ad un'altra. Se guardiamo la figura nell'approssimazione dipolare, se questo è a, r e questo è u_r allora vediamo che la formula che grazie al momento di dipolo possiamo scrivere come:



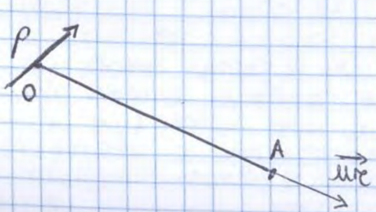
$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

questo possiamo anche scriverlo come

$$\boxed{V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{u_r}}{r^2}}$$

potenziale creato da un dipolo scritto sotto forma vettoriale.
La grossa variazione rispetto al potenziale creato da una carica puntiforme è che il potenziale di un dipolo non è a simmetria sferica ma dipende da r come $1/r^2$.

__Esercizio:__ Calcolare il campo elettrico creato da un dipolo. Fino ad ora sapevamo che le cariche erano sull'asse delle z era importante. In questo caso invece questa formula posso pensarla così:



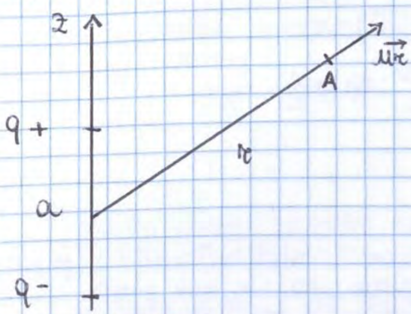
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{u_r}}{r^2}$$

Vale in tutti i sistemi di riferimento!

(NB) Quando dico DIPOLO abbiamo già fatto un'approssimazione, i punti sono ad una distanza molto + grande delle distanze tra le cariche.

21-05-2014

L'ultima volta abbiamo parlato del DIPOLO, sistema formato da due cariche uguali ed opposte, quindi è un sistema neutro. Se prendiamo un asse z e due cariche $+q$ e $-q$ ad una distanza a, il potenziale creato in un punto A individuato dal vettore $\vec{r}$ e che forma un angolo θ con l'asse su cui giace il dipolo è dato da questa formula:

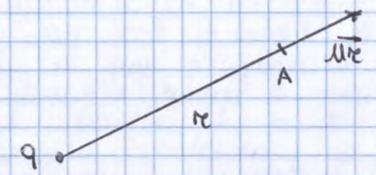


$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{u_r}}{r^2}$$

dove $\vec{u_r}$ è il versore radiale che va da l'origine del dipolo al punto in cui consideriamo il potenziale.

La grande caratteristica è che mentre il potenziale creato da una carica puntiforme è:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$



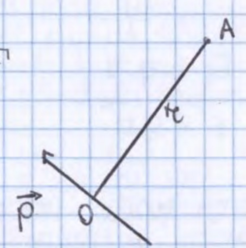
la differenza è che una decresce + in fretta come $1/r^2$ mentre l'altra come $1/r$. Nel caso della carica puntiforme il potenziale ha simmetria sferica cioè dipende soltanto dalla distanza r. Questo potenziale invece anche da θ, la simmetria è cilindrica, cioè tutti i punti su una circonferenza che ha raggio $r\sin\theta$ passante per A ha lo stesso valore. Queste sono le due differenze! Nel caso di una carica puntiforme la cosa importante è che il campo E è:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u_r}$$

cioè il campo creato da una particella puntiforme è CENTRALE! Il modulo dipende solo dalla distanza ed è diretto verso il versore radiale. Abbiamo calcolato il campo:

- abbiamo scritto $\vec{r}$ come: $\vec{r} = r\cdot\vec{u_r}$,
- $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x\cdot x + p_y\cdot y + p_z\cdot z}{r^3}$

dove abbiamo preso un sistema di rif. che ha origine nel centro del dipolo e $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$



Abbiamo anche calcolato

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left\{p_x - \frac{3x}{r^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})\right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left\{p_y - 3\frac{y}{r^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})\right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left\{p_z - 3\frac{z}{r^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})\right\}$$

Se calcoliamo il campo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\vec{u_x}\frac{\partial V}{\partial x} - \vec{u_y}\frac{\partial V}{\partial y} - \vec{u_z}\frac{\partial V}{\partial z} =$$

moltiplicando la prima per $\vec{u_x}$, la II per $\vec{u_y}$ e la terza per $\vec{u_z}$ e sommiamo: otteniamo il vettore $\vec{p}$ ed il vettore $\vec{r}$ e la formula diventa:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left\{\vec{p} - 3\frac{\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^2}\right\}}$$

Questo è un campo importante ed in tanti libri si trova scritto in un altro modo cioè usando il vettore $\vec{u_r}$. So che $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{u_r}$ quindi

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\vec{u_r}(\vec{p}\cdot\vec{u_r}) - \vec{p}}{r^3}}$$

Se confrontare questa formula con quella corrispondente per il campo creato da una particella puntiforme che è $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u_r}$ e la differenza non è solo nella potenza al denominatore ma nel fatto che il campo dipende da $\vec{u_r}$ nel II caso. Andiamo ora a considerare un dipolo sempre lungo l'asse z e prendiamo stavolta un punto A che questa volta sta sull'asse z, quanto vale il campo creato dal dipolo nel punto A? Noi sappiamo che $u_r = u_z$ quindi il vettore $\vec{p} = p\cdot\vec{u_z}$, allora la formula mi dice che il campo $\vec{E}$ sull'asse delle z sul punto A, vale:

$$\vec{E}(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\vec{p} - \vec{p}}{r^3} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

Quindi nel punto A, il campo creato dal dipolo è diretto come in figura (blu).

Dato che $\vec{p}$ è diretto lungo z abbiamo che

(A) $3\cdot\vec{u_r}(\vec{p}\cdot\vec{u_r}) = 3\,\vec{u_z}\cdot p = 3\vec{p}$

Supponendo che $\vec{r}$ abbia componenti $\vec{r} = (x, y, z)$ ed $\vec{a}$ abbia componenti $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ allora i punti r_+ ed r_- avranno componenti:

$$\vec{r}_+ = \left(x + \frac{a_x}{2};\ y + \frac{a_y}{2};\ z + \frac{a_z}{2}\right) \qquad \vec{r}_- = \left(x - \frac{a_x}{2};\ y - \frac{a_y}{2};\ z - \frac{a_z}{2}\right)$$

Allora il potenziale nel punto r_+ sarebbe il potenziale nel punto che ha le coordinate che abbiamo appena visto:

$$V(\vec{r}_+) = V\left(x + \frac{a_x}{2};\ y + \frac{a_y}{2};\ z + \frac{a_z}{2}\right) =$$

Se facciamo lo sviluppo in serie di Taylor attorno al punto di riferimento che è r. Tenere a mente che quando parliamo di dipolo, la distanza a è molto piccola rispetto tutte le distanze in gioco (APPROSSIMAZIONE DIPOLARE), se il termine $\frac{a_x}{2}$ è molto piccolo rispetto ad x, $a_y/2 \ll y$ ed $a_z/2 \ll z$ allora la quantità che abbiamo scritto è all'incirca uguale a:

$$= V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{a_x}{2} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{a_y}{2} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{a_z}{2}$$

$\rightarrow$ questo è lo sviluppo in serie di Taylor attorno al punto x, y, z

Analogamente il valore del potenziale nel punto r_- sarà:

$$V(\vec{r}_-) = V\left(x - \frac{a_x}{2};\ y - \frac{a_y}{2};\ z - \frac{a_z}{2}\right) =$$

se faccio esattamente lo stesso sviluppo in serie di Taylor del I ordine trovo:

$$= V(x, y, z) - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{a_x}{2} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{a_y}{2} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{a_z}{2}.$$

Ciò che mi interessa è la differenza tra $V(r_+)$ e $V(r_-)$, l'ultimo passaggio visto era infatti:

$$q\left\{V(\vec{r}_+) - V(\vec{r}_-)\right\} = \left(\begin{array}{l}\text{sostituendo il I termine}\\ \text{scompare, il II}\\ \text{termine raddoppia}\end{array}\right) q\left\{a_x\frac{\partial V}{\partial x} + a_y\frac{\partial V}{\partial y} + a_z\frac{\partial V}{\partial z}\right\} =$$

$\frac{\partial V}{\partial x}$ è la comp. x del gradiente, $\frac{\partial V}{\partial y}$ è la comp. y del gradiente e $\frac{\partial V}{\partial z}$ è la componente z quindi il termine tra { } è semplicemente un prodotto scalare.

$$= q(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} V) = \left(\text{la scriviamo come}\right) = q\,\vec{a} \cdot \vec{\nabla} V = \left(\begin{array}{l}q \cdot a \text{ è il}\\ \text{momento di}\\ \text{dipolo}\end{array}\right) = \vec{p}\,\vec{\nabla} V =$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{il gradiente di } V \text{ è}\\ \text{il campo cambiato}\\ \text{di segno quindi}\end{array}\right) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

FORMULA IMPORTANTISSIMA: L'E_p di un dipolo in un campo esterno è = al prodotto scalare del momento di dipolo per il campo elettrico cambiato di segno.

Questa formula ci permette di calcolare la forza con cui un dipolo viene attratto o respinto in un campo elettrico.

Per una particella singola, carica l'E_p è la sua carica per il potenziale elettrico in quel punto, per il dipolo la sua E_p è $-\vec{p}$ scalare $\vec{E}$.

Domanda: Quanto vale la forza che agisce su un dipolo? La relazione tra forza ed E_p è:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = \left(\begin{array}{l}\text{se abbiamo un}\\ \text{dipolo in un campo ext}\end{array}\right) = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

Questa forza in generale c'è. L'unico caso in cui è identicamente nulla è: se il campo dove è messo il dipolo è uniforme $\vec{p} \cdot \vec{E}$ è una costante perché p è una proprietà del dipolo allora $\vec{p} \cdot \vec{E}$ è una costante ed il gradiente di una costante è zero; quindi arriviamo a questa conclusione: Un dipolo messo in un campo esterno uniforme non è sottoposto ad alcuna forza. Questo è molto diverso da una carica perché una carica messa in un campo elettrico uniforme subisce una forza F che è $q \cdot \vec{E}$, qui invece se il dipolo è messo in un campo elettrico uniforme sta fermo sicuramente non trasla perché non c'è una forza. La forza F è collegata al movimento del cm, la derivata della quantità di moto tot. di un sistema è uguale alla risultante delle forze ext. Il dipolo sicuramente non trasla ma un corpo rigido come un dipolo potrebbe ruotare.

Domanda: Quanto vale il momento su di un dipolo messo in un campo elettrico uniforme? Quanto vale il momento complessivo rispetto ad un punto che agisce su un dipolo?

MOMENTO = VETTORE POSIZIONE RISPETTO AL POLO $\times$ FORZA