



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1005

DATA: 01/07/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Cappelletti

MATERIA: Strutture Aeronautiche + temi + Eserc.

Prof. DiSciuva\_Gherlone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Politecnico di Torino  
A.A. 2013-2014

Appunti, esercitazioni svolte,  
esercizi d'esame di

# STRUTTURE AERONAUTICHE



Corso tenuto dal Prof. **M. Di Sciuva**  
Corso di Laurea Magistrale  
Ingegneria Aerospaziale

**Appunti di Cappo Matteo**

## INDICE

### Introduzione

1. Progetto strutturale
2. Materiali aeronautici
3. Richiami teoria travi a guscio rinforzato
4. Teoria dell'elasticità
- 5. Teoria delle piastre multistrato**
  - a. Teoria delle travi sandwich
- 6. Stabilità elastica**
  - a. Sistema a un grado di libertà
  - b. Metodo degli equilibri adiacenti
  - c. Stabilità delle aste compresse
  - d. Stabilità delle piastre compresse
  - e. Pannelli sollecitati a taglio
- 7. Metodo degli elementi finiti (FEM)**
  - a. Soluzione approssimata asta
  - b. Introduzione al FEM, elemento ROD
  - c. BEAM Element, BEAM 3D
  - d. CST Element
  - e. QUAD-4M Element
  - f. QUAD-4 Element
  - g. 3D Solid Elements
  - h. Higher order elements
8. Riassunti rapidi

### **Esercitazioni svolte**

1. Analisi statica di una semiala con modello del semiguscio ideale
2. Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente
3. Dimensionamento di travi composite e sandwich

4. Stabilità a compressione di aste e correnti
5. Stabilità a compressione e taglio di pannelli alari
6. Scrittura di un programma in Matlab per analisi FEM di travi reticolari piane
7. Analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D in ambiente MSC/PATRAN-NASTRAN
8. Analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D e 2D in ambiente MSC/PATRAN-NASTRAN
9. Relazione di laboratorio: Prova di torsione di cassone alare

### **Esercizi tipo da esami**

# STRUTTURE AERONAUTICHE

4/03/2014

Prof. Marco Di Sciuva

AEROPLANO → mezzo a sustentazione dinamica e velatura fissa dotato di propulsore

Sostentazione AERODINAMICA: velocità relativa tra fluido e macchina (sost. statica → DIRIGIBILI)

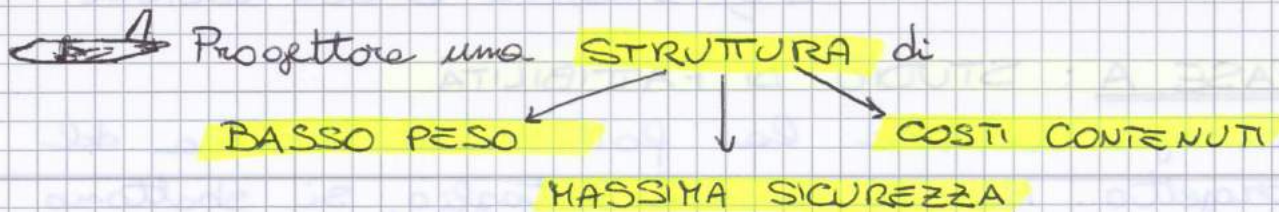
■ Fase di PROGETTO, ANALISI, COLLAUDO

↓ nel nostro corso

PROGETTO STRUTTURALE

Esigenza: in una SPECIFICA (documento tecnico) sono elencati i REQUISITI che la macchina deve soddisfare

→ parte molto complessa perché bisogna "indovinare" le giuste specifiche di affidabilità, integrazione e MANUTENZIONE!



ovviamente se PESO STRUTTURA ↓ PAYLOAD ↑ = \$\$\$!  
e la macchina è + efficiente!

• Strumenti di calcolo sofisticati per MINIMIZZARE IL PESO e MASSIMIZZARE SICUREZZA (→ COMPROMESSO)

■ OTTIMIZZAZIONE multidisciplinare permette di definire

▶ PESI

▶ CARATTERISTICHE GEOMETRICHE

▶ caratteristiche non fissate dalla specifica (es: CS25, non ti dice COSA METTERE, ma solo i requisiti BASE da soddisfare)

- Non ci sono programmi che tengano conto di tutte le specifiche nello stesso momento.

△ Tutti i vari ambiti (PROPULSIONE, SISTEMI, AERODINAMICA, STRUTTURE) vanno INTEGRATI e si cerca il COMPROMESSO CON L'OTTIMIZZAZIONE

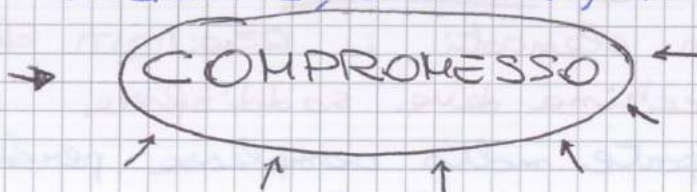
→ Interazione tra le discipline!

## REQUISITI SPECIFICA

→ da utilizzatore macchina

→ PRESTAZIONI, PESI e INGOMBRI, PROGETTO e COSTRUE,  
REQUISITI AMBIENTALI, OPERATIVI, ...

↓  
RAMS



Fasi di progetto:

- A) STUDIO DI FATTIBILITA'
- B) DEFINIZIONE DEL PROGETTO
- C/D) SVILUPPO e COSTRUZIONE

## FASE A: STUDIO DI FATTIBILITA'

- Bisogna valutare la fattibilità tecnica del progetto. Non si va nel dettaglio, si sbattono parametri nel calcolatore e si ottengono SOLUZIONI DI MASSIMA e confronto tra possibili soluzioni diverse

- Identificare le problematiche tecniche

→ AREA DI RISCHIO, cose non ancora prevedibili

- STIMA PRELIMINARE DI COSTI e TEMPI di sviluppo

## FASE B: DEFINIZIONE DEL PROGETTO

- ▶ Definizione del PIANO DI SVILUPPO

- ▶ Ridefinizione delle SPECIFICHE → ORA SI VA NEL DETTAGLIO, prima erano linee generali

• Specifiche tecniche • Disegni ingegneristici • Configurazioni • Materiali

# ANALISI STRUTTURALE

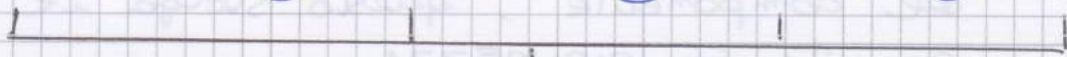


Un team fa il progetto:

- ▶ definire in QUALE CATEGORIA CERTIFICARE (e rispettare le Certification Specifications)
- ▶ definire IN VILUPPO DI VOLO

Bisogna sapere le FORZE AGENTI SULL'AEREO!

- ① GEOMETRIA      ② MOTORI      ③ CARICHI      ④ VINCOLI



INPUT PER ANALISI STRUTTURALE

⇒ VALUTARE LO STATO DI SOLLECITAZIONE e DEFORMAZIONE IN TUTTI I PUNTI DELLA STRUTTURA

L'analisi strutturale UNITA alle prove dà la certezza che la struttura può svolgere la sua funzione in SICUREZZA.

Confronto tramite criteri di • ROBUSTEZZA  
con tensioni e def. ammissibili • RIGIDEZZA  
 • ELASTICITÀ

(sono criteri statici, servono poi anche quelli dinamici!)

+ MARGINI DI SICUREZZA, FATICA, TENSIONI RESIDUE  
 → Test non distruttivi

ROBUSTEZZA: CAPACITÀ DI SOPPORTARE CARICHI, non ci interessa con quali deformaz. in questo approccio

- ▶ Con diagramma di manovra e carichi della normativa si definiscono le CONDIZIONI DI IMPIEGO
- ▶ Devo scegliere uno SCHEMA STRUTTURALE ADATTO per ogni componente in modo che i carichi stiano sotto i limiti
- ▶ Ho una tensione di riferimento (ROTTURA) e i miei carichi DEVONO ESSERE  $< \sigma_R$

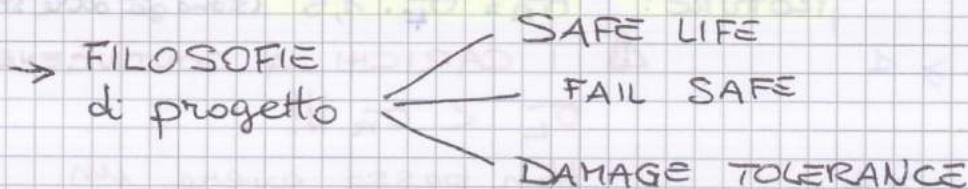


ELASTICITÀ : CAPACITÀ DI RITORNARE ALLA CONFIGURAZIONE INDEFORMATA UNA VOLTA TOLTI I CARICHI

- perfetto ritorno in condizioni scarse
- deformazione plastica deve tendere a zero, ma un minimo è tollerato.

## CRITERI DI PROGETTO STRUTTURALE

A livello di progetto, non di criterio, devo CAUTELARMI quindi posso accettare che LOCALMENTE, NONOSTANTE I CRITERI VERIFICATI, SI POSSANO VERIFICARE PROBLEMI



SICUREZZA STRUTTURALE → la struttura può operare in presenza di difetti senza rotture catastrofiche

SAFE LIFE : vecchio approccio: SI RITIENE IL COMPONENTE PERFETTO e INTEGRO, SI FA UNA VALUTAZIONE DELLA VITA CHE POTRÀ AVERE E UNA VOLTA ARRIVATI ALLA SCADENZA SI SOSTITUISCE IL PEZZO, in qualsiasi condizione esso sia (magari è ancora buono...)

FAIL SAFE : ammetto che POSSANO VERIFICARSI ROTTURE ma che non portano ad un evento catastrofico

- I CARICHI SI RIDISTRIBUISCONO SUL RESTO DELLA STRUTTURA così che nonostante il FAIL la struttura continua ad operare in sicurezza

(N.B. appena rilevati il danno VA RIPARATO!)

# STRUTTURE AERONAUTICHE

6/03/2014

Fattore di carico e contingenza → mi evita di tirare in ballo le forze di inerzia! ☺

## CARICHI

- CARICO A CONTINGENZA
- CARICO DI ROBUSTEZZA : ultimo carico sopportabile prima che inizi la rottura  
→ ultimo carico per cui SVOLGE IN SICUREZZA LE SUE FUNZIONI  
Es. IL TELAIO DELLA PORTA: se si deforma troppo la porta non si chiude +  
→ non svolge + le sue funzioni

FATTORE DI ROBUSTEZZA (di sicurezza) →  $K_F = 1,5$

La struttura deve essere in grado di sopportare il carico di robustezza per almeno 3 secondi (prova statica)

## CLASSIFICAZIONE DI CARICHI

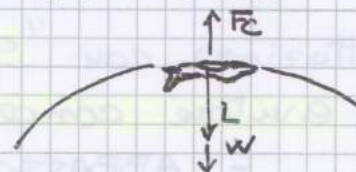
### CARICHI DI VOLO

- ▶ AERODINAMICI : L, D, M carichi distribuiti
- ▶ DI MASSA : distribuiti e concentrati

$$m_2 = \frac{L}{W}$$

$m$  negativo → peso e portanza tirano dalla stessa parte

→ VOLO ROVERSCIO IN CIMA AL LOOP



### ALTRI CARICHI

- ▶ PRESSURIZZAZIONE
- ▶ CARICHI TERMICI
- ▶ PROPULSIONE
- ▶ ATTERRAGGIO

Analisi dinamica \$\$\$      Analisi statica \$

→ Compromesso BENEFICI - COSTI

▶ **FATICA**: rottura a carichi molto inferiori a quello di rottura statica

→ CICLI DI CARICO

Limite di fatica, accumulo del danno, propagazione

## MATERIALI

### PROVE DI CARATTERIZZAZIONE

→ Densità

→ Coeff. di dilatazione termica

→ Conducibilità

### Proprietà meccaniche

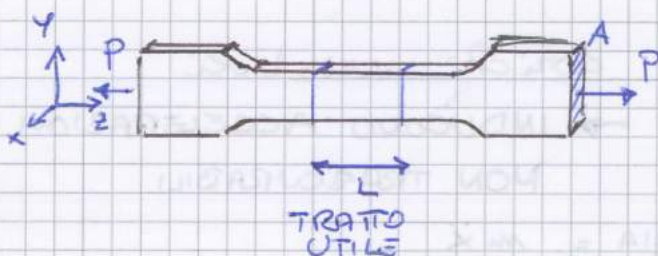
→ Tensione snervamento, rottura, rapporti di Poisson, moduli elastici, allungamento % a rottura, ...

→ POSSONO DIPENDERE DALLA VELOCITÀ DI APPLICAZIONE DEL CARICO

(migliorano le proprietà se  $v \uparrow$ )

### Meccanismi di rottura

### PROVA DI TRAZIONE

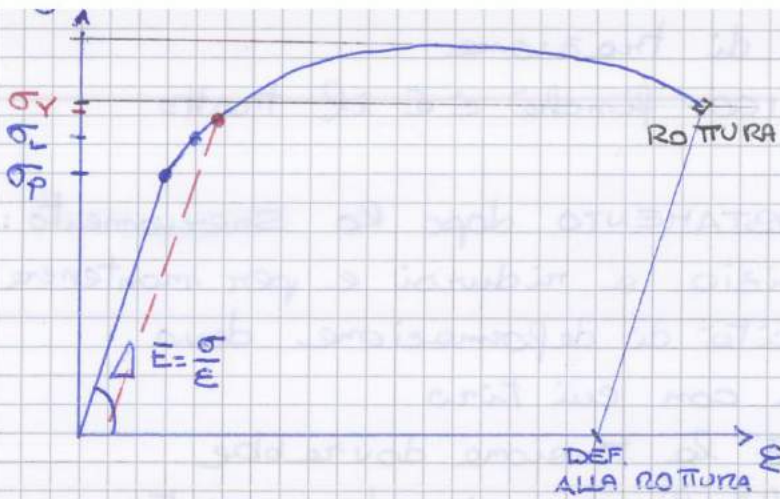


Provino a "osso di cane"

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Bisogna assicurarsi che la prova sia effettuata nelle condizioni corrette: provino perfettamente in asse con la direzione di applicazione del carico.

→ **ESTENSIMETRI** per assicurarsi che il provino non si fletta



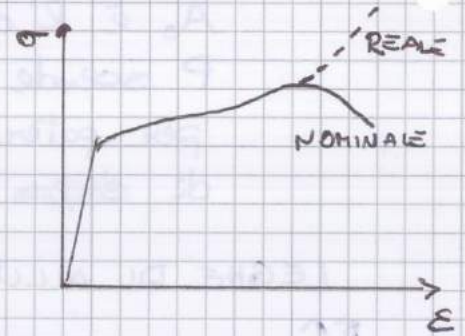
$\sigma_p$ : PROPORZIONALITÀ  
 $\sigma_{LE}$ : LIMITE ELASTICITÀ  
 ( $\sigma_L = \sigma_p \cdot 1,05$ )  
 $\sigma_Y$ : SNERVAMENTO

All'inizio del tratto curvo se tolgo il carico c'è ancora un comportamento elastico

□ ROTTURA: sembra che il provino si rompe ad una  $\sigma <$  a quella MASSIMA SOPPORTABILE!

MA OCCHIO!!!!!!

SUL DIAGRAMMA C'È  $\sigma = \frac{P}{A_0}$



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

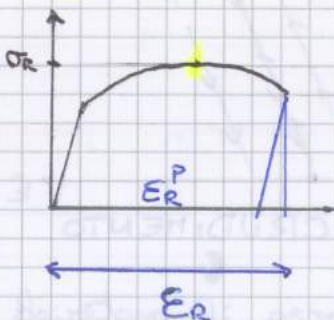
tensione EFFETTIVA usa la SEZIONE EFFETTIVA!!!

Se  $P = \text{cost}$  e  $A \downarrow \Rightarrow \sigma_{\text{effettiva}} \uparrow$

... per STANDARDIZZARE LE PROVE PERÒ CI SI RIFERISCE AD  $A_0$ !

[è + comodo usare sempre la macchina in controllo di velocità di deformazione]

Come  $\sigma_R$  (ROTTURA) ASSUMO LA  $\sigma$  MASSIMA NOMINALE



$E_R$  = ALLUNGAMENTO A ROTTURA  
 (un istante prima della rottura)

$A_p$  = allungamento % a rottura

$A_p = 14 \rightarrow$  allungamento a rottura del 14%  $\rightarrow$  cioè 0,14

$$\tau = G \cdot \gamma \quad G = \text{modulo di taglio}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

## ■ LEGHE

- Leghe extraleggere (es. MAGNESIO)

$$\gamma = 1,8 \text{ Kg/dm}^3 \quad \sigma_R = 28 \text{ Kg/mm}^2 \quad (= 280 \text{ MPa})$$

$$E = 4500 \text{ Kg/mm}^2 \quad (45 \text{ GPa})$$

$$A_p = 10 \div 15$$

→ CERCHIONI del coveello: fungono da "pozzo di colore", serve un alto volume

Magnesio è infiammabile

↓  
LAVORAZIONE IN ATMOSFERA NEUTRA

basso peso specifico

=  
basso peso ☺

## STRUTTURE AERONAUTICHE 11/03/2014

- Leghe di TITANIO

Prezzo 20 volte superiore alle leghe di Al.

SONO MEGLIO DELLE LEGHE DI ALLUMINIO

$$\gamma = 4,5 \text{ Kg/dm}^3$$

$$\sigma_R = 80 \div 100 \text{ Kg/mm}^2$$

$$E \approx 10500 \text{ Kg/mm}^2$$

È sta meta tra leghe di Al e leghe Fe-C

- Mantengono inalterate le prestazioni meccaniche fino a  $\sim 450^\circ\text{C}$ .
- Gomme di forza CARRELLI, bordo d'attacco di aerei che volano ad alti Mach, palette di turbina stadio bassa pressione (T+ basse)

- Leghe Fe-C → ACCIAI

ACCIAIO → PARTI CON SFORZI CONCENTRATI

Vantaggi:

BUONE CARATTERISTICHE MECCANICHE CONFRONTATE CON IL PESO

$$\gamma = 2,8 \text{ Kg/dm}^3$$

$$E = 7000 \text{ Kg/mm}^2 \text{ (75 GPa)}$$

Confronto

	TITANIO	ALLUMINIO	ACCIAI
$\gamma$ :	4,5 Kg/dm <sup>3</sup>	2,8 Kg/dm <sup>3</sup>	7,8 Kg/dm <sup>3</sup>
$E$ :	110 GPa	75 GPa	210 GPa

DURAL

$$\sigma_p = 20 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\sigma_y = 30 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\sigma_R = 40 \div 45 \text{ Kg/mm}^2$$

$$A_p \approx 15 \div 20 \%$$

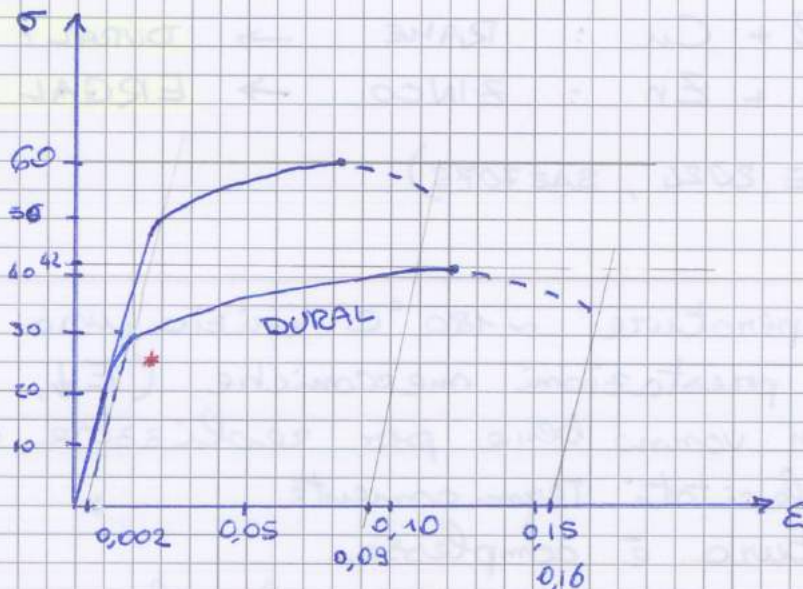
ERGAL

$$\sigma_p = 30 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\sigma_y = 45 \div 50 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\sigma_R = 60 \text{ Kg/mm}^2$$

$$A_p \approx 9\%$$



\* NON È IN SCALA: IL TRATTO OLTRE  $\sigma_p$  SAREBBE MOLTO + RIPIDO

LUNGHEZZA DI ROTURA  
(resistenza specifica)

$$L_R = \frac{\sigma_R}{\gamma} = \begin{matrix} \text{DURAL} \\ \sim 15 \text{ Km} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{ERGAL} \\ \sim 23 \text{ Km} \end{matrix}$$

MODULO SPECIFICO

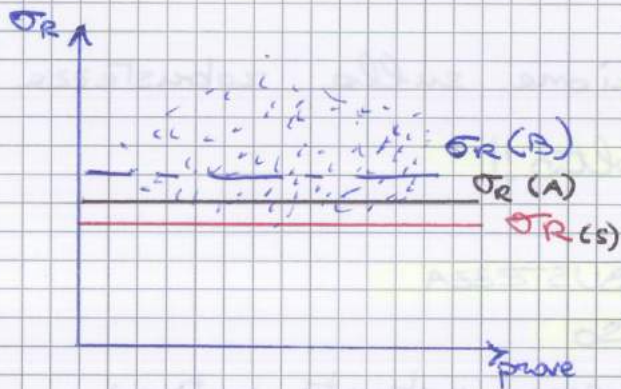
$$\frac{E}{\gamma}$$

# CLASSIFICAZIONE STATISTICA DEI MATERIALI (MIL-HDBK...)

Classe  $\begin{cases} A \\ B \\ S \end{cases}$

La sigla dà un'indicazione STATISTICA dell'attendibilità del valore di resistenza che ti do per il materiale

es. Ho 100 provini, se 98 volte trovo una  $\sigma_R = 70$  e poche volte valori + bassi  
 $\Rightarrow$  la  $\sigma_R$  per cui ti vendo il materiale è ATTENDIBILE



Prendo come  $\sigma_R$  di rottura quello + basso tra tutti i valori disponibili x quel materiale

$\rightarrow$  MI PARO IL CULO!

**CLASSE (S)**

• Manca accurata caratterizz. statistica (o non mi fido)

$\sigma_R$  (A): il 99% delle prove sta sopra quel valore, confidenza 95%

$\rightarrow$  **CLASSE (A)**  $\Rightarrow$  **COMPONENTI PRIMARI, ESSENZIALI**

$\sigma_R$  (B): il 90% delle prove sta sopra e il 10% sotto confidenza 95%

$\rightarrow$  c'è il rischio che il pezzo che capita a me abbia una  $\sigma_R <$  di quella nominale!

$\rightarrow$  **COMPONENTI SECONDARI**

In statistica per avere la CERTENZA bisognerebbe avere un campione statistico infinito.

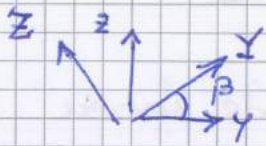
Doti : CARICHI  
VINCOLO  
GEOM. e MATERIALI } → In ogni sezione  
si calcolano le  
caratteristiche di  
sollecitazione

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} z \quad \text{Sistema baricentrico}$$

FORMULA DI NAVIER

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

sistema baricentrico  
ASSI PRINCIPALI  
D'INERZIA



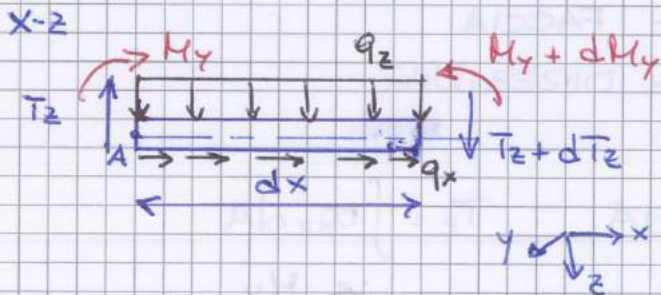
$$I_{y\bar{y}} + I_{z\bar{z}} = I_y + I_z$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 I_{yz}}{I_z - I_y} \right)$$

Le tensioni di taglio sono di un ordine di grandezza inferiore a quelle normali

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{\bar{T}_y}{A} \quad (\text{valore medio})$$

DIAGRAMMI TNM



EQUAZIONI DI EQUILIBRIO di un tronchetto di trave

→ tensioni interne equilibrano carichi esterni

$$\downarrow z) \quad -\cancel{T_z} + q_z \cdot dx + \cancel{T_z} + dT_z = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dT_z}{dx} = -q_z}$$

$$\rightarrow x) \quad -\cancel{N} + q_x \cdot dx + \cancel{N} + dN = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dN}{dx} = -q_x}$$

$$\curvearrowleft A) \quad -\cancel{M_y} + \cancel{M_y} + dM_y - q_z \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (T_z + dT_z) dx = 0$$

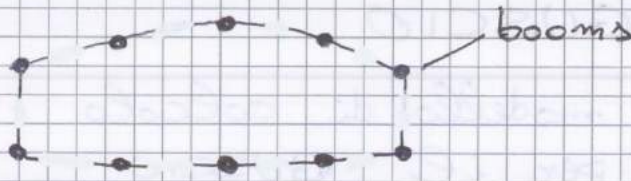
$$dM_y - q_z \frac{dx^2}{2} - T_z dx - dT_z dx = 0$$

INFINITESIMO ORD. SUP

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{dM_y}{dx} = T_z}$$

$$\sigma_{x,x} = \frac{T_y}{I_z} \cdot y + \frac{T_z}{I_y} \cdot z$$



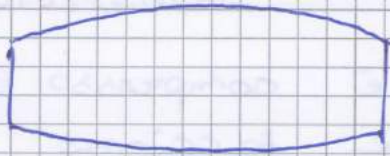


• CORRENTI

↓  
assorbono FLESSIONE

( $\sigma_{xx}$ : trazione - compressi)

Δ SOLO TENSIONI NORMALI



• PANNELLI

↓  
FLUSSI DI TAGLIO

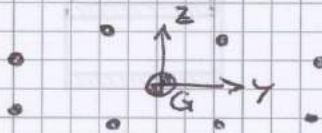
Δ SOLO flussi di taglio

Questo è il MODELLO di semiguscio ideale, ma nella realtà ogni elemento contribuisce ad assorbire tutte le sollecitazioni.

Ⓔ Qual è la sezione resistente a flessione?

Sez. data da AREA data da tutti i correnti + area dei pannelli in trazione + area collaboranti dei pannelli compressi

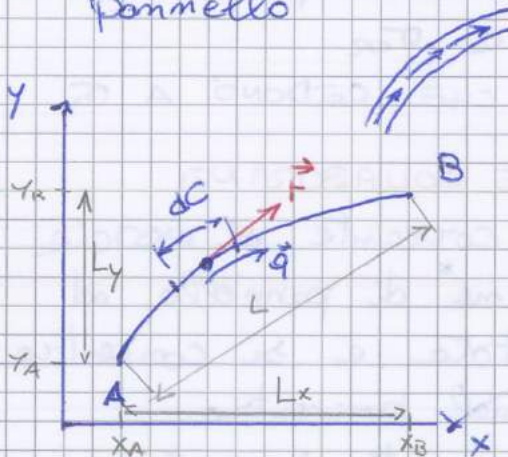
▣ AREE CONCENTRATE



$$\sigma_{x_i} = \frac{N}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y_i + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z_i$$

FLUSSO DI TAGLIO costante [ $q = \text{cost}$ ]

- generato da forze di taglio o momenti torcenti
- flusso di taglio segue la linea media del pannello



- ? Qual è la risultante
- ? Retta d'azione e verso
- ? Dov'è posizionata

$$\bar{q} = \int \tau ds$$

dc = elemento di arco

$L = \text{cordolo} = \text{distanza A-B}$

→ sezione in parete sottile chiusa,  $L_{AB} = 0$

→  $F = 0$

→ TORSIONE PURA



I° FORMULA DI BREDT

$$M_T = 2q\Omega$$

→ ci consente la verifica a robustezza

II° FORMULA DI BREDT

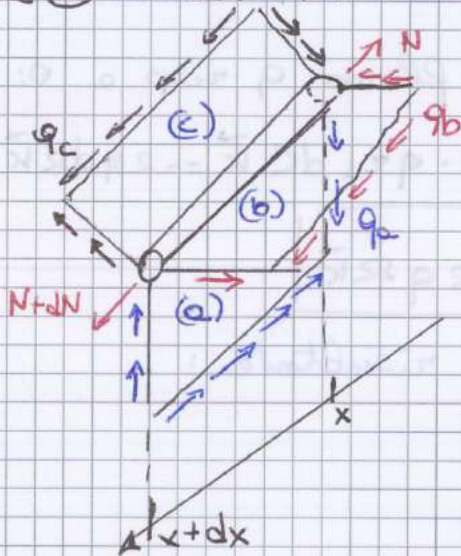
$$\dot{\theta} = \frac{q}{2G\Omega} \int \frac{dc}{\delta} = \frac{M_T}{4G\Omega^2} \int \frac{dc}{\delta}$$

→ ci permette la verifica di RIGIDEZZA

↓  
calcolo del gradiente di TORSIONE  $\dot{\theta}$

• se  $\delta = \text{cost.}$   $\dot{\theta} = \frac{M_T}{4G\Omega^2} \frac{C}{\delta}$

## CORRENTI + PANNELLI



Flussi di taglio COSTANTI

$q_a, q_b, q_c$

"Se la struttura è in equilibrio ogni sua parte lo deve essere"

EQUILIBRIO

$$\leftarrow) \cancel{N} + dN - \cancel{N} - q_a \cdot dx + q_b \cdot dx + q_c \cdot dx = 0$$

$$\rightarrow \frac{dN}{dx} = q_a - q_b - q_c$$

Il carico applicato al nostro corrente ( $\Delta$  SEZIONE CORRENTI + AREE DEI PANNELLI COLLABORANTI) è dato dai pannelli

$$N = \sigma_x \cdot A \rightarrow \frac{dN}{dx} = \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot A$$

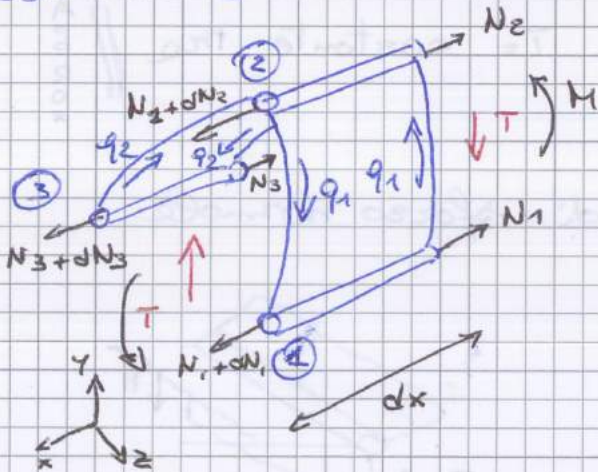
SEZIONE APERTA in parete sottile NON VA CARICATA A TORSIONE

→ devo applicare il carico nel CENTRO DI TAGLIO



Dove sarà il centro di taglio?  
→ sulla retta d'azione della forza risultante!

ESEMPIO 2



- M dato
- I me la calcolo

$$N_i = \frac{M}{I} y_i \cdot A_i$$

• FLUSSI DI TAGLIO

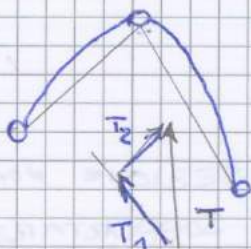
$$dN_i = \frac{dM}{I} y_i A_i$$

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{I_y}{I_z} y_i A_i$$

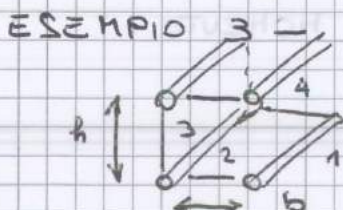
$$\frac{dN_1}{dx} = q_1$$

$$\frac{dN_3}{dx} = -q_2$$

$$\frac{dN_2}{dx} = q_2 - q_1$$



Sezione aperta : N° pannelli = N° CORRENTI - 1



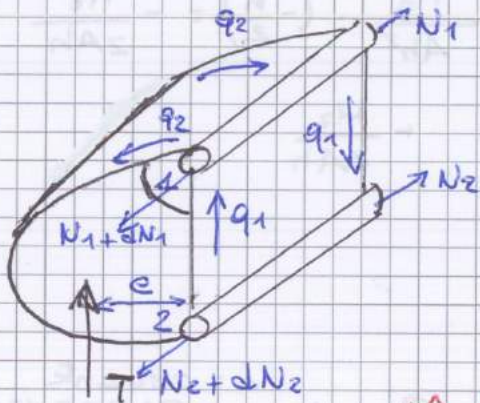
SEZIONE A C

SI! Infatti  $q_{3/4} = \frac{T_r}{2h}$  e si semplifica

$$e_{ct} = \frac{b^3}{12} \cdot \frac{T_r}{2h} = \frac{b}{2}$$

Taglio applicato nel centro di taglio  $\rightarrow$  non genera torsione.

## SEZIONE CHIUSA



- Eq. di gradienti di sforzo normale: 1 (1 sola linearm. indipendente)

- Eq. flussi: 2!

$\rightarrow$  2 incognite con 1 sola eq. linearm. indipendente

$\Rightarrow$  **bisogna AGGIUNGERE UNA EQ.**

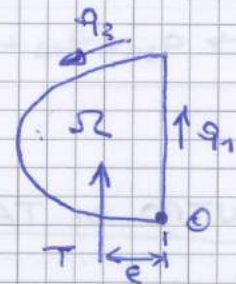
se applico il taglio con una certa eccentricità  $\rightarrow$  NASCE UN MOMENTO TORCENTE

$\rightarrow$  equazione del gradiente di torsione

(EQUIVALENZA DI MOMENTI ESTERNI CON MOMENTI DEI FLUSSI)

- $\frac{dN_1}{dx} = q_1 - q_2 \rightarrow q_1 = \frac{dN_1}{dx} + q_2$

$$T \cdot e = -2\Omega q_2 \rightarrow q_2 = -\frac{T \cdot e}{2\Omega}$$



## GRADIENTE DI TORSIONE

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2G\Omega} \int \frac{q}{s} ds = \frac{1}{2G\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{q_i C_i}{s_i}$$

$$q_1 = \frac{T}{h} \left( 1 - \frac{e \cdot h}{2\Omega} \right)$$

$\Rightarrow$  Se taglio applicato in  $e_{ct} \rightarrow \boxed{\dot{\theta} = 0}$

$$\frac{1}{2G\Omega} \left[ \frac{q_1 C_1}{s_1} + \frac{q_2 C_2}{s_2} \right] = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{dN_1}{dx} = -q_{12} + q_{41}$$



$$-\frac{T_Y}{2h} = -q_{12} + q_{41} \rightarrow \boxed{q_{12} = \frac{T_Y}{2h} + q_{41}}$$

MEMO

$$\frac{dN}{dx} = -q_x, \text{ con}$$

$q_x > 0$  se verso concorde con x posit.

ESPRIMO 3 INCOGNITE IN FUNZIONE DELLA 4<sup>a</sup> ( $q_{41}$ )

$$\textcircled{2} \quad \frac{dN_2}{dx} = q_{12} - q_{23} \rightarrow -\frac{T_Y}{2h} = q_{12} - q_{23} \rightarrow q_{23} = \frac{T_Y}{2h} + \frac{T_Y}{2h} + q_{41}$$

$$\boxed{q_{23} = \frac{T_Y}{h} + q_{41}}$$

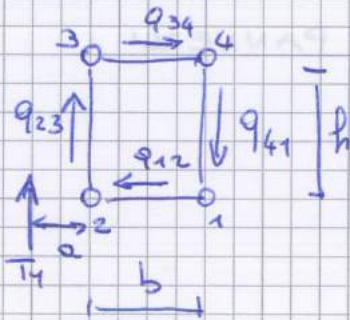
$$\textcircled{3} \quad \frac{dN_3}{dx} = q_{23} - q_{34} \rightarrow$$

$$\rightarrow q_{34} = q_{23} - \frac{T_Y}{2h}$$

$$\rightarrow \boxed{q_{34} = \frac{T_Y}{2h} + q_{41}}$$



MOMENTI ATTORNO A POLO 2: EQ. DI RISULTANTE



$$Q \cdot T_Y = 2q_{34} \cdot 2x_3 + 2q_{41} \cdot 2x_4 = b \cdot h (q_{34} + q_{41})$$

$$\rightarrow q_{41} = \left( \frac{Q}{b} - \frac{1}{2} \right) \frac{T_Y}{2h}$$

$$q_{12} =$$

$$q_{23} =$$

$$q_{34} =$$

$$q_{41} =$$

⚠ CASI PARTICOLARI

$$\frac{Q}{b} = \frac{1}{2} \rightarrow q_{12} = q_{34} = \frac{T_Y}{2h}$$

$$q_{23} = \frac{T_Y}{h}$$

$$\boxed{q_{41} = 0}$$

$$\frac{Q}{b} = -\frac{1}{2}$$

1° SCHEMA DI CALCOLO

n correnti : n-1 eq. di equilibrio di corrente  
1 eq. di risultante momenti

$$q'_{12} = \frac{T_y}{2h}$$

$$q'_{23} = \frac{T_y}{h}$$

$$q'_{34} = \frac{T_y}{2h}$$

$$\left\{ \begin{aligned} q_{12} &= q'_{12} + q_c \\ q_{23} &= q'_{23} + q_c \\ q_{34} &= q'_{34} + q_c \\ q_{41} &= q_c \end{aligned} \right.$$

$q_c$  si ricava da RISULTANTE MOMENTI

$$Q \cdot T_y = 2S_{34} q_{34} + 2q_c S \quad \downarrow \text{POLO } \textcircled{2}$$

Fin'ora abbiamo solo usato EQUAZIONI DELLA STATICA:  
EQUILIBRIO ORIZZ. CORRENTI + EQUIVALENZA MOMENTO  
RISULTANTE

Gradiente di torsione

$$\theta = \frac{1}{2G\Omega} \int \frac{q}{s} ds = \frac{1}{2G\Omega} \sum_{i=1}^{NN} q_i \frac{C_i}{s_i} = \frac{M_T}{4G\Omega^2} \frac{C}{s}$$

FLUSSI EFFETTIVI  
CALCOLATI

I flussi dovuti alla flessione non devono dare contributi al gradiente di torsione  
cioè i flussi calcolati con il  $T$  applicato nel CDI...

→ in  $\theta$  devo mettere solo la parte di flusso portata dalla torsione

$$\rightsquigarrow \text{ se } q_i = q'_i + q_c$$

$\downarrow$  TAGLIO NEL CT                       $\downarrow$  CONTRIBUTO TORSIONE

$\textcircled{E}$  Calcolare lo stato di sollecitazione

NEI CORRENTI:  $N_i = \sigma_x^i \cdot A = \left( \frac{M_x}{J_x} \cdot y_i + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_i \right) \cdot A \dots$

NEI PANNELLI:  $\frac{dN_i}{dx} = \sum_{c=1}^R q_c \dots$

• Calcolo i flussi

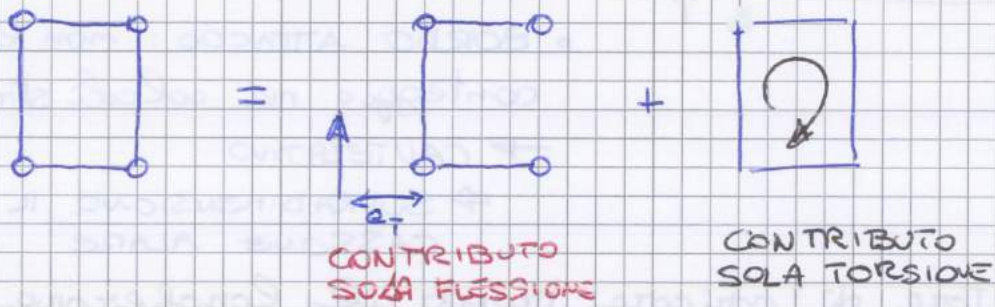
Verifica di ROBUSTEZZA

Verifica di RIGIDEZZA → gradiente di torsione deve essere inferiore a un certo limite

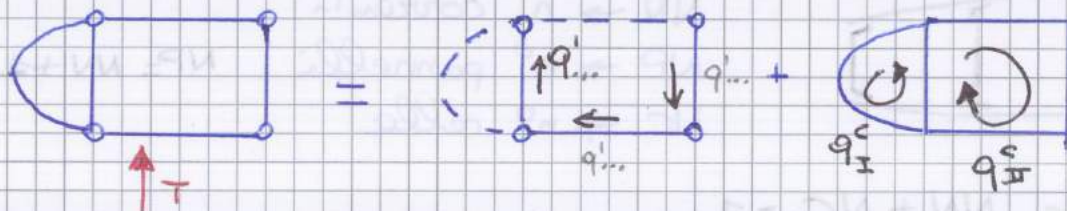
# STRUTTURE AERONAUTICHE

20/03/2014

Nella puntata precedente



## Sezioni multicella



2 CELLE

- APPRO E CALCOLO FLUSSI  $q'$ ... CON EQUIL. CORRENTI
- FLUSSI CIRCOLATORI CORRETTIVI  $\rightarrow$  CHIUSO
- CALCOLO I FLUSSI CIRCOLATORI  $q_I^c$  e  $q_{II}^c$  IMPONENDO LA CONGRUENZA DEI GRADIENTI DI TORSIONE DELLE 2 CELLE  $\dot{\theta}_I = \dot{\theta}_{II}$

**★ MOMENTO DATO DAL TAGLIO = MOMENTO DATO DAI FLUSSI**

Se ho  $C$  celle devo imporre  $C-1$  congruenze delle deformazioni  $\rightarrow$  NO FESSURAZIONI NO COMPENETRAZIONI

**NOTAZIONE X - ESAME**

$[ ] \cdot [ ] = 3$  ERRORE!       $[ ] \cdot [ ] = [3]$

Richiami su matrici :-

- $[A] \cdot \{B\} = \{C\}$        $\{B\} \cdot [A] = \text{NON ESISTE!!!}$   
 $(m \times p) \quad (p \times 1) = (m \times 1)$
- $([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T$
- $[A] \cdot \{B\} = \{A\}^T \cdot \{B\}$        $\{B\} \cdot [A] = \text{NON ESISTE!}$

Stato di tensione di un punto  $\rightarrow$  TETRAEDRO/CUBETTO

FACCIA +: VEDE USCIRE ASSE +

Teorema di Taylor:  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$

NOI CI FERMIAMO QUI

$\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot dx$

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

$\sum \vec{R} = \vec{0}$        $\sum \vec{M}_p = \vec{0}$

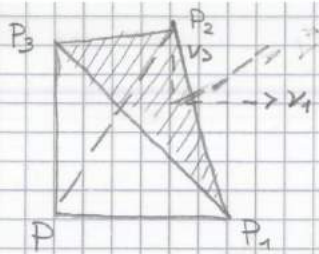
$\vec{R} \cdot \vec{i} = R_x$        $\vec{R} \cdot \vec{j} = R_y$        $\vec{R} \cdot \vec{k} = R_z$

$x \rightarrow \left( -\sigma_{yx} + \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( -\sigma_{xy} + \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( -\sigma_{zx} + \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy$

Supponiamo che poi agiscono anche forze per unità di volume

$+ X_v dx dy dz = m \frac{dx}{dt} = \rho dx dy dz \frac{dx}{dt} = 0$  (STAZIONARIO)





Area  $P_1P_2P_3 = dS$

Area  $P_2P_3 = \frac{1}{2} dx dz = \nu_2 dS$

= PROIEZIONE AREA dS SU PIANO x-z

$\nu_2 = \text{coseno direttore}$

[...]

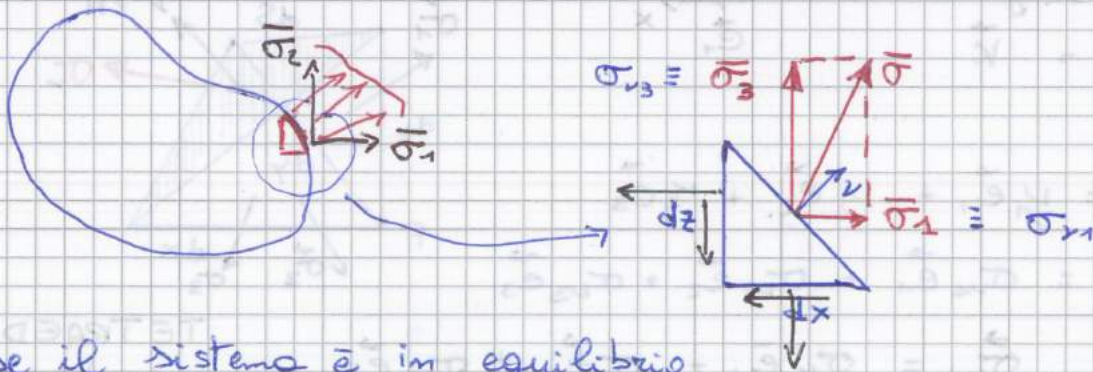
... tutto questo indipendentemente da dove è posizionato il tetraedro!

$$\vec{\sigma}_v = \sigma_{v1} \vec{e}_1 + \sigma_{v2} \vec{e}_2 + \sigma_{v3} \vec{e}_3$$

$$\sigma_{vi} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} \nu_j$$

NOTAZIONE : sopra la linea = CONDIZIONE NOTA ASSEGNATA

$\overline{\sigma}_1$  = tensione NOTA  
 $\vec{\sigma}_1$  = vettore



se il sistema è in equilibrio

Quando il punto è un punto esterno :

$$\vec{\sigma}_1 = \sigma_{11} \nu_1 + \sigma_{21} \nu_2 + \sigma_{31} \nu_3$$

$$\overline{\sigma}_2 =$$

$$\overline{\sigma}_3 =$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

Congruenza spostamenti sulla superficie esterna

$$u = \bar{u} \quad v = \bar{v} \quad w = \bar{w}$$

### DILATAZIONI

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

### SHEAR STRAINS

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Tensore delle deformazioni:

$$[\epsilon] =$$

$$\Rightarrow \{ \epsilon \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

LEGGE DI HOOKE generalizzata

$[\bar{C}] =$  MATRICE DI RIGIDEZZA

$[\bar{S}] =$  MATRICE DI DEFORMABILITÀ

$$\{ \sigma \} = [\bar{C}] \{ \epsilon \} \quad \Leftrightarrow \quad \{ \epsilon \} = [\bar{S}] \{ \sigma \}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (1 \times 1) & (6 \times 6) & (1 \times 1) \end{array}$$

$$[\bar{C}]^{-1} = [\bar{S}]$$

$$\sigma_1 = \sigma_{xx}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_{xx}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{yy}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_{yy}$$

$$\sigma_3 = \sigma_{zz}$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_{zz}$$

$$\sigma_4 = \sigma_{xz}$$

$$\epsilon_4 = \gamma_{xz}$$

$$\sigma_5 = \sigma_{yz}$$

$$\epsilon_5 = \gamma_{yz}$$

$$\sigma_6 = \sigma_{xy}$$

$$\epsilon_6 = \gamma_{xy}$$

## ISOTROPO

2 costanti  $\Rightarrow$  caratteristiche non cambiano lungo le direzioni

... tutto questo assumendo il materiale omogeneo!

ANISOTROPO	$\rightarrow$	21
MONOCLINO	$\rightarrow$	13
ORTOTROPO	$\rightarrow$	9
ISOTROPO	$\rightarrow$	2

### Costanti ingegneristiche

- MODULO ELASTICO LONGITUDINALE

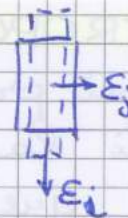
$$E_i = \frac{\sigma_{ii}}{\epsilon_{ii}}$$

- MODULO ELASTICO TRASVERSALE (o a TAGLIO)

$$G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}}$$

- MODULO DI POISSON

$$\nu_{ij} = - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}$$

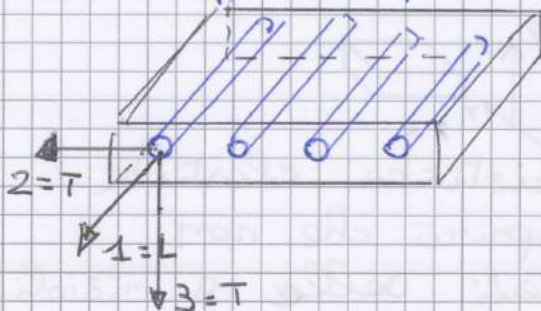


$\nu = 0,3$   
SE LO TIRO DI 1 SI CONTRAÈ DI 0,3

### Materiale isotropo

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ortotropo  $\rightarrow$  fibre in materiali compositi



L = longitudinale

T = trasversale

$$E_L = E_1$$

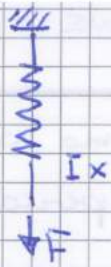
$$E_T = E_2 = E_3$$

$$G_{LT} = G_{12} = G_{13}$$

$$G_{TT} = G_{23}$$

$$\nu_{LT} = \nu_{12} = \nu_{13}$$

$$\nu_{TT} = \nu_{23}$$



$$F = k \cdot x$$

$$\phi = \frac{1}{2} F \cdot x = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{d\phi}{dx} = kx$$

$$\phi = \frac{1}{2} k x \cdot x = \frac{1}{2} x \cdot k \cdot x = \frac{1}{2} x^T \cdot k \cdot x$$

Quanto vale la derivata di  $\phi$ ?

$\Rightarrow$  TOLGO 1/2 E POI LA PARTE TRASPOSTA

... ma qui è facile,  $x$  è uno scalare!

Consideriamo ora il caso con i vettori!

$$\phi = \frac{1}{2} \{\epsilon_r\}^T [C] \{\epsilon_r\} \rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial \{\epsilon_r\}} = [C] \{\epsilon_r\} = \{\sigma\}}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} \rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial \{\sigma\}} = [S] \{\sigma\} = \{\epsilon_r\}}$$

Parlando in linguaggio matematico:

$$\{x\}^T [A] \{y\}$$

FORMA BILINEARE

- fissato  $\{x\}$  l'espressione è lineare in  $\{y\}$  e viceversa

$$\text{se } \{x\} = \{y\}$$

$$\{x\}^T [A] \{x\}$$

FORMA BILINEARE QUADRATICA

$$\phi = \frac{1}{2} \{\epsilon_r\}^T [C] \{\epsilon_r\}$$

$\rightarrow$  l'energia di deformazione elastica è una forma QUADRATICA delle deformazioni / tensioni

$$\phi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\}$$

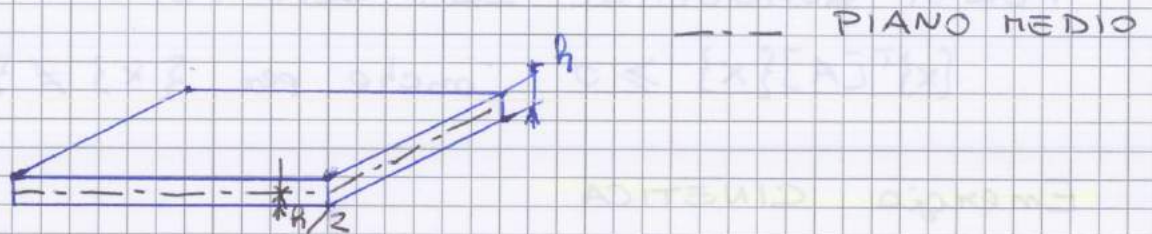
$\rightarrow$  forma bilineare

$$Q = \{x\}^T [A] \{x\}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \{x\}} = 2 [A] \{x\}$$

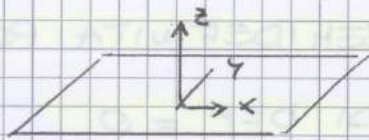
# PIASTRE MULTISTRATO

- TRAVE → elemento 1D
- PIASTRA → elemento 2D, 1 dimensione è TRASCURABILE rispetto alle altre 2



- SPESSORE (thickness) COSTANTE
- SISTEMA DI RIFERIMENTO POSIZIONATO SUL PIANO MEDIO

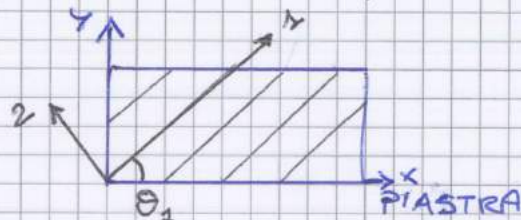
Piano x-y → superficie di riferimento



- PIASTRE in MULTISTRATO: LAMINE DI MATERIALE ORTOTROPO perfettamente incollate tra loro (→ piastre in composito)



Il generico strato ha gli assi di ortotropia orientati di un angolo generico rispetto al sistema di riferimento piastra x-y



/// STRATO 1  
 SISTEMA PIASTRA x-y  
 SISTEMA LAMINA 1-2

- MATERIALE ELASTICO LINEARE

In generale il sistema è di tipo iperstatico: 3 eq. di equilibrio e 6 incognite

▶ sovrò  $\sigma = f(\epsilon)$

▶  $\epsilon$  sono  $f(u, v, w)$

▶ metto tutto in funzione degli SPOSTAMENTI!

→ CAMPO SPOSTAMENTI

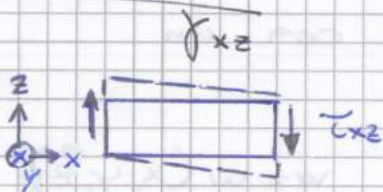
$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^{(0)}(x,y) + z \cdot u^{(1)}(x,y) \\ v = v^{(0)} + z \cdot v^{(1)} \\ w = w^{(0)} + z \cdot w^{(1)} \end{cases}$$

● DEFORMAZIONI e SCORRIMENTI

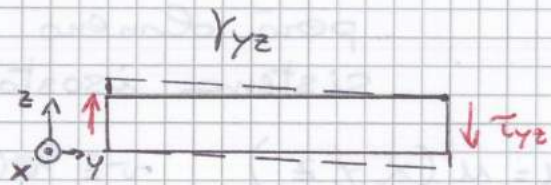
$\epsilon_z = w_{,z} = w'(x,y) = 0$

SI ASSUME SPOSTAMENTO  $w$  INDIPENDENTE DA  $z$  lungo la piastra  $\Rightarrow \epsilon_z$  TRASCURABILE

Scorrimenti



$\gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} = u' + w'_{,x}$



$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} = v' + w'_{,y}$

PIASTRA SOTTILE: ASSUMO CHE IL CARICO SIA ASSORBITO TUTTO PER FLESSIONE E NON DAL TAGLIO



$\gamma_{xz} = 0 \Rightarrow 0 = u_{,z} + w_{,x}$

$u' = -w'_{,x}$

$\gamma_{yz} = 0 \Rightarrow 0 = v_{,z} + w_{,y}$

$v' = -w'_{,y}$

→ PIASTRA DI KIRCHHOFF ←

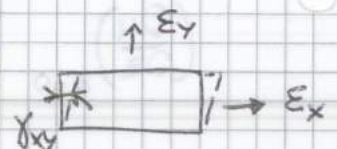
SPOSTAMENTI

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y,z) = u^{(0)}(x,y) - z \cdot w'_{,x}(x,y) \\ v(x,y,z) = v^{(0)}(x,y) - z \cdot w'_{,y}(x,y) \\ w(x,y,z) = w^{(0)}(x,y) \end{cases}$$

DEF.

$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$\Rightarrow$  CI SONO SOLO  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$



$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^{(0)} \\ v_{,y}^{(0)} \\ u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} \end{Bmatrix} - z \cdot \begin{Bmatrix} w_{,xx}^{(0)} \\ w_{,yy}^{(0)} \\ 2w_{,xy}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

↓  
**DEFORMAZIONE MEMBRANALE**  
 punti del piano medio che si deformano RIMANENDO NEL PIANO

↓  
**(-) CURVATURA DELLA SUPERFICIE**

$w_{,xy}^{(0)} = (w_{,x})_{,y}$

la pendenza lungo x VARIA lungo y!

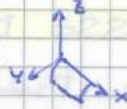
**INGOBBAMENTO / TORSIONE DELLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO**

**CURVATURE**

$-w_{,xx}^{(0)} = K_x$

$-w_{,yy}^{(0)} = K_y$

$-2w_{,xy}^{(0)} = K_{xy}$



→  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_r^{(0)}\} + z \cdot \{K_r\}$

## STRUTTURE AERONAUTICHE 27/03/2014

SPOSTAMENTI  $\xrightarrow{\text{derivate 2e}}$  DEFORMAZIONI  $\xrightarrow{\text{HOOKE}}$  TENSIONI

Tensioni

$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon_r\}$

[C] materiali **ORTOTROPI**

Sviluppando i prodotti:

$\tau_{xz} = C_{44} \gamma_{xz}$

$\tau_{yz} = C_{55} \gamma_{yz}$

poiché  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

→  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

• Assumiamo  $\sigma_{zz} = 0$  (in realtà c'è ma è trascur.)

⇒  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{zz} = 0$

**PLAIN STRESS** = stato di tensione piano

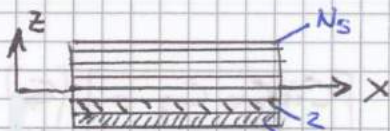
[stato tensione piano  $\neq$  stato def. piano, da legge Hooke] \*→

⇒ equazioni costitutive singola lamina vanno "rotolate" xk scriverle rispetto al sistema geometrico x-y

MATRICE  $[Q]$  con ZERI = RIFERITA AD ASSI DI ORTOTROPIA (LAMINA)

MATRICE  $[Q]$  piena = RIFERITA AD ASSI GEOMETRICI

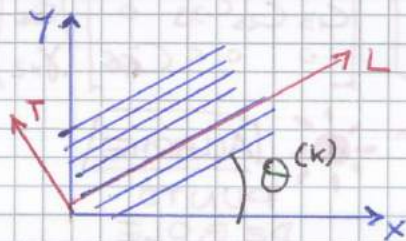
$[Q_p]$  = riferita ad ASSI PRINCIPALI DI ORTOTROPIA



Numeraazione STRATI (layers)

Da z (-) a z (+)

Strato generico (k)



$\theta^{(k)}$ : angolo di orientamento delle fibre del generico strato k rispetto all'asse x

$[\Lambda^{(k)}]$ : matrice coseni direttori

$$[\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta^{(k)} & \sin^2 \theta^{(k)} & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta^{(k)} & \cos^2 \theta^{(k)} & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & +\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta^{(k)} - \sin^2 \theta^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma_p\} = [\Lambda^{(k)}] \{\sigma\}$$

$$\{\epsilon_p\} = [\Lambda^{(k)}] \{\epsilon\}$$

La legge di trasformazione è la stessa SOLO SE STIAMO UTILIZZANDO LE DEFINIZIONI TENSORIALI delle deformazioni [NO  $\epsilon_y$  !!]

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \text{ e NON } \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = [\Lambda]^{-1} [Q_p] [\Lambda]^T$$

Una volta noto il materiale

- $E_L$
- $E_T$
- $\nu_{LT}$
- $\nu_{TL}$

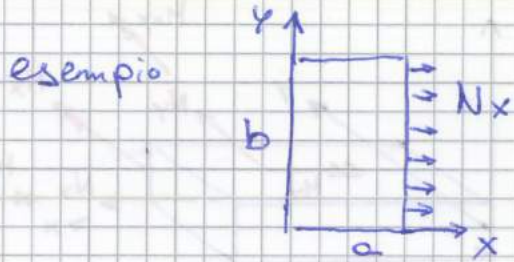
$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}$$

[ISOTROPO  
 $\nu_{TL} = \nu_{LT}$ ]

$$[Q_p] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}$$



**⚠ NELLE PIASTRE GLI SFORZI (T, N, M) NON SONO FORZE, MA FORZE PER UNITÀ DI LUNGHEZZA!!!**



$$N_x = 100 \frac{N}{mm}$$

**Risultante =  $b \cdot N_x$**

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \int_a \tau ds$$

**FLUSSO DI TAGLIO**

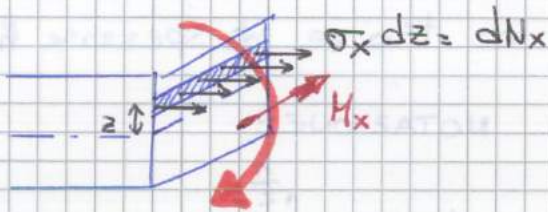
$$N_x = \langle \sigma_x \rangle$$

$$N_y = \langle \sigma_y \rangle$$

$$N_{xy} = \langle \tau_{xy} \rangle$$



**MOMENTO**



$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} dN_x \cdot z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

**⚠ NELLA PIASTRA  $M_x$  È QUELLO CAUSATO DALLE  $\sigma_x$ ,  $M_y$  quello causato dalle  $\sigma_y$ ,  $M_{xy}$  quello dato dalle  $\tau_{xy}$**

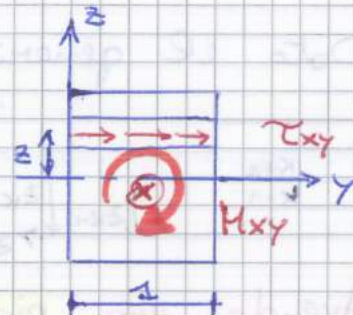
$$M_x = \langle \sigma_x \cdot z \rangle$$

$$M_y = \langle \sigma_y \cdot z \rangle$$

$$M_{xy} = \langle \tau_{xy} \cdot z \rangle$$

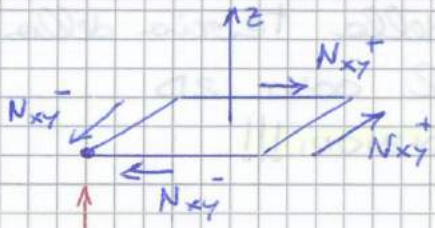
$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z dz$$

**MOMENTO TORCENTE**



Anche il momento è un momento per unità di lunghezza →  $[N \cdot \frac{mm}{mm}]$

## ROTAZIONE ATTORNO Z



POLO ATTORNO CUI FACCIAMO MOMENTO

Contributo gradienti:

$$N_{xy,x} dx dy dx - N_{xy,y} dy dy dx = 0$$

↑  
braccio

infinitesimo 3° ordine

Contributo forze

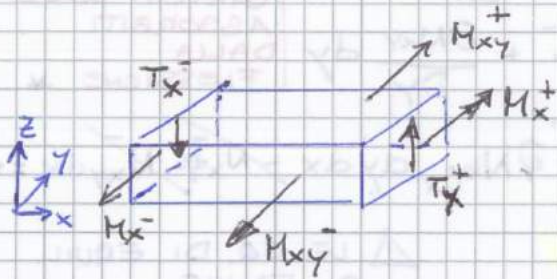
$$N_{xy} dy dx - N_{xy} dy dx = 0$$

SE VALE TEOREMA DI RECIPROCIITÀ È AUTOMATICAMENTE SODDISFATTO L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE ATTORNO a z.

$$N_{xy}^+ = N_{xy}^- + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx$$

$$N_{xy}^+ = N_{xy}^- + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy$$

## ROTAZIONE ATTORNO Y



$$\begin{aligned} & (M_{xy}^- + M_{xy,x} dx - M_{xy}^+) dy + \\ & + (M_{xy}^- + M_{xy,y} dy - M_{xy}^+) dx + \\ & - (T_x^- + T_{x,x} dx) dy dx = 0 \end{aligned}$$

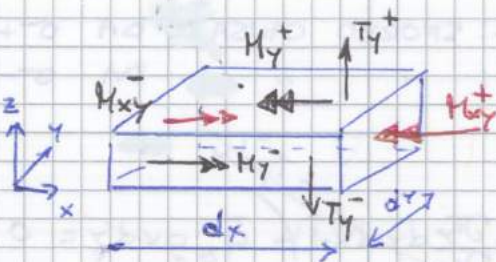
BRACCIA

$$\Rightarrow M_{x,x} dx dy + M_{x,y} dy dx - T_x dy dx - T_{x,x} dx dy dx = 0$$

INF. 3° ord.

$$M_{x,x} + M_{x,y} - T_x = 0$$

## ROTAZIONE ATTORNO X



$$\begin{aligned} & (-M_{xy}^- - M_{xy,y} dy + M_{xy}^+) dx + \\ & + (T_y^- + T_{y,y} dy) dx dy + \\ & + (-M_{xy}^- - M_{xy,x} dx + M_{xy}^+) dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -M_{y,y} dx dy + T_y^- dx dy + T_{y,y} dy dx dy - M_{y,x} dx dy = 0$$

RESULT. BRACCIO INFINITESIMO

$$M_{y,x} + M_{y,y} - T_y = 0$$

**LEGAME RESULTANTI  $\Leftrightarrow$  VARIABILI CINEMATICHE**

$(N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy})$

$(u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)})$



**EQUAZIONI COSTITUTIVE PIASTRA**

$\{\sigma\} = [Q]\{\epsilon_r\}$

$\{\epsilon_r\} = \{\epsilon_r^{(0)}\} + z\{k_r\}$

$\{N\} = \langle \{\sigma\} \rangle$

$\{M\} = \langle z \cdot \{\sigma\} \rangle$

$\{N\} = \langle \{\sigma\} \rangle$

$= \langle [Q]\{\epsilon_r\} \rangle$

$= \langle [Q](\{\epsilon_r^{(0)}\} + z\{k_r\}) \rangle$

$= \langle [Q] \rangle \{\epsilon_r^{(0)}\} + \langle z [Q] \rangle \{k_r\}$

$\downarrow$   
**[A]**

$\downarrow$   
**[B]**

$\{\epsilon_r^{(0)}\}$

NON DIPENDE DA Z

**[Q]**

SE LA PIASTRA È MULTISTRATO DIPENDE DA Z!

è funz. di (x, y)

• SE [Q] È 3x3

→  $\langle [Q] \rangle$  È

ANCORA 3x3

$\Rightarrow \boxed{\{N\} = [A]\{\epsilon_r^{(0)}\} + [B]\{k_r\}}$

$\{M\} = \langle z \{\sigma\} \rangle$

$= \langle z [Q]\{\epsilon_r\} \rangle$

$= \langle [Q](z\{\epsilon_r^{(0)}\} + z^2\{k_r\}) \rangle$

$= \langle z [Q] \rangle \{\epsilon_r^{(0)}\} + \langle z^2 [Q] \rangle \{k_r\}$

$\downarrow$   
**[B]**

$\downarrow$   
**[D]**

$\Rightarrow \boxed{\{M\} = [B]\{\epsilon_r^{(0)}\} + [D]\{k_r\}}$

[A] = MATRICE RIGIDEZZA MEMBRANALE

[D] = " " FLESSO-TORSIONALE

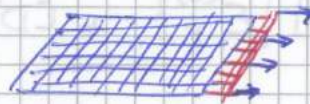
[B] = " " DI ACCOPPIAMENTO

# STRUTTURE AERONAUTICHE

1/04/2014

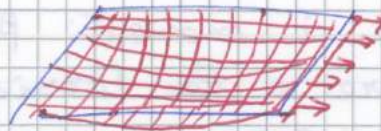
## SYMMETRIC CROSS-PLY PLATE

0° / 90°



## UNSYMMETRIC CROSS-PLY PLATE

0°/90°/0°/90°



[A] di questa piastra sono uguale a quello del caso simmetrico

[B] ≠ 0

## SCHEMA

Eq. costitutive

$$\{N\} = [A] \{E_y^{(0)}\} + [B] \{K_r\}$$

$$\{M\} = [B] \{E_y^{(0)}\} + [D] \{K_r\}$$

$$\{E_y^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^{(0)} \\ v_{,y}^{(0)} \\ u_{,y} + v_{,x}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

$$\{K_r\} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx}^{(0)} \\ w_{,yy}^{(0)} \\ 2w_{,xy}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

Eq. di equilibrio

$N_{x,x} \rightarrow$  derivate SECONDE DEGLI SPOSTAMENTI

$[A] \{E_y^{(0)}\} \rightarrow A_{ij}$  moltiplica deriv. 2<sup>e</sup>

+ derivate TERZE DI  $w^{(0)}$

$[B] \{K_r\} \rightarrow B_{ij}$  moltiplica deriv. 3<sup>e</sup>

Vogliamo esprimere le eq. di equilibrio in termini di  $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$

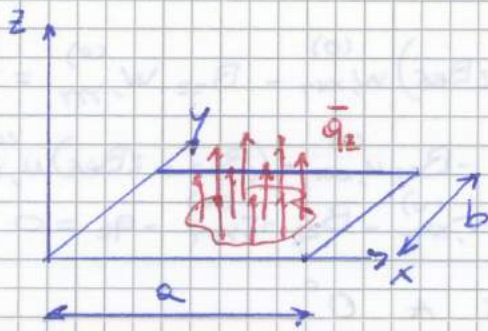
$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$M_{x,xx} \rightarrow B_{ij}$  moltiplica DERIVATE 3<sup>e</sup>

$D_{ij}$  " " DERIVATE 4<sup>e</sup>

CONSIDERIAMO PRIMA IL CASO GENERALE : unsymmetric cross-ply

$$D_{11} w_{,xxxx}^{(0)} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{,xxyy}^{(0)} + D_{22} w_{,yyyy}^{(0)} = \bar{q}_z$$

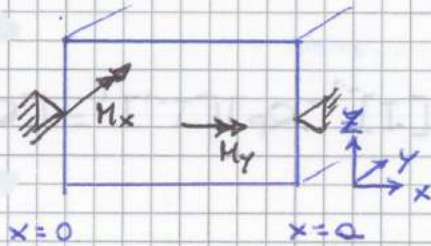


EQ. DIFFERENZIALE 4° ORDINE  
 → imporre condizioni al contorno

+ SEMPLICE:

APPOGGIATA SUI 4 LATI

4 APPOGGI



$$x=0, x=a) \quad w^{(0)} = 0$$

$$M_x = 0$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

$$y=0, y=b) \quad w^{(0)} = 0$$

$$M_y = 0$$

MISTE:  
 SPOSTAM + CDS

[ APPOGGIO = CERNIERA ⇒ MOMENTO = 0 ]

→ Trasformare la condizione al contorno su M in una condizione su w

$$M_x = -D_{11} w_{,xx}^{(0)} - D_{12} w_{,yy}^{(0)}$$

[no termini in B<sub>ij</sub>; x<sup>k</sup> è simm]

Cross-ply symmetric  $D_{16} = D_{26} = 0$  [B]=[0]

$$\{M\} = [D] \{k\}$$

$$M_x = D_{11} k_x + D_{12} k_y = -D_{11} w_{,xx}^{(0)} - D_{12} w_{,yy}^{(0)}$$

→ quindi su lati  $x=0, x=a$  :

$$-D_{11} w_{,xx}^{(0)} - D_{12} w_{,yy}^{(0)} = 0$$



Se  $[w^{(0)} = 0]_{x=0} \Rightarrow$  ANCHE  $[w_{,yy}^{(0)} = 0]_{x=0}$

Perciò rimarrebbe  $-D_{11} w_{,xx}^{(0)} = 0$

MA VISTO CHE  $D_{11} \neq 0$

⇒ la condizione si riduce a  $w_{,xx}^{(0)} = 0$

SE W DEVE ESSERE 0 SU TUTTA LA LINEA  $x=0$  → NON POTRÀ VARIARE LUNGO y PER  $x=0$ ! analogo per  $x=a$

DISCORSO ANALOGO SULLE LINEE  $y=0$  e  $y=b$

$$w^{(0)}_{,yyyy} = W \frac{\pi^4}{b^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

[...]

Sbattiamo tutto nell'equazione differenziale iniziale

$$W \left[ D_{11} \frac{\pi^4}{a^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\pi^4}{a^2 b^2} + D_{22} \frac{\pi^4}{b^4} \right] = \bar{q}_z^{(0)}$$

e ci ricaviamo l'AMPIEZZA

[  $\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$  si semplificano TUTTI tra 1° e 2° membro ]

$$W = \frac{\bar{q}_z^{(0)}}{\frac{\pi^4}{a^4} \left[ D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{a^2}{b^2} + D_{22} \frac{a^4}{b^4} \right]}$$

AMPIEZZA CHE SODDISFA L'EQ. DIFFERENZIALE

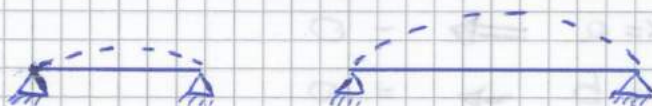
$\frac{a}{b} = \nu \rightarrow$  rapporto di forma in pianta

- Mettiamo in evidenza  $D_{11}$  per ottenere un blocco adimensionale

$$\text{RIGIDEZZA} = \frac{\text{CARICO}}{\text{DEFORMAZIONE}}$$

$W =$  freccia, deformazione [  $\bar{e}$  è l'ampiezza di  $w(x,y)$  ]

$W \bar{e} \propto a^4 \Rightarrow$  +  $\bar{e}$  lunga la piastra + si inflette (convio)



MASSIMA DEFLESSIONE PER  $\frac{a}{2}$  e  $\frac{b}{2}$

Consideriamo ora una DISTRIBUZIONE DI CARICO QUALSIASI

$\Rightarrow$  esprimibile in SERIE DI FOURIER

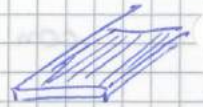
# STRUTTURE AERONAUTICHE

3/04/2014

## PIASTRA SINGLE LAYER



● MATERIALE ORTOTROPO



$$[A] = [Q] \cdot h$$

$$[B] = 0$$

$$[D] = \frac{1}{3} [Q] \left( \left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} [Q] \left( \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{1}{12} [Q] h^3$$

● MATERIALE ISOTROPO (→ piastra alluminio)

$$E_L = E_T = E$$

$$\nu_{LT} = \nu_{TL} = \nu$$

$$G_{LT} = G_{TL} = G$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = A_{12} = A = \frac{E}{1-\nu^2} h$$

$$D_{11} = D_{22} = D = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}$$

Rigidità flessionale

Perché ci siamo preoccupati + del carico trasversale che del carico nel piano?

Perché nelle costruzioni aeronautiche il principale carico è quello di PORTANZA ( $L \gg D$ )

$[A]$  = RIGIDEZZA NEL PIANO

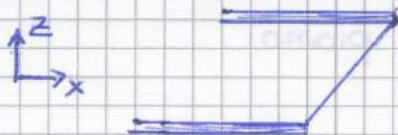
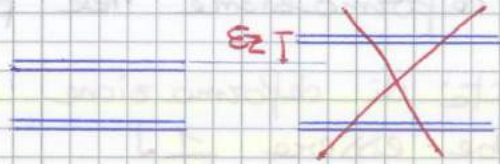
$[D]$  = " FLESS → rapporto tra quanto carico e quanto si deforma

Assumiamo  $h = 1 \text{ mm}$

$$A = \frac{E}{1-\nu^2}$$

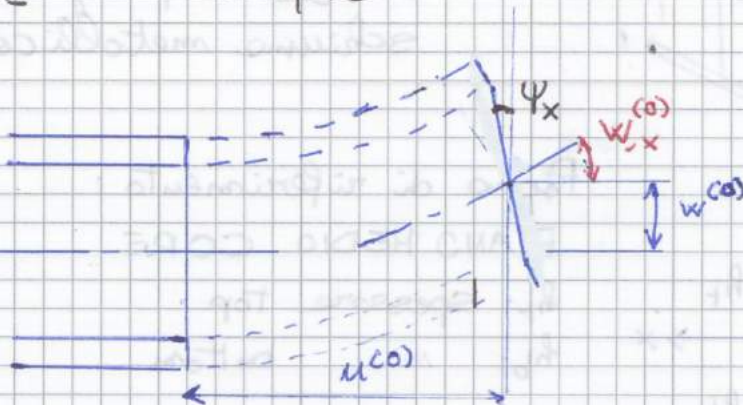
$$D = \frac{E}{12(1-\nu^2)}$$

- **MATERIALE DEL CORE È TRASVERSALMENTE ISOTROPO**
- $h \gg h_f, h_b$ : Spessore facce  $\sim 1\text{mm}$   
Spessore core  $\sim 1\text{cm}$
- Spostamento trasversale è costante, non dipende da  $z \rightarrow \epsilon_z \approx 0$
- Spostamenti nel piano  $u, v$  sono uniformi lungo lo spessore delle piastre **E LINEARI LUNGO IL CORE**



- ▶ **FACCE**: SI COMPORTANO COME PIASTRA DI KIRCHHOFF
- CORE**:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \approx 0$
- ▶ **CORE**: ostacolo agli sforzi di taglio **TRASVERSALI**  
 $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$

$\sigma_z \approx 0$  ovunque



Piccoli angoli

$$\psi_x \approx \tan \psi_x = \frac{\partial u}{\partial z} = \chi_{xz}$$

$$\chi_{xz} = \chi_{xz} + w_{,xz}$$

$$\rightarrow \psi_x = \chi_{xz} - w_{,xz}$$

$$u = u^{(0)} + z M^{(1)}$$

$$v = v^{(0)} + z v^{(1)}$$

$$w = w^{(0)}$$

**CORE**

$$u^{(1)} = \psi_x$$

$$v^{(1)} = \psi_y$$

FACCE  $\chi_{xz} = \chi_{yz} = 0$

$\chi_{xz} \neq 0$   $\chi_{yz} \neq 0$



## Sullo spessore della faccia.

Core

$$\{\gamma^{(c)}\} = \{\gamma^{(c)}\} \begin{cases} \gamma_{xz}^{(c)} = \psi_x + w_{,x}^{(c)} = u_{,z} + w_{,x} \\ \gamma_{yz}^{(c)} = \psi_y + w_{,y}^{(c)} = v_{,z} + w_{,y} \end{cases}$$

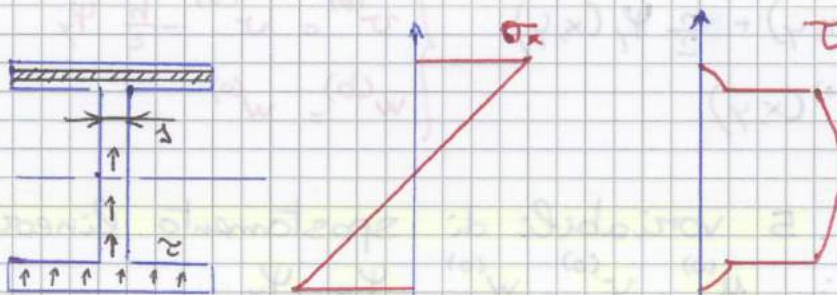
Questo modello di piastra ci dice che  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  sono costanti sullo spessore del core.

⇒ PURE  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  SARANNO COSTANTI SU LO SPESSORE DEL CORE

$$\tau_{xz} = C_{44} \gamma_{xz} + C_{55} \gamma_{yz}$$

cost. perché il core è un solo strato  
 costanti lungo spessore

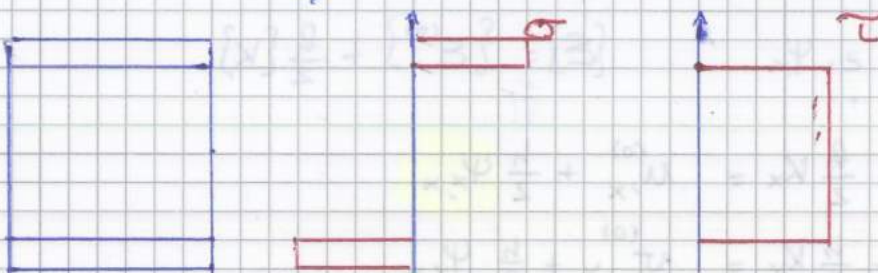
IL COMPORTAMENTO DI UN PANNELLO SANDWICH (o anche una trave sandwich) È ASSIMILABILE A QUELLO DI UNA TRAVE A I



$$M = \int \sigma_x \cdot z \, dA$$

IL 95% DEL MOMENTO FLETTENTE È ASSORBITO DALLE SOLETTE

⇒ LE FACCE ASSORBONO LE  $\sigma$



⊗ frutto delle ipotesi fatte

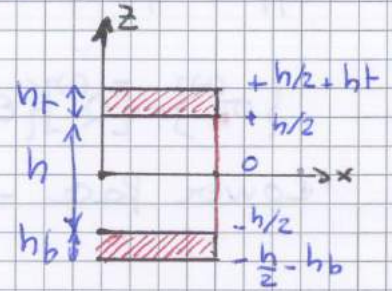
$$T = \int \tau_{xz} \, dA$$

IL TAGLIO È ASSORBITO QUASI TUTTO DA ANIMA / CORE

Per  $s \rightarrow 0$  e minima alte l'approx è + precisa

$$\{N\} = \int_{-\frac{h}{2}-h_b}^{+\frac{h}{2}+h_t} \{\sigma\} dz = \int_{-\frac{h}{2}-h_b}^{-\frac{h}{2}} \{\sigma^{(b)}\} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}+h_t} \{\sigma^{(t)}\} dz \quad N \rightarrow \text{SOLO FACCE}$$

$$\{T\} = \int_{-\frac{h}{2}-h_b}^{+\frac{h}{2}+h_t} \{\tau\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \{\tau^{(c)}\} dz \quad T \rightarrow \text{SOLO CORE}$$



$$\{M\} = \int_{-\frac{h}{2}-h_b}^{+\frac{h}{2}+h_t} z \{\sigma\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \{\sigma^{(c)}\} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}+h_t} z \{\sigma^{(t)}\} dz \quad M \rightarrow \text{SOLO FACCE}$$

⚠ SONO SEMPRE FORZE X UNITÀ DI LUNGHEZZA

### EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\{N\} = [A] \{\epsilon^{(c)}\} + [B] \{k\}$$

$$\{M\} = [C] \{\epsilon^{(c)}\} + [D] \{k\}$$

$$\{T\} = [A_T] \{\gamma^{(c)}\}$$

piastre sandwich



$$\Delta [A^{(c)}] = \int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}+h_t} [Q] dz$$

$$[A] = [A^{(t)}] + [A^{(b)}]$$

$$[B] = \frac{b}{2} ([A^{(t)}] - [A^{(b)}])$$

$$[C^{(c)}] = \int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}+h_t} z [Q] dz$$

$$[D] = \frac{b}{2} ([C^{(t)}] - [C^{(b)}])$$

SONO DIVERSE DA QUELLE DELLA PIASTRA DI KIRCHOFF!

$$\{N\} = \int_{-\frac{h}{2}-h_b}^{-\frac{h}{2}} \{\sigma^{(b)}\} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}+h_t} \{\sigma^{(t)}\} dz =$$

$$\int \{\sigma\} dz = \int [Q^{(b)}] \{\epsilon^{(b)}\} dz = \int [Q^{(b)}] \left( \{\epsilon^{(c)}\} - \frac{b}{2} \{k\} \right) dz =$$

$$= \left( \int [Q^{(b)}] dz \right) \{\epsilon^{(c)}\} - \left( \int \frac{b}{2} [Q^{(b)}] dz \right) \{k\} =$$

$$= [A^{(b)}] \{\epsilon^{(c)}\} - \frac{b}{2} [A^{(b)}] \{k\}$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}+h_t} \{\sigma^{(t)}\} dz = [A^{(t)}] \{\epsilon^{(c)}\} + \frac{b}{2} [A^{(t)}] \{k\}$$

$$\{N\} = \underbrace{\left( [A^{(b)}] + [A^{(t)}] \right)}_{[A]} \{\epsilon^{(c)}\} + \frac{b}{2} \underbrace{\left( [A^{(t)}] - [A^{(b)}] \right)}_{[B]} \{k\}$$

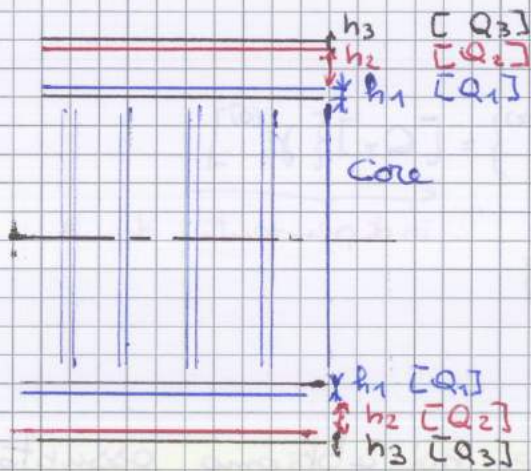
$$N_{x,x} = A_{11} u_{,xx}^{(0)} + A_{12} v_{,xy}^{(0)} + A_{16} (u_{,xy}^{(0)} + v_{,xx}^{(0)}) + B_{11} \Psi_{x,xx} + B_{12} \Psi_{y,xy} + B_{16} (\Psi_{x,xy} + \Psi_{y,xx})$$

[L<sub>33</sub>] è una **ROTTURA!** ⚡

Si ottiene un sistema di 5 equazioni in  $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}, \Psi_x, \Psi_y$

■ EQUAZ. EQUIL. formulaz. agli SPOSTAMENTI

PIASTRA SIMMETRICA:  $h_1 = h_3$  e sono cross-ply dello stesso materiale



■ Simmetria

▷ GEOMETRICA

▷ MATERIALI

$$[B] = 0$$

■ CROSS-PLY laminated

$$Q_{16} = Q_{26} = 0$$

$$\rightarrow x) A_{11} u_{,xx}^{(0)} + A_{12} u_{,yy}^{(0)} + (A_{12} + A_{66}) v_{,xy}^{(0)} = 0$$

$$\rightarrow y) (A_{12} + A_{66}) u_{,xy}^{(0)} + A_{66} v_{,xx}^{(0)} + A_{22} v_{,yy}^{(0)} = 0$$

$$\rightarrow z) G_{13} \cdot h (\Psi_{x,x} + w_{,xx}^{(0)}) + G_{23} h (\Psi_{y,y} + w_{,yy}^{(0)}) + \bar{q}_z = 0$$

$$\rightarrow x) D_{11} \Psi_{x,xx} + D_{66} \Psi_{x,yy} + (D_{12} + D_{66}) \Psi_{y,xy} - G_{13} h (\Psi_x + w_{,x}^{(0)}) = 0$$

$$\rightarrow y) (D_{12} + D_{66}) \Psi_{x,xy} + D_{66} \Psi_{y,xx} + D_{22} \Psi_{y,yy} - G_{23} h (\Psi_y + w_{,y}^{(0)}) = 0$$

Un gruppo di equazioni ( $\rightarrow x, \rightarrow y$ ) sono DISACCOPPIATE dalle altre 3 ( $\rightarrow z, \rightarrow x, \rightarrow y$ )

⇒ **COMPORIAMENTO NEL PIANO È DISACCOPPIATO DA COMPORIAMENTO FUORI DAL PIANO**

... e del comportamento nel piano ce ne freghiamo!

# STRUTTURE AERONAUTICHE 8/04/2014

## INSTABILITÀ ELASTICA

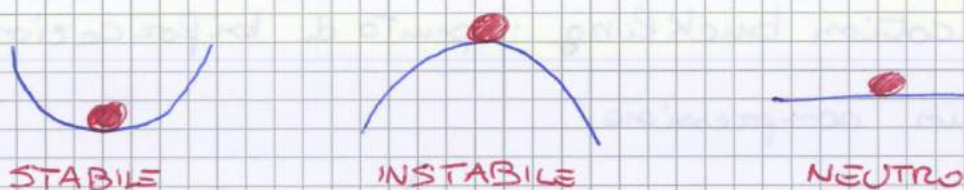
Strutture a semiguscio sono molto sottili in una direzione e soffrono di problemi di instabilità:

**CEDONO PER TENSIONI DI LAVORO  $\ll$  TENSIONI ROTTURA**  
 [cedimento  $\neq$  rottura, però il componente non svolge + la sua funzione]

**Fenomeno ELASTICO**  $\rightarrow$  avviene per tensioni di lavoro  $< \sigma$  limite di elasticità  
 $\sigma_{compress} < \sigma_p$ , i carichi critici sono in CAMPO ELASTICO, valgono  $\sim 50\% \sigma_p$

**STABILITÀ EQUILIBRIO**: equilibrio stabile  $\Leftrightarrow$  una perturbazione esterna porta una variazione infinitesima della configurazione di equilibrio e nascono **REAZIONI INTERNE CHE RIPORTANO IL SISTEMA IN EQUILIBRIO**

$\Rightarrow$  **EQUILIBRIO STABILE**: data una piccola perturbazione il sistema ritorna in config. di equilibrio



Se perturbo un equilibrio stabile ESSO TORNERÀ ALLA CONFIG. DI EQUILIBRIO DOPO UN CERTO NUMERO DI OSCILLAZIONI

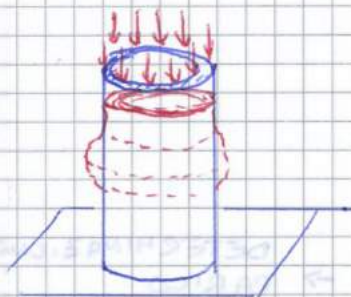
$\rightarrow$  sarebbe un **problema DINAMICO** (stabilità dinamica) ma se consideriamo l'intorno del punto di equilibrio possiamo fare un'analisi statica.

■ **PRIMA** determino la configurazione di equilibrio e **POI STUDIO SE QUELLA CONFIGURAZIONE È STABILE**

Cioè, non si va al collasso,  $P \downarrow$  e si arriva al punto B dove si ha una BIFORCAZIONE

- ↗ CORPO RESTA CON LA SUA FORMA
- ↘ CORPO SI DEFORMA SI BRUTTO

Ⓐ si è raggiunta la tensione di rottura  
 Questo nelle prove di laboratorio  
 NELLE STRUTTURE REALI, DOPO LA VERIFICA  
 DI ROBUSTEZZA, SI STA BEN AL DI SOTTO DEL  
 PUNTO DI ROTTURA... il punto B) però potrebbe  
 stare PRIMA di A)! (molto prob. è così! :))



- STRUTTURA SIMMETRICA
  - PERFETTAMENTE APPOGGIATA
  - " CARICATA
- } Simmetria  
 circolare
- Risolvendo la soluzione  
 ha simmetria circolare  
 (ingobbamento simmetrico)



POST-BUCKLING  
 Teste di cebra

- ⚠ NELLA REALTÀ PERO SI HA  
 UN INGOMBAMENTO NON A SIMMETRIA  
 RADIALE, che non può essere  
 predetto dalle equazioni!  
 → bisogna perturbare i corichi  
 × ottenere quel risultato
- POST-BUCKLING
- corico non  
 perfetto,  
 struttura  
 non perfetta

Noi ci chiederemo solo: esiste un punto di  
 biforcazione? SÌ ⇒ BISOGNA STARNE LONTANI

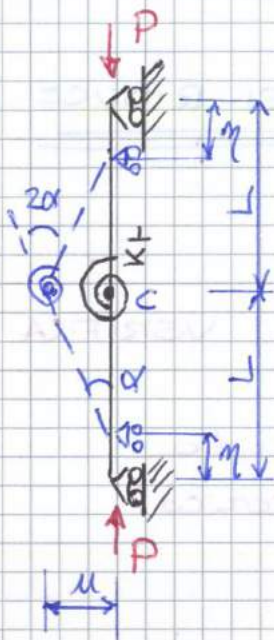
## CRITERI per STABILITÀ ELASTICA

### 1) CRITERIO DELL'ENERGIA

La condizione di equilibrio di un sistema conservativo  
 è stabile se il VALORE DELL'ENERGIA POTENZIALE  
 TOTALE È UN MINIMO RELATIVO

→ derivata 2<sup>a</sup> en. potenziale rispetto a un parametro  
 $\ddot{e} > 0$  ↑

# 1° MODELLO ELEMENTARE



- Sistema inizialmente perfetto
- Un solo grado di libertà (per scegliere  $\alpha, u, \eta$ )
- Simmetrico

USIAMO  $\alpha$  COME GRADO DI LIBERTÀ

$$u = L \sin \alpha \quad \eta = L(1 - \cos \alpha)$$

$$\delta u = L \cos \alpha \delta \alpha \quad \delta \eta = L \sin \alpha \delta \alpha$$

PLV

$$\delta \Phi = \delta L^{(e)}$$

$$\delta L_i = \delta L_e$$

↑  
energia def. elastica

$$\Phi = \frac{1}{2} k_t (2\alpha)^2$$

ENERGIA DEFORMAZIONE MOLLA DI TORSIONE

$$L = 2P \cdot \eta = 2PL(1 - \cos \alpha) \quad \text{LAVORO FORZE ESTERNE}$$

$$\delta \Phi = 4k_t \alpha \delta \alpha \quad \delta L^{(e)} = 2PL \sin \alpha \delta \alpha$$

$$4k_t \alpha \delta \alpha = 2PL \sin \alpha \delta \alpha$$

$$(2PL \sin \alpha - 4k_t \cdot \alpha) \delta \alpha = 0$$

$\delta \alpha =$  spostamento VIRTUALE  $\Rightarrow$  arbitrario

$$2PL \sin \alpha - 4k_t \cdot \alpha = 0$$

Soluzioni:  $\alpha = 0$

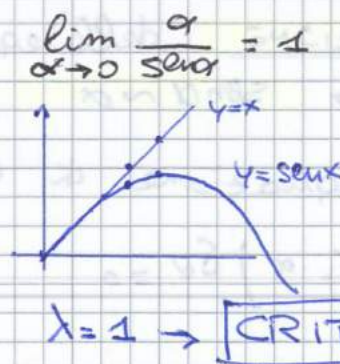
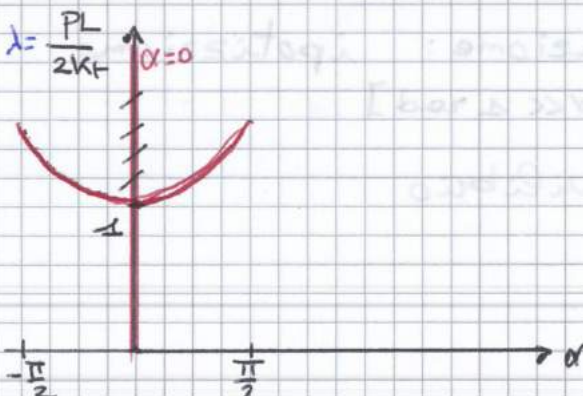
$$\frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{PL}{2k_t}$$

} 2 stati di equilibrio del sistema

■ NON LINEARITÀ GEOMETRICA

■ MATERIALE LINEARE ELASTICO

$\lambda =$  parametro di carico



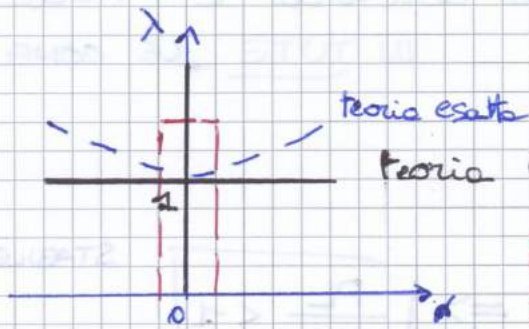
Soluzioni:

$$4K_T \left( \frac{PL}{2K_T} - 1 \right) \alpha = 0$$

$$\boxed{\alpha = 0}$$

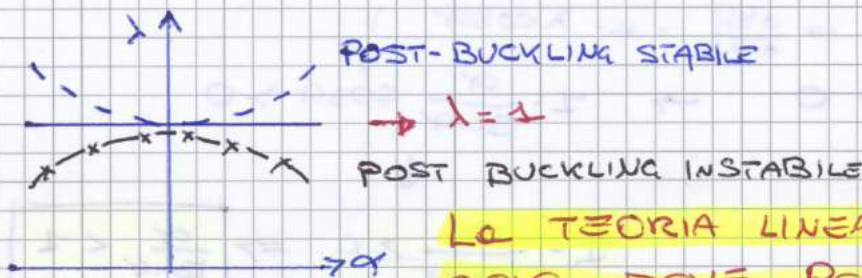
$$\frac{PL}{2K_T} - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

se  $\lambda = 1$   $\alpha$  può essere qualsiasi



Nell'intorno di  $\alpha = 0$  la teoria linearizzata approssima molto bene la teoria esatta  $\rightarrow$  confondo la curva effettiva con la tangente

Il modello lineare ci dice "guarda che a  $\lambda = 1$  c'è un problema" PERÒ la teoria lineare NON CI DICE NULLA SULLA STABILITÀ!



La TEORIA LINEARE CI DICE SOLO DOVE POTREBBE ESSERE UN PROBLEMA

Nota: questo è un sistema a UN grado di libertà! Quelli a + gradi di libertà è difficile o impossibile rappresentarli con una funzione  $\rightarrow$  serve un criterio MATEMATICO

CRITERIO DELL'ENERGIA [STUDIO STABILITÀ]

$$\bar{E}_T = \bar{\Phi} + V = \frac{1}{2} K_T (2\alpha)^2 - \underbrace{2PL(1 - \cos \alpha)}_{\text{EN. POTENZIALE CARICHI ESTERNI}} \quad \text{conservativi} *$$

Equilibrio = STAZIONARIETÀ DELL'ENERGIA POTENZIALE  
Stabilità = valutare segno derivata 2<sup>a</sup>

$$\frac{d\bar{E}_T}{d\alpha} = 4K_T \cdot \alpha - 2PL \sin \alpha$$

$$\frac{d^2 \bar{E}_T}{d\alpha^2} = 4K_T - 2PL \cos \alpha$$

\* LAVORO CARICHI ESTERNI conservativi = VARIAZIONE DEL POTENZIALE vedi "PRINCIPI ENERGETICI"

# EFFETTO IMPERFEZIONI STRUTTURA



Imperfezione iniziale:  $\alpha_0 \neq 0$

• Ci si riferisce comunque alla configurazione perfetta

$$E_t = \frac{1}{2} k_t (2\alpha - 2\alpha_0)^2 - 2PL (\cos\alpha - (1 - \cos\alpha_0))$$

• La deformazione dovuta al carico è  $(2\alpha - 2\alpha_0)$ , perché  $\alpha_0$  c'è già prima di caricare

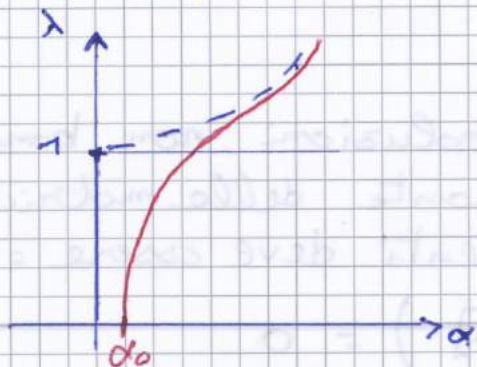
Calcolo dell'equilibrio:  $\frac{dE_t}{d\alpha} = 0$

$$\frac{dE_t}{d\alpha} = 2k_t(2\alpha - 2\alpha_0) - 2PL \sin\alpha = 0$$

$$\frac{PL}{2k_t} = \frac{\alpha - \alpha_0}{\sin\alpha}$$

$$\lambda = \frac{\alpha - \alpha_0}{\sin\alpha}$$

UNICA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO



## IMPERFEZIONE

- 1) Diagramma non è + simmetrico
- 2) MANCA UN PUNTO DI BIFORCAZIONE
- 3) Asintoticamente il diagramma tende a quello della struttura perfetta

(→ + DEFORMI MENO RESA L'IMPERFEZIONE INIZIALE)

Stabilità:  $\frac{d^2E_t}{d\alpha^2} > 0$

$$\frac{d^2E_t}{d\alpha^2} = 4k_t - 2PL \cos\alpha$$

$$4k_t - 2PL \cos\alpha > 0 \rightarrow k_t(1 - \lambda \cos\alpha) > 0$$

• all'equilibrio:  $\lambda = \frac{\alpha - \alpha_0}{\sin\alpha}$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{\tan\alpha} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha - \alpha_0}{\tan\alpha} < 1$$

È SEMPRE STABILE

Andiamo ora a linearizzare



⚠ Fissati i carichi, la geometria ecc ecc sotto un certo carico esistono 2 configurazioni di equilibrio? SE SÌ QUELLO È UN CARICO DI BIFORCAZIONE



2) SIST. PERFETTO

$$\alpha_{eq} = 0 \quad \lambda = \frac{\alpha_{eq}}{\sin \alpha_{eq}}$$

Q1) ANALISI NON LINEARE

$$\text{Eq. equil. } \frac{4K_L \alpha}{4K_L} - \frac{2FL \sin \alpha}{4K_L} = 0 \rightarrow \alpha - \lambda \sin \alpha = 0$$

⚠ L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO È NON LINEARE

- UNA VOLTA POSIZIONATI IN UN PUNTO DI EQUILIBRIO (calcolata con analisi lineare) MI CHIEDO SE È STABILE E LI <sup>NON</sup> PERTURBO E LINEARIZZO

$$\alpha = \alpha_{eq} + \epsilon \alpha^{(1)}$$

Se l'equazione dell'equil. è soddisfatta pure <sup>da</sup> questa  $\Rightarrow$  anche qui a sarà una condiz. di equilibrio

Eq. equilibrio  $\alpha - \lambda \sin \alpha = 0$

$$\alpha_{eq} + \epsilon \alpha^{(1)} - \lambda \sin \alpha_{eq} \cos \epsilon \alpha^{(1)} - \lambda \sin \epsilon \alpha^{(1)} \cos \alpha_{eq} = 0$$

PICCOLE PERTURBAZIONI  $\alpha^{(1)} \ll 1 \text{ rad}$

$$\rightarrow \alpha_{eq} + \epsilon \alpha^{(1)} - \lambda \sin \alpha_{eq} - \lambda \epsilon \alpha^{(1)} \cos \alpha_{eq} = 0$$

$$\underbrace{\alpha_{eq} - \lambda \sin \alpha_{eq}}_{= 0, \text{ equilibrio iniziale}} + \epsilon \alpha^{(1)} (1 - \lambda \cos \alpha_{eq}) = 0$$

EQ. EQUILIBRIO CONFIG. (DEFORMATA) PERTURBATA

EQUAZIONE DI STABILITÀ

ovvero EQ. DI EQUILIBRIO + TERMINI PERTURBATI - TERMINI DI EQUILIBRIO INIZIALE

$$1 - \lambda \cos \alpha_{eq} = 0 \Rightarrow \alpha_{eq} = 0, \quad \lambda = 1 \quad 1^{\circ} \text{ CONFIG.}$$

$$\lambda = \frac{\alpha_{eq}}{\sin \alpha_{eq}} \rightarrow \frac{\alpha_{eq}}{\tan \alpha_{eq}} = 1$$

$\lambda = 1 \rightarrow$  livello di carico critico  $\times k$  omette anche un  $\alpha$  perturbato

Facciamo la derivata

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{d}{dx} (H w_{,x}) = 0$$

Equazione di equilibrio linearizzata

CONDIZIONI AL CONFINO

$$\begin{array}{l} X=0 \\ w=0 \\ M=0 \\ H = -\bar{P} = -\lambda \bar{P}_0 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} x=L \\ w=0 \\ M=0 \\ H = -\bar{P} = -\lambda \bar{P}_0 \end{array}$$

... ma  $H = \text{cost}$  lungo la trave  $\rightarrow H = -\lambda \bar{P}_0$  ovunque  
 $\rightarrow$  sost. nell'eq. di equilibrio

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - \lambda \bar{P}_0 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$\rightarrow EI w_{,xxxx} + \lambda \bar{P}_0 w_{,xx} = 0 \quad \text{EQ. DI EQUILIBRIO}$$

$w_{eq} = 0$  soddisfa l'eq  $\rightarrow$  è una configuraz. di equilibrio

? soddisfa anche le condiz. al contorno

$$\text{Sì: se } w_{eq} = 0 \quad w_{,xx} = 0 \rightarrow M = 0$$

È STABILE?

Utilizziamo il metodo degli equilibri vicini

$$w = w_{eq} + \epsilon w^{(1)}$$

$\rightarrow$  perturbazione  $w$

$$\rightarrow M = M_{eq} + \epsilon M^{(1)}$$

$\leftarrow$  pert. curvatura  $\leftarrow$

$$H = H_{eq} + \epsilon H_{=0}^{(1)} \quad \text{in generale !!!}$$

ma nel nostro caso  $H = \text{carico esterno}$

$$\rightarrow \epsilon H^{(1)} = 0$$

Eq. di stabilità

Eq. di equilibrio + termini perturbati togliendoci i termini di eq.

$$M_{,xx}^{(1)} + (H_{eq} w_{,x}^{(1)})_{,x} = 0$$

$$EI w_{,xxxx}^{(1)} + \lambda \bar{P}_0 w_{,xx}^{(1)} = 0$$

questa è un'eq. di stabilità, non di equilibrio (c'è  $w^{(1)}$  perturbazione)

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{EI\pi^2}{L^2 S} = \frac{E\pi^2 p^2}{L^2 S}$$

$L = p \rightarrow$   
 $p$ : raggio inerzia  
 "RAGGIO GIRATORIO"  
 (chiamato anche  $\lambda$ )

Snellezza trave / Allungamento

$$A = \frac{L}{p} \rightarrow p = \frac{L}{A}$$

$$\left[ \lambda = \frac{L}{p}, \sigma_{cr} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} \right]$$

$$\sigma_{cr} = \frac{E\pi^2 L^2}{A^2 L^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_{cr} = \frac{E\pi^2}{A^2}}$$

Tutto questo è valido fino a quando  
 $\sigma_{cr} \leq \sigma_p \Rightarrow$  CAMPO LINEARE ELASTICO

Snellezza limite

$$A_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

Se  $A > A_{lim} \rightarrow$  posso usare la formula di  
 Eulero per calcolare  $\sigma_{cr}$   
SE NO SIAMO NEL CAMPO  
DELLE ASTE CORTE

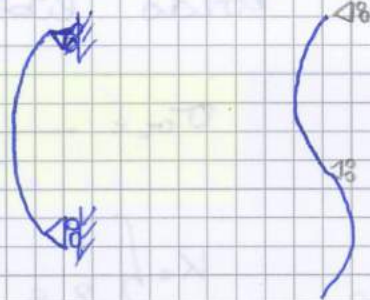
ESAME

Def. LUNGHEZZA LIBERA DI INFLESSIONE distanza tra  
 due flessi consecutivi della linea d'asse  
 deformata nel modo di Buckling

SNELLEZZA EFFETTIVA = SNELLEZZA GEOMETRICA

$$\Leftrightarrow m=1$$

$l$  = lunghezza  
 libera di  
 in flessione



SNELLEZZA GEOMETRICA:

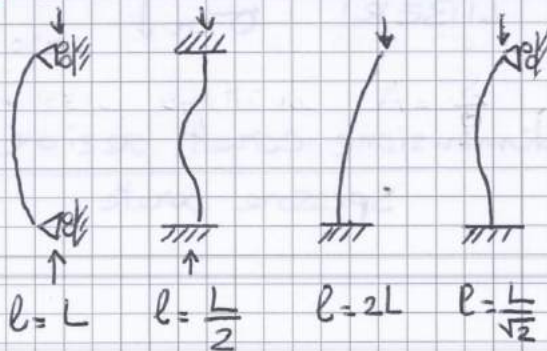
$$A_{geo} = \frac{L}{p}$$

SNELL. EFFETTIVA

$$A_{eff} = \frac{l}{p}$$

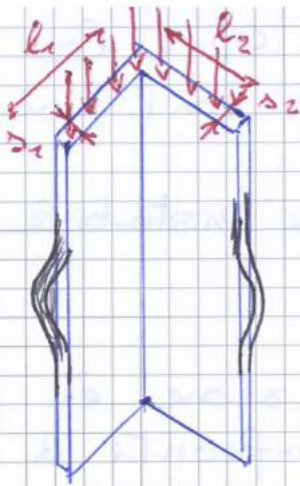
Dipende dai vincoli!

LA RIGIDEZZA DIPENDE ANCHE DAI VINCOLI



$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}}$$

SI USA  $l^2$  SOLO SE GLI  
 ESTREMI SONO INDETERMINATI



Parete sottile : lunghezza lato  $\approx$  lunghezza linea media

$$\beta_1 = \frac{l_1}{\Delta_1}$$

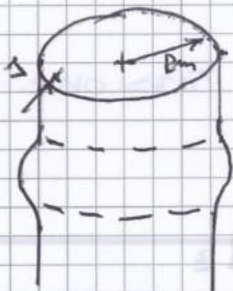
$$\beta_2 = \frac{l_2}{\Delta_2}$$

La  $\sigma_{cr}$  per questa struttura uscirà nella formula il  $\beta$  + d.t.o.

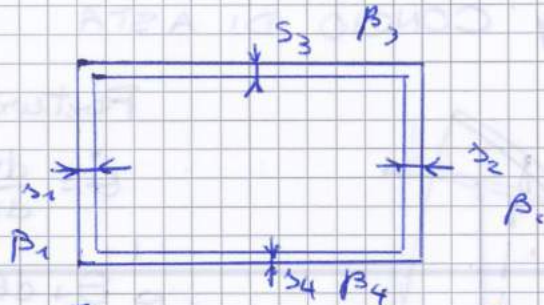
→ Si prende la minima  $\sigma_{cr}$  tra le 2 (è un calcolo conservativo = mi pare ilculo)

Se uno dei 2 bordi fosse stato rivettato allora consideravo solo l'altro bordo

### Sezione chiusa



Instabilità locale ovunque



Instabilità locale si verificherà prima dove è + alto il rapporto  $\beta$

Fino ad ora si è vista una instabilità FLESSIONALE di aste compresse

→ si imbozza

Ora:

### INSTABILITÀ TORSIONALE DI ASTE COMPRESSE

Cioè, l'asta è compressa e questa va in instabilità non flettendosi MA TORCENDOSI.

Facciamo un approccio usando il metodo degli equilibri adiacenti

COPPIA data da  $\sigma_{eq} = \text{COPPIA data da } (\tau)$

$$\sigma_{eq} \cdot du = \tau dz$$

da disegno  $du = r d\theta = r \dot{\theta} dz$

$$\rightarrow \sigma_{eq} \cdot r \dot{\theta} dz = \tau dz$$

$$\tau = r \dot{\theta} \sigma_{eq}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow M_T^{(e)} &= \int_S \tau \cdot r ds \\ &= \int_S \sigma_{eq} r^2 \dot{\theta} ds \end{aligned}$$

$$M_T^{(ext)} = \sigma_{eq} \cdot \dot{\theta} \int r^2 ds$$

$$M_T^{(ext)} = \sigma_{eq} \cdot \dot{\theta} \cdot J_p$$

$$M_T^{(int)} = G J_T \cdot \dot{\theta}$$

$$M_T^{(ext)} = M_T^{(int)}$$

$$\sigma \cdot \dot{\theta} \cdot J_p = G J_T \cdot \dot{\theta}$$

$$\rightarrow \sigma_{crit} = G \frac{J_T}{J_p}$$

Momento torcente rispetto centro di taglio. (esterno)

$\sigma_{eq}$  è uniformemente distribuita lungo la sezione  $\Rightarrow \sigma_{eq} = \text{cost}$   
 $\dot{\theta} \rightarrow \text{cost}$  rispetto  $s$

$J_p$  mom inerzia polare

MOMENTO INTERNO DI REAZIONE

$G J_T$  = rigidità torsionale

$J_T$  = modulo di rigidità torsionale

QUINDI: se la compressione dell'asta mi dà  $\sigma_{eq} > \sigma_{crit} \Rightarrow$  l'asta VA IN INSTABILITÀ TORSIONALE

# STRUTTURE AERONAUTICHE 17/04/2014

continua:

## EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

MEMO: SONO TUTTE FORZE PER UNITA' DI LUNGHEZZA  
 → DEVO MOLTIPLICARLE X IL LATO SU CUI SONO APPLICATE

$$y \uparrow) \quad dH_y dx + dH_{xy} dy = 0$$

~ lato

$$H_{xy,x} + H_{y,y} = 0$$

$$x \rightarrow) \quad H_{x,x} + H_{xy,y} = 0$$

queste 2 eq. sono le stesse della piastra di Kirchhoff senza problemi di stabilità

$$z \uparrow) \quad dV_x dy + dV_y dx = 0$$

$$V_{x,x} dx dy + V_{y,y} dy dx = 0$$

$$V_{x,x} + V_{y,y} = 0$$

Stiamo analizzando un pannello coricato SOLO nel piano

$$- \ddot{a} \downarrow) \quad - dH_{xy} dy + \underbrace{V_y \cdot dy \cdot dx}_{\text{MOMENTO DELLA COPPIA DI FORZE}} - dM_y dx - H_y dx \underbrace{w_{y,y} dy}_{\text{braccio}} +$$

$$- H_{xy}^* dy w_{x,x} dx = 0$$

\* NON SI METTE dH<sub>xy</sub> PERCHÉ È INFINITESIMO DI 3° ORDINE

$$M_{xy,x} - V_y + M_{y,y} + H_y w_{x,x} + H_{xy} w_{x,x} = 0$$

$$\Rightarrow V_y = M_{xy,x} + M_{y,y} + H_{xy} w_{x,x} + H_y w_{x,x}$$

b)

$$V_x = H_{x,x} + M_{xy,y} + H_x w_{x,x} + H_{xy} w_{x,y}$$

Andiamo a derivare:  $V_{y,y}$  e  $V_{x,x}$  e le sostituiamo in  $z \uparrow)$  come avevamo fatto nella teoria della piastra di Kirchhoff

MEMO:  $V \rightarrow$  analogo del taglio, e il taglio è supportato SOLO dalle piastra sandwich

Analisi di stabilità di piastre multistrato  
laminato simmetricamente

$$\{K\} = [B] \{E^0\} + [D] \{K_T\}$$

$$\{K_T\} = - \begin{Bmatrix} w^{(0)}_{,xx} \\ w^{(0)}_{,yy} \\ 2w^{(0)}_{,xy} \end{Bmatrix}$$

Se  $w^{(0)} = 0 \Rightarrow$  anche  $\{K_T\} = \{0\} \Rightarrow M_x = 0$  per  $x=0, a$   
 $w^{(0)}(x, y) = 0 \Rightarrow M_y = 0$  per  $y=0, b$

$\rightarrow$  SODDISFA CONDIZIONI AL CONFINO

Vediamo se soddisfa le equazioni di equilibrio:

$$\bar{P}_x = \text{cost} \Rightarrow H_x(x, y) = \text{cost} = -\bar{P}_x$$

$$\bar{P}_y = \text{cost} \Rightarrow H_y(x, y) = \text{cost} = -\bar{P}_y$$

$$H_{xy}(x, y) = 0$$

$x \rightarrow$ ) è soddisfatta

$y \rightarrow$ ) " "

$z \uparrow$ ) " " perché  $H_x(x, y), H_y(x, y), H_{xy}(x, y) = 0$

Se sono 0 ovunque tutte le loro derivate sono nulle! 😊

Questa condizione di prebuckling è stabile o no?

$\rightarrow$  EQUAZIONE di STABILITÀ LINEARIZZATA

$$w_{\text{eq}} \rightarrow w_{\text{eq}} + \epsilon w^{(1)} \quad M_{\text{eq}} \rightarrow M_{\text{eq}} + \epsilon M^{(1)}$$

$$M_{x,xx}^{(1)} + 2M_{xy,xy}^{(1)} + M_{y,yy}^{(1)} - \bar{P}_x w_{,xx}^{(1)} - \bar{P}_y w_{,yy}^{(1)} = 0$$

Non deve essere cambiato né il sistema di carico né le b.c.

$$x=0, x=a: w^{(1)} = 0 \quad M_x^{(1)} = 0$$

$$y=0, y=b: w^{(1)} = 0 \quad M_y^{(1)} = 0$$

Non ci sono condizioni sulle  $H$  perché sono già soddisfatte

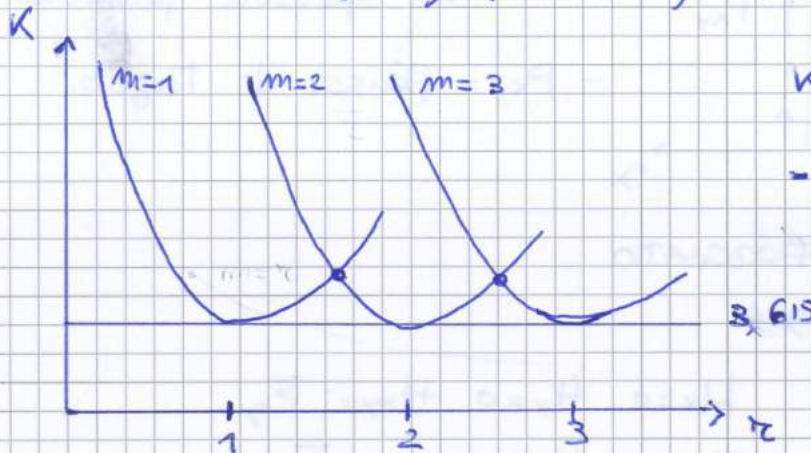
$$K = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{m}{z} + \frac{m^2}{m} z \right)^2$$

PARAMETRO DI CARICO CRITICO

rettangolare, isotropo  
soggetto a compressione uniaassiale

Se  $n=1 \rightarrow K_{min}$

$$\rightarrow K = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{m}{z} + \frac{z}{m} \right)^2$$



$$K_{min} = K(m=z)$$

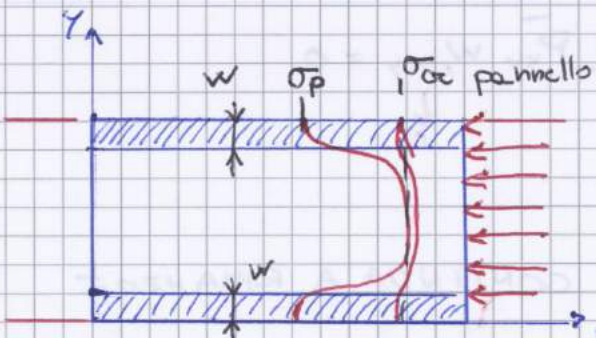
$$= \frac{4\pi^2}{12(1-\nu^2)} = 3.615$$

$$K(m) = K(m+1) \rightarrow z = \sqrt{m(m+1)}$$

Vedi appunti di Tecnica delle Costruzioni

## LARGHEZZA COLLABORANTE

In campo post-critico un pannello vincolato compresso SOPPORTA ANCORA COMPRESSIONE



$$\sigma_{cr} = KE \left( \frac{h}{b} \right)^2$$

finché non cede il coarante il pannello continua a lavorare lateralmente

Il coarante ha carico critico  $>$  di quello del pannello!

$$\sigma_p = KE \left( \frac{h}{2w} \right)^2$$



$M^{(0)}$

$$\rightarrow D_{11} w_{,xxxx} + 2(D_{11} + 2D_{66}) w_{,xxyy} + D_{22} w_{,yyyy} - \underline{\underline{2P_{xy} w_{,xy}}} = 0$$

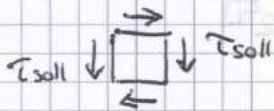
Equazione di stabilità linearizzata

⚠ Non ci sono + tutte derivate di ordine pari!!!

$-2P_{xy} (w_{,xy}) \Rightarrow$  non si possono + fare le solite semplificazioni



IL PROBLEMA NON AMMETTE PIÙ UNA SOLUZIONE ESATTA

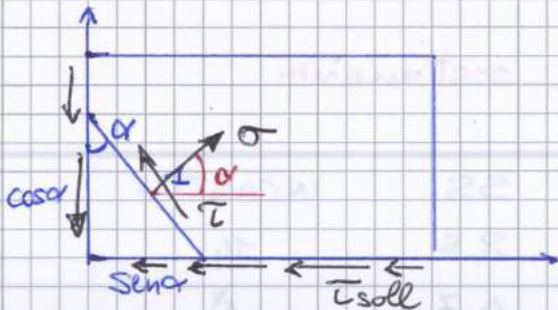


Pre-buckling

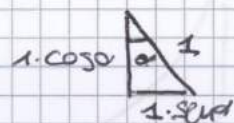
CAMPO TANGENZIALE PURO!

Post-buckling: il pannello si ingobba ma STABILE  
 x continuare a ingobbarsi il carico deve salire!!!

→ ceole poi per una  $\tau = 3\tau_{cr}$ !



Prendiamo un pezzo di piastra triangolare con ipotenusa di lato 1



Se concio in equilibrio  $\sum F = 0$

$$\rightarrow x) \quad \sigma \cos\alpha - \tau \cdot 1 \cdot \sin\alpha = \tau_{soll} \cdot 1 \cdot \sin\alpha$$

$$\uparrow y) \quad \sigma \sin\alpha + \tau \cos\alpha = \tau_{soll} \cdot \cos\alpha$$

Moltiplichiamo  $\rightarrow x)$  per  $\sin\alpha$  e  $\uparrow y)$  per  $\cos\alpha$  e poi facciamo  $\uparrow y) - \rightarrow x)$

$$\sigma \sin\alpha \cos\alpha - \tau \sin^2\alpha = \tau_{soll} \sin^2\alpha$$

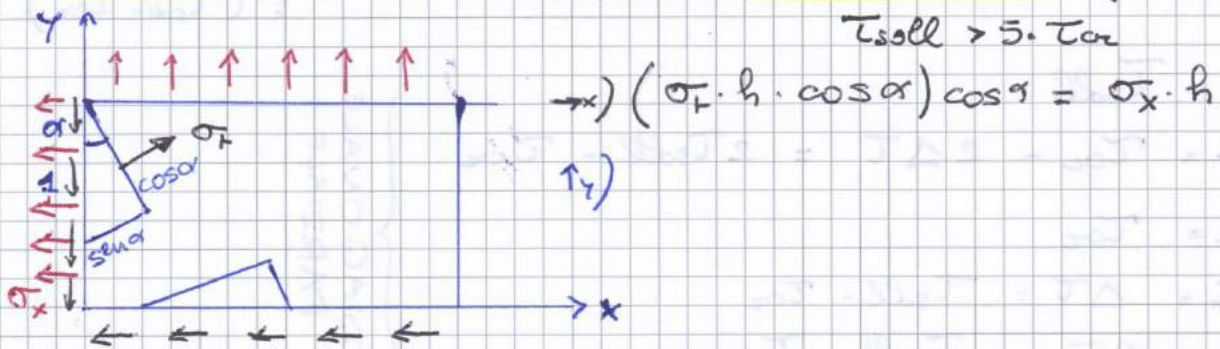
$$\sigma \sin\alpha \cos\alpha + \tau \sin\alpha \cos\alpha = \tau_{soll} \cos^2\alpha +$$

Sottraendole  $\Rightarrow \tau = \tau_{soll} (1 - 2 \sin^2\alpha)$   
 Sommandole  $\rightarrow \sigma \sin 2\alpha + \tau (1 - 2 \sin^2\alpha) = \tau_{soll}$

IPOTESI:

$\sigma_{compress} \approx 0 \rightarrow$  SI SOTTRAGGONO AL CARICO  
 $\sigma_{trazione} = \dots$

### CAMPO DIAGONALE COMPLETO ( $\sigma_c \approx 0$ )



Consideriamo il triangolo a sx: devono nascere delle  $\sigma$  che equilibrano le tensioni interne!

$\rightarrow$  IL PANNELLO (PER LAVORARE IN CAMPO DIAGONALE COMPLETO) DEVE ESSERE DIMENSIONATO ANCHE A FLESSIONE!

**NASCONO DELLE  $\sigma$  SUI BORDI**  
 $\rightarrow$  BORDI DEVONO ESSERE RIQUADRATI CON ELEMENTI MOLTO RIGIDI A FLESSIONE

Da  $\rightarrow$ )  $\sigma_x = \sigma_T \cdot \cos^2 \alpha$

Da  $\uparrow$ )  $\sigma_T = \frac{2 \tau_{soll}}{\sin 2\alpha}$

$\tau = \tau_{soll}$

$\sigma_c = 0$

$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{soll}$

$\sigma_T = 2 \tau_{soll}$

CAMPO DIAGONALE COMPLETO

$\tau > \tau_{cr}$

29/04/2014

### CAMPO DIAGONALE PARZIALE/INCOMPLETO

$\tau_{soll} > \tau_{cr}$  ( $\tau_{soll} \approx 1,5 \tau_{cr}$ )

$\tau_{soll} = \tau_{cr} + \Delta \tau$

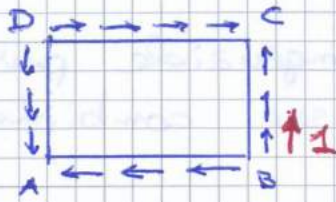
Principio di sovrapposizione degli effetti

Stato di tensione interno è la somma di 2 stati di tensione

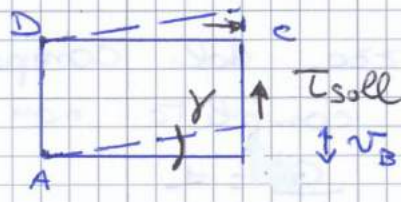
TANGENZIALE PURO	}	$\tau_{soll} = \tau_{cr}$	DIAGONALE COMPLETO	}	$\tau_{soll} = \Delta \tau$
		$\sigma_T = \tau_{cr}$			$\sigma_T = 2 \Delta \tau$
		$\sigma_c = \tau_{cr}$			$\sigma_c = 0$
		$\sigma_x = 0$			$\sigma_x = \Delta \tau$
		$\sigma_y = 0$			$\sigma_y = \Delta \tau$

# DEFORMIABILITÀ DEL PANNELLO A TAGLIO

→ PLV  $\delta L^{(i)} = \delta L^{(e)}$



$$L^{(e)} = 1 \cdot v_B$$



$$L^{(i)} = \int_V \delta \tau^{(e)} \cdot \gamma^{(e)} dV$$

PLV con FORZE VIRTUALI

## TANGENZIALE PURO

$\tau^{(e)}$  → sforzi interni dovuti al carico esploratore 1 (sistema equilibrato)

$\gamma^{(e)}$  → deformazioni associate a  $v_B$

$$\tau^{(e)} = \frac{1}{b \cdot s}$$

$$\gamma^{(e)} = \frac{\tau_{soll}}{G}$$

$$L^{(i)} = \int_V \frac{1}{b \cdot s} \cdot \frac{\tau_{soll}}{G} dV$$

$$L^{(e)} = L^{(i)} \rightarrow v_B = \int \frac{1}{b \cdot s} \cdot \frac{\tau_{soll}}{G} dV = \frac{1}{b \cdot s} \cdot \frac{\tau_{soll}}{G} \int dV$$

tensioni uniformi, materiale omogeneo,  $\nu = \text{cost}$

$$v_B = \frac{1}{b \cdot s} \cdot \frac{\tau_{soll}}{G} \cdot a \cdot b \cdot s$$

$$\frac{v_B}{a} = \tan \gamma = \frac{\tau_{soll}}{G} \approx \gamma \rightarrow \gamma = \frac{\tau_{soll}}{G}$$

TANGENZIALE PURO :

$$G = \frac{\tau_{soll}}{\gamma}$$

## DIAGONALE COMPLETO

$$L^{(i)} = \int_V \sigma_T \cdot \epsilon dV = \int_V 2 \cdot \tau^{(e)} \cdot \epsilon^{(e)} dV$$

$$\Delta \sigma_c = 0$$

$$\epsilon^{(e)} = \frac{\sigma^{(e)}}{E} = \frac{2 \tau_{soll}}{E}$$

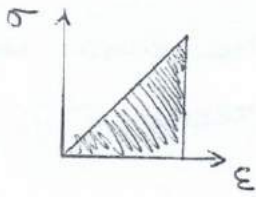
$$v_B = \int_V \frac{2}{b \cdot s} \cdot \frac{2 \tau_{soll}}{E} dV = \frac{4}{b \cdot s} \cdot \frac{\tau_{soll}}{E} \cdot a \cdot b \cdot s$$

$$\frac{v_B}{a} = \frac{4 \tau_{soll}}{E} = \gamma \rightarrow \gamma = \frac{4 \tau_{soll}}{E}$$

# PRINCIPI ENERGETICI

◦ LAVORO DI DEFORMAZIONE = ENERGIA DI DEF  $\Phi$  ACCUMULATA DAL CORPO

Campo Lineare Elastico



$$dL = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = d\Phi$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} dV$$

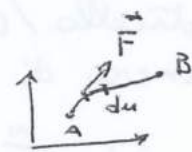
CORPO LINEARE ELASTICO  $\rightarrow$   $\Phi$  dipende SOLO da stato iniziale  $\downarrow$  e finale  
 POTENZIALE ELASTICO = funzione del punto

POTENZIALE di una forza

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{u} = F du \cos \alpha$$

in componenti  $dL = \vec{F} \cdot d\vec{u} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$$L = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$$



in certi casi l'integrando è il DIFFERENZIALE ESATTO DI UNA FUNZIONE DELLA POSIZIONE  $V(x, y, z)$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right)$$

$$L = \int_A^B \dots = -(V_B - V_A)$$

LAVORO DIPENDE SOLO DA PUNTO INIZIALE E FINALE

$$L = \oint_A^A \dots = -(V_{B=A} - V_A) = 0$$

SI CONSERVA L'ENERGIA POTENZIALE

$\rightarrow$  FORZA CONSERVATIVA  $\rightarrow \vec{F} = -\nabla E_p$

FORZE GRAVITAZIONALI

FORZE ELASTICHE

## PLV

◦ Dal punto di vista geometrico un sistema meccanico può assumere SVARIATE CONFIGURAZIONI POSSIBILI CONGRUENTI CON I VINCOLI GEOMETRICI  $\rightarrow$  di queste SOLO UNA CORRISPONDE A QUELLA REALE CHE SODDISFA LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

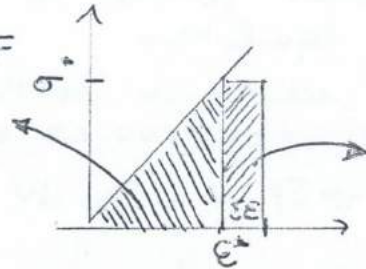
$\rightarrow$  CONFIGURAZIONI NELL'INTERNO di quella di equilibrio ottenibili dalla VARIAZIONE di quella vera



per forza breve  
LAVORO REALE

ENERGIA DI DEF

$$L = U = \int \frac{1}{2} \sigma^* \epsilon^* dV$$



LAVORO VIRTUALE

↓  
VARIAZIONE 1° ENERGIA  
X UN DATO STATO DI  
TENSIONE

$$\delta L_i = \delta U = \int \sigma^* \delta \epsilon^* dV$$

Principio di stazionarietà del potenziale totale

$$PLV \quad \delta L = \delta L_i + \delta L_e = \int \sigma^* \delta \epsilon^* dV - \int f_x \delta u_x \dots dV$$

CORPO ELASTICO →  $\delta L_i = \delta U$   $U =$  energia di def  
energia elastica

CARICHI ESTERNI CONSERVATIVI

$$\underline{\delta L_e = \delta V}$$

Ma quindi il PLV dice che il corpo è in equilibrio  
SE LA VARIAZIONE DEL POTENZIALE TOTALE È  
NULLA

$$\delta L = \delta L_i + \delta L_e = \delta(U + V) = \delta \Pi = 0$$

## PRIMO TEOREMA DI CASTIGLIANO

Corpo in equilibrio

$$\delta \Pi = 0 = \delta \left( \int_V U dV \right) - \sum F_i \delta u_i = 0 \quad (*)$$

Consideriamo l'energia di deformazione espressa in funzione degli spostamenti dei punti di applicazione delle forze

$$U = U(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i$$

Riprendendo (\*)

$$\sum \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i - \sum F_i \delta u_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i \right] \delta u_i = 0$$

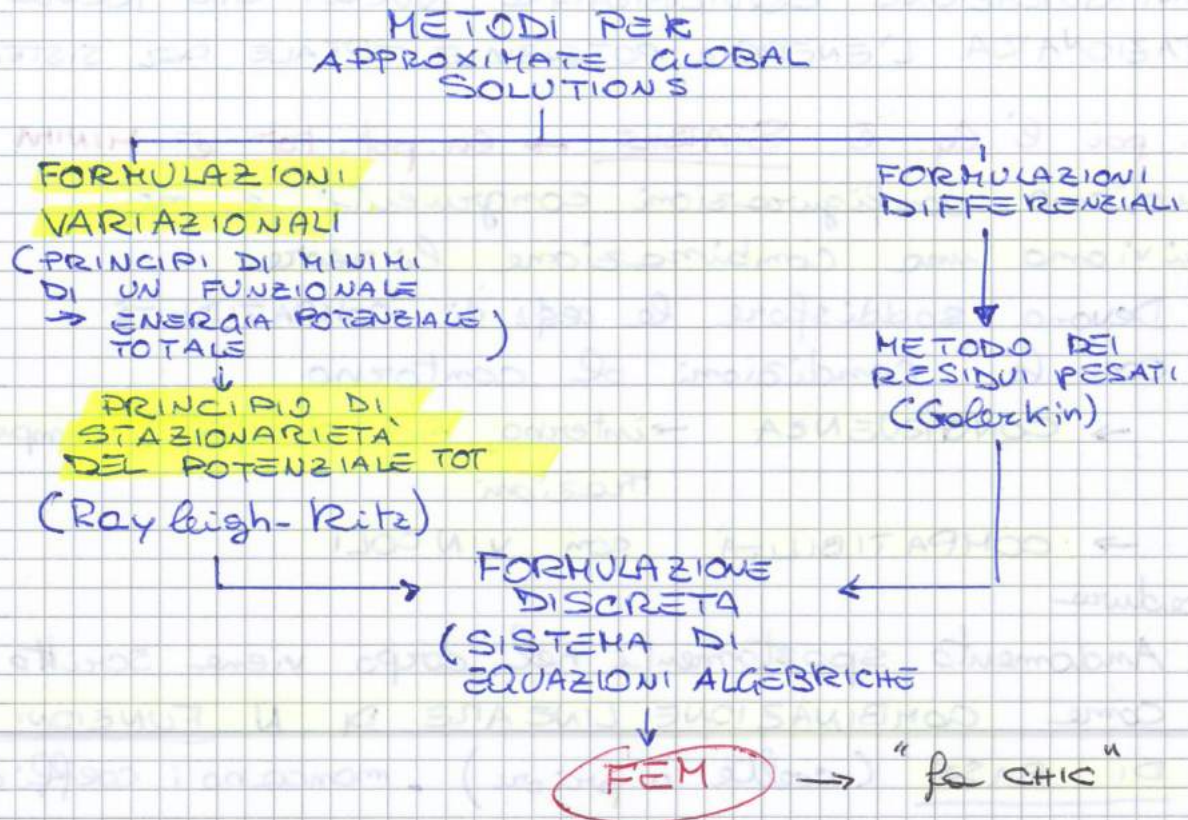
essendo arbitrari gli spostamenti virtuali

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial u_i} = F_i}$$

EQUIVALE AL PLV agli spostamenti virtuali

# ELEMENTI FINITI

Nasce l'esigenza di trovare dei metodi per calcolare delle SOLUZIONI APPROSSIMATE (vista la mancanza di soluzioni analitiche esatte. MEMO: SOLUZIONI ESATTE → soddisfano sia eq. di equilibrio sia condizioni al contorno)



il dominio viene diviso in un sacco di sotto-domini e le incognite si risolvono

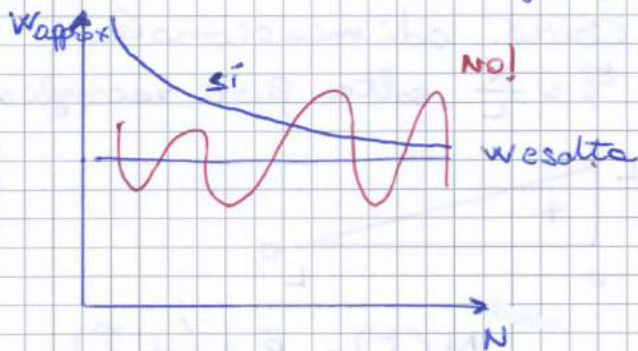
DOMINIO DISCRETIZZATO

## PRINCIPIO DI STAZIONARIETA' DEL POTENZIALE TOTALE

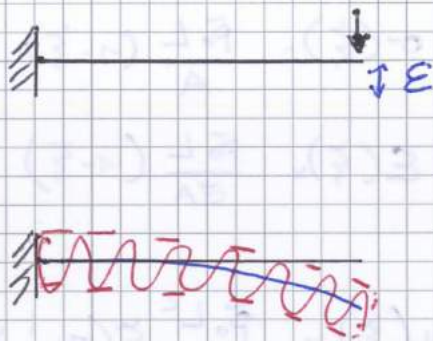
Noi applicheremo il metodo a un problema semplice di cui conosciamo la soluzione ESATTA e poi si confronteranno soluzione esatta e soluzione approssimata

Soluzioni di tipo GLOBALE → si scrive la soluzione SU TUTTO IL DOMINIO DEL PROBLEMA. In un colpo solo vogliamo dare la soluz!  
 → è difficile farlo x problemi complessi!

- Aumentando il numero delle funzioni di base la soluz. approx deve convergere alla soluzione analitica (o meglio, VORREHKO COSÌ!)



A volte però all'aumentare di  $N$  la soluzione approx diverge!



Voglio calcolare la freccia e impongo che la soluzione all'estremo sia in un certo range  $E$

Se imponiamo che TUTTO il campo di spostamenti stia all'interno di un range  $E$  le cose cambiano!

POI: DERIVAZIONE = PERDITA ACCURATEZZA!!!

Per questi motivi è richiesta una CONVERGENZA IN ENERGIA: non ho la certezza che localmente ci sia convergenza alla tensione locale ma che globalmente l'energia di def. elastica converga a quella globale.

→ FUNZIONI DI BASE DEVONO:

- essere l.i.
- soddisfare singolarmente le condizioni al contorno geometriche (se poi soddisfano pure quelle meccaniche è meglio! Migliora convergenza)

Sono dette "funzioni ammissibili"



$$* = \frac{1}{2} \int EA u_{,x} \cdot u_{,x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int EA \{C\}^T \{\varphi_{,x}\} \{\varphi_{,x}\}^T \{C\} dx$$

PRODOTTO MATRICIALE: VA MANTENUTO ORDINE!!!

$$= \frac{1}{2} \{C\}^T \left( \int_0^L EA \{\varphi_{,x}\} \{\varphi_{,x}\}^T dx \right) \{C\}$$

$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \\ \\ \\ \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \\ \\ \\ \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \times N \\ N \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow U_p = \frac{1}{2} \{C\}^T [K] \{C\} \quad \text{forma quadratica in } C$$

$$[K] = \int_0^L EA \{\varphi_{,x}\} \{\varphi_{,x}\}^T dx$$

È UNA MATRICE SIMMETRICA  $(N \times 1) \times (1 \times N) = (N \times N)$

$$K_{ij} = \int_0^L EA \varphi_{i,x} \varphi_{j,x} dx = \frac{\partial^2 U_p}{\partial c_i \partial c_j}$$

$V_p =$  (energia) potenziale dei carichi applicati

CARICHI CONSERVATIVI

$$V_p = - \int_0^L \bar{P}_x(x) \cdot u(x) dx = - \{C\}^T \int_0^L \bar{P}_x \cdot \{\varphi\} dx$$

$$= - \{C\}^T \{P\}$$

$$L_e = V$$

$$\delta L_e = \delta V$$

forma lineare in C

$$L_e = \int_A^B \bar{P}_x \cdot dx = -(V_B - V_A)$$

VEETTORE CARICHI ESTERNI

$$\{P\} = \int_0^L \bar{P}_x \cdot \{\varphi\} dx$$

$$P_i = \int_0^L \bar{P}_x \cdot \varphi_{i,x} dx = - \frac{\partial V_p}{\partial c_i}$$

### ENERGIA POTENZIALE TOTALE

$$\Pi_p = U_p + V_p = \frac{1}{2} \{C\}^T [K] \{C\} - \{C\}^T \{P\}$$

### 3) PRINCIPIO DI STAZIONARIETA'

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \{C\}} = \{0\}$$

$$\rightarrow [K] \{C\} - \{P\} = 0$$

CONDIZ. DI EQUILIBRIO

$$D) \{C\} = [K]^{-1} \{P\} \rightarrow \hat{u}_N(x) = \{C\}^T \{\varphi\}$$

SOL. APPROX.

Trovo  $\{c\}$  e lo sostituisco nell'espressione del campo di spostamenti  $u = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_N \varphi_N$



Se provessimo con  $N=3 \rightarrow C_3=0$

$N=4 \rightarrow C_4=0$

Quando ho raggiunto la soluzione esatta il contributo delle funzioni di base successive è NULLO!

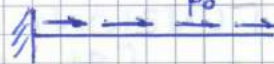
CARICO CONCENTRATO



Soluz. esatta

$N=1$

CARICO DIST. COST.



$N=2$

CARICO DIST. LINEARE



$N=3$

con  $N=2$  è soluz. esatta di

il metodo è potente MA SOFFRE DI ALCUNI DIFETTI.

Molle

$$U_p = \frac{1}{2} K x^2$$

$$F = K x$$

$$[K] \{C\} - \{P\} = 0$$

NON È VETTORE DEI CARICHI

NON È LA RIGIDEZZA

NON HA SIGNIFICATO FISICO! È UN NUMERO!

### III) POLINOMI DI LAGRANGE

$$\varphi_n(x) = L_n(x)$$

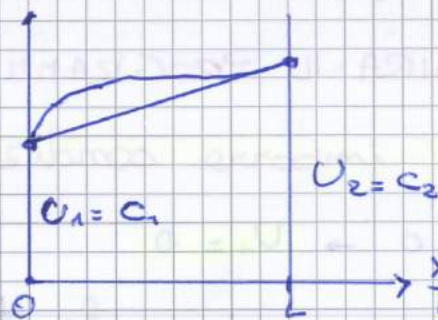
$$\hat{u}_N(x) = \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(x)$$

L SONO POLINOMI DI INTERPOLAZIONE

→ valutati nei nodi mi danno il valore esatto della funzione

$$L_n(\xi) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{\xi - \xi_m}{\xi_n - \xi_m}$$

$N=2 \rightarrow$  LINEARI



$$\hat{u} = L_1(\xi) \cdot U_1 + L_2(\xi) \cdot U_2$$

Bisogna inserire il vincolo!

$$\rightarrow [K]\{U\} = \{P\} + \{R\}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} K_{11} & K_{12} & 0 \\ \hline K_{21} & K_{22} & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{12} \cdot U_2 = P_1 + R_1 \rightarrow U_2$$

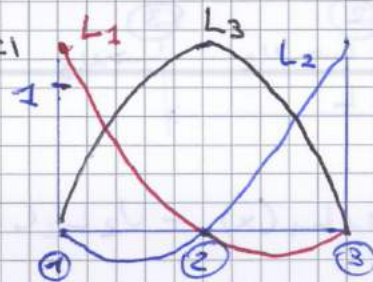
$$K_{22} \cdot U_2 = P_2$$

Non bisogna scegliere a priori le funzioni di base che soddisfino le condizioni al contorno! Perché si vuole un metodo GENERALE

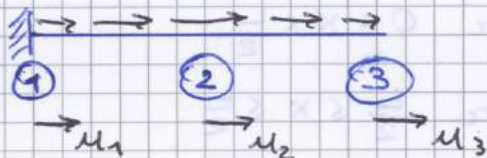
◆ I polinomi di Lagrange sono  $\delta$  di Kronecker.

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

**N=3** POLINOMI QUADRATICI



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 L_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 x_i &= \frac{x_2}{L} + \frac{L/2}{L} = \frac{1}{2} \\ \sum_{i=1}^3 x_i^2 &= \frac{x_3}{L} = 1 \end{aligned}$$



$$L_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} = 2(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)$$

$$L_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} = -4\xi(\xi - 1)$$

$$L_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})} = 2\xi(\xi - \frac{1}{2})$$

$$\hat{u}_3(\xi) = U_1 L_1(\xi) + U_2 L_2(\xi) + U_3 L_3(\xi)$$

$$[K]\{U\} = \{P\} + \{R\}$$

# STRUTTURE AERONAUTICHE

8/05/2014

continua:

$U_p =$

$$U_p = \frac{1}{2} \frac{EA}{L/2} \left[ \{U_1 \ U_2\} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} + \{U_2 \ U_3\} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \right] =$$

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow U_p = \frac{1}{2} \frac{EA}{L/2} \{U_1 \ U_2 \ U_3\} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Potenziale dei carichi esterni

$$V_p = - \{U\}^T \{P\}$$

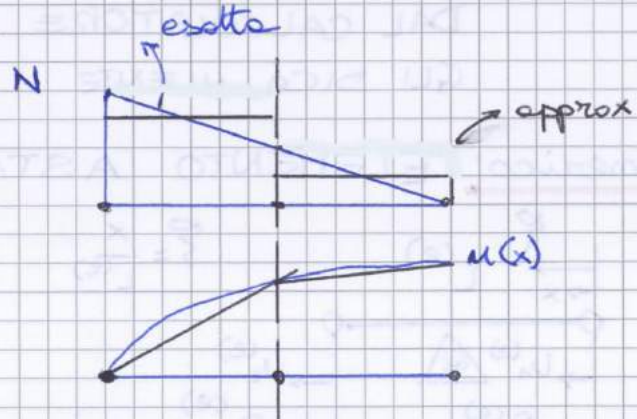
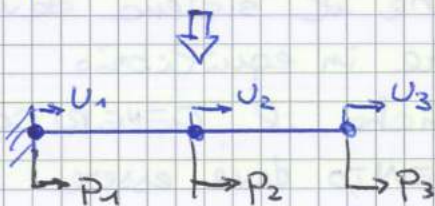
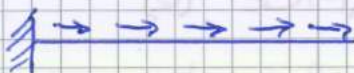
$$V_p = - \int_0^L \bar{p}(x) \cdot u(x) dx = - \bar{p}_0 \left[ \int_0^{L/2} u(x) dx + \int_{L/2}^L u(x) dx \right]$$

$$= - \frac{L}{2} \bar{p}_0 \left[ \int_0^1 u(\xi) d\xi + \int_0^1 u(\zeta) d\zeta \right] = - \frac{\bar{p}_0 L}{4} \left[ \{U_1 \ U_2\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \{U_2 \ U_3\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]$$

AGGIUNGIAMO  $U_3$  e i VARI ZERI

$$= - \frac{\bar{p}_0 L}{4} \left[ \{U_1 \ U_2 \ U_3\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \{U_1 \ U_2 \ U_3\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] = - \frac{\bar{p}_0 L}{4} \{U_1 \ U_2 \ U_3\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = \frac{\bar{p}_0 L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

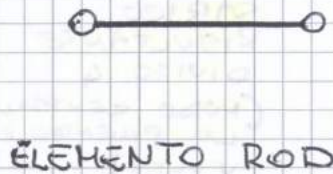


Approssimazione  $u(x)$ : LINEARE A TRATTI

"

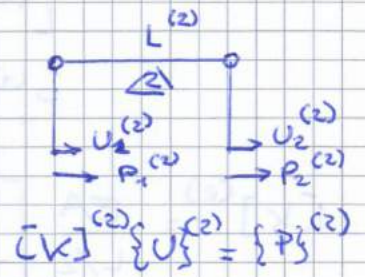
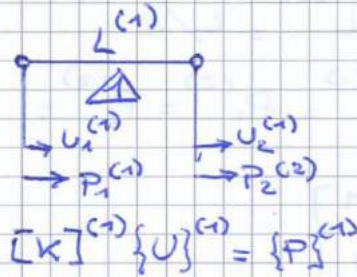
$N, \epsilon, \sigma$ : DISCONTINUA e COST. A TRATTI

Dato ciò come applico questo ai 2 elementi finiti  $\triangle 1$  e  $\triangle 2$  ?



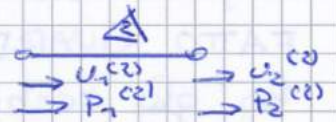
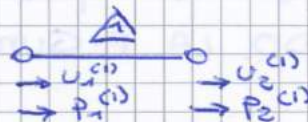
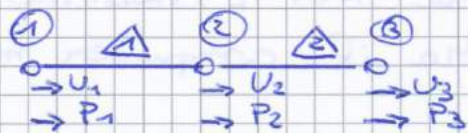
SCHEMA CHE IL CALCOLATORE RIESTE

Applichiamo agli elementi  $\triangle 1$  e  $\triangle 2$



INPUT: Quale elemento usare: ROD  
Quanti elementi usare: 2

Conoscendo la soluzione di ogni elemento come arriviamo alla soluzione della struttura?



EQUILIBRIO AI NODI

$$P_1 = P_1^{(2)} \rightarrow P_1 = K_{11}^{(1)} U_1 + K_{12}^{(1)} U_2 \quad \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$P_2 = P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \rightarrow P_2 = K_{21}^{(1)} U_1 + K_{22}^{(1)} U_2 + K_{11}^{(2)} U_1 + K_{12}^{(2)} U_2$$

$$P_3 = P_2^{(2)} \Rightarrow P_3 = K_{21}^{(2)} U_1 + K_{22}^{(2)} U_2$$

CONGRUENZA SPOST. NODI

$$U_1 = U_1^{(1)}$$

$$U_2 = U_2^{(1)} = U_1^{(2)}$$

$$U_3 = U_2^{(2)}$$

Butt'come queste nelle equazioni di equilibrio ai nodi e SI OTTENE:

$$P_1 = K_{11}^{(1)} U_1 + K_{12}^{(1)} U_2$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{12}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{12}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

→ **FORNIRE CONNECTIVITY**

L'elemento ROD, chi l'ha inventato, dice che il nodo di sx si chiama ① e quello dx si chiama ②

**CORRISPONDENZA TRA NUMERAZIONE NODI IN RIF. LOCALE E IN RIF. GLOBALE**

- NODO 1<sup>(1)</sup> ≡ NODO 1 struct
- NODO 2<sup>(1)</sup> ≡ NODO 2 struct
- NODO 1<sup>(2)</sup> ≡ NODO 2 struct
- NODO 2<sup>(2)</sup> ≡ NODO 3 struct

elemento	①	②
NODO 1	1	2
NODO 2	2	3

Il calcolatore ora si fa un bel ciclo for-next  
 Si calcola la lunghezza del singolo elemento e a ognuno assegna il proprio E e A.

**MATRICE ESPANSA**

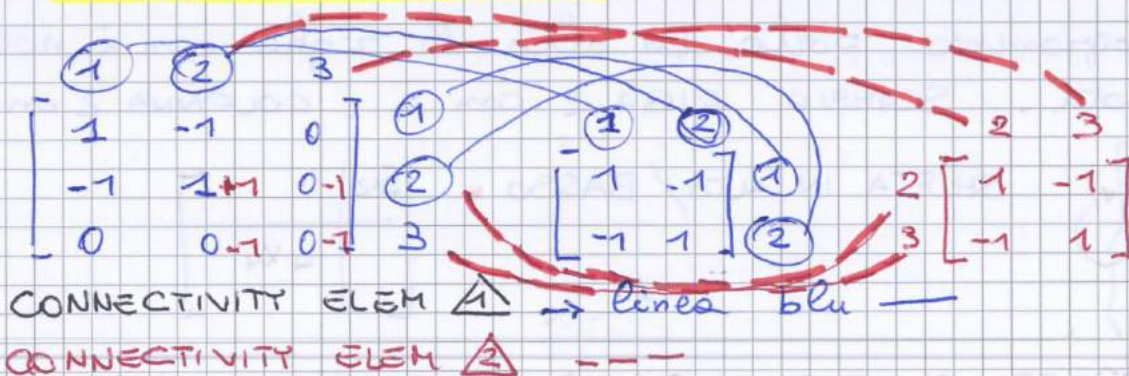
$$[K]^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} \end{matrix} \rightarrow [k] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

Si parte da  $[K] = [0]$ , si fa la  $[k]$  con  $e=1$ , la mette da parte, si azzerava una nuova matrice. Va nella CONNECTIVITY e dice: 1 → 2, 2 → 3

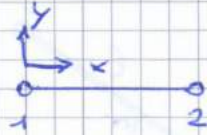
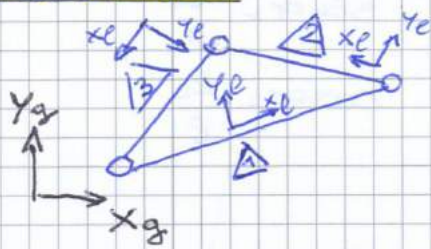
⇒ PRENDE LA  $[k]^{(e)}$  E LA METTE NELLA  $[K]$  mettendo 1 in 2 e 2 in 3

Alla fine la somma!

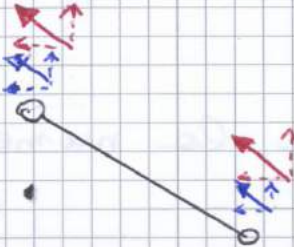
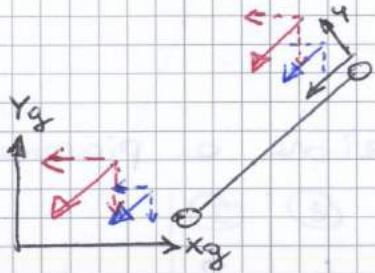
In realtà il software non fa questo lavoro di **costruire e sommare!**



### 3 ASTE



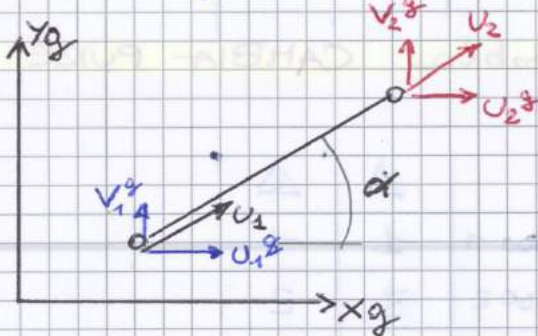
SISTEMA GLOBALE  $g$  è ruotato rispetto ai vari sistemi locali



Gli spostamenti/corichi nel singolo elemento sono visti lungo l'asse locale

Devo prendere corichi e spostamenti e PROIETTARLI LUNGO GLI ASSI DI RIFERIMENTO GLOBALI! Questo PRIMA dell'assemblaggio!

Equilibrio e congruenza poi le faccio con le componenti



⚠  $V_1^g$  e  $U_1^g$  non sono l.i da  $U_1$ !!  
Però ora il vettore degli spostamenti nodali è una  $4 \times 1$

MATRICE DI ROTAZIONE : matrice dei coseni direttori del sistema locale rispetto al sistema strutturale.

$$[\Lambda]^{(e)} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}^{(e)} \quad \begin{matrix} c = \cos\alpha \\ s = \sin\alpha \end{matrix}$$

$$\{U\}^{(e)} = [\Lambda]^{(e)} \{U_g\}^{(e)}$$

$$\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

$$[k_g]^{(e)} = [\Lambda]^{(e)T} [K]^{(e)} [\Lambda]^{(e)}$$

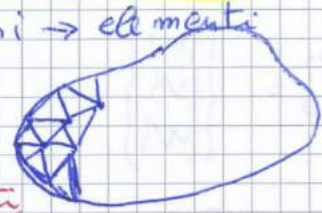
MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ELEMENTO e NEL SISTEMA GLOBALE

Adesso cerchiamo di generalizzare

13/05/2014

# METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

- Divido il dominio in sotto domini  $\rightarrow$  elementi
  - Il comportamento di ogni elemento è definito matematicamente A PRIORI
  - Elemento = sottostruttura in cui spostamenti,  $\epsilon$ ,  $\sigma$ , ecc si calcola con lo stesso algoritmo
- COMPORIAMO ELEMENTI  $\Leftrightarrow$  funzioni di FORMA (interpolativa)



$\{q^{(e)}\}$  : vettore gradi di libertà nodali

$\{d^{(e)}\}$  : vettore degli spostamenti (displacement) di UN GENERICO PUNTO dell' elemento (e)

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{dipendenza dal} \\ \text{tempo} \rightarrow \text{DINAMICA} \end{array}$$

$[N^{(e)}]$ : matrice delle funzioni di forma

$$N_{ij}^{(e)} = N_{ij}(x,y,z) \quad \begin{array}{ccc} 1D & & 3D \\ \varphi \rightarrow L & \rightarrow & N \end{array}$$

$$\{\hat{\epsilon}^{(e)}\} = [B^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

$[B^{(e)}]$ : matrice delle derivate delle funzioni di forma

Estendiamo il discorso fatto a l'asta (1D) alla struttura generica

$$\hat{u}_N(x) = \sum_{n=1}^N U_n L_n(x) = \{U\}^T \{\varphi\} = \{\varphi\}^T \{U\}$$

$$\begin{array}{l} 3D \\ \hat{u} = u^{(e)} = \{N\}^T \{U\} \\ \hat{v} = v^{(e)} = \{N\}^T \{V\} \\ \hat{w} = w^{(e)} = \{N\}^T \{W\} \end{array} \quad U(t), V(t), W(t)$$

Vettore DISPLACEMENT

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{FEM}} \{\hat{d}\} = \{d^{(e)}\}$$

$[B^{(e)}]$ : i suoi elementi sono derivate parziali degli elementi di  $[N^{(e)}]$ , e  $[N^{(e)}]$  è la matrice delle funzioni di forma

$[N^{(e)}]$  mi permette di esprimere  $\{d^{(e)}\}$  in funzione dei gradi di libertà NODALI dell'elemento! ☺

Def.  $[B^{(e)}]$  è la matrice che consente di esprimere le componenti di def. di un generico punto dell'elemento in funzione dei gradi di libertà nodali dell'elemento  $\{q^{(e)}\}$

### TENSIONI

→ usiamo legge Hooke generalizzata

⚠ IL MATERIALE PUÒ VARIARE DA ELEMENTO A ELEMENTO!

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma^{(e)}\} = [C^{(e)}] \{\epsilon^{(e)}\}$$



$$\{\sigma^{(e)}\} = [C^{(e)}][B^{(e)}]\{q^{(e)}\}$$

### ENERGIA DI DEFORMAZ. ELASTICA

$$U_p = \frac{1}{2} \int \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \frac{1}{2} \int \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} dV$$

FEM ⇒  $U_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \{q^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T [C^{(e)}] [B^{(e)}] \{q^{(e)}\} dV$

⚠  $\{\epsilon\} = [B^{(e)}] \{q^{(e)}\}$   
 $\{\epsilon^{(e)}\}^T = \{q^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T$

$\{q^{(e)}\}$

NON DIPENDONO DALLO SPAZIO, AL LIMITE, DAL TEMPO IN PROBLEMI DINAMICI

→ porto fuori da integrale



- CARICHI CONCENTRATI  $\{P_{e,i}\}$
- ▣ CARICHI DI LINEA  $\{P_e^{(e)}\}$
- $\{P_x\} dx \rightarrow \{P_e\} dl$
- ▣ CARICHI DI SUPERFICIE  $\{P_s^{(e)}\}$
- ▣ CARICHI per unità DI VOLUME  $\{P_b^{(e)}\}$

LAVORO TOT:  $\Delta \{d^{(e)}\}$  sono spostamenti EFFETTIVI e  $\{P_c/P_e \dots\}$  sono carichi EFFETTIVI

$$W_{ex}^{(e)} = \sum_{i=1}^{N_{cc}} \{d_i^{(e)}\}^T \{P_{e,i}^{(e)}\} + \int_{e^{(e)}} \{d^{(e)}\}^T \{P_e^{(e)}\} dl + \int_{S^{(e)}} \{d^{(e)}\}^T \{P_s^{(e)}\} dS + \int_{V^{(e)}} \{d^{(e)}\}^T \{P_b^{(e)}\} dV = -V_p^{(e)}$$

CONCENTRATI
DI LINEA
DI SUPERFICIE  
DI VOLUME

Trattazione generale a cui basta mettere apice (e) per avere trattazione FE=K! :)

ORA dobbiamo scriverlo in funzione degli spostamenti nodali e dei carichi nodali

$$\{d^{(e)}\} = [N^{(e)}] \{q^{(e)}\} \rightarrow \{d^{(e)}\}^T = \{q^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T$$

$$W_{ex}^{(e)} = \sum_{i=1}^{N_{cc}} \{q^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T \{P_{e,i}^{(e)}\} + \int_{e^{(e)}} \{q^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T \{P_e^{(e)}\} dl + \int_{S^{(e)}} \{q^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T \{P_s^{(e)}\} dS + \int_{V^{(e)}} \{q^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T \{P_b^{(e)}\} dV$$

In generale:

$$W_{ex}^{(e)} = \{q^{(e)}\}^T \{F^{(e)}\}$$

$\{F^{(e)}\}$  è il sistema dei carichi nodali che moltiplicato per i giugli nodali produce lo stesso lavoro che il sist. di carichi effettivi produce sugli spostamenti effettivi!

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO → STAT. POTENZIALE

$$\Pi_p^{(e)} = U_p^{(e)} + V_p^{(e)} = U_p^{(e)} - W_{ex}^{(e)}$$

$$\frac{\partial \Pi_p^{(e)}}{\partial q_i} = 0$$

\* esempio trave

$$\int w^{(e)}(x) \cdot \bar{p}_z dx = \{q^{(e)}\}^T \{F^{(e)}\}$$

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{N_{cc}} [N^{(e)}(x_i)] \{P_{e,i}^{(e)}\}$$

## CRITERI SCELTA FUNZIONI DI FORMA

Funzioni di forma devono essere:

- l.i.
- soddisfare condizioni al contorno geometriche
- essere complete in energia.

## CRITERI PRATICI ??

### ▶ ELEMENTI COMPATIBILI / CONFORMI

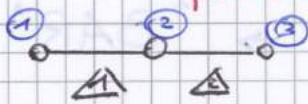
SU TUTTO IL DOMINIO!!

elementi che assicurano la CONTINUITÀ delle funzioni <sup>di forma</sup> e di tutte le loro derivate fino a ordine  $\tau-1$ , con  $\tau$  ordine MAX DI DERIVAZIONE CHE C'È NELL'EQ. DELL'ENERGIA DI DEF. ELASTICA

$$\text{es. asta } U_p = \frac{1}{2} EA \int u_{,x}^2 dx$$

↑  
 $\tau = 1$

L'elemento ASTA per essere compatibile deve assicurare la continuità della funzione.



CONTINUITÀ DI  $u$  ASSICURATA NELL'ELEMENTO XK I POLINOMI (FUNZ. DI FORMA SCELTE) SONO CONTINUI

MA È CONTINUA IN TUTTO IL DOMINIO?  
SÌ! PERCHÉ CON L'ASSEMBLAGGIO

SI È IMPOSTA LA CONGRUENZA DEGLI SPOSTAMENTI ALL'INTERFACCIA TRA ELEM.  $\triangle$  e ELEM.  $\triangle$

Come avremmo fatto con la 1<sup>a</sup> formulazione vista dove i  $C_i$  non erano spostamenti?

⇒ ELEMENTO ASTA È COMPATIBILE

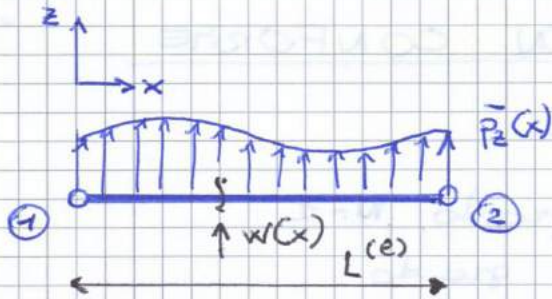
### ▶ ELEMENTI COMPLETI

Si hanno elementi completi quando le funz. di forma assicurano un campo di spostamenti e di def. UNIFORMI all'interno dell'elemento

→ SE NODO 1 SI SPOSTA DI TOT E NODO 2 DELLA STESSA QUANTITÀ ⇒ OGNI PUNTO DELL'ELEM → 133

# BEAM ELEMENT - ELEMENTO TRAVE

Quando si definisce un elemento la cosa importante è definire le FUNZIONI DI FORMA (e quindi poi  $[N^{(e)}]$  e  $[B^{(e)}]$ )



Per creare elementi compatibili devo rispettare il vincolo sulle DERIVATE

$$U_p = \frac{1}{2} \int_L E J K^2 dx \quad \text{con } K = -w_{,xx} \quad \text{curvatura}$$

$$\xi = 2$$

→ BISOGNA ASSICURARE LA CONTINUITÀ DI FUNZIONE E DERIVATA PRIMA

↓  
SPOSTAMENTO  $w$  + ROTAZIONE  $\varphi = w_{,x}$

Funzioni di forma → POLINOMI

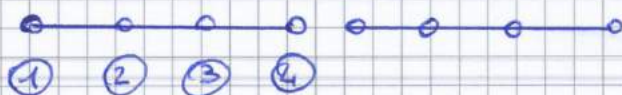
- continuità  $w$ , e  $w_{,x}$  nell'elemento
- continuità a interfaccia?

TRAVE: NON POSSO USARE POLINOMI DI LAGRANGE LINEARE. Perché?

Perché a calcolare  $U_p$  mi serve  $w_{,xx}$ !  
E la derivata 2<sup>a</sup> di una funz. lineare è 0!

→ Potrei sceglierli quadratici...

SCEGLIAMO POLINOMI CUBICI (dogma)  
2 elementi, 4 nodi ciascuno



## STRUTTURE AERONAUTICHE 15/05/2014

continua: BEAM ELEMENT

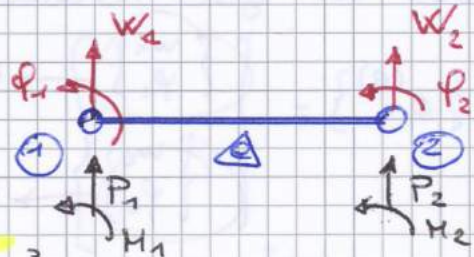
Si parlava di POLINOMI DI HERMITE

- Se da SOLO la FRECCIA  $w_1, w_2, \dots$  il polinomio di Hermite COINCIDE con quello di Lagrange lineare
- 2 GdL  $\rightarrow$  pol. grado 1

Abbiamo 4 gradi di libertà (2 x nodo)

$\Rightarrow$  bisogna assegnare un carico equivalente nodale per ogni nodo e un momento eq. nodale per ogni nodo!

Adesso bisogna calcolare le funzioni di forma



$$w(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

CONDIZIONI DA IMPORRE AGLI ESTREMI:

$$x=0 : w = w_1 \quad \varphi_1 = w_{,x}$$

$$x=L : w = w_2 \quad \varphi_2 = w_{,x}$$

⎧ sistema di 4  
eq. in 4  
incognite  
 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\text{in } x=0 \rightarrow \boxed{\alpha_0 = w_1}$$

$$w_{,x}(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

$$\text{in } x=0 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = \varphi_1}$$

Mettendo dentro le cose trovate

$$w(x) = w_1 + \varphi_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

$$\text{in } x=L : \begin{cases} w_2 = w_1 + \varphi_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3 \\ w_{,x} = \varphi_2 = \varphi_1 + 2\alpha_2 L + 3\alpha_3 L^2 \end{cases}$$

 $\rightarrow$  Risolvendo in  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  si ha:

$$\alpha_2 =$$

$$\alpha_3 =$$

Se viene data freccia e rotazione  $\rightarrow m=2$

$\rightarrow H^4 \Rightarrow$  4 polinomi di Hermite (di 3° grado)

2 polinomi:  $H_1^2$  *essociato a w riferito a staz. 1*       $H_2^2$  *w riferito a staz. 2*

4 polinomi:  $H_1^4 \rightarrow w_1$        $H_3^4 \rightarrow w_2$   
 $H_2^4 \rightarrow \varphi_1$        $H_4^4 \rightarrow \varphi_2$

Traducendo in polinomi di Hermite:

$N_1 = H_1^4$   
 $N_3 = H_3^4$

$N_2 = L H_2^4$   
 $N_4 = L H_4^4$

**NODO ①**  
 $N_1 = H_1^4 \rightarrow$  multip.  $w_1$   
 $N_2 = L H_2^4 \rightarrow$  "  $\varphi_1$   
**NODO ②**  
 $N_3 = H_3^4 \rightarrow$  multip.  $w_2$   
 $N_4 = L H_4^4 \rightarrow$  "  $\varphi_2$

MATRICE RIGIDENZA BEAM

$U_p^B = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \cdot \epsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_L \int_A \sigma_x \epsilon_x dA dx$

Trave in flessione  $\rightarrow$  Teoria Eulero-Bernoulli

Generalizzazione: trattiamo la **trave MULTISTRATO**  
 $[ \triangle M = EI w_{,xx}$  è il caso omogeneo isotropo  $\triangle ]$

$\sigma_{xx} = Q_{11} \cdot \epsilon_{xx}$

TRAVE:  $Q_{11} = EL$

$\epsilon_x = \epsilon_x^{(0)} + z \cdot \kappa_x$

PIASTRA:  $Q_{11} = \frac{EL}{1 - \nu_L \cdot \nu_T}$

*malaxiomolo x ora poi lo riutilizziamo dopo*

$\rightarrow \epsilon_x = z \cdot \kappa_x$  ,  $\kappa_x = -w_{,xx}$  ,  $w^{(e)} = [N^{(e)}] \{q^{(e)}\}$

$\epsilon_x = -z \cdot w_{,xx} = -z \cdot [N_{,xx}^{(e)}] \{q^{(e)}\}$

$\epsilon_x^{(e)} = [B^{(e)}] \{q^{(e)}\}$

$\Rightarrow$  confrontando:  $[B^{(e)}] = -z [N_{,xx}^{(e)}]$

$U_p^B = \frac{1}{2} \int_L \left( \int_A \epsilon_x^{(e)} \cdot Q_{11} \cdot \epsilon_x dA \right) dx =$

$= \frac{1}{2} \int_L \left( \int_A \{q^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T \cdot Q_{11} \cdot (-z [N_{,xx}^{(e)}]) \cdot \{q^{(e)}\} dA \right) dx$

$$\rightarrow W_{ex}^{(e)} = P_1 \cdot w_1 + M_1 \cdot \varphi_1 + P_2 \cdot w_2 + M_2 \cdot \varphi_2$$

Vettore dei carichi nodali equivalenti  $\{F^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$

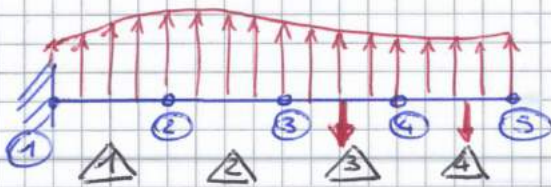
Def. Consideriamo il lavoro del carico EFFETTIVO per gli spostamenti effettivi e consideriamo il lavoro dei carichi NODALI per gli spost. nodali

$\{F^{(e)}\}$  è il sistema dei carichi nodali che moltiplicato per i gdl nodali PRODUCE LO STESSO LAVORO che il sistema di carico effettivo produce sugli spostamenti effettivi

cioè 
$$\int w \cdot P_2 \, dx = \{q^{(e)}\}^T \{F^{(e)}\}$$

EQUIVALENZA dal punto di vista ENERGETICO

Esempio Ho la trave ~ semiole del Pilatus e voglio fare uno schema FEM con elementi BEAM

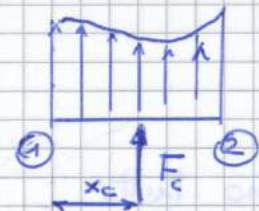


⚠ ho sia carico distribuito sia carico concentrato

Solitamente dove c'è un carico concentrato si mette un nodo, xk tanto gli spostamenti utili sono nei nodi

$$W_{ex} = \{q^{(e)}\}^T \cdot \{F^{(e)}\} = F_c \cdot W^T(x_c)$$

Al posto di  $w$  si mette l'appror:



$$W^T = \{q^{(e)}\}^T [N_{x_c}^{(e)}] \quad \text{va calcolato in } x_c!$$

Il carico concentrato devo convertirlo

in carichi nodali → Se ho  $F_c$  in mezzeria dell'elemento metterò  $\frac{F_c}{2}$  su ① e  $\frac{F_c}{2}$  su ②

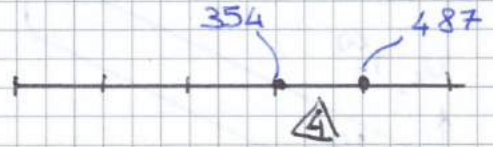
Legame tra  $K_{FV}$  e  $K_{VF}$ : essendo  $K$  simmetrica devono allora essere trasposte

$$[K_{FV}] = [K_{VF}]^T$$

In quel punto quanto vale spostamento?

→ se ho  $\{q\}$  e ho trovato

- Voglio freccia  $\epsilon$ ,  $\sigma$  in mezzeria dell'elem.  $\triangle$ .



▶ CONNECTIVITY: relazione tra num. locale e globale  
 ⚠ MEMO: UN ELEMENTO PUÒ AVERE ANCHE NODI INTERNI !!!

Prendo  $\{q\}$  e nella 354<sup>a</sup> posizione ho 1 gdl di  $\triangle$  e in posizione 487 ho l'altra e avrò  $\{q^{\triangle}\}$

⇒ ho recuperato i gdl di  $\triangle$

$$w(x) = [N_{(x)}^{(e)}] \{q^{\triangle}\}$$

↖  $x = \frac{1}{2}$  se voglio la mezzeria

faccio la derivata e ottengo  $[N_{,xx}]$  e ci sostituisco dentro  $x = \frac{1}{2}$

$$\epsilon = -z [N_{,xx}^{(e)}] \cdot \{q^{\triangle}\}$$

•  $K_{12}$  deve finire su prima riga ma 7<sup>a</sup> posiz.

Perché? Per moltiplicare  $U_7$ ! Memo: ROD

$$K_{12} = \frac{EA}{L} (-1)$$

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

•  $K_{21} \rightarrow (7; 1)$

•  $K_{22} \rightarrow (7; 7)$

### BARRA di torsione

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(bar)} & K_{12}^{(bar)} \\ K_{21}^{(bar)} & K_{22}^{(bar)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_T^{(1)} \\ M_T^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$[K^{bar}] = \frac{GJ_T}{L} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_T^{(1)}$  è in posizione (4;1) nel vettore dei carichi

→  $K_{11}^{(bar)} \Rightarrow K_{44}^{(beam\ 3D)}$  x  $K$   $\theta_1$  è in 4;1

### BEAM (trave)

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(beam)} & K_{12}^{(beam)} & K_{13}^{(beam)} & K_{14}^{(beam)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \varphi_1 \\ W_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ T_2^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

depende dal piano che sto considerando

$$K_{11} \cdot W_1 = T_2$$

$\downarrow$        $\downarrow$        $(2;-1)$   
 $(2;2)$     $(2;1)$

$$W_2 \rightarrow (8;1)$$

[...] Così procedendo si ottiene la matrice di rigidità per la trave nello spazio

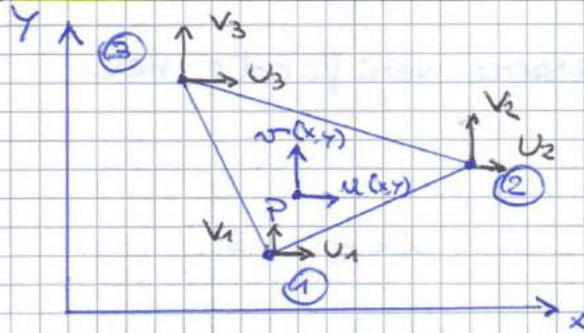
→ PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI  
vedi slide



# STRUTTURE AERONAUTICHE 22/05/2014

Elemento membranale + semplice: **CST**

## THREE NODE MEMBRANE



$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^{(0)}\} + z\{k\}$$

↓  
Si applica  $enk$  ai pannelli multistrato PURCHÉ SIANO A LAMINAZIONE SIMMETRICA

$$\{d^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\{d^{(e)}\} = [N^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

Per decidere  $N^{(e)}$  bisogna decidere  $q^{(e)}$   
→ quanti nodi mettere

- Qual è la cosa + semplice con cui ricoprire una superficie? UN'AREA TRIANGOLARE

il generico punto → ogni nodo → 2 gdl:  $U, V$

$$\{q^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \{q_1^{(e)}\} \\ \{q_2^{(e)}\} \\ \{q_3^{(e)}\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{q_i^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \rightarrow \{q^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{V_1\} \\ \{U_2\} \\ \{V_2\} \\ \{U_3\} \\ \{V_3\} \end{Bmatrix}$$

$\{d^{(e)}\}$ : vettore degli spostamenti DEL GENERICO PUNTO opportunamente all'elemento

Funzioni di forma → dicono cosa succede in centro sapendo cosa capita in periferia

$$\{d^{(e)}\} = [N^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

$$u(x, y) = N_1^{(u)} U_1 + N_2^{(u)} U_2 + N_3^{(u)} U_3$$

$$v(x, y) = N_1^{(v)} V_1 + N_2^{(v)} V_2 + N_3^{(v)} V_3$$

$$[N^{(e)}] = \begin{bmatrix} [N_1 \ 0] & [N_2 \ 0] & [N_3 \ 0] \\ [0 \ N_1] & [0 \ N_2] & [0 \ N_3] \end{bmatrix}$$

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} = N_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = N_i [I]$$

Ora dobbiamo calcolarci  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  risolvendo il sistema algebrico

→ REGOLA DI CRAMER

"Data la generica variabile  $\alpha_i$

$$\alpha_i = \frac{| \dots |}{|C|} \rightarrow \text{determ. matrice coeff.}$$

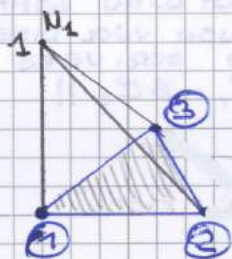
\* determinante della matrice che si ottiene prendendo la matrice dei coeff. e sostituendo i-esima colonna con la colonna dei termini noti

$$\alpha_0 = \frac{\begin{vmatrix} U_1 & x_1 & y_1 \\ U_2 & x_2 & y_2 \\ U_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & U_1 & y_1 \\ 1 & U_2 & y_2 \\ 1 & U_3 & y_3 \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$\alpha_2 = \dots$$

Le funzioni di forma  $N$  sono lineari in  $x$  e  $y$



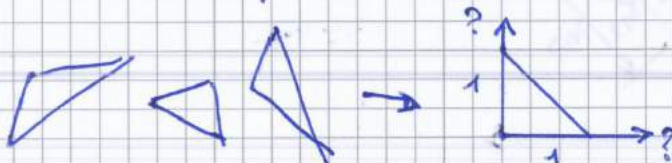
è un piano

$$N_1 = 1 \text{ in } \textcircled{1}, 0 \text{ in } \textcircled{2}, 0 \text{ in } \textcircled{3}$$

$$\sum N_i = 1$$

Conviene sempre introdurre le coordinate adimensionali

Esiste un modo x rappresentatore qualsiasi triangolo nel piano in un triangolo rettangolo di cateti UNITARI? Esiste un sistema di coordinate x fore ciò?

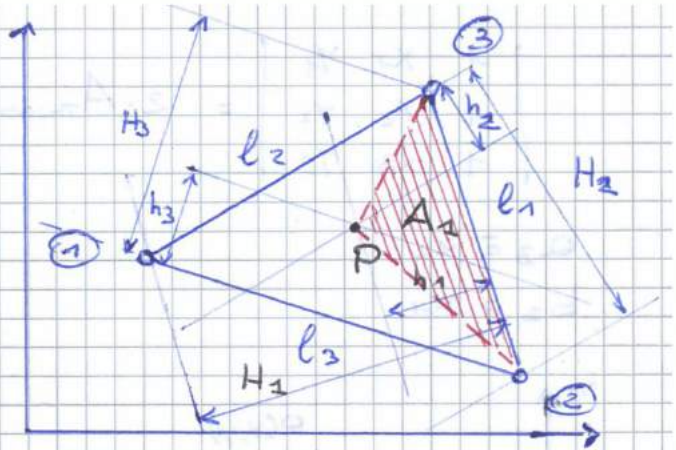


$$\xi_1 = \frac{h_1}{H_1} \cdot \frac{l_1}{L_1} = \frac{2A_1}{2A_T}$$

$$\rightarrow \xi_i = \frac{A_i}{A_T}$$

Ecco perché si chiamano coordinate di area

$A_i$  = area del triangolino di lato  $l_i$  e altezza  $h_i$



$$\sum_{i=1}^3 \xi_i = \frac{A_1}{A_T} + \frac{A_2}{A_T} + \frac{A_3}{A_T} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A_T} = 1$$

$\Rightarrow \xi_1, \xi_2, \xi_3$  non sono l.i.

$\rightarrow$  SOLO 2 SONO l.i.

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$$

CERTO CHE LO SONO  
combinazione lineare

$$c = \alpha a + \beta b$$

... COME FAI A SCRIVERE

$$\xi_3 = \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 \text{ ?! ?}$$

DOVRESTI USARE INFO  
CHE  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ !

Dimostriamo che le coordinate di area sono esattamente le funz. di forma trovate prima.

$$N_1 = \xi_1$$

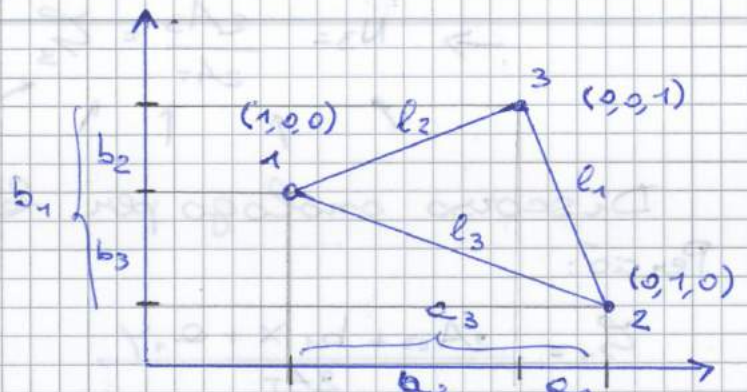
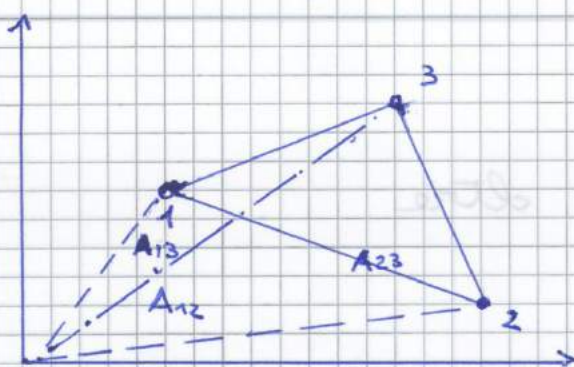
$$N_2 = \xi_2$$

$$N_3 = \xi_3$$

NON SAREBBE

UNA C.L.

$\rightarrow$  SONO l.i.!



• Prendiamo i lati del triangolo e proiettiamoli sugli assi x e y; le chiamiamo  $a$  e  $b$

$a_i$  = proiez. su x del lato di lunghezza  $l_i$

$b_i$  = " " y " " " " " "  $b_i$

$$N_1 = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{2A_T} \rightarrow \frac{2A_{23} + b_1 x + a_1 y}{2A_T}$$

$$\rightarrow x = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$$

$$u = \sum_{i=1}^{10} u_i N_i$$

$$y = \sum_{i=1}^3 y_i \xi_i$$

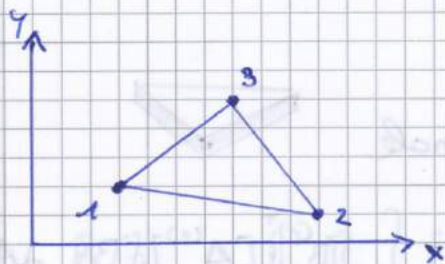
$$v = \sum_{i=1}^3 v_i N_i$$

**Elemento ISO-PARAMETRICO:** elemento che soddisfa questa proprietà: "La legge di interpolazione che fornisce le componenti di spost. del generico punto  $\xi$  elem. in funz. \* è la stessa legge che fornisce le coordinate del punto in funzione delle coordinate nodali"

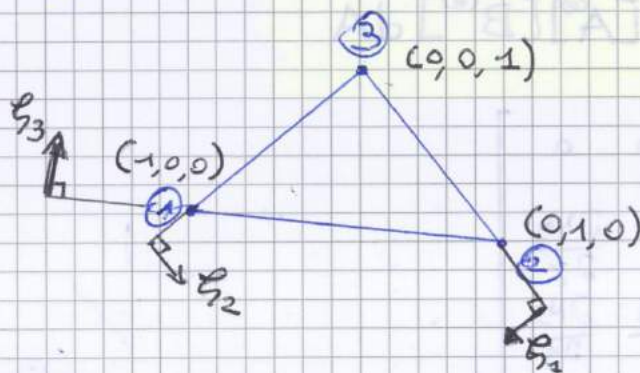
\* delle componenti di spostamento NODALI

### TRASFORMAZIONE DELLA GEOMETRIA DAL PIANO FISICO (x,y) AL PIANO NATURALE ( $\xi_1, \xi_2$ )

MEMO:  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \rightarrow \xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$



Trasformazione lineare: un segmento nel piano fisico rimane un segmento anche nel piano naturale



Abbiamo dimostrato che passando da un triangolo nel piano fisico a quello naturale, questo diventa un triangolo rettangolo di cateti unitari.

$$[A] =$$

CST = Constant Strain Triangle

→  $[A]$  non dipende dal punto ⇒ posto fuori da  $\int \dots dA$

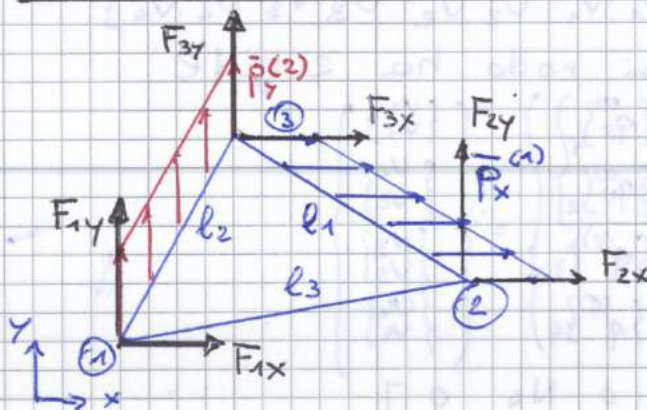
$$[K^{(e)}] = [B^{(e)}]^T [A^{(e)}] [B^{(e)}] \cdot A_T$$

Quando andiamo a fare l'assemblaggio non c'è bisogno di passare al sistema di rif. struttura POICHÈ PER IL CALCOLO DI  $[B^{(e)}]$  abbiamo già derivato rispetto al sistema strutturale le funz. di forme

⇒ DEFORMAZIONI SONO GIA' NEL SISTEMA STRUTTURA

Nell'elem. asta  $b_e$  e erano subito calcolate nel sistema locale e poi trasformate.

### VEETTORE DEI CARICHI NODALI



PIASTRE → corichi sono per unità di lunghezza

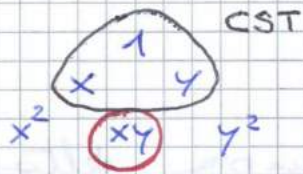
Se il carico è uniformemente distribuito devo:

- prendere carico distribuito
- calcolare risultante
- assegnare  $\frac{1}{2}$  risultante a un nodo e  $\frac{1}{2}$  all'altro nodo sullo stesso lato

$$F_{1x} = \frac{1}{2} \left( \bar{p}_x^{(2)} l_2 \right) + \frac{1}{2} \left( \bar{p}_x^{(3)} l_3 \right)$$

L'operatore può discretizzare come gli piace e piace! → NON DEVONO ESSERE DIREZIONI

PREFERENZIALI ⇒ **l'elemento finito deve avere un comportamento ISOTROPO.**

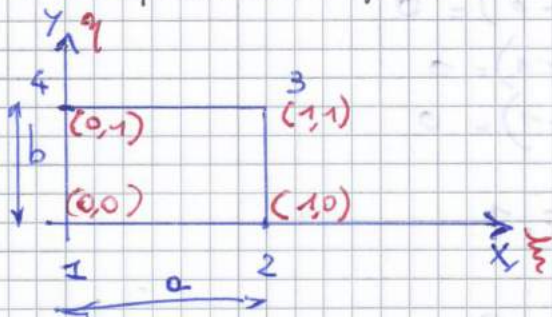


↳ Prendiamo **xy** che garantisce isotropia!

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$$

$$v = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy$$

Noi faremo riferimento all'ELEMENTO RETTANGOLARE



Adimensionate:

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b}$$

Coordinate fisiche: (0,0) (a,0) (a,b) (0,b)  
 " naturali: (0,0) (1,0) (1,1) (0,1)

**COORD. NATURALI** → ogni elemento diventa un quadrato di lato 1

$$U_1 = \alpha_0$$

$$U_2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot a$$

$$U_3 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot b + \alpha_3 \cdot ab$$

$$U_4 = \alpha_0 + 0 + \alpha_2 \cdot b + 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

$[C] \{\alpha\} = \{U\}$  → si ricava  $\alpha = f(u)$

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{U\}$$

$$\{\beta\} = [C]^{-1} \{U\}$$

$$\begin{aligned}
 x = a \xi &\rightarrow \frac{\partial x}{\partial \xi} = a & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= 0 \\
 y = b \eta &\rightarrow \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * & \begin{Bmatrix} (\cdot)_{\xi} \\ (\cdot)_{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\cdot)_{x} \\ (\cdot)_{y} \end{Bmatrix} \\
 ** &
 \end{aligned}$$

MATRICE JACOBIANA DELLA TRASFORMAZIONE

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Nel nostro caso:

$$[J] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} (\cdot)_{x} \\ (\cdot)_{y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} (\cdot)_{\xi} \\ (\cdot)_{\eta} \end{Bmatrix}$$

Nostro caso

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

Perciò:

$$\begin{cases} \frac{\partial (\cdot)}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial (\cdot)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial (\cdot)}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial (\cdot)}{\partial \eta} \end{cases}$$

$$\varepsilon_x = \mu_{,x} = \frac{1}{a} \mu_{,\xi} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} \cdot U_i$$

$$N_1 = -\frac{1}{a}(1-\eta) \quad N_2 = \frac{1}{a}(1-\eta) \quad N_3 = \frac{1}{a}\eta \quad N_4 = -\frac{1}{a}\eta$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{a}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{a}\eta & 0 & -\frac{1}{a}\eta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b}(1-\xi) & 0 & -\frac{1}{b}\xi & 0 & \frac{1}{b}\xi & 0 & \frac{1}{b}(1-\xi) \\ -\frac{1}{b}(1-\xi) & \frac{1}{a}(1-\eta) & -\frac{1}{b}\xi & \frac{1}{a}(1-\eta) & \frac{1}{b}\xi & \frac{1}{a}\eta & -\frac{1}{b}(1-\xi) & -\frac{1}{a}\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ v_1 \\ U_2 \\ v_2 \\ U_3 \\ v_3 \\ U_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

3x1

3x8

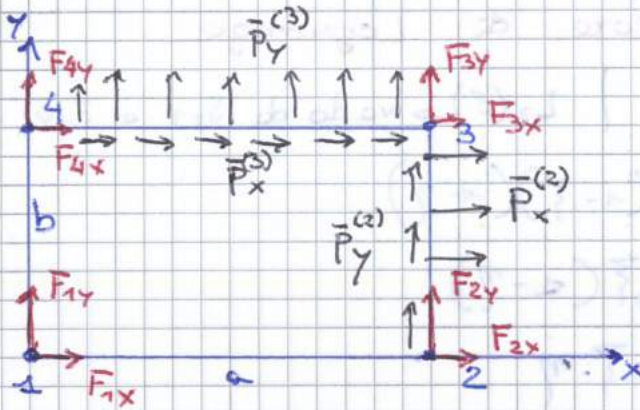
8x1

$$[B^{(e)}]$$

QUINDI l'elemento quadrangolare è:

- COMPATIBILE
- COMPLETO
- ISOPARAMETRICO

### VETORE DEI CARICHI NODALI



Vogliamo calcolare  $F_{3y}$

$\frac{\bar{p}_y^{(3)} \cdot a}{2} \rightarrow$  ne do mezza a  $F_{4y}$  e mezza a  $F_{3y}$

$$F_{3x} = \frac{\bar{p}_x^{(3)} \cdot a}{2} + \frac{\bar{p}_x^{(2)} \cdot b}{2}$$

$$F_{3y} = \frac{\bar{p}_y^{(3)} \cdot a}{2} + \frac{\bar{p}_y^{(2)} \cdot b}{2}$$

[...]

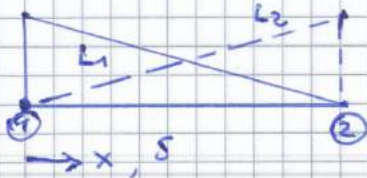
Nelle aste avevamo visto:

$$L_1 = 1 - \frac{x}{L} = 1 - \delta$$

$$L_2 = \frac{x}{L} = \delta$$

$$L_1(\delta)$$

$$L_2(\delta)$$



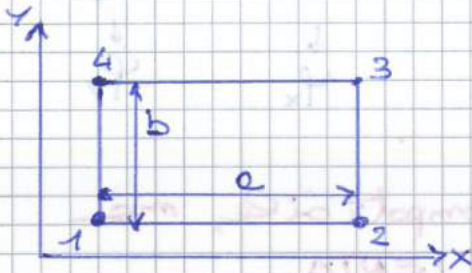


# FOUR-NODE RECTANGULAR KIRCHHOFF PLATE ELEM. QUAD4

## → ELEMENTO PIASTRA 4NODI FLESSIONALE

Solo flessionale (se poi la piastra è caricata anche nel piano si metteranno insieme QUAD4M e QUAD4).

## PIASTRE MULTISTRATO SIMMETRICAMENTE LAMINATE



Piastra:

$$\begin{cases} u = \cancel{u^{(e)}} - z w_{,x}^{(e)} \\ v = \cancel{v^{(e)}} - z w_{,y}^{(e)} \\ w = w^{(e)} \end{cases} \rightarrow \{d^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}$$

CARICATA SOLO  
TRASVERSALMENTE

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ K_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \{\sigma_p\}^T \{\epsilon_p\} dV = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \{\epsilon_p\}^T [Q_p] \{\epsilon_p\} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \langle \{\epsilon_p\}^T [Q_p] \{\epsilon_p\} \rangle dA =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \{k\}^T \langle z^2 [Q_p] \rangle \{k\} dA =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \{k\}^T [D] \{k\} dA$$

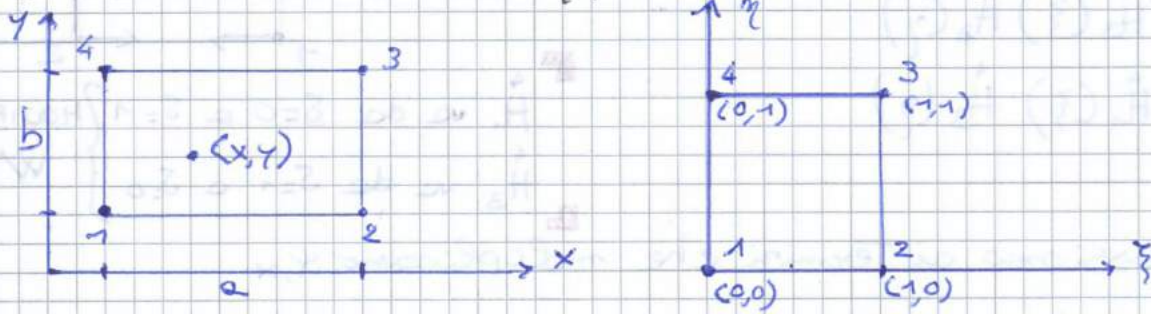
[D] = matrice  
rigidezze  
flesso-torsionali  
(3x3)

Per scegliere il TIPO di funzione di forma bisogna vedere qual è il max ordine di derivata che compare nell'eq. dell'energia di def.

→ Im {k} c'è  $w_{,xx}, w_{,yy}, w_{,xy}$  →

$$\Rightarrow [K^{(e)}] = \int_{A^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D] [B^{(e)}] dA$$

TRASF. DA PIANO (x-y) A PIANO ( $\xi$ - $\eta$ )



$$x = x^{(n)} + a\xi$$

$$y = y^{(n)} + \eta b$$

$$\xi = \frac{x - x^{(n)}}{a}$$

$$\eta = \frac{y - y^{(n)}}{b}$$

Costruzione funzioni di base

$$[N^{(e)}] = [N_{(1)}^{(e)}] [N_{(2)}^{(e)}] [N_{(3)}^{(e)}] [N_{(4)}^{(e)}]$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_{(1)} \\ q_{(2)} \\ q_{(3)} \\ q_{(4)} \end{Bmatrix}$$

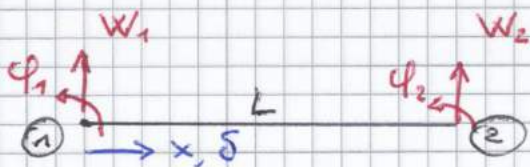
$$[N_{(i)}^{(e)}] = \begin{bmatrix} N_{(i)}^w & N_{(i)}^{\phi_x} & N_{(i)}^{\phi_y} & N_{(i)}^{\phi_{xy}} \end{bmatrix}$$

Facciamo analogamente a quanto visto prima.

SEPARAZIONE VARIABILI:

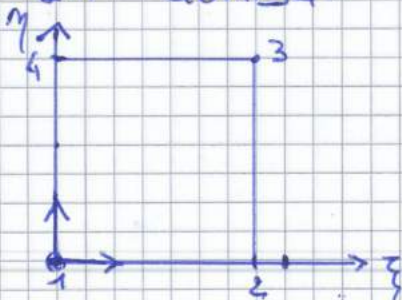
$$N_i(\xi, \eta) = F(\xi) G(\eta)$$

Nella trave si era visto che:



$$w(s) = H_1(s) w_1 + L H_2(s) \phi_1 + H_3(s) w_2 + L H_4(s) \phi_2$$

Im QUAD4:



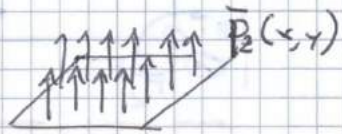
$$N_1^w = H_1(\xi) \cdot H_1(\eta)$$

siamo in (1) devo moltiplicare  $w_1 \rightarrow$  uso  $H_1$ !

# STRUTTURE AERONAUTICHE 5/06/2014

## continue QUAD-4

### VEITORE DEI CARICHI NODALI EQUIVALENTI

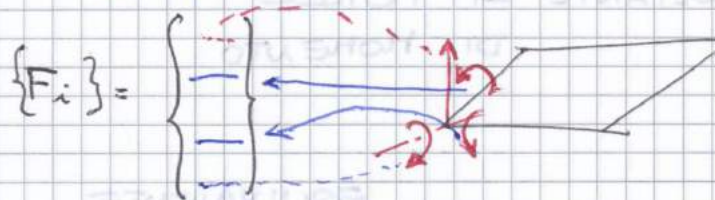
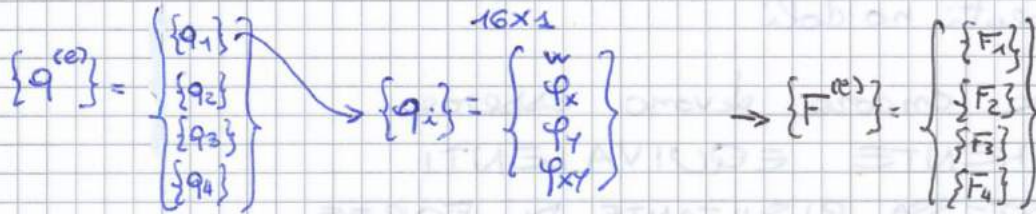


$$W_{ex} = \int_A \bar{p}_z dA \cdot w^T$$

$$w^{(e)} = [N^{(e)}] \{q^{(e)}\} \rightarrow w^{(e)T} = \{q^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T$$

$$\rightarrow W_{ex} = \{q^{(e)}\}^T \int_A [N^{(e)}]^T \cdot \bar{p}_z dA = \{q^{(e)}\}^T \{F^{(e)}\}$$

$$\{F^{(e)}\} = \int_A [N^{(e)}]^T \cdot \bar{p}_z^{(e)} dA$$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{FORZA TRASV.} \\ \text{MOMENTO CHE MOLTIPLICA } \phi_x \\ \text{" " " } \phi_y \\ \text{MOMENTO TORCENTE} \end{array} \right\}$

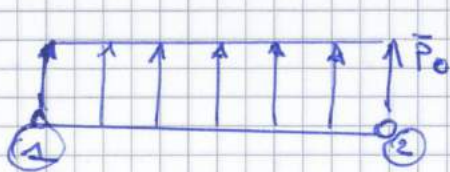
### ~~Beam~~ Ritorno al passato

### BEAM ELEMENT

### Vettore carichi nodali equivalenti

$$\{P^{(e)}\} = \int_{L^{(e)}} \bar{p}_z [N^{(e)}] dx$$

Carico costante distribuito



$$\{q^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{F^{(e)}\} = \bar{p}_0 \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}] dx$$

$$\text{dove } [N^{(e)}] = \begin{Bmatrix} H_1 \\ LH_2 \\ H_3 \\ -LH_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{F^{(e)}\} = \frac{\bar{p}_0 L^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ L^{(e)}/6 \\ 1 \\ -L^{(e)}/6 \end{Bmatrix}$$

$$[K]\{q\} = \{F\} + \{R\}$$

$$\left(\frac{EJ}{L^3}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} -12 & & & \\ & 4L^2 & & \\ & & -12 & \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{P}_0 L^{(e)}}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L^{(e)} \\ 6 \\ -L^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Partizione + risoluzione

$$\left(\frac{EJ_y}{L^3}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{P}_0 L^{(e)}}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -L \end{Bmatrix}$$

→

$$\rightarrow W_{FEH}(\xi) = \frac{\bar{P}_0 L^4}{24 EJ_y} (-2\xi^3 + 5\xi^2)$$

- Da cosa si capisce che la soluzione non è quella esatta?

Perché derivando 4 volte lo spostamento dovrai ottenere una costante ... ma se  $W_{FEH}$  è di 3° grado la sua derivata 4° è zero!

→ QUESTA è la soluzione esatta di un problema di trave incastata con carico concentrato all'estremità

CONFRONTO

Soluzione esatta analitica spostamenti

$$w_{ex}(\xi) = \frac{\bar{P}_0 L^4}{24 EJ_y} (\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2) \quad \varphi_{ex}(\xi) = \frac{\bar{P}_0 L^3}{24 EJ_y} (4\xi^3 - 12\xi^2 + 12\xi)$$

$$w_{ex}(L) = \frac{\bar{P}_0 L^4}{8 EJ_y} = W_2$$

$$\varphi_{ex}(L) = \frac{\bar{P}_0 L^3}{6 EJ_y} = \varphi_2$$

# ELEMENTI SOLIDI (3D)

Non tutto può essere modellizzato come elementi 1D o 2D  $\Rightarrow$  sono stati creati gli elementi 3D  
 es. Un campo fluidodinamico non lo puoi schematizzare con elementi ROD! XD

La teoria è sempre la stessa del FEM

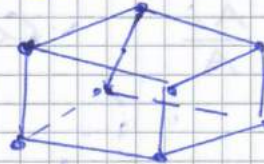
$$\{d^{(e)}\} = [N^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

Ogni elemento 3D ha il suo corrispondente 2D

• TETRA - 4

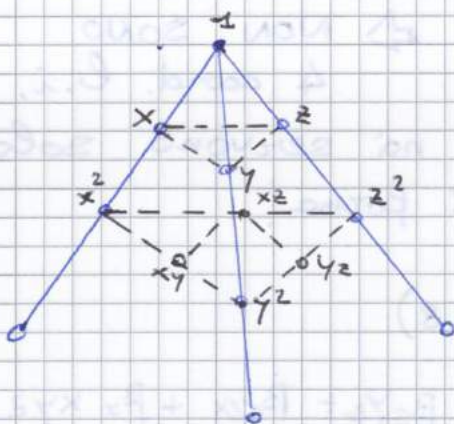
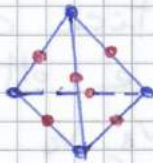


• HEXA - 8



Ci sono poi gli elementi di ordine superiore

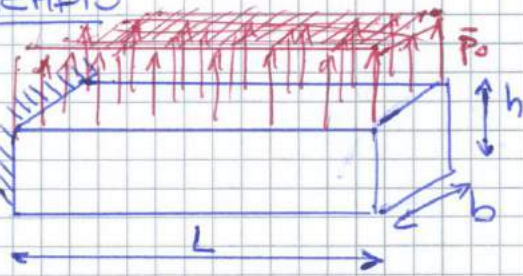
$\rightarrow$  TETRA - 10



- Muovendosi su un lato della piramide si ha la serie di potenze per un problema 1D
- FACCIA  $\rightarrow$  problema 2D
- PIRAMIDE  $\rightarrow$  " 3D

... Se esistono gli elementi 3D perché dobbiamo perdere tempo con gli elementi 1D e 2D?

ESEMPIO

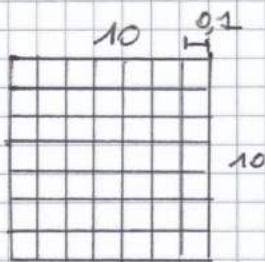


$h = b$   
 $\frac{L}{b} = 20$   
 Carico distribuito  
 uniforme

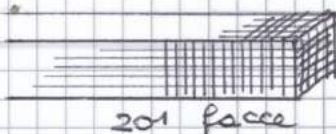
Calcolare freccia, tensioni,...

Uno che non sa niente di strutture aeronautiche dice "prendo un HEXA8", poi lo porta dall'avvocato che è amministratore delegato e faccio figo

WARNING: HEXA8 vuole che le dimensioni tra i lati siano  $\sim \frac{h}{b} = 1$



$\rightarrow$  CUBETTI



SEZIONE: 100 nodi x  
 3 gdl/nodo =

300 gdl / faccia x  
 201 facce =

60 000 gdl

Togliamo 1000 all'incastro!

Arriva un vero ingegnere e gli dice "MA COSA FAI! È UNA TRAVE ( $\frac{L}{b} \geq 10$ )! HAI SPRECATO TEMPO TUO e TEMPO DI CALCOLO!"

Basta mettere 200 nodi su una trave

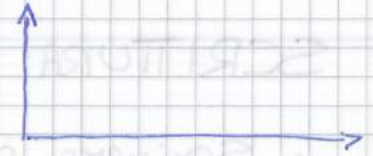
$$200 \text{ nodi} \times \frac{2 \text{ gdl}}{\text{nodo}} = 400 \text{ gdl}$$

60000 gdl vs 400 gdl danno gli stessi risultati fino alle 3<sup>e</sup> cifre decimali!

**I modelli dettagliati NON VANNO USATI NELLE FASI PRELIMINARI!**

## TRAVATURA RETTICOLARE PIANA

- ▶ Matrice della GEOMETRIA  
coordinate globali dei nodi
- ▶ Matrice di connectivity



	NODO 1	NODO 2
1		
2		
3		

### Elementi ROD

- ⚠ Gli elementi non sono tutti uguali!  
Per ognuno bisogna specificare **MATERIALE**,  
e **SEZIONE TRASVERSALE**

### INPUT

da programma

```
nmot = input('Inserisci numero materiali: ');
```

↓  
voluta la espressione che dai da tastiera  
e la assegna alla variabile nmot

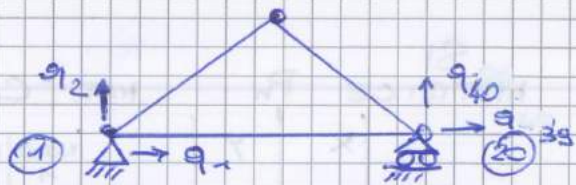
### Matrice Pm = MATRICE GEOMETRIA

- O fai un mega ciclo for che per ogni nodo ti dice

inserisci coord. x

inserisci coord. y

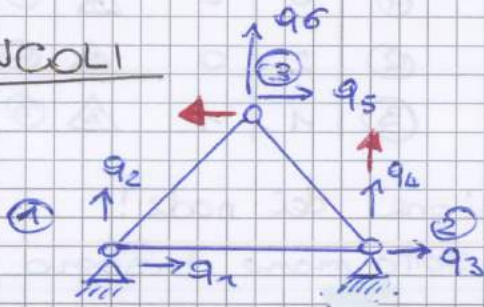
OPPURE lo si inserisce come input direttom.  
come matrice! È + veloce!



GdL BLOCCATI

$q_1, q_2, q_4$   
 $\rightarrow q_3, q_5$  è libero!

VINCOLI



GdL BLOCCATI

$q_1, q_2, q_3, q_4$

13

$$C_{ne} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{se} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 1 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 - 1 & 2 \cdot 2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$C_{se}(i, i) = \begin{bmatrix} 2 \cdot C_{ne}(i, 1) - 1 & 2 \cdot C_{ne}(i, 2) \\ 2 \cdot C_{ne}(i, 2) - 1 & 2 \cdot C_{ne}(i, 1) \end{bmatrix}$$

• Inserire dati sui carichi nei nodi

$$F_n = \begin{bmatrix} 5 & -1000 \\ 4 & 2000 \end{bmatrix}$$

↑ indice grado libertà e cui è associata  
 ↑ intensità forza

FORZE NODALI E QUIV. ESTERNE

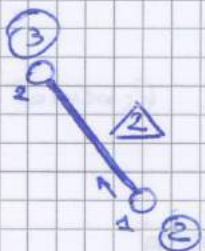
Bisognerebbe creare una matrice  $n \times 2$  riempita di zeri TRANNE NEGLI INDICI DOVE CI SONO APPLICATI CARICHI

Per è stupido riempire PER ORA una matrice di zeri. DOPO si creerà così!

$$P_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{ne} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Lunghezza elementi e angoli:



$$L = \sqrt{(x_3^G - x_2^G)^2 + (y_3^G - y_2^G)^2}$$

Nel programma

x nodo 2 dell'elemento e

MAI SOST

$$L(e, s) = \sqrt{\left( P_n(C_{ne}(e, 2), 1) - P_n(C_{ne}(e, 1), 1) \right)^2 + \left( P_n(C_{ne}(e, 2), 2) - P_n(C_{ne}(e, 1), 2) \right)^2}$$

INDICE RGA

↑ elemento



$$[K^{(e)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

poi

$$[K^{G(e)}] = [A^{(e)}]^T [K^{(e)}] [A^{(e)}]$$

$$[A^{(e)}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

for e=1:ne

Ke = matrice rigidità e (L(e), ca(e), sa(e), A(Cpe(e,1)), E(Cpe(e,2)))

end

Vettore dei carichi esterni

$$[F_n] = \begin{bmatrix} 4 & 2000 \\ 5 & -1000 \end{bmatrix}$$

passare  
a un  
vettore  
n x 1

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2000 \\ -1000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

for i=1:size(Fn,1)

$$F(F_n(i,1)) = F_n(1,2);$$

↑ indice      ↑ intensità carico

end

27/05/2014

[20]

ib = vettore gdl vincolati

{1, 2, 23, 24}

\* →

il = " " " liberi

{3, 4, ..., 22}

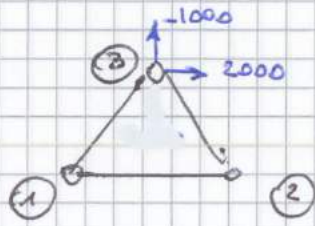
→ come trovo il essendo noto ib?

$$\text{Trovo } [K^G] \rightarrow [K^G] \{q\} = \{F\}$$

Non si può semplicemente invertire  $[K^G]$  ma bisogna partizionarla!

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & | & K_{FV} \\ \hline & | & \\ K_{VF} & | & K_{VV} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{Fred} \\ \vdots \\ q_{vincol} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_F \\ \vdots \\ F_V \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \\ \vdots \\ R_{VV} \end{Bmatrix}$$

⚠ Non ha senso dare un carico esterno su un grado di libertà VINCOLATO!



## RISOLUZIONE

$$[K] \{q\} = \{F\} + \{R\}$$

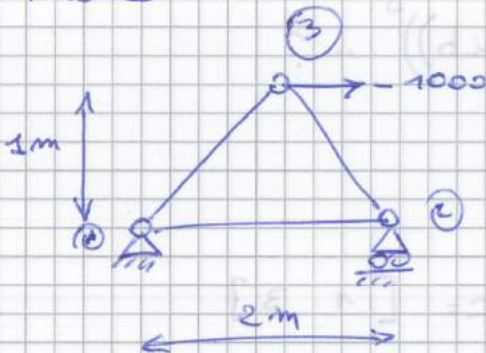
$$\begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{pv}] \\ [K_{vp}] & [K_{vv}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_p\} \\ \{q_v\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_p\} \\ \{F_v\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \{R_v\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow q_p &= K_{pp}^{-1} F_p \\ R_v &= K_{vv} q_v - F_v \end{aligned}$$

⚠  $q_v = 0$   
 OVIAMENTE UN GRADO VINCOLATO NON SI SPOSTA!

☺  
 $F_v = 0$ ! NON SI DA' UN CARICO ESTERNO SU UN GDL BLOCCATO!  
 ... potrebbe però capitolare!

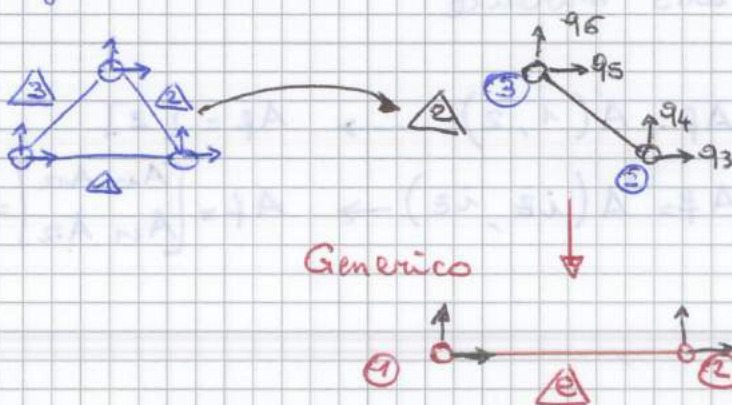
Prova



$$\begin{aligned} E &= 73.000 \\ A &= 400 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

## ELABORAZIONE RISULTATI STATICI

- Assegnazione dei gradi di libertà ai vari elementi  
 Ogni elemento ha 4 gdl



CREARE UNA MATRICE 4 x n

$$q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

indici gdl dati da matrice CSE

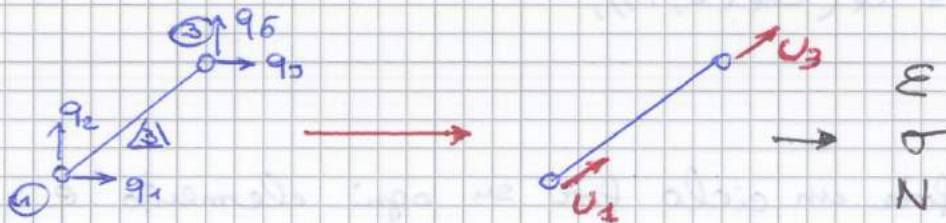
# ■ CALCOLO DELLA DEFORMAZIONE, TENSIONE E SFORZO NORMALE IN OGNI ELEMENTO

$$\varepsilon^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} [-1 \ 1] \begin{Bmatrix} q_1^{(e)} \\ q_2^{(e)} \end{Bmatrix} \rightarrow \varepsilon^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \underbrace{[-1 \ 1]}_{1 \times 2} \underbrace{[\Lambda^{(e)}]}_{2 \times 4} \underbrace{\{q^{(e)}\}}_{4 \times 1}$$

↑  
locali

1x4      4x  
→ 1x1

**!** NOI ABBIAMO CALCOLATO I GDL GLOBALI, ma x calcolare lo  $\varepsilon, \sigma, N$  sul singolo elemento ROE CI SERVONO QUELLI LOCALI!



## MEMO

$$\{U^{(e)}\}_{local} = [\Lambda^{(e)}] \{U^{(e)}\}_{global}$$

Prima per trovare  $\{q\}_{global}$  avevamo dovuto calcolare  $[K^{(e)}] = [\Lambda^{(e)T}] [K^{(e)}] [\Lambda^{(e)}]$

Vogliamo questi risultati in una matrice

$$D = \begin{bmatrix} \Delta & \varepsilon & \sigma & N \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ne & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

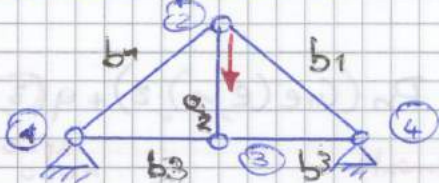
NON C'È SU TEORIA

$$\varepsilon^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} [-1 \ 1] [\Lambda^{(e)}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

## Procedura

$$\{q^{(e)}\} \rightarrow \varepsilon^{(e)} \rightarrow \sigma^{(e)} = E \varepsilon^{(e)} \rightarrow P^{(e)} = \sigma^{(e)} A^{(e)} = E^{(e)} A^{(e)} \varepsilon^{(e)}$$

## Struttura prova 2



$$b: R = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \Delta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$a: R = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \Delta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$A \approx 2\pi R S$$

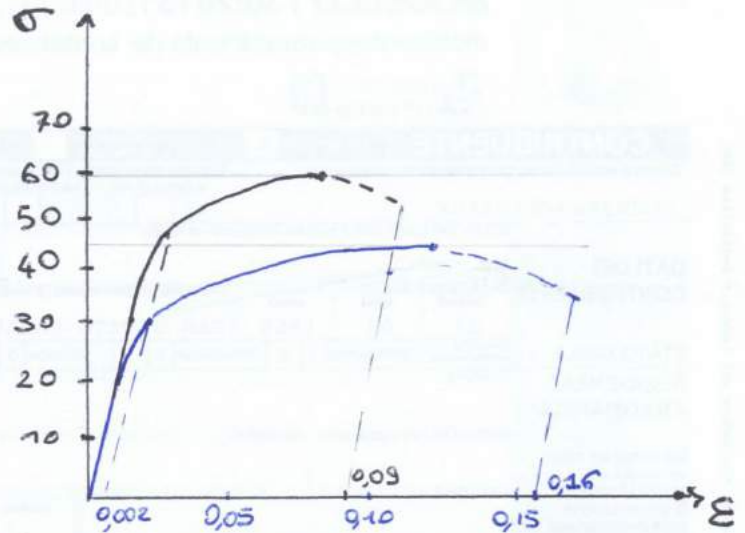
1. AC:  $E = 210 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
2. Ti:  $E = 105 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
3. AL:  $E = 73 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

# MATERIALI AERONAUTICI

## LEGHE ALLUMINIO

DURAL: 2024 Al + Cu

ERGAL: 7075 Al + Zn



	$\sigma_p$ [kg/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_y$ [kg/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_R$ [kg/mm <sup>2</sup> ]	$A_{p5}$ [%]
DURAL	20	30	42 ÷ 45	14 ÷ 20
ERGAL	30	45	35 ÷ 65	7 ÷ 11

LEGHE MAGNESIO → SUPERLEGGERE → cerchi corvelli

LEGHE TITANIO → ALTA RESISTENZA AL CALORE FINO A 450°  
 gambe corvelli, leading edge aerei alti Mach

LEGHE ACCIAIO → SFORZI CONCENTRATI, PIASTRE ATTACCO, BULLONERIA

Confronto Al - Ti - Acc.

	$\gamma$ [kg/dm <sup>3</sup> ]	$\sigma_R$ [kg/mm <sup>2</sup> ]	E [MPa]	$A_{p5}$	$L_R$ [km]
Al	2,7	45 ÷ 65 <small>dural ergal</small>	73 000	7 ÷ 20 <small>ERGAL DURAL</small>	15 ÷ 23 <small>DUR ERG</small>
Ti	4,5	100 ÷ 120	105 000	13 ÷ 18	~ 24
Fe-C	7,8	> 120	210 000	14 ÷ 20	~ 15

$$A_{p5} = \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{rottura}; \quad \epsilon = \frac{L_{iniziale}}{L_{com.iniziale}} \quad A_p = \epsilon \cdot 100$$

$$L_R = \frac{\sigma_R}{\gamma} \quad \text{lunghezza di rottura}$$

⚠ Non è tanto importante il valore assoluto di una proprietà quanto il suo rapporto con il peso!

ROBUSTEZZA SPECIFICA

MODULO SPECIFICO

$$L_R = \frac{\sigma_R}{\gamma}$$

$$\frac{E}{\gamma}$$

ACCIAIO

ALLUMINIO

$$\frac{100}{7,8}$$

$$\frac{30}{3} \quad + \text{competitivo}$$

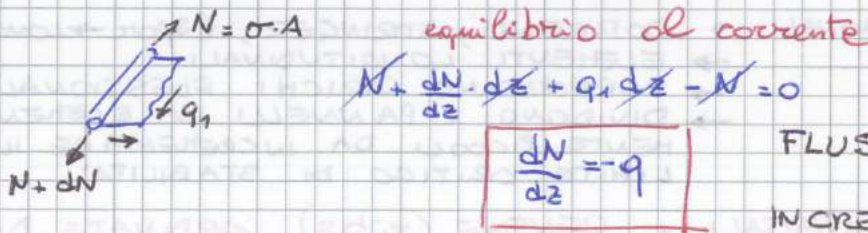
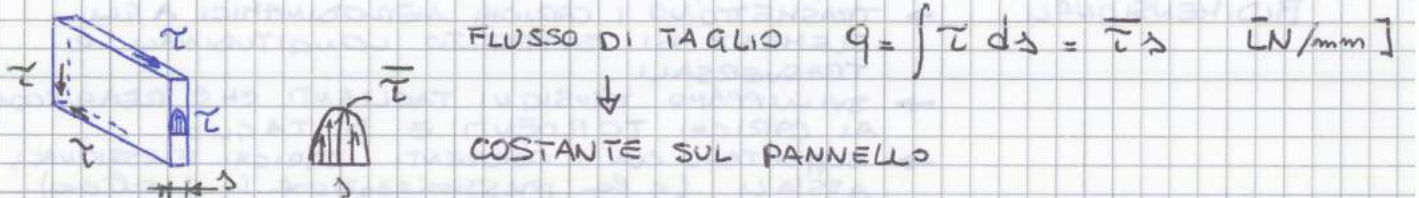
### NOTE

•  $1 \text{ kg/mm}^2 = 10 \text{ MPa}$

•  $L_R \text{ DURAL} = \frac{45 \text{ kg/mm}^2}{2,7 \text{ kg/dm}^3} = \frac{45 \text{ kg/mm}^2}{2,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot \frac{1 \text{ dm}^3}{10^6 \text{ mm}^3}} = \frac{45 \text{ kg/mm}^2}{2,7 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3} = 16,7 \cdot 10^6 \text{ mm} \approx 17 \text{ km}$

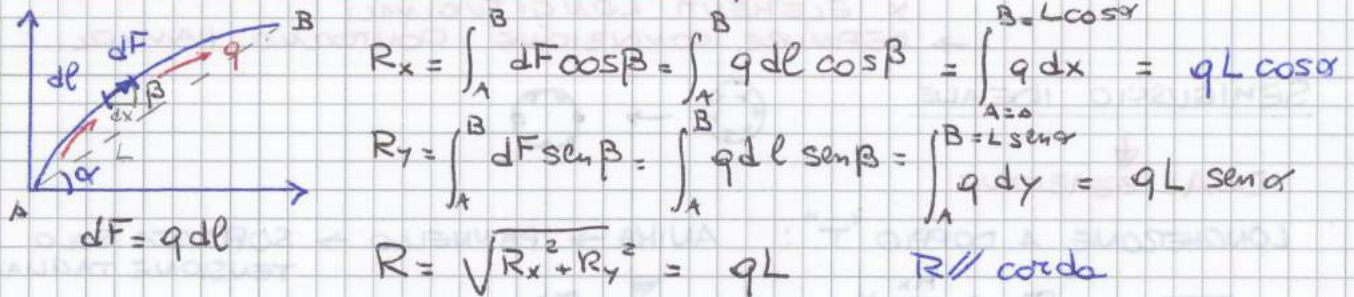
- 1) ELEMENTI LONGITUDINALI SOPPORTANO SOLO TENSIONI LONGITUDINALI COSTANTI SULLA SEZIONE DELL'ELEMENTO (→ ARRE CONCENTRATI)
- 2) PANNELLI SOPPORTANO SOLO TENSIONI DI TAGLIO CHE SI ASSUMONO UNIFORMI SULLO SPESSORE DELL'ELEMENTO ( $q = \tau \cdot s$  = costante)
- 3) ELEMENTI TRASVERSALI INFINITAMENTE RIGIDI NEL LORO PIANO PER MANTENERE LA FORMA DELLA SEZIONE MA TRASVERSALMENTE CEDEVOLI PER NON IMPEDIRE INGOMBAMENTI.

## STATO DI SOLLECITAZIONE dei PANNELLI

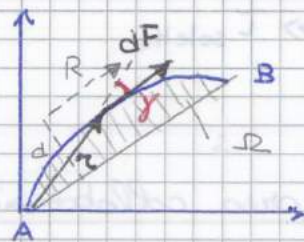


FLUSSO DI TAGLIO  
↓  
INCREMENTO DI SFORZO NORMALE NEL CORRENTE

## PANNELLO RISULTANTE DEL FLUSSO q



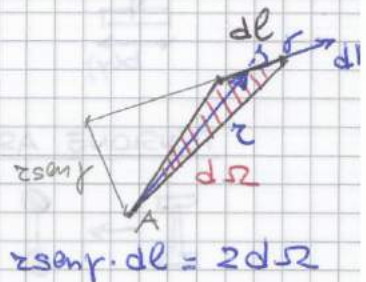
A che distanza dalla corda sta R?



$$\textcircled{A} \quad R \cdot d = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int r q dl \sin \gamma = q \int r^2 d\Omega$$

$$R d = q \int r^2 d\Omega$$

$$qL d = q \int r^2 d\Omega \rightarrow d = \frac{\int r^2 d\Omega}{L}$$



## RISULTANTE DEL FLUSSO DI TAGLIO

$$R = qL \quad d = \frac{\int r^2 d\Omega}{L}$$

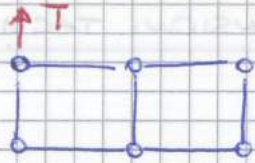
**NOTE:** IL FLUSSO DI TAGLIO PROVOCA UN INCREMENTO di SFORZO NORMALE  $dP_i$  SUL CORRENTE

→ SE NON AGISCE UN TAGLIO  $\Rightarrow q_i = 0 \Rightarrow \frac{dP_i}{dz} = 0$

DATO DA TAGLIO

ci sono in q circolari  
RIODATO DA UNA  
EVENTUALE TORSIONE

PROCEDURA PER CALCOLARE I FLUSSI, TEORIA ELEMENTARE



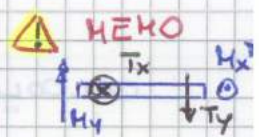
- 1) CALCOLO BARICENTRO E MOMENTI D'INERZIA
- 2) • TAGLIO CAUSA INCREMENTO SFORZO NORMALE  
• TORSIONE PURA → NO INCREMENTO  $dP_i/dz$
- 3) CALCOLO DEI  $dP_i/dz$  con LA FORMULA DERIVATA DA QUELLA DI NAVIER

$$\sigma_{zz} = K_1 x_i + K_2 y_i = \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x_i + \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y_i$$

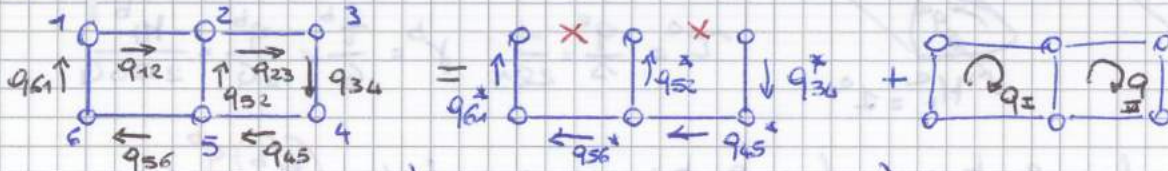
$x_i, y_i$  coordinate rispetto al BARICENTRO

$$N_i = \sigma_{zz} \cdot A_i = (K_1 x_i + K_2 y_i) A_i$$

$$\frac{dN_i}{dz} = \frac{d\sigma_{zz}}{dz} \cdot A_i = \frac{T_x I_x - T_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x_i A_i + \frac{T_y I_y - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y_i A_i$$



4) PROCEDURA "APRO & CHIUDO" (sovrapposizione effetti)



$$\frac{dM_x}{dz} = T_y$$

$$\frac{dM_y}{dz} = T_x$$

4.1) APRO OGNI CELLA E CALCOLO I FLUSSI PARZIALI  $q_i^*$  CON GLI EQUILIBRI AI CORRENTI

4.2) RICHUDO OGNI CELLA CON UN FLUSSO CIRCOLATORIO CORRETTIVO

5) I<sup>o</sup> eq. di Bredt rispetto a un polo qualsiasi (CON I FLUSSI COMPLETI)  
CONGRUENZA DELLE DEFORMAZIONI  $q_i = q_i^* + q_I$

2<sup>o</sup>  $T_y \cdot l_{12} = 2 q_{34} \cdot \frac{(l_{12} l_{23}) \cdot l_{34}}{2} + \dots$   $\Delta$  È UN'EQUAZIONE DI RISULTANTE, NON DI EQUILIBRIO

$$2 \left[ \theta_I = \theta_{II} \rightarrow \frac{1}{2 G \rho_I \Delta} \left[ q_{12} l_{12} + q_{52} l_{25} + q_{56} l_{56} + q_{61} l_{61} \right] = \frac{1}{2 G \rho_{II} \Delta} \left[ \dots \right] \right]$$

Prendere un verso di percorrenza

CON QUESTE SI TROVERANNO  $q_I$  e  $q_{II}$ , CHE SI SOSTITUIRANNO NELLE ESPRESSIONI DEI SINGOLI FLUSSI.

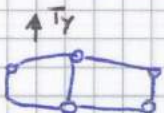
$$q_{12} = q_{12}^* + q_I$$

$$q_{52} = q_{52}^* + q_{II} - q_I$$

...

BONUS: CENTRO DI TAGLIO

ordinata / ascissa per cui un taglio orizzontale / verticale non genera torsione



1) SI METTE UN TAGLIO GENERICO T: IL C.D.T. NON È FUNZIONE DEL CARICO MA UNA CARATTERISTICA GEOMETRICA

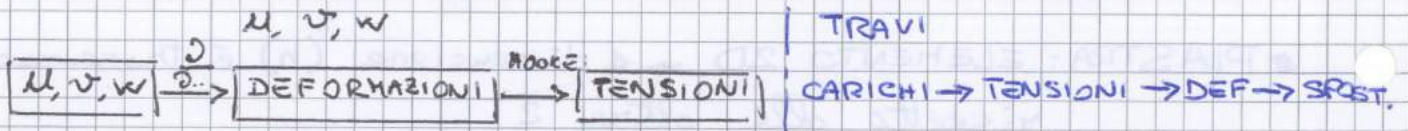
2) SI CALCOLANO I  $q^*$  IN FUNZIONE DI T (punti 2, 3, 4 uguali a procedura)

3)  $\begin{cases} T_y \cdot e_T = \dots \\ \theta_I = 0 \\ \theta_{II} = 0 \end{cases}$  SE UN TAGLIO PER IL CDT NON DA TORSIONE ALLORA LE 2 CELLE (o + celle) NON DEVONO RUOTARE → SI IMPONE  $\theta_I = 0, \theta_{II} = 0$

4) DA (ii) e (iii) SI RICAVALO  $q_I$  e  $q_{II}$ , CHE MESSI IN (i) FANNO SI CHE SI SEMPLIFICH "T" E SI TROVI  $e_T$ .

**⚠ SISTEMA IPERSTATICO: 3 eq. di equilibrio in 6 incognite**

ALLORA → SCRIVO TUTTO IN FUNZIONE DEGLI SPOSTAMENTI



**DEFORMAZIONI**  $\{E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\}^T \rightarrow \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} E_{xx} = u_{,x} = u_{,x}^{(0)} - z \cdot w_{,xx}^{(0)} \\ E_{yy} = v_{,y} = -v_{,y}^{(0)} - z \cdot w_{,yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} - 2z \cdot w_{,xy}^{(0)} \end{cases} \quad \{K_r\} = \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix}$$

CURVATURA

→  $\{E_r\} = \{E^{(0)}\} + z \cdot \{K_r\}$

MEMBRANALI                  FLESSIONALI

$w_{,xy}$  = TORSIONE PIASTRA

**TENSIONI**

$\{\sigma\} = [C] \{E\}$        $[C] = \text{MAT. RIGIDEZZA MATERIALI ORTOTROPI} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$

$\begin{cases} \tau_{xz} = C_{44} \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = C_{55} \gamma_{yz} \end{cases} \rightarrow \text{POICHÉ } \begin{cases} \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases} \rightarrow C_{44} = C_{55} = 0$

$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{zz} = 0$

→ PLAIN STRESS ←

**⚠ PLAIN STRESS ↔ PLAIN STRAIN**

Uno stato di tensione piano su una piastra non simmetricamente laminata mi porta ingobbamenti

$\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}\}^T \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$

→ RICAVARE  $Q_{ij}$ :

- si esplicita  $\sigma_{zz} = 0 \rightarrow \sigma_{zz} = C_{13}E_{xx} + C_{23}E_{yy} + C_{33}E_{zz} = 0$

→  $E_{zz} = -\frac{C_{13}}{C_{33}}E_{xx} - \frac{C_{23}}{C_{33}}E_{yy}$

**⚠ PUNTO DEBOLE DELLA TEORIA ⚠**

→  $\sigma_{xx} = C_{11}E_{xx} + C_{12}E_{yy} + C_{13}E_{zz}$

$= C_{11}E_{xx} + C_{12}E_{yy} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}E_{xx} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}E_{yy}$

$= (C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}})E_{xx} + (C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}})E_{yy}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

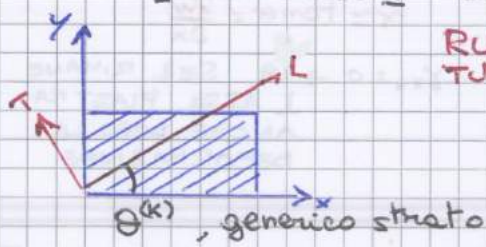
$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad i,j=1,2$

$Q_{66} = C_{66}$

$Q_{16} = Q_{26} = 0$

$[Q_p] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$

MATRICE DELLE RIGIDENZE RIDOTTE RIFERITA AGLI ASSI DI ORTOTROPIA → sistema lamina



RUOTARE IL RIFERIMENTO PER SCRIVERE TUTTO NEL SISTEMA X-Y

$$[A^{(k)}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2s \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

# LEGAHE TRA RISULTANTI e SPOSTAMENTI

## → EQUAZIONI COSTITUTIVE PIASTRA

Ingredienti:

$$\{\sigma\} = [Q] \cdot \{\epsilon_r\} \quad \{\epsilon_r\} = \{\epsilon_r^{(0)}\} + z \{k_r\}$$

- $\{\epsilon_r^{(0)}\}$  NON DIPENDE DA z
- $\{k_r\} = f(x, y)$

$$\{N\} = \langle \{\sigma\} \rangle \quad \{M\} = \langle z \{\sigma\} \rangle$$

$$\bullet \{N\} = \langle \{\sigma\} \rangle = \langle [Q] \{\epsilon_r\} \rangle = \langle [Q] \{\epsilon^{(0)}\} + z [Q] \{k_r\} \rangle =$$

$$\bullet \underbrace{\langle [Q] \rangle}_{[A]} \{\epsilon^{(0)}\} + \underbrace{\langle z [Q] \rangle}_{[B]} \{k_r\}$$

$$\bullet \{M\} = \langle z \{\sigma\} \rangle = \langle z [Q] (\{\epsilon^{(0)}\} + z \{k_r\}) \rangle =$$

$$= \langle z [Q] \rangle \{\epsilon^{(0)}\} + \langle z^2 [Q] \rangle \{k_r\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{N\} = [A] \{\epsilon^{(0)}\} + [B] \{k_r\} \\ \{M\} = [B] \{\epsilon^{(0)}\} + [D] \{k_r\} \end{cases}$$

[A] = mat. rigidità MEMBRANALE  
 [B] = " " di ACCOPPIAMENTO  
 [D] = " " FLESSIONALE

↳ CARATTERISTICHE DELLA PIASTRA

$$[A] = \langle [Q_p] \rangle = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_{k-1}}^{z_k} [Q_p^{(k)}] dz = \sum_{k=1}^{N_s} [Q_p^{(k)}] \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_s} [Q_p^{(k)}] \cdot \left( \frac{z_k - z_{k-1}}{1} \right)$$

Δ [Q<sub>p</sub><sup>(k)</sup>] È COSTANTE NEL SINGOLO STRATO

$$[B] = \langle z [Q_p] \rangle = \dots = \sum_{k=1}^{N_s} [Q_p^{(k)}] \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz = \sum_{k=1}^{N_s} [Q_p^{(k)}] \left( \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} \right)$$

$$[D] = \langle z^2 [Q_p] \rangle = \dots = \sum_{k=1}^{N_s} [Q_p^{(k)}] \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz = \sum_{k=1}^{N_s} [Q_p^{(k)}] \left( \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} \right)$$

NOTA: QUANDO LI SI VA A SOMMARE LE VARIE MATRICI [Q<sup>(k)</sup>] SONO GIÀ STATE RUOTATE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DELLA PIASTRA (c'è un errore di notazione nelle slide)

PIASTRA LAMINATA SIMMETRICAMENTE → [B] = [0]



" " NON SIMM: [B] ≠ [0]; uno stato tensionale piano mi porta deformazioni fuori del piano.

MATERIALE ISOTROPO

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad [A] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot h$$

$$[D] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 [Q_p] dz = \frac{1}{3} [Q] \left( \left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3 \right) = \frac{1}{3} [Q] \left( \frac{1}{8} h^3 + \frac{1}{8} h^3 \right) = \frac{1}{12} Q h^3 = \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2}$$



**BOUNDARY - CONDITIONS:**

$$x=0, a : \begin{matrix} u^{(0)} \\ v^{(0)} \\ z^{(0)} \end{matrix} / \begin{matrix} N_x \\ N_{xy} \\ T_x \end{matrix}$$

$$y=0/a \begin{matrix} u^{(0)} \\ v^{(0)} \\ w^{(0)} \end{matrix} / \begin{matrix} N_{xy} \\ N_y \\ T_y \end{matrix}$$

ROT.  $\begin{matrix} w^{(0)} \\ w^{(0)}_{,x} \\ w^{(0)}_{,y} \end{matrix} / \begin{matrix} M_x \\ M_{xy} \end{matrix}$

**GRADIENTE DI TORS.**

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \bar{q}_z = 0 \end{cases}$$

**3 EQUAZ. 6 INCOGNITE** → scriviamo come  $f(u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)})$

**EQUAZIONI COSTITUTIVE!**

**DERIVATE**

$$\begin{cases} \{N\} = [A]\{E_y^{(0)}\} + [B]\{K_y\} \\ \{M\} = [C]\{E_y^{(0)}\} + [D]\{K_y\} \end{cases}$$

$\{E_y^{(0)}\}$  → DERIVATE 1<sup>e</sup> spost.  
 $\{K_y\}$  → " 2<sup>e</sup> "

→  $N_{x,x}, \dots$  : DERIV. 2<sup>e</sup> + DERIV. 3<sup>e</sup>  
 $M_{x,xx}, \dots$  : " 3<sup>e</sup> + DERIV. 4<sup>e</sup>

[...] **PIASTRA SIMMETRICA CROSS-PLY:**

$$\uparrow z) D_{11} w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{,xxyy} + D_{22} w_{,yyyy} = \bar{q}_z$$

**EQUAZIONE + IMPORTANTE!**  
 eq. differenziale 4<sup>o</sup> ordine

**BOUNDARY-CONDITIONS:**

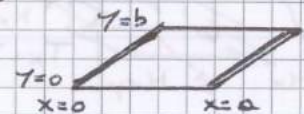
4 appoggi:  $x=0, x=a: w^{(0)}=0 \quad M_x=0$   
 $y=0, y=b: w^{(0)}=0 \quad M_y=0$  } **NOTE: DISPLACEMENTS + CDS**

Trasformo condiz. su momento in condiz. su  $w$

$$M_x = -D_{11} w_{,xx} - D_{12} w_{,yy} \quad [\text{CROSS-PLY, SIMMETRICA: } \{M\} = [D]\{K_y\}]$$

QUINDI SU LATI  $x=0, x=a$  :  $-D_{11} w_{,xx} - D_{12} w_{,yy} = 0$

se  $w^{(0)}=0|_{x=0}$  → anche  $w_{,yy}=0|_{x=0}$



↪ **Δ** se  $w^{(0)}$  deve essere = 0 su tutta la linea  $x=0$   
 → NON VARIERA' MAI LUNGO  $y$  per  $x=0$ !  
 Analogamente per  $x=a$ !

→  $-D_{11} w_{,xx} = 0 \rightarrow w_{,xx}^{(0)} = 0$

→ **ANALOGAMENTE SU LINEE  $y=0, y=b$**

**B.C. DISPLACEMENTS**  
 $x=a: w^{(0)}=0 \quad w_{,xx}^{(0)}=0$   
 $y=0, b: w^{(0)}=0 \quad w_{,yy}^{(0)}=0$

**SOLUZIONE:**

• ASSUMIAMO CARICO CON ANDAM. SINUSOIDALE:  $\bar{q}_z = q_2^{(0)} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

• ASSUMIAMO SOLUZIONE DI TIPO SINUSOIDALE:  $w = W \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

▶ **VERIFICA: RISPETTA LE B.C.? SÌ**

▶ **CALCOLI:**  $w_{,xxxx}^{(0)}, w_{,xxyy}^{(0)}, w_{,yyyy}^{(0)}$ , le metti nell'equazione e si ricava l'ampiezza  $W$  che SODDISFA L'EQ. DIFFERENZIALE

- quindi:
- il TIPO di soluz. soddisfa le B.C. (SOLUZ. GENERALE)
  - l'AMPIEZZA soddisfa l'eq. diff. (SOLUZ. PARTICOLARE)

$$\Delta \delta^2 \pi|_{\alpha=0} = 4k - 2Pe = 0$$

$-2Pe > -4k \rightarrow$

- $P > \frac{4k}{2e}$  INSTABILE
- $P = \frac{4k}{2e}$  CRITICO
- $P < \frac{4k}{2e}$  STABILE

COME SI VALUTA LA STABILITÀ DI QUESTO PUNTO?

BISOGNA TROVARE UNA VARIAZIONE DI  $\pi$  DI ORDINE SUPERIORE  $\neq 0$  NELLA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

$$\delta^3 \pi = +2Pe \sin \alpha$$

$$\delta^3 \pi|_{\alpha=0} = 0$$

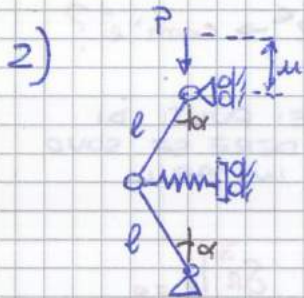
$$\delta^4 \pi = 2Pe \cos \alpha$$

$$\delta^4 \pi|_{\alpha=0} = 2Pe > 0$$

PUNTO CRITICO STABILE

$$\begin{aligned} \delta^2 \pi|_{P=\frac{4k}{2e} \frac{\alpha}{\sin \alpha}} &= 4k - \frac{4k}{2e} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot 2l \cos \alpha \\ &= 4k - \frac{4k \alpha}{l \sin \alpha} \\ &4k \left(1 - \frac{\alpha}{l \sin \alpha}\right) > 0 \text{ sempre} \\ &\quad \downarrow < 1 \end{aligned}$$

Per avere un sistema stabile oltre il caso critico  $\rightarrow$  QUESTO DEVE INGROBBARSI



$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} k (l \sin \alpha)^2 - P(2l - 2l \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{2} k l^2 \sin^2 \alpha - 2Pl(1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\delta \pi = k l^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2Pl \sin \alpha$$

$$k l^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2Pl \sin \alpha = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$2Pl \sin \alpha = k l^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$P = \frac{k l}{2} \cos \alpha$$

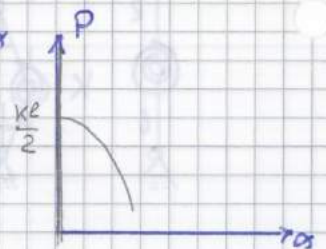
$$\delta^2 \pi = -k l^2 \sin^2 \alpha + k l^2 \cos^2 \alpha - 2Pl \cos \alpha$$

$$\Delta \delta^2 \pi|_{\alpha=0} = k l^2 - 2Pl$$

$$P < \frac{k l}{2} \text{ STABILE}$$

$$P > \frac{k l}{2} \text{ INSTABILE}$$

$$P = \frac{k l}{2} \text{ CRITICO}$$



$$\rightarrow \delta^3 \pi = -2k l^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2k l^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2Pl \sin \alpha$$

$$\delta^3 \pi|_{\alpha=0} = 0$$

$$\rightarrow \delta^4 \pi = -k l^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2Pl \cos \alpha$$

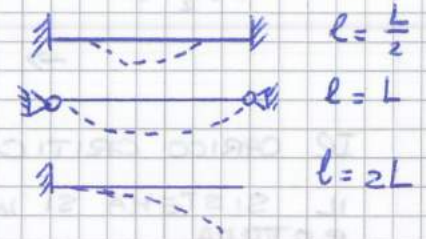
$$\delta^4 \pi|_{\alpha=0} =$$

verificata

# CARICO CRITICO EULERIANO

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \bar{E} I}{l^2}$$

$l$  = LUNGHEZZA LIBERA DI INFLESSIONE



Δ PIÙ È IMPORTANTE IL VINCOLO, PIÙ È CALA

→ IL CARICO CRITICO AUMENTA (LA TRAVE CEDERÀ, FORSE, PER UN CARICO + ALTO)

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \bar{E} I}{A l^2}$$

$\frac{I}{A} = \rho^2$  RAGGIO D'INERZIA

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \bar{E} \rho^2}{l^2}$$

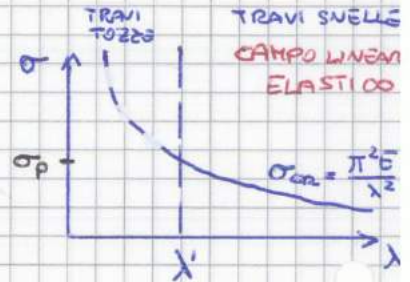
$\frac{l}{\rho} = \lambda$  SNELLEZZA DELLA TRAVE

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \bar{E}}{\lambda^2}$$

$\lambda > \lambda'_{corrett}$  → OK EULERO

$\lambda < \lambda'_{corrett}$  → NO EULERO

↳  $\sigma_{cr}?$



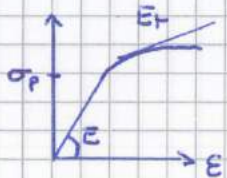
SNELLEZZA LIMITE  $\lambda'$

$$\sigma_{cr} = \sigma_p = \frac{\pi^2 \bar{E}}{\lambda'^2}$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{\pi \bar{E}}{\sigma_p}}$$

TRAVI TOZZE → NO EULERO, 2 vie possibili

## 1) MODULO TANGENTE

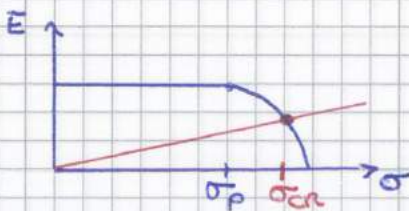


$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \bar{E}_t}{\lambda^2}, \text{ ma } \bar{E}_t = f(\sigma)!$$

• O SI CALCOLA PER ITERAZIONI

• O SI FA UN'INTERPOLAZIONE GRAFICA

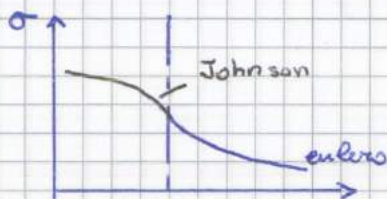
(GRAFICO NOTO)



$$\bar{E}_t = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \sigma$$

DATA LA TRAVE  $\frac{\lambda^2}{\pi^2} \rightarrow$  coeff. angolare  
retta è NOTO

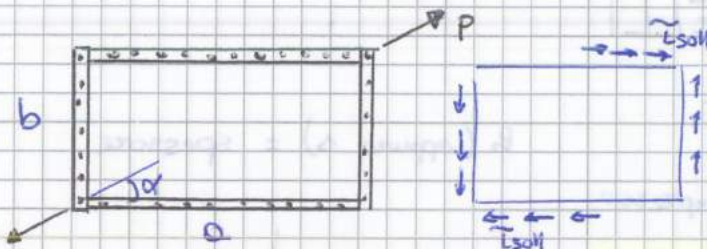
## 2) PARABOLA DI JOHNSON



Equazione semi-empirica

$$\sigma_{cr} = \sigma_Y - \frac{\sigma_Y^2 \lambda^2}{4 \pi^2 \bar{E}}$$

# PANNELLI A TAGLIO

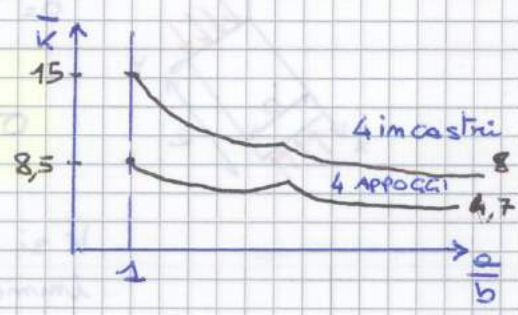


$$P_x = P \cos \alpha \quad P_y = P \sin \alpha$$

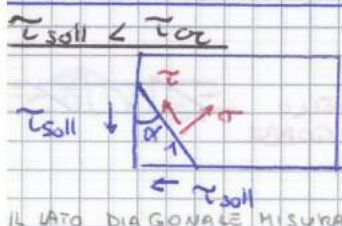
$$\tau_{soll} = \frac{P \cos \alpha}{a \cdot b} = \frac{P \sin \alpha}{b \cdot a}$$

$$\tau_{cre} = \bar{K} \cdot E \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

NOTA: GLI ELEMENTI DI RIQUADRO DEVONO AVERE UNA RIGIDITÀ A TAGLIO, TORSIONE E FLESSIONE MOLTO MAGGIORE DELLA DEFORMABILITÀ DEL PANNELLO



## STATO TENSIONALE



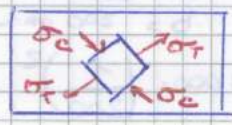
IL LATO DIAGONALE MISURA 1

equilibri

$$\begin{aligned} \uparrow) \quad & \sigma \sin \alpha \cdot 1 \cdot 1 + \tau \cos \alpha \cdot 1 \cdot 1 - \tau_{soll} \cos \alpha \cdot 1 = 0 \\ \rightarrow) \quad & \sigma \cos \alpha \cdot 1 \cdot 1 - \tau \sin \alpha \cdot 1 \cdot 1 - \tau_{soll} \sin \alpha \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma = 2 \tau_{soll} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau = \tau_{soll} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ \sigma = \tau_{soll} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \sigma_c &= \tau_{soll} \\ \sigma_t &= \tau_{soll} \end{aligned}$$

→ Stato tensionale **TANGENZIALE PURO**: pannello rimane piano

AUMENTIAMO ORA  $\tau_{soll}$

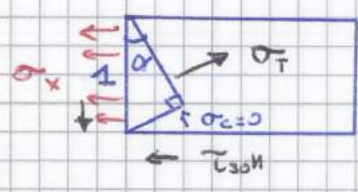
$\tau_{soll} = \tau_{cre} \rightarrow$  PANNELLO SI INGOBBA  
 $\hookrightarrow \sigma_c$  DIVENTA CRITICA!

$\tau_{soll} \gg \tau_{cre}$

$\sigma_c$  resta ferma al valore CRITICO → LA PARTE INGOBBATA NON SI SPONTEA + CARICO  
 $\sigma_t$  CONTINUA A SALIRE

$\sigma_c \ll \sigma_t \rightarrow \sigma_c \approx 0$

## CAMPO POSTCRITICO



$$\begin{aligned} \uparrow) \quad & \sigma_t \cos \alpha \cdot 1 \cdot \sin \alpha - \tau_{soll} \cdot 1 \cdot 1 = 0 \quad (a) \\ \rightarrow) \quad & \sigma_t \cos \alpha \cdot 1 \cdot \cos \alpha - \sigma_x \cdot 1 \cdot 1 = 0 \quad (b) \end{aligned}$$

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{\tau_{soll} \cdot 1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \tau_{soll}}{\sin 2\alpha} \\ (b) \quad & \sigma_x = \sigma_t \cos^2 \alpha \end{aligned} \right.$$

per  $\alpha = 45^\circ$

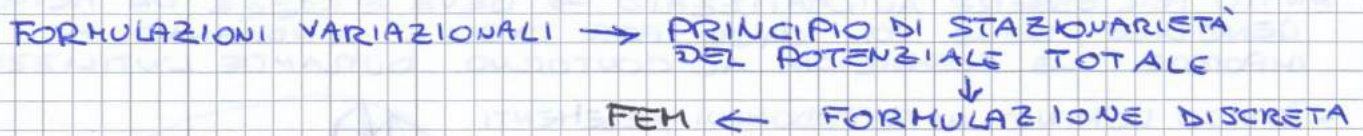
$$\begin{cases} \sigma_t = 2 \tau_{soll} \\ \sigma_x = \tau_{soll} \end{cases} \quad \text{omologamente} \quad \begin{cases} \sigma_t = 2 \tau_{soll} \\ \sigma_y = \tau_{soll} \end{cases}$$

Stato tensionale **DIAGONALE COMPLETO**: NASCONO DELLE  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  SUL CONTORNO X EQUILIBRARE IL PANNELLO → servono dei rinforzi

## STRUTTURE AERONAUTICHE

### METODI PER SOLUZIONI APPROSSIMATE

→ TEORIA CHE STA DIETRO AL FEM



### PRINCIPIO DI STAZIONARIETÀ DEL POTENZIALE TOTALE

" DI TUTTI I POSSIBILI CAMPI DI SPOSTAMENTO COMPATIBILI CON I VINCOLI GEOMETRICI, QUELLO EFFETTIVAMENTE PRESENTE IN UNA STRUTTURA IN EQUILIBRIO SOTTO UN SISTEMA DI CARICHI ESTERNI CONSERVATIVI E ASSEGNATE CONDIZIONI DI VINCOLO, È QUELLO CHE RENDE STAZIONARIA L'ENERGIA POT. TOTALE DEL SISTEMA "

- CONGRUENZA: congruenza spostamenti = no strappi / compenetrazioni
- COMPATIBILITÀ CON I VINCOLI

→ TRA TUTTE LE CONFIGURAZIONI CONGRUENTI, QUELLA EQUILIBRATA È QUELLA CHE RENDE STAZIONARIA L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE DEL SISTEMA

... FOR EQUILIBRIO STABILE È EN. POTENZ. MINIMA

### PROCEDIMENTO:

- 1) SCRIVIAMO CAMPO DI SPOSTAMENTI COME COMBINAZIONE LINEARE DI  $n$  FUNZIONI DI BASE SCELTE A PRIORI  
 INCOGNITE:  $n$  costanti di combinazione lineare

$$u(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$$

- 2) CALCOLIAMO DEFORMAZIONI E TENSIONI. CALCOLIAMO ENERGIA POTENZIALE TOTALE  $U_p = \int_V \sigma \cdot \epsilon \, dv$  E SARÀ FUNZIONE DELLE  $n$   $c_i$ .

- 3) SI RICAVANO CONDIZIONI DI STAZIONARIETÀ DEL POTENZIALE TOTALE RISPETTO ALLE  $n$  INCOGNITE  
 → SISTEMA DI  $n$  EQUAZIONI ALGEBRICHE

- 4) RISOLUZIONE DEL SISTEMA E SI SOSTITUISCONO LE  $c_i$  TROVATE NEL CAMPO DI SPOSTAMENTI

• DERIVAZIONE = PERDITA DI ACCURATEZZA

• LE FUNZIONI DI BASE DEVONO:

- ESSERE l.i
  - SODDISFARE CONDIZIONI AL CONTORNO GEOMETRICHE e meccaniche
- } FUNZIONI AMMISSIBILI

→ SISTEMA COMPLETO IN ENERGIA (convergenza in energia):

NON SI È CERTI CHE LOCALMENTE CI SIA CONVERGENZA DELLA SOLUZ. APPROX ALLA TENSIONE/DEF. ESATA PERÒ SI È CERTI CHE GLOBALMENTE L'ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA CONVERGE A QUELLA DATA DALLA SOLUZIONE ESATA

detta in chiave FEM: se dimensione elementi → 0 allora la soluz. approx CONVERGE IN ENERGIA alla soluzione esatta

[...] TRASCURIAMO LA PARTE CON FUNZIONI DI BASE: potenze di  $x$

$[K^{(e)}]$  è simmetrica poiché  $[C^{(e)}]$  è simmetrica

$$[K] = \int [B]^T [C] [B] dV = (N_{GDL} \times 6) (6 \times 6) (6 \times GDL) = GDL \times GDL$$

### LAVORO DEI CARICHI ESTERNI

$$W_{ex}^{(e)} = \sum_{i=1}^{N_{cc}} \{d^{(e)}(x_i)\}^T \{P_{ci}\} + \int_{L^{(e)}} \{d^{(e)}\}^T \{P_e^{(e)}\} d\ell + \int_{S^{(e)}} \{d^{(e)}\}^T \{P_s^{(e)}\} dS + \int_{V^{(e)}} \{d^{(e)}\}^T \{P_b^{(e)}\} dV = -V_p^{(e)}$$

CARICHI CONCENTRATI
CARICHI DI LINEA
CARICHI DI SUPERFICIE

LAVORO DI CARICHI EST CONSERVATIVI = - VARIAZIONE POTENZIALE DELLE FORZE ESTERNE

$$W_{ex}^{(e)} = \{q^{(e)}\}^T \sum_{i=1}^{N_{cc}} [N^{(e)}(x_i)]^T \{P_{ci}\} + \{q^{(e)}\}^T \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{P_e^{(e)}\} d\ell + \{q^{(e)}\}^T \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{P_s^{(e)}\} dS + \{q^{(e)}\}^T \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{P_b^{(e)}\} dV$$

$$W_{ex}^{(e)} = \{q^{(e)}\}^T \{F^{(e)}\} = -V_p^{(e)}$$

→ SI TROVA AUTOMATICAMENTE IL VETTORE DEI CARICHI NODALI

⚡ VETTORE DEI CARICHI NODALI

$$\{F^{(e)}\} = \sum_{i=1}^{N_{cc}} [N^{(e)}(x_i)]^T \{P_{ci}\} + \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{P_e^{(e)}\} d\ell + \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{P_s^{(e)}\} dS + \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{P_b^{(e)}\} dV$$

$\{F^{(e)}\}$  È IL SISTEMA DEI CARICHI NODALI CHE MOLTIPLICATO PER I GDL NODALI PRODUCE LO STESSO LAVORO CHE IL SISTEMA DI CARICHI EFFETTIVI PRODUCE SUGLI SPOSTAMENTI EFFETTIVI

→ EQUIVALENZA ENERGETICA

### STAZIONARIETÀ DEL POTENZIALE

$$\pi_p^{(e)} = U_p^{(e)} + V_p^{(e)} = U_p^{(e)} - W_{ex}^{(e)}$$

$$\frac{\partial \pi_p^{(e)}}{\partial q_i} = 0$$

$$\pi_p^{(e)} = \frac{1}{2} \{q^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{q^{(e)}\} - \{q^{(e)}\}^T \{F^{(e)}\}$$

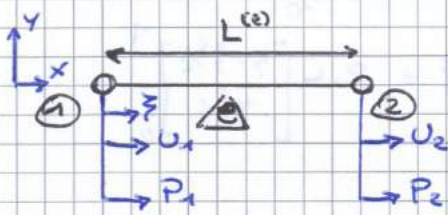
$$\frac{\partial \pi_p^{(e)}}{\partial \{q^{(e)}\}} = [K^{(e)}] \{q^{(e)}\} - \{F^{(e)}\} = \{0\}$$

MEMO:  
DERIVATA DI UNA FORMA QUADRATICA  
• TOGLI 1/2  
• TOGLI [...]

$$[K^{(e)}] \{q^{(e)}\} = \{F^{(e)}\}$$

QUESTO È IL NOCCILO DEL FEM

# ELEMENTO ROD (ASTA)



$$u(x) = \sum_{n=1}^N U_n \varphi_n(x)$$

$$\xi = \frac{x}{L}$$

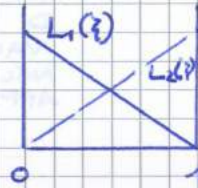
• FUNZIONI DI FORMA: POLINOMI DI LAGRANGE lineari  
→ N=2

$$L_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k}^N (x - x_i)}{\prod_{i \neq k}^N (x_k - x_i)}$$

$$u = U_1 L_1(\xi) + U_2 L_2(\xi)$$

$$L_1(0) = 1 \quad L_2(0) = 0$$

$$L_1(1) = 0 \quad L_2(1) = 1$$



$$\sum L_i(\xi) = 1$$

in ogni punto

$$L_1(\xi) = 1 - \xi$$

$$L_2(\xi) = \xi$$

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}$$

cioè

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\{q^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad [N^{(e)}] = [L_1 \quad L_2]$$

$$\{d^{(e)}\} \rightarrow \{u^{(e)}\} = [N^{(e)}] \cdot \{q^{(e)}\}$$

$1 \times 1 \quad \quad 1 \times 2 \quad \quad 2 \times 1$

$$[K^{(e)}] = \int [B^{(e)}]^T [C^{(e)}] [B^{(e)}] dV = EA \int_0^L [B^{(e)}]^T [C^{(e)}] [B^{(e)}] dx$$

$\uparrow$   
 ASTA, C'È SOLO E

$dx = d\xi \cdot L$

$$[B^{(e)}] = [D][N^{(e)}]$$

$$= [L_{1,x} \quad L_{2,x}]$$

$$= \frac{1}{L} [L_{1,\xi} \quad L_{2,\xi}]$$

$$1D \rightarrow [D] = [(\cdot), x]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$\frac{x}{L} = \xi \rightarrow x = \xi \cdot L$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = L$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1}$$

VOGLIAMO SCRIVERE  $(\cdot), x$  IN FUNZIONE DI  $(\cdot), \xi$ !

$$\rightarrow [K^{(e)}] = EA \int_0^1 \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L_{1,\xi} \\ L_{2,\xi} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{L} [L_{1,\xi} \quad L_{2,\xi}] d\xi \cdot L$$

$$= \frac{EA}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi),_{\xi} \\ \xi,_{\xi} \end{bmatrix} \cdot [(1-\xi),_{\xi} \quad \xi,_{\xi}] d\xi = \frac{EA}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 1] d\xi$$

$$= \frac{EA}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -\xi - \xi & -\xi + \xi \\ -\xi + \xi & \xi + \xi \end{bmatrix}_0^1$$

$$\Rightarrow [K^{(e)}] = \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA

**POLINOMI QUADRATICI → 3 NODI SU STESSO ELEMENTO DI LAGRANGE**

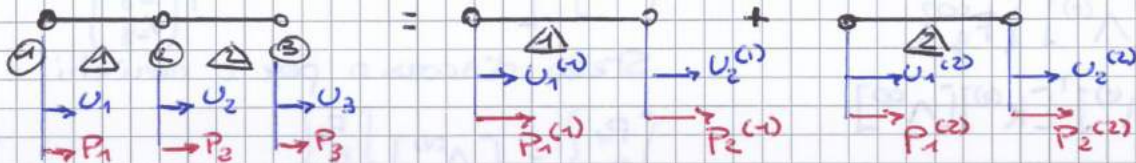
→ soluzione esatta poiché lo spostamento reale è quadratico!



Dal punto di vista del calcolo è una rottura → è meglio avere polinomi lineari e aumentare il numero di elementi

**DUE ELEMENTI LINEARI**

SISTEMA IN EQUILIBRIO → anche generico elemento deve essere in equil.



$$[K^{(e)}][q^{(e)}] = \{P^{(e)}\}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^{(e)} \\ P_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

• EQUILIBRIO AI NODI

$$P_1 = P_1^{(1)} \rightarrow P_1 = K_{11}^{(1)} U_1^{(1)} + K_{12}^{(1)} U_2^{(1)}$$

$$P_2 = P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \rightarrow P_2 = K_{21}^{(1)} U_1^{(1)} + K_{22}^{(1)} U_2^{(1)} + K_{11}^{(2)} U_1^{(2)} + K_{12}^{(2)} U_2^{(2)}$$

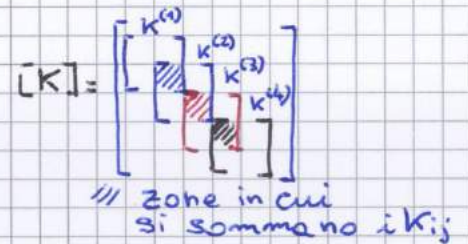
$$P_3 = P_2^{(2)} \rightarrow P_3 = K_{21}^{(2)} U_1^{(2)} + K_{22}^{(2)} U_2^{(2)}$$

• CONGRUENZA SPOSTAMENTO NODI

$$U_1 = U_1^{(1)} \quad U_2 = U_2^{(1)} = U_1^{(2)} \quad U_3 = U_2^{(2)}$$

Δ → ASSEMBLAGGIO DI [K] Δ

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$



• PROPRIETÀ ELEMENTI

$$A^{(1)} = A^{(2)} = A \quad E^{(1)} = E^{(2)} = E \quad L^{(1)} = L^{(2)} = L/2$$

$$[K^{(e)}] = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

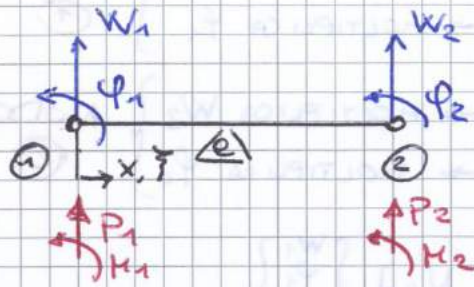
$$P_1^{(1)} = P_2^{(1)} = P_1^{(2)} = P_2^{(2)} = \frac{P_0 L}{4}$$

• Finale:

$$\frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{P_0 L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



# ELEMENTO BEAM (TRAVE)



- POLINOMI CUBICI DI HERMITE
- 2 NODI
- 2 DATI x NODO
- ⇒ 4 GDL
- ⇒ POLINOMIO GRADO 3

... perché non polinomi lineari di Lagrange? → xk NON SAREBBERO STATI ELEMENTI CONFORMI (CONTINUITÀ FUNZ. DI FORMA E DERIVATE FINO A ORDINE  $\nu-1$ )

$$U_p = \frac{1}{2} \int_L EJK^2 dx \quad K = w_{,xx} \quad \nu = 2$$

BISOGNA GARANTIRE LA CONTINUITÀ DI

- FUNZIONE → SPOSTAMENTO  $w$
- DERIVATA PRIMA → ROTAZIONE  $\varphi = w_{,x}$  nell'elemento

basterebbero polinomi quadratici di Lagrange, ma per DOQMA si usano cubici e di Hermite xk quelli di Lagrange non avrebbero ogni dato un elemento conforme

## ■ FUNZIONI DI FORMA

$$w(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

condiz. contorno:

$x=0$	$w = W_1$	$\varphi_1 = w_{,x}$
$x=L$	$w = W_2$	$\varphi_2 = w_{,x}$

$$x=0) \alpha_0 = W_1$$

$$w_{,x}(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

$$x=0) w_{,x} = \varphi_1 \rightarrow \alpha_1 = \varphi_1$$

$$\rightarrow w(x) = W_1 + \varphi_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

$$x=L) \begin{cases} w(L) = W_1 + \varphi_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3 = W_2 \\ w_{,x}(L) = \varphi_1 + 2\alpha_2 L + 3\alpha_3 L^2 = \varphi_2 \end{cases}$$

Risolviendo il sistema:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{W_2}{L^2} - \frac{W_1}{L^2} - \frac{\varphi_1}{L} - \alpha_3 L \\ \varphi_2 = \varphi_1 + 2\frac{1}{L^2}(W_2 - W_1)L - 2\frac{\varphi_1}{L}L - 2\alpha_3 L^2 + 3\alpha_3 L^2 \end{cases} \begin{cases} \alpha_2 = \dots \\ \alpha_3 = \dots \end{cases}$$

Andando a sostituire in  $w(x)$

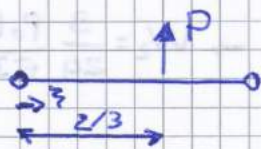
$$w(x) = \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right) W_1 + \left(x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \varphi_1 + \left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right) W_2 + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \varphi_2$$

$$= \underbrace{\left(1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3\right)}_{H_1} W_1 + \underbrace{\left(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3\right)}_{H_2} L \varphi_1 + \underbrace{\left(3\zeta^2 - 2\zeta^3\right)}_{H_3} W_2 + \underbrace{\left(-\zeta^2 + \zeta^3\right)}_{H_4} L \varphi_2$$

$$= P_0 L^{(e)} \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{\xi^2}{L} + 2\frac{\xi^3}{L^2} \\ \xi - 2\frac{\xi^2}{L} + \frac{\xi^3}{L^2} \\ 3\frac{\xi^2}{L} - 2\frac{\xi^3}{L^2} \\ -\frac{\xi^2}{L} + \frac{\xi^3}{L^2} \end{bmatrix} d\xi = P_0 L^{(e)} \begin{Bmatrix} \left( \frac{\xi^2}{L} - 2\frac{\xi^3}{L^2} + \frac{\xi^4}{L^3} \right) L^{(e)} \\ \left( \frac{\xi^3}{L} - \frac{2\xi^4}{L^2} + \frac{\xi^5}{L^3} \right) L^{(e)} \\ \left( -\frac{\xi^2}{L} + \frac{\xi^3}{L^2} \right) L^{(e)} \end{Bmatrix} = P_0 L^{(e)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} L^{(e)} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} L^{(e)} \end{Bmatrix}$$



$$\{F^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = P_0 L^{(e)} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/12 L^{(e)} \\ 1/2 \\ -1/12 L^{(e)} \end{Bmatrix}$$

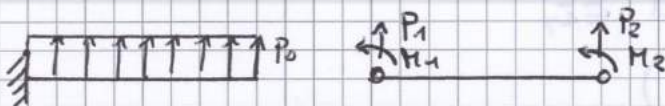


**CARICO CONCENTRATO**

$$\{F^{(e)}\} = [N^{(e)}(\xi_i)] \cdot P_i = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{\xi^2}{L} + 2\frac{\xi^3}{L^2} \\ \xi - 2\frac{\xi^2}{L} + \frac{\xi^3}{L^2} \\ 3\frac{\xi^2}{L} - 2\frac{\xi^3}{L^2} \\ (-\frac{\xi^2}{L} + \frac{\xi^3}{L^2}) L^{(e)} \end{bmatrix} \cdot P = \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} \quad \left( \xi = \frac{L}{2} \right)$$

$$= P \cdot \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{L/4}{L} + 2\frac{L^3/8}{L^2} \\ L^{(e)} \left( \frac{L/2}{L} - 2\frac{L^2/4}{L^2} + \frac{L^3/8}{L^3} \right) \\ 3\frac{L/4}{L} - 2\frac{L^3/8}{L^2} \\ L^{(e)} \left( -\frac{L/4}{L} + \frac{L^3/8}{L^2} \right) \end{bmatrix}$$

**RISOLUZIONE**



$$[K^{(e)}] \cdot \{q^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \{R_V\}$$

CONDIZ. CONTORNO: in  $x=0 \rightarrow w_1=0 \quad \varphi_1=0$

$$\left( \frac{EJ_y}{L^3} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} -12 & 6L^{(e)} & -12 & 6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & 4L^{(e)2} & -6L^{(e)} & 2L^{(e)2} \\ -12 & -6L^{(e)} & 12 & -6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & 2L^{(e)2} & -6L^{(e)} & 4L^{(e)2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} L^{(e)} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} L^{(e)} \end{Bmatrix} P_0 L^{(e)} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

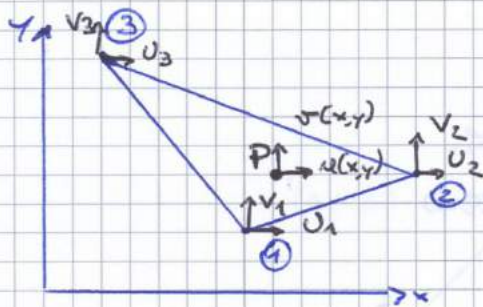
$$\Delta \begin{bmatrix} K_{w} & K_{\varphi} \\ V_{FV} & K_{FF} \end{bmatrix}$$

$$\left( \frac{EJ_y}{L^3} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = P_0 L \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} L \end{Bmatrix}$$

Andando a risolvere:

# ELEMENTI 2D

## CST - Constant Strain Triangle



● ELEMENTO MEMBRANALE

$$\{d^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\{d^{(e)}\} = [N^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

$$q^{(e)} = \begin{Bmatrix} \{q_1^{(e)}\} \\ \{q_2^{(e)}\} \\ \{q_3^{(e)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{v_1\} \\ \{u_2\} \\ \{v_2\} \\ \{u_3\} \\ \{v_3\} \end{Bmatrix}$$

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

$$v = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y$$

$x^2$   $xy$   $y^2$  3 NODI → 1 x y per avere ISOTROPIA

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$[C] \{\alpha\} = \{U\}$$

Formalmente  $\{\alpha\} = [C]^{-1} \{U\}$   
 $\{\beta\} = [C]^{-1} \{V\}$

$$u(x,y) = [x][C]^{-1} \{U\}$$

u = spostamento punto generico

[x] = coordinate generico punto [1 x, y]

$$[x][C]^{-1} = [N_1^u \ N_2^u \ N_3^u] \leftarrow u = [x][C]^{-1} \{U\}$$

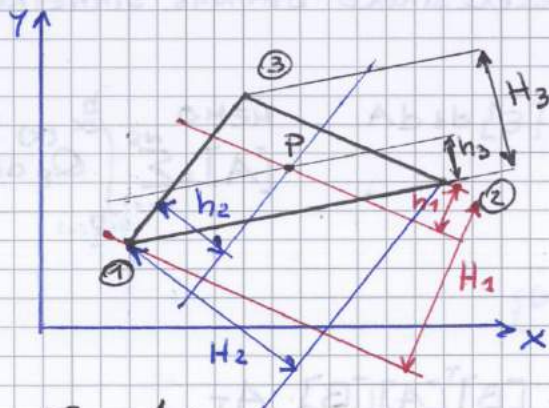
1x3    3x3    3x1

$$[x][C]^{-1} = [N_1^v \ N_2^v \ N_3^v] \leftarrow v = [x][C]^{-1} \{V\}$$

→ LE FUNZIONI DI FORMA PER LA COMPONENTE U SONO LE STESSA DELLA COMPONENTE V

$$[N^{(e)}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

## COORDINATE DI AREA



Def. SISTEMA DI COORDINATE: INSIEME DI PARAMETRI e.i. CHE CONSENTONO DI LOCALIZZARE IN MODO UNIVOCO UN PUNTO NELLO SPAZIO

Coordinate di area  
 → SERVONO PER INDIVIDUARE IL PUNTO P NOTE LE COORD. DEI VERTICI

$$\zeta_1 = \frac{h_1}{H_1} = \frac{A_1}{A_{TOT}} \quad \zeta_2 = \frac{h_2}{H_2} = \frac{A_2}{A_{TOT}}$$

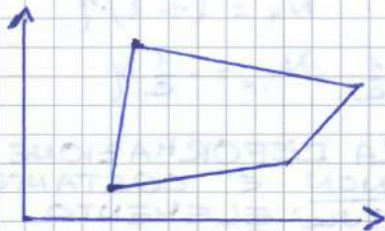
$$\zeta_3 = \frac{h_3}{H_3} = \frac{A_3}{A_{TOT}}$$

$$\zeta_i = \frac{A_i}{A_{TOT}}$$

$$\sum_{i=1}^3 \zeta_i = 1$$

# QUAD4-M : FOUR NODE MEMBRANE

## ELEMENTO MEMBRANALE



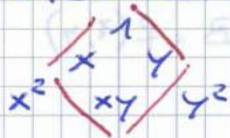
$$\{d^{(e)}\} = [N^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

$2 \times 1 \quad 2 \times 8 \quad 8 \times 1$

$$u = N_1 U_1 + N_2 U_2 + N_3 U_3 + N_4 U_4$$

$$v = N_1 V_1 + N_2 V_2 + N_3 V_3 + N_4 V_4$$

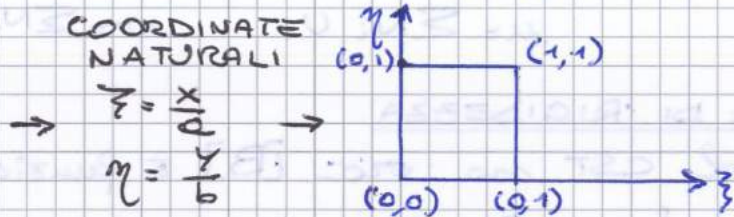
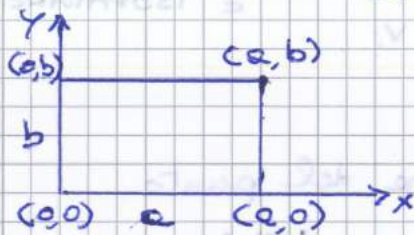
• ISOTROPIA → L'ELEMENTO NON DEVE AVERE DIREZIONI PREFERENZIALI



$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$$

$$v = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy$$

RIFERENDOCI ALL'ELEMENTO RETTANGOLARE



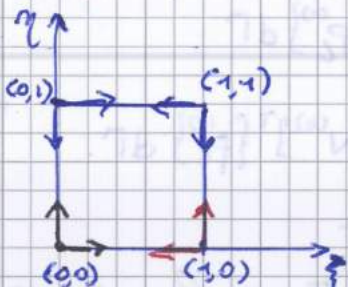
OGNI ELEMENTO DIVENTA UN QUADRATO DI LATO 1 NEL PIANO NATURALE

## FUNZIONI DI FORMA

POLINOMI LINEARI LAGRANGE

Le  $N_i$  devono essere  $\delta_{ij}$

(cioè  $N_i = 1$  nel nodo  $i$  e  $0$  in  $j \neq i$ )



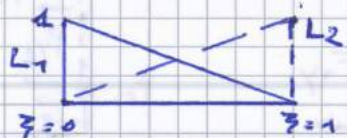
$L_1(\xi)$ : da  $\xi=0$  a  $\xi=1$

$L_2(\xi)$ : da  $\xi=1$  a  $\xi=0$

MEMO : ROD

$$L_1(\xi) = 1 - \xi \rightarrow da \ 0 \ a \ 1$$

$$L_2(\xi) = \xi \rightarrow da \ 1 \ a \ 0$$



$$N_1(\xi, \eta) = L_1(\xi) L_1(\eta) = (1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = L_2(\xi) L_1(\eta) = \xi(1 - \eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = L_2(\xi) L_2(\eta) = \xi \cdot \eta$$

$$N_4(\xi, \eta) = L_1(\xi) L_2(\eta) = (1 - \xi) \cdot \eta$$

## DEFORMAZIONI

$$\{E^{(e)}\} = [B] \{q^{(e)}\}$$

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y + v_x \end{Bmatrix}$$

NOI ABBIAMO DI FORMA IN COORD NATURALI MA LE DERIVATE LE VOGLIAMO IN COORD. FISICHE!

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\xi = \frac{x}{a} \rightarrow x = \xi \cdot a$$

$$\eta = \frac{y}{b} \rightarrow y = \eta \cdot b$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = a \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = b$$

# QUAD4 - RECTANGULAR KIRCHHOFF PLATE ELEMENT



• ELEMENTO FLESSIONALE  
(solo flessione)

• PIASTRA MULTISTRATO SIMMET. LAMINATA

$$\{d^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} u = \cancel{u^{(e)}} - z w_{,x} \\ v = \cancel{v^{(e)}} - z w_{,y} \\ w = w^{(e)} \end{cases}$$

• CARICO TRASVERSALE

$$\begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,xy} \end{Bmatrix}$$

## FUNZIONI DI FORMA

Il grado minimo è dato dal fatto che si vuole continuità della derivata di ordine  $z-1$  che compare nell'eq. energia

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} \int \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \frac{1}{2} \int \{\epsilon\}^T [Q_p] \{\epsilon\} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int +z \{k\}^T [Q_p] z \{k\} dV = \frac{1}{2} \int_A \{k\}^T \left( \int_h z^2 [Q_p] dz \right) \{k\} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \{k\}^T [D] \{k\} dA \end{aligned}$$

MAX ORDINE DI DERIVAZIONE: 2  $\{k\} \rightarrow w_{,xx}, w_{,yy}, w_{,xy}$

→ ELEM. COMPATIBILI = CONTINUITÀ DERIVATA 2°

⚠ CONTINUITÀ DERIVATA PRIMA RISPETTO A X E RISPETTO A Y !!!

→ 3 GdL per nodo:  $w_i, \underbrace{w_{,x}}_{\psi_x}, \underbrace{w_{,y}}_{\psi_y}$  : 4 nodi x 3 gdl/nodo = 12 gdl

■ ELEM. COMPATIBILE MA A CONVERGENZA LENTA

→ Accelerazione convergenza = + 1 gdl/nodo

$w, w_{,x}, w_{,y}, w_{,xy} \rightarrow 16 \text{ gdl}$

$$\{q^{(e)}\} = \{ \{q_1\} \{q_2\} \{q_3\} \{q_4\} \}^T$$

$$\{q_i^{(e)}\} = \{ w_i \ \psi_{xi} \ \psi_{yi} \ \psi_{xyi} \}^T$$

$$w^{(e)} = [N^{(e)}] \cdot \{q^{(e)}\}$$

1x1            1x16        16x1

$$K^{(e)} = [B^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

Matrice rigidità

$$U_p = \frac{1}{2} \int \{q^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T [D] [B^{(e)}] \{q^{(e)}\} dA = \frac{1}{2} \{q^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

$$[K^{(e)}] = \int [B^{(e)}]^T [D] [B^{(e)}] dx dy$$



## Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio



### Contenuto dell'esercitazione

L'esercitazione consiste nell'analisi statica di una semiala controventata con il modello della trave a semiguscio e si divide in due fasi:

1. determinazione dell'andamento della caratteristiche di sollecitazione;
2. analisi dello stato di tensione di una campata rappresentativa.

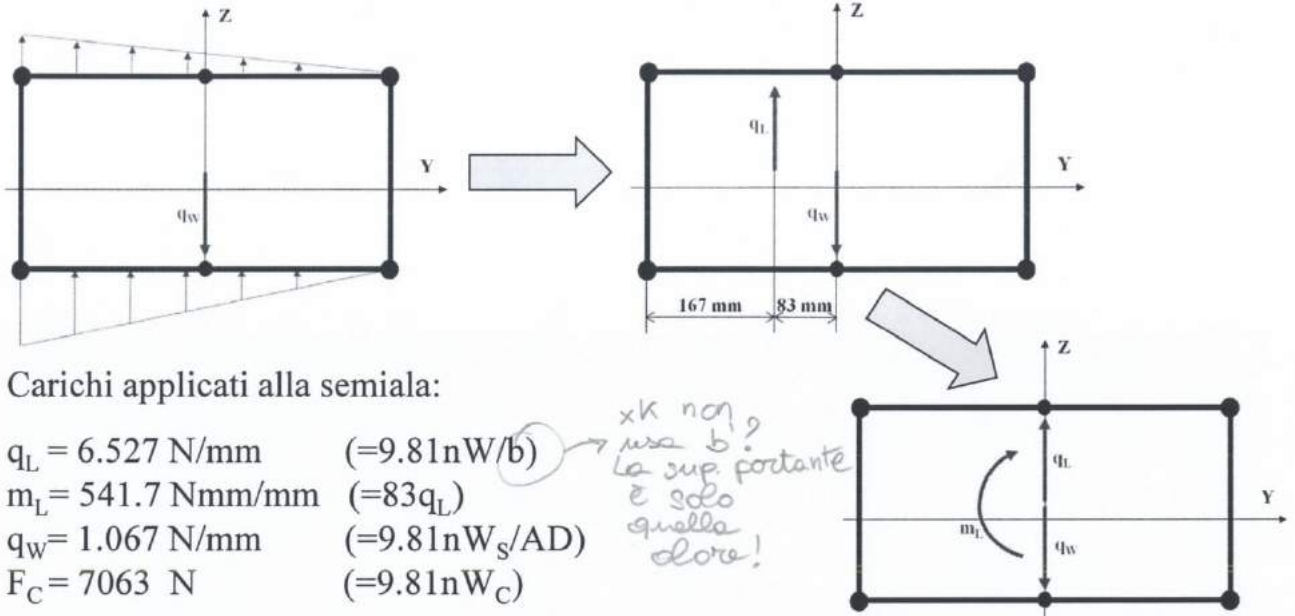
### Scopo dell'esercitazione

Lo scopo dell'esercitazione è quello di applicare le formule principali del modello della trave a semiguscio.



### Svolgimento

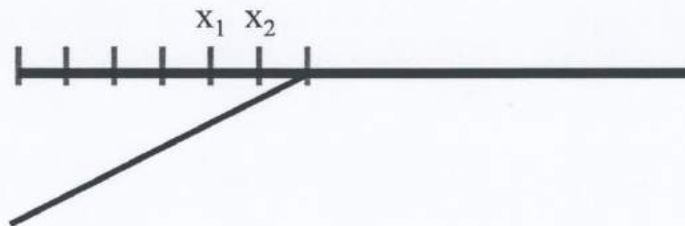
La portanza agisce lungo l'asse dei terzi anteriori del cassone (risultante di distribuzione triangolare), il peso della semiala (distribuito) e del combustibile (concentrato) agiscono lungo l'asse baricentrico della sezione



### Svolgimento

(2) Determinare l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione sulla semiala.

Si consideri ora la campata della semiala tra le due centine ad  $x=x_1=1977 \text{ mm}$  ed  $x=x_2=2472$



(3) Determinare:

- le tensioni normali nei correnti per  $x=x_1$  e  $x=x_2$ ;
- i flussi di taglio nella campata;
- il gradiente di torsione nella campata.

$$A_4 = 350 + 125 \cdot 1 + 110 \cdot 1 = 585 \text{ mm}^2 = A_6$$

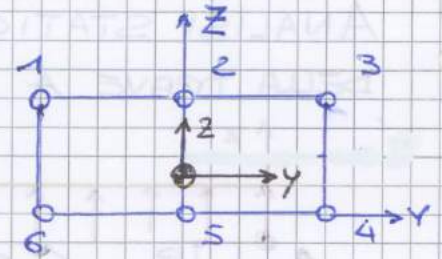
$$A_5 = 100 + 125 \cdot 2 \cdot 1 = 350 \text{ mm}^2$$

$$A_{TOT} = 2410 \text{ mm}^2$$

• Calcolo del baricentro

$$Z_G = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(380 \cdot 220) \cdot 2 + 130 \cdot 220}{2410} \text{ mm}^3$$

$$= 81,25 \text{ mm}$$



$Y_G = 0$  poiché la sezione è simmetrica rispetto all'asse  $Z$ .

$$J_{yy} = \sum A_i z_i^2 = 2 \cdot 380 (220 - 81,25)^2 + 130 (220 - 81,25)^2$$

$$+ 2 \cdot 585 \cdot (-81,25)^2 + 350 (-81,25)^2$$

$$= 27\ 168\ 265 \text{ mm}^4$$

$$J_{zz} = \sum A_i y_i^2 = (585 + 380)(-250)^2 + (585 + 380)(+250)^2$$

$$= 120\ 625\ 000 \text{ mm}^4$$

$$J_T = \frac{4 \Omega^2 \Delta}{\text{perim}} = \frac{4 \cdot (500 \cdot 220)^2 \cdot 1}{(500 + 220) \cdot 2} = 33\ 611\ 111 \text{ mm}^4$$

## CARICHI

• Portanza uniforme su apertura olore e triangolare lungo la corda.

$$W = 2800 \text{ kg}$$

PESO MAX TAKE OFF

$$W_c = 200 \text{ kg}$$

PESO COMBUSTIBILE

IN SEPIALA  
(CONCENTRATO IN C)

$$W_s = 210 \text{ kg}$$

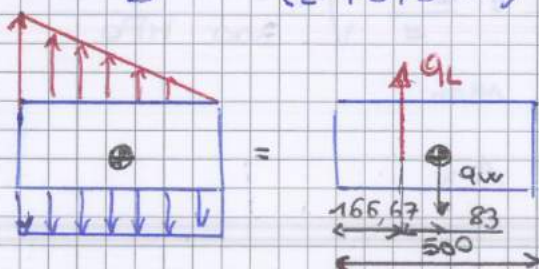
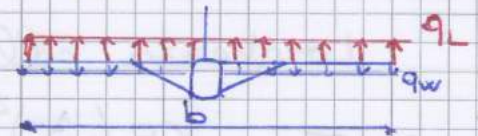
PESO SEPIALA

$$n = 3,6$$

$$L = n_z \cdot W \cdot g = 3,6 \cdot 2800 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 98\ 885 \text{ N}$$

► Carico distribuito di portanza

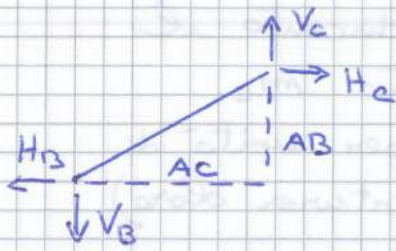
$$q_L = \frac{L}{b} = \frac{98\ 885 \text{ N}}{(2 \cdot 7575 \text{ mm})} = 6,527 \text{ N/mm}$$



La risultante del carico triangolare di portanza agisce a  $\frac{1}{3}$  corda; il carico del peso nel baricentro



## CONTROVENTATURA



$$V_C = 43\,150 \text{ N}$$

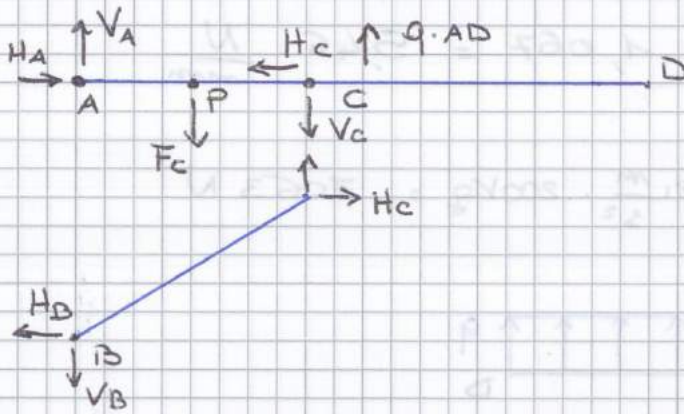
$$\uparrow) V_C = V_B = 43\,150 \text{ N}$$

$$\rightarrow) H_B = H_C$$

$$\circlearrowleft) V_C \cdot AC - H_C \cdot AB = 0$$

$$H_C = \frac{V_C \cdot AC}{AB} = \frac{43\,150 \text{ N} \cdot 2366 \text{ mm}}{1577 \text{ mm}} = 81\,156 \text{ N}$$

$$H_A = H_C = 81\,156 \text{ N}$$



$$V_A = 12\,266 \text{ N}$$

$$H_A = 81\,156 \text{ N}$$

$$H_C = 81\,156 \text{ N}$$

$$V_C = 43\,150 \text{ N}$$

$$H_B = 81\,156 \text{ N}$$

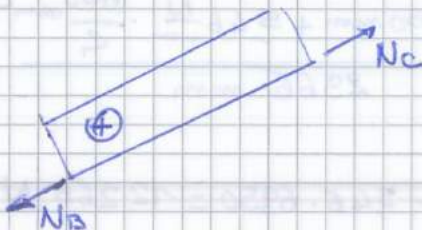
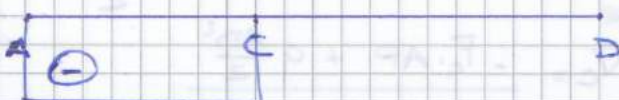
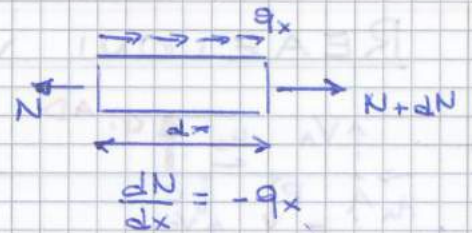
$$V_B = 43\,150 \text{ N}$$

## CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

### SFORZO NORMALE

$$N = \text{cost} \quad \text{in } x=0: N = -H_A$$

$$N = -81\,156 \text{ N}$$



$$N_C = N_B = \sqrt{V_C^2 + H_C^2} = 110\,420 \text{ N}$$

## MOMENTO FLETTENTE

Basandoci sullo schema già usato per calcolare il taglio:

$$\frac{dM}{dx} = T \rightarrow M = \int T dx + D$$

$$(1) M = \int q AD - qx dx + D_1 = q ADx - q \frac{x^2}{2} + D_1$$

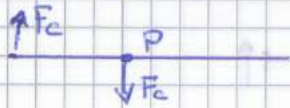
$$M(x=AD) = 0 \rightarrow 0 = q \cdot AD^2 - q \frac{AD^2}{2} + D_1 \rightarrow D_1 = -q \frac{AD^2}{2}$$

$$M(x) = q \left( -\frac{x^2}{2} + AD \cdot x - \frac{AD^2}{2} \right), \quad 0 \leq x \leq AD$$

$$(2) M = \int -F_c dx + D_2 = -F_c x + D_2$$

$$M(x=AP) = 0 \rightarrow 0 = -F_c \cdot AP + D_2 \rightarrow D_2 = F_c \cdot AP$$

$$M(x) = \begin{cases} -F_c (x - AP) & , 0 \leq x \leq AP \\ 0 & , AP \leq x \leq AD \end{cases}$$



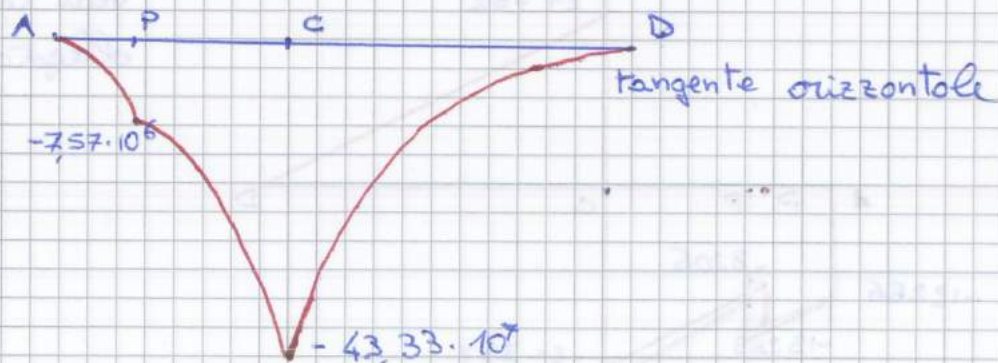
$$(3) M = \int -V_c dx + D_3 = -V_c \cdot x + D_3$$

$$M(x=AC) = 0 \rightarrow 0 = -V_c AC + D_3 \rightarrow D_3 = V_c \cdot AC$$

$$M(x) = \begin{cases} -V_c (x - AC) & , 0 \leq x \leq AC \\ 0 & , AC \leq x \leq AD \end{cases}$$

Sovrapposizione:

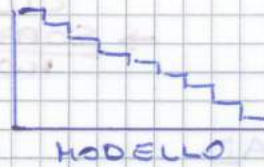
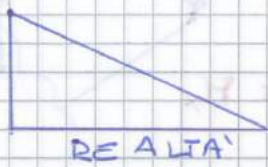
$$M(x) = \begin{cases} q \left( -\frac{x^2}{2} + AD \cdot x - \frac{AD^2}{2} \right) - F_c (x - AP) - V_c (x - AC), & 0 \leq x \leq AP \\ q \left( -\frac{x^2}{2} + AD \cdot x - \frac{AD^2}{2} \right) - V_c (x - AC), & AP \leq x \leq AC \\ q \left( -\frac{x^2}{2} + AD \cdot x - \frac{AD^2}{2} \right), & AC \leq x \leq AD \end{cases}$$



### ▶ FLUSSI DI TAGLIO NELLA CAMPATA

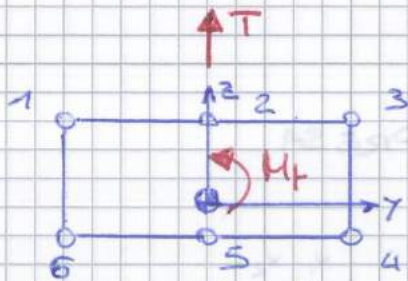
Per calcolare i flussi di taglio assorbiti dai pannelli della campata bisogna calcolare  $T$  medio e  $M_t$  medio sulla campata

⇒ ASSUMERE  $T$  e  $M_t$  COSTANTE TRA DUE CENTINE



$$T_{\text{medio}} = \frac{T(x_1) + T(x_2)}{2} = -17348 \text{ N}$$

$$M_{t \text{ medio}} = \frac{M_t(x_1) + M_t(x_2)}{2} = -2,56 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$$



$$N_i = \sigma_{xx_i} \cdot A_i =$$

$$+ \frac{M_y \cdot z_i \cdot A_i}{I_{yy}}$$

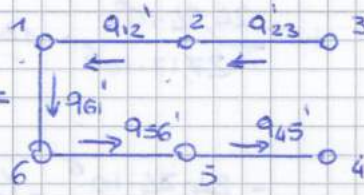
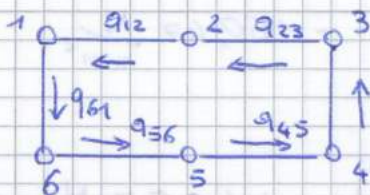
$$z_i = (z_i - z_g)$$

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{T_x}{I_{yy}} \cdot z_i \cdot A_i$$

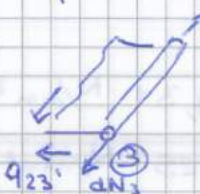
	$z_i - z_g$	A	$dN_i/dx$
1	138,75	380	-33,67
2	138,75	130	-11,52
3	138,75	380	-33,67
4	-81,25	585	30,35
5	-81,25	350	18,16
6	-81,25	585	30,35

PER IPOTESI IL MOMENTO TORCENTE NON GENERA INCREMENTI DI SFORZO NORMALE

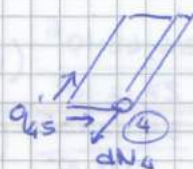
### • Procedura di calcolo "APERTO e CHIUSO"



Equilibri ai correnti:

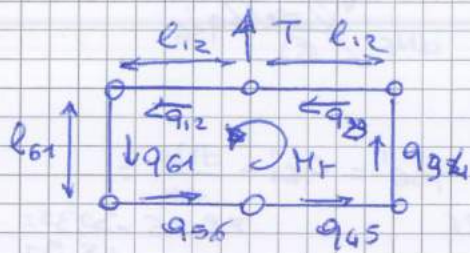


$$q_{23}' = -\frac{dN_3}{dx} = 33,67$$



$$q_{45}' = \frac{dN_4}{dx} = 30,35$$

## Risultati flussi di taglio



$$T = -17348 \text{ N}$$

$$M_t = -2,56 \cdot 10^6 \text{ N mm}$$

$$q_{12} = -5,87$$

$$q_{23} = -17,39$$

$$q_{34} = -51,06 \quad \text{N/mm}$$

$$q_{45} = -20,72$$

$$q_{56} = -2,56$$

$$q_{61} = 27,79$$

## ► GRADIENTE DI TORSIONE NELLA CAMPATA

Con le ipotesi fatte i flussi di taglio sono costanti sulla campata, quindi costante sarà anche il  $\dot{\theta}$ .

Seconda formula di Bredt:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2G\Omega\Delta} \int q \cdot \frac{1}{\Delta} dl = \frac{1}{2G\Omega\Delta} \sum q_i \cdot l_i$$

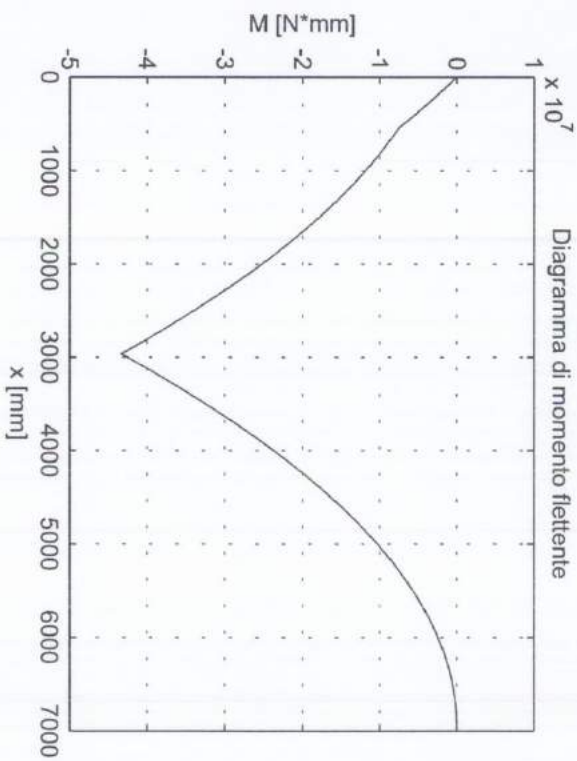
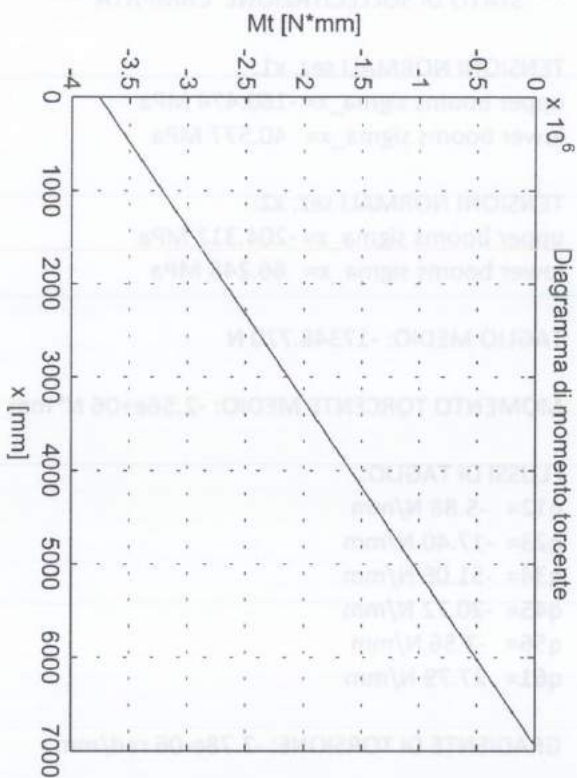
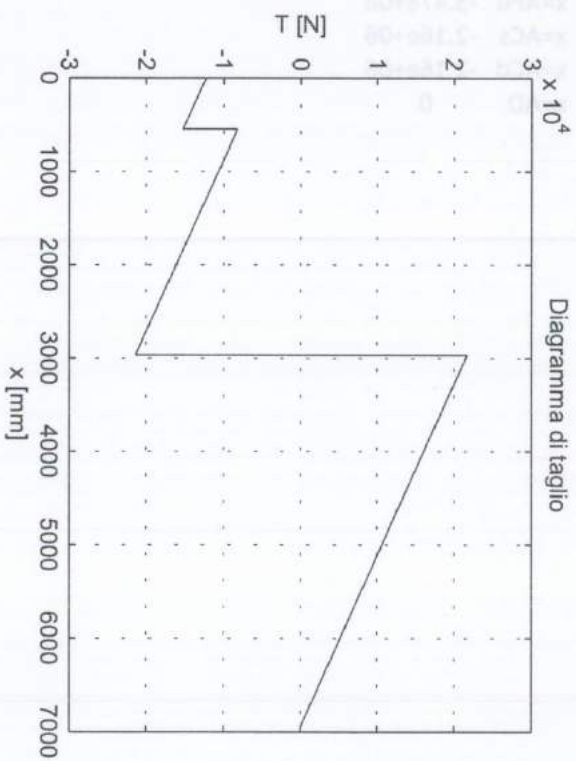
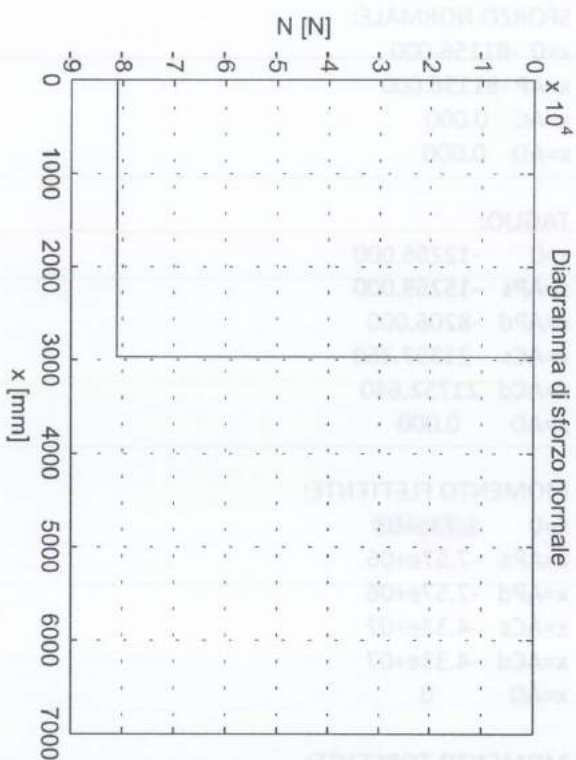
$$\Delta = \text{cost} = 1 \text{ mm}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{73000 \text{ MPa}}{2,66} = 27443 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{2G\Omega\Delta} \left[ q_{12} \cdot l_{12} + q_{23} \cdot l_{12} + q_{34} \cdot l_{61} + q_{45} \cdot l_{12} + q_{56} \cdot l_{12} + q_{61} \cdot l_{61} \right] \\ &= \frac{(-5,87 \cdot 250 - 17,39 \cdot 250 - 51,06 \cdot 220 - 20,72 \cdot 250 - 2,56 \cdot 250 + 27,79 \cdot 220) \frac{\text{N}}{\text{mm}}}{2 \cdot 27443 \text{ MPa} \cdot (2 \cdot 250 \cdot 220) \text{ mm}^2 \cdot 1 \text{ mm}} \end{aligned}$$

$$= -2,77 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$$

$$\left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \text{mm} \cdot \text{mm} = \frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right]$$



### Problema

Si considerino due piastre rettangolari ( $a=50$  cm,  $b=25$  cm,  $h=2$  mm), semplicemente appoggiate sui 4 lati, caricate trasversalmente da un carico bisinusoidale di intensità  $q_z^0 = -1000$  Pa. Le caratteristiche meccaniche del singolo strato sono  $E_L=111$  GPa,  $E_T=8$  GPa,  $G_{LT}=3$  GPa e  $\nu_{LT}=0.33$ . Le stratificazioni delle due piastre sono:

- piastra a:  $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$
- piastra b:  $(90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ)$

e gli spessori sono tra loro uguali (laminazione regolare).  
 Si chiede di determinare, per ognuna delle 2 piastre:

- (1) le matrici  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$
- (2) la massima deflessione  $w_{\max}$  ( $w^{(0)}(a/2, b/2)$ )
- (3) l'andamento lungo lo spessore delle deformazioni  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$  e delle tensioni  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  nel punto centrale  $(a/2, b/2)$
- (4) l'andamento lungo lo spessore della tensione  $\tau_{xz}$  nel punto  $(0, b/2)$  (facoltativo)

### Svolgimento

Il calcolo della matrice delle rigidezze ridotte trasformate di un generico strato,  $[Q_P^{(k)}]$ , può essere effettuato con la seguente procedura

$$[Q_P^{(k)}] = [\Lambda^{(k)}]^{-1} \cdot [Q_P^{(0)}] \cdot ([\Lambda^{(k)}]^{-1})^T$$

$$[Q_P^{(0)}] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2-s^2 \end{bmatrix}$$

$c \equiv \cos(\theta^{(k)})$   
 $s \equiv \sin(\theta^{(k)})$

dove  $E_L$  e  $E_T$  sono i moduli di Young nelle due direzioni principali,  $\nu_{LT}$  e  $G_{LT}$  sono il coefficiente di Poisson e il modulo di taglio nel piano (L,T). Si ha che  $\nu_{TL} = \nu_{LT}E_T/E_L$ . Si notino i due casi seguenti (piastra cross-ply):

$$\theta^{(k)} = 0^\circ \Rightarrow [\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [Q_P^{(k)}] = [Q_P^{(0)}] \qquad \theta^{(k)} = 90^\circ \Rightarrow [\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



### Svolgimento

Nota  $w^{(0)}(x,y)$ , possiamo determinare le deformazioni (nel piano)

$$\{\epsilon_P\} = \{\epsilon_P^{(0)}\} + Z \{K_P\}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^{(0)} \\ v_{,y}^{(0)} \\ u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} \end{Bmatrix} - Z \begin{Bmatrix} w_{,xx}^{(0)} \\ w_{,yy}^{(0)} \\ 2w_{,xy}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

dove il termine membranale è nullo perché  $u^{(0)}(x,y)=v^{(0)}(x,y)=0$  (si tratta di piastre simmetriche caricate trasversalmente). Le deformazioni sono lineari nello spessore e si annullano per  $z=0$ .

Sviluppando i calcoli per le derivate seconde, si ha

$$\{\epsilon_P(x,y,z)\} = -Z \begin{Bmatrix} w_{,xx}^{(0)}(x,y) \\ w_{,yy}^{(0)}(x,y) \\ 2w_{,xy}^{(0)}(x,y) \end{Bmatrix} = -Z \begin{Bmatrix} -(\pi/a)^2 W \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) \\ -(\pi/b)^2 W \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) \\ 2(\pi/a)(\pi/b) W \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b) \end{Bmatrix}$$

#### Strutture Aeronautiche

#### 2 - Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

7



### Svolgimento

Dalle deformazioni possiamo determinare le tensioni (sempre nel piano) usando le equazioni costitutive del materiale, valide strato per strato

$$\{\sigma_P^{(k)}\} = [Q_P^{(k)}] \{\epsilon_P\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{16}^{(k)} \\ Q_{12}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} \\ Q_{16}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Le tensioni risultano lineari a tratti nello spessore perché le rigidzze cambiano da strato a strato; anche le tensioni si annullano tutte in corrispondenza della superficie di riferimento ( $z=0$ ).

Si noti che, per laminazione cross-ply,  $Q_{16}^{(k)}=Q_{26}^{(k)}=0$  in ogni strato.

#### Strutture Aeronautiche

#### 2 - Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

8



### Analisi di convergenza

Consideriamo la piastra b (90/0/0/90) ma questa volta soggetta ad un carico trasversale uniforme (sempre di intensità  $q_z^0 = -1000$  Pa).

In questo caso dobbiamo sviluppare il carico in serie di Fourier:

$$\bar{q}_z(x,y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \quad \text{con } \lambda_m \equiv \frac{m\pi}{a} \quad \text{e } \lambda_n \equiv \frac{n\pi}{b}$$

$$q_{mn} = \begin{cases} 16\bar{q}_z^0 / (\pi^2 mn) & m \text{ e } n \text{ dispari} \\ 0 & m \text{ o } n \text{ pari} \end{cases}$$

Allora la deflessione della piastra è

$$w^{(0)}(x,y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \quad \text{con } \lambda_m \equiv \frac{m\pi}{a} \quad \text{e } \lambda_n \equiv \frac{n\pi}{b}$$

dove

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D_{22} \lambda_n^4} \quad \forall m,n$$



### Analisi di convergenza

Si riportano i valori di deflessione e tensioni massime al variare del numero di termini negli sviluppi in serie della soluzione

M=N	$w_{\max}$ (mm)	$\max(\sigma_x)$ (MPa)	$\max(\sigma_y)$ (MPa)
1	0,933	2,26	16,49
3	0,807	0,40	13,53
5	0,816	0,59	14,06
7	0,812	0,34	13,97
9	0,813	0,40	14,00
11	0,813	0,30	13,99
13	0,813	0,36	14,00



MATECO CARTA → CO3364

## ESERCITAZIONE 2

### ANALISI STATICA DI PIASTRE MULTISTRATO CARICATE TRASVERSALMENTE

Consideriamo due piastre rettangolari laminare simmetricamente e con spessori tra loro uguali



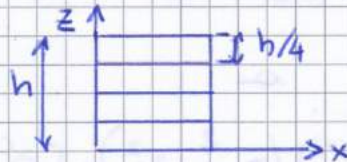
TUTTE LE UNITÀ DI MISURA SARANNO:

[mm]: lunghezze [N]: carichi [MPa]: tensioni, ...

$Q = 500 \text{ mm}$

$h = 2 \text{ mm}$

$b = 250 \text{ mm}$



LATI APPOGGIATI

$E_L = 111 \text{ GPa}$      $E_T = 8 \text{ GPa}$      $G_{LT} = 3 \text{ GPa}$

$\nu_{LT} = 0,33$      $\nu_{TL} = \nu_{LT} \cdot \frac{E_T}{E_L} = 0,024$

#### Parte 1

#### DETERMINAZIONE MATRICI DI RIGIDEZZA DELLE PIASTRE

I calcoli sono stati svolti con Matlab; in allegato tutti i risultati numerici

- Calcolo delle rigidezze ridotte per ogni strato

$$[Q_P^{(0)}] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}$$

strati con  $\theta = 0^\circ$

PIASTRA CROSS-PLY:  
 $Q_{16}^{(k)} = Q_{26}^{(k)} = 0$

$$[Q_P^{(90)}] = [\Lambda^{(90)}]^{-1} \cdot [Q_P^{(0)}] \cdot ([\Lambda^{(90)}]^{-1})^T$$

con  $[\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -CS & CS & C^2 - S^2 \end{bmatrix}$      $C = \cos \theta^{(k)}$   
 $S = \sin \theta^{(k)}$

Parte 2

## CALCOLO DELLA MASSIMA DEFLESSIONE DELLA PIASTRA

- Corico bisinusoidale  $\rightarrow$  1 semionda su x  
 1 " " su y



$$\bar{q}_z(x,y) = q_z^0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\text{AMPIEZZA } q_z^0 = -1000 \text{ Pa} = -10^{-3} \text{ MPa}$$

Poiché il corico ha un andamento bisinusoidale  $\Rightarrow$  anche lo spostamento  $w(x,y)$  dei punti della piastra avrà un andamento bisinusoidale.

- Sfruttando le ipotesi della PIASTRA DI KIRCHHOFF, in particolare quella di  $\epsilon_{zz} = 0$ , assumiamo costante lo spostamento lungo lo spessore e quindi consideriamo solo lo spostamento dei punti del piano medio

$$w^{(0)}(x,y) = W \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$



SI VUOLE CALCOLARE L'AMPIEZZA DELLO SPOSTAMENTO

- Eq. di equilibrio su piano trasversale in termine di spostamenti:

$$D_{11} w_{,xxxx}^{(0)} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{,xyxy}^{(0)} + D_{22} w_{,yyyy}^{(0)} = \bar{q}_z$$

SOSTITUIAMO LA FUNZIONE  $w^{(0)}(x,y)$  NELL'EQUAZ.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{cos} x \quad \frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x \quad \frac{d^3}{dx^3}(\operatorname{sen} x) = -\operatorname{cos} x$$

$$\frac{d^4}{dx^4}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$$

$$\rightarrow w_{,xxxx}^{(0)} = W \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\rightarrow w_{,xyxy}^{(0)} = W \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\rightarrow w_{,yyyy}^{(0)} = W \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\left[ D_{11} \frac{\pi^4}{a^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\pi^4}{a^2 b^2} + D_{22} \frac{\pi^4}{b^4} \right] W \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} = q_z^0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

Risolvendo rispetto a W:  $\rightarrow$

### Parte 3

ANDAMENTO LUNGO LO SPESSORE DI  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$   
NEL PUNTO  $(\frac{a}{2}; \frac{b}{2})$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^{(0)}\} + z \cdot \{K\}$$

PIASTRA CARICATA SOLO TRASVERSALMENTE

$$\rightarrow u^{(0)} = v^{(0)} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} w^{(0)}_{,xx} \\ w^{(0)}_{,yy} \\ 2w^{(0)}_{,xy} \end{Bmatrix}$$

NOTA: se carico NEL piano x-y è nullo  $\rightarrow \gamma_{xy} = 0$

IL PIANO MEDIO È PIANO NEUTRO

Considerando che  $w^{(0)}(x,y) = W \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} -(\frac{\pi}{a})^2 W \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ -(\frac{\pi}{b})^2 W \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \frac{\pi^2}{ab} W \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{Bmatrix}$$

$$[\epsilon_x(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = W \frac{\pi^2}{a^2} \cdot (-z)]$$

In MATLAB si è impostata una funzione per conoscere  $w_{,xx}(x,y)$ ,  $w_{,yy}(x,y)$ ,  $w_{,xy}(x,y)$

$$w_{,xx} = @(x,y) -(pi/a)^2 * W_a * sin(pi*x/a) * sin(pi*y/b)$$

Si è poi suddiviso lo spessore della piastra in strati infinitesimi di spessore 0,05 mm e si è impostato un ciclo for per calcolare per ogni z la deformazione e la tensione.  
(vedi allegato)

$$z = -\frac{h}{2} : 0,05 : \frac{h}{2};$$

for i = 1 : length(z)

$$\dots \text{eps}_{xx} = -z(i) \cdot w_{,xx} (250, 125)$$

for k = 1 : n

$$z_l = z_u - \text{spessore\_strato}(k);$$

if z(i) <= z\_u && z(i) >= z\_l  $\rightarrow$  controllo che z(i)

if ordine\_laminazione(k) == 0 faccia realmente parte dello strato

end  $Q_i = Q_0$

if ordine\_laminazione(k) == 90 k-esimo

end  $Q_i = Q_{-90}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\left( \sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} \right) = \left[ \underbrace{\left( Q_{11} \cdot w_{,xxx} + Q_{12} w_{,xyy} \right)}_{f(x,y)} + \left( 2 Q_{66} \cdot w_{,xy} \right) \right] \cdot z$$

$$f(x,y) = Q_{11} \cdot w_{,xxx} + Q_{12} w_{,xyy} + 2 Q_{66} w_{,xy}$$

Calcolando le derivate

$$w^{(0)} = W \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$w_{,x}^{(0)} = \frac{\pi W}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$w_{,xx}^{(0)} = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 W \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$\rightarrow w_{,xxx}^{(0)} = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^3 W \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$w_{,xy}^{(0)} = \left(\frac{\pi}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

$$\rightarrow w_{,xyy}^{(0)} = -\left(\frac{\pi}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 W \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

~ ponte comune  
e entrambe

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -Q_{11} \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 - Q_{12} \left(\frac{\pi}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 - 2 Q_{66} \left(\frac{\pi}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{\pi}{a}\right) \left[ Q_{11} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + Q_{12} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + 2 Q_{66} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_{xz}(x,y,z) &= - \int_{-\frac{h}{2}}^z \left[ -\left(\frac{\pi}{a}\right) \left[ Q_{11} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + Q_{12} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + 2 Q_{66} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \right] \right] \cdot W \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ &\quad \cdot z \, dz = \\ &= f(x,y) \cdot \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \end{aligned}$$

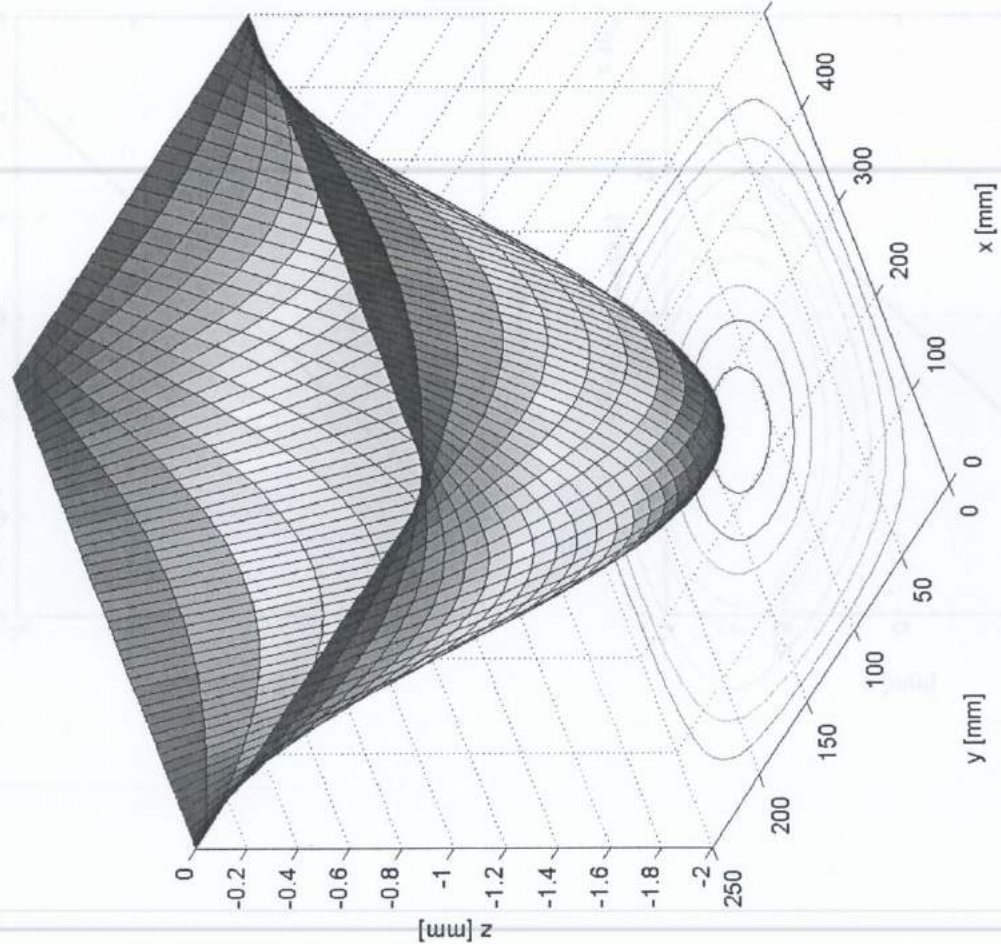
Per ottenere il grafico sullo spessore si suddivide  $z$  in 4 tratti corrispondenti ai singoli strati.

$$z_1 = -\frac{h}{2} : 0,05 : -\frac{h}{4}$$

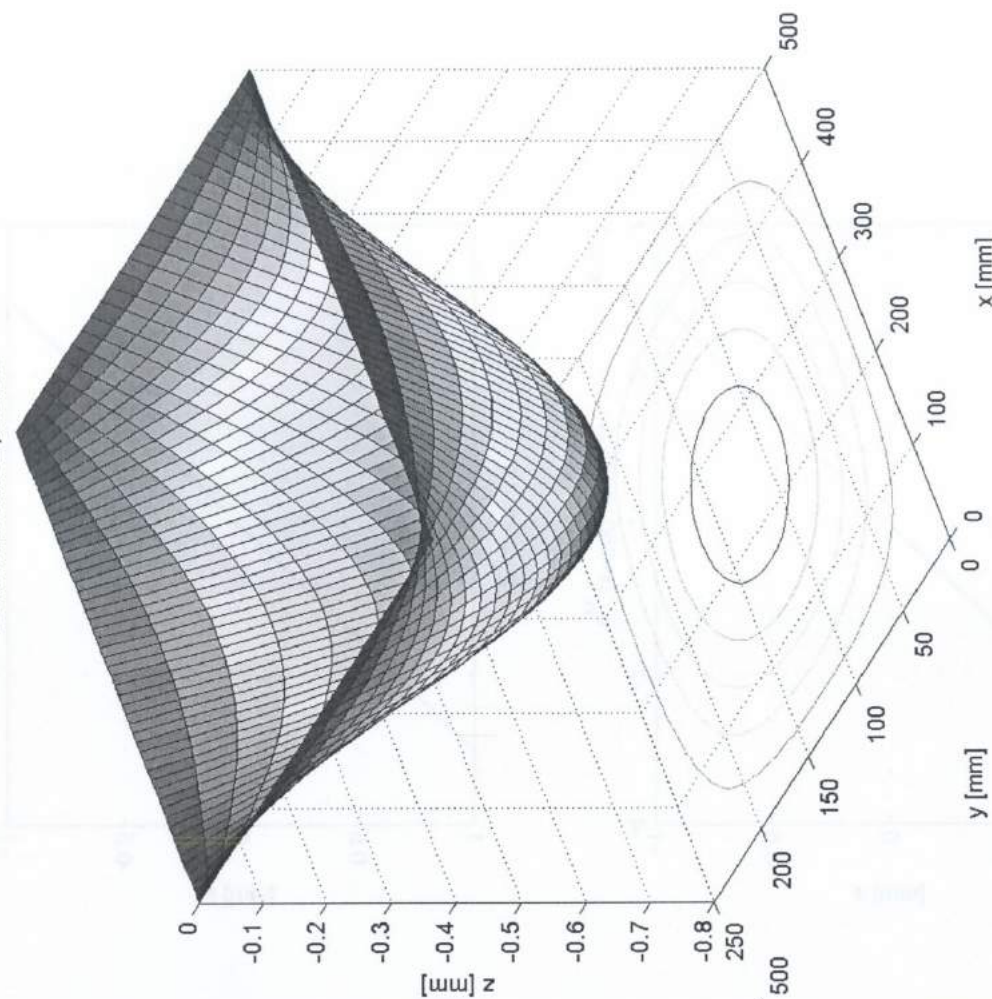
$$\text{con } xz_1 = \left( \frac{z_1 \cdot z}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \cdot \left( -\frac{\pi}{a} \right) \cdot \left( \frac{\pi}{a} \right) \cdot Q_{90}(z_1) \dots$$

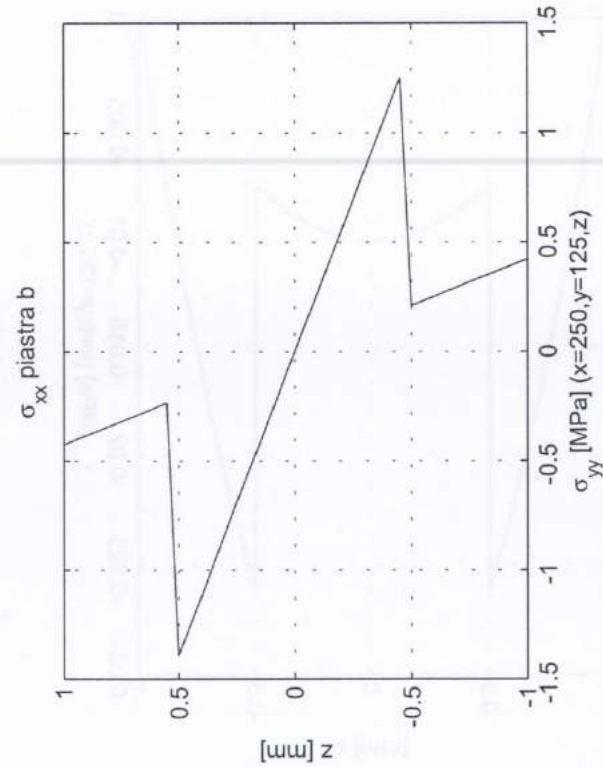
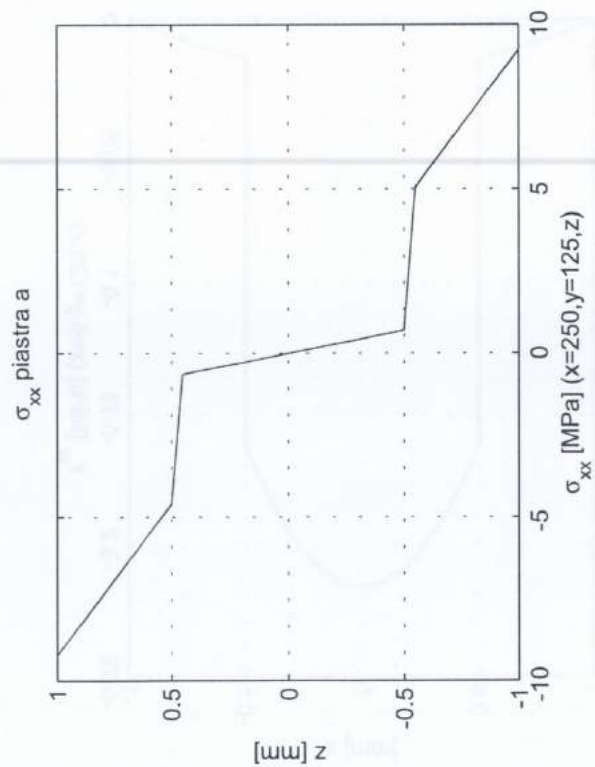
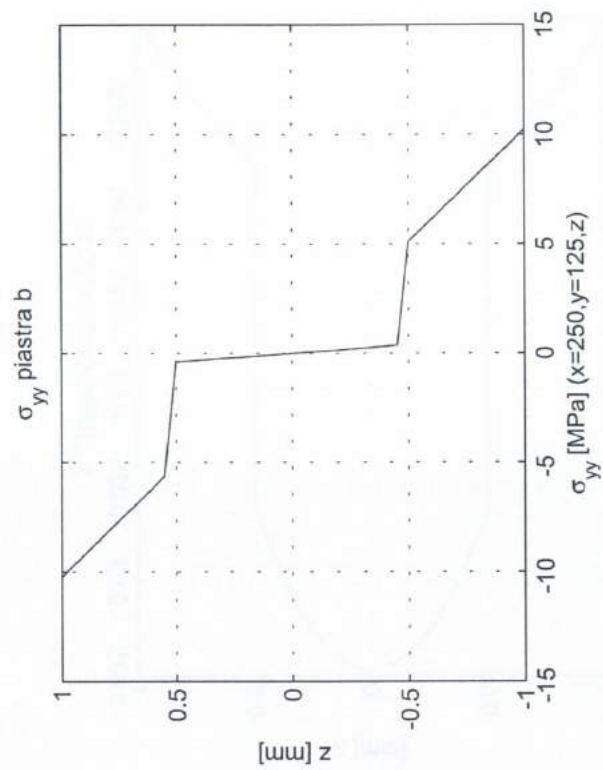
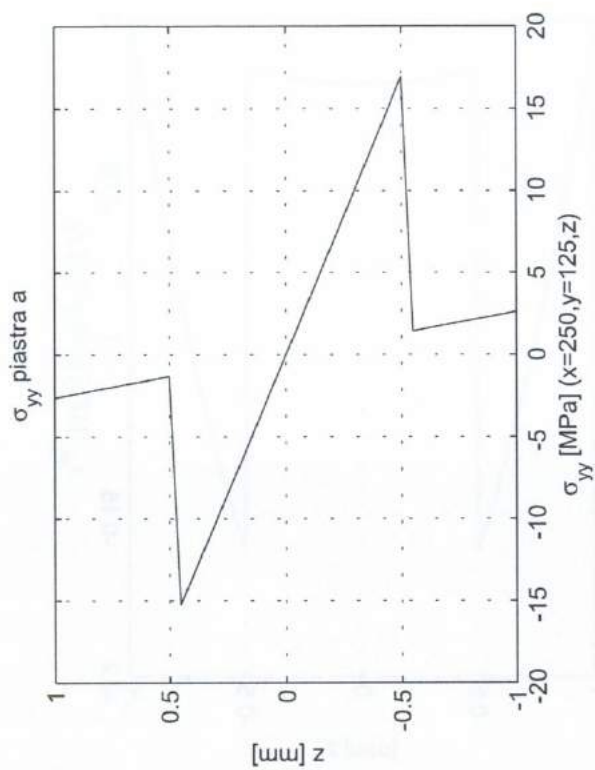
Nel singolo strato si metteranno le [Q] di sua competenza. Vedi grafico in allegato.

Deformata statica piastra a



Deformata statica piastra b







## Dimensionamento di travi composite e sandwich



### Contenuto dell'esercitazione

L'esercitazione si divide in tre fasi:

1. risoluzione di alcuni semplici schemi strutturali statici secondo le teorie della trave di Eulero-Bernoulli e sandwich;
2. analisi delle prestazioni (massa, rigidezza, robustezza) nel caso di laminazione isotropa, composita e sandwich;
3. dimensionamento delle travi composita e sandwich.

### Scopo dell'esercitazione

Gli scopi dell'esercitazione sono:

- imparare a calcolare la risposta statica (spostamenti e tensioni) di semplici schemi strutturali mono-dimensionali a partire dalle equazioni di equilibrio scritte in termini di spostamento (equazione della linea elastica);
- confrontare il comportamento di travi isotrope, composite e sandwich in termini di massa, rigidezza e robustezza.



## Problema

Si chiede di determinare:

**(1)** per quale spessore totale  $h$  la trave composita ha la stessa freccia massima (cioè, la stessa rigidezza) della trave isotropa

Noto tale valore di  $h$ , confrontare le masse e le massime tensioni normali delle due travi

**(2)** per quale spessore  $h$  del cuore la trave sandwich ha la stessa freccia massima (cioè, la stessa rigidezza) della trave isotropa

Noto tale valore di  $h$ , confrontare le masse e le massime tensioni normali delle due travi (quest'analisi va svolta per entrambi i valori di spessore delle facce)

Si precisa che per “massima” tensione si intende il massimo valore assoluto



## Svolgimento

Si noti che in ogni caso si hanno travi con laminazione simmetrica e caricate trasversalmente: sono quindi nulli i coefficienti di rigidezza di accoppiamento. Infine, è sempre nulla la deformazione membranale, così come lo spostamento assiale.

Per l'analisi delle travi isotropa e composita, è possibile usare la teoria della trave di Eulero-Bernoulli.

Per l'analisi della trave sandwich, è invece opportuno usare la relativa teoria





### Svolgimento

Le equazioni di equilibrio trasversale della teoria della trave sandwich (simmetrica) sono

$$A_T (w_{,xx}^{(0)} + \psi_{,x}) = -q(x)$$

$$D\psi_{,xx} = A_T (w_{,x}^{(0)} + \psi_x)$$

dove  $D$  è la rigidità flessionale ed  $A_T$  quella di taglio trasversale della sezione della trave

$$D \equiv \left( \int_{A_t} E_x^{(t)(k)} z dA - \int_{A_b} E_x^{(b)(k)} z dA \right) h/2$$

$$A_T \equiv \int_A G_{xz}^{(c)} dA$$

Nel caso in esame, le facce sono isotrope ed identiche ( $h_F, E_F$ ) per cui

$$D \equiv b \left( \int_{+h/2}^{+h/2+h_F} E_F z dz - \int_{-h/2-h_F}^{-h/2} E_F z dz \right) \frac{h}{2} = \frac{E_F b h}{2} \left[ \frac{((h/2+h_F)^2 - (h/2)^2)}{2} - \frac{((-h/2)^2 - (-h/2-h_F)^2)}{2} \right] = \dots$$

Per quello che riguarda la rigidità  $A_T$ , si ha semplicemente

$$A_T = G_c b h$$



### Svolgimento

Determinate la freccia e la rotazione,  $w^{(0)}(x)$  e  $\psi_x(x)$ , è possibile determinare la tensione (assiale) con la solita procedura (ristretta alle sole facce)

$$\varepsilon_{xx}^{(t)}(x,z) = -\varepsilon_{xx}^{(b)}(x,z) = u_x^{(0)}(x) + (h/2)\psi_{,xx}(x)$$

$$\sigma_{xx}^{(t)}(x,z) = -\sigma_{xx}^{(b)}(x,z) = E_F (h/2)\psi_{,xx}(x)$$

La tensione assiale, per ogni stazione  $x$ , ha due soli valori (uguali ed opposti) sulle due facce

Dunque la massima tensione assiale si ha dove è massima la curvatura ( $\psi_{,xx}$ ), cioè ancora una volta dove è massimo il momento flettente

$$M = D\psi_{,xx}$$

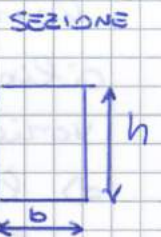
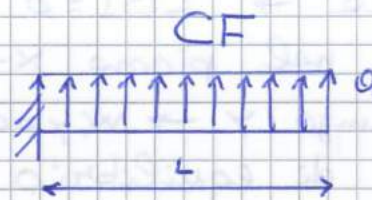
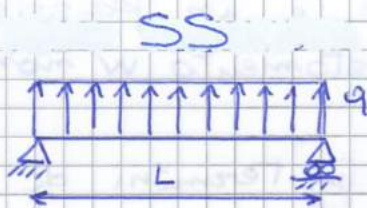
$$\sigma_{\max} \equiv \max_{x,z} (\sigma_{xx}^{(t)}(x,z)) = E_F \frac{h}{2} \cdot \max_x (\psi_{,xx}(x))$$

MATTEO CAFFO S209364

## ESEERCITAZIONE 3

### DIMENSIONAMENTO DI TRAVI COMPOSITE E SANDWICH

In questa esercitazione si vuole dimensionare una trave composita e una sandwich in modo che presentino la stessa freccia massima di una trave isotropa di riferimento in fissate condizioni di carico e di vincolo:



$L = 500 \text{ mm}$        $b = 25 \text{ mm}$        $q = 5000 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 5 \text{ N/mm}$

■ ISOTROPA

$h = 25 \text{ mm}$   
 $E = 73000 \text{ MPa}$   
 $\rho = 2700 \text{ Kg/m}^3$   
 Lega di Al

■ COMPOSITA  $0/90/0$

$h = ?$   
 $E_1 = 141000 \text{ MPa}$   
 $E_2 = 8000 \text{ MPa}$   
 $\rho = 1500 \text{ Kg/m}^3$   
 Carbon/Epoxy

■ SANDWICH

$h_{\text{core}} = ?$   
 $h_{F1} = 1 \text{ mm}$   
 $h_{F2} = 2 \text{ mm}$  } CASI DIVERSI  
 $E_F = 73000 \text{ MPa}$   
 $\rho_F = 2700 \text{ Kg/m}^3$   
 FACCE: lega Al  
 $G_c = 300 \text{ MPa}$   
 $\rho_c = 50 \text{ Kg/m}^3$   
 core: honey comb Al

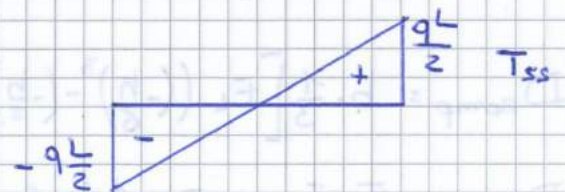
CALCOLI SVOLTI IN MATLAB

► CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

SS

$$T(x) = q(x - \frac{L}{2})$$

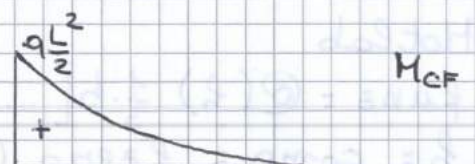
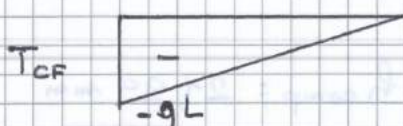
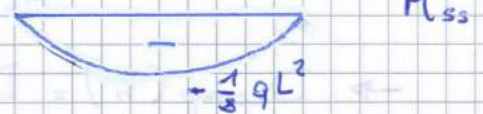
$$M(x) = q(-\frac{x^2}{2} + \frac{L}{2}x)$$



CF

$$T(x) = q(x - L)$$

$$M(x) = q(\frac{x^2}{2} - Lx + \frac{L^2}{2})$$



## 1.b) CONFRONTO TENSIONE MAX

Calcolo della  $\sigma_{xx}$  max partendo dalle espressioni della freccia (già date nel testo)

$$\boxed{SS} \quad w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} \left[ \frac{x^4}{L^4} - 2\frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right]$$

$$w'_{,x}^{(0)} = \frac{qL^3}{24D} \left[ 4\frac{x^3}{L^3} - 6\frac{x^2}{L^2} + 1 \right]$$

$$w''_{,xx}^{(0)} = \frac{qL^3}{24D} \left[ -\frac{12x^2}{L^3} - 12\frac{x}{L^2} \right] = \frac{qL^2}{24D} \left[ -\frac{12x^2}{L^2} - \frac{12x}{L} \right]$$

Poiché ISO e COMP subiscono la stessa deformazione

$$\epsilon_{xx}(x, z) = \cancel{M_{,x}^{(0)}(x)} - z \cdot w''_{,xx}^{(0)}(x)$$

NO CARICHI NEL PIANO x-y

$$\sigma_{xx}(x, z) = -E_{AE} \cdot z \cdot w''_{,xx}^{(0)}(x)$$

La  $\sigma_{xx}$  sarà MASSIMA DOVE È MASSIMO M  
poiché  $M = -D w''_{,xx}^{(0)} \rightarrow$  MAX curvatura

$\rightarrow$  MAX CURVATURA in  $x = \frac{L}{2}$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx \text{ MAX ISO}} &= -E \cdot z_{\text{MAX}} \cdot w''_{,xx} \left( \frac{L}{2} \right) = \\ &= -73000 \text{ MPa} \cdot 12,5 \text{ mm} \cdot \left( -6,5753 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{mm}} \right) \\ &= 60 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Calcolo di  $\sigma_{xx}$  MAX comp  $\rightarrow$  ciclo for lungo z, dove per ogni z(i) viene assegnato una E(i) e seconda dello strato in cui si è.  
(vedi allegato, frammento di script)

$$\sigma_{xx \text{ MAX COMP SS}} = 80,27 \text{ MPa}$$

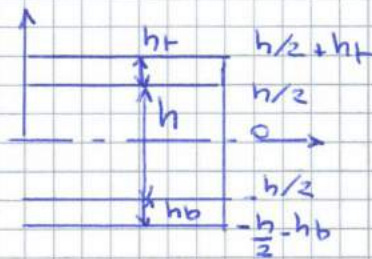
$$\boxed{CF} \quad w'_{,x}^{(0)} = \frac{qL^3}{24D} \left[ 4\frac{x^3}{L^3} - 12\frac{x^2}{L^2} + 12\frac{x}{L} \right]$$

$$w''_{,xx}^{(0)} = \frac{qL^3}{24D} \left[ \frac{12x^2}{L^3} - \frac{24x}{L^2} + \frac{12}{L} \right]$$

$$= \frac{qL^2}{24D} \left[ \frac{12x^2}{L^2} - \frac{24x}{L} + 12 \right]$$

2.e) Determinare  $h$  CORE trovare sandwich per avere stessa  $w_{max}$  della trave isotropa

### CONFRONTO ISOTROPA - SANDWICH



$$h_{top} = h_{bottom} = 1 \text{ mm} \quad / \quad 2 \text{ mm}$$

( =  $h_f$  )                      CASO A                      CASO B

### TRAVE SANDWICH

- ▶ **FACCE** → si comportano come piastre di Kirchhoff
- ▶ **CORE** → assorbe gli sforzi di taglio trasversali  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$

◆ Nel confronto ISOTROPA - COMPOSITO poiché le due espressioni per la freccia MAX erano le stesse bastava uguagliare direttamente  $D_{comp} = D_{iso}$

■ In questo caso invece non si può procedere in quel modo poiché l'andamento della freccia dipende anche dalla RIGIDZZA A TAGLIO DEL CORE  $A_T$

$$w_{MAX, ISO} = w_{MAX, SAND}$$

$$D = b \cdot \frac{h}{2} \left( - \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2} - h_f} \bar{E}_x^{(ch)} \cdot z \, dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2} + h_f} \bar{E}_x^{(cb)} \cdot z \, dz \right) =$$

$$= \frac{b h}{2} \left( - \int_{-\frac{h}{2} - h_f}^{-\frac{h}{2}} \bar{E}_F \cdot z \, dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2} + h_f} \bar{C}_F \cdot z \cdot dz \right) =$$

$$= \frac{\bar{C}_F \cdot b \cdot h}{4} \left[ - \left( -\frac{h}{2} \right)^2 + \left( -\frac{h}{2} - h_f \right)^2 + \left( \frac{h}{2} + h_f \right)^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

↳ funzione matlab  $D_{sand} = @(h) \dots$

$$A_T = G_c \cdot b \cdot h$$

$$\hookrightarrow A_{T, sand} = @(h) \dots$$

Inoltre bisogna fin da subito distinguere caso SS e CF

CF

$$\psi_x = \frac{qL^3}{24D} \left[ -4 \frac{x^3}{L^3} + 24 \frac{x}{L^2} - \frac{12}{L} \right]$$

$$\begin{aligned} \psi_{x,x} &= \frac{qL^3}{24D} \left[ -12 \frac{x^2}{L^3} + 24 \frac{x}{L^2} - \frac{12}{L} \right] = \\ &= \frac{qL^2}{24D} \left[ -12 \frac{x^2}{L^2} + 24 \frac{x}{L} - 12 \right] \end{aligned}$$

→  $\psi_{x,x}$  MAX in  $x=0$

→  $\sigma_{xx}$  MAX SAND CF = (-) 461,63 MPa

### CONFRONTO MASSE

$$\begin{aligned} m_{\text{SAND}} &= L \cdot b \cdot h_{\text{core-ss}} \cdot \rho_{\text{core}} + 2Lb h_{\text{f}_1} \cdot \rho_{\text{Al}} \\ &= 500 \text{ mm} \cdot 25 \text{ mm} \cdot 57,037 \text{ mm} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3 + \\ &+ 2 \cdot 500 \text{ mm} \cdot 25 \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm} \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3 \\ &= 0,103 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$m_{\text{SAND CF}} = \dots = 0,101 \text{ kg}$$

```

61 subplot(3,2,3)
62 plot(x,M_SS);
63 grid on
64 title('Momento trave SS')
65 xlabel('x [mm]')
66 ylabel('M [N*mm]')
67
68 subplot(3,2,5)
69 plot(x,w_SS)
70 grid on
71 title('Spostamento trave SS')
72 xlabel('x [mm]')
73 ylabel('w [mm]')
74
75 subplot(3,2,2)
76 plot(x,T_CF);
77 grid on
78 title('Taglio trave CF')
79 xlabel('x [mm]')
80 ylabel('T [N]')
81
82 subplot(3,2,4)
83 plot(x,M_CF);
84 grid on
85 title('Momento trave CF')
86 xlabel('x [mm]')
87 ylabel('M [N*mm]')
88
89 subplot(3,2,6)
90 plot(x,w_CF)
91 grid on
92 title('Spostamento trave CF')
93 xlabel('x [mm]')
94 ylabel('w [mm]')
95
96 momento_max_SS=max(abs(M_SS))
97
98 momento_max_CF=max(abs(M_CF))
99
100 %=====
101 %=====TRAVE COMPOSITA=====
102
103 %Calcolo spessore
104
105 %poichè D_11_comp deve essere = D_iso --> facciamo D_11_comp-D_iso=funz da
106 %valutare con fzero
107 funz=@(h) (1/3)*b*(EL*((-h/6)^3-(-h/2)^3)+ET*((h/6)^3-(-h/6)^3)+...
108     EL*((h/2)^3-(h/6)^3))-D_iso;
109 h_comp=fzero(funz,25);
110 D_comp=(1/3)*b*(EL*((-h_comp/6)^3-(-h_comp/2)^3)+ET*((h_comp/6)^3-(-h_comp/6)^3)
+...
111     EL*((h_comp/2)^3-(h_comp/6)^3));
112
113 %CALCOLO TENSIONE MASSIMA TRAVE COMPOSITA SS
114
115 w_xx_SS=@(x) ((q*L^2)/(24*D_iso))*((12*x.^2)/(L^2)-12*(x/L));
116
117 z=-h_iso/2:0.5:h_iso/2;
118
119 %l'operazione di trasformare la funzione in vettore va bene SOLO se funz ha

```

```

180 g*****CONFRONTO TRAVE ISOTROPA-TRAVE COMPOSITA*****
181
182 m_iso=L*b*h_iso*ro_Al;
183 sigma_max_iso_SS=max(sigma_xx_iso_SS);
184 sigma_max_iso_CF=max(sigma_xx_iso_CF);
185
186
187 m_comp=L*b*h_comp*ro_comp;
188 sigma_max_comp_SS=max(sigma_xx_comp_SS);
189 sigma_max_comp_CF=max(sigma_xx_comp_CF);
190
191
192 disp('CONFRONTO ISOTROPA-COMPOSITA');
193 sprintf('ALTEZZA SEZIONE [mm]:\tISO\t%8.3f\tCOMP\t%8.3f\n',h_iso,h_comp)
194 sprintf('RIGIDEZZA FLESSIONALE [MPa*mm^4]:\tISO\t%8.3e\tCOMP\t%8.3e\n',D_iso,
D_comp)
195 sprintf('DENSITA' [kg/mm^3]:\tISO\t%8.3g\tCOMP\t%8.3g\n',ro_Al,ro_comp)
196 sprintf('MASSA [kg]:\tISO\t%8.3f\tCOMP\t%8.3f\n',m_iso,m_comp)
197 sprintf('TENSIONE MAX SS [MPa]:\tISO\t%8.3f\tCOMP\t%8.3f\n',sigma_max_iso_SS,
sigma_max_comp_SS)
198 sprintf('TENSIONE MAX CF [MPa]:\tISO\t%8.3f\tCOMP\t%8.3f\n',sigma_max_iso_CF,
sigma_max_comp_CF)
199
200 figure(2)
201 %trave isotropa SS
202 z=-h_iso/2:0.5:h_iso/2;
203 subplot(3,2,1)
204 plot(sigma_xx_iso_SS,z)
205 axis([-1.5*max(sigma_xx_iso_SS) +1.5*max(sigma_xx_iso_SS) -12.5 12.5])
206 title('\sigma_x trave isotropa SS')
207 xlabel('\sigma_x [MPa]')
208 ylabel('z [mm]')
209 grid on
210
211 %trave isotropa CF
212 subplot(3,2,2)
213 plot(sigma_xx_iso_CF,z)
214 axis([-1.5*max(sigma_xx_iso_CF) +1.5*max(sigma_xx_iso_CF) -12.5 12.5])
215 title('\sigma_x trave isotropa CF')
216 xlabel('\sigma_x [MPa]')
217 ylabel('z [mm]')
218 grid on
219
220 %trave composita SS
221 z=linspace(-h_comp/2,h_comp/2,m);
222 subplot(3,2,3)
223 plot(epsilon_xx_comp_SS,z)
224 axis([-1.5*max(epsilon_xx_comp_SS) +1.5*max(epsilon_xx_comp_SS) -h_comp/2
h_comp/2])
225 title('\epsilon_x trave composita SS')
226 xlabel('strain')
227 ylabel('z [mm]')
228 grid on
229
230 subplot(3,2,5)
231 plot(sigma_xx_comp_SS,z)
232 axis([-1.5*max(sigma_xx_comp_SS) +1.5*max(sigma_xx_comp_SS) -h_comp/2 h_comp/2])
233 title('\sigma_x trave composita SS')
234 xlabel('\sigma_x [MPa]')
235 ylabel('z [mm]')

```

```

295 h_core_ss=fzero(FUN2,40);
296 D_sandwich_ss=D_sand(h_core_ss);
297 A_t_sand_ss=A_t(h_core_ss);
298
299 %FRECCIA TRAVE SS ISO vs SANDWICH
300 w_ss_iso=@(x)((q*L^4)/(24*D_iso))*((x/L)^4-2*(x/L)^3+(x/L));
301 w_ss_sand=@(x)((q*L^4)/(24*D_sandwich_ss))*(((x/L)^4-2*(x/L)^3+(x/L))+...
302     ((12*D_sandwich_ss)/(A_t_sand_ss*L^2))*(-(x/L)^2+(x/L));
303
304 subplot(2,2,1)
305 fplot(w_ss_iso,[0 500], 'r-');
306 grid on
307 ylabel('w [mm]')
308 xlabel('x [mm]')
309 title('Confronto freccia trave SS iso e sandwich')
310 hold on
311 axis([0 500 -20 20 ])
312 fplot(w_ss_sand,[0 500], 'b-.');
313 legend('w ss iso','w ss sand')
314
315 %CALCOLO TENSIONE MASSIMA TRAVE SANDWICH SS
316 psi_x_SS=@(x)((q*L^2)/(24*D_sandwich_ss))*(-12*(x/L)^2+12*(x/L));
317 epsilon_xx_sand_SS=h_core_ss/2*psi_x_SS(L/2);
318 sigma_max_sand_SS=E_f*epsilon_xx_sand_SS;
319
320 m=10000;
321 z=linspace(-h_core_ss/2-h_f,h_core_ss/2+h_f,m);
322
323 for i=1:m
324     if z(i)<=(h_core_ss/2+h_f) && z(i)>=(h_core_ss/2)
325         sigma_xx_sand_SS(i)=sigma_max_sand_SS;
326     elseif z(i)<=(h_core_ss/2) && z(i)>=(-h_core_ss/2)
327         sigma_xx_sand_SS(i)=0;
328     elseif z(i)<=-h_core_ss/2 && z(i)>=(-h_core_ss/2-h_f)
329         sigma_xx_sand_SS(i)=-sigma_max_sand_SS;
330     end
331 end
332
333 sigma_xx_sand_SS;
334 % figure(4)
335 subplot(2,2,2)
336 plot(sigma_xx_sand_SS,z)
337 grid on
338 axis([-1.5*max(sigma_xx_sand_SS) +1.5*max(sigma_xx_sand_SS) -h_core_ss/2-h_f
h_core_ss/2+h_f])
339 title('Tensione \sigma_x max trave sandwich SS')
340 ylabel('z[mm]')
341 xlabel('\sigma_x [MPa]')
342
343 %CALCOLO TENSIONE MASSIMA TRAVE SANDWICH CF
344 psi_x_CF=@(x)((q*L^2)/(24*D_sandwich_cf))*(-12*(x/L)^2+24*(x/L)-12);
345 epsilon_xx_sand_CF=h_core_cf/2*psi_x_CF(0);
346 sigma_max_sand_CF=E_f*epsilon_xx_sand_CF;
347
348 m=10000;
349 z=linspace(-h_core_cf/2-h_f,h_core_cf/2+h_f,m);
350
351 for i=1:m
352     if z(i)<=(h_core_cf/2+h_f) && z(i)>=(h_core_cf/2)
353         sigma_xx_sand_CF(i)=sigma_max_sand_CF;

```



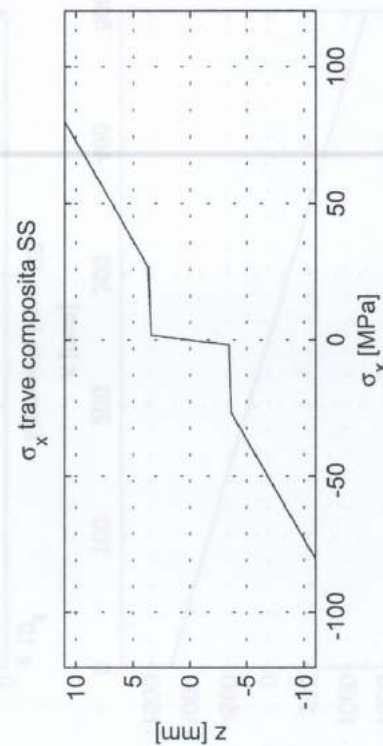
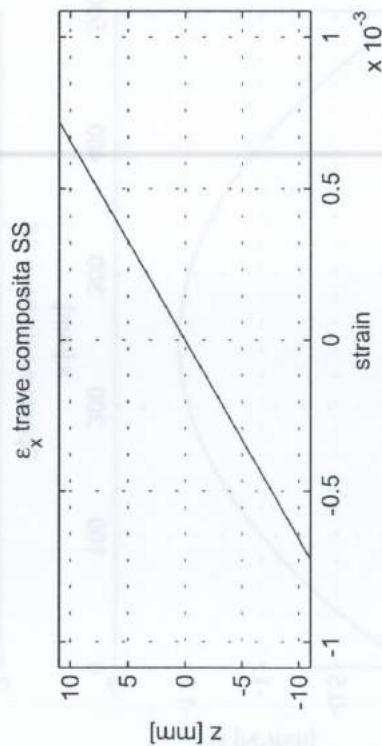
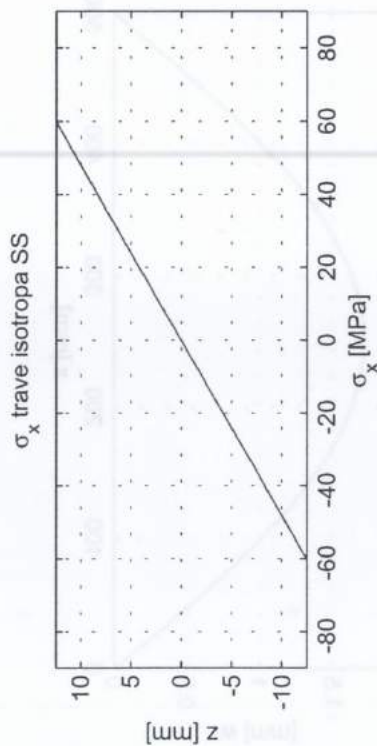
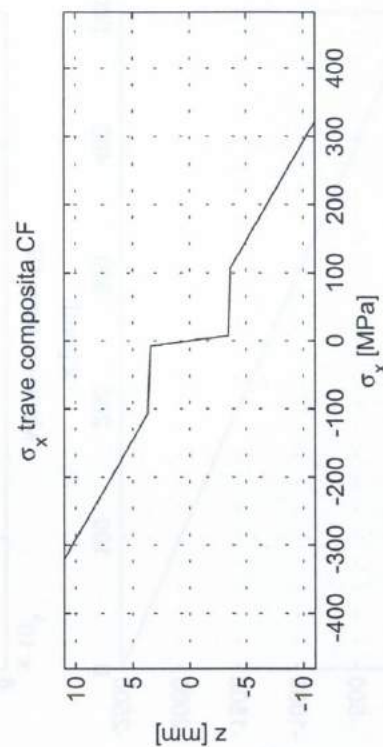
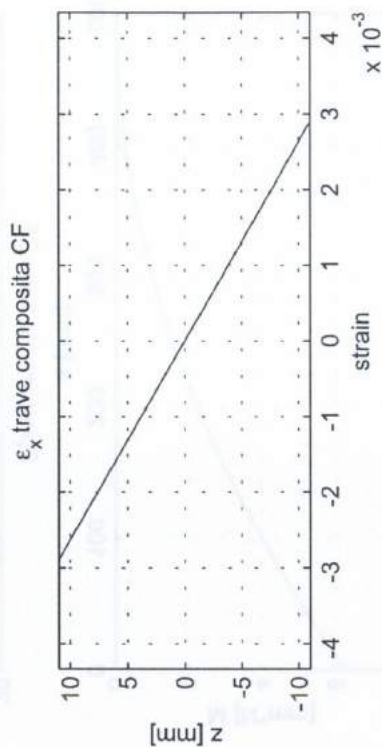
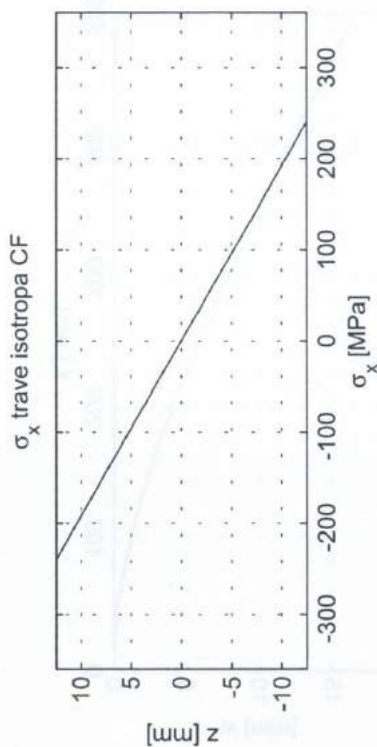
## CONFRONTO TRAVI

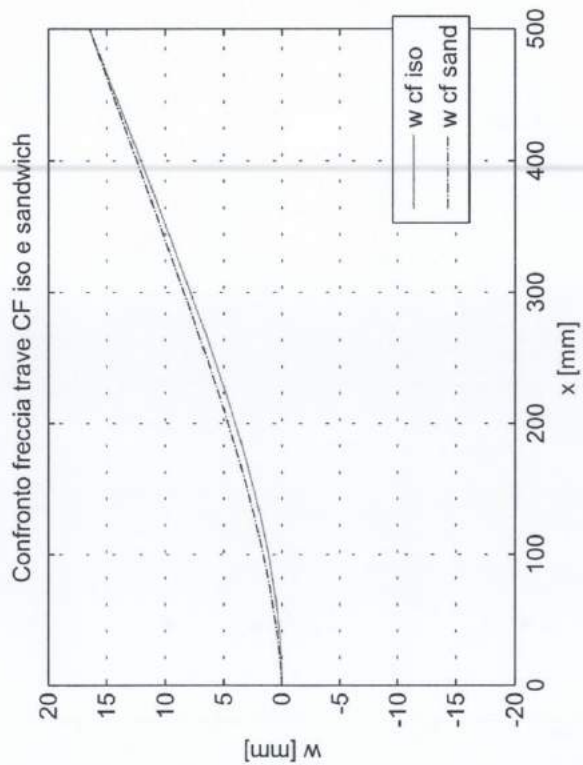
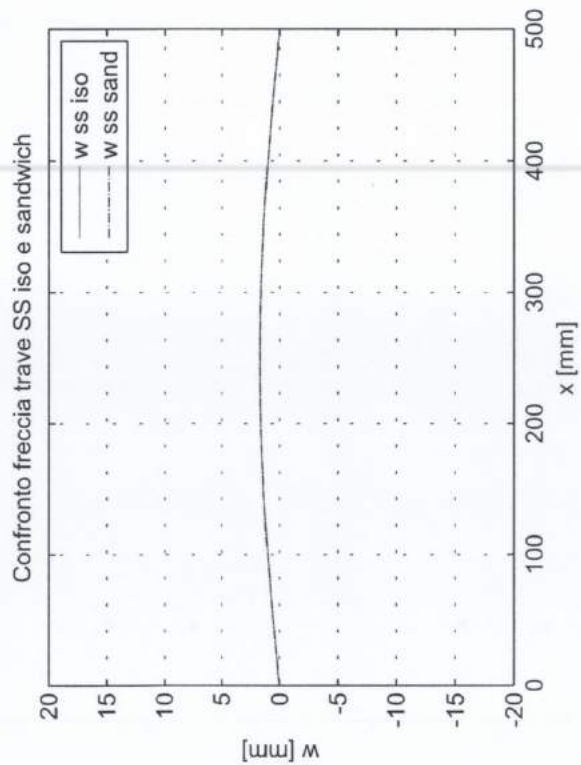
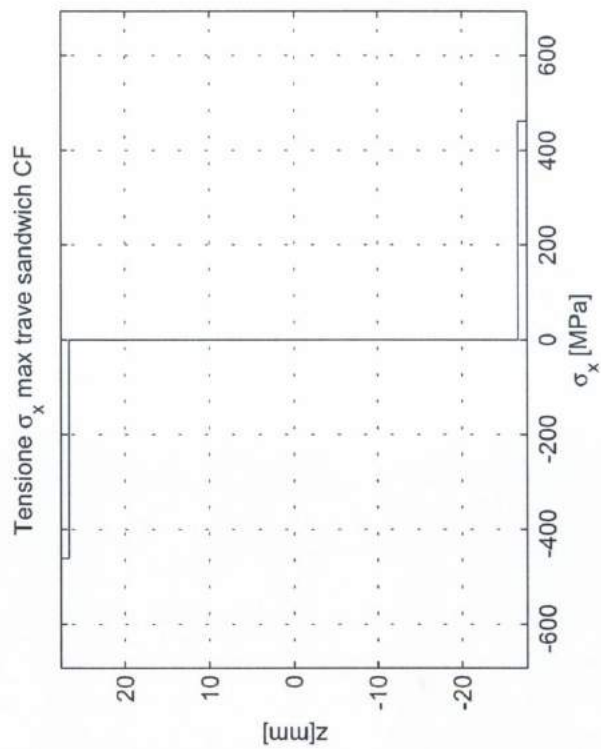
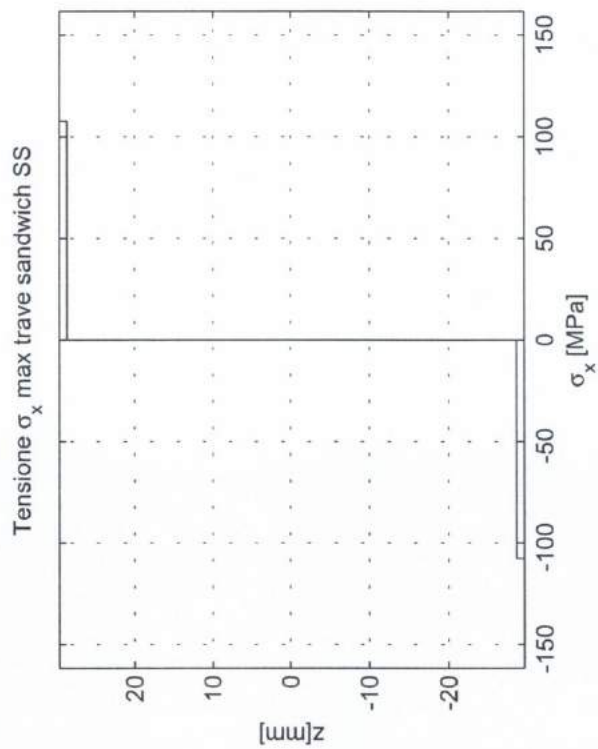
TRAVE SS	$M_{MAX}$	$w_{MAX}$	$x(M_{MAX})$
	156250	1,7123	250

TRAVE SS	ISO	COMP	SAND (hf=1 mm)		SAND (hf=2 mm)	
			CORE	TOT	CORE	TOT
Altezza sezione [mm]	25,00	21,99	57,037	59,037	41,856	45,856
Rigidezza D [Mpa*mm <sup>4</sup> ]	2,370E+09	2,370E+09	-	3,021E+09	-	3,350E+09
Rigidezza At [Mpa*mm <sup>2</sup> ]	-	-	4,278E+05	-	3,139E+05	-
Densità [kg/m <sup>3</sup> ]	2700	1500	50	-	50	-
Massa [kg]	0,844	0,412	0,0356	0,103	0,026	0,161
Tensione $\sigma_{xx}$ MAX [Mpa]	60,000	80,269	-	107,69	-	71,256

TRAVE SS	$M_{MAX}$	$w_{MAX}$	$x(M_{MAX})$
	625000	16,4384	0

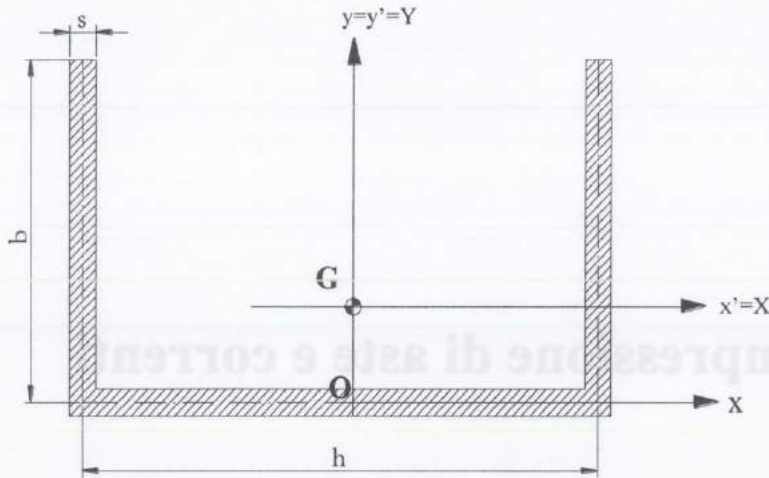
TRAVE CF	ISO	COMP	SAND (hf=1 mm)		SAND (hf=2 mm)	
			CORE	TOT	CORE	TOT
Altezza sezione [mm]	25,00	21,99	53,156	55,156	37,392	41,792
Rigidezza D [Mpa*mm <sup>4</sup> ]	2,370E+09	2,370E+09	-	2,627E+09	-	2,744E+09
Rigidezza At [Mpa*mm <sup>2</sup> ]	-	-	3,987E+05	-	2,834E+05	-
Densità [kg/m <sup>3</sup> ]	2700	1500	50	-	50	-
Massa [kg]	0,844	0,412	0,0332	0,101	0,0236	0,159
Tensione $\sigma_{xx}$ MAX [Mpa]	240,000	321,076	-	-461,63	-	-314,135







### Problema



Curva $\sigma(\epsilon)$ ( $\nu=0.3$ ) lega Al-Cu 2024 (Dural)	
$\epsilon \cdot 10^3$	$\sigma$ [Kg/mm <sup>2</sup> ]
0	0
1	7.3
2	14.6
3	21.6
5	28.35
7	31.95
9	34.2
11	35.7

Altezza sezione	$b=30$ [mm]
Larghezza sezione	$h=50$ [mm]
Spessore sezione	$s=2.5$ [mm]
Lunghezza asta	$\ell=900$ [mm]

Determinare le tre tensioni critiche a compressione dell'asta (estremi appoggiati o incastrati)



### Svolgimento

#### Instabilità globale

Calcoliamo l'andamento della snellezza  $\lambda = \lambda(\sigma_{cr})$

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{L^2} \Rightarrow N_{cr} = \pi^2 \frac{EA\rho^2}{L^2} \Rightarrow \frac{N_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{E}{(L/\rho)^2}$$

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}}$$

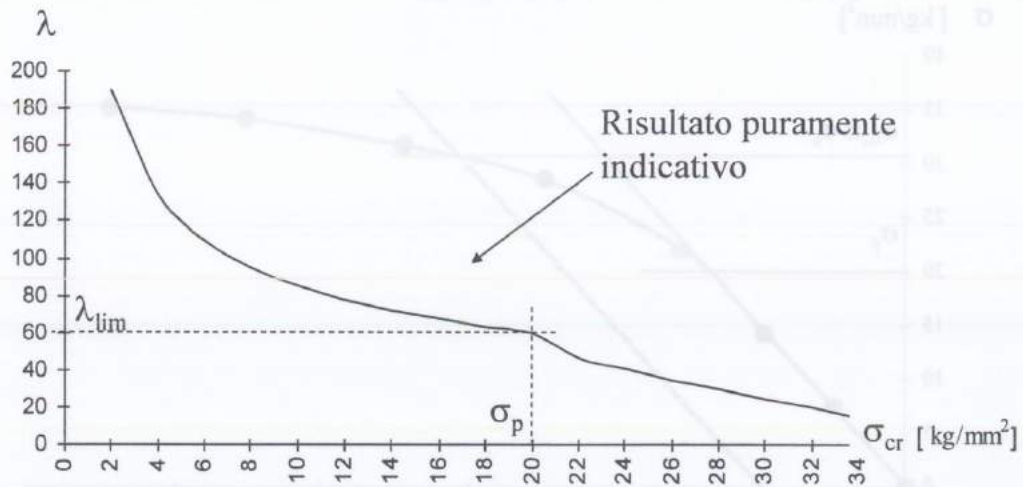
Bisogna distinguere il caso del campo lineare, nel quale vale la teoria di Eulero, da quello non lineare, nel quale supponiamo valida la teoria del modulo tangente. Si hanno pertanto due espressioni per la snellezza:

$$\lambda = \begin{cases} \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}} & 0 \leq \sigma_{cr} \leq \sigma_p \quad \text{campo lineare} \\ \pi \sqrt{\frac{E_t(\sigma_{cr})}{\sigma_{cr}}} & \sigma_{cr} \geq \sigma_p \quad \text{campo non lineare} \end{cases}$$

Può essere utile ricavare  $E_t(\sigma)$



### Svolgimento



Il diagramma può essere usato per calcolare la tensione critica (instabilità globale) nota la snellezza (si ricordi anche la formula di Johnson). Dato che la geometria della sezione è fissa, possiamo determinare  $\rho$  (raggio d'inerzia) conoscendo il piano di inflessione;  $L$  (lunghezza libera di inflessione), invece, dipende dalle condizioni di vincolo dei due estremi dell'asta.



### Svolgimento

Per calcolare  $\rho$  dobbiamo ricordarci che

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

Il valore di  $J$  da utilizzare nella formula precedente deve essere pari al momento di inerzia relativo al piano nel quale effettivamente avviene l'inflessione dell'asta per instabilità globale. In mancanza di altre indicazioni, bisogna usare il minimo  $J$  tra gli infiniti possibili valori, poiché corrisponde alla tensione critica minima. E' noto che i due momenti di inerzia centrali sono uno il minimo e uno il massimo; è quindi necessario calcolare il baricentro della sezione e poi determinare quali sono gli assi centrali ed i corrispondenti momenti di inerzia. Si avrà allora

$$\rho = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$$

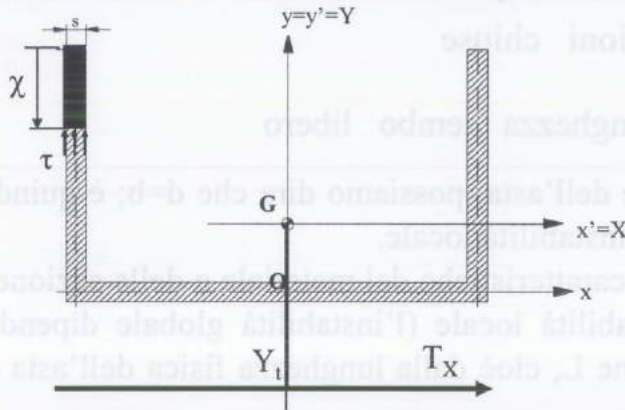
Per il calcolo di  $\lambda$  bisogna tenere presente che

$$\lambda = \frac{L}{\rho} \quad \text{con } L = \delta \cdot \ell \quad \text{e } \delta = \begin{cases} 1 & \text{estremi appoggiati} \\ 0.5 & \text{estremi incastrati} \end{cases}$$

### Svolgimento

Per calcolare  $Y_t$  utilizziamo una procedura del tutto analoga a quella che si usa per determinare la posizione del centro di taglio in una sezione a semiguscio ideale; stavolta, però, la sezione non è a semiguscio e, per calcolare la tensione di taglio nei vari tratti, usiamo la formula di Jourawsky. Si tratta in particolare di calcolare  $S_Y^*$ , momento statico della porzione di sezione considerata rispetto all'asse Y. Per esempio, per il tratto verticale sinistro si ha:

$$\tau = \frac{T_X S_Y^*}{J_{YY} S}$$



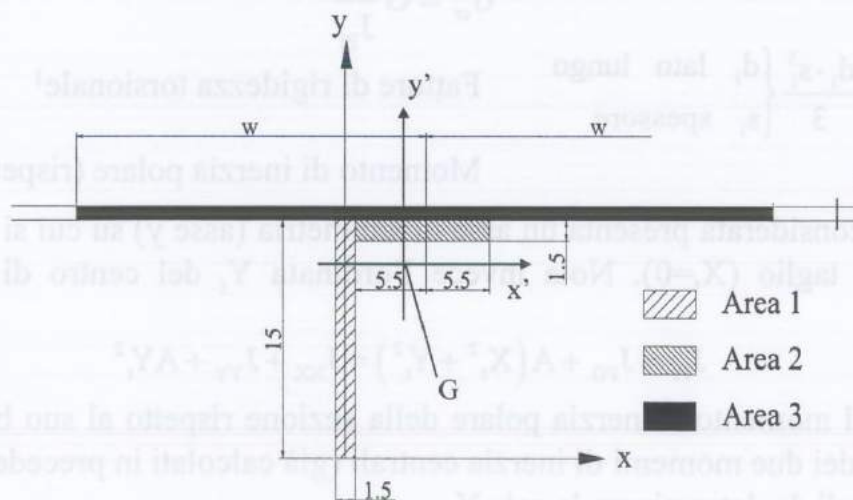
$$S_Y^*(\chi) = -s\chi h/2$$

lineare in  $\chi$  (nel tratto orizzontale la funzione sarà parabolica).

Noto l'andamento di  $\tau$  lungo la linea media, si uguaglia come al solito il momento delle tensioni interne a quello del carico esterno  $T_X$  rispetto ad uno stesso polo e si calcola  $Y_t$ ,  $J_{Pt}$  e così  $\sigma_{cr}$ .

### Problema

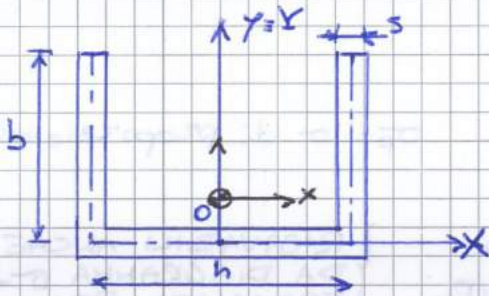
Determinare le tre tensioni critiche a compressione di un corrente in Dural, di lunghezza 345 mm e la cui sezione trasversale è rappresentata sotto



MATTEO CAPPO S209364

ESERCITAZIONE 4STABILITÀ A COMPRESSIONE DI ASTE E CORRENTI

Parte 1

CALCOLO DEI CARICHI CRITICI DI UN'ASTA COMPRESSA  
in diverse condizioni di vincolo.

$$b = 30 \text{ mm}$$

$$h = 50 \text{ mm}$$

$$s = 2,5 \text{ mm}$$

$$L = 900 \text{ mm}$$

$$A = 275 \text{ mm}^2$$

IPOTESI:

SEZIONE IN  
PARETE SOTTILE→ Ho scuriamo  
s in alcuni  
passaggi

• Calcolo baricentro

$$y_G = \frac{\sum A_i y_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{2 \cdot b \cdot s \cdot b/2 + h \cdot s \cdot 0}{2bs + hs} = 8,18 \text{ mm}$$

 $x_G = 0$  poiché la sezione è simmetrica

• Calcolo momenti di inerzia

$$I_{xx} = \frac{1}{12} b^3 s + b s \left( \frac{b}{2} - y_G \right)^2 + \frac{1}{12} h s^3 + h s (0 - y_G)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} b^3 s + b s \left( \frac{b}{2} - y_G \right)^2 = 26238 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} b s^3 + b s \left( -\frac{h}{2} - 0 \right)^2 + \frac{1}{12} h^3 s + h s (0 - 0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} b s^3 + b s \left( +\frac{h}{2} - 0 \right)^2 = 119869 \text{ mm}^4$$

INSTABILITÀ GLOBALE

Ai fini del calcolo della tensione critica bisogna stabilire attorno a quale asse avverrà la flessione dell'asta, cioè il suo cedimento

⇒ CI SARA' CEDIMENTO PRIMA ATTORNO ALL'ASSE X,  
POICHÉ  $I_{\text{minimo}} = I_x$ .

$$\text{CARICO CRITICO : } N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l^2} = \frac{\pi^2 E A p^2}{l^2}$$

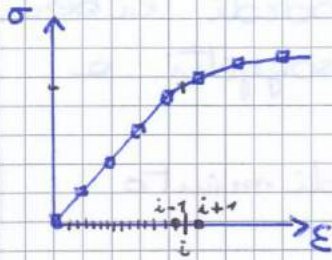
EULERIANO

$$I = A p^2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

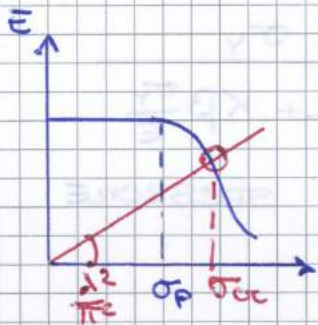
$\lambda = \frac{l}{p} =$  SNELEZZA DELLA TRAVE,  $l =$  lunghezza libera di flessione

• Partendo da una serie di coppie  $\epsilon - \sigma$  si traccia il diagramma  $\sigma - \epsilon$



Interpolando i dati in Matlab con una SPLINE si ottiene la funzione dell'andamento di  $\sigma = f(\epsilon)$

Voliamo poi la spline su tutto l'intervallo di  $\epsilon$  discretizzato con molti nodi.



Poiché  $\epsilon = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$  per ogni nodo si va a valutare  $\epsilon$  approssimando la derivata con differenze centrate o differenze all'indietro

$$\epsilon_{+}(i) = (y(i+1) - y(i-1)) / (\epsilon_{s(i+1)} - \epsilon_{s(i-1)})$$

con  $y =$  spline valutata in tutti i punti in cui  $\epsilon$  è stato suddiviso  $\epsilon$ .

→ SI VA POI A DIAGRAMMARE  $\epsilon_{+} = f(\sigma)$

• Considerando che  $\sigma_{uc} = \frac{\pi^2 E I}{\lambda^2} \rightarrow \epsilon_{+} = \sigma_{uc} \frac{\lambda^2}{\pi^2}$

→ UNA VOLTA NOTE LE CARATTERISTICHE DELL'ASTA  $\frac{\lambda^2}{\pi^2}$  È NOTO ED È IL COEFF. ANGOLARE DI UNA RETTA

Mettendo a sistema le due curve si ottiene  $\sigma_{uc}$ .

$$\epsilon_{+}(\sigma_{uc}) - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \sigma_{uc} = 0$$

In Matlab dove sarà minima la differenza tra i due vettori allora lì ci sarà la  $\sigma_{uc}$

$$\sigma_{uc} = 226,17 \text{ MPa} \quad (23 \text{ kg/mm}^2)$$

Anche se la  $\sigma_{uc, INCASTRI}$  è più elevata di quella del caso con gli appoggi (poiché c'è un vincolo PIÙ IMPORTANTE) questa è comunque  $< \sigma_y$

$\sigma_y$  snervamento: da diagramma:  $\sigma = \epsilon \cdot E = 0,002$  (retta)  
 $\sigma_y \approx 298 \text{ MPa}$

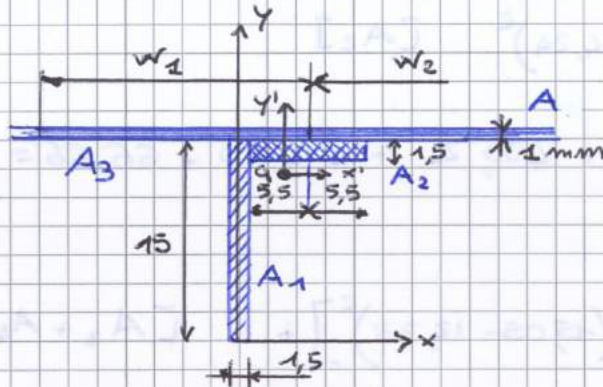


$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{73000 \text{ MPa}}{2(1+0,33)} = 27443 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{tors.}} = G \frac{J_T}{J_p} = 27443 \text{ MPa} \cdot \frac{573,9 \text{ mm}^4}{255119 \text{ mm}^4} = 61,62 \text{ MPa} \quad (6,28 \text{ kg/mm}^2)$$

Parte 2

### CORRENTE DI IRRIGIDIMENTO IN COMPRESSIONE



Determinare le tensioni critiche di un corrente in DURAL di  $L = 345 \text{ mm}$

DURAL

$$E = 73000 \text{ MPa}$$

$$\sigma_p = 20 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_y = 30 \text{ kg/mm}^2$$

La sezione collaborante dei due pannelli contribuisce a sopportare la compressione

→ Calcolo lunghezza collaborante

$$\sigma_y = kE \left( \frac{\lambda}{2w} \right)^2 \rightarrow w = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{kE}{\sigma_y}} = \frac{1 \text{ mm}}{2} \sqrt{\frac{3,62 \cdot 73000 \text{ MPa}}{300 \text{ MPa}}} = 14,83 \text{ mm}$$

$$w_1 = w_2 = 14,83 \text{ mm}$$

INSTABILITÀ GLOBALE

Area resistente a compressione a sezione corrente + sez. collaborante pannello

$$S_{x_i} = A_i \cdot y_{a_i}$$

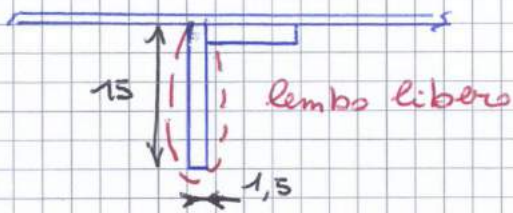
$$S_{y_i} = A_i \cdot x_{a_i}$$

	$x_{a_i}$	$y_{a_i}$	Area	$S_{x_i}$	$S_{y_i}$
A <sub>1</sub>	0	7,5	22,50	168,75	0
A <sub>2</sub>	6,25	14,25	16,50	235,12	103,12
A <sub>3</sub>	-1,165	15,05	14,83	223,20	-17,28
A <sub>4</sub>	13,665	15,05	14,83	223,20	202,65
<b>TOT</b>			<b>68,66</b>	<b>850,27</b>	<b>288,49</b>

NOTA:

QUI NON USIAMO L'IPOTESI DI PARETE SOTTILE

## INSTABILITÀ LOCALE



$$\beta = \frac{15}{1.5} = 10$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_T}{1 + k\beta \frac{\sigma_T}{E}}$$

$$k = \begin{cases} 8,5 & \text{aperta} \\ 3 & \text{chiusa} \end{cases}$$

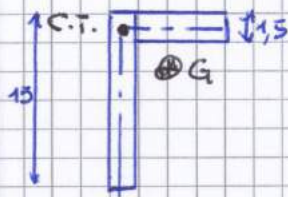
$$\rightarrow \sigma_{cr} = \frac{300 \text{ MPa}}{1 + 10 \cdot 8,5 \cdot \frac{300 \text{ MPa}}{73000 \text{ MPa}}} = 222 \text{ MPa} \quad (22,66 \text{ Kg/mm}^2)$$

## INSTABILITÀ TORSIONALE

$$J_T = \frac{\sum d_i \cdot \Delta_i^3}{3} = \frac{1}{3} (2 \cdot 14,83 \cdot 1^3 + 11 \cdot 1,5^3 + 15 \cdot 1,5^3) = 39,13 \text{ mm}^4$$

⚠ BISOGLIA METTERE TUTTE LE PARTI DELLA SEZIONE

Calcolo della posizione del centro di taglio:  
si trascura la parte collaborante del pannello



IL CENTRO DI TAGLIO DI UNA SEZIONE A L È NELLO SPIGOLO

$$Y_T = 15 - 0,75 = 14,25 \text{ mm}$$

$$Y'_T = 14,25 - 12,38 = 1,87 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} J_{PT} &= I_{x'x'} + I_{y'y'} + A_{tot} (x_T'^2 + y_T'^2) \\ &= 1288,7 + 2934,45 + 68,56 ((-4,20)^2 + 1,87^2) \\ &= 5674,40 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_T &= 0 \\ x_T' &= -4,20 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\sigma_{crT} = G \frac{J_T}{J_{PT}} = 27443 \text{ MPa} \cdot \frac{39,13 \text{ mm}^4}{5674,40 \text{ mm}^4} = 189,24 \text{ MPa} \quad (19,29 \text{ Kg/mm}^2)$$

```

60 sigma_y=retta2(find(diff_sigma==min(diff_sigma)))
61
62 lambda_lim=pi*(E/sigma_p)^0.5
63 ro=(I_min/A_tot)^0.5
64
65 l_appoggi=L;
66 l_incastrati=L/2;
67
68 disp('ASTA ESTREMI APPOGGIATI')
69 lambda_appoggi=l_appoggi/ro
70 if lambda_appoggi<lambda_lim
71     disp('APPOGGI: CAMPO NON LINEARE--->NO EULERO')
72 else
73     disp('APPOGGI: CAMPO LINEARE--->SI''EULERO')
74     sigma_cr_appoggi=pi^2*E/(lambda_appoggi^2)
75 end
76
77 disp('ASTA ESTREMI INCASTRATI')
78 lambda_incastrati=l_incastrati/ro
79 if lambda_incastrati<lambda_lim
80     disp('INCASTRATI: CAMPO NON LINEARE--->NO EULERO')
81 else
82     disp('INCASTRATI: CAMPO LINEARE--->SI''EULERO')
83     sigma_cr_incastrati=pi^2*E/(lambda_incastrati^2)
84 end
85
86 %MODULO TANGENTE
87 %y=ppval(P,eps);           %la y mi rappresenta la sigma ottenuta interpolando
con la spline
88 E_t(1)=(y(2)-y(1))/(eps(2)-eps(1));
89 for i=2:length(y)-1
90     E_t(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(eps(i+1)-eps(i-1)); %approx derivata con differenze
centrate
91 end
92 E_t(length(y))=(y(length(y))-y(length(y)-1))/(eps(length(y))-eps(length(y)));
93
94
95 subplot(2,1,2)
96 plot(y,E_t)
97 grid on
98 hold on
99 E_rett=y*(lambda_incastrati^2)/(pi^2);
100 plot(y,E_rett)
101
102 diff=abs(E_t-E_rett);
103 sigma_cr_incastrati=y(find(diff==min(diff)))
104
105

```



## Stabilità a compressione e taglio di pannelli alari



### Contenuto dell'esercitazione

L'esercitazione riguarda l'analisi di stabilità di alcuni pannelli presenti in un cassone alare e si divide in tre fasi:

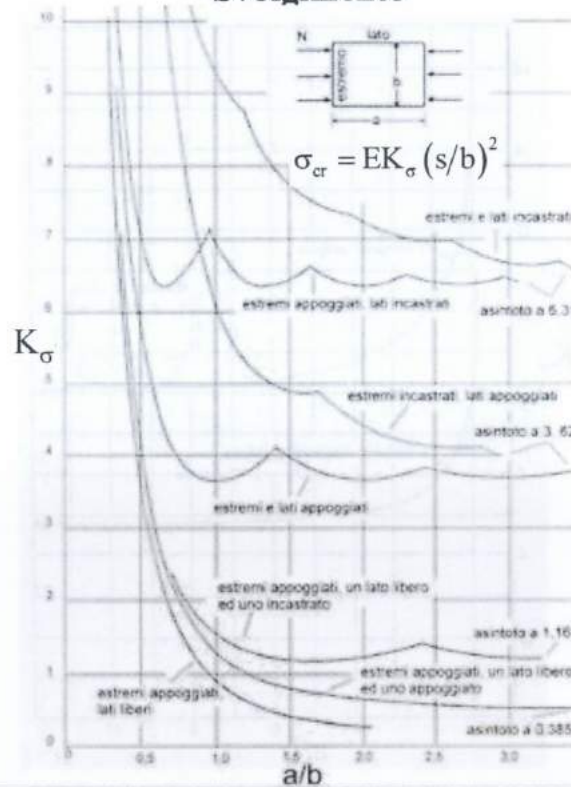
1. analisi della stabilità a compressione di un pannello dorsale;
2. analisi della stabilità a taglio di un pannello del longherone anteriore;
3. analisi dello stato di sollecitazione dei rivetti.

### Scopo dell'esercitazione

L'esercitazione ha come scopo l'applicazione delle formule per lo studio dell'instabilità dei pannelli soggetti a compressione e taglio e la comprensione del modo di lavorare tipico dei pannelli alari.



### Svolgimento



### Svolgimento

La tensione critica di taglio per un pannello isotropo si calcola con la seguente formula

$$\tau_{cr} = EK_{\tau} \left(\frac{s}{b}\right)^2$$

dove E, s e b (lato minore) sono ancora una volta dati noti per il pannello B mentre  $K_{\tau}$  si può calcolare conoscendo a/b e supponendo che il pannello sia semplicemente appoggiato sui 4 lati (vedere grafico nella slide successiva)

La tensione sollecitante è ricavabile dal flusso di taglio, determinato nell'esercitazione 1, ricordando che lo spessore del pannello è s=1 mm:

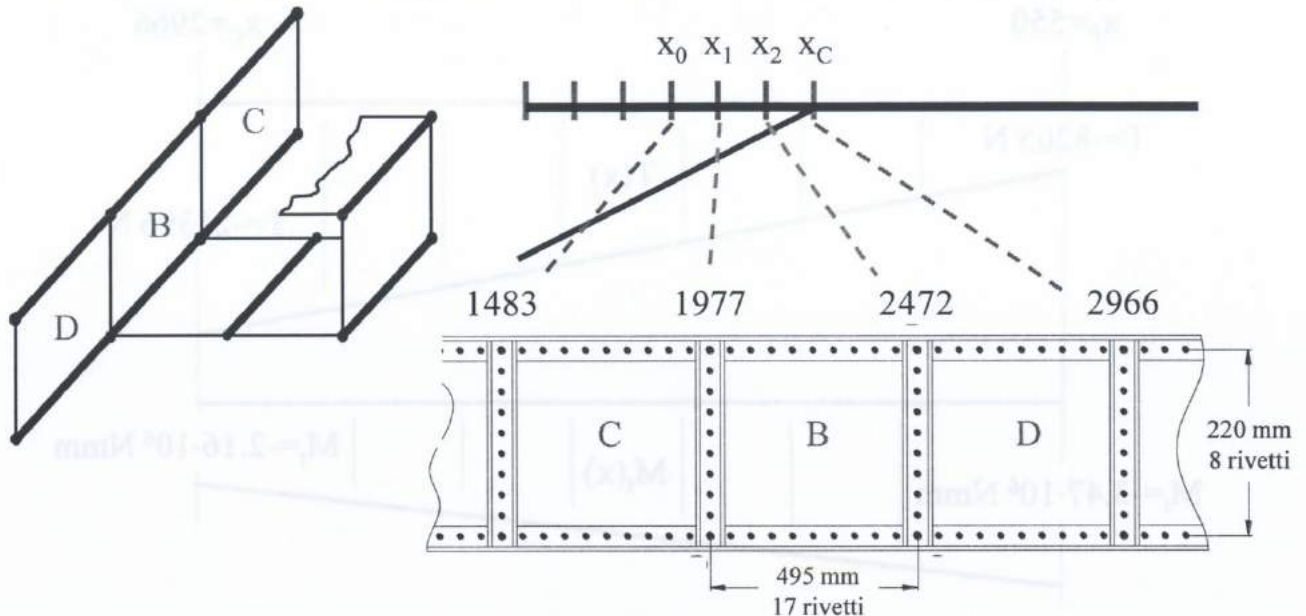
$$q_{61}^{TOT} = -27.79 N / mm \Rightarrow \tau_{61}^{TOT} = q_{61}^{TOT} / s = -27.79 N / mm^2$$

Anche in questo caso la tensione sollecitante è maggiore di quella critica e il pannello lavora in campo post-critico

E' quindi possibile determinare lo stato di sollecitazione interno al pannello, riconoscendolo in campo di tensione diagonale parziale

### Svolgimento

Per determinare le forze applicate ai rivetti del pannello B è necessario conoscere anche lo stato di sollecitazione nei pannelli adiacenti C e D (campate  $x_0-x_1$  e  $x_2-x_C$ )



### Svolgimento

Le tensioni critiche dei pannelli C e D coincidono con quella del pannello B. Le tensioni agenti su C e D si possono determinare a partire da quelle agenti su B e conoscendo l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione lungo la semiala

In tutti i pannelli della struttura alare, il flusso di taglio sollecitante è la somma di un flusso proporzionale al momento torcente medio sulla campata e di un flusso proporzionale al taglio medio sulla stessa campata

$$q_{ij}^{TOT} = q_{Mt} + q_{ij}$$

$$q_{ij}^{TOT} = \alpha \cdot M_{tm} + \beta_{ij} \cdot T_m$$

Per pannelli compresi tra gli stessi correnti, i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta_{ij}$  non cambiano. I pannelli B, C e D sono compresi tra i correnti 1 e 6 per cui possiamo determinare  $\alpha$  e  $\beta_{61}$  nel pannello B (vedere risultati esercitazione 1) ed usarli poi per i pannelli C e D

$$\begin{aligned} M_{tm} &= -2.56 \cdot 10^6 \text{ Nmm} & q_{Mt} &= -11.64 \text{ N/mm} & \alpha &= q_{Mt} / M_{tm} = 4.55 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-2} \\ T_m &= -17347 \text{ N} & q_{61} &= -39.43 \text{ N/mm} & \beta_{61} &= q_{61} / T_m = 2.27 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$



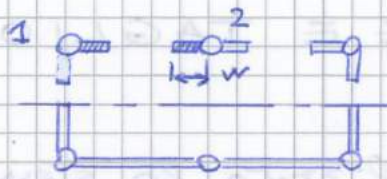
---

## Svolgimento

Nota lo stato di sollecitazione dei pannelli B, C e D, le forze applicate ai rivetti del pannello B si calcolano come segue:

- per ogni lato dei tre pannelli si calcolano le forze risultanti orizzontale e verticale
- dividendo tali due forze per il numero di rivetti presenti sul lato, si ottengono le forze orizzontale e verticale agenti sul singolo rivetto e dovute al singolo pannello
- per i rivetti interni dei due lati orizzontali del pannello B non ci sono altri pannelli che contribuiscono, possiamo calcolare la forza risultante agente sul rivetto
- per i rivetti interni dei due lati verticali del pannello B bisogna sommare i contributi dovuti ai lati verticali dei pannelli adiacenti
- per i 4 rivetti di vertice del pannello B ci sono 4 contributi relativi ai 4 lati di pannelli adiacenti che in tali vertici si toccano

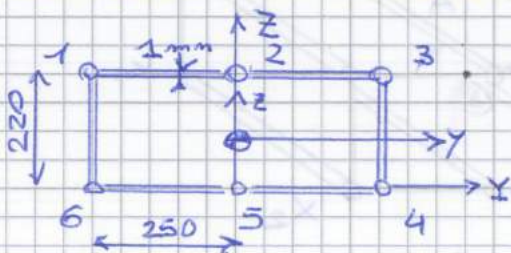
Queste tensioni in fatti sono sopportate dai correnti 1 e 2 e dalle orecchie collaboranti del pannello.



$$\sigma_y = K_0 E \left( \frac{\Delta}{2w} \right)^2 \rightarrow w \approx 15 \text{ mm}$$

CONFRONTO: che situazione si avrebbe se non si sfruttasse l'ipotesi del semiguscio considerando collaborante tutta la sezione del pannello?

• Calcolo del baricentro sezione completa



$Y_G = 0$  sezione simmetrica

$$Z_G = \frac{\sum Z_{G_i} \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$A_{TOT} = 3040 \text{ mm}^2 \quad (\text{vs. } 2410 \text{ mm}^2)$$

Calcoli effettuati con MATLAB.

Bisogna considerare anche le sezioni dei pannelli, non si ricorre ai BOOMS come in es. 1.

$$Z_G = \frac{2(110(1 \cdot 220)) + (A_1 + A_2 + A_3 + 2 \cdot 250 \cdot 1)(220 - 0,5)}{(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + 250 \cdot 1 \cdot 4 + 220 \cdot 1 \cdot 2)}$$

$$= 109,78 \text{ mm}$$

• Calcolo momento d'inerzia sezione completa

$$I_{YY} = \frac{1}{12} (bh^3) + A(z_i - z_G)^2 = \dots = 32,95 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

(vs.  $27 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$  del caso del semiguscio ideale)

$$\sigma_{x_i} = \frac{N(x)}{A_{TOT}} + \frac{M(x)}{I_Y} \cdot z_i$$

Sfruttando le stesse sollecitazioni di ES. 1

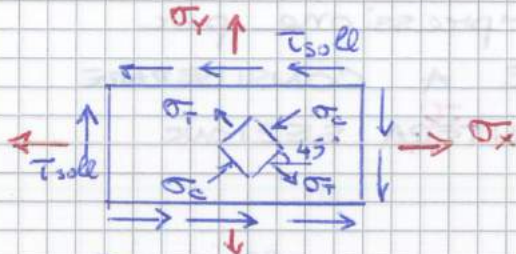
	N	M	SEZ. COMPLETA $\sigma_x$ DORSO	SEMIGUSCIO $\sigma_x$ ①②
$x_1 = 1977$	-81156	$-24,24 \cdot 10^6$	-109,40	-160,47
$x_2 = 2472$	-81156	$-34,42 \cdot 10^6$	-138,00	-204,31



Considerando  $\tau_{soll} = 27,79 \text{ MPa}$  e  $\tau_{cr} = 8,52 \text{ MPa}$

$\frac{\tau_{soll}}{\tau_{cr}} = 3,26 \rightarrow$  IL PANNELLO LAVORA IN CAMPO POST-CRITICO DIAGONALE PARZIALE (poiché  $\tau_{soll} < 5\tau_{cr}$ )

► Caratterizzazione STATO TENSIONALE PANNELLO B



$$\begin{aligned} \tau_{soll} &= \tau_{cr} + \Delta\tau \\ &= \tau_{cr} + (\tau_{soll} - \tau_{cr}) \end{aligned}$$

Per un conio di pannello posto a  $45^\circ$  rispetto agli assi

$$\sigma_t = \tau_{cr} + 2\Delta\tau = \tau_{cr} + 2(\tau_{soll} - \tau_{cr}) = 47,06 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \tau_{cr} = 8,52 \text{ MPa}$$

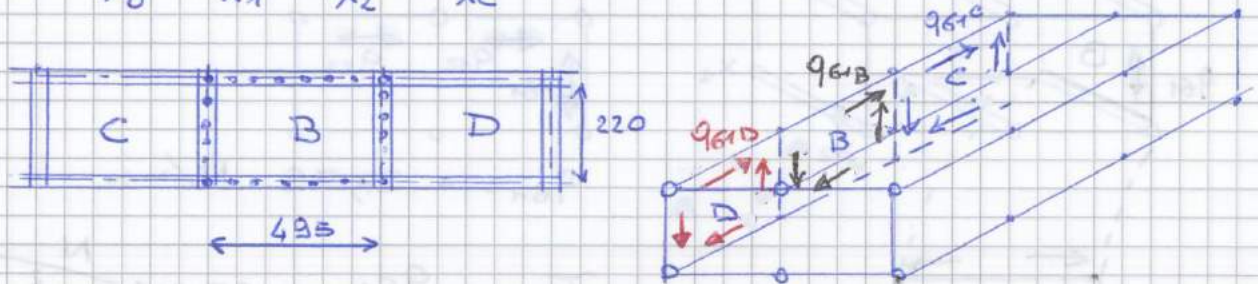
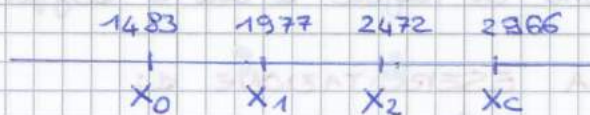
$$\sigma_x = \Delta\tau = 19,27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \Delta\tau = 19,27 \text{ MPa}$$

Parte 3

ANALISI DELLO STATO DI SOLLECITAZIONE DEI RIVETTI

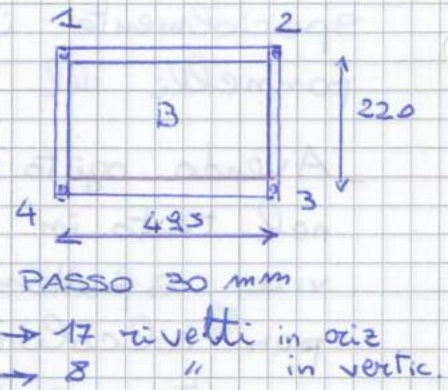
Volendo studiare le sollecitazioni dei rivetti che fissano il pannello B agli elementi di riquadro, bisogna anche conoscere come sono sollecitati i pannelli adiacenti, cioè il C e D.



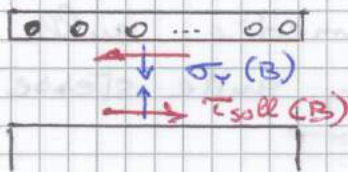
Per le ipotesi di ES. 1 le sollecitazioni sono costanti tra due centine ( $\rightarrow$  su una compota), perciò anche i flussi di taglio sono costanti sulla stessa compota.

Gli elementi di riquadro sentono gli sforzi con verso opposto ai pannelli

- Gli elementi di riquadro fra due pannelli sentono le tensioni di entrambi. I rivetti angolari si vedranno per ultimi



► ELEMENTO RIQUADRO SUPERIORE



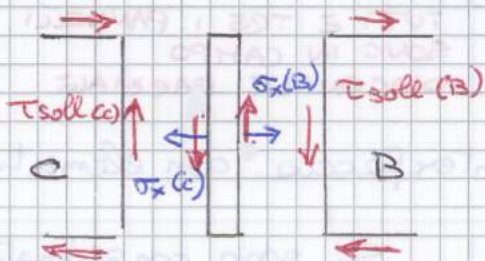
Forze agenti per rivetto

$$F_x = \frac{\tau_{soll} \cdot Q \cdot \Delta}{n^{\circ} \text{ rivetti}} = \frac{27,73 \text{ MPa} \cdot 495 \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm}}{17} = 809,18 \text{ N}$$

$$F_y = \frac{\sigma_y \cdot Q \cdot \Delta}{n^{\circ} \text{ riv}} = 561 \text{ N}$$

► ELEMENTO RIQUADRO INFERIORE: speculare al sup.

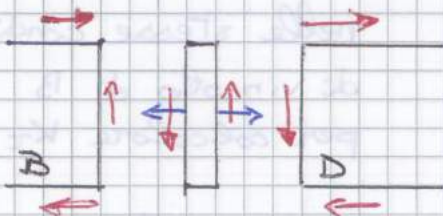
► ELEMENTO RIQUADRO INTERFACCIA C-B



$$F_y = \frac{(\tau_{soll}(B) - \tau_{soll}(C)) \cdot b \cdot \Delta}{8} = 202,12 \text{ N}$$

$$F_x = \frac{(\sigma_x(B) - \sigma_x(C)) \cdot b \cdot \Delta}{8} = 202,12 \text{ N}$$

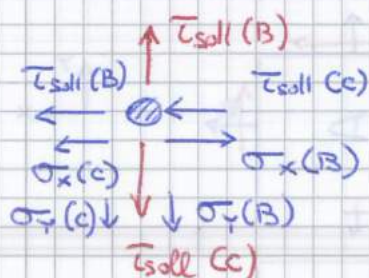
► ELEMENTO RIQUADRO INTERFACCIA B-D



$$F_y = \frac{(\tau_{soll}(D) - \tau_{soll}(B)) \cdot b \cdot \Delta}{8} = 202,4 \text{ N}$$

$$F_x = 202,4 \text{ N}$$

- RIVETTO 1: angolare, superiore sinistro



$$F_x = \frac{(\sigma_x(B) - \sigma_x(C)) \cdot b \cdot \Delta}{8} + \frac{(-\tau_{soll}(C) - \tau_{soll}(B)) \cdot Q \cdot \Delta}{17} = 202,12 \text{ N} - 1404,34 \text{ N} = -1202,22 \text{ N}$$

$$C_{ne} = \begin{bmatrix} \triangle 1 & 1 & 2 \\ \triangle 2 & 2 & 3 \\ \triangle 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

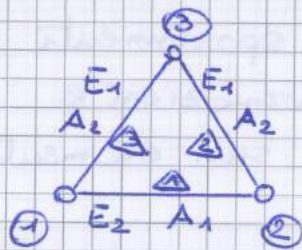
NOTA: si sarebbe anche potuto mettere un riferimento locale diverso tra gli elementi  
 es.  $\triangle 3$  poteva avere il 1° nodo in  $\textcircled{1}$  e il 2° in  $\textcircled{3}$

MATRICE AREE - MATERIALI  $C_{pe}$

Associa ad ogni elemento una certa sezione e un certo materiale

Supponendo di avere due materiali: 1:  $E_1 = 73000$   
 2:  $E_2 = 105000$

e due diverse sezioni: 1:  $A_1 = 500$   
 2:  $A_2 = 650$



$$C_{pe} = \begin{bmatrix} \triangle 1 & 1 & 2 \\ \triangle 2 & 2 & 1 \\ \triangle 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

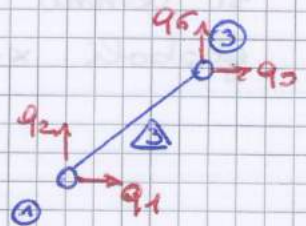
MATRICE DI CONNECTIVITY GDL-ELEMENTO  $C_{se}$

Bisogna creare una convenzione per ordinare in indice e ogni grado di libertà

(cioè ogni spostamento nodale)

(questa è già una fase di calcolo preliminare ma agevole poi l'inserimento dei dati su vincoli e carichi)

**NODO n:** gdl orizzontale  $\rightarrow 2n-1$   
 " verticale  $\rightarrow 2n$



$\triangle$  A OGNI ELEMENTO SI ASSOCIANO 4 gdl

$$C_{ne}(3,:) = [3 \ 1] \rightarrow C_{se}(3,:) = [2 \cdot 3 - 1 \quad 2 \cdot 3 \quad 1 \cdot 2 - 1 \quad 1 \cdot 2]$$

$$C_{se} = \begin{bmatrix} \triangle 1 & q_{oriz \ nodo 1} & q_{vert. 1} & q_{oriz 2} & q_{vert 2} \\ \triangle 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \triangle 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \triangle 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

OPERAZIONE IMPLEMENTATA IN UN CICLO FOR SUL NUMERO DI ELEMENTI PRESENTI NELLA STRUTTURA  
 $ne = size(C_{ne}, 1)$

La matrice  $[K]$  avrà dimensioni  $gdl \times gdl$

FUNCTION:

INPUT:  $L(e)$ ,  $A(e)$ ,  $E(e)$ ,  $\cos\alpha(e)$ ,  $\sin\alpha(e)$

Matrice di rigidità dell'elemento in rif. LOCALE  $[K^{(e)}] = \frac{E A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matrice di rigidità dell'elem. in rif. GLOBALE  $[K^{G(e)}] = [\Lambda^{(e)}]^T [K^{(e)}] [\Lambda^{(e)}]$

dove  $[\Lambda^{(e)}]$  è la matrice di rotazione

$$[\Lambda^{(e)}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

### ASSEMBLAGGIO

Una volta che si ha  $[K^{(e)}]$  per ogni elemento si assembla la matrice di rigidità complessiva:

$$[K] = \begin{bmatrix} [4 \times 4] \\ \vdots \\ [4 \times 4] \end{bmatrix}$$

per ogni elemento la  $[K^{(e)}]$  si riferisce sia su righe sia su colonne ai  $gdl$  globali

$$[K^{(1)}] = \dots \begin{bmatrix} 1g & 2g & 3g & 4g \\ 1g & 2g & 3g & 4g \\ 3g & 4g & 5g & 6g \\ 4g & 5g & 6g & 6g \end{bmatrix} \quad [K^{(2)}] = \begin{bmatrix} 3g & 4g & 5g & 6g \\ 3g & 4g & 5g & 6g \\ 5g & 6g & 6g & 6g \\ 6g & 6g & 6g & 6g \end{bmatrix}$$

→  $Cse(e, :)$  dà gli indici dei  $gdl$  per ogni elemento

→ elemento per elemento si vanno a sommare le  $[K^{(e)}]$

### - VETTORE DEI CARICHI

si possa da  $F_n = \begin{bmatrix} 5 & -4e5 \\ 6 & 5e5 \end{bmatrix}$  e  $F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4e5 \\ 5e5 \end{Bmatrix}$

### RISOLUZIONE DEL SISTEMA $[K]\{q\} = \{F\} + \{R_v\}$

#### - PARTIZIONAMENTO

$i_b$  = vettore\*  $gdl$  bloccati

\*indici

$m_i$  - vett = vettore indici  $gdl$  ordinati

$i_l$  = vettore\*  $gdl$  LIBERI

$$i_l = \text{setdiff}(m_i, i_b)$$

→ MATRICE DEI RISULTATI D  $n_e \times 4$

$$D = \begin{matrix} \text{elem} & E & \sigma & N \\ \begin{matrix} \triangle 1 \\ \triangle 2 \\ \triangle 3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$E \rightarrow D(e,2) = \frac{1}{L^{(e)}} [-1 \ 1] [A^{(e)}] \cdot q(i,e)$$

$$\sigma \rightarrow D(e,3) = E (C_{pe}(e,2)) * D(e,2);$$

$$N \rightarrow D(e,4) = A (C_{pe}(e,1)) * D(e,3);$$

$$(\sigma = E \cdot \epsilon)$$

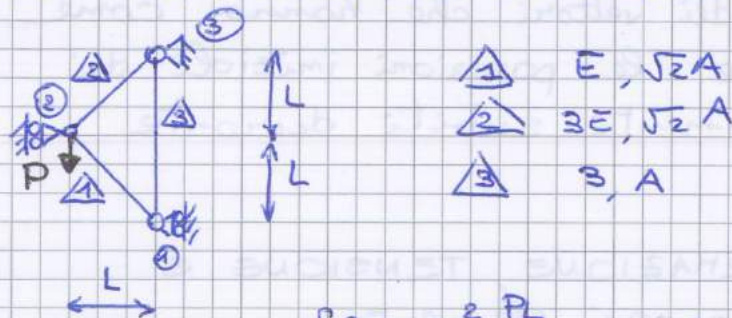
varia da elem. a elemento

$$(N = A \cdot \sigma = EAE)$$

Il test è stato condotto sulla semplice struttura vista all'inizio della relazione.

Una volta verificato che il programma funziona si è utilizzato questo per la risoluzione della struttura indicata nel testo.

TEST n° 2 : struttura da esercizio esame 02/02/2010



Risultati:  
calcolo a mano

$$\begin{cases} q_2 = -\frac{2}{7} \frac{PL}{EA} \\ q_4 = -\frac{4}{7} \frac{PL}{EA} \end{cases}$$

$$\{R_v\} = P \begin{Bmatrix} -\frac{1}{7} \\ 5/7 \\ 6/7 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Assegnati:  $E = 73000 \text{ MPa}$      $A = 500 \text{ mm}^2$      $L = 1000 \text{ mm}$   
 $P = 700 \text{ 000 N}$

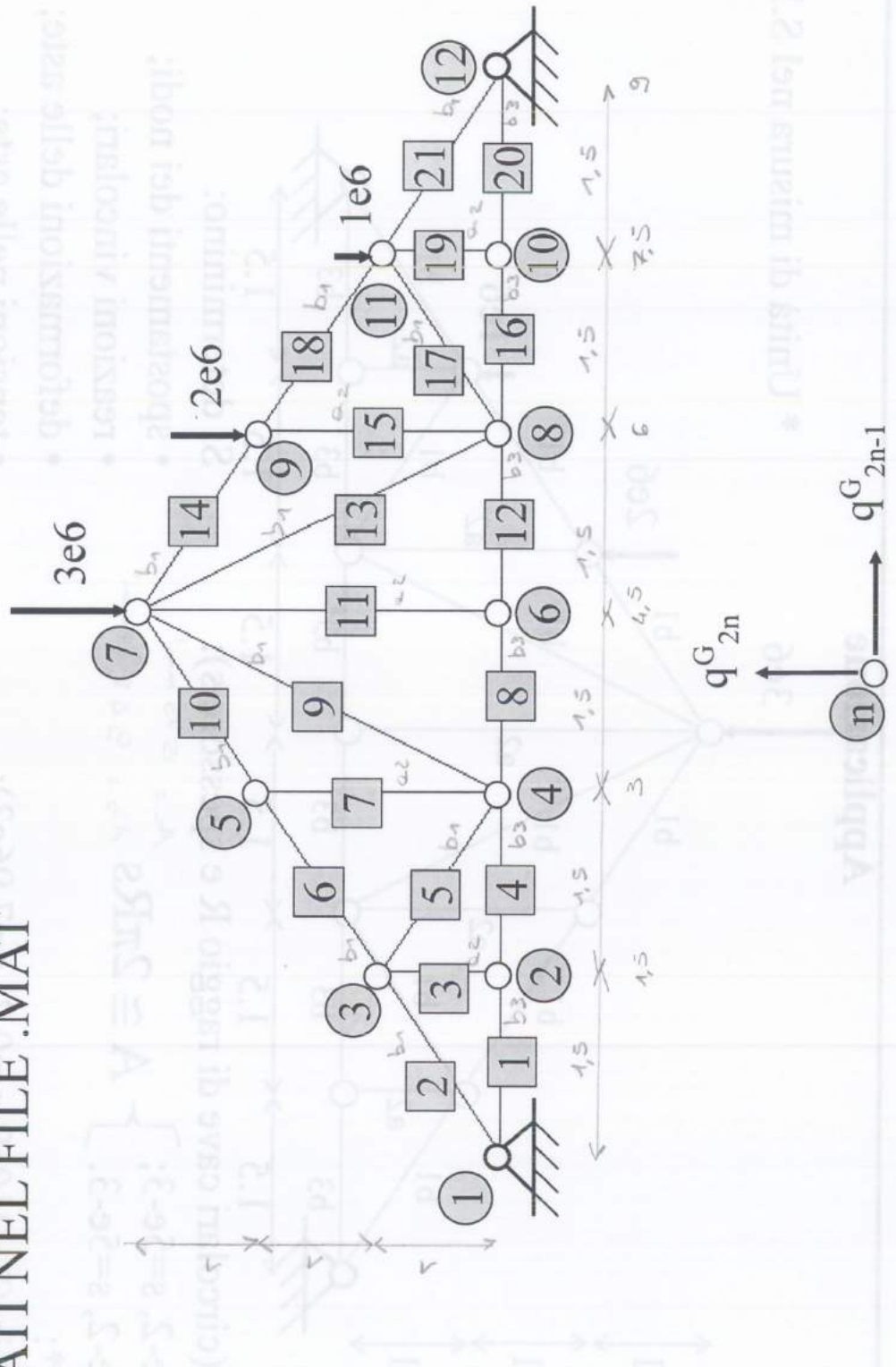
OUTPUT CALCOLO

$$\begin{aligned} q_2 &= -5,4795 \text{ mm} = -\frac{2}{7} \frac{PL}{EA} \\ q_4 &= -10,959 \text{ mm} = -\frac{4}{7} \frac{PL}{EA} \end{aligned}$$

$$\{R_v\} = \begin{Bmatrix} -1e+05 \\ 0 \\ -5e+05 \\ 0 \\ 6e+05 \\ 7e+05 \end{Bmatrix}$$

RISULTATI ESATTI => PROGRAMMA FUNZIONA.

# INDICAZIONE DEI NUMERI DI NODI, ELEMENTI E GRADI DI LIBERTA' PER INTERPRETARE I RISULTATI SALVATI NEL FILE .MAT



**COMMENTI:**

1. Osservando la tabella con i risultati relativi ai singoli elementi si deduce che i carichi applicati alla struttura sono quanto mai eccessivi. Le tensioni sono nettamente superiori a quelle di rottura dei materiali utilizzati: la tensione di rottura dell'acciaio è intorno ai 120 kg/mm<sup>2</sup>, cioè 1180 Mpa e nell'elemento 13 (in acciaio) la tensione è di oltre il doppio quella di rottura.

Che i carichi fossero eccessivi si deduceva già osservando il diagramma della struttura deformata: leggendo anche i valori della deformazione degli elementi si leggono degli allungamenti del 2,8%, dato assolutamente non realistico per una struttura metallica.

2. Gli output del programma scritto in Matlab sono comunque esatti in quanto le soluzioni sono state confrontate con quelle fornite dal Professore. In precedenza i test sul programma con le strutture più semplici hanno dato esito positivo.

**3. INSERIMENTO DEI DATI:**

@ Dove è richiesto un vettore riga bisogna digitare: [ 1 5 8 12]

@Dove è richiesto un vettore in caso si abbia un solo numero bisogna mettere ugualmente le parentesi: [5].

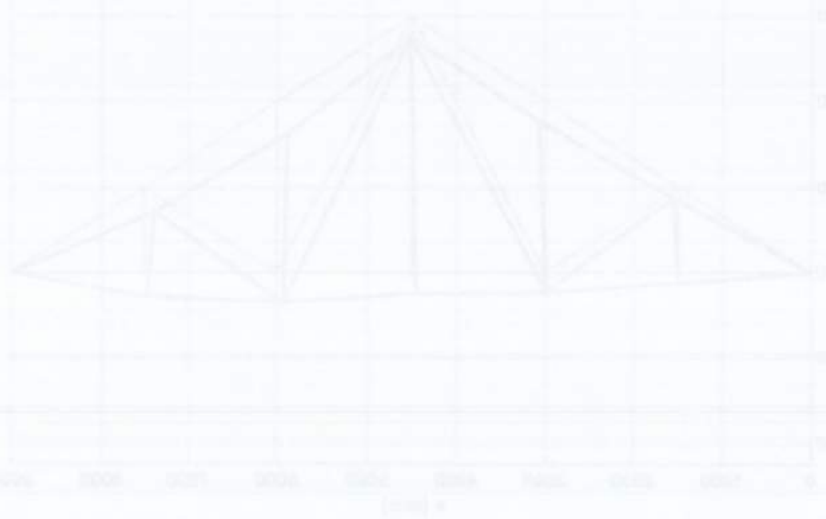
@Inserimento matrice: [1 2 5 8;2 4 7 9;1 2 3 9]

@I dati inseriti devono avere unità di misura coerenti: N, mm, mm<sup>2</sup>, MPa

Se si usano differenti unità di misura assicurarsi comunque che i dati siano coerenti tra loro.

1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1
6	1	1	1
7	1	1	1
8	1	1	1
9	1	1	1
10	1	1	1
11	1	1	1
12	1	1	1
13	1	1	1
14	1	1	1
15	1	1	1
16	1	1	1
17	1	1	1
18	1	1	1
19	1	1	1
20	1	1	1
21	1	1	1
22	1	1	1
23	1	1	1
24	1	1	1
25	1	1	1
26	1	1	1
27	1	1	1
28	1	1	1
29	1	1	1
30	1	1	1
31	1	1	1
32	1	1	1
33	1	1	1
34	1	1	1
35	1	1	1
36	1	1	1
37	1	1	1
38	1	1	1
39	1	1	1
40	1	1	1
41	1	1	1
42	1	1	1
43	1	1	1
44	1	1	1
45	1	1	1
46	1	1	1
47	1	1	1
48	1	1	1
49	1	1	1
50	1	1	1
51	1	1	1
52	1	1	1
53	1	1	1
54	1	1	1
55	1	1	1
56	1	1	1
57	1	1	1
58	1	1	1
59	1	1	1
60	1	1	1
61	1	1	1
62	1	1	1
63	1	1	1
64	1	1	1
65	1	1	1
66	1	1	1
67	1	1	1
68	1	1	1
69	1	1	1
70	1	1	1
71	1	1	1
72	1	1	1
73	1	1	1
74	1	1	1
75	1	1	1
76	1	1	1
77	1	1	1
78	1	1	1
79	1	1	1
80	1	1	1
81	1	1	1
82	1	1	1
83	1	1	1
84	1	1	1
85	1	1	1
86	1	1	1
87	1	1	1
88	1	1	1
89	1	1	1
90	1	1	1
91	1	1	1
92	1	1	1
93	1	1	1
94	1	1	1
95	1	1	1
96	1	1	1
97	1	1	1
98	1	1	1
99	1	1	1
100	1	1	1

1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1
6	1	1	1
7	1	1	1
8	1	1	1
9	1	1	1
10	1	1	1
11	1	1	1
12	1	1	1
13	1	1	1
14	1	1	1
15	1	1	1
16	1	1	1
17	1	1	1
18	1	1	1
19	1	1	1
20	1	1	1
21	1	1	1
22	1	1	1
23	1	1	1
24	1	1	1
25	1	1	1
26	1	1	1
27	1	1	1
28	1	1	1
29	1	1	1
30	1	1	1
31	1	1	1
32	1	1	1
33	1	1	1
34	1	1	1
35	1	1	1
36	1	1	1
37	1	1	1
38	1	1	1
39	1	1	1
40	1	1	1
41	1	1	1
42	1	1	1
43	1	1	1
44	1	1	1
45	1	1	1
46	1	1	1
47	1	1	1
48	1	1	1
49	1	1	1
50	1	1	1
51	1	1	1
52	1	1	1
53	1	1	1
54	1	1	1
55	1	1	1
56	1	1	1
57	1	1	1
58	1	1	1
59	1	1	1
60	1	1	1
61	1	1	1
62	1	1	1
63	1	1	1
64	1	1	1
65	1	1	1
66	1	1	1
67	1	1	1
68	1	1	1
69	1	1	1
70	1	1	1
71	1	1	1
72	1	1	1
73	1	1	1
74	1	1	1
75	1	1	1
76	1	1	1
77	1	1	1
78	1	1	1
79	1	1	1
80	1	1	1
81	1	1	1
82	1	1	1
83	1	1	1
84	1	1	1
85	1	1	1
86	1	1	1
87	1	1	1
88	1	1	1
89	1	1	1
90	1	1	1
91	1	1	1
92	1	1	1
93	1	1	1
94	1	1	1
95	1	1	1
96	1	1	1
97	1	1	1
98	1	1	1
99	1	1	1
100	1	1	1



```

60
61 %numero di elementi
62 ne=size(Cne,1);
63
64 %numero di gdl
65 ni=max(max(Cse));
66 %vettore riga dei gdl ordinati
67 ni_vett=[1:1:ni]';
68
69 %Lunghezza, seno, coseno elementi
70 for e=1:ne
71     L(e,1)=sqrt((Pn(Cne(e,2),1)-Pn(Cne(e,1),1))^2+...
72               (Pn(Cne(e,2),2)-Pn(Cne(e,1),2))^2);
73     ca(e,1)=(Pn(Cne(e,2),1)-Pn(Cne(e,1),1))/L(e);      %cos alfa elem.
74     sa(e,1)=(Pn(Cne(e,2),2)-Pn(Cne(e,1),2))/L(e);      %sen alfa
75 end
76
77
78 %=====
79 %CALCOLO DI [K] e [F] per l'intera struttura
80 %=====
81 K=zeros(ni);
82 for e=1:ne
83     Ke=matrice_rigidezza_e(L(e),ca(e),sa(e),A(Cpe(e,1)),E(Cpe(e,2)));
84     I=Cse(e,:);
85     K(I,I)=K(I,I)+Ke;
86 end
87
88 F=zeros(ni,1);
89 for i=1:size(Fn,1)
90     F(Fn(i,1))=Fn(i,2);
91 end
92 vettore_carichi=F
93
94 %ordiniamo in ordine crescente il vettore degli indici dei gdl bloccati
95 ib=sort(ib);
96 %vettore dei gdl liberi
97 il=setdiff(ni_vett,ib);
98
99 %Partizioni di K
100 Kff=K(il,il);
101 Kfv=K(il,ib);
102 Kvf=K(ib,il);
103 Kvv=K(ib,ib);
104
105 %Partizioni di F
106 Fef=F(il);
107 Fev=F(ib);
108
109 %=====
110 %RISOLUZIONE: CALCOLO STATICO DI SPOSTAMENTI E REAZIONI VINCOLARI
111 %=====
112 Qf=Kff\Fef;
113 Rv=Kvf*Qf-Fev;
114
115 Q(il,1)=Qf;
116 Q(ib,1)=zeros(length(ib),1);
117
118 R(il,1)=zeros(length(il),1);
119 R(ib,1)=Rv;

```



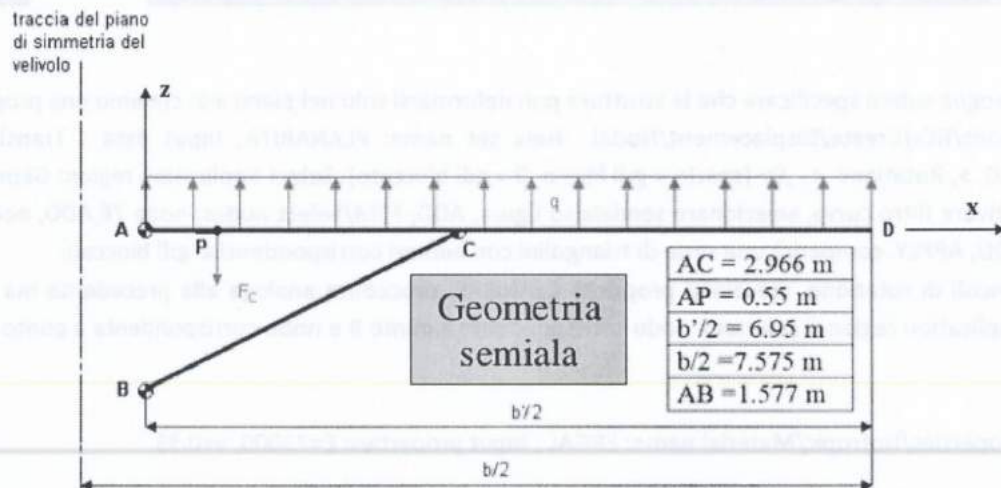
Matteo Cappo s209364

**ESERCITAZIONE 7****Analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D in ambiente MSC/PATRAN®-NASTRAN®**

Lo scopo di questa esercitazione è l'analisi statica della semiala di esercitazione 1 (vedi testo) con il software FEM Patran-Nastran e il confronto con la soluzione analitica calcolata in esercitazione 1.

L'esercitazione si divide in più fasi:

1. Creazione della mesh in Patran
2. Analisi utilizzando Nastran
3. Interpretazione dei risultati e confronto con la soluzione analitica del problema

**1. Creazione della mesh****Geometria**

Si considera la semiala come un insieme di elementi BEAM (elementi trave) e la controventatura come un unico elemento ROD (elemento asta). Segue la procedura con cui si è costruito il modello:

- Geometry/Create/Point : si inseriscono le coordinate dei punti notevoli della struttura in particolare A, B, C, D. Si aggiungono i punti utili per l'applicazione dei carichi e l'analisi statica: P[550 0 0], X1[1977 0 0], X2[2472 0 0]
- Geometry/Create/Curve/ Method/point, option/2 points: si creano le curve geometriche (segmenti di retta) che uniscono i punti della semiala. E' utile suddividere la semiala in segmenti geometrici in modo da essere sicuri che quando si creerà la mesh si avranno dei nodi sui punti geometrici di interesse
- Meshing/Create/Mesh/Type: curve/Topology: bar 2 /Curve list : selezionare le curve della semiala. Deselezionare automatic calculation e inserire in Global Edge Length il valore 100 (si vogliono elementi più piccoli del 400 che propone il programma).  
Per visualizzare i nodi Home/Misc/Node size.
- Meshing/Create/Element/Edit/ Shape: bar/Topology: bar 2: si vuole ora creare l'elemento ROD della controventatura. Deselezionare auto execute. Node 1: selezionare il punto geometrico 1 (cioè

Si può inoltre definire un elenco di 4 punti sulla sezione trasversale, su cui calcolare le tensioni (si inseriscono i 4 vertici della trave e si attribuiscono le loro coordinate ai punti C,D,E,F vedi testo): questi si inseriscono sempre nella finestra di input data. Si termina tutto con select application region: filtro curve, selezionare semiala.

### Carichi

- Loads/Bcs/Create/Force/Nodal, Name: CARBURANTE, Input data: Force <0,0,-7063>, Select Application Region: selezionare nodo corrispondente a punto P.
- Loads/Bcs/Create/Distributed Load, Name:PESO, Target element type: 1D. Input data: Distr. Load <0,0,-1.067>, Select Application Region/Geometry/Select curves: selezionare semiala
- **Carico di portanza:** carico distribuito verso alto + momento torcente distribuito  
Loads/Bcs/Create/Distributed Load, Name:PESO,Target element type: 1D. Input data: Distr. Load <0,0,6.527 > ,Distr Moment <541.7,0,0 > . Select Application Region/Geometry/Select curves: selezionare semiala

## 2. Analisi

Si procede ora all'analisi statica della struttura.

- Analysis/Analysis deck/Solution type: linear static/Solution parameters/Results Output Format: selezionare XBD e PRINT/Subcases/Output Requests: DISPLACEMENTS,STRESS,SPCFORCES,STRAIN,FORCES.

Si può quindi effettuare l'analisi con Nastran, facendogli aprire il file semiala\_1d.bdf. optional keywords "prog=edu auth=edu arch=32". In output Nastran darà vari file tra cui uno in .f06 e uno in .xdb. Aprire il file di testo (.f06) e cercare la parola "Fatal": se la ricerca dà esito negativo significa che non si sono verificati errori.

- Aprire i risultati in Patran: Analysis/Access Results/Attach XDB/Select results file : selezionare file (.xdb). Translation Parameters: selezionare Rotationals Nodal Results.

Si può perciò ottenere una visualizzazione grafica dei risultati.

Per verificare ciò è sufficiente aprire il file (.f06) e andare nella sezione STRESS DISTRIBUTION IN BAR ELEMENTS. Si guarda il nodo 21 (corrispondente a x1) e il nodo 27 (corrispondente a x2):

		SXC				AXIAL	
21	0.000	<u>-1.269070E+02</u>	-1.269070E+02	7.424239E+01	7.424239E+01	<u>-3.367421E+01</u>	4.056819E+01 - 1.605812E+02
26	0.000	<u>-1.707793E+02</u>	-1.707793E+02	9.990836E+01	9.990836E+01	<u>-3.367421E+01</u>	6.623415E+01 - 2.044535E+02

SXC:  $\sigma_{xx}$  nel punto C della sezione trasversale dovuta a flessione

AXIAL:  $\sigma_{xx}$  nel punto C della sezione trasversale dovuta a sforzo normale

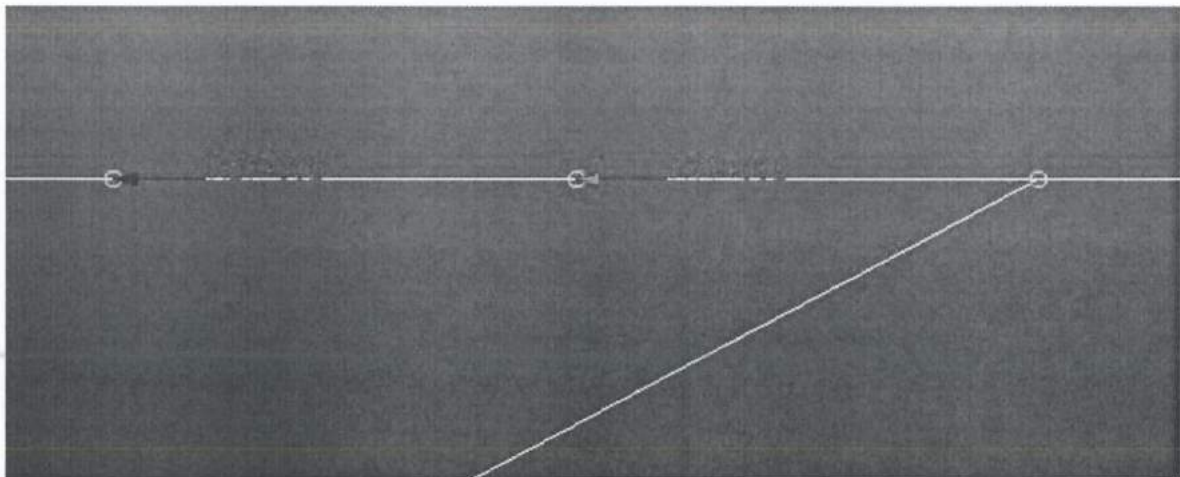
$$\sigma_{xx} = \sigma(\text{flessione}) + \sigma(\text{compressione})$$

Perciò:

$$\sigma_1 \text{ FEM} = -160,57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 \text{ FEM} = -204,45 \text{ MPa}$$

Si può dire che la soluzione FEM dà un'approssimazione ottima di quella analitica.



pannelli compressi, quindi la sezione contribuirà integralmente a sopportare le  $\sigma_{xx}$ . Inoltre la freccia massima risulterà minore avendo la struttura maggior rigidità flessionale.

Cambiando schema di modellizzazione, si schematizza la struttura con:

- Correnti: travi con sezione quadrata
- Pannelli: piastre soggette a deformazione membranale e a flessione;
- Centine: piastre di rigidità molto elevata (in particolare quella che si collega con la controventatura)

L'asta di controventatura viene ancora schematizzata con un elemento ROD: sarà necessario come unico parametro geometrico l'area  $A$ , pari a  $471.3 \text{ mm}^2$ .

## Geometria

### Sezione trasversale

- Geometry/Create/Point: si inseriscono le coordinate sei correnti: [0 -250 -110], [0 0 -110], [0 250 -110], [0 -250 110], [0 0 110], [0 250 110].
- Geometry/Transform/Point/Translate/Direction Vector: <2966 0 0>, selezionare i 6 punti della sezione. Poiché la semiala è composta da due tratti, ovvero A-C e C-D, rispettivamente suddivisi in 6 e 8 campate, si ricostruisce il punto C di congiunzione tra i due gruppi di campate semplicemente trasladando la base prima generata.
- Correnti: Geometry/Create/Curve/Point selezionare i due punti estremi di ogni corrente (N.B. mantenere stesso ordine di selezione).
- Pannelli: Geometry/Create/Surface/Curve selezionare due correnti per volta mantenendo lo stesso ordine: i due superiori da sx a dx, i due inferiori da sx a dx e poi quelli laterali, da sotto a sopra.
- Centine: Geometry/Create/Surface/Curve selezionare la linea inferiore e poi quella superiore, prima a sx poi a dx. Creare solo la centina destra della campata.
- Geometry/Transform/Point/Translate/Direction Vector: <494.3 0 0>, (Repeat Count: 5). Ripetere per 5 volte l'operazione per realizzare le campate da A a C, ognuna con lunghezza 494.3 mm. Eseguire 7 volte per realizzare le campate da C a D, di lunghezza 498 mm. Con tutte le traslazioni ogni campata avrà centina di sinistra e centina di destra, ad eccezione della prima campata che si modellerà in maniera differente in seguito.

## Mesh

Si procede con la discretizzazione della struttura finora disegnata.

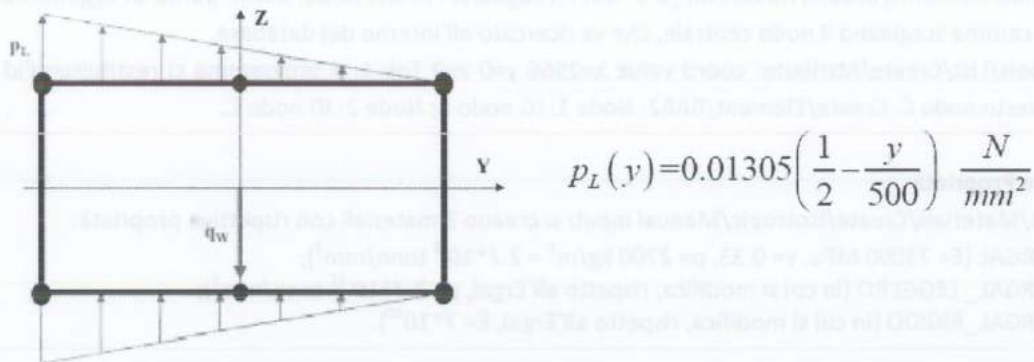
- Correnti: Meshing/Create/Mesh/Type: curve/Topology: bar 2 /Curve list : selezionare le 6 curve dei correnti della semiala. Deselezionare automatic calculation e inserire in Global Edge Length il valore 50 in modo da avere 10 elementi per ogni campata.
- Centine: Meshing/Create/Mesh/Surface : Deselezionare automatic calculation e inserire il valore 50; in questo modo si evita che gli elementi 2D non coincidano con quelli 1D e si avrà continuità strutturale. Se l'ordine con cui si è creata la geometria è stato rispettato, le normali delle superfici dovrebbero coincidere: Verify/Elements/Normals/Draw Normal Vectors. Come previsto, i pannelli di dorso e ventre presentano normale concorde (superficie sinistra: Top, superficie destra: Bottom).
- Meshing/Transform/Element/Translate, <498 0 0>, Repeat Count: 7, selezionare campate esterne. Ripetere con quelle interne con <494.3 0 0> e Repeat Count; 5.

In coordinata 2966, cioè in corrispondenza del punto C, dove si incontra le serie di campate interne e esterne, vi sono molti nodi coincidenti (Show/Node/Location): vengono eliminati con il comando

## Carichi

### Portanza

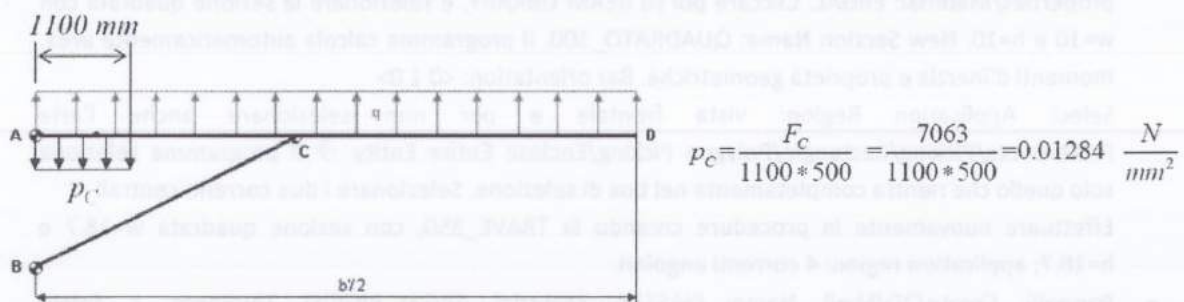
La portanza è modellizzata come una pressione agente su dorso e ventre, con distribuzione triangolare in  $y$  (uniforme in  $x$ ), analiticamente ricavabile dalla successiva relazione:



- Loads/BCs/Properties/Fields/Create/Spatial/PCL Function. Scalar Function: ( 0.01305\*(0.5-Y'/500)); Name : PORTANZA.
- Loads/BCs/Create/Pressure/Element Uniform Target Type: 2D, Name: PORTANZA:  
dovrà essere applicata alla bottom surface di dorso e ventre, poiché tale carico distribuito è una pressione che deve spingere (a questo serve avere le normali tutte dirette nella stessa direzione!)  
Select Application Region/FEM: si seleziona il dorso e il ventre del cassone.

### Carburante

Tale carico di pressione uniforme (verso il basso, applicato quindi sulla top surface) coinvolge unicamente la porzione di cassone tra 0 e 1100 mm, con baricentro esattamente a metà (ovvero, 550mm), dato da:



Geometry/Create/Point [1100 0 200], serve poi a selezionare la regione di applicazione del campo di pressione "CARBURANTE" che si va a definire (in maniera analoga al campo di pressione di portanza).

### Peso struttura

Il peso di 210 kg è il peso complessivo della struttura della semiala più superfici di comando, cavi, leading edge ecc. Patran però calcola solo il peso di quello che si è disegnato. Per considerare un peso maggiore di quello del cassone alare allora bisogna raggirare Patran, facendogli credere che l'accelerazione sia maggiore (equivalente a dire che la struttura è soggetta a un fattore di carico a contingenza superiore al 3,6 ipotizzato):

## 2. Analisi e risultati

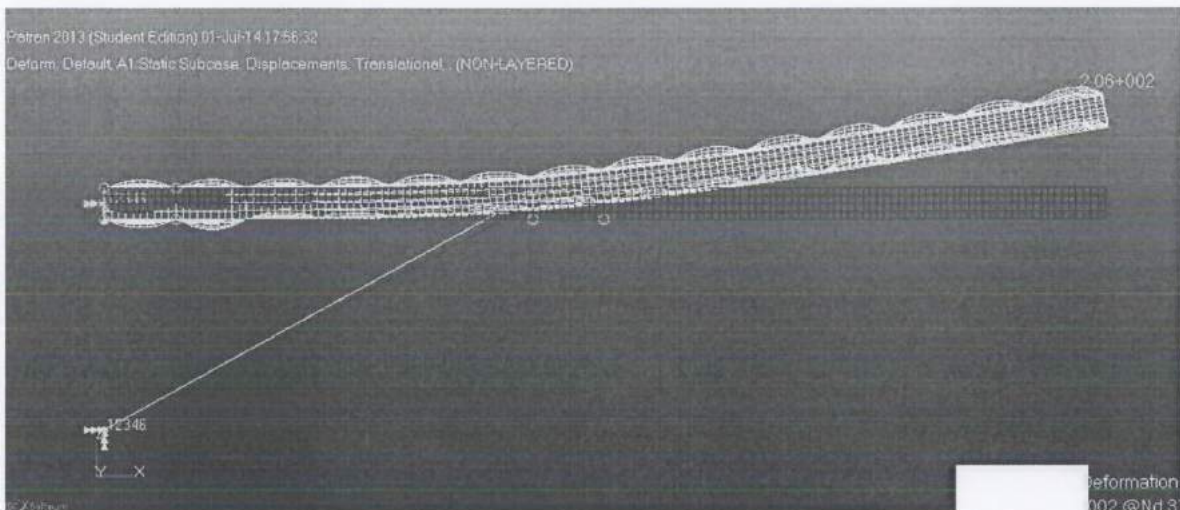
Si procede ora all'analisi statica della struttura.

- Analysis/Analysis deck/Solution type: linear static/Solution parameters/Results Output Format: selezionare XBD e PRINT/Subcases/Output Requests: DISPLACEMENTS,STRESS,SPCFORCES,STRAIN,FORCES.

Si può quindi effettuare l'analisi con Nastran, facendogli aprire il file semiala\_1d.bdf. optional keywords "prog=edu auth=edu arch=32". In output Nastran darà vari file tra cui uno in .f06 e uno in .xdb. Aprire il file di testo (.f06) e cercare la parola "Fatal": se la ricerca dà esito negativo significa che non si sono verificati errori.

- Aprire i risultati in Patran: Analysis/Access Results/Attach XDB/Select results file : selezionare file (.xdb). Translation Parameters: selezionare Rotationals Nodal Results.

Si può perciò ottenere una visualizzazione grafica dei risultati: Results/Create/Deformation, Displacements,Translational, apply



### Displacements

$(w)_{max} = 206\text{mm}$  non è relativo alla sezione terminale della semiala ma all'ingobbamento dell'ultimo dei pannelli dorsali.

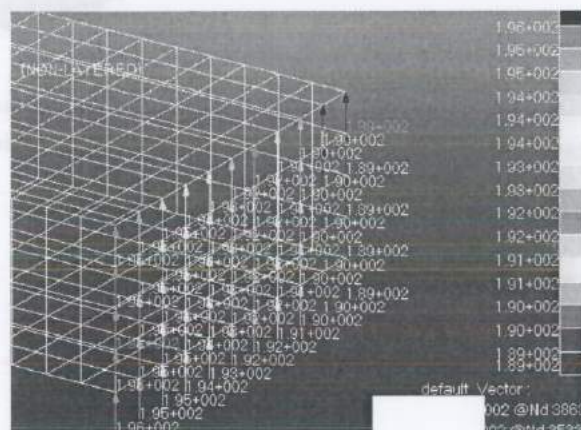
Lo spostamento verticale nella sezione di estremità è costante in direzione z ma varia tra il leading edge e il trailing edge a causa della torsione:

$$w_{LE} = 196 \text{ mm}$$

$$w_{TE} = 189 \text{ mm}$$

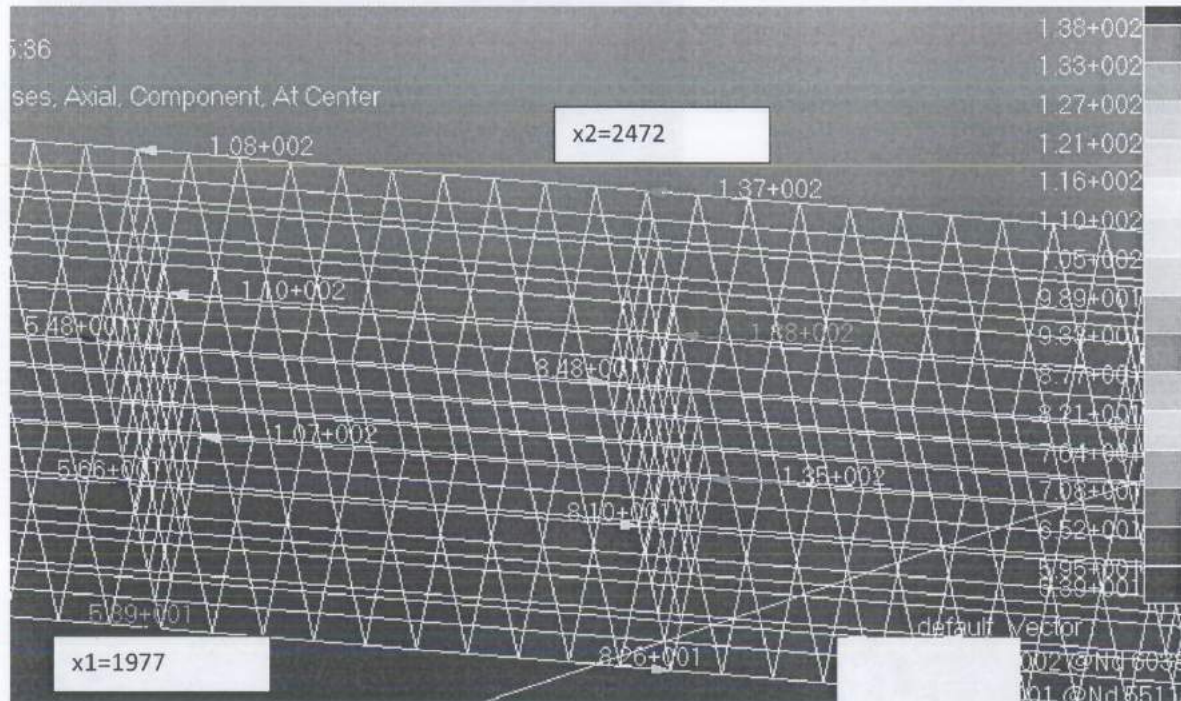
si può quindi assumere un  $w$  medio=192.5 mm.

Si noti che nell'analisi 1D con le ipotesi del semiguscio  $w$  nella sezione di estremità era  $w_{max}=215\text{mm}$ . In questa analisi la struttura ha una rigidezza flessionale maggiore poiché la sezione è interamente resistente e si conteggia interamente nei momenti d'inerzia.



### Tensioni $\sigma_{xx}$ correnti

Vanno ricercati i nodi delle sezioni  $x_1=1977$  e  $x_2=2472$  creando una list e inserendo le coordinate x.  
Una volta trovata la lista di nodi si inserisce nella node list in cui far vedere le tensioni.



Le tensioni nei correnti (schematizzati con elementi bar) si possono visualizzare come “Bar Stresses, Axial”; in questo modo si valuta il valor medio dello stress sulla sezione del corrente, valore confrontabile con i calcoli analitici e FEM 1D basati sull’ipotesi di semiguscio ideale che assume costante la tensione sulla sezione di ciascun corrente.

#### Soluzione analitica 1D

$\sigma_1$  correnti superiori= -160,67 MPa

$\sigma_2$  correnti superiori= -204,31 MPa

#### Soluzione FEM 2D (tensioni medie lungo la corda)

$\sigma_{1FEM}$  correnti superiori= -107,5 MPa

$\sigma_{2FEM}$  correnti superiori= -136 MPa

Le tensioni calcolate con l’analisi 2D sono più basse poiché c’è un’area più grande che contribuisce ad assorbirle: non si è più dovuto concentrare l’area delle sezioni resistenti dei pannelli nei booms, e si è considerata resistente a compressione tutta la sezione dei pannelli.

NOTA:

$$\{A\}^T \cdot \{A\} \cdot GJ_T = \{A\}^T \cdot \{\theta_i\}$$

Elabo  
Nel f  
isola

Eseguendo il calcolo in Matlab dopo aver importato i risultati  $F_i$  e  $w_i$  delle prove sperimentali si ottiene

$$GJ_T = 1,66 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

• Mol  
M

$$= 1,66 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2 \approx 166070 \text{ Nm}^2$$

LN

I risultati potrebbero essere diversi da una prova all'altra a causa della dispersioni dei dati e anche a causa di come è stata condotta la prova (carico aumentato e diminuito più riprese durante la stessa misurazione)

Poich

θ ≈

• Gru

## OSSERVAZIONI:

Nota

1. Durante la torsione del cassone si è potuta apprezzare visivamente l'ingobbarsi dei pannelli dorsali, che quindi lavoravano in una condizione di post-buckling.

FASE

2. Il set di rosette (estensimetri) disposte sopra la baia 1, 2 e 6 del cassone (sui pannelli dorsali) misurava le deformazioni in direzione ASSIALE e a  $\pm 45^\circ$ .

FASE

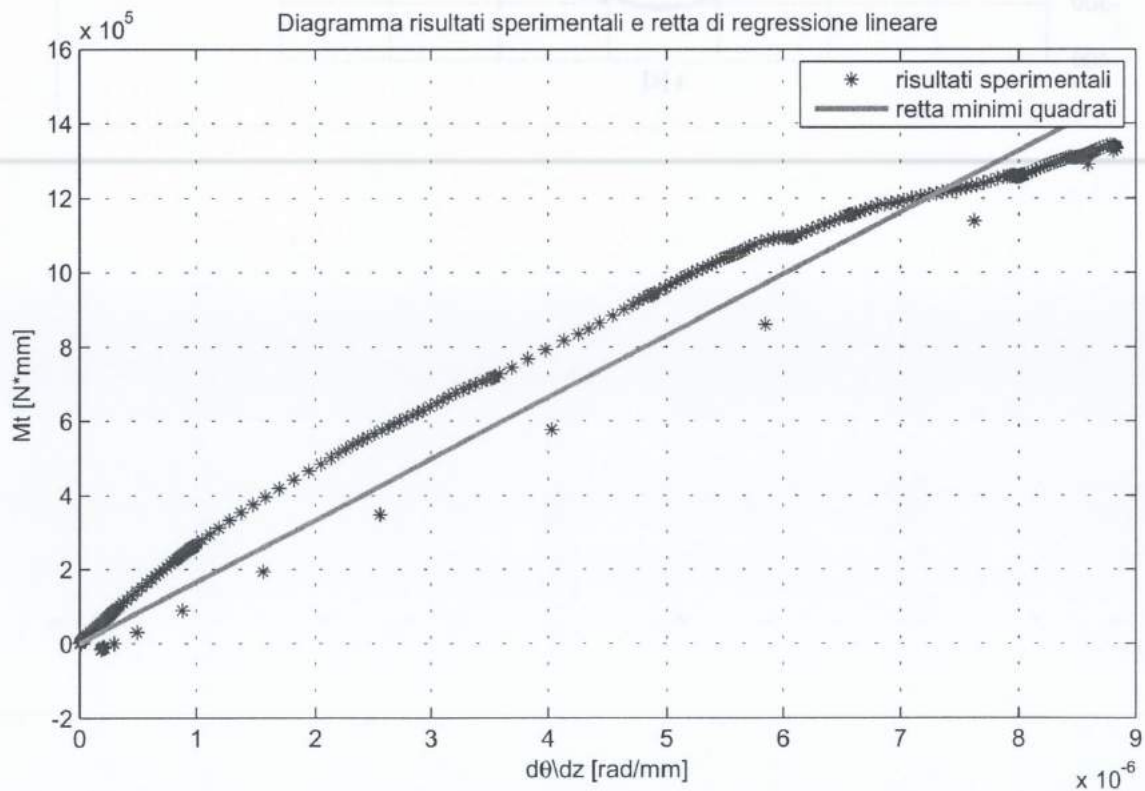
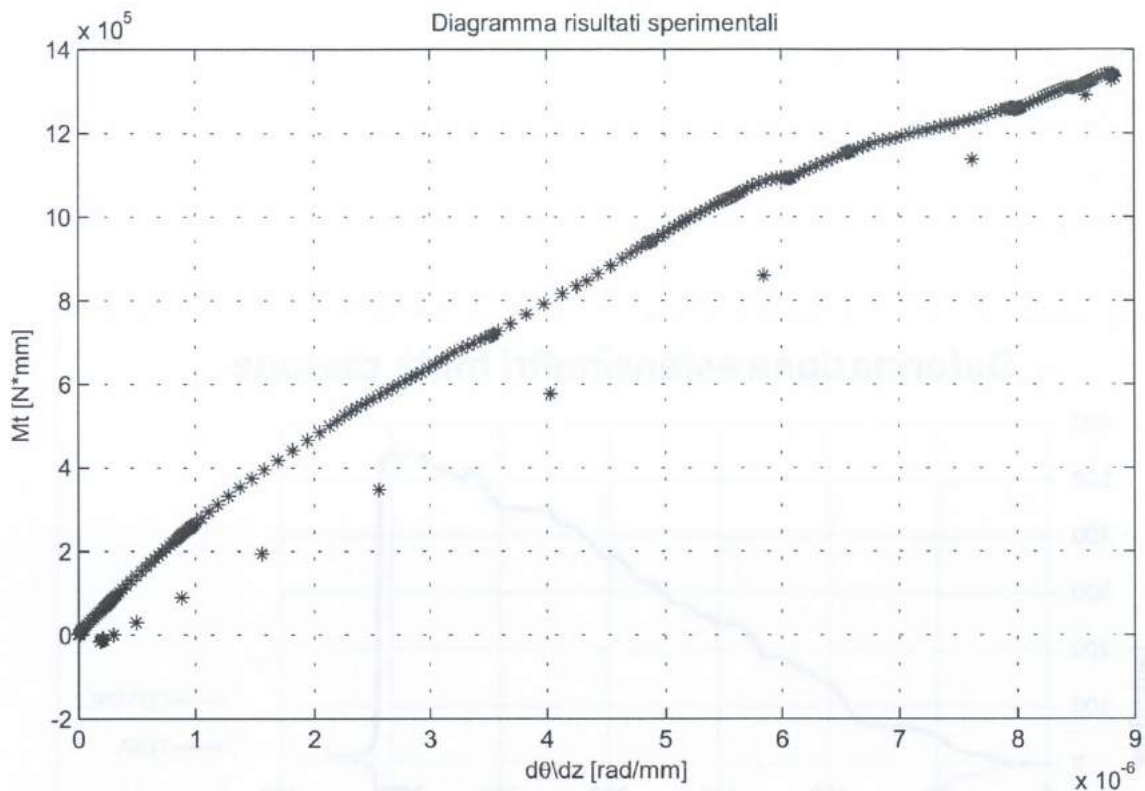
Dol  
dipen  
torsio

■ DEF. ASSIALE  $\epsilon_{xx} \neq 0$ . Se il cassone fosse stato sottoposto a torsione pura la deformazione assiale sarebbe stata nulla.

Come già detto però il cassone non era solo una torsione pura (poiché la rotazione avveniva attorno al centro di taglio) ma una FLESSO-TORSIONALE: da qui  $\epsilon_{xx} \neq 0$

Nella

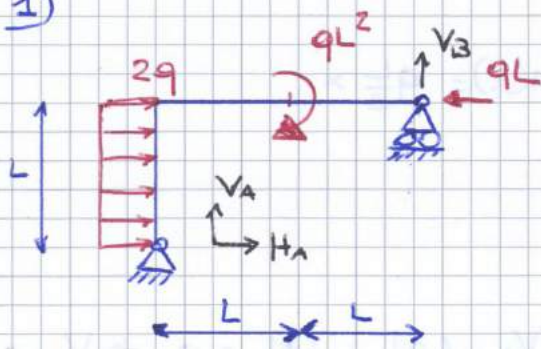




# TNM : IN QUESTO ESAE BISOGNA FARLI SPANNOMETRICI

14/02/2012

1)



$$\rightarrow) 2qL + H_A - qL = 0$$

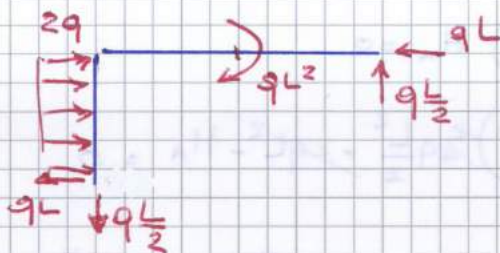
$$\rightarrow H_A = -qL$$

$$\uparrow) V_A + V_B = 0$$

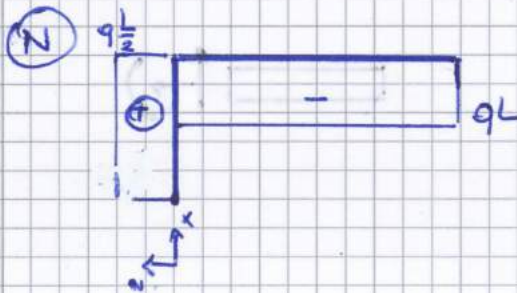
$$A \circ) 2q \frac{L^2}{2} + qL^2 - qL^2 - 2L V_B = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{qL}{2}$$

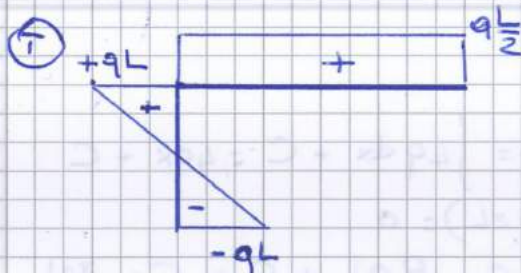
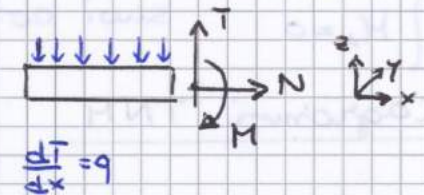
$$\Rightarrow V_A = -\frac{qL}{2}$$



## Diagrammi TNM



## CONVENZIONE



## TRATTO VERTICALE

$$T(x) = \int 2q dx + C$$

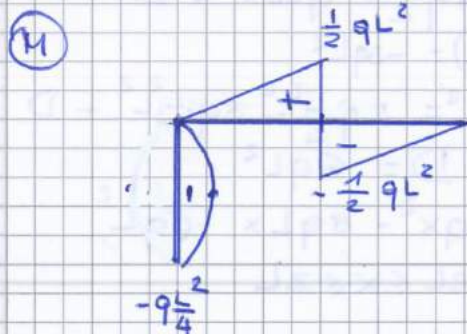
$$T(x=0) = -qL$$

$$\rightarrow T(x) = q(2x - L)$$

## TRATTO ORIZZONTALE:

⚠ LO SFORZO NORMALE SUL TRATTO VERTICALE ⚠  
AGISCE DA TAGLIO SUL TRATTO ORIZZONTALE

$$T(x) = +\frac{qL}{2} \quad \bullet \text{ NEGLI INCROCI}$$



## VERTICALE

$$M(x) = 2 \cdot q \frac{x^2}{2} - qLx + C$$

$$M(L) = 0 \rightarrow C = 0$$

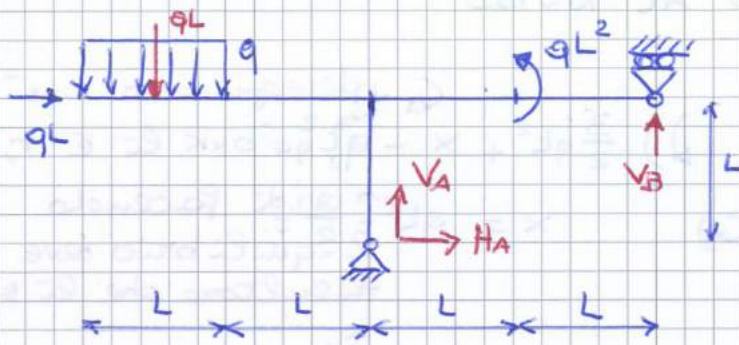
$$M(x) = q(x^2 - Lx) \quad M\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{qL^2}{4}$$

## ORIZZ.

$$M(x) = \frac{qL}{2}x + C$$

$$M(x=L) = -qL^2$$

12/02/2009



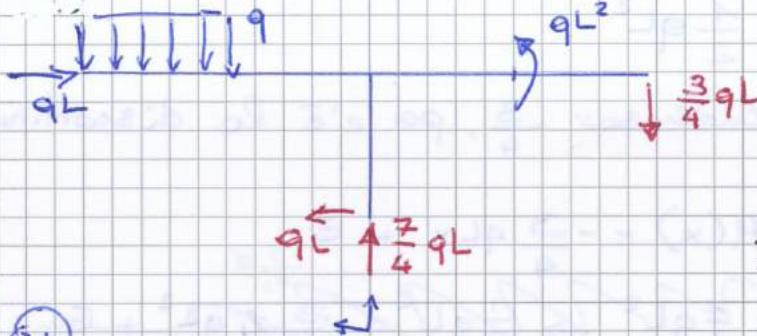
$$\rightarrow) qL + H_A = 0 \rightarrow H_A = -qL$$

$$\uparrow) -qL + V_A + V_B = 0$$

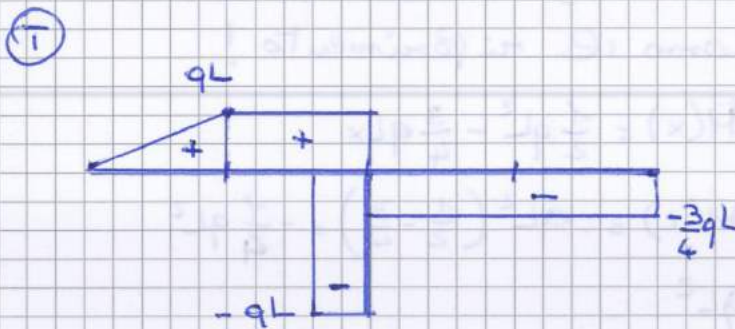
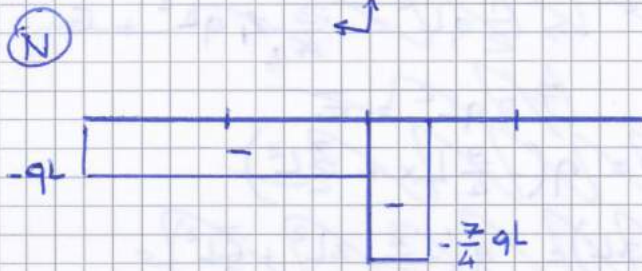
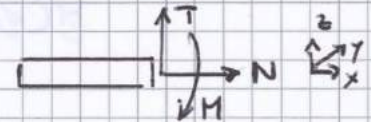
$$\curvearrowright) qL^2 - qL \cdot \frac{3}{2}L - qL^2 - V_B \cdot 2L = 0$$

$$V_B = -\frac{3}{4}qL$$

$$V_A = -V_B + qL = +\left(\frac{3}{4} + 1\right)qL = \frac{7}{4}qL$$



Diagrammi TNM



$$T(x) = qx + C$$

$$T(x=0) = 0 \rightarrow T(x) = qx$$

⊕ NODO:  $\uparrow T$   
 LI È COME SE CI FOSSE UNA FORZA CONCENTRATA  
 $\uparrow \frac{7}{4}qL$

→ DISCONTINUITÀ TAGUO!

LO SFORZO DI COMPRESSIONE SPINGE SUI!

$$qL - \frac{7}{4}qL = -\frac{3}{4}qL$$

$$0 < x < L: M(x) = \frac{qx^2}{2}$$

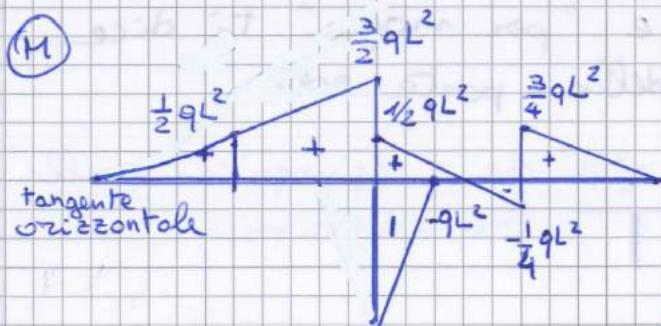
$$L < x < 2L: M(x) = qLx + C$$

$$M(x=L) = \frac{1}{2}qL^2$$

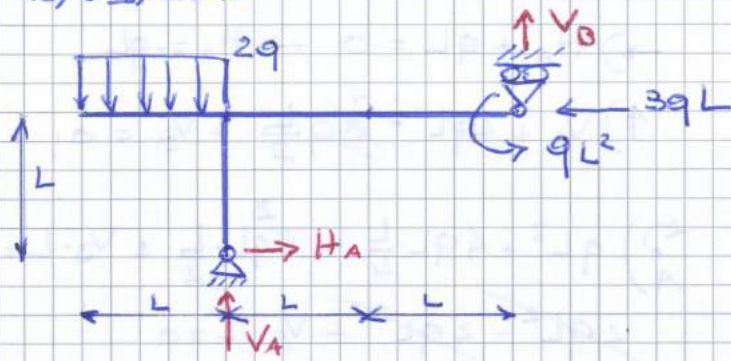
$$\rightarrow \frac{1}{2}qL^2 = qL^2 + C \rightarrow C = -\frac{1}{2}qL^2$$

$$M(x) = q(Lx - \frac{1}{2}L^2)$$

NODO: EQUILIBRIO →



18/09/2010



$$\rightarrow) H_A - 3qL = 0$$

$$\rightarrow H_A = 3qL$$

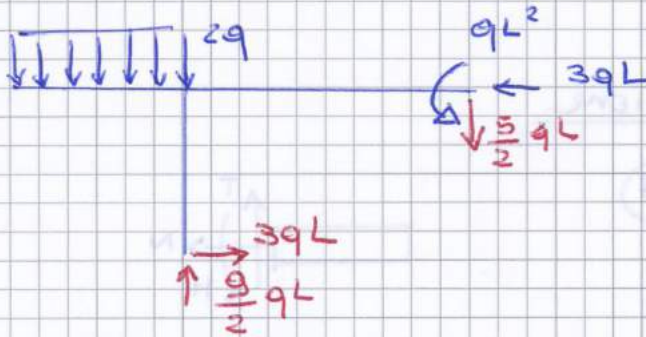
$$\uparrow) V_A + V_B - 2qL = 0$$

$$\circlearrowleft) 2q \frac{L^2}{2} + qL^2 + 3qL^2 + 2V_B \cdot L = 0$$

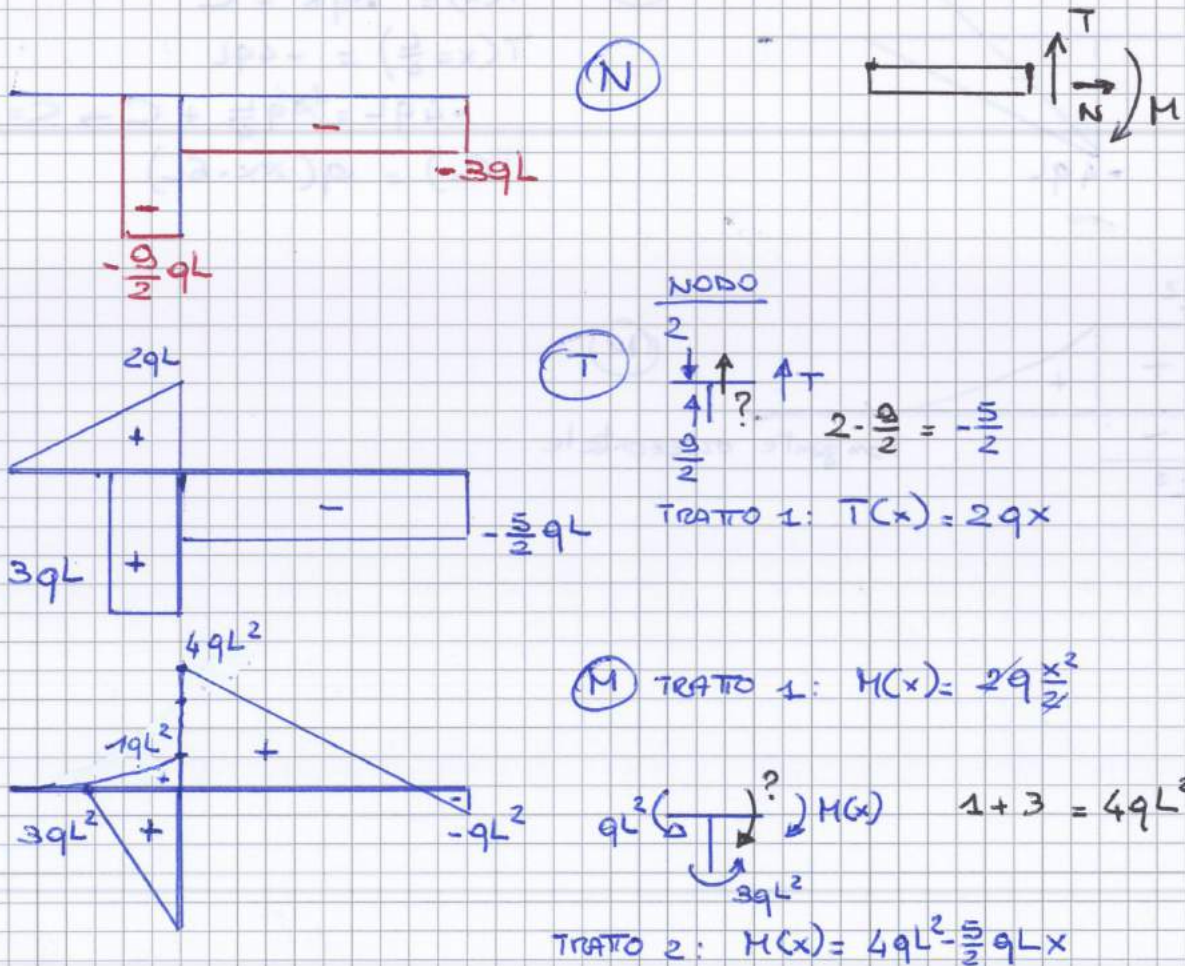
$$- 5qL^2 = 2V_B L$$

$$\rightarrow V_B = -\frac{5}{2}qL$$

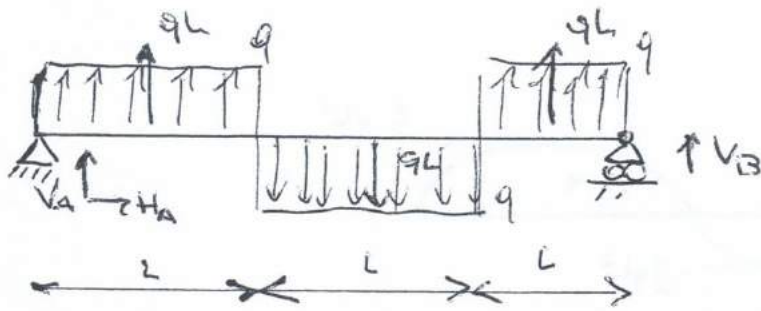
$$V_A = 2qL - V_B = \left(2 + \frac{5}{2}\right)qL = \frac{9}{2}qL$$



### CARATTERISTICHE DI SOLECCITAZIONE



INVENTATA (idea simile a un esame)



STRUTTURA  
SIMMETRICA  
(anche nei carichi)

→ TAGLIO ANTISIMMETRICO  
(→ simmetrico rispetto  
all'origine)

→ MOMENTO SIMMETRICO

→  $H_A = 0$

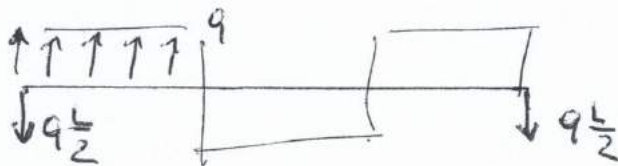
↑)  $V_A + qL - qL + qL + V_B = 0$

↺)  $qL \frac{L^2}{2} - qL \cdot \frac{3}{2}L + qL \cdot \frac{5}{2}L + V_B \cdot 3L = 0$

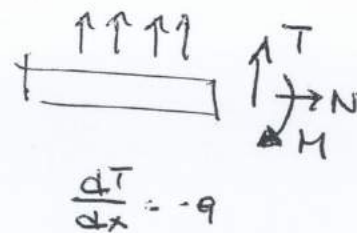
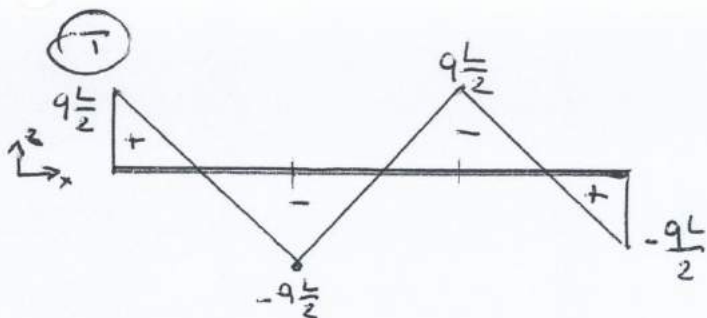
$qL \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \right) = -3V_B$

$-\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} qL = V_B \rightarrow V_B = -\frac{qL}{2}$

$V_A + qL - \frac{qL}{2} = 0 \rightarrow V_A = -\frac{qL}{2}$



$N = 0$



TRATTO 1:  $T(x) = -qx + C$

$T(x=0) = \frac{qL}{2} \rightarrow \rightarrow T(x) = q(-x + \frac{L}{2})$

TRATTO 2:  $T(x) = +qx + D$

$T(x=L) = -\frac{qL}{2} \rightarrow -\frac{qL}{2} = qL + C \rightarrow C = -\frac{3}{2}qL$

$T(x) = q(x - \frac{3}{2}L)$

TRATTO 3:  $T(x) = -qx + E$

$T(x=2L) = q(2L - \frac{3}{2}L) = \frac{qL}{2}$

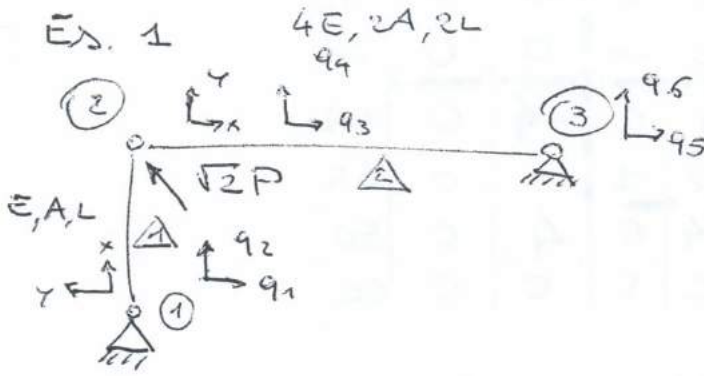
$T(x=2L) = \frac{qL}{2}$

$\frac{qL}{2} = q(2L) + E \rightarrow E = +\frac{5}{2}L \rightarrow T(x) = q(-x + \frac{5}{2}L)$   
 $T(x=3L) = -\frac{qL}{2}$

# FEM

## PROCEDURA

- I. Per ogni elemento calcolare  $[K_e^{(e)}]$  e  $[A^{(e)}]$  usando  $[A^{(e)}]$
- II. ASSEMBLAGGIO
- III. VETTORE CARICHI
- IV. PARTIZIONE
- V. RISOLUZIONE SISTEMA
- VI. DEFORMAZIONI E TENSIONI



### I. ELEMENTO (1)

$$[K_e^{(1)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(1)} = 90^\circ$$

$$[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

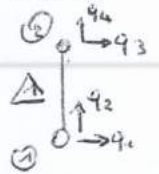
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^{(1)}] = [A^{(1)T}] [K_e^{(1)}] [A^{(1)}]$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1q \\ 2q \\ 3q \\ 4q \end{matrix}$$

GRADI DI LIBERTÀ GLOBALI al singolo elemento



### II. ELEMENTO (2)

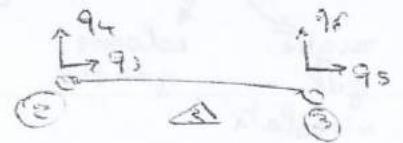
$$\alpha^{(2)} = 0$$

$$[K_e^{(2)}] = \frac{4EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^{(2)}] = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3q \\ 4q \\ 5q \\ 6q \end{matrix}$$



## V RISOLUZIONE

$$[K_{FF}] \cdot \{q_F\} = \{F_F\}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ P \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} q_3 &= -\frac{PL}{4EA} \\ q_4 &= \frac{PL}{EA} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \{q_F\} = \frac{PL}{4EA} \begin{Bmatrix} -1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$[K_{VF}] \cdot \{q_F\} = \{R\}$$

$$\frac{PL}{4EA} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \rightarrow \{R\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ 4 \cdot P \\ \end{matrix}$$

4x2      2x1 →      4x1

$$\rightarrow \{R\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## VI DEFORMAZIONI E TENSIONI (SU ELEMENTI)

$$\{\epsilon\} = [D] \{d^{(e)}\} = [D] ([N^{(e)}] \{q^{(e)}\}) = [B^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

$$[N^{(e)}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad [B^{(e)}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICE DERIVATE FUNG. FORMA

Ora bisogna passare di nuovo DA GLOBALE A LOCALE

$$\{q_{loc}^{(e)}\} = [A^{(e)}] \{q_G^{(e)}\}$$

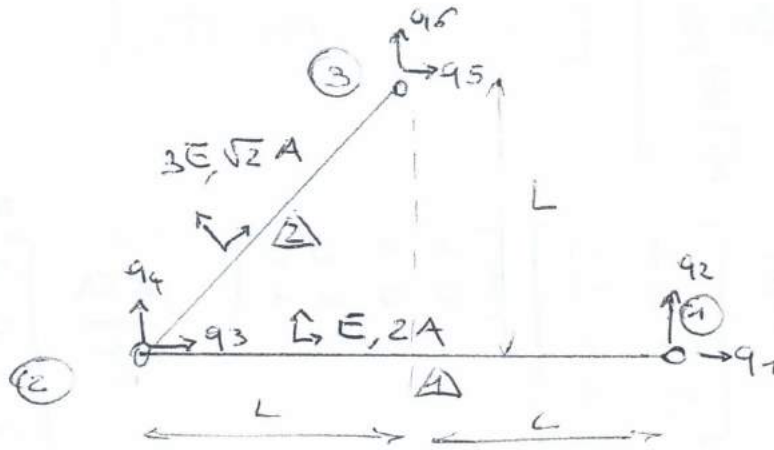
$$\rightarrow \epsilon^{(e)} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} [A^{(e)}] \{q^{(e)}\}$$

⚠ è solo  $\epsilon_x \rightarrow$  non si mette simbolo di vettore!  $\{\}$

$$\epsilon^{(e)} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{ciclo}} \frac{PL}{4EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Esercizio 2

[12/01/2009]



I. MATRICI  $[K_e^{(e)}]$  e  $[K_G^{(e)}]$

$\triangle$   $[K_e^{(1)}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$        $[\Lambda^{(1)}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$   
 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$[K_G^{(1)}] = [\Lambda^{(1)}]^T [K_e^{(1)}] [\Lambda^{(1)}]$

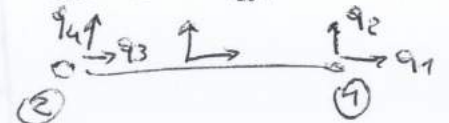
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{EA}{L} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1q \\ 2q \\ 3q \\ 4q \end{matrix}$



DEVONO ESSERE ORDINATI SECONDO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO GLOBALE!!!

$\hookrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3q \\ 4q \\ 1q \\ 2q \end{matrix}$



$\triangle$   $\alpha^{(2)} = 45^\circ \rightarrow [\Lambda^{(2)}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$[K_e^{(2)}] = \frac{3\sqrt{2}EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$[K_G^{(2)}] = \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$



$$[K_{FF}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3q \\ 4q \end{matrix}$$

$$[K_{VF}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1q \\ 2q \\ 5q \\ 6q \end{matrix}$$

IV RISOLUZIONE

$$[K_{FF}] \{q_F\} = \{F_F\}$$

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FV} \\ K_{VF} & K_{VV} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_F \\ q_V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_F \\ R \end{Bmatrix}$$

$\downarrow$   
 $\{0\}$

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{EA}{2L} (5q_3 + 3q_4) = 0 \rightarrow q_3 = -\frac{3}{5}q_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{EA}{2L} (3q_3 + 3q_4) = -P \rightarrow -\frac{9}{5}q_4 + 3q_4 = -\frac{2PL}{EA} \end{cases}$$

$$\rightarrow -\frac{3+15}{5} q_4 = -\frac{2PL}{EA}$$

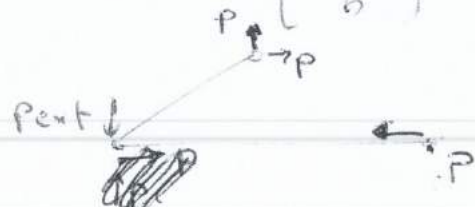
$$q_4 = -\frac{5}{3} \frac{PL}{EA} = -\frac{5}{3} \frac{PL}{EA}$$

$$q_3 = -\frac{3}{5} \cdot -\frac{5}{3} \frac{PL}{EA} = \frac{PL}{EA}$$

$$\{q_F\} = \frac{PL}{3EA} \begin{Bmatrix} 3 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

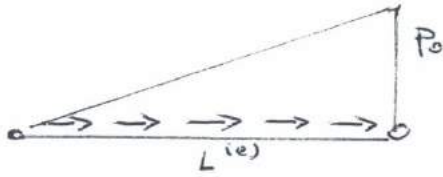
$$[K_{VF}] \{q_F\} = \{R\}$$

$$\frac{PL}{3EA} \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ -5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \rightarrow R = \frac{P}{6} \begin{Bmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{Bmatrix}$$



12/02/2009

4) Calcolare vettore carichi nodali elemento ROD con carico assiale distribuito linearmente da s a p<sub>0</sub>.



$$p(\xi) = \xi \cdot p_0$$

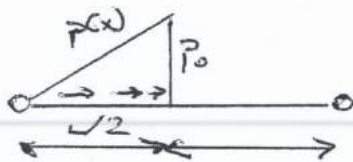
$$\{F^{(e)}\} = L \int_0^1 [N(\xi)]^T \cdot p(\xi) d\xi$$

$$= L \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} \xi \cdot p_0 d\xi = p_0 L \int_0^1 \begin{bmatrix} \xi - \xi^2 \\ \xi^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$= p_0 L \begin{bmatrix} \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \\ \frac{\xi^3}{3} \end{bmatrix}_0^1 = p_0 L \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} = p_0 L \begin{Bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix}$$

16/09/2010

2) Calcolare vettore carichi nodali



$$p(\xi) = \begin{cases} 2\xi p_0 & 0 < \xi < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < \xi < 1 \end{cases}$$

$$\{F^{(e)}\} = \int_{L^{(e)}} [N(x)]^T \{p_e\} dx = L \int_0^{\frac{1}{2}} [N(\xi)] \cdot p(\xi) d\xi =$$

$$= L \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} \cdot 2\xi p_0 d\xi = 2p_0 L \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \xi - \xi^2 \\ \xi^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$= 2p_0 L \begin{bmatrix} \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \\ \frac{\xi^3}{3} \end{bmatrix}_0^{\frac{1}{2}} = 2p_0 L \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \end{Bmatrix} = 2p_0 L \begin{Bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{24} \end{Bmatrix}$$

$$= p_0 L \begin{Bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \end{Bmatrix}$$

### III. VETTORE CARICHI NODALI

Nelle aste i carichi sui nodi sono ovviamente carichi nodali ...

$$\{F^{(e)}\} = \{0 \ 0 \ 0 \ -P \ 0 \ 0\}^T$$

### IV. SISTEMA e PARTIZIONE

$$[K] \{q^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \{R_v\}$$

$$\begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vf} \\ K_{fv} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_v\} \\ \{q_f\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_v\} \\ \{F_f\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{R_v\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

GdL vincolati  $\rightarrow 1, 2, 5, 6$

GdL free  $\rightarrow 3, 4$

$$\rightarrow [K_{ff}] = K(3:4, 3:4)$$

$$[K_{ff}] \{q_f\} = \{F_f\}$$

$$\frac{EA}{25L} \begin{bmatrix} 57 & 24 \\ 24 & 18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

$$(I) \frac{57EA}{25L} q_3 + \frac{24EA}{25L} q_4 = 0 \rightarrow q_3 = -\frac{24}{25} \cdot \frac{25}{57} q_4 = -\frac{24}{57} q_4$$

$$(II) \frac{EA}{25L} \cdot 24 \cdot \left(-\frac{24}{57}\right) q_4 + \frac{18EA}{25L} q_4 = -P$$

$$\frac{EA}{L} \left( \frac{-24^2 + 18 \cdot 57}{25 \cdot 57} \right) q_4 = -P \rightarrow q_4 = -\frac{19}{6} \frac{PL}{EA}$$

$$q_3 = -\frac{19}{6} \frac{PL}{EA} \cdot \left(-\frac{24}{57}\right) = +\frac{76}{57} \frac{PL}{EA} = \frac{4}{3} \frac{PL}{EA}$$

$$\begin{cases} q_3 = \frac{4}{3} \frac{PL}{EA} \\ q_4 = -\frac{19}{6} \frac{PL}{EA} \end{cases}$$

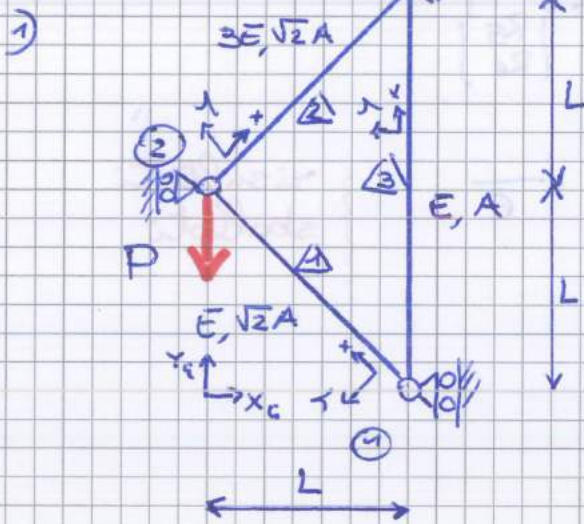
### REAZIONI VINCOLARI

$$[K_{vf}] \{q_f\} = \{F_v\} + \{R_v\}$$

$$[K_{vf}] =$$

$$\frac{EA}{25L} \begin{bmatrix} 39 & 49 \\ 19 \\ 29 \\ 59 \\ 69 \end{bmatrix}$$

01/02/2010



ELEMENTO 1

$$[K_e^{(1)}] = \frac{E\sqrt{2}A}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(1)} = 45^\circ$$

PERÒ OCCHIO!!  
DIPENDE DA COME  
SONO MESSI I NODI  
SE  $L$  e  $S > 0 / < 0$ !

$$\sin \alpha^{(1)} = \frac{(y_2 - y_1)L}{\sqrt{2}L} = + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha^{(1)} = \frac{(x_2 - x_1)L}{\sqrt{2}L} = - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha^{(1)} = 135^\circ \text{ IN REALTÀ!}}$$

$$[\Lambda^{(1)}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$[K_G^{(1)}] = [\Lambda^{(1)}]^T [K_e^{(1)}] [\Lambda^{(1)}] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2EA}{4L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1G \\ 2G \\ 3G \\ 4G \end{matrix}$$

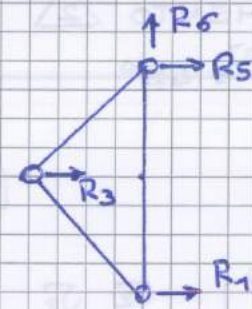
ELEMENTO 2

$$[K_e^{(2)}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha = 90^\circ \quad [\Lambda^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^{(2)}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1G \\ 2G \\ 3G \\ 4G \end{matrix}$$

$$\begin{cases} q_2 = -\frac{2}{7} \frac{PL}{EA} \\ q_4 = -\frac{4}{7} \frac{PL}{EA} \end{cases}$$



$$[K_{VF}] \cdot \{q_F\} = \{F_V\} + \{R_V\}$$

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2G & 4G \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1G \\ 3G \\ 5G \\ 6G \end{matrix} \cdot \frac{PL}{EA} \begin{Bmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

$$R_1 = \frac{EA}{2L} \cdot \frac{PL}{EA} \left( \frac{2}{7} - \frac{4}{7} \right) = \frac{P}{2} \cdot \left( -\frac{2}{7} \right) = -\frac{1}{7} P$$

$$R_3 = \frac{P}{2} \left( -\frac{2}{7} - \frac{8}{7} \right) = \frac{P}{2} \left( -\frac{10}{7} \right) = -\frac{5}{7} P$$

$$R_5 = \frac{P}{2} \left( +\frac{12}{7} \right) = +\frac{6}{7} P$$

$$R_6 = \frac{P}{2} \left( \frac{2}{7} + \frac{12}{7} \right) = P$$

$$\{R_V\} = P \begin{Bmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ \frac{6}{7} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

### DEFORMAZIONI e TENSIONI

Per avere la deformazione  $\epsilon_{xx}$  dell'elemento servono gli spostamenti NODALI IN RIFERIMENTO LOCALE

$$\triangle \{U^{(1)}\} = [A^{(1)}] \{U_g^{(1)}\}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{7} \frac{PL}{EA} \\ 0 \\ -\frac{4}{7} \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{Bmatrix} \frac{PL}{EA}$$

$$2 \times 4 \times 4 \times 1 = 2 \times 1$$

$$\epsilon_{xx}^{(1)} = [B^{(1)}] \{q_e^{(1)}\} = [B^{(1)}] [A^{(1)}] \{q_g^{(1)}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}L} [-1 \ 1] \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{Bmatrix} \frac{PL}{EA}$$

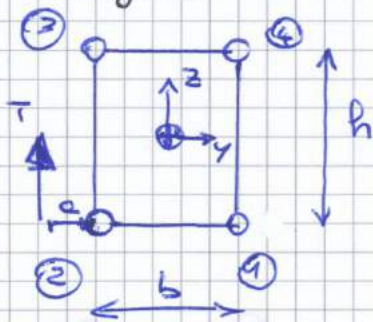
$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{7} - \frac{4}{7} \right) \frac{P}{EA} = -\frac{1}{7} \frac{P}{EA}$$

$$[N] = \left[ 1 - \frac{x}{\sqrt{2}L} \quad \frac{x}{\sqrt{2}L} \right]$$

⚠ Lunghezza elemento!

# SEMIGUSCIO IDEALE

- SEZIONE CHIUSA: 4 correnti + 4 pannelli
- Calcolare flussi di taglio e posizione centro di taglio.



$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$$

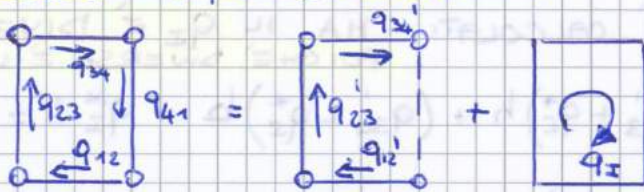
Incremento di sforzo normale:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{T}{I_y} \cdot z_i \cdot A_i \quad I_y = 4 \left(\frac{b}{2}\right)^2 A = Ah^2$$

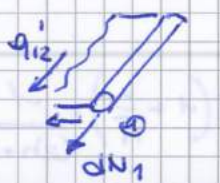
$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{dN_2}{dx} = \frac{T}{Ah^2} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) \cdot A = -\frac{T}{2h}$$

$$\frac{dN_3}{dx} = \frac{dN_4}{dx} = \frac{T}{Ah^2} \cdot \frac{b}{2} \cdot A = \frac{T}{2h}$$

## METODO "Apro e chiudo"



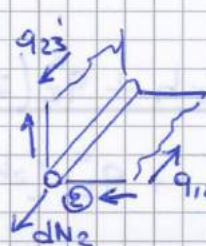
## Equilibri ai correnti



$$q_{12}' = -\frac{dN_1}{dx} = +\frac{T}{2h}$$



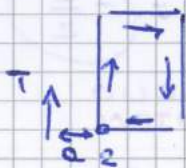
$$q_{34}' = \frac{dN_4}{dx} = \frac{T}{2h}$$



$$q_{23}' = -\frac{dN_2}{dx} + q_{12}' = -\frac{dN_2}{dx} - \frac{dN_1}{dx} = \frac{T}{2h} + \frac{T}{2h} = \frac{T}{h}$$

$$\begin{cases} q_{12} = q_{12}' + q_c \\ q_{23} = q_{23}' + q_c \\ q_{34} = q_{34}' + q_c \\ q_{41} = q_c \end{cases}$$

## Eq. risultante momenti polo 2

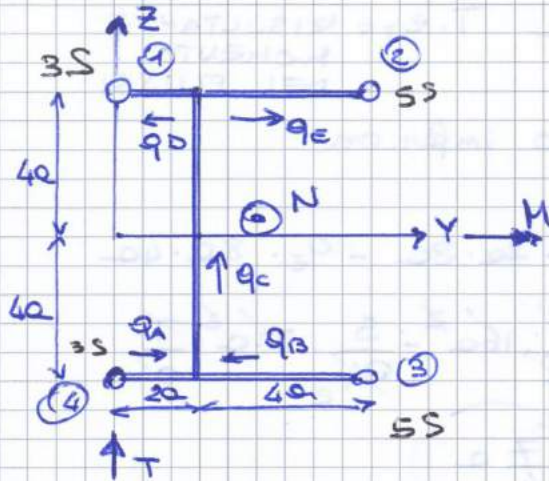


$$T \cdot a = q_{34} \cdot b \cdot h + q_{41} \cdot h \cdot b = (q_{34}' + q_c)bh + q_c bh$$

$$T \cdot e = \frac{T}{2h} \cdot bh + 2q_c bh$$

$$\rightarrow q_c = \left(T \cdot a - \frac{Tb}{2}\right) \frac{1}{2bh} \rightarrow q_c = \frac{T}{2h} \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\right)$$

2/09/2008



$A_1 = 3S \quad A_2 = 5S \quad A_3 = 5S \quad A_4 = 3S$

Calcolare:

- $q_{xx_i}$
- $q_i$
- C.T.

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_{ai}}{A_{TOT}} = \frac{0 \cdot 3S + 4a \cdot 5S + 4a \cdot 5S + 0 \cdot 3S}{16S} = \frac{40aS}{16S} = \frac{5a}{2}$$

$$Z_G = \frac{\sum A_i \cdot z_{ai}}{A_{TOT}} = \frac{3S \cdot 4a + 5S \cdot 4a + (-3S \cdot 4a) - 5S \cdot 4a}{16S} = 0$$

SIMMETRICA

• Momento d'inerzia

$$I_y = 2(3S + 5S) \cdot (4a)^2 = 2 \cdot 8S \cdot 16a^2 = 256S a^2$$

• TENSIONI NORMALI

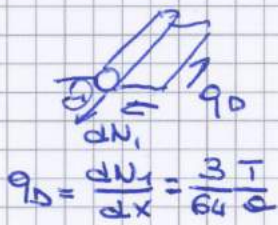
$$\sigma_{xx_1} = \frac{N}{16S} + \frac{M}{256S a^2} \cdot 4a = \frac{N}{16S} + \frac{M}{64aS} = \sigma_{xx_2}$$

$$\sigma_{xx_3} = \frac{N}{16S} + \frac{M}{256S a^2} \cdot (-4a) = \frac{N}{16S} - \frac{M}{64aS} = \sigma_{xx_4}$$

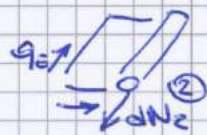
■ FLUSSI DI TAGLIO

Equilibri correnti

Gradienti:  $\frac{dN_i}{dx} = \frac{T}{I_y} \cdot S_i \cdot z_i$



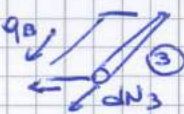
$$q_D = \frac{dN_1}{dx} = \frac{3T}{64a}$$



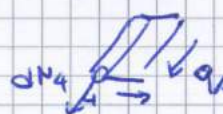
$$q_E = \frac{dN_2}{dx} = \frac{5T}{64a}$$

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{T}{256a^2S} \cdot 3S \cdot 4a = \frac{3T}{64a}$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \frac{T}{256a^2S} \cdot 5S \cdot 4a = \frac{5T}{64a}$$



$$q_B = -\frac{dN_3}{dx} = +\frac{5T}{64a}$$

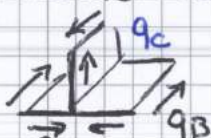


$$q_A = -\frac{dN_4}{dx} = +\frac{3T}{64a}$$

$$\frac{dN_3}{dx} = -\frac{5T}{64a}$$

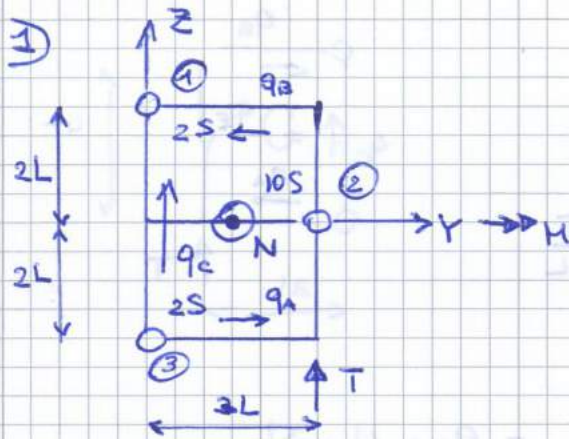
$$\frac{dN_4}{dx} = -\frac{3T}{64a}$$

EQUILIBRIO AL NODO



$$q_C = q_A + q_B = \frac{8T}{64a}$$

15/07/2010



Calcolare

- $\sigma_{xx}$  costanti
- flussi di taglio
- centro di taglio

• Calcolo baricentro

$Z_G = 0$  simmetria sezione

$$Y_G = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A_i} = \frac{(2S \cdot 0) \cdot 2 + 10S \cdot 3L}{14S} = \frac{15L}{2} \quad A_{TOT} = 14S$$

• Calcolo momenti inerzia

$$I_Y = 2 \cdot 2S \cdot (2L - 0)^2 = 4S \cdot 4L^2 = 16SL^2$$

### ■ TENSIONI NORMALI

Assi baricentrici  $\rightarrow$  formula di Navier  
 principi d'inerzia

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A_{TOT}} + \frac{M_Y}{I_Y} z_i + \frac{M_Z}{I_Z} y_i$$

$$\sigma_{xx1} = \frac{N}{14S} + \frac{M}{16SL^2} \cdot 2L = \frac{N}{14S} + \frac{M}{8SL}$$

$$\sigma_{xx2} = \frac{N}{14S}$$

$$\sigma_{xx3} = \frac{N}{14S} + \frac{M}{16SL^2} \cdot (-2L) = \frac{N}{14S} - \frac{M}{8SL}$$

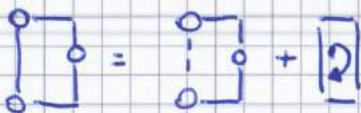
### ■ FLUSSI DI TAGLIO

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{T}{I_Y} S_i \cdot z_i$$

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{T}{16SL^2} \cdot 2S \cdot 2L = \frac{T}{4L}$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \frac{T}{16SL^2} \cdot 10S \cdot 0 = 0$$

$$\frac{dN_3}{dx} = \frac{T}{16SL^2} \cdot 2S \cdot (-2L) = -\frac{T}{4L}$$



$$q_A = q_A' - q_I \quad q_B = q_B' - q_I$$

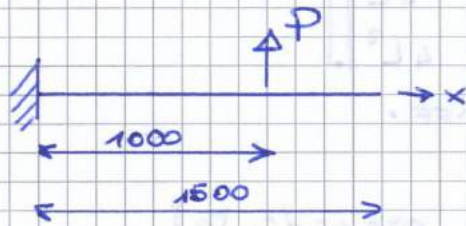
$$q_C = q_I$$



# FEM BEAM ELEMENT

Esame 21/02/2013

b)



SCHEMATIZZANDO LA TRAVE CON 1 SOLO ELEMENTO

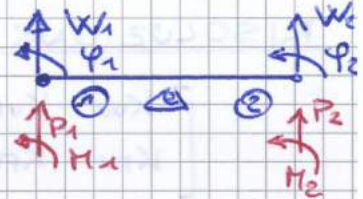
• ?  $w(x)$   
• ?  $M(x)$  → in  $x = \frac{L}{2}$

$P = 100 \text{ kg} = 981 \text{ N}$

$E_{Ti} = 105 \text{ 000 MPa}$

$$w(\xi) = N_1^{(e)} w_1 + N_2^{(e)} \varphi_1 + N_3^{(e)} w_2 + N_4^{(e)} \varphi_2$$

$$= H_1^{(e)} w_1 + L H_2^{(e)} \varphi_2 + H_3^{(e)} w_2 + L H_4^{(e)} \varphi_2$$



POLINOMI CUBICI DI HERMITE

## CARICHI NODALI

Carico concentrato  $\{F^{(e)}\} = [N(\xi_i)] P_{ci}$

$$\{F^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ L^{(e)} \left( \frac{3}{\xi} - 2\xi^2 + \xi \right) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ L^{(e)} \left( -\frac{2}{\xi} + \xi^3 \right) \end{Bmatrix} \cdot P_{ci} = \begin{Bmatrix} 1 - 3 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{8}{27} \\ \frac{1500}{\text{mm}} \left( \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \right) \\ 3 \cdot \frac{4}{9} - 2 \cdot \frac{8}{27} \\ \frac{1500}{\text{mm}} \left( -\frac{4}{9} + \frac{8}{27} \right) \end{Bmatrix} \cdot 981 \text{ N} = \begin{Bmatrix} 0,259 \\ 111,11 \text{ mm} \\ 0,740 \\ -222,22 \text{ mm} \end{Bmatrix} \cdot 981 \text{ N}$$

FUNZIONI DI FORMA VALUTATE NEL PUNTO DI APPLICAZIONE DEL CARICO

$$\{F^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 254,08 \text{ N} \\ 108 \text{ 998 Nmm} \\ 725,94 \text{ N} \\ -217 \text{ 997 Nmm} \end{Bmatrix}$$

## SISTEMA

$$[K] \{q^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \{R_v\}$$

$$\begin{bmatrix} K_{ww} & K_{w\varphi} \\ K_{\varphi w} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_w\} \\ \{q_\varphi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_w\} \\ \{F_\varphi\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{R_v\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_\varphi\} = \begin{Bmatrix} 725,94 \text{ N} \\ -218 \text{ 000 Nmm} \end{Bmatrix}$$

CARICHI NODALI ASSOCIATI A NODI LIBERI

$$\{q_w\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow w_1 = 0$$

$$\rightarrow \varphi_1 = 0$$

INCASTRO

$$\begin{aligned} \blacktriangleright w\left(\xi = \frac{1}{2}\right) &= \left(3\xi^2 - 2\xi^3\right)\Big|_{\xi = \frac{1}{2}} \cdot W_2 + L \cdot \left(-\xi^2 + \xi^3\right)\Big|_{\xi = \frac{1}{2}} \cdot \varphi_2 \\ &= 0,5 \cdot W_2 + (-187,5) \cdot \varphi_2 = 0,5 \cdot 1,702 \text{ mm} - 187,5 \text{ mm} \cdot 1,46 \cdot 10^{-3} \\ &= \underline{0,577 \text{ mm}} \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright M = -EI_y w_{,xx}$$

Ci viene + comodo fare i conti con le funzioni in  $\xi$   
 $\rightarrow$  scriviamo  $w_{,xx} = f(w, \xi)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{x}{L} &= \xi & \rightarrow & x = \xi \cdot L \\ & & & & \rightarrow & \frac{\partial x}{\partial \xi} = L \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{L} & \rightarrow & \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{L}} \end{aligned}$$

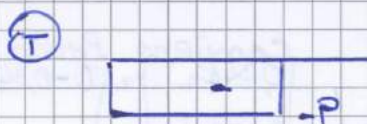
$$\begin{aligned} w_{,x} &= \frac{1}{L} H_{3,\xi} \cdot W_2 + \frac{L}{L} H_{4,\xi} \cdot \varphi_2 \\ &= \frac{1}{L} (6\xi - 6\xi^2) W_2 + (-2\xi + 3\xi^2) \varphi_2 \end{aligned}$$

$$w_{,xx} = \frac{1}{L^2} (6 - 12\xi) W_2 + \frac{1}{L} (-2 + 6\xi) \varphi_2$$

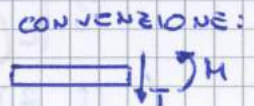
$$M\left(\xi = \frac{1}{2}\right) = -EI_y \cdot w_{,xx}\left(\xi = \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= -105000 \text{ MPa} \cdot 32 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \cdot \left[ \frac{1}{1500 \text{ mm}^2} \cdot (6-6) \cdot 1,702 \text{ mm} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1500 \text{ mm}} \cdot (-2+3) \cdot 1,46 \cdot 10^{-3} \right] \\ &= \underline{-327040 \text{ N} \cdot \text{mm}} \end{aligned}$$

Confronto con teoria esatta:



(M)  $M(x) = P(-x + \frac{x}{2}L)$



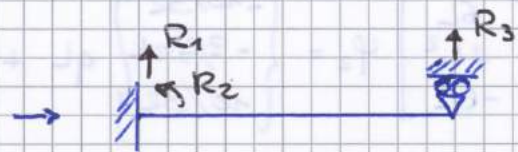
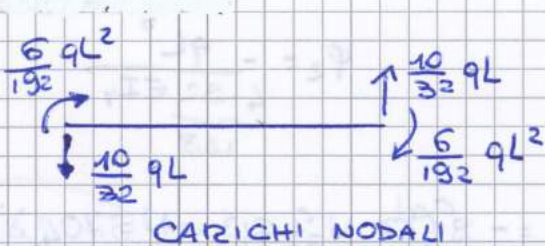
$$M\left(x = \frac{L}{2}\right) = 245250 \text{ Nmm}$$

$$\text{TRATTO 1} \quad qL \left( - \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \\ L \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \\ L \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \right) \end{Bmatrix} = -qL \begin{Bmatrix} + \frac{13}{32} \\ L \frac{22}{192} = + L \frac{11}{96} \\ + \frac{3}{32} \\ - \frac{5}{192} L \end{Bmatrix} \right)$$

$$\text{TRATTO 2} \quad qL \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{13}{32} \\ L \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{8} + \frac{1}{2} \right) - L \frac{11}{192} \\ - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{32} \\ L \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) + \frac{5}{192} L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{5}{192} L \\ \frac{13}{32} \\ - \frac{11}{192} L \end{Bmatrix}$$

SOMMA DEI 2 TRATTI

$$\{F^{(e)}\} = qL \begin{Bmatrix} -\frac{13}{32} + \frac{3}{32} \\ -\frac{11}{192} L + \frac{5}{192} L \\ -\frac{3}{32} + \frac{13}{32} \\ +\frac{5}{192} L - \frac{11}{192} L \end{Bmatrix} \rightarrow \{F^{(e)}\} = qL \begin{Bmatrix} -\frac{10}{32} \\ -\frac{6}{192} L \\ +\frac{10}{32} \\ -\frac{6}{192} L \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{matrix}$$



Unico GDL free  
sore  $\varphi_2 \rightarrow 11 \ 4!$

SISTEMA

$$[K] \{q^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \{R_v\}$$

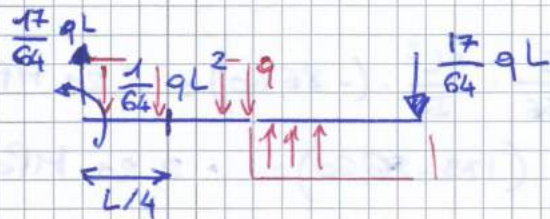
$$\frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vF} \\ K_{Fv} & K_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_v \\ q_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_v \\ F_F \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_v \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

il calcolo di  $\varphi_2$  è immediato

$$K_{44} \cdot \varphi_2 = M_2 \rightarrow \frac{EI_y}{L^3} \cdot (+4L^2) \cdot \varphi_2 = -\frac{6}{192} qL^2$$

② Studio semiguscio nella sezione  
 → servono prima le caratteristiche di sollecitazione  
 le otteniamo con i risultati del FEM



$$T = q(x - \frac{17L}{64})$$

$$T(x = \frac{1}{4}L) = \boxed{-\frac{1}{64}qL}$$

$$M(x) = q\frac{x^2}{2} - \frac{17}{64}qLx - \frac{1}{64}qL$$

$$M(x = \frac{1}{4}) = q^2 \left( \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} - \frac{17}{64} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{64} \right) = \boxed{-\frac{5}{256}qL^2}$$

! QUESTA È LA SOLUZIONE ESATTA !!! !

IL METODO FEM DA: • SPOSTAMENTI NODALI

• REAZIONI VINCOLARI ESATTE

⇒ se calcolo le EDS usando QUELLE reazioni vincolari allora ho i risultati esatti!!!

IL CALCOLO APPROX INVECE USA L'ESPRESSIONE DEGLI SPOSTAMENTI!!

SOLUZIONI APPROX:

•  $M(x) = -EI_y w_{,xx}(x)$

$$w(\xi) = L^4 H_4(\xi) \cdot \varphi_2 = L(-\xi^2 + \xi^3) \varphi_2$$

$$w_{,x}(\xi) = \frac{1}{L} \cdot L^4 H_{4,\xi} \cdot \varphi_2 = (-2\xi + 3\xi^2)$$

$$w_{,xx}(\xi) = \frac{1}{L} H_{4,\xi\xi} \cdot \varphi_2 = \frac{1}{L}(-2 + 6\xi) \varphi_2$$

$$w_{,xx}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{L}(-2 + 6 \cdot \frac{1}{4}) \left(-\frac{9L^3}{128 EI_y}\right)$$

$$M(x = \frac{1}{4}) = + EI_y \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9L^3}{128 EI_y} = \boxed{\frac{9L^2}{256}} \text{ approx}$$

•  $T(x) = -EI_y w_{,xxx}(x)$

MEMO  $\frac{dM}{dx} = T$  !

$$w_{,xxx} = \frac{1}{L^2} \cdot 6 \varphi_2$$

$$w_{,xxx}(\frac{1}{4}) = -\frac{6}{L^2} \frac{9L^3}{128 EI_y} = \text{cost.}$$

$$T(x = \frac{1}{4}) = -EI_y \cdot \frac{6}{128 EI_y} \frac{9L}{L} = -\frac{3}{64}qL$$

25/07/2011

# BEAM ELEMENT



- Schematizzare come 1 BEAM ELEMENT
- $\bar{m}$  ve isotropa

Calcolare:   
 ■ REAZIONI VINCOLARI   
 ■ FRECCIA IN  $x=L/2$    
 ■ ROTAZIONE IN  $x=L/2$

## CARICHI NODALI

$$W_{ex}^{(e)} = \underbrace{[d^{(e)}(x_i)]^T}_{\text{errore}} \cdot C_i = \{q^{(e)}\}^T [N^{(e)}(x_i)]^T C_i$$

$$\{F^{(e)}\} = \underbrace{[N(\xi_i)]^T}_{\text{errore}} \cdot C = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



UNA COPPIA NON LAVORA CON GLI SPOSTAM. HA CON LE ROTAZIONI!!!

vedi es. dopo in fondo

è chiaramente sbagliato poiché essendo già C un carico nodale ci dovrebbe dare

$$\{F^{(e)}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix}$$

## SISTEMA

$$[K]\{q^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \{R_v\}$$



$$\begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vf} \\ K_{fv} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{q_v\} \\ \{q_f\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F_v\} \\ \{F_f\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \{R_v\} \\ \{0\} \end{pmatrix}$$

$$\{q_v\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \{F_v\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \{R_v\} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \quad q_f = \varphi_2$$

$$[K_{ff}] = K(4,4)$$

$$\cdot 4 \frac{EI}{L^3} \cdot \varphi_2 = C \quad \rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{CL}{4EI}$$

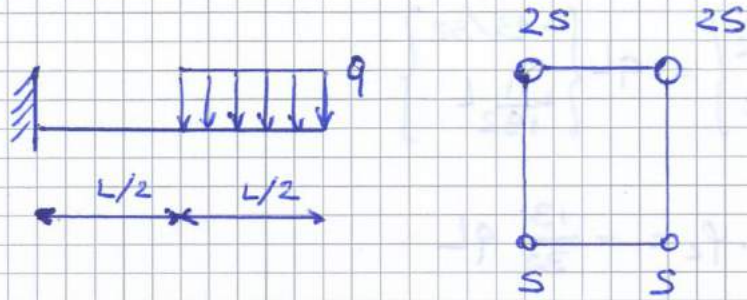
$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix}$$

Poiché  $q(1:3) = 0$  allora  $K_{vf}$  sarà  $K(1:3,4)$

→ blocco la colonna 4  $\times K$  è l'unica che moltiplica un  $q \neq 0$

22/06/2012

### 3) BEAM ELEMENT



1 SOLO ELEMENTO BEAM.

Calcolare:

- REAZIONI VINC.
- FRECCIA  $x=L$
- ROTAZIONE  $x=L$

Carichi nodali

$$\{F^{(e)}\} = \int_0^L [N]^T q \, dx = L \int_{-1/2}^{1/2} -q [N(\xi)]^T d\xi =$$

$$= -Lq \int_{-1/2}^{1/2} \begin{bmatrix} 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ L(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \\ -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ L(\xi^3 - \xi^2) \end{bmatrix} d\xi = -qL \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi^4 - \xi^3 + \xi \\ L(\frac{1}{4}\xi^4 - \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2) \\ -\frac{1}{2}\xi^4 + \xi^3 \\ L(\frac{1}{2}\xi^4 - \frac{1}{2}\xi^3) \end{bmatrix} =$$

$$= -qL \begin{bmatrix} (\frac{1}{2} - 1 + 1) - (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}) \\ L[(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4})] \\ (-\frac{1}{2} + 1) - (-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{8}) \\ L[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8})] \end{bmatrix} = -qL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1-4+16}{32} = \frac{16-13}{32} = \frac{3}{32} \\ \frac{3-8+6}{12} - \frac{6-32+48}{384} = \frac{32-22}{384} = \frac{10}{384} = \frac{5}{192} L \\ \frac{1}{2} - \frac{-1+4}{32} = \frac{16-3}{32} = \frac{13}{32} \\ \frac{3-4}{12} - \frac{6-16}{384} = \frac{-32-6+16}{384} = \frac{-22}{384} = -\frac{11}{192} L \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \{F^{(e)}\} = qL \begin{bmatrix} -3/32 \\ -5/192 L \\ -13/32 \\ +11/192 L \end{bmatrix}$$

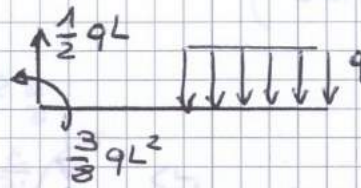
### SISTEMA

$$[K]\{q^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \{R_v\}$$

$$\begin{bmatrix} K_{ww} & K_{w\varphi} \\ K_{\varphi w} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{41}{64} qL^2 - \frac{7}{24} qL^2 + \frac{5}{192} qL^2 = R_2 \rightarrow R_2 = \frac{72^3}{1928} qL^2$$

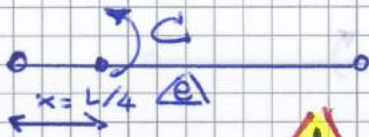
$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{2} qL \\ R_2 = \frac{3}{8} qL^2 \end{cases}$$



28/02/2011

BEAM ELEMENT : calcolo vettore carichi nodali

2)



$$\{F^{(e)}\} = [N(\xi_i)] \cdot C_i = \begin{Bmatrix} 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)L \\ -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ (\xi^3 - \xi^2)L \end{Bmatrix} \cdot C_i$$

$$= \begin{Bmatrix} 2 \cdot \frac{1}{64} - 3 \cdot \frac{1}{16} + 1 \\ \left(\frac{1}{64} - 2 \cdot \frac{1}{16} + 1\right)L \\ -2 \cdot \frac{1}{64} + 3 \cdot \frac{1}{16} \\ \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{16}\right)L \end{Bmatrix} \cdot C = C \begin{Bmatrix} \frac{2 - 12 + 64}{64} = \frac{54}{64} = \frac{27}{32} \\ \left(\frac{1 - 8 + 64}{64}\right)L = \frac{57}{64}L \\ \frac{2 - 12}{64} = -\frac{5}{32} \\ \left(\frac{1 - 4}{64}\right)L = -\frac{3}{64}L \end{Bmatrix}$$



SCRITTA COSÌ È VALIDA SOLO PER UNA FORZA CHE LAVORA SU UNO SPOSTAMENTO!!!

$$W_{ex}^{(e)} = \{w_{,x}^{(e)}(\xi_i)\}^T M_i = \{q^{(e)}\}^T [N_{,x}(\xi_i)]^T \cdot C_i$$

LAVORO = ROTAZIONE · MOMENTO

$$\{F^{(e)}\} = [N_{,x}(\xi_i)]^T \cdot C_i = \frac{1}{L} [N_{,3}(\xi_i)]^T \cdot C_i$$

$$\{F^{(e)}\} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} 6\xi^2 - 6\xi \\ (3\xi^2 - 4\xi + 1)L \\ -6\xi^2 + 6\xi \\ (3\xi^2 - 2\xi)L \end{Bmatrix} \cdot C = \frac{C}{L} \begin{Bmatrix} 6 \cdot \frac{1}{16} - \frac{6}{4} = -\frac{18}{16} \\ \left(3 \cdot \frac{1}{16} - 4 \cdot \frac{1}{4} + 1\right)L = \frac{3}{16}L \\ -6 \cdot \frac{1}{16} + \frac{6}{4} = \frac{18}{16} \\ \left(3 \cdot \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)L = -\frac{5}{16}L \end{Bmatrix}$$