NUMERO: 1002

DATA: 01/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Renis

MATERIA: Fisica I + Eserc.
Prof. Scarfone

76 h teoria
16 h esercitaz.
6 h laboratorio 3 / 1 — PIATTAFORMA ROTANTE
\ PIANO INCLINATO

SQ. B RAVINA - ROSSETTO
8.30 - 10.00 aule 3S
10.00 - 11.30

Iscrizione laboratorio fino al 10 Marzo (ONLINE)

Martedì 25 Marzo

TUTORATO
a partire dalla 4ª settimana
3 volte

MAZZOLDI — FISICA I
FOCARDI - FISICA GENERALE

fare gli es. del Mazzoldi
LONGHINI - FISICA GENERALE
(Problemi meccanica e termodinamica)

ESAME
PROVA SCRITTA → 3 problemi → li prende dal Mazzoldi
15/30

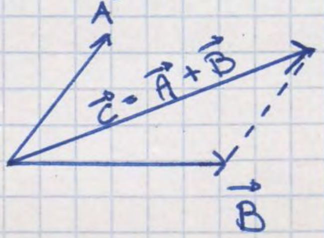
PROVA ORALE → discussione argomenti compito
15/30

Voto medio 15 / 30
+
relazione di laboratorio (max 3 punti)

18/30 → Esame superato

SOMMA

Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$



$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

↓

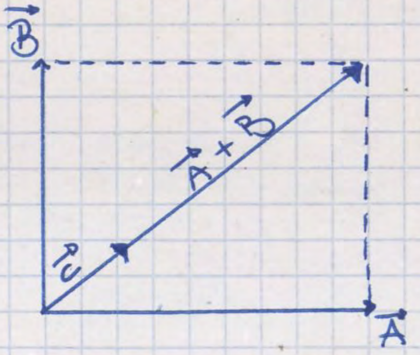
Si ottiene trasportando parallelamente un vettore lungo la direzione dell'altro e congiungendo la coda del 1° con la testa del 2°.

PROPRIETÀ COMMUTATIVA

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$



Come nell'algebra dei numeri → elemento neutro: 0

↓

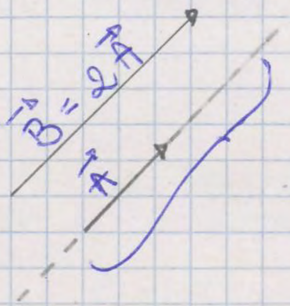
se sommato a qualunque altro numero non lo muta.

PRODOTTO PER UNO SCALARE

(VETTORE × NUMERO)

Dato un vettore $\vec{A}$ e un numero $m \in \mathbb{R}$

$$\vec{B} = m \cdot \vec{A}$$



$m = 2$

$\vec{B}$ avrà la stessa retta d'azione

↓

il VERSO sarà

CONCORDE con $\vec{A}$ se $m > 0$

DISCORDE con $\vec{A}$ se $m < 0$

Se $m = 0$ il vettore è nullo.

Dati due numeri $m, n \in \mathbb{R}$ e il vettore $\vec{A}$

$m(n \cdot \vec{A}) = (m \cdot n) \cdot \vec{A}$ PROPR. ASSOCIAT.

$(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$ PROPR. DISTRIB.

$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

VERSORE

↓

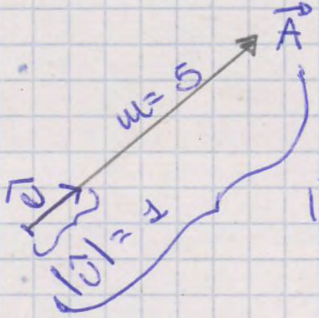
vettore avente modulo unitario (modulo = 1)

Notazione: $\hat{U}, \hat{u}, \hat{\imath}$

$$|\hat{\imath}| = 1$$

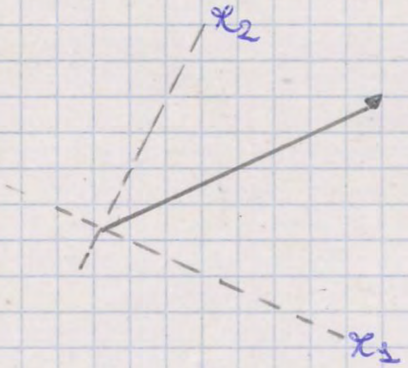
$$\underline{\vec{A} = m \cdot \hat{u}}$$

RAPPRESENTAZ. INTRINSECA DI UN VETTORE



$|\vec{A}| = 5$

$$|\vec{A}| = |m \cdot \hat{u}| = |m| \cdot |\hat{u}| = |m| \cdot 1 = |m|$$



Le due direttrici possono non essere ortogonali

$$\vec{A} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$\vec{P}_1 = m_1 \cdot \hat{u}_1$$

$$\vec{P}_2 = m_2 \cdot \hat{u}_2$$

Quindi $\boxed{\vec{A} = m_1 \hat{u}_1 + m_2 \hat{u}_2}$

COMBINAZIONE LINEARE

PRODOTTO SCALARE

(VETTORE x VETTORE = NUMERO)

Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\underset{\text{scalare}}{C} = \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot \underbrace{|\vec{B}| \cdot \cos \boxed{\vartheta}}_{\text{Proiezione della lunghezza del vettore } \vec{B} \text{ lungo la direzione di } \vec{A}.} \rightarrow \text{angolo che le direttrici di } \vec{A} \text{ e } \vec{B} \text{ formano}$$

Il prodotto scalare rappresenta geometricamente la lunghezza di un vettore per la lunghezza della proiezione dell' altro vettore su se stesso.

Un vettore ha una lunghezza sempre ⊕.

$C > 0$ se $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ANG. ACUTO

$C < 0$ se $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ ANG. OTTUSO

$C = 0$ se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (Quando cioè i due vettori sono perpendicolari l' un l' altro.)

PROPR. COMMUTATIVA

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \rightarrow \text{PROPR. DISTRIB}$$

$$\underbrace{(\vec{A} \cdot \vec{B})}_{m} \cdot \vec{C} \neq \vec{A} \cdot \underbrace{(\vec{B} \cdot \vec{C})}_{n}$$

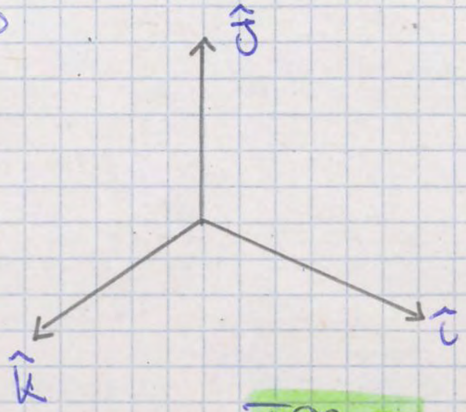
PRODOTTO GIUSTO

in entrambi i casi otteniamo un numero x vettore ma sono due numeri ≠.

PRODOTTO DI DUE VERSORI

$\theta = 0$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \underbrace{|\hat{i}|}_{1}\underbrace{|\hat{i}|}_{1}\underbrace{\cos\theta}_{1} = 1$$



Terna ortonormale

$\hat{j}\cdot\hat{j} = 1$

$\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos\theta = 0$$

$\hat{i}\cdot\hat{k} = 0$

$\hat{j}\cdot\hat{k} = 0$

$$\boxed{\begin{gathered}\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \\ \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0\end{gathered}}$$

VETTORE X NUMERO

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ $\quad$ $\vec{A}' = m\cdot\vec{A}$

$$\vec{A}'\cdot\vec{B} = |\vec{A}'||\vec{B}|\cos\theta = m|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = m\cdot\vec{A}\,\vec{B}$$

∼ ∼ ∼

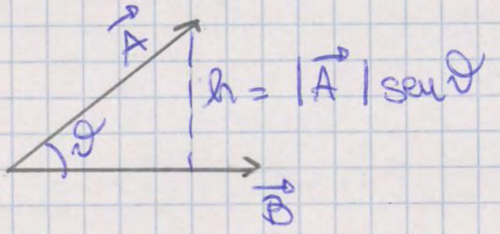
PRODOTTO VETTORIALE

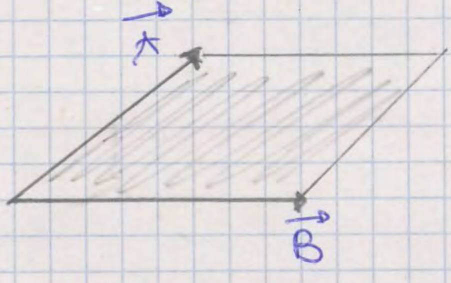
(VETTORE x VETTORE = VETTORE)

$\vec{A}, \vec{B}$ (definiti nello spazio a 3 dimens)

NOTAZIONE: $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$

$$|\vec{C}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,\text{sen}\,\vartheta$$

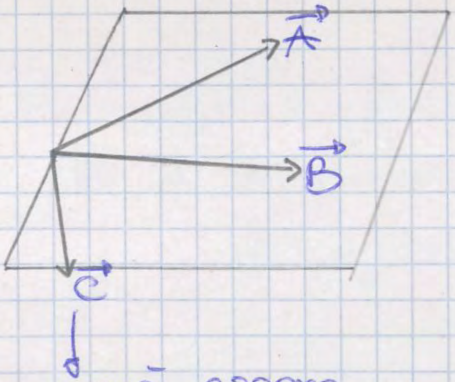




area del parallelogramma formato dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$

VERSO

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$



può essere entrante o uscente dalla lavagna

Regola della mano destra

POLLICE = $\vec{A}$

INDICE = $\vec{B}$

MEDIO = $\vec{C}$ = VERSO

$\vec{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$

$\vec{B} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$

matrice

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j}\,(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$\boxed{\text{DETERMINANTE}}$

ES.

$\hat{i} \wedge \hat{j}$ $\qquad \vec{A} \equiv \hat{i}$

$a_1 = 1$

$a_2 = 0$

$a_3 = 0$

$\vec{B} \equiv \hat{j}$

$b_1 = 0$

$b_2 = 1$

$b_3 = 0$

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\,(0 \cdot 0 - 0 \cdot 1) - \hat{j}\,(1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + \hat{k}\,(1 - 0) =$$

$$= \hat{k}$$

SISTEMI DI RIFERIMENTO

SISTEMA MKS

1) lunghezza (m) → Metro:
40 milionesima parte del meridiano terrestre.
2) massa (Kg)
3) tempo (t)

SISTEMA INTERNAZIONALE (S.I.)

7 grandezze
- 3 fondamentali:
  - lunghezza (m)
  - massa (Kg)
  - tempo (s)
- 4 derivate:
  - candela (cd
  - temperatura (K)
  - Mole (mole)
  - Ampère (A)

Velocità della luce nel vuoto

$$c \simeq 3 \cdot 10^8 \ m/s$$

TEMPO → viene definito a partire delle frequenze di emissione di radiazioni da parte dell' atomo di cesio.

SISTEMA CGS

- lunghezza (cm)
- massa (g)
- tempo (s)

Lavoro = forza × spostamento

$$[\mathcal{L}] = [F][\overset{\text{spostamento}}{L}]$$

$$[F] = [M][a]$$

$$[a] = [L][T^{-1}]$$

$$[\mathcal{L}] = [M][\overset{\text{lunghezza}}{L}][T^{-2}][L] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]$$

unità di misura = JOULE

ES.

$$[v] = [L \cdot T^{-1}]$$

$$[v] = [M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-1}]$$

NOTA: Non si possono sommare grandezze diverse.
Ma si possono moltiplicare.

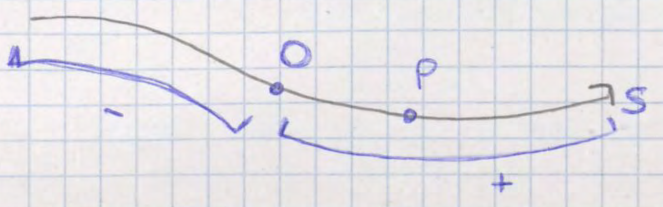
Tutte le funzioni elementari hanno per argomento numeri puri.

exp (x)
log (x)
sen (x)
cos (x)

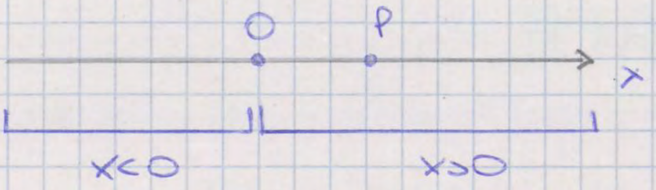
adimensionali

CINEMATICA

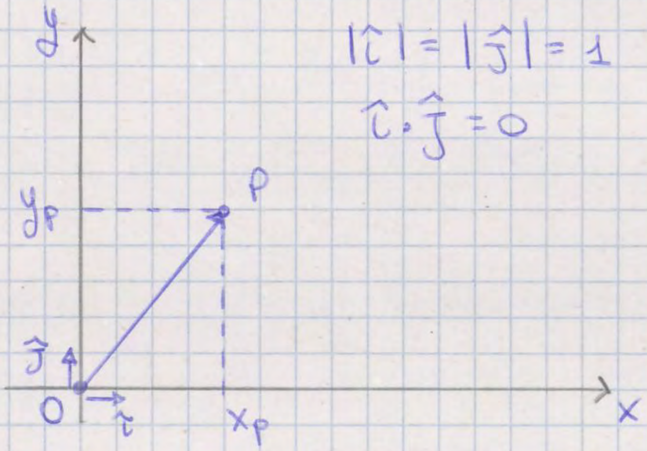
CINEMATICA = parte della meccanica che studia il moto dei corpi.



Spazio fisico



sistema di riferimento: retta x



$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

sistema di riferimento piano cartesiano

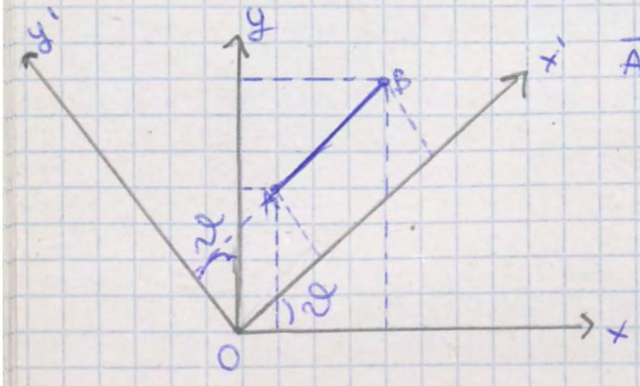
$$P(x_0, y_0)$$

$$\overrightarrow{OP} = x_P \hat{i} + y_P \hat{j}$$

Ad ogni punto P possiamo associare una ed una solo coppia di numeri reali

$$\begin{Bmatrix} + \text{ nel } I^\circ \text{ quadr} \\ - \text{ nel } III^\circ \text{ quadr} \\ \text{misti negli altri } 2 \end{Bmatrix}$$

Cosa accade se invece di un punto avessimo 1 vettore?



$$\vec{AB}_{\vartheta'} = (x'_B - x'_A)\hat{\imath} + (y'_B - y'_A)\hat{\jmath} =$$

$$= (x_B \cos\vartheta + y_B \,\text{sen}\,\vartheta - x_A \cos\vartheta - y_A \,\text{sen}$$

$$+ (-x_B \,\text{sen}\,\vartheta + y_B \cos\vartheta + x_A \,\text{sen}\,\vartheta -$$

$$- y_A \cos\vartheta)\hat{\jmath} =$$

$$= (x_B - x_A)\cos\vartheta\,\hat{\imath} + (y_B - y_A)\,\text{sen}\,\vartheta\,\hat{\imath}$$

$$(x_B - x_A)\,\text{sen}\,\vartheta\,\hat{\jmath} + (y_B - y_A)\cos\vartheta\,\hat{\jmath}$$

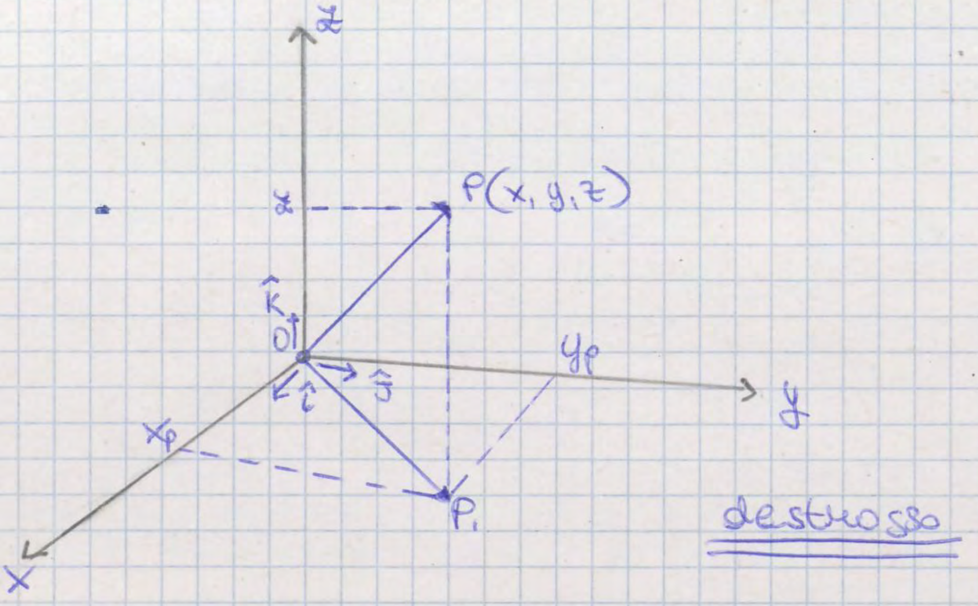
$$\vec{AB} = \underbrace{(x_B - x_A)}_{a}\hat{\imath} + \underbrace{(y_B - y_A)}_{b}\hat{\jmath} =$$

$$= (a\cos\vartheta + b\,\text{sen}\,\vartheta)\hat{\imath} + (-a\,\text{sen}\,\vartheta + b\cos\vartheta)\hat{\jmath}$$

Vettore geometrico = ente di n punti in cui le componen si trasformano per rotazione spaziale come si trasfo mano le coordinate di un punto nel sistema cartesi no.

Versore = oggetto le cui componenti si trasformano pe rotazione e che ha modulo 1.

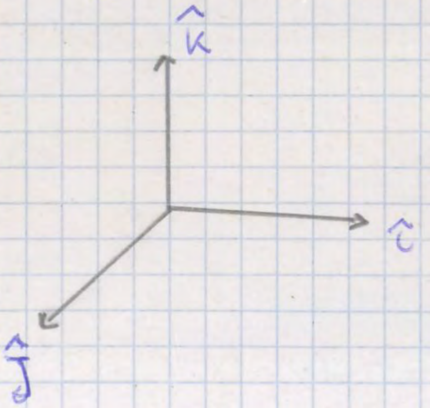
• RAPPRESENTAZIONE DI UN PUNTO NELLO SPAZIO

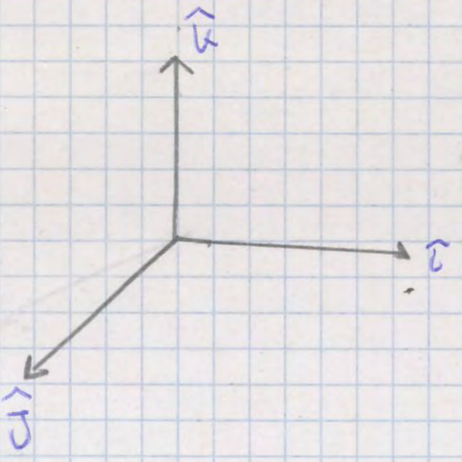


$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$

$$\begin{cases} \hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j} \end{cases}$$





↓

non si riescono a sovrapporre né per rotazione né per traslazione.

$z = r \cdot \cos\vartheta$

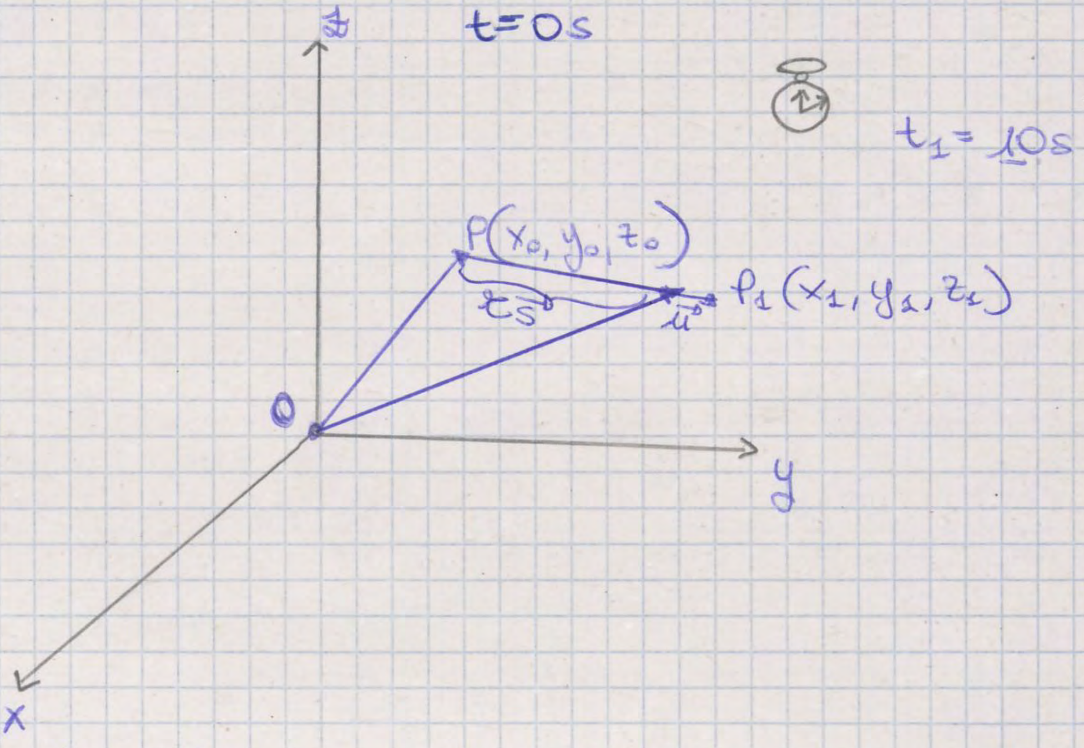
$x = r' \cdot \cos\varphi = r \cdot \text{sen}\,\vartheta \cos\varphi$

$y = r' \cdot \text{sen}\,\varphi = r \cdot \text{sen}\,\vartheta \cdot \text{sen}\,\varphi$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\varphi = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$

$\vartheta = \arccos\,\frac{z}{r}$



$\overrightarrow{OP} = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} + z_0\hat{k}$

$\overrightarrow{OP_1} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}$

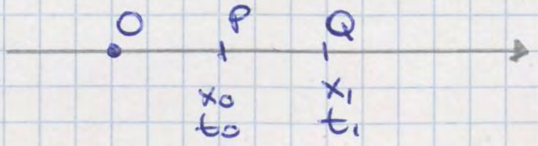
$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$ vettore spostamento ($\vec{s}$)

$$\vec{s} = (x_1 - x_0)\hat{\imath} + (y_1 - y_0)\hat{\jmath} + (z_1 - z_0)\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \hat{u}_v}$$

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \hat{u}_r$$

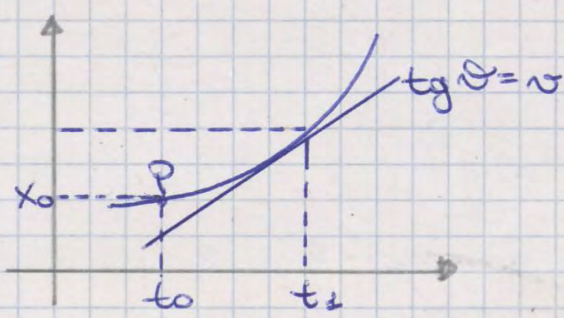
10-03-14



$$v_m = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

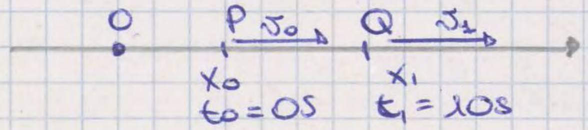
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

La posizione del mobile nel tempo mi è data da x(t)



→ dove la grandezza della curva è più bassa ho valori di velocità più basse.

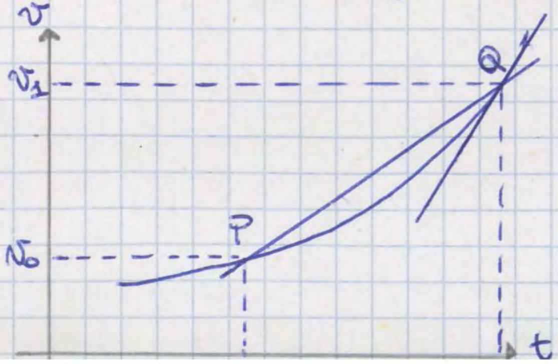
Come cambia la velocità nel tempo?



Acceleraz. scalare media

$$a_m = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t_0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



la pendenza mi da la acceleraz. scalare media.

$$\lim_{P\to Q}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \underbrace{|\hat{\tau}|}_{\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}\to 1}\hat{\tau}$$

⇒ quindi è un versore

VELOCITÀ VETTORIALE MEDIA

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{PQ}}{\Delta t}$$

Δt → tempo impiegato dal mobile per andare dal punto P al punto Q.

$$\Delta\vec{r} = \vec{OQ} - \vec{OP} \equiv \vec{PQ}$$

$$= (x_1\hat{i} + y_1\hat{j}) - (x_0\hat{i} + y_0\hat{j}) =$$

$$= (x_1 - x_0)\hat{i} + (y_1 - y_0)\hat{j}$$

Quindi riscrivo:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{PQ}}{\Delta t} = \frac{(x_1 - x_0)\hat{i} + (y_1 - y_0)\hat{j}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{x_1 - x_0}{\Delta t}\cdot\hat{i} + \frac{y_1 - y_0}{\Delta t}\hat{j} = v_{mx}\hat{i} + v_{my}\hat{j}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \overset{\text{derivata}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

La derivata di un vettore è un vettore che ha per componenti la derivata delle componenti.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\overset{\nearrow v}{\boxed{\frac{ds}{dt}}} = v\cdot\hat{\tau}$$

$$\vec{v} = \underset{\substack{\swarrow \\ \text{modulo del vett.} \\ \text{velocità}}}{v}\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{versore} \\ \text{tangente}}}{\hat{\tau}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{\tau}}{\Delta t} = \frac{\hat{\tau}' - \hat{\tau}}{\Delta t}$$

Riscrivo:

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\hat{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

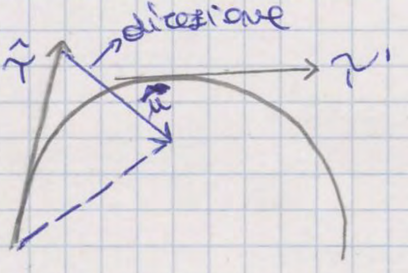
$\Delta s = R \cdot \Delta \vartheta$

$\Delta \hat{\tau} = |\hat{\tau}| \cdot \Delta \vartheta$

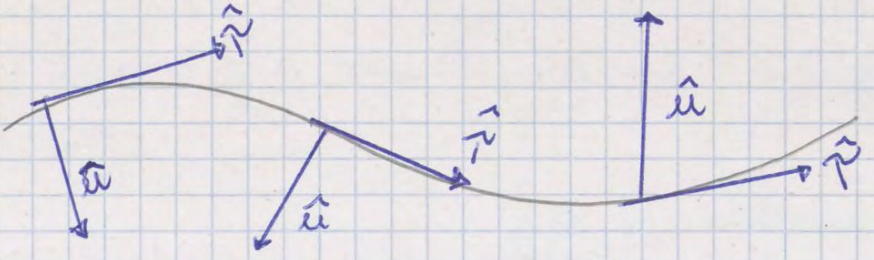
Sostituendo, ottengo:

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\hat{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{|\hat{\tau}| \cdot \cancel{\Delta \vartheta}}{R \cdot \cancel{\Delta \vartheta}} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \overset{v}{\boxed{\frac{ds}{dt}}} = \frac{v}{R}$$

Che direzione? Lo si vede dal disegno.



versore $\hat{\tau}$ e $\hat{u}$ sono perpendico=lari ma ruotano in base al punto in cui siamo.



Abbiamo trovato il punto interrogativo. Sostituisco:

$$\vec{a} = a_t \hat{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \hat{u}$$

accelerazione tangenziale
↓
derivata della vel. scalare fratto la derivata del tempo.

$a_t = \frac{dv}{\ }$

normale
↓
è sempre ⊥ $\hat{\tau}$ (è centripeto)

$a_c = \frac{v^2}{R}$

$$d\vec{v} = a \cdot dt$$

$$t = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{v_0}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt \rightarrow$$

EQ. ORARIA DELLA VELOCITÀ VETTORIALE

(posso conoscere la velocità del mobile in qualsiasi istante).

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v_0} = v_{0x}\,\hat{\imath} + v_{0y}\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 x + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt \\ v_y = v_0 y + \int_{t_0}^{t} a_y(t)\, dt \end{cases}$$

$$d\vec{x}(t) = \vec{v}(t)\, dx$$

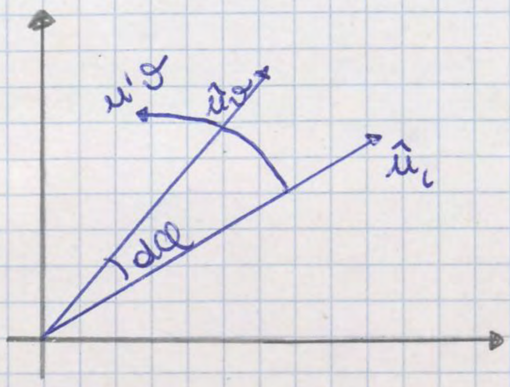
$$t = 0 \quad \vec{x}(t) = \vec{x_0}$$

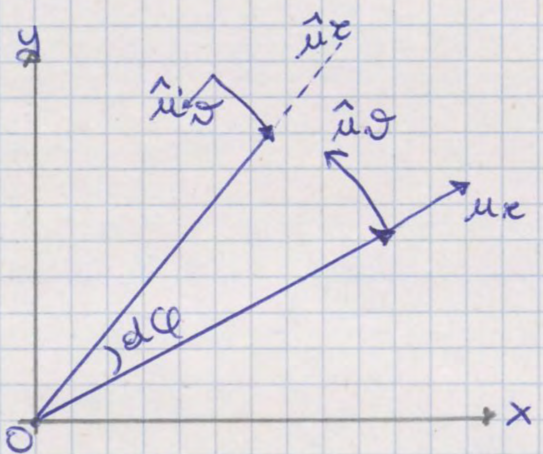
$$\vec{x}(t) = \vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\, dt$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} \left(\vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\, dt' \right) dt =$$

$$= \vec{x_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t')\, dt'\, dt$$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ accelerazione angolare

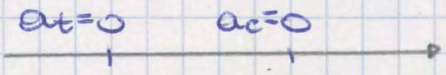




$$\vec{a} = a_r \hat{u}_r + 2v\omega \hat{u}_\theta + r\alpha \hat{u}_\theta - r\omega^2 \hat{u}_r =$$

$$= (a_r - \underbrace{r\omega^2}_{\frac{v^2}{r} = r\omega^2}) \hat{u}_r + (2v\omega + r\alpha) \hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = a_t \hat{\tau} + a_c \hat{u}$$



a_t	a_c	moto
0	0	moto rettilineo uniforme
cost	0	moto rettilineo uniformemente accelerato
$f(t)$	0	moto rettilineo vario

MOTO RETTILINEO UNIFORM. ACCELERATO

Essendo rettilineo posso dimenticarmi del carattere vettoriale.

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a\,dt \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v - v_0 = a(t-t_0)}$$

1° legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\boxed{v(t) = v_0 + a(t-t_0)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = dx = v(t)\,dt = (v_0 + a(t-t_0))\,dt \Rightarrow$$

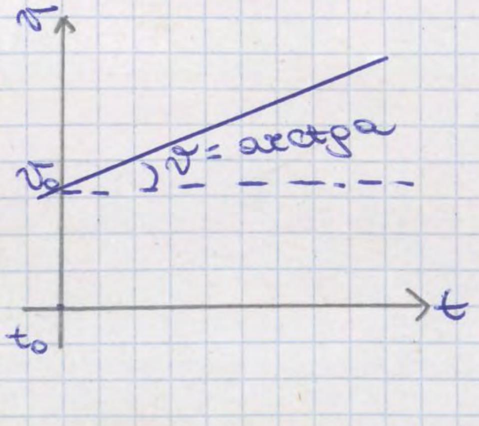
$$\rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0\,dt + \int_{t_0}^{t} a(t-t_0)\,dt$$

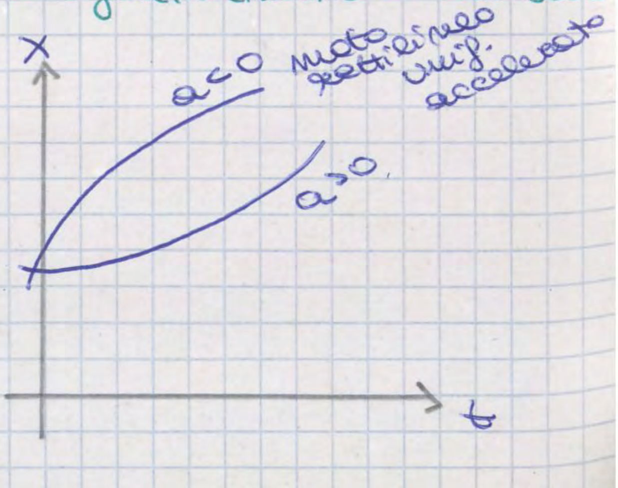
$$x - x_0 = v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2}$$

posizione del mobile all'istante t=0

2° legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerat





$$[t] = \frac{[v_0]}{[g]} = \frac{m/s}{m/s^2} = s$$

$$y(t) = \overset{0}{\overset{\parallel}{y_0}} + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

$v_0 = 10$ m/s

$t = \frac{10}{9,8} \simeq 1$ s

Quanto spazio percorre?

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{9,8} \simeq 5 \text{ m}$$

$$y = y_0 + \overset{0}{\overset{\parallel}{\boxed{v_0}}} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

$$[t] = \sqrt{\frac{[L]}{[L \cdot T^{-2}]}} = \sqrt{[T^2]} = [T]$$

$$\vec{a} = \frac{(R\omega)^2}{R} \cdot \hat{n} = R\omega^2\hat{n}$$

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} \qquad d\vartheta = \omega dt$$

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = \omega(t - t_0)$$

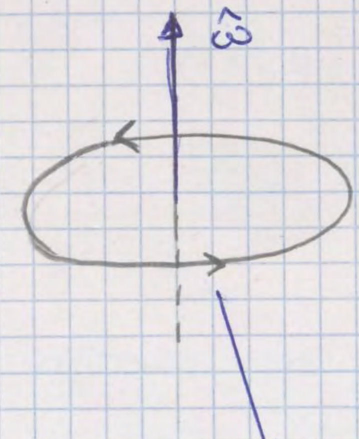
$$\boxed{\vartheta = \vartheta_0 + \omega(t - t_0)}$$

legge oraria del moto circolare uniforme

ϑ_0 ↓ posizione iniziale del mobile

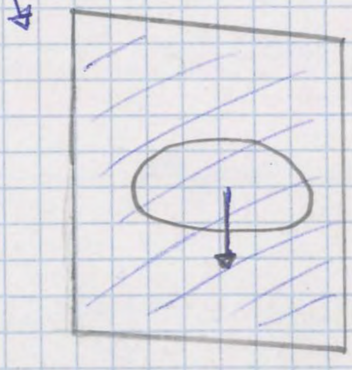
La velocità angolare è uno scalare per definizione, ma in alcuni problemi assume la funzione di vettore

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{n}$$



il verso è dato dalla regola della mano destra.

il pollice da il verso.

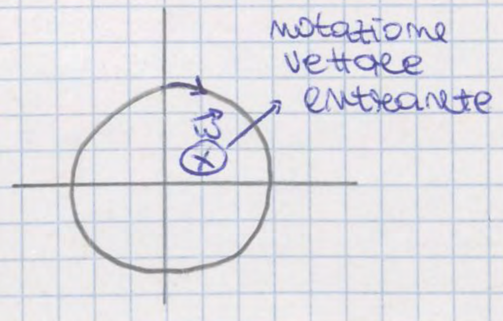


PSEUDOVETTORI

nel mondo dell
specchio la dest
viene capovolta
con la sinistra
e anche il vetto
viene capovolt

↓

quindi non è
un vero vettore



$[\alpha] = rad/s^2$

È legata all'accelerazione tangenziale.

$$v_t = \omega \cdot R \qquad \frac{d}{dt} v_t = a_t = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = \alpha R$$

Leggi orarie

$$d\omega = \alpha\, dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha (t - t_0)} \quad 1^a$$

Ricordando che $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$

Separo le variabili e mi ricavo la 2^a legge oraria

$$d\vartheta = \omega dt = [\omega_0 + \alpha (t - t_0)]\, dt$$

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta = \int_{t_0}^{t} \omega_0\, dt + \int_{t_0}^{t} \alpha (t - t_0)\, dt$$

$$\boxed{\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2} \quad 2^a$$

posizione angolare all'istante iniziale

velocità angolare all'istante iniziale

Supposto che ω sia una funzione dell'angolo e non del tempo.

Sia $\omega(\vartheta)$:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\omega}{d\vartheta} \cdot \omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\vartheta} \cdot \omega^2$$

Più in generale

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{n}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$ = (derivata del vettore $\vec{\omega}$ nel tempo).

$$= \boxed{\frac{d\omega}{dt}} \hat{n} + \omega \cdot \frac{d\hat{n}}{dt}$$

acc. angolare scalare → è diretta lungo la normale
↓
è perpendicolare al piano della rotazione.

Usando invece la notazione:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Se derivo l'espressione, trovo che:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

$\omega = \frac{\Delta\vartheta \to 2\pi}{\Delta t \to T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$ {quando P fa un giro completo}

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ Questa relazione vale nel moto armonico.

nel moto armonico la vel. angolare del moto circolare si chiama pulsazione → rad/s

$\frac{1}{T} = \nu = \frac{\omega}{2\pi}$ frequenza

u.d.m $[\nu] = s^{-1}$ = hertz

Nota la legge del moto armonico, troviamo, derivando nel tempo, la velocità e l'accelerazione

$$\boxed{x(t) = A \cdot \cos(\omega t)}$$

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t)$ derivo 1 volta

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$ derivo 2 volte

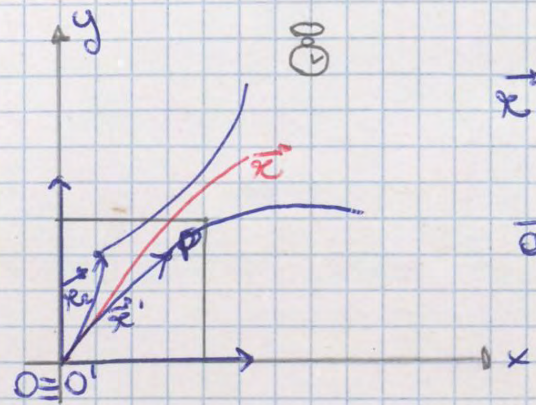
$a(t) = -\omega^2 \cdot (A \cdot \cos(\omega t)) \Rightarrow \boxed{a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)}$

$\rightarrow \frac{a(t)}{x(t)} = -\omega^2$

Quando il rapporto tra $\frac{a(t)}{x(t)}$ mi da una costante negativa, di sicuro ho a che fare con un moto armonico.

14 - 03 - 14

COMPOSIZIONE DI MOTI



$\vec{r}_1$ $\quad \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$

$\vec{a}_1 = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_1}{dt}$

$\vec{r}_2$ (posizione del punto P dovuta al movimento della tavola su cui P si trova).

$\vec{r}_2 \qquad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$

$$\vec{a}_2 = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

E se ho un corpo in movimento su un altro corpo in m

- Il moto è dato dalla somma vettoriale dei singoli moti.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + v_2 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

Somma vettoriale

$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}$$

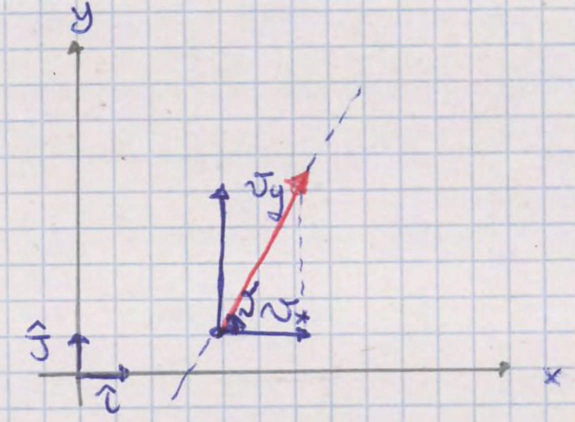
MOTO RETTILINEO UNIFORME + MOTO RETTILINEO UNIFORMEM. ACCELERATO PARALLELI

$$x_1 = x_{01} + v_1 t$$

$$x_2 = x_{0_2} + v_{0_2} t + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$x = x_1 + x_2 = (x_{0_1} + x_{0_2}) + (v_{0_1} + v_{02}) t + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

COMPOSIZIONE DI DUE MOTI RETTILINEI UNIFORMI 1



$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \end{cases}$$

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_x t)\hat{\imath} + (y_0 + v_y t)\hat{j} =$$

$$= (x_0\hat{\imath} + y_0\hat{j}) + (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{j})t$$

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\vartheta = \text{arctg}\,\frac{v_y}{v_x}$$

Se considerassimo:

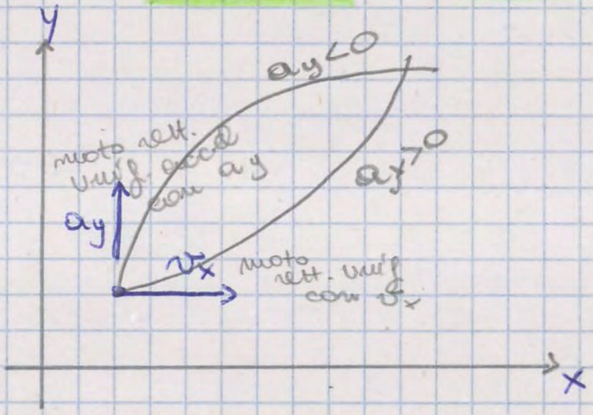
$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y = y_0 + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{2}}{a_x}(x-x_0) = \frac{\cancel{2}}{a_y}(y-y_0)$$

$$\boxed{y = \frac{a_y}{a_x} x - \frac{a_y}{a_x} x_0 + y_0}$$

equazione della traiettoria

COMPOSIZIONE M.R.U E M.R.U.A ⊥



$$x = \overset{0}{x_0} + v_x t$$

$$y = \underset{0}{y_0} + \underset{0}{v_{0y}} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

il moto diventa:

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_x} \\ y = \frac{1}{2} a_y \frac{x^2}{v_x^2} \end{cases}$$

$$y = K x^2 \qquad K = \frac{1}{2} \frac{a_y}{v_x^2}$$

Questa traiettoria è una PARABOLA

$$= \frac{v^2}{g} \cdot sen^2 \vartheta$$

Quanto tempo impiega per tornare per terra? Sempre t^*

$$t_{TOT} = 2t^* = 2\frac{v_{0y}}{g} = 2\frac{v}{g} sen\,\vartheta$$

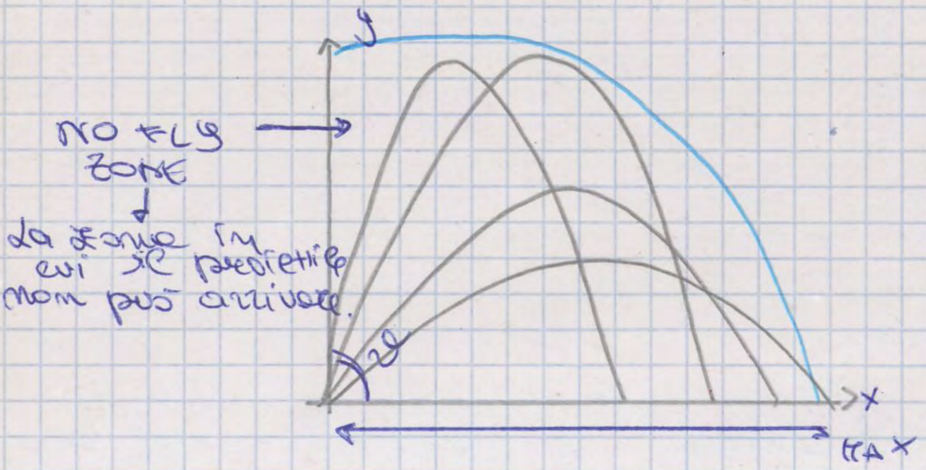
Spazio percorso (= GITTATA) ⇒ $x = v_{0x}\, t_{TOT} =$

$$= v\cos\vartheta \, \frac{2v}{g} sen\,\vartheta =$$

$$= 2\frac{v^2}{g} sen\,\vartheta \cos\vartheta =$$

$$x_{gitt} = \frac{v^2}{g} sen\, 2\vartheta$$

PER QUALE ANGOLO ϑ SI RAGGIUNGE LA MAX GITTATA?



$$\frac{dx_{gitt}}{d\vartheta} = 0$$

$$x_{gitt} = \frac{v^2}{g} sen\, 2\vartheta \Rightarrow \frac{dx_{gitt}}{d\vartheta} = 2\frac{v^2}{g}\cos 2\vartheta$$

$\vartheta = \frac{\pi}{4}$ → per un angolo di 45° si ottiene la max gittata

COMPOSIZIONE DI DUE MOTI ARMONICI PARALLELI

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \beta) =$$

$$= A \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)$$

$$\left[\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \right]$$

$$x = A_1(\operatorname{sen}\omega t \cdot \cos\alpha + \cos\omega t \cdot \operatorname{sen}\alpha) + A_2(\operatorname{sen}\omega t \cos\beta +$$

$$+ \cos\omega t \operatorname{sen}\beta) =$$

$$= (A_1 \cos\alpha + A_2 \cos\beta) \operatorname{sen}\omega t + (A_1 \operatorname{sen}\alpha + A_2 \operatorname{sen}\beta) \cos\omega t =$$

$$= A \operatorname{sen}\omega t \cos\gamma + A \cos\omega t \operatorname{sen}\gamma$$

$$A \cos\gamma = A_1 \cos\alpha + A_2 \cos\beta$$

$$A \operatorname{sen}\gamma = A_1 \operatorname{sen}\alpha + A_2 \operatorname{sen}\beta$$

$$\boxed{tg\,\gamma = \frac{A_1 \operatorname{sen}\alpha + A_2 \operatorname{sen}\beta}{A_1 \cos\alpha + A_2 \cos\beta}}$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha - \beta)}}$$

$$\alpha = \beta \qquad tg\,\gamma = tg\,\alpha = tg\,\beta$$

$$A = A_1 + A_2$$

Se $\underbrace{w_1 \neq w_2}_{\text{sono le pulsazioni}}$ (fenomeno che avviene se le frequenze sono uguali).

$K_1 \omega_1 = K_2 \omega_2$ $\quad K_1, K_2 \in \mathbb{N}$

periodo $T = K_1 T_1 = K_2 T_2 \Rightarrow$ { T_1 e T_2 sono i periodi dei singoli moti }

FENOMENO DEL BATTIMENTO

circa uguale ≠

2 moti armonici sullo stesso asse e stesse ampiezze.

Se $\omega_1 \simeq \omega_2$ $\qquad A_1 = A_2 \equiv A$

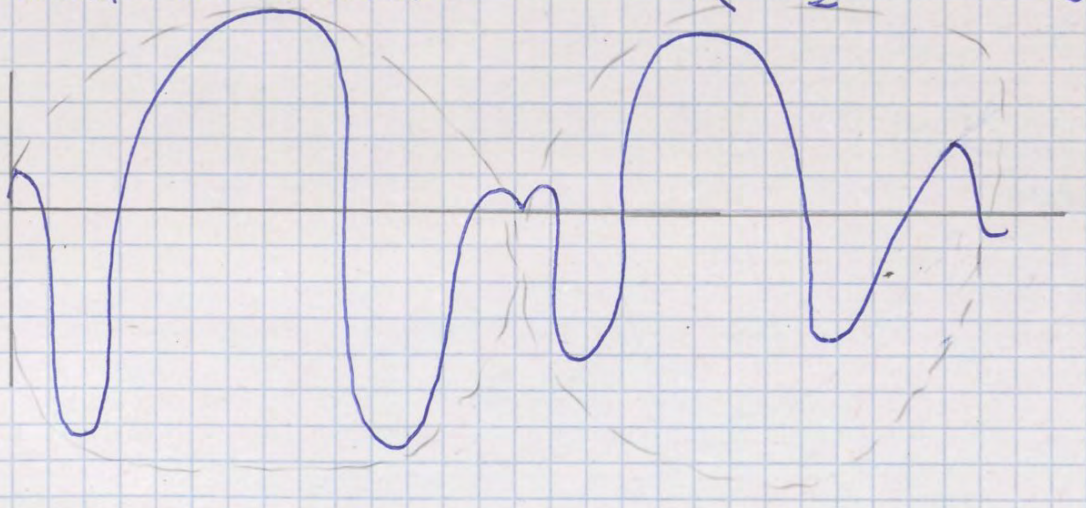
$$x = A\,sen(\omega_1 t + \alpha) + A\,sen(\omega_2 t + \beta) =$$

$$\left[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta) = 2\,sen\alpha\cos\beta \right]$$

$$= B\,sen\left(\frac{w_1+w_2}{2}t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$\downarrow$

l'ampiezza non è costante, ma modulata $\rightarrow 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$



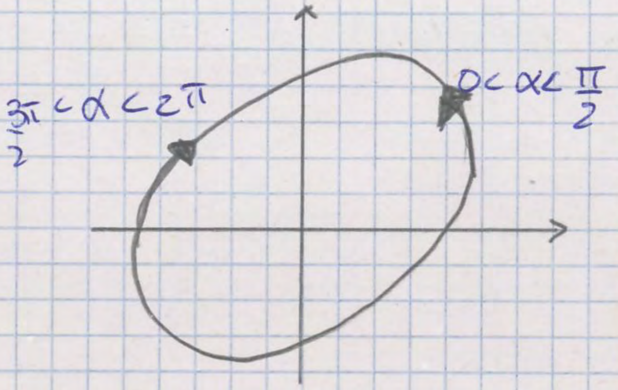
- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

  Eq di un ellisse con l' asse maggiore inclinato.

  senso antiorario

- $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

  senso orario

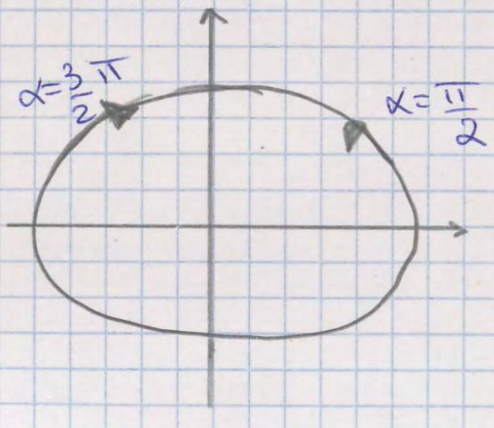


- $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

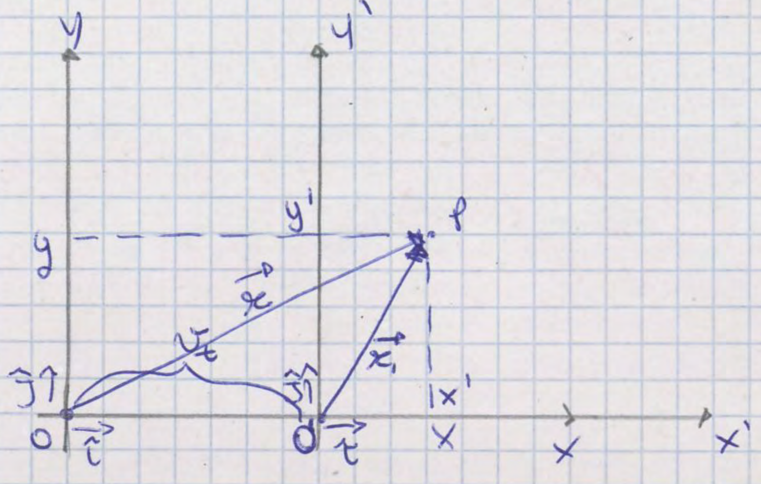
$\alpha = \frac{\pi}{2}$ senso antiorario

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

$\alpha = \frac{3}{2}\pi$ senso orario



OSSERVATORE FISSO E OSSERVATORE (O') CHE SI MUOVE



molto minore

$$v_t \ll c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$t \equiv t'$$

$$\vec{r} \equiv \vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{r}' \equiv \vec{O'P} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}'$$

Relazione tra $\vec{r}$ e $\vec{r}'$:

$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\,\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}'$$

$\downarrow$ si chiama velocità di trascinamento

Sto sul treno. Mi sto muovendo. Un passeggero vicino a me è fermo rispetto a me ma è trascinato dal mio stesso sistema di riferimento.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_t}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} =$$

$$= a_t + a'$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\hat{\imath}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \hat{\imath} \\ \frac{d\hat{\jmath}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \hat{\jmath} \\ \frac{d\hat{k}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \hat{k} \end{aligned}} \longrightarrow$$

POISSON

descriviamo la rotazione elementare ω dei versori intorno ad un'asse

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \left(x'\vec{\omega} \wedge \hat{\imath}\,' + y'\vec{\omega} \wedge \hat{\jmath}\,' + z'\vec{\omega} \wedge \hat{k}\,' \right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \wedge \left(x'\hat{\imath}\,' + y'\hat{\jmath}\,' + z'\hat{k}\,' \right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

In una rotazione in cui le origini coincidono e tutti gli assi stanno ruotando, la velocità misurata dal sistema fisso è in relazione con la velocità del sistema che si sta muovendo più $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$.

Derivando ulteriormente troviamo le accelerazioni:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

(v' è la velocità del mobile visto da O')

$$v' = v_x'\,\hat{\imath}\,' + v_y'\,\hat{\jmath}\,' + v_z'\,\hat{k}\,'$$

Visto da O:

$$\frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \frac{d\vec{v}_x\,'}{dt}\hat{\imath}\,' + \frac{d\vec{v}_y\,'}{dt}\hat{\jmath}\,' + \frac{d\vec{v}_z}{dt}\hat{k}\,' + v_x'\frac{d\hat{\imath}\,'}{dt} + v_y'\frac{d\hat{\jmath}\,'}{dt} + v_z'\frac{d\hat{k}\,'}{dt} =$$

$$= a' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}\,'$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) \Big|_{\parallel} = \omega^2 R \cos\lambda \, \text{sen}\lambda$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) \Big|_{\perp} = \omega^2 R \cos^2\lambda$$

Riscrivo $\boxed{\qquad}$:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R})$$

$$\vec{a}\,' = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R})$$

è quella che misuro in laboratorio

↓ accel. di gravità

↓ è quella che misuro rispetto alle stelle fisse

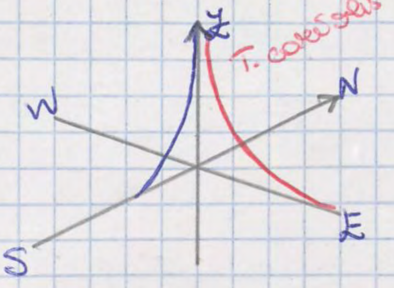
accel. di gravità → cambia da punto a punto
↓
è minima all'eq. ES

$$\frac{\Delta \vec{g}}{g} \simeq 0,3\%$$

g = 9,83 m/s²

g = 9,78 m/s²

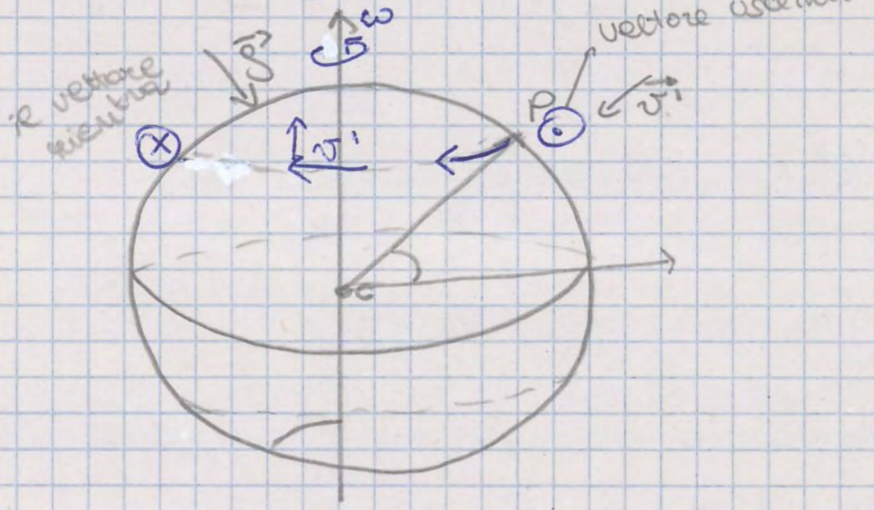
↓
è max a 45°



Termine centrifugo — attenua il valore di g.

devia gli oggetti verso sud nel nostro emisfero

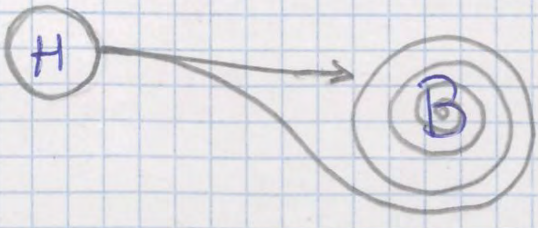
Termine di Coriolis $(-2\vec{\omega} \wedge \vec{v}')$



$|2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'| = 2\omega v' \cos \lambda$

- devia gli oggetti verso sud-est nell' emisfero nostro, verso nord-ovest nell'altro.

Immaginiamo di avere due masse d'aria



cicloni → emisfero nord

anticicloni → emisfero sud.

Newton fa suo il principio di inerzia di Galileo

"In assenza di forze il sistema rimane nel suo stato di $\underbrace{\text{moto rettilineo uniforme}}_{\text{conseguenze}}$."

conseguenze 1ª legge della dinamica

↓

"la velocità rimane costante"

- Se in un S.D.R.I io osservo delle interazioni ⇒
⇒ ci saranno delle accelerazioni.

$$\vec{R} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \neq 0$$

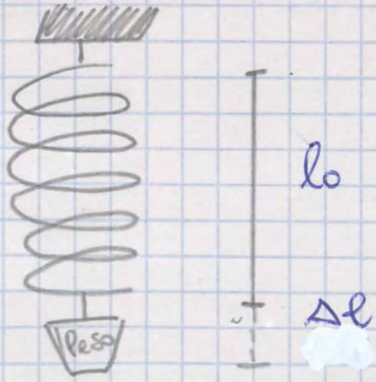
2ª legge di Newton

Oggetti

elastici — plastici

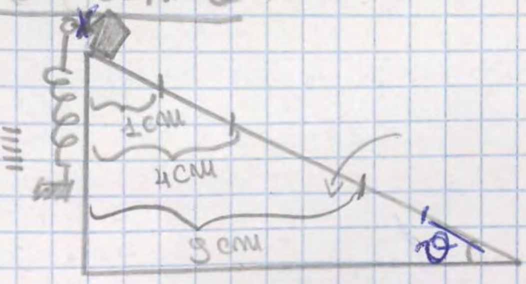
- Sotto l'azione di una forza si deformano, ma cessata la sollecitazione, riprende la sua forma iniziale.

Es. **molla**



→ la molla si allunga

PIANO INCLINATO



$s \alpha t^2$ moto rettilineo unif. accel.

Galileo → su un piano inclinato, un oggetto lasciato cadere, si muove di moto rettilineo unif. accelerato

L'allungamento della molla del dinamometro dipende dalla massa del corpo e dall'inclinazione del piano.

$\Delta l_1 : F_1 : a_1$

Si taglia il filo (x) e si lascia cadere il corpo con un' accelerazione a_1.

$\Delta l_2 : F_2 : a_2$

$\Delta l_3 : F_3 : a_3$

Ripeto n volte l'esperimento e poi metto in tabella i risultati.

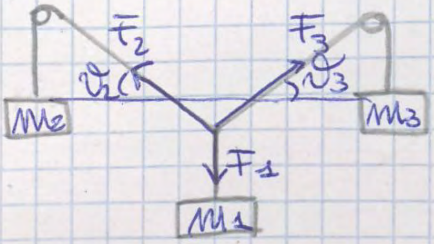
$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = K$$

La forza non dipende da:

- massa del corpo
- inclinazione del piano ("ϑ")

$$\frac{F}{a} = m \Rightarrow \boxed{F = m \cdot a}$$ 2° legge di Newton.

ESPERIENZA DI VARIGNON



Il sistema è in equilibrio se e solo se

$$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=0$$

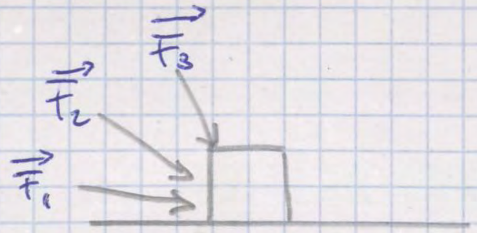
Rienunciamo il 1° principio della dinamica

- se $v = 0$ del sistema e del corpo, il corpo è in eq. statico
- se $v = 0$ del sistema ma la v del corpo è $\neq 0$, il corpo è in eq. dinamico

$\vec{R}=0 \Rightarrow \vec{v}=\text{cost} \Rightarrow \vec{a}=0$

$\sum_i \vec{F_i}$ = (risultante delle forze) = 0 $\quad \vec{v}=0$ EQ. STATIC

$\sum_i \vec{F_i}=0 \quad \vec{v}=\text{cost.}$ EQ DINAMICO



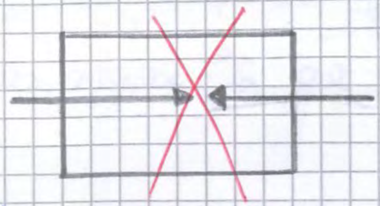
$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3} = m\cdot\vec{a}$$

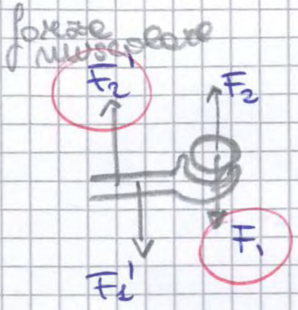
$$\vec{F_1} = m\cdot\vec{a_1}$$
$$\vec{F_2} = m\cdot\vec{a_2}$$
$$\vec{F_3} = m\cdot\vec{a_3}$$

$$\sum\vec{F_i} = m\cdot\sum\cdot\vec{a_i} = m\cdot\vec{a}$$

3ª LEGGE DI NEWTON

"Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria".





$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$

$\vec{F_1}' = -\vec{F_2}'$

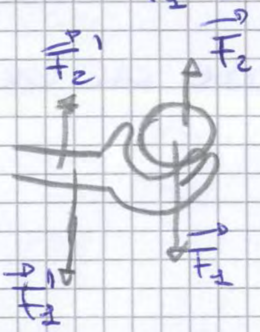
condizione di equilibrio statico

legge di equilibrio

$\vec{F_1} = -\vec{F_2}'$ 3° legge di Newton

$\Downarrow$ conseguenza

$\vec{F_1}' = -\vec{F_2}$



$\vec{F_1} > -\vec{F_2}$

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \neq 0$

$\vec{F_1}' > \vec{F_2}'$

$\vec{R}' = \vec{F_1} + \vec{F_2}' \neq 0$

C'è dinamica perchè le due forze sono applicate non allo stesso oggetto.

Es. (mano(braccio) - pietra)

$$\boxed{\vec{F_1} = -\vec{F_2}'}$$

FORZE NATURALI

- FORZA ELETTROMAGNETICA $F_e \sim \frac{1}{r^2}$ distanza

↓

Elettrica + Magnetica → furono unite da Maxwell.

- FORZA GRAVITAZIONALE $F_g \sim \frac{1}{r^2}$

Sono a lungo raggio d'azione.

- FORZA NUCLEARE FORTE (NF)
- FORZA NUCLEARE DEBOLE (ND)

Sono a breve raggio d'azione
↓
si studiano solo a livello del nucleo

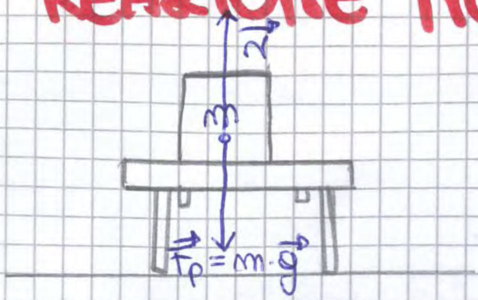
ORDINANDOLE PER INTENSITÀ

NF	1
EM	10^{-2}
ND	$10^{-5} - 10^{-7}$
G	10^{-38}

Per sentire l'EM devo avere delle disomogeneità di carica (→ le trovo a livello del nucleo).

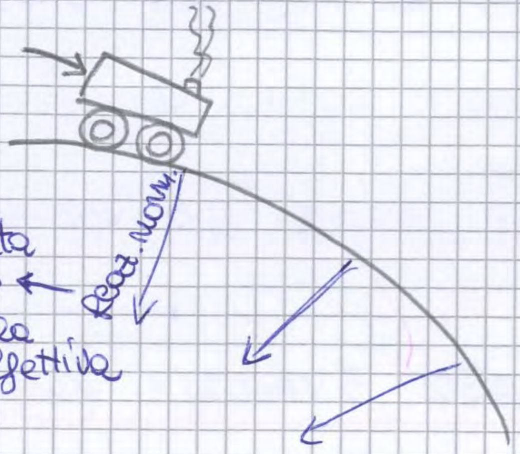
REAZIONE NORMALE

→ dipendono dalle con
zioni di contorno.
Devono ogni volta esse
calcolate.



$\vec F_p = -\vec N$

il corpo non si muove e non cade perché il tavolo è un vincolo, si oppone.

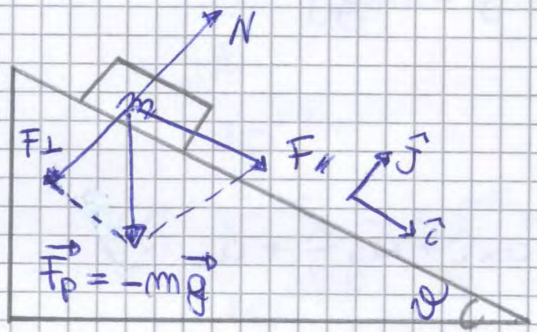


combinata con la $\vec F$ ← ci dà la forza effettiva

le rotaie del binario stanno esercitando una forza sul trenino che è costretto a seguire quel percorso.

$\vec F + \vec N$

condizione dettata dal vincolo



$F_\parallel = F_p\cdot\cos\vartheta$

$F_\perp = F_p\cdot \text{sen}\,\vartheta$

Risolviamo $\vec F = m\cdot\vec a$:

$\vec F = F_\parallel\,\hat\imath + F_\perp\,\hat\jmath$

$\vec a = a_\parallel\,\hat\imath + a_\perp\,\hat\jmath$

$$\boxed{\begin{array}{l} F_\parallel = m\cdot a_\parallel \Rightarrow mg\cdot\cos\vartheta = m\cdot a_\parallel \\ F_\perp = m\cdot a_\perp \Rightarrow mg\cdot\text{sen}\,\vartheta = m\cdot a_\perp \end{array}}$$

N si oppone al moto lungo la verticale.

$F_\perp + N = 0 \Rightarrow |\vec N| = -mg\cdot\text{sen}\,\vartheta$

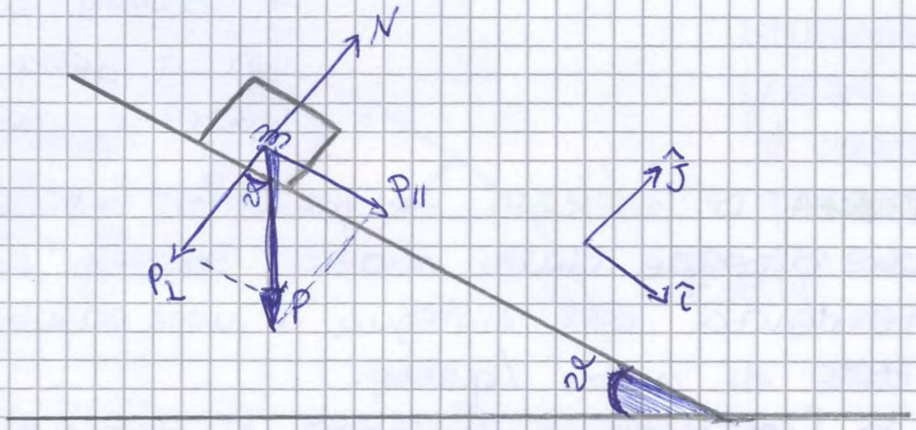
Quando $F_{\parallel}$ piano $\Rightarrow$ $\vec{N} = m \cdot g \cdot \hat{j}$

La normale è massima

N_{max} quando $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

Quando è diretta verso l'alto $\Rightarrow$ $N = mg - F\,\text{sen}\,\vartheta$

Quando $mg = F\,\text{sen}\,\vartheta$ $\Rightarrow$ $N = 0$ quindi vince $m \cdot g$ e riesce a sollevare il corpo.



$P_{\parallel} = mg \cdot \text{sen}\,\vartheta$

$P_{\perp} = mg \cdot \cos\vartheta$

$\Rightarrow$ $\cancel{m}g\,\text{sen}\,\vartheta = \cancel{m} \cdot a$

$a = g \cdot \text{sen}\,\vartheta$

MOTO RETTILINEO UNIFORM. ACCELERATO

$$g \cdot \text{sen}\,\vartheta = \frac{d^2x}{dt^2}$$

velocità iniziale del blocco

$$x = x_0 + \boxed{v_0}\,t + \frac{1}{2}\,g \cdot \text{sen}\,\vartheta \cdot t^2$$

$t = 0$

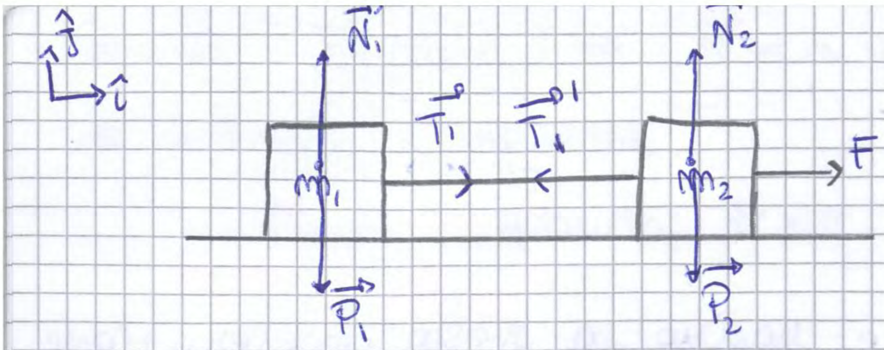
$x = x_0$

$v = v_0 + at$

per $t = 0$ $v = v_0$

$-P_{\perp} + N = m \cdot a_{\perp}$ $\Rightarrow$ $a_{\perp} = 0$

$N = P_{\perp} = mg \cdot \cos\vartheta$ REAZIONE VINCOLARE



sull'asse $\hat{j}$ non c'è moto. le accelerazioni sono nulle:

$$\vec{N}_1 = \vec{P}_1 = m_1 \cdot g \cdot \hat{j}$$

$$\vec{N}_2 = \vec{P}_2 = m_2 \cdot g \cdot \hat{j}$$

sull'asse $\hat{i}$:

$$\begin{cases} \vec{T}_1 = m_1 \vec{a} \\ \vec{T}_1 = \vec{T}_1' \\ \vec{F} - \vec{T}_1' = m_2 \vec{a} \end{cases}$$

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

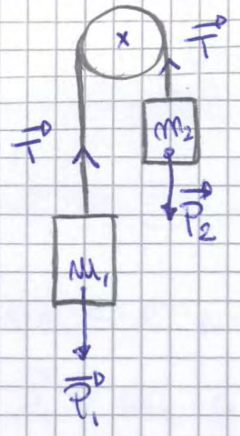
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_1 + m_2}$$

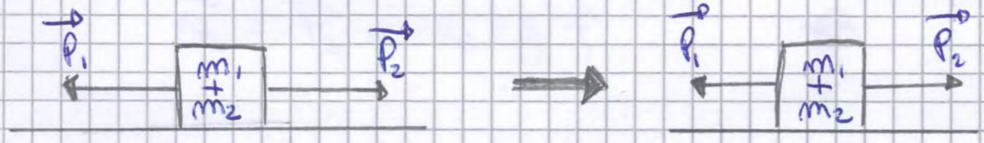
$$\vec{F} - \vec{T}_1' = m_2 \vec{a}$$

$$-\vec{T}_1' = -F + m_2 a = F - m_2 \cdot \frac{F}{m_1 + m_2} = F \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{T}_1' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot F\hat{i}$$

MACCHINA DI ATWOOD





$$\vec{P_1} + \vec{P_2} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$\vec{P_1} = -m_1 g \hat{i}$$

$$\vec{P_2} = m_2 g \hat{i}$$

$$(m_2 - m_1) g \hat{i} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$\vec{P_1} + \vec{T} = m_1 \vec{a}$$

$$\vec{P_2} + \vec{T} = -m_2 \hat{i}$$

$$\vec{P_1} - \vec{P_2} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

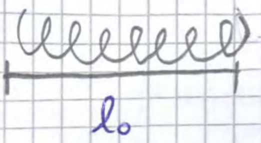
$$(m_2 - m_1) g = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$\vec{P_1} = -m \cdot g \cdot \hat{j}$$

$$\vec{P_2} = -m_2 g \hat{j}$$

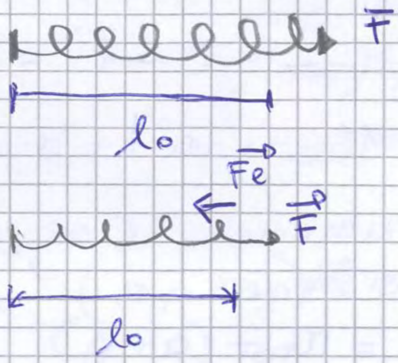
FORZA ELASTICA

→ non è costante.
Varia col variare dell'allungamento della molla.



$\vec{F} = -K\Delta\vec{l}$ LEGGE DI HOOCK

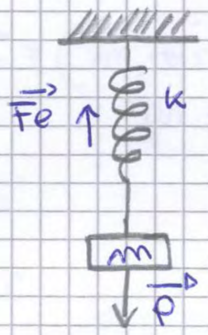
$-$ indica che questa forza è opposta allo spostamento



$$\vec{F_e} = -k\,(\vec{l}-l_0)$$

$$|\vec{Fe}| = k\,(l-l_0)$$

$$[k] = \frac{N}{m} = \frac{kg\cdot m\cdot s^{-2}}{m} = kg\cdot s^{-2}$$



$$|\vec{Fe}| = |\vec{P}|$$

$$k\,\Delta y = m\cdot g$$

$$\Delta y = \frac{mg}{K}$$

$$[\Delta y] = \frac{kg\cdot m\cdot s^{-2}}{kg\cdot s^{-2}} = m$$

Accel. data in funz. della posizione, non del tempo.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot v = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\cdot v^2$$

$\vec{P} + \vec{N} = 0$ $\vec{N} = m\cdot g\cdot\hat{j}$

$$F_e = -k\Delta x\hat{i} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{a} = -\frac{k}{m}(x-x_0)\hat{i}$$

$$\int_{v}^{\overset{\text{velocità finale}}{\textcircled{v_0}}} \frac{1}{2}\,dv^2 = \int_{x_i}^{x_0} a\,dx$$

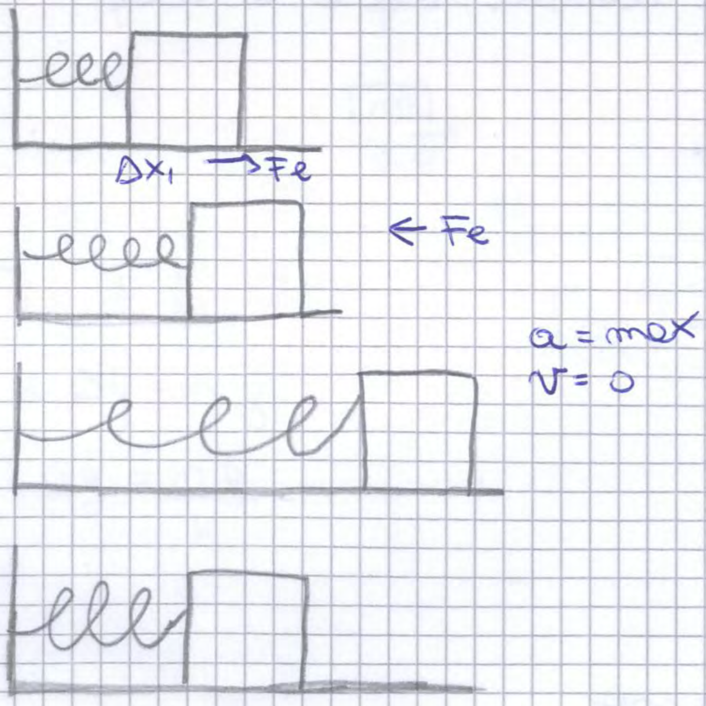
$$v^2 - v_0^2 = 2\int_{x_i}^{x_0} a\,dx = -\frac{2k}{m}\int_{x_i}^{x_0}(x-x_0)\,dx$$

$$v^2 - v_0^2 = -\frac{k}{m}(x-x_0)^2\Big]_{x_i}^{x_0} \rightarrow \text{calcolato tra}$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{k}{m}(x_i - x_0)^2$$

$$v^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,|\Delta x|$$

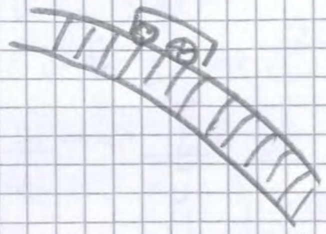
Se il blocco è attaccato alla molla?



21-03-14

FORZA CENTRIPETA

Può essere una tensione che impedisce all'oggetto di mu versi su una sua traiettoria, obbligandola a seguire un'orbita prestabilita.



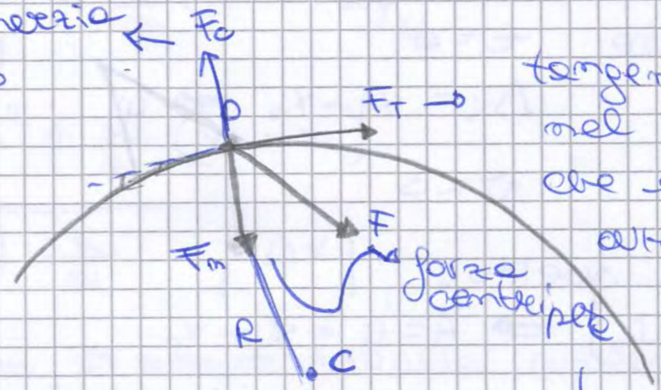
Def.

La forza centripeta è la componente normale alla traiettoria nel punto considerato.

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{a} = a_t \hat{\tau} + a_n \hat{n}$

$\vec{F} = F_t \hat{\tau} + F_n \cdot \hat{n}$



forza di inerzia che il corpo oppone

tangente alla traiettoria nel punto considerato che è responsabile dell'aumento della velocità del corpo.

forza centripeta

forza che il vincolo esercita sull'oggetto impedendolo ne il moto rettilineo

$\frac{v_t^2}{R} = R\omega^2$

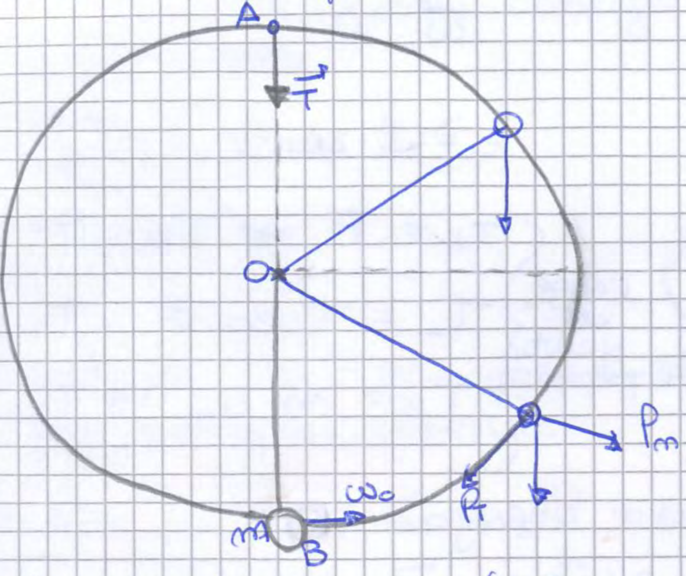
$F_t = m \cdot a_t$

$F_n = m \cdot a_n \Rightarrow F_n = m \cdot \frac{v_t^2}{R}$

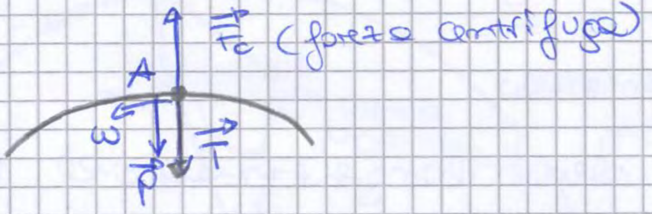
$\vec{F_c} = -\vec{F_n} = -m \cdot \frac{v_t^2}{R} \cdot \hat{n}$

Se la fune si spezza, la pallina si troverà di moto rettilineo uniforme perché non è più vincolata e quindi non c'è più accelerazione centripeta.

ES 2



Qual è la minima velocità che dobbiamo imprimere affinché la pallina si trovi di moto circolare uniforme?



$\vec{T} = 0$

La più bassa velocità ce l'ho quando la tensione è 0.

Quindi:

$\vec{F_c} = P$ (forza peso)

$$m l \omega^2 = mg \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Qual è la velocità ω_0 che permette al corpo di arrivare nel punto A con velocità $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$?

componente tangenziale $P_t = mg \cdot \sin\vartheta$

P_t tende a rallentare il moto → è una decelerazione

ES3 PENDOLO SEMPLICE

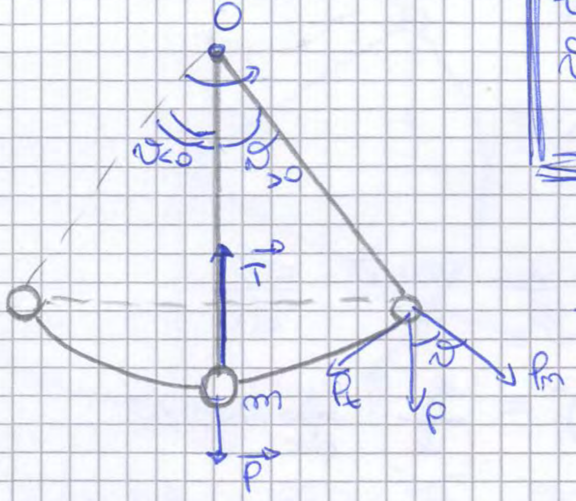
- filo inestensibile fissato in O, di massa m, che viene fatto oscillare.

Trovare la legge oraria.

$t=0$

$\vartheta(t_0) = \vartheta_i$ iniziale

$\vartheta(t_0) = 0$



→ descrive un moto armonico con un certo periodo

componente normale

$P_n = m \cdot g \cdot \cos\vartheta$

$P_t = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\vartheta$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$\begin{cases} T - P_n = m \cdot a_n \\ -m \cdot g \cdot \text{sen}\,\vartheta = m \cdot l \cdot \dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} \end{cases}$$

Integro:

$$\cancel{\frac{d\omega^2}{dt} = -\frac{g}{l} \cdot \cos\vartheta}$$

non la so più integrare. Non me la tengo perche' non serve

Ipotizziamo che $\vartheta \ll 1$ molto minore:

$$\text{sen}\,\vartheta \simeq \vartheta - \frac{1}{3!}\vartheta^3 + O(\vartheta^5)$$

$O(\vartheta^5)$

dell'ordine ϑ^5

3 fattoriale

L'espressione diventa:

$$l \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g\vartheta \Rightarrow \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \vartheta$$

definisco:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}}$$

FORZE DI ATTRITO

- ATTRITO RADENTE
- ATTRITO VOLVENTE
- ATTRITO INTERNO
- ATTRITO DEL MEZZO

↓

① Quando c'è strofinio tra 2 superfici

② Oggetto che strofina rotolando su una superfici

④ Un corpo che si muove all'interno di un fluid
(liquido o gas)

③ Attrito che si manifesta tra le parti del fluido.

ATTRITO RADENTE

STATICO
↓
forza che si genera sulle superf. limite di due oggetti.

DINAMICO
→ forza che si manifesta quando un oggetto si muove sull'altro.

AL DISTACCO (caso limite tra stat. e dinam-

F_a non dipende dalla superficie ma dal materi dei corpi.

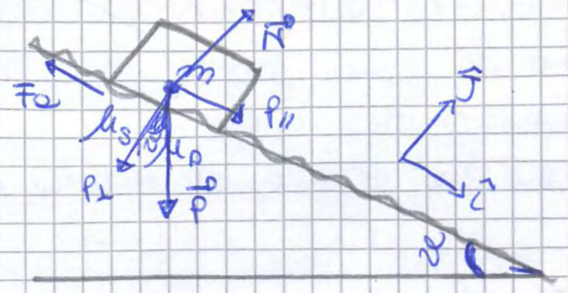
$$\vec{F_a} = \mu \cdot |\vec{N}| \hat{i}$$

↓
coeff. d'attrito
differenzia l'attrito statico dall'attrito dinamico.

$\mu_s > \mu_d$

$|\mu_{soo}| < 1$ $\mu = 1$ → un oggetto è incollato

ES2 PIANO INCLINATO



$$\vec{P} = P_{\parallel}\hat{i} + P_{\perp}\hat{j}$$

$$P_{\parallel} = m g \cdot \text{sen}\,\vartheta$$

$$P_{\perp} = m \cdot g \cdot \cos\vartheta$$

asse $\hat{j}$ $\quad |\vec{P_{\perp}}| = |\vec{N}|$

la normale sul piano dipende dall'inclinazione del piano inclinato.

$$|\vec{N}| = m \cdot g \cdot \cos\vartheta$$

asse $\hat{i}$

$$P_{\parallel} - F_a = m \cdot \vec{a} \quad ??$$

quando è =, abbiamo attrito al distacco

$$P_{\parallel} \geq F_{a_s} = \mu_s |\vec{N}| = \mu_s \cdot m \cdot g \cdot \cos\vartheta$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\,\vartheta \geq \mu_s \cdot m \cdot g \cdot \cos\vartheta$$

$$\boxed{\frac{\text{sen}\,\vartheta}{\cos\vartheta} = \mu_s}$$

$$\boxed{\vartheta_{lim} = \text{arctg}\,\mu_s}$$

$$P_{\parallel} - F_a = m \cdot a$$

$$|\vec{F_a}| = \mu_D |\vec{N}| = \mu_D \cdot m \cdot g \cdot \cos\vartheta$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\,\vartheta > \mu_D\, m g \cdot \cos\vartheta$$ OK

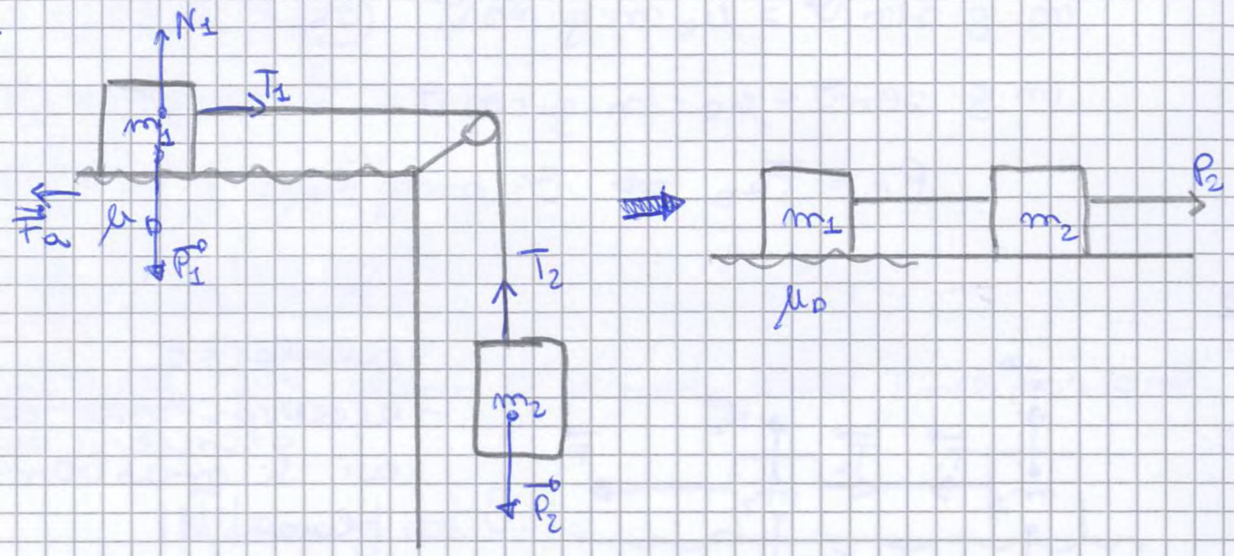
C'è moto rettilineo uniform. accelerato.

$$a = \frac{F}{m_1+m_2} - \frac{\mu_{1D}\, m_1 + \mu_{2D}\, m_2}{m_1+m_2}\cdot g$$

Nota l'accelerazione trovo la tensione:

$$T = m_1 \cdot a + \mu_{1D}\, m_1\, g$$

ES 4



$$|\vec{P_1}| = |\vec{N_1}|$$

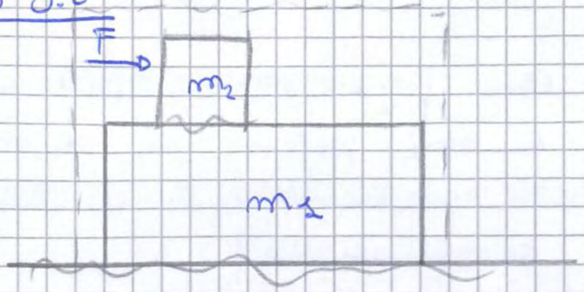
$$\left.\begin{aligned} \vec{F_a} + \vec{T_1} &= m_1 \vec{a} \\ \vec{T_2} + \vec{P_2} &= m_2 a \end{aligned}\right\} \quad \vec{F_a} + \vec{P_2} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$a = \frac{m_2 g}{m_1+m_2} - \frac{\mu_D m_1 g}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{m_2 - \mu_D m_1}{m_2 + m_1}\cdot g$$

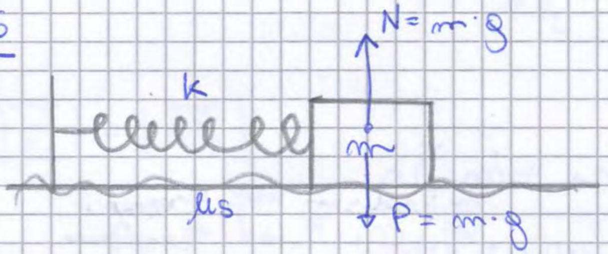
Rispetto al caso senza attrito
↓
per quanto grande possa essere la massa la m_2 se la trascina dietro → con l' attrito tutto dipende dal coeff. di attrito (μ).

ES 5.2



Applico la forza a m_2 invece che a m_1. Cosa succede?

ES 6



$\vec{R} = 0$

$$F_{a_{max}} = \mu_s \cdot |\vec{N}| = \mu_s \cdot m \cdot g$$

La forza elastica può essere > o < della forza di attrito.

$$\Delta x = |(x - x_0)| << 1$$

La condizione di equilibrio è:

$$|F_e| \overset{\text{deve essere}}{=} F_{a_{max}}$$

$k(x - x_0) = \mu_s \cdot m \cdot g$ se $x > x_0$

$k(x - x_0) = \mu_s \cdot m \cdot g$ se $x < x_0$

$\Downarrow$

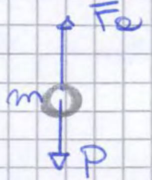
Il sistema è in equilibrio

$m\cdot g = b\cdot v$

$v = \frac{m\cdot g}{b} = \frac{m\cdot g}{6\pi\eta r}$ → Tanto più grande è r, tanto più lenta sarà la velocità.

↓

più grande è il paracadute più lentamente scenderò



$P - F_a = m\cdot a$

$m\cdot g - bv = m\cdot\frac{dv}{dt}$

(eq. differenz del 1° ordine a coeff costanti

$-bv = m\cdot v'$

$-\frac{b}{m}dt = \frac{dv}{v}$

Le integro e trovo:

$-\frac{b}{m}t = \ln v + c$

$v = \overset{\text{costante}}{c}\cdot e^{-\frac{b}{m}t}$ → soluzione dell'omogenea non del problema

$v = (ct)\cdot e^{-\frac{b}{m}t}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{dc}{dt}\cdot e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{b}{m}\cdot c\cdot e^{-\frac{b}{m}t} =$

$= \frac{dc}{dt}\cdot e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{b}{m}\cdot v$

$\cancel{m}\cdot g - \cancel{b\cdot v} = \cancel{m}\cdot\frac{dc}{dt}\cdot e^{-\frac{b}{m}t} - \cancel{bv}$

$\frac{dc}{dt} = g\cdot e^{\frac{b}{m}t}$

Laboratorio 3 dalle 11.30 - 14.30 24-03-14

PROPAGAZIONE DELL' INCERTEZZA

Nel misurare possiamo imbatterci negli errori (o incertezze)

errori sperimentali
↓
errori che affliggono la misura in maniera inspiegabile per noi (es. variazioni di temperatura / pressione)
↓
per risolvere il problema?
↓

errori sistematici
↓
sono errori che si commettono sempre nella stessa maniera (es. strumento non tarato o difettoso)
↓
per risolvere il problema possiamo misurare con strumenti e metodi diversi.

Es.
Misuro g e ottengo valori diversi.

9,81 $\xi_i = 0$
9,71 $\xi_i = 0{,}02$
9,91 $\xi_i = -0{,}03$
9,77 $\xi_i = 0{,}01$
9,86

$\xi \simeq 10^{-2}$

Determino lo <u>SCARTO</u> → variazione tra un valore e un altro preso come riferimento. (di solito il valore medio).

SCARTO

$$\xi_i = X_i - x^*$$

Misura
- accurata → la media si avvicina al valore effettivo della mis
- precisa → il valore medio corrisponde al valore effettivo della misura.

$$\xi = \sqrt{\xi^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_i (x_i - x^*)^2}$$ deviazione standard

Varianza e deviazione standard mi danno informazioni sugli eccessi o difetti di misura intorno al valore medio.

deviaz. standard
$$\xi = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x^*)^2}{n-1}}$$

$$x_1, x_2 \rightarrow x_1 - x_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_1 - x_2$$
$$x_1 - x_3$$

Supponiamo di aver ottenuto un certo numero x^n di misure.

x_1

x_2

$\vdots$

x_n

$$x_{min} \in \{x_i\}$$
$$x_{max} \in \{x_i\}$$

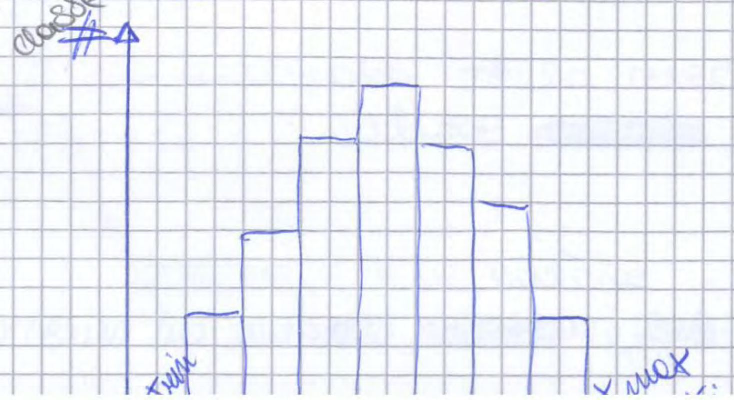
$$\Delta x = \frac{|x_{min} - x_{max}|}{K}$$

$$\#1 = (x_{min}, x_{min} + \Delta x)$$

$$\#2 = (x_{min} + \Delta x, x_{min} + 2\Delta x)$$

$$\vdots$$

$$\# k = (x_{min} + (k-1)\Delta x, x_{max})$$



Qual è la probabilità che fatta una misura P io ottengo un valore compreso tra a e b?

$$P=(a,b) = \sum_{i=a}^{b} P_i$$

$$P(a,b) = \int_a^b dP = \int_a^b P(\xi)\,d\xi$$

$$P(-\infty,\infty) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi)\,d\xi$$

°La funzione di Gauss mi dice qual é la probabilità di fare una misura e ottenere un valore misurato compreso tra ξ e $\xi+\Delta\xi$.

$f(\xi)\,d\xi \rightarrow$ Probabilità di ottenere ξ^* (scarto)

$$\xi^* \in (\xi, \xi+\Delta\xi)$$

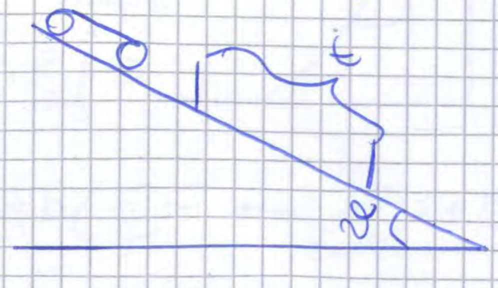
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\xi}\cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\xi^2}}} \quad P(x, x+dx)$$

Se ξ é piccolo, $\frac{1}{\xi}$ è molto piccolo e quindi la deviazione standard è piccola e ho bassa probabilità di trovare un valore vicino a quello effettivamente vero.

Se la misura non è diretta.

Misurare $z = f(x, y, u, v)$.

L'acceleraz. $a = f(t)$ e $f(\vartheta)$ $\Rightarrow$ $a = f(t, \vartheta)$ funzione del tempo e dell'angolo



$$x_i \Rightarrow \overline{x}$$

$$\Rightarrow \xi_i = (x_i - \overline{x}) \Rightarrow \sqrt{\frac{\sum_i \xi_i^2}{n-1}}$$

Il mio valore medio è una funzione di tutte le misure.

$$\overline{x} = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

$$\xi_{\overline{x}} = \text{errore sulla media} = \sigma = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2 \left(\frac{d\overline{x}}{dx_i}\right)^2} =$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{dx_1} &= \frac{1}{n}(1+0+0+0+\dots) = \frac{1}{n} \\ \frac{d\overline{x}}{dx_2} &= \frac{1}{n}(0+1+0+0+\dots) = \frac{1}{n} \end{aligned}\right]$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{\sum \sigma_i^2 \cdot \frac{1}{n^2}}$$

= è la varianza

$$= \sqrt{n \cdot \xi^2 \cdot \frac{1}{n^2}}$$

Troviamo alla fine

$$\xi_{\overline{x}} = \frac{\xi}{\sqrt{n}}$$

Quindi:

$$x = (\overline{x} \pm \xi_{\overline{x}})$$

$x^* \in (\overline{x} - \xi_{\overline{x}}, \overline{x} + \xi_{\overline{x}})$ 67 %

$x^* \in (\overline{x} - 2\xi_{\overline{x}}, \overline{x} + 2\xi_{\overline{x}})$ 97 %

$x^* \in (\overline{x} - 3\xi_{\overline{x}}, \overline{x} + 3\xi_{\overline{x}})$ 98,7 %

Risolvendo le sistema:

$$a = \frac{1}{m} \cdot \left(\sum_i y_i - b \sum x_i \right)$$

$$nb \cdot \sum x_i^2 - n \sum_i x_i y_i + \sum x_i \sum_i y_i - b \left(\sum x_i \right)^2 = 0$$

$$b = \frac{n \cdot \sum_i x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2}$$

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2}$$

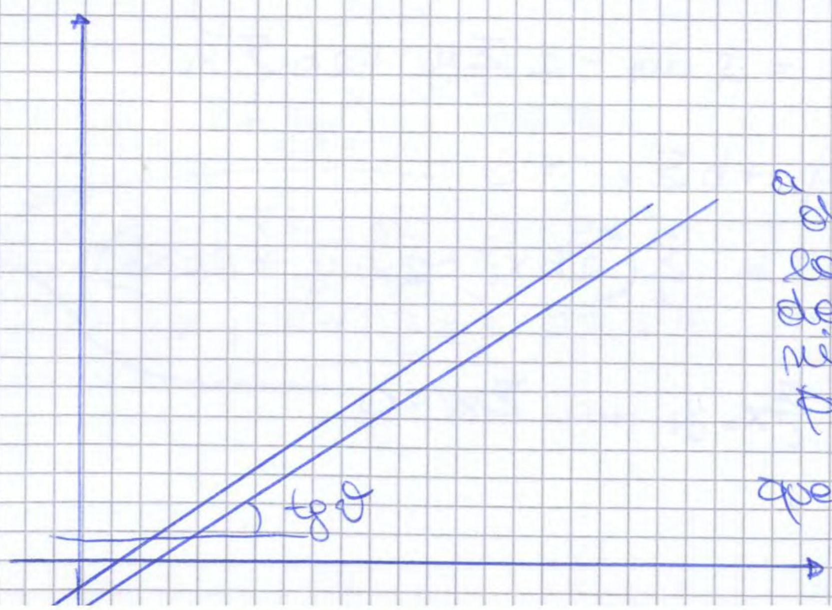
$\boxed{a}$ e $\boxed{b}$ sono i parametri di una retta che passa il più vicino possibile a tutti i punti.

$$a = f(x_i, y_i) \qquad x_i, y_i = \sigma_i = \sigma$$

$$b \equiv g(x_i, y_i)$$

$$\sigma_a = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2 \left(\frac{df}{dy_i} \right)^2} = \sigma \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \cdot \sum_i x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2}}$$

$$\sigma_b = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2 \left(\frac{dg}{dy_i} \right)^2} = \sigma \sqrt{\frac{n}{n \sum x^2 - \left(\sum x_i \right)^2}}$$



a causa degli errori la retta ha delle imprecisio sulla pendenza

↓

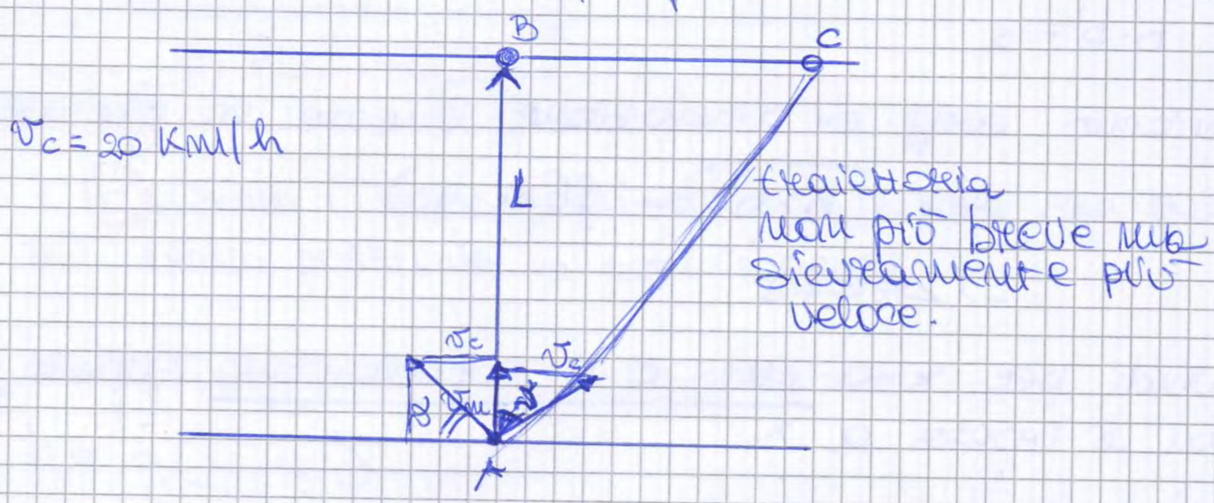
quest' imprecisione è σ_b

Εσερκιζιω

① Un motoscaf può raggiungere una velocità $v_m = 50$ Km/ rispetto all'acqua in cui naviga. Se si deve attraversare un fiume largo $L = 2$ Km in cui la corrente dell'acqua ha una velocità $v_c = 20$ Km/h, si discuta

1) quale rotta si deve seguire x attraversare il fiume in direzione esattamente ⊥.

2) quale rotta si deve seguire x attraversare il fiume nel minore tempo possibile.



$$v = \sqrt{v_c^2 + v_m^2} = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53,8 \text{ Km/h}$$

$$tg\,\vartheta = \frac{v_c}{v_m} \Rightarrow v_{//} = v_m \cos\vartheta = v_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vartheta = \arccos \frac{v_c}{v_m} = \arccos \frac{20}{50} = 1,16 \text{ ra}$$

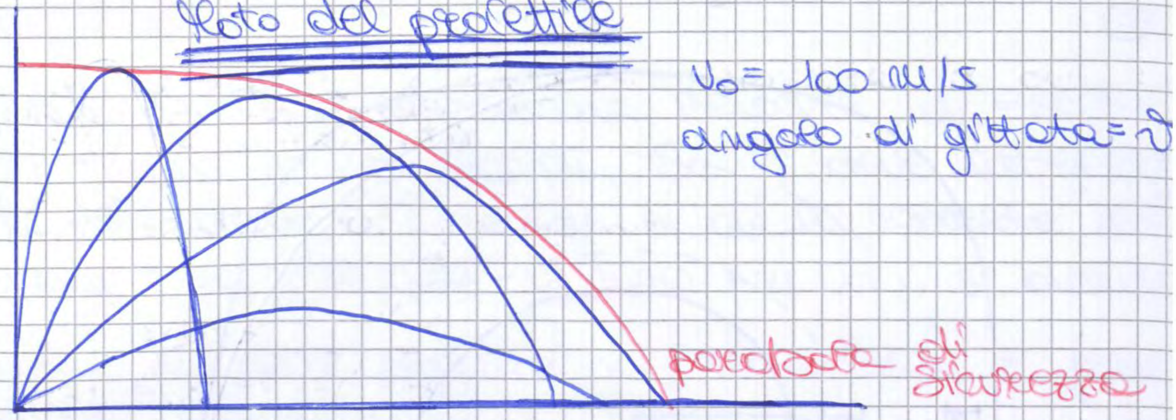
$$t = \frac{L}{v_m} = \frac{2}{50} = 0,04 \text{ h} \times 3'600 = 144 \text{ s}$$

di quanto mi son spostato rispetto a B?

$$s = v_c \cdot t = 20 \cdot 0,04 = 0,8 \text{ Km}$$

③

Moto del proiettile



$v_0 = 100$ m/s

angolo di gittata $= \vartheta$

$$y = x \cdot tg\vartheta - \frac{g x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\vartheta}$$

$$\boxed{\frac{g x^2}{2 v_0^2}}^{a} - x \cdot sen\vartheta \cdot \cos\vartheta + y \cdot \cos^2\vartheta = 0$$

$$a - x\, sen\vartheta \cos\vartheta + y \cdot \cos^2\vartheta = 0$$

$$a + y \cdot \cos^2\vartheta = x \cdot sen\vartheta \cdot \cos\vartheta$$

$$(a + y \cos^2\vartheta)^2 = x^2 sen^2\vartheta \cdot \cos^2\vartheta$$

$$a^2 + 2ay\cos^2\vartheta + y^2\cos^4\vartheta = x^2(1 - \cos^2\vartheta)\cos^2\vartheta$$

$$\cos^2\vartheta = z$$

$$a^2 + 2ayz + y^2 z - x^2 z + x^2 z^2$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow y = f(x)$$

PARTE 1 : ATTRITO NULLO

1) Verificare che la rotaia sia orizzontale.
Misura lunghezza L e altezza h tra tavolo e rotaia (lato superiore).

2) Fissaggio sensori e fotocellule

3) Programmazione timer in modalità "Two gate"

4) Conteggio carrellino

5) ∀ h (5 diverse) fisso 5 traguardi di lunghezza crescente. Ogni misura è ripetuta 5 volte

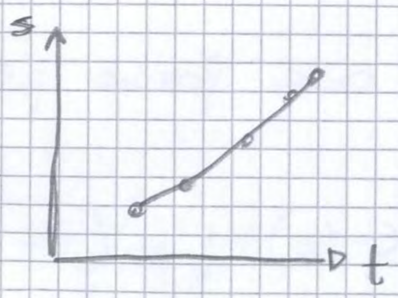
Misurare :
- l' altezza
- distanza tra i due traguardi
- tempo (con lo smart timer)

∀ intervallo, 5 misure

Misura n.	Δt [s]
1	
2	
3	
4	
5	

Analisi dei dati: combiniamo i 5 diversi intervalli a fissata altezza

$$y = 23,451\,x^2 + 22,313\,x + 0$$ Altezza H_1 6,05



Fit -> minimizzare lo scarto

x 5 altezze diverse

MISURAZIONI

$h_0 = 0,02$ m ± $0,001$ m

ERRORE DEL SENO

$$\text{sen}\,\vartheta = \frac{h\ \text{piano}}{l\ \text{piano}}$$

$$e(h) + e(l) = e \cdot \frac{h}{l} = e_{\text{sen}}$$

Media degli errori

$$\sqrt{\Delta s^2} \quad \sum_{i=1}^{5} \frac{(x_i - x)^2}{5}$$

$$\delta \Delta t \quad \frac{\text{max} - \text{min}}{2}$$

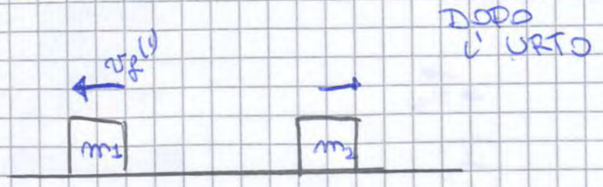
metodo dei minimi quadrati

δv
δa { dalle 2^e tabelle
ma $\delta\Delta$ va ÷ per 2 perchè nell' eq. della parabola abbiamo

$$y = ax^2 + b$$

$$\vec F_{12}\, dt = m_1\, d\vec v_1$$

$$\int_{t'}^{t''} \vec F_{12}\, dt = \int_{v_i^{(1)}}^{v_f^{(1)}} m_1 \cdot dv_1 = m_1 \int_{v_i^{(1)}}^{v_f^{(1)}} d\vec v = m_1 \cdot \vec v_f^{(1)} - m_1 \vec v_i^{(1)}$$



$$\boxed{\vec p = m \cdot \vec v}$$ → esprime la quantità di moto di un corpo.
(Es. Boccia - boccino)

$$\boxed{\vec I_{12} = \Delta \vec P_1}$$ Teorema

"Se su un corpo agisce una forza in un certo intervallo di tempo, questa forza cambia la quantità di moto del corpo."

Se la forza che agisce sul corpo in un certo interv. di tempo: $\vec F = 0$ Δt

$$\vec I = \int_{\Delta t} \vec F\, dt = 0 \Rightarrow \Delta \vec P = 0$$

$$\vec P = cost = m \cdot \vec v \Rightarrow \vec v = cost.$$

Se l'impulso è zero, la velocità è costante e il corpo mantiene la sua quantità di moto.
(tipo PRINCIPIO DI INERZIA)

$$d\vec I = \vec F\, dt = d\vec P = d(m \cdot \vec v)$$

$$\boxed{\vec F = \frac{d\vec P}{dt}}$$ 2ª legge di Newton.

$$\vec F = \frac{d\vec P}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec v) =$$

$$= m \cdot \frac{d\vec v}{dt} + \cancel{\frac{dm}{dt}}\, \vec v$$ → Se la massa è costante il secondo termine si elide.

$$v = \sqrt{2 g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5} = 3{,}1 \ m/s$$

Teorema dell'impulso

$$\vec{F} \Delta t = m \cdot v_f - \cancel{m \cdot v_i}$$

↓ perchè all'inizio la signorina è ferma.

$$\cancel{m} \cdot g \cdot \Delta t = \cancel{m} \cdot v_f$$

$$v_f = g \cdot \Delta t$$

Quanto è lo spazio?

$$\left[h = \frac{1}{2} g \cdot (\Delta t)^2 \right]$$

Calcolo la decelerazione del corpo negli ultimi 10 cm

$$v_i = a \cdot \Delta t \rightarrow \text{tempo impiegato per fermarsi}$$

$$s = v_i t$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \text{correggi il calcolo}$$

$$s = v_i \Delta t - \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 \Rightarrow$$

$$a = g \cdot \frac{h}{s} = 9{,}8 \cdot \frac{5\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 50 \ m/s^2$$

$$\Rightarrow (\Delta t)^2 = \frac{2h}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot s^2}{g \cdot h}} = s \cdot \sqrt{\frac{2}{g \cdot h}} = 0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\cancel{10}_5 \cdot 0{,}5}} =$$

$$= \frac{0{,}1}{\sqrt{25}} = \frac{0{,}1}{5} s = 0{,}02 s$$

$$F_m \Delta t = \Delta \vec{P}$$

$$F_m = \frac{m \cdot v}{\Delta t} = \frac{40 \cdot 3{,}1}{0{,}02} = 6'000 \ N$$

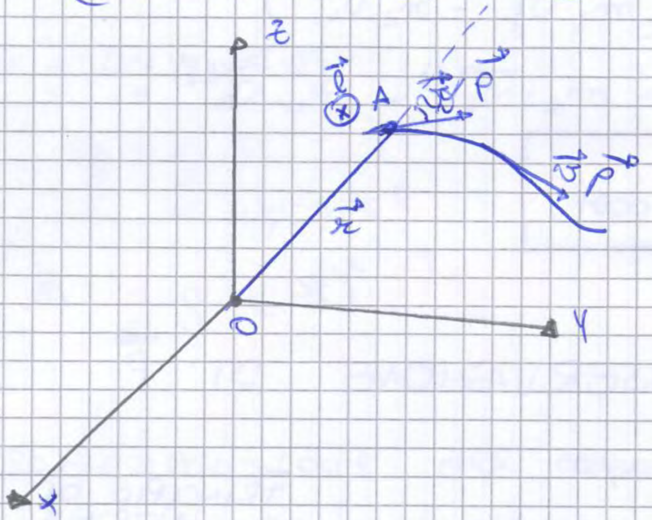
$$\vec{I}_{12} = \int_{\Delta t} \vec{F}_{12} \, dt = \Delta \vec{P}_1$$

$$\vec{I}_{21} = \int_{\Delta t} \vec{F}_{21} \, dt = \Delta \vec{P}_2$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\cdot\vec{v}_2$$

Le due velocità sono opposte e direttamente proporzionali alle masse.

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO $(\vec{l})$
(MOMENTO ANGOLARE)



$\vec{p} = m\cdot\vec{v}$

$\vec{l} = \vec{r}\wedge\vec{p}$

È il prodotto vettoriale tra il raggio vettore e il vettore $\vec{p}$.

$$|\vec{l}| = |\vec{r}|\,|\vec{p}|\cdot \text{sen}\,\vartheta$$

Il momento angolare è in direzione costante e sempre perpendicolare.

$$[\vec{l}] = [L\cdot M\cdot L\cdot T^{-1}] = [M\cdot L^2\cdot T^{-1}] = kg\cdot m^2/s$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k} =$$

$$= m v_x\hat{i} + m v_y\hat{j} + m\cdot v_z\hat{k}$$

$$\vec{l} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (y p_z - z p_y)\hat{i} + (z p_x - x p_z)\hat{j} + \\ + (x p_y - y p_x)\hat{k}$$

Queste sono le componenti del momento angolare.

$$\vec{l} = l_x\hat{i} + l_y\hat{j} + l_z\hat{k} \Rightarrow$$

$\vec{r} = r \cdot \hat{u}_r$

$$\vec{l} = \underbrace{r \cdot \hat{u}_r \wedge P_r \cdot \hat{u}_r}_{\substack{\parallel \\ 0}} + r \cdot \hat{u}_r \wedge P_\vartheta \cdot \hat{u}_\vartheta$$

$\vec{l} = r \cdot P_\vartheta \cdot \hat{k}$

Se il moto avviene su di un piano ma non è un moto circolare, solo la componente tangenziale da contributo al momento angolare.

$\searrow$

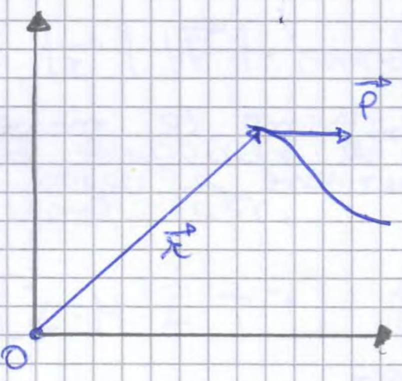
Mi dice quanto un oggetto sta girando intorno al polo.

3) MOTO PIANO NON COSTANTE

$$\vec{l} = r \cdot P_\vartheta \cdot \hat{k} = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \hat{k}$$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{P}$$



$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} =$$

$$= \vec{v} \wedge \cancel{m} \cdot \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$\boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}}$ → momento angolare $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}}$

$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

$[\vec{M}]$ u.d.m $= N \cdot m$

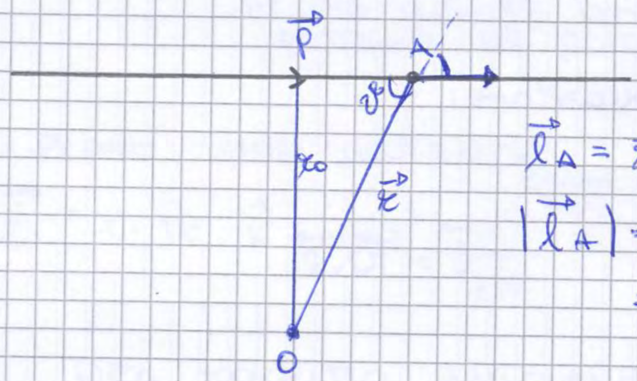
$$\vec F = \frac{d\vec p}{dt} \Rightarrow \vec F = 0 \Rightarrow \vec p = cost$$

Quando il momento $\vec M = 0$?

$$\vec M = 0 \Rightarrow \vec M = \vec r \wedge \vec F$$

$$|\vec M| = r \cdot F \cdot sen\vartheta$$

Se $\vec F = 0$ $\vec l = cost$ perché il moto è RETTILINEO UNIFO
ME.



$$\vec l_A = \vec r \wedge m \cdot \vec v$$

$$|\vec l_A| = r \cdot m \cdot v \cdot sen\vartheta =$$

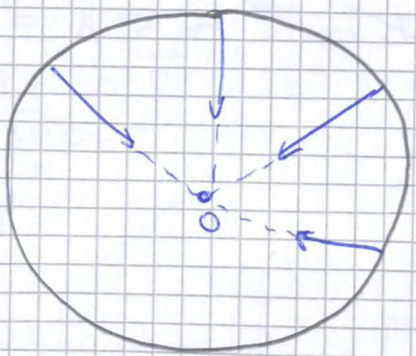
$$= r_0 \cdot m \cdot v = cost.$$

se $r = 0$ $\vec l = 0$

se $\vec F \parallel \vec r \Rightarrow$ forze centrali

$$F(r) = f(r) \cdot \hat u_r$$

$$\vec M = \vec r \wedge \vec F(r) = r \cdot \hat u_r \wedge f(r)\, \hat u_r = 0$$



Sono forze centrali x es. ① la forza di Newton

② $F_g = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \hat u_r$

forza gravitaz

$\vec{F}' = -m\vec{a}_t$

Quando la molla si comprime si genera una

$F_e = -K\Delta x \Rightarrow \vec{F_e} = \vec{F}'$

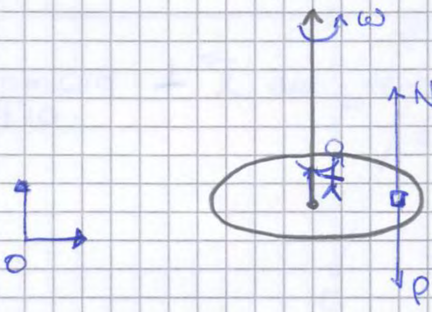
$\vec{F} = m\cdot\vec{a} = m(\vec{a}' - \vec{a}_T) = m\vec{a} - \boxed{m\cdot\vec{a}_T}$

F_T = forze di trascinamento

$\vec{a} = \vec{a}' - \vec{a}_T$

$\vec{F} + \vec{F_T} = m\cdot\vec{a}' \Rightarrow \vec{F}' = m\cdot a'$

~ ~ ~



pag 33

$\vec{v}' = -\vec{\omega}\wedge\vec{r}$

$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}' + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$

$\vec{a}' = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\vec{a}}} - 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}' - \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$

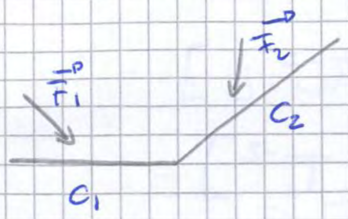
$\vec{a}' = -2\vec{\omega}\wedge\vec{v} - \vec{\omega}\wedge(-\vec{\omega}\wedge\vec{r})$

$$\boxed{\vec{a}' = \omega^2\cdot r}$$

PROPRIETÀ

① $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$

Quando abbiamo un cammino tortuoso fatto di segmenti, possiamo trovare i valori del lavoro dei 2 segmenti e poi sommarli

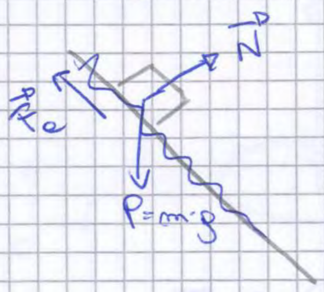


$\mathcal{L}_1 = \int_{C1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{s}$ $\qquad$ $\mathcal{L}_2 = \int_{C_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}$

② $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$

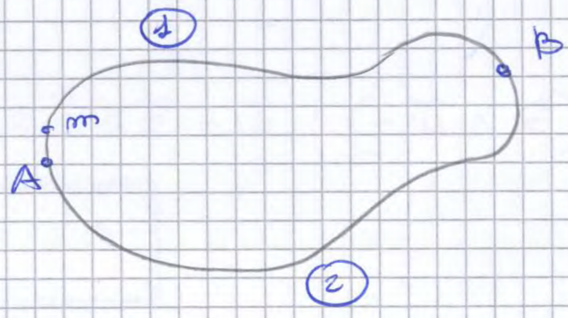
$\mathcal{L} = \sum_i \mathcal{L}_i$

Lavoro = somma dei lavori dei tratti in cui si può scomporre un cammino tortuoso.



$\mathcal{L}_P + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{F_e} = \mathcal{L}$

③



Il lavoro prodotto dalla forza dipende dal moto con cui il corpo viene spostato dalla posiz. iniziale a quella finale.

$\mathcal{L}_{AB\,VIA1} \neq \mathcal{L}_{AB\,VIA2}$

$$\mathcal{L} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A\,VIA1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{B\,VIA2}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

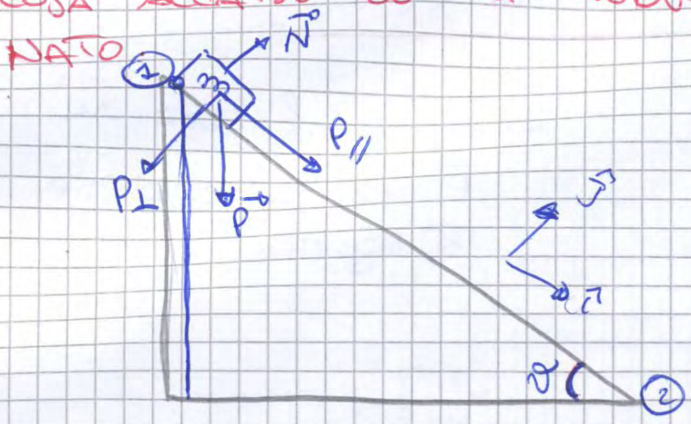
lavoro chiuso

$$\mathcal{L} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$

forze conservative

COSA ACCADE SE CI TROVIAMO SU UN PIANO INCLI NATO



$\vec{R}$ (risultante) $= \vec{P} + \vec{N} \equiv \vec{P_{\parallel}} = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\vartheta \cdot \hat{i}$

$d\vec{s} = dx\,\hat{i}$

$$\mathcal{L} = \int_{①}^{②} P_{\parallel}\, dx = \int_{①}^{②} mg\,\text{sen}\,\vartheta\, dx =$$

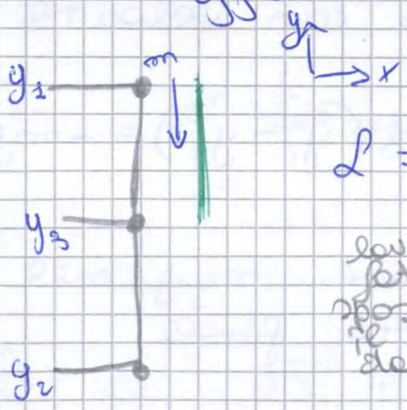
$$= mg \cdot \text{sen}\,\vartheta \int_{①}^{②} dx = m \cdot g \cdot \underbrace{\text{sen}\,\vartheta \cdot s}_{h} = mgh =$$

$$= mgy_i - mgy_f$$

$$\mathcal{L}_{\text{caduta libera}} = \mathcal{L}_{\text{piano inclinato}}$$

↓

dipende dal dislivello che c'è tra il punto di inizio e il punto di fine.
Non dipende dal percorso fatto per sposta re l'oggetto.

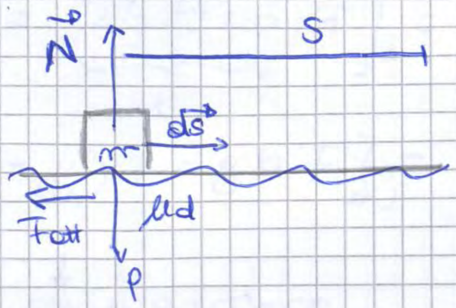


$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{23} = U_p(y_1) - \cancel{U_p(y_2)} + \cancel{U_p(y_2)}$$
$$- U_p(y_3) = U_p(y_1) - U_p($$

↓ lavoro fatto per spostare il mobile da 1 a 2

$\mathcal{L}$ FATTO DALLA FORZA DI ATTRITO $F_{att} = \mu_d (\vec{N})$

deve essere dinamico oltrimu. vuol dire che il blocco non si muove

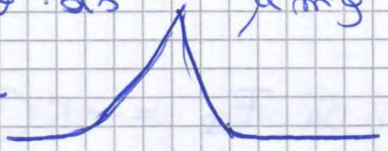


$$\vec{P} = \vec{N}$$

$$\mathcal{L} = \int_s \vec{F}_{att} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_s F_{att} \cdot \cos\theta \cdot ds = -\mu mg$$

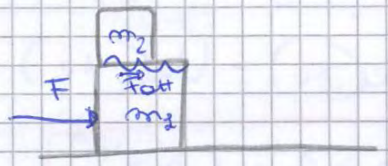
-1

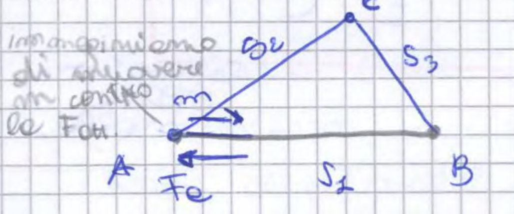


$$= \int_s -\mu \cdot mg \cdot ds = -\mu g m \int_s ds$$

è un lavoro negativo. la forza è frenante (d'attrito)

Ma ci sono dei casi in cui la forza d'attrito è motrice.





~ ~ ~

$$\mathcal{L}_{AB\,via\,s_1} = -\mu_d mg s_1$$

$$\mathcal{L}_{ACB} = \mathcal{L}_{AC} + \mathcal{L}_{CB} = -\mu mg s_2 - \mu mg s_3 =$$

$$= -\mu mg (S_2 + S_3) \neq -\mu mg s_1$$

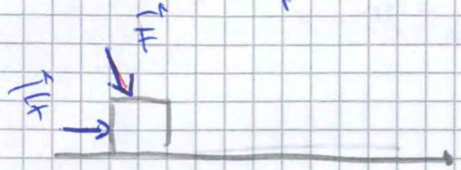
Il lavoro fatto da F_{att} non dipende dal punto fine iniziale ma anche dal percorso fatto.

Non è una forza conservativa.

$$\mathcal{L}_0 = \oint \vec{F}_{att} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE

"Se su un oggetto agiscono delle forze che ne cambiano la velocità allora il lavoro delle forze = funz scalare nel punto finale - funz. scalare nel punto iniziale".



$$\mathcal{L} = K(f) - K(i)$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

ENERGIA CINETICA (energia di movimento)

$$[K] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}] = Kg \, \frac{m^2}{s^2} = \text{Joule}$$

$$K(\vec v) = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right)$$

$$\vec v = v_x \hat i + v_y \hat j + v_z \hat k$$

$$\vec p = m \cdot \vec v$$

$$K = \frac{\vec p^{\,2}}{2m}$$

$$\vec v' = \vec v + \vec v_t$$

$$P_M - P_m - F_a = (3m + M)\cdot a$$

$$Mg\cdot sen\vartheta - mg - \mu_d |\vec{N}| = (3m + M)a$$

$$\vec{N} = 2mg$$

$$a = \frac{Mg sen\vartheta - mg - \mu_d 2mg}{3m + M} = 1{,}04 \; m/s^2$$

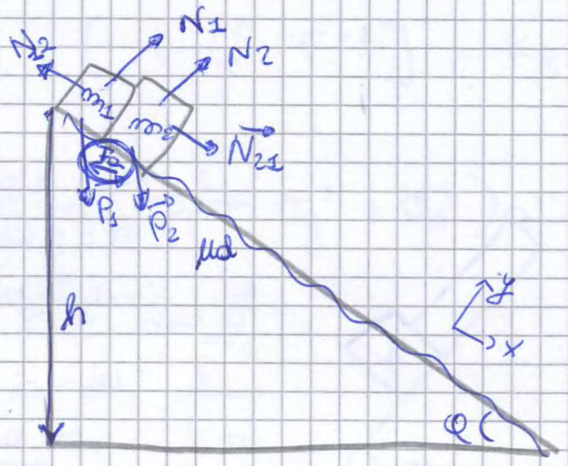
$$T_1 - mg = m\cdot a$$

$$T_1 = m(a+g) = 1(9{,}8 + 1{,}04) = 10{,}84 \; N$$

$$T_2 \Rightarrow Mg sen\vartheta - T_2 = M\cdot a$$

$$T_2 = M(g sen\vartheta - a) = 14{,}9 \; N$$

③



$m_2 = 2 m_1$

$h = 3 m$

$\varphi = \frac{\pi}{6}$

$\mu_d = 0{,}1$

$t = ?$

c'è attrito su m_2, non c'è attrito su m_1

M_2 scivola più lentamente di m_1. m_1 spinge m_2.

Quindi m_2 rallenta m_1.

$$\vec{N_1} + \vec{N_{12}} + \vec{P_1} = m_1 \cdot a$$

$$\vec{N_2} + \vec{N_{21}} + \vec{P_2} + \vec{F_a} = m_2 \cdot \vec{a}$$

$$a = g \cdot sen\vartheta$$

asse y $\begin{cases} N_1 = m_1 \cdot g \cdot cos\varphi \; \{= 0 \end{cases}$ → perchè su m_1 non c'è attrito}

asse x $m_1 g sen\varphi - N_{12} = m_2 a$

$$\begin{cases} N_2 = m_2 g cos\varphi & \text{asse y} \\ m_2 g \cdot sen\varphi + N_{12} - \mu_d \cdot N_2 = m_2 \cdot a & \text{asse x} \end{cases}$$

$$a_{max} = g \cdot \frac{\cos\varphi}{\sen\varphi} = 16,97 \ m/s^2$$

04-04-14

Dimostrazione Teorema delle forze vive

$$\mathcal{L} = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Tenendo conto che $\vec{F} = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k}$

$d\vec{s} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$

$\mathcal{L}$ diventa $= \int_c [F_x dx + F_y dy + F_z dz]$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow F_i = m \cdot a_i$

$\mathcal{L}$ diventa $= \int_c [m \cdot a_x dx + m \cdot a_y dy + m \cdot a_z dz]$

$$\int_c m \cdot a_x d_x = m \int_c \frac{dv_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} dt =$$

$$= m \int_c \frac{dv_x}{dt} v_x dt = \frac{1}{2} m \int_c \frac{d}{dt}(v_x^2) dt =$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot v_x^2 \Big]_i^f$$

$\mathcal{L}$ diventa $= \frac{1}{2} m \left[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right]_i^f = \overset{\text{energia cinetica}}{K(f) - K(i)}$

Conclusione

$$\mathcal{L} = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{s} = K(f) - K(i)$$

Ritornando a parlare di forze ...

$$\mathcal{L} = U_i - U_f$$

Nel caso della **forza peso**

U è data da $m \cdot g \cdot y$
F è data da $-m \cdot g \hat{j}$

Nel caso della **forza elastica**

U è data da $\frac{1}{2} K x^2$
F è data da $-K x \hat{i}$

Nel caso della **forza gravitazionale**

U è data da $-\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$
F è data da $-\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{u}_r$

Nel caso della **forza coulombiana**

$U = K \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$
$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r$

POTENZIALE V

$\updownarrow$

ENERGIA POTENZ. U

$$\boxed{V = -U}$$

Se le forze in gioco sono conservative:

$$\mathcal{L} = K(f) - K(i) = U(i) - U(f)$$

U = energia potenziale
K = energia cinetica

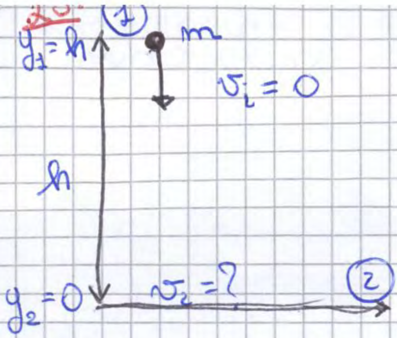
$$K(i) + U(i) = K(f) + U(f)$$

$$\boxed{E = K + U}$$ Energia meccanica

TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA MECCANICA

In un sistema conservativo (se tutte le forze in gioco ammettono un potenziale) l' espressione $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \sum_i U_i$ si mantiene costante in tutto il moto.

→ {somma dei potenziali delle forze}



$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + mgy$$

Risolviamo facendo uso del teorema di conservazione dell'energia meccanica.

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m \cdot g y_1 = mgh$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot y_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

~~$\frac{1}{2} mv_1^2 + mgy_1 = mgh = \frac{1}{2} m$~~

$$mgh = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Nel caso in cui:

$v_1 \neq 0$

$$E_1 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot y_1$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + mgh$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh$$

Nel caso in cui: → (butto la pallina verso l'alto)

$v_2 \neq 0$

$y_1 = ?$

$$E_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

E_1 = energia finale = mgh

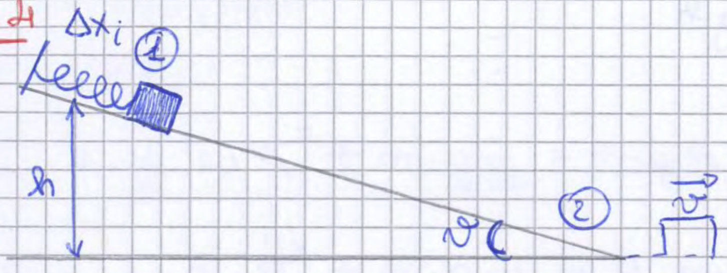
Uguagliando → $\boxed{h = \frac{v_1^2}{2g}}$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k(\overset{\|}{\Delta x_i}) + m \cdot g \cdot y_i$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot \underset{0}{\underset{\|}{v^2}} + \frac{1}{2} k(\Delta x_f)^2 + m \cdot g \cdot y_i$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} k (\Delta x_f)^2 \Rightarrow \Delta x_f = \sqrt{\frac{m}{k}}\, \vec{v}$$

ES 4



$$E_1 = \frac{1}{2} m \cdot \underset{0}{\underset{\|}{v_1^2}} + \frac{1}{2} k(\Delta x_i)^2 + m \cdot g \cdot \underset{h}{\underset{\|}{y_1}}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} k(\underset{0}{\underset{\|}{\Delta x_2}})^2 + mg\, \underset{0}{\underset{\|}{y_2}}$$

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2} k(\Delta x_1)^2 + mgh = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} (\Delta x_i)^2 + 2gh}$$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + U(x)$$

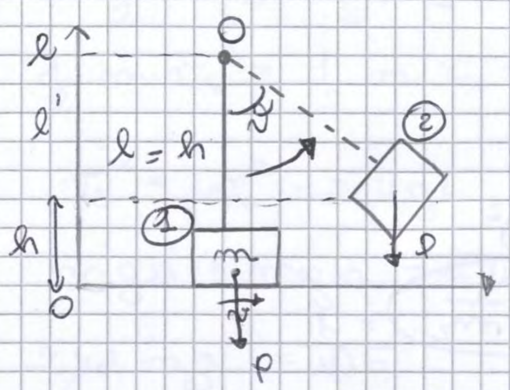
$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = E - U(x)$$

$$v^2 = \frac{2}{m} \left(E - U(x)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

ES 1



$$E_1 = E_2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m v^2 + mg \overset{=0}{y}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m \cdot \underset{0}{v_2^2} + mgh = mg(l - l') =$$

$$= mgl(1 - \cos\vartheta)$$

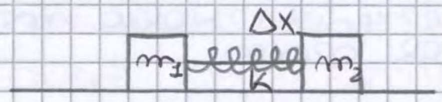
Uguagliando:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \underbrace{mgy}_{0} = mgl(1-\cos\vartheta)$$

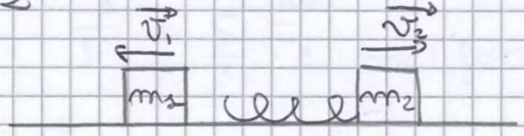
$$mgl\cos\vartheta = mgl - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{v^2}{2lg}$$

ES 2



$$E_i = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 + m_1 g h + m_2 g h$$



$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k (\underset{0}{\Delta x_f})^2 + m_1 g h + m_2 g h$$

$$\boxed{E_i = E_f} \qquad \boxed{\vec{P} = \cos t}$$

$$\frac{1}{2} k (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \iff m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$P_i = m_1 v_1^{(i)} + m_2 v_2^{(i)} = 0$$

$$P_f = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$v_i = -\frac{m_2}{m_1} \cdot v_1$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \cdot v_3^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_3^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 + \mathcal{L}$$

$$v_3^2 = v_2^2 - 2 \mu g L$$

$$mgh' = mgh - 2 \mu_d mgL$$

$$2 \mu_d mgL = \Delta E$$

$$\left[\frac{mgh}{2 \mu_d mgL} \right] = n$$ → dalla relaz. otteniamo un numero. dobbiamo prendere l'intero più piccolo.

ES. 5,6 → 5.

$$mgh - n 2 \mu_d \cdot m \cdot gL = E_{residuo}$$

$$E_{resid} = \mu_d \cdot m \cdot g \cdot l$$

$$l = \frac{E_{resid}}{\mu_d \cdot m \cdot g}$$

TH. CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA IN PRESENZA DI FORZE DISSIPATIVE

Tenendo conto che

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_c$$ → (forze conservative)

$$\mathcal{L} = \int_c \vec{F} d\vec{s} = \sum_i \mathcal{L}_i = \sum_i \int_c \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{NC}$$ → (non conservat.)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{NC}$$

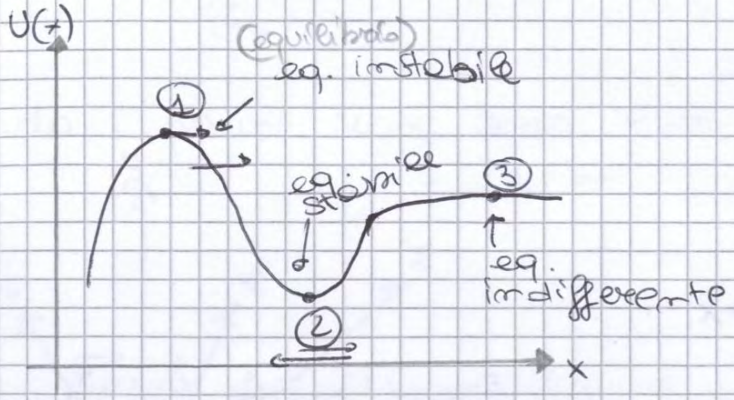
$$\mathcal{L} = K(f) - K(i)$$

Quindi: $K(f) - K(i) = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{NC}$

$$\mathcal{L}_c = U(i) - U(f)$$

$$K(f) - K(i) = U(i) - U(f) + \mathcal{L}_{NC}$$

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}$$



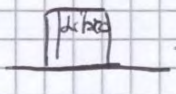
① punto di massimo per

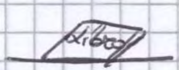
$\vec{F_1} = 0$

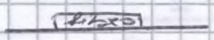
② $\vec{F_2} = 0$

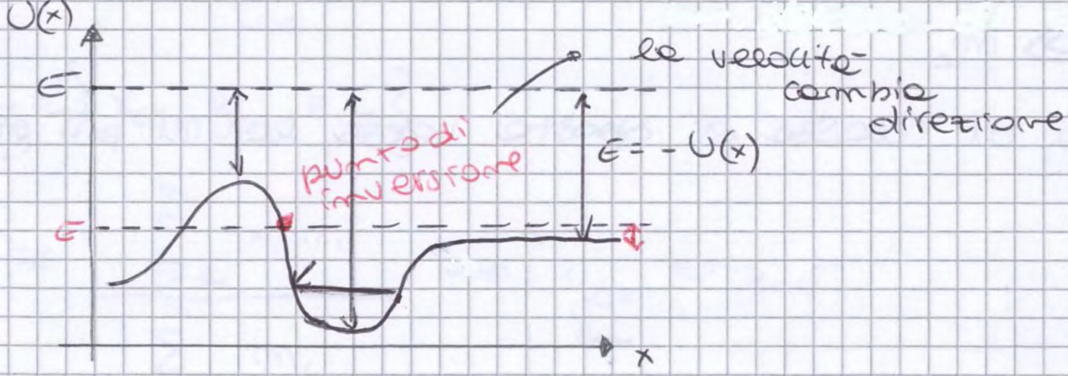
③ $\vec{F_3} = 0$

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Eq instabile  ⇒ cade

Eq. stabile  ⇒ cade e si ferma

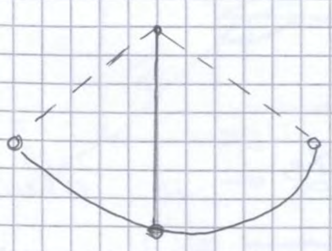
Eq. indiff  ⇒ lo sposto ⇒ si ferma

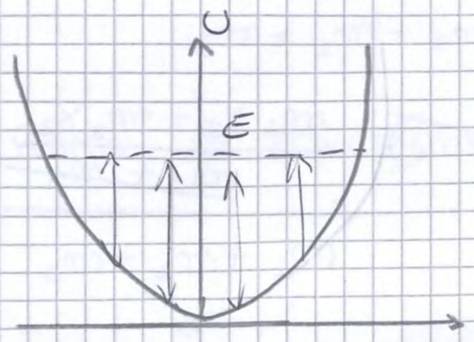


$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + U(x)$$

$$E - U(x) = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

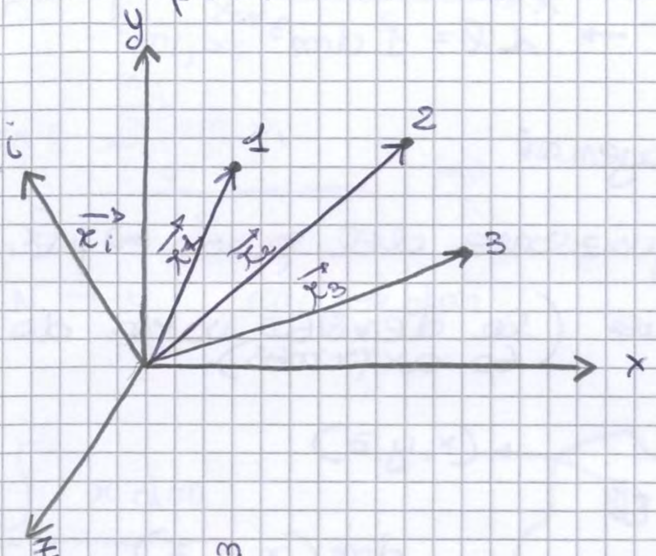
PENDOLO





$$\Sigma_{CM} = \frac{\sum_{i=1} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \xrightarrow{n} x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_1}$$

Quando i punti non sono tutti sulla stessa retta...

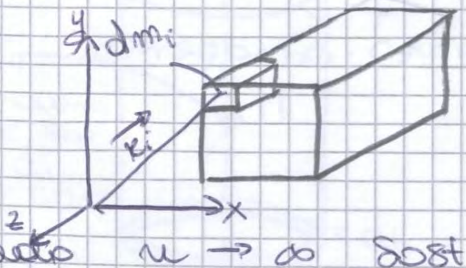


$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{r}_{CM} = \{ x_{CM}, y_{CM}, z_{CM} \}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \Longrightarrow y_{CM} \Rightarrow z_{CM}$$

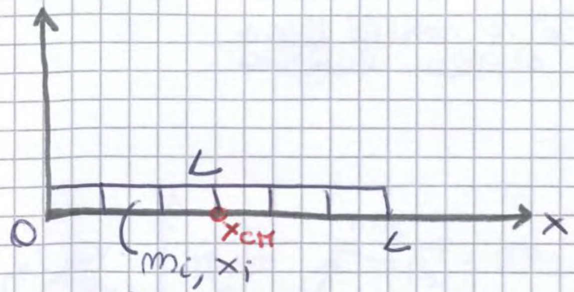
Quando n aumenta, i punti si addensano:



Quando n → ∞ sostituisco le somme con gli integrali

$$x_{CM} = \frac{\int \vec{r}_i \, dm_i}{M_{TOT.}}$$

ES.



densità lineare

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \Rightarrow$$

Se $N \to \infty$ $\quad m_i \to dm$

$x_i \to x$

$$\Rightarrow = \frac{\int_0^L x\, dm}{\int_0^L dm}$$

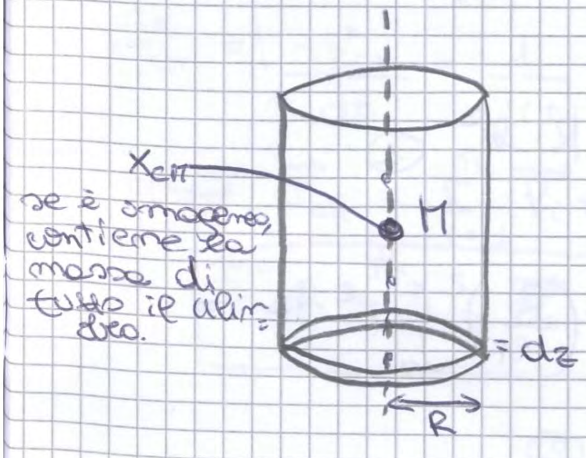
$dm = \lambda\, dx$

Sostituendo:

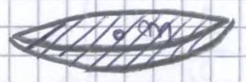
$$x_{CM} = \frac{\int_0^L \lambda x dx}{M} = \frac{\lambda}{M}\int_0^L x dx$$

$$x_{CM} = \frac{\lambda}{M} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big]_0^L = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{M} L^2 = \frac{1}{2} \frac{\cancel{M}}{\cancel{L}} \frac{L^{\cancel{2}}}{\cancel{M}} = \frac{1}{2} L$$

* * *



se è omogeneo, contiene la massa di tutto il cilindro.

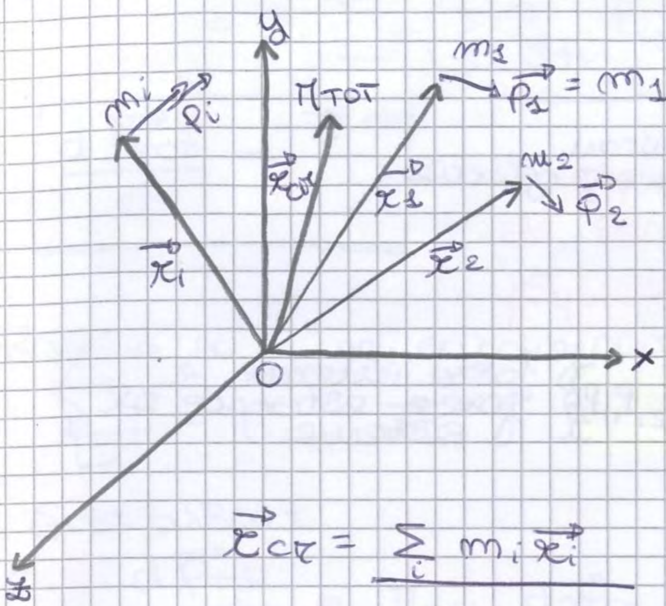


$m = \sigma \cdot S\, dz$

* * *

$$z_{CM} = \frac{\rho \pi}{4} \cdot \frac{R^2 h^2}{\frac{\rho \pi}{3} R^2 h} = \frac{3}{4} h$$

~ ~ ~



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

derivimo nel tempo:

$$\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{\sum_i m_i} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{\sum m_i} \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i)$$

$$\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$= \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \vec{v}_i = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M_{TOT}} \cdot \sum \vec{p}_i$$

$$M_{TOT} \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}_{TOT}$$

$$\boxed{\vec{p}_{TOT} = M_{TOT} \vec{v}_{CM}}$$ 1° Teorema del centro di massa

→

$$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ex} =$$

$$= \vec{F}^{ex} + \sum_i \vec{F}_i^{int} =$$

$$= \vec{F}^{ex} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{int}$$

$= 0$ si annulla per il 3° principio della dinamica

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \vec{F}^{ex}}$$

1° eq. cardinale del sistema di punti.
{Equivale al 2° princ. della dinamica}

Riscrivo la 1° eq. cardinale:

$$\vec{P}_{TOT} = M_{TOT} \cdot \vec{v}_{CM}$$

Sostituisco:

$$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = M_{TOT} \cdot \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{F}^{ex}$$

$$\boxed{\vec{F}^{ex} = M_{TOT} \cdot \vec{a}_{CM}}$$

2° teorema del centro di massa

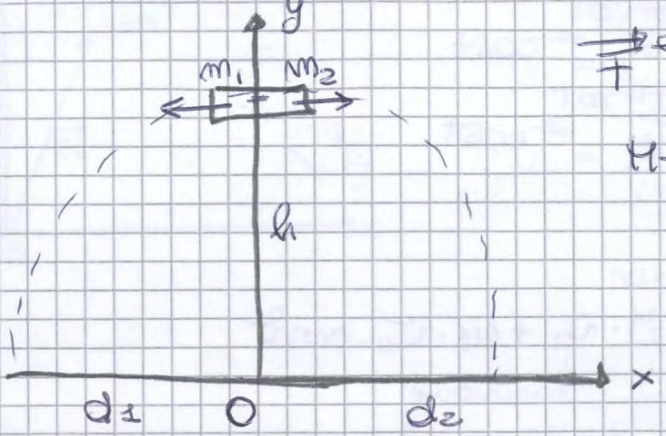
Se la risultante delle $\vec{F}^{ex} = 0$ la quantità di moto totale del sistema si conserva.

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}_{TOT} = cost.$$

Se ci fosse una forza esterna, il centro di massa si muoverebbe.

PISTOLA GRIMSEHL



$$\vec{F}^{ex} = (m_1+m_2)g$$

$$M_{TOT}\vec{a}_{CM} = (m_1+m_2)\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}_{TOT\,x}}{dt} = \vec{F}^{ex}_{x} \\ \dfrac{d\vec{P}_{TOT\,y}}{dt} = \vec{F}^{ex}_{y} \end{cases}$$

→ lungo y abbiamo la forza peso.

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0$$

$$v_y = -gt$$

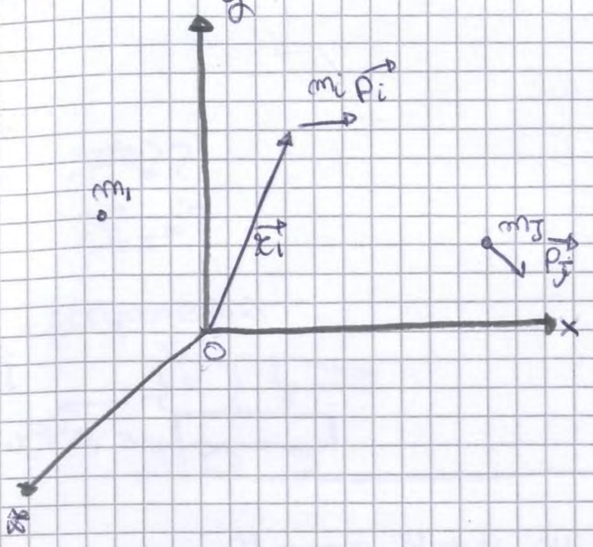
$$\frac{v_{1x}}{v_{2x}} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}}$$

la distanza relativa è data dal rapporto tra le due masse

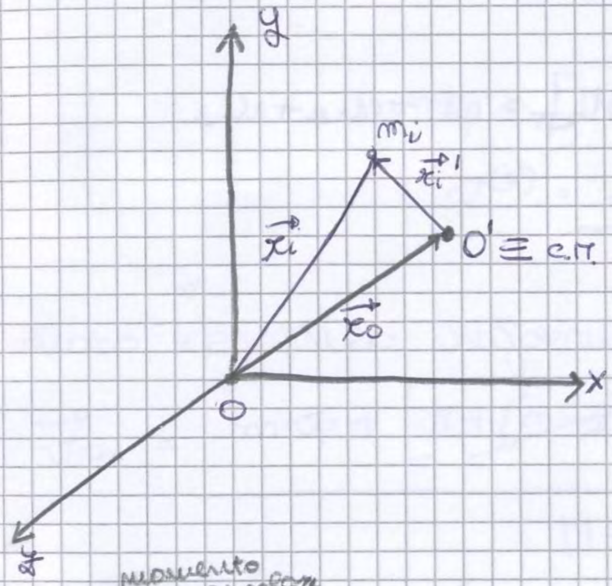
SECONDA EQ. CARDINALE PER IL SISTEMA



$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

momento angolare del sistema



$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i'$$

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} l_i = \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_0 + \vec{r}_i') \wedge \vec{p}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_0 \wedge \vec{p}_i) + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_1' \wedge \vec{P}$$

$$= \vec{r}_0 \wedge \sum_i \vec{p}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_{i_{O'}}$$

momento angolare

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \wedge \vec{P}_{TOT} + \vec{L}_{O'}$$

$$\boxed{\vec{L}_0 = \underbrace{x_{cm} \wedge \vec{P}_{TOT}}_{\text{MOMENTO DI RIVOLUZ. orbitali}} + \vec{L}_{c.m}}$$

3° teorema del centro materiale

MOMENTO DI ROTAZIONE

spin

2) $M = 500$ Kg   100 proiettili

$m_p = 1$ kg

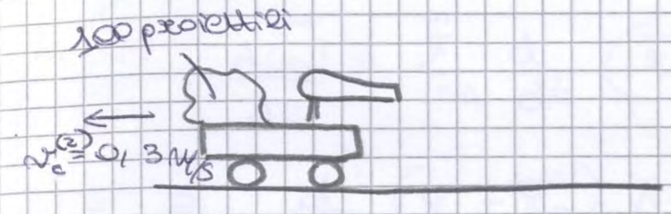
$v_p = 200$ m/s

disegno

$\vec{v}_c^{(2)} = ?$

$\vec{v}_{CM} = ?$

sistema isolato



al lancio del 1° colpo

$$p_i^{(1)} = M_{TOT} \cdot v^{(1)} = 0$$

$$p_f^{(1)} = m \cdot v_p + [M + (n-1)m] v^{(2)}$$

$$M_{TOT} = M + n \cdot m$$

$$p_i^{(1)} = p_f^{(1)}$$

$$m v_p + [M + (n-1)m] v^{(2)} = 0$$

$$v^{(2)} = \frac{-m \cdot v_p}{M + (n-1)m} = -\frac{200 \cdot 1}{500 + 99} \simeq -0,3 \text{ m/s}$$

$\Downarrow$

moto rettilineo uniforme.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m v_p + [M + \cancel{(n-1)m}] - \frac{m \cdot v_p}{M + \cancel{(n-1)m}}}{M + nm} = 0$$

$$p_i^{(2)} = [M + (n-1)m] \cdot v^{(2)} = -m v_p$$

$$p_f^{(2)} = m \cdot v_p + [M + (n-2)m] \, v^{(3)}$$

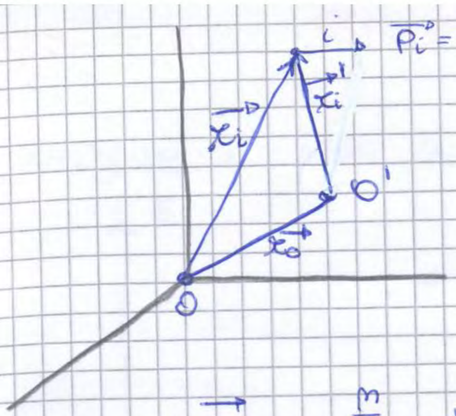
Uguagliando:

$$-m v_p = m v_p + [M + (n-2)m] v^{(3)}$$

$$v^{(3)} = \frac{-2 m v_p}{M + (n-2)m} = \frac{-2 \cdot 200 \cdot 1}{500 + 98} \simeq -0,66 \text{ m/s}$$

$$v^{(100)} = \frac{-100 \, m v_p}{M} = \frac{-10^2 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 1}{500} = -40 \text{ m/s}$$

- il moto del carrello è accelerato a tratti



$\vec{p}_i = m \cdot \vec{v}_i$

$$\vec{L}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \wedge \vec{p}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i\,'$$

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i\,' \wedge \vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{r}_i\,'}{dt} \wedge \vec{p}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \frac{d}{d}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_0\right) \wedge \vec{p}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \wedge \vec{F}_i$$

Deriviamo:

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \wedge \vec{p}_i}_{=0} - \sum_i \vec{v}_0 \wedge \vec{p}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \wedge \vec{F}_i =$$

perchè $\vec{p}_i$ è // a $\vec{v}_i$

$$= -\vec{v}_0 \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i\,' \wedge \vec{F}_i$$

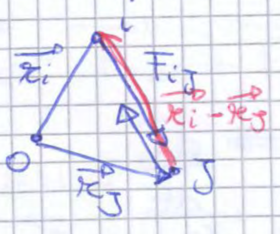
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \left(\vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ex)}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(int)} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(ex)}$$

$$\vec{F}_i^{(int)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{(int)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \wedge \vec{F}_i = \vec{M}^{(ex)} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ij}$$

$$\Downarrow$$



$$\ldots + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ji} + \ldots$$

$$\ldots + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} + \ldots$$

$$\ldots + \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \wedge \vec{F}_{ij} \ldots$$

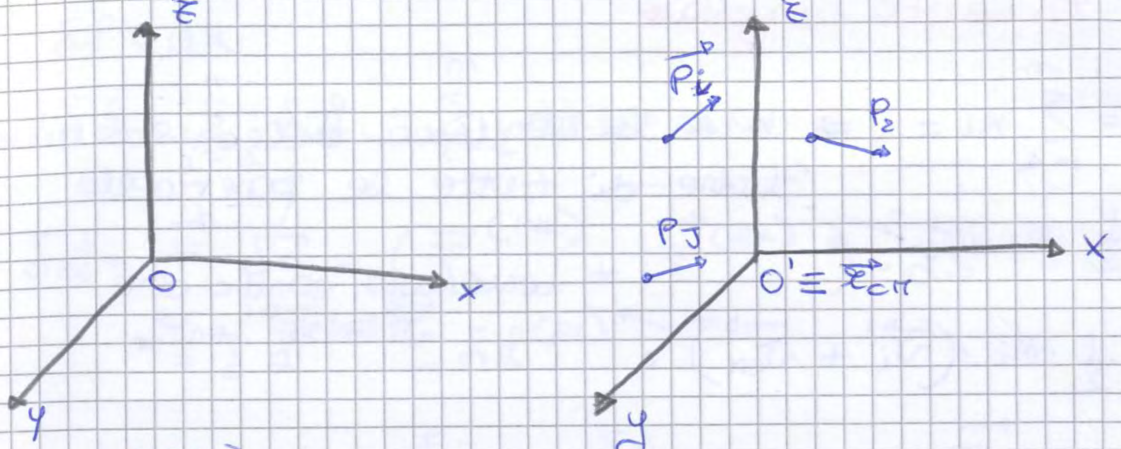
$$= 0$$

la sommatoria delle forze interne è 0

SISTEMA RIFERIMENTO C.M

(sarà non inerziale)

l'origine è nel centro di massa.



$$\vec{F}^{(ex)} \neq 0 \quad \vec{a}_{CM}$$

S.R.C.M non inerziale

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i{}' + \vec{x}_{CM}$$

deriviamo per trovare la velocità:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i{}' + \vec{v}_{CM}$$

derivo e trovo a:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_i{}' + \vec{a}_{CM}$$

l'accel. in laborat.

Quanto vale $\vec{P}'_{TOT}$ nel C.M?

$$\vec{P}_{TOT} = \sum_{i=1}^{3} m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{3} m_i (\vec{v}_i{}' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{v}_i{}' + \sum_{i=1}^{3} m_i \cdot \vec{v}_{CM} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{TOT} = \vec{P}_{TOT}{}' + M_{TOT} \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{P}_{TOT} = \vec{P}'_{TOT} + \vec{P}_{TOT} \Rightarrow \boxed{\vec{P}_{TOT} = 0}$$

Conseguenze:

Essendo $\sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i \cdot \vec{a}_i{}' = 0$

somma delle masse x le accel. nel sistema del c.M è = 0

[redacted]

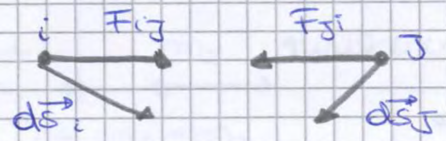
TEOREMA FORZE VIVE IN UN SISTEMA DI PUNTI

$$\delta\mathcal{L} = dk$$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m} \delta\mathcal{L}_i = \sum_{i=1}^{m} dk_i = dk$$

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F}\cdot d\vec{s} = \left(\vec{F}^{(int)} + \vec{F}^{(ex)}\right)\cdot d\vec{s} =$$

$$= \delta\mathcal{L}^{(int)} + \delta\mathcal{L}^{(ex)}$$



$$\vec{F}_{iJ} = -\vec{F}_{Ji}$$

$$= \underbrace{\delta\mathcal{L}_C^{(int)}}_{\text{forze int conservat}} + \cancel{\delta\mathcal{L}_{NC}^{(int)}} + \delta\mathcal{L}_C^{(ex)} + \underbrace{\delta\mathcal{L}_{NC}^{(ex)}}_{\text{forze est. non conserv.}}$$

$$dK = \overset{\text{variaz}}{\delta\mathcal{L}_C^{(int)}} + \delta\mathcal{L}_{NC}^{(int)} + \delta\mathcal{L}_C^{(ex)} + \delta\mathcal{L}_{NC}^{(ex)} =$$

Le forze int e ex conserv. [redacted] ammettono energia potenziale.

$$= -dU^{(int)} - dU^{(ex)} + \delta\mathcal{L}_{NC}^{(int)} + \delta\mathcal{L}_{NC}^{(ex)}$$

$$dk + dU^{int} + dU^{ex} = \delta\mathcal{L}_{NC}$$

$$d(k + U^{in} + U^{ex}) = \delta\mathcal{L}_{NC}$$

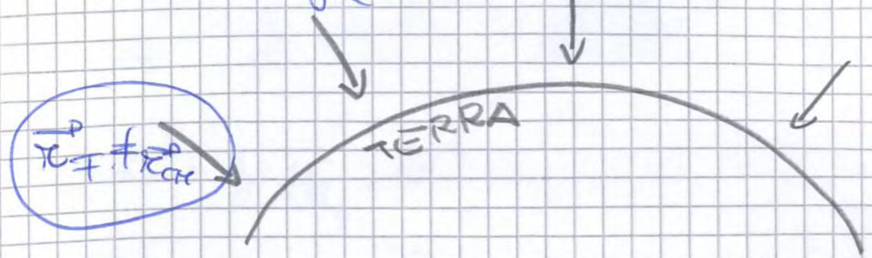
variaz energia

$$d(k + U^{in}) - \underset{\substack{\| \\ 0}}{\delta\mathcal{L}_{NC}} = \delta\mathcal{L}_{NC}^{ex} - dU^{(ex)}$$

$$E^{propria} = \underbrace{K}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{U^{in}}_{\text{energia potenziale interna}} =$$

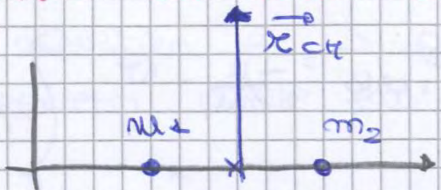
$$= K_{CM} + \underbrace{K' + U^{in}}_{\text{Energia interna del sistema}}$$

$$\vec{P} = m \cdot g \cdot (-\hat{j})$$



Quindi quando parliamo di forza peso costante parliamo di oggetti molto piccoli.

SISTEMA DI DUE CORPI



Se $m_1 = m_2$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Distanza relativa misurata nel sistema del centro di massa.

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{\cancel{\vec{r}_1}(m_1+m_2) - \cancel{m_1\vec{r}_1} + m_2\vec{r}}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1+m_2} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} = \textcircled{A}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

MASSA RIDOTTA

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

Se $m_1 = m_2$ $\quad \mu = \frac{1}{2}m$

Se $m_2 \gg m_1$ $\quad \mu \xrightarrow{\text{si sposta}} m_1$

Energie cinetiche:

massa ridotta

$$K_1' = \frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{v}_1^{\,2} = \ldots = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\mu}{m_1}\right)^2 \cdot v^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_1}\cdot v^2$$

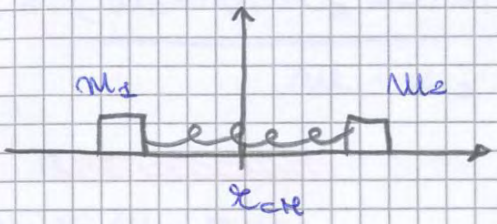
$$K_2' = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_2}\cdot \vec{v}^{\,2}$$

Faccio il rapporto

$$\frac{K_1'}{K_2'} = \frac{m_2}{m_1}$$

l' en. cinetica è > per la massa piccola.

il rapporto delle en. cinetiche = rapporto delle mass



$\vec{F}_{12} = m_1 \cdot \vec{a}_1$ $\quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = m_2 \cdot \vec{a}_2$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = f$

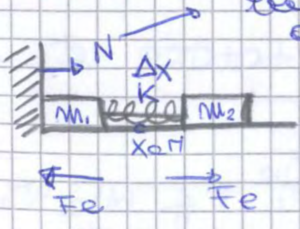
massa ridotta

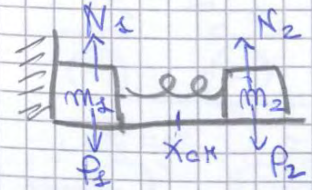
$$f = m_1\left(-\frac{\mu}{m_1}\cdot \vec{a}\right) = -\mu \vec{a}$$

$$f = \mu \cdot a$$

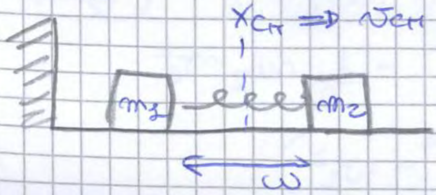
PROBLEMA

reaz. vincolare del piano che impedisce a m_1 di muoversi dal muro!





$\vec{R}_{TOT} = 0$



oscilla mentre si muove

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = \frac{1}{2} m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$$

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_2' - m_2 v_2$$ → non metto il → di vettore xk sto considerando il caso unidimens.

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m_1} \cancel{(v_1 - v_1')}(v_1 + v_1') = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m_1} \cancel{(v_1 - v_1')}(v_2 + v_2')$$

$$\boxed{v_1 + v_1' = v_2 + v_2'}$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$ → velocità dopo l'urto

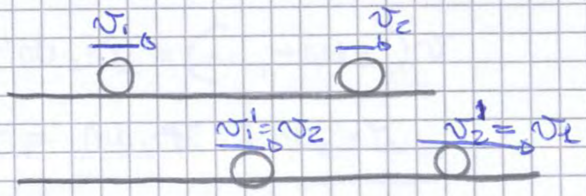
CASI INTERESSANTI

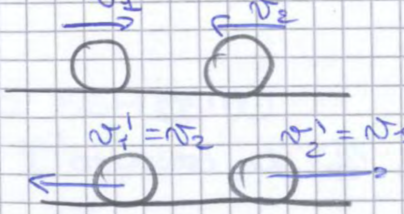
- $m_1 = m_2 = m$

$v_1' = \frac{\cancel{2 m_2}}{\cancel{2 m}} \cdot v_2$ cioè $v_1' = v_2$

$v_2' = \frac{\cancel{2 m}}{\cancel{2 m}} v_1$ cioè $v_2' = v_1$

- due bocce con la stessa m nell'urto si scambiano la velocità.





$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \end{cases}$$

durante l'urto si conserva la quantità di moto totale del sistema e anche il momento angolare totale

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad \sum \vec{M} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}_{TOT} = cost = \vec{L}_{TOT}$$

URTO ANAELASTICO

$\vec{P}_{TOT} = cost$ → se l'urto è libero

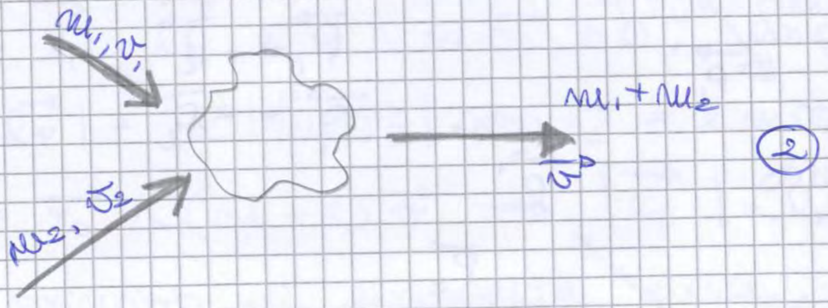
Se l'urto non è libero (sistema vincolato)

$$\vec{P}_{TOT} \neq cost$$

$\vec{M}_{TOT} = 0 \longrightarrow \vec{L}_{TOT} = cost$

l'energia non si conserva → (non otteniamo la 1ª riga del sistema)

URTO COMPLETAMENTE ANAELASTICO



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

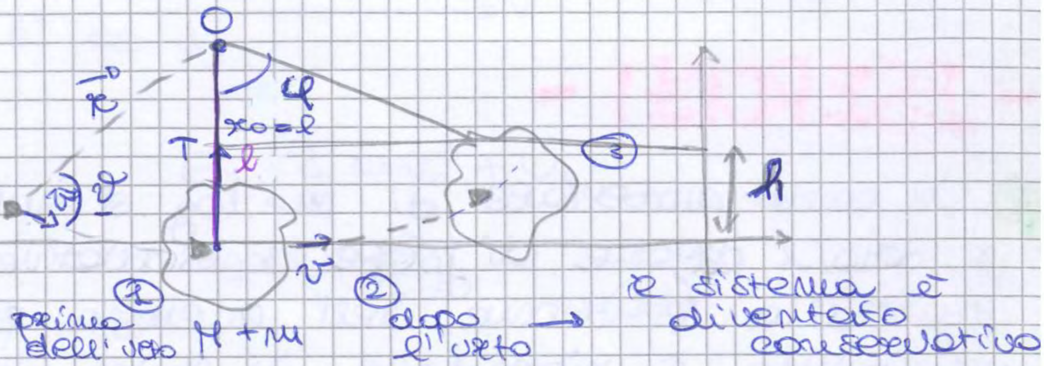
$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

URTO ESPLOSIVO

È l'opposto di ②. Un corpo urta e si frammenta

→

PENDOLO BALISTICO



il momento della tensione nel punto O è zero

$$\vec{M}_O = 0$$

$$\Downarrow$$

$\vec{L}_{TOT}$ si conserva $\Longrightarrow$ $\vec{L}_{①TOT} = \vec{L}_{②TOT}$

quantità di moto del sasso

$\vec{L}_1 = \vec{l}_p + \vec{l}_M = \vec{r} \wedge m\vec{v}_p + 0$ lunghezza della fune

$|\vec{l}_p| = |\vec{r}| \cdot |m\vec{v}_p| \cdot \text{sen}\,\vartheta = l\,m v_p$ $|\vec{L}_1| = l\,m\,v_p$

$\vec{L}_2 = \vec{r}_0 \wedge (m+M)\vec{v} \longrightarrow |\vec{L}_2| = l(m+M)\cdot v$

Per il principio di conservaz. della quant. di moto:

$$l\,m\,v_p = l(m+M)\,v$$

$$\boxed{v = \frac{m v_p}{m+M}}$$

Dopo l'urto il sistema è diventato conservativo:

$$E_2 = E_3$$

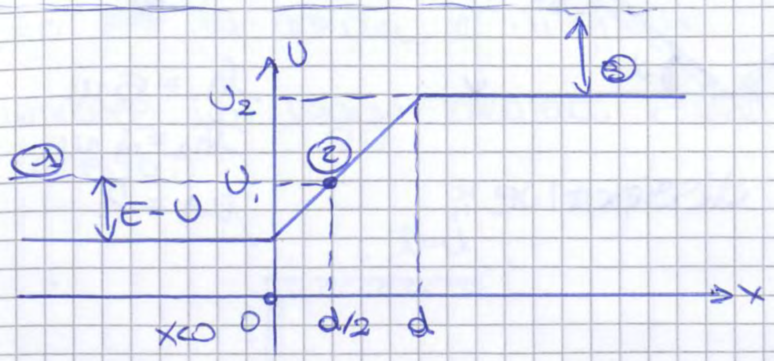
$$E_2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$E_3 = (m+M)\,g \cdot h = (m+M)\,g \cdot l(1-\cos\varphi)$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = \frac{U_1 - U_2}{d} = -0{,}25\ N$$

---

②



$E = K + U$

$K = E - U$

$E_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U_1$

$E_2 = U\left(\frac{d}{2}\right)$

$E_1 = E_2$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + U_1 = U\left(\frac{d}{2}\right) \rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} m v_0^2 + \cancel{U_1} = \cancel{U_1} + \frac{U_2 - U_1}{\cancel{d}} \frac{\cancel{d}}{\cancel{2}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{m}(U_2 - U_1)} = 5\ m/s$$

③

$$E_1 = \frac{1}{2} m (v_0 \cdot 3)^2 + U_1$$

$$E_3 = \frac{1}{2} m v^2 + U_2$$

$$\frac{9}{2} m v_0^2 + U_1 = \frac{1}{2} m v^2 + U_2$$

$$m v^2 = 9 m v_0^2 + 2(U_1 - U_2)$$

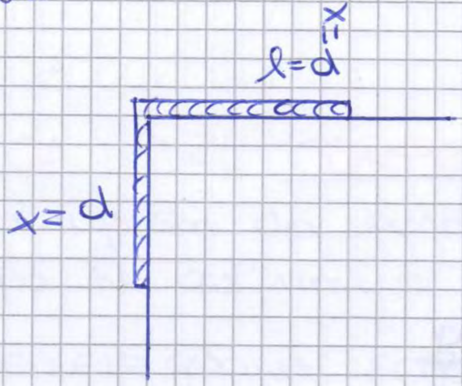
$$v = \sqrt{9 v_0^2 + \frac{2}{m}(U_1 - U_2)} = 13{,}2\ m/s$$

filo:

3) - massa non trascurabile
- lunghezza l liscio

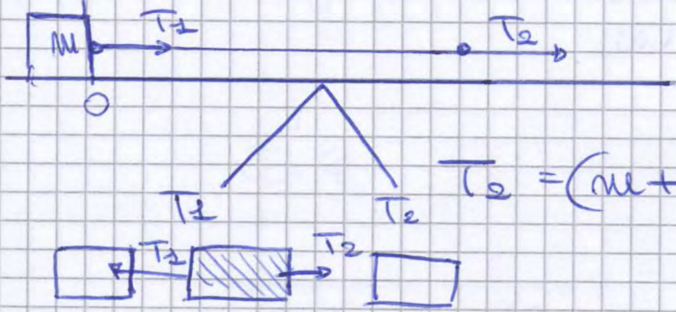
$t=0 \Rightarrow$ la corda è in quiete

Determinare la legge oraria dell'estremo inferiore della corda.



Vediamo la fune non ideale dall'interno:

$T_1 = m \cdot a$



$T_2 = (m + m_f)\cdot a$

La tensione non è costante ma cresce man mano che ci spostiamo

Se la fune è omogenea

$$T_2 = T_1 + l\lambda a$$

$$\downarrow$$

$\lambda = \frac{m_f}{l_f}$ → massa fune, → lunghezza fune

Quindi:

$$T(x) = T_1 + \lambda x a$$

Tornando al problema ...

$$P - T = m(x)\cdot a$$

$$T = m(l-x)\cdot a$$

{ l'accel. è la stessa perché il filo è inestensibile }

Imponiamo

$$\begin{cases} A \cdot \cosh \varphi = d \Rightarrow \text{per } \varphi = 0 \Rightarrow A = d \\ \omega \cdot A \cdot \operatorname{senh} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = d \cdot \cosh(\omega t)}$$

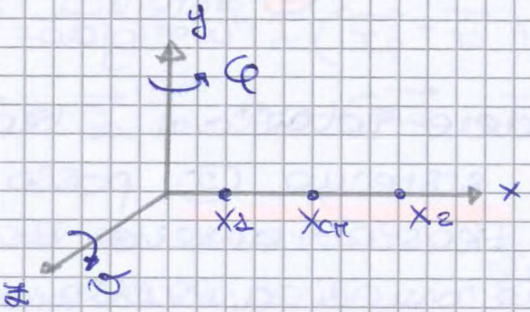
28/04/14

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Un corpo composto da punti che non si deforma, è un corpo in cui non ci sono movimenti relativi.

Bisogna vedere quanti sono i gradi di libertà dei punti materiali:

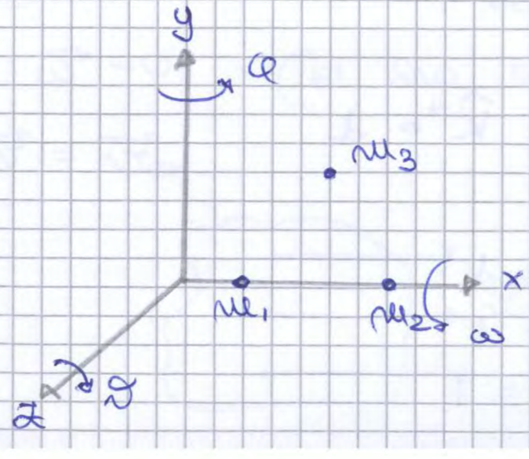
- 1 punto: 3 gradi di libertà ⇒ 3 coordinate x;y;z.
- 2 punti: 5 gradi di libertà ⇒
  - 3 coord. del c.m. x; y; z
  - 2 angoli (φ, ϑ)



- 3 punti a distanza fissa: 6 gradi di libertà

⇓

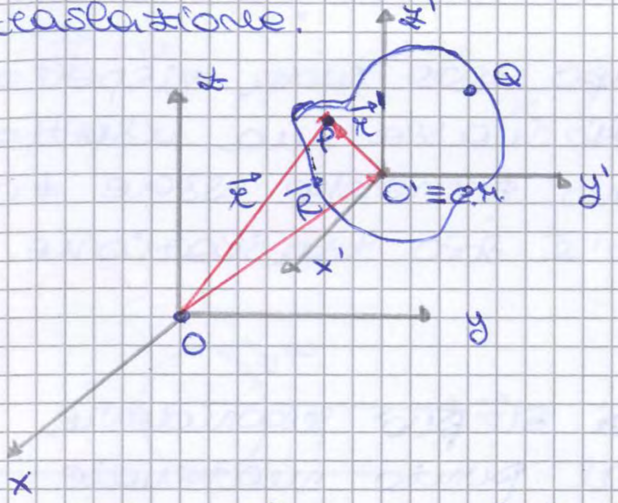
- 3 coord. del c.m. x, y, z
- 3 angoli $(\varphi, \vartheta, \omega)$



92. Però: $\hat{i}'' \cdot \hat{j}'' = \hat{j}'' \cdot \hat{k}'' = \hat{i}'' \cdot \hat{k}'' = 0$

$$\begin{cases} a_{11} \cdots \quad = 0 \\ \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

Passo da 9 gradi di libertà a 3 gradi di libertà per la rotazione, di quali vanno aggiunti i 3 della traslazione.



$\vec{R} + \vec{x}' = \vec{x} \Rightarrow \vec{x}' = \vec{x} - \vec{R}$

$$\vec{v_p} = \underbrace{\vec{v_t}}_{\text{termine dato alla traslazione}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{x_p'}}_{\text{termine per la rotazione}}$$

$$\vec{v_p} = \vec{v_t} + \vec{\omega} \wedge (\vec{x_p'} - \vec{R})$$

$$\vec{v_Q} = \vec{v_t} + \vec{\omega} \wedge (\vec{x_Q'} - \vec{R})$$

differenza di velocità tra punti del corpo rigido.

$$\vec{v_p} - \vec{v_Q} = \vec{\omega} \wedge (\vec{x_p'} - \vec{x_Q'})$$

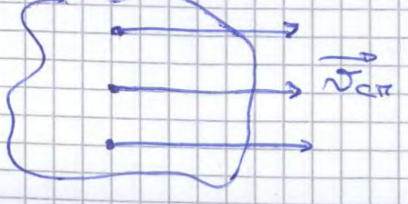
Velocità del corpo rigido

$$\vec{v} = \vec{v_{cr}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x_{cr}})$$

Caso 1)

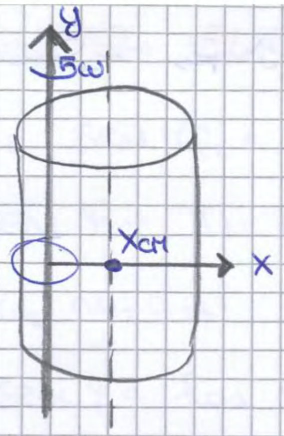
$\vec{\omega} = 0$ (si ha solo traslazione) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v_{cr}}$



tutte le velocità sono uguali e parallele.

Esempio

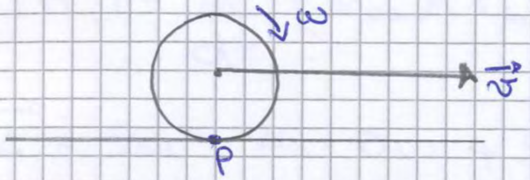


ruota il C.M!

$$\vec{F}_{est} = m_{TOT} \cdot \vec{a}_{CM}$$

↖ accelerazione centripeta → si sviluppa una forza centrifuga

Caso 3)



Se c'è attrito e non si ha slittamento, la velocità ω causa traslazione dell'asse.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

$\Rightarrow$ $v_{CM} = \omega \cdot R$ condizione di puro rotolament

$$l_{01} \cdot F \cdot \text{sen}\,\varphi + l_{01} \cdot T_{12} \cdot \text{sen}\,\alpha_1 = m_1 \cdot l_{01} \cdot a_{11}$$

$$- l_{01} \cdot T_{12} \cdot \text{sen}\,\alpha_2 = m_2 \cdot l_{02} \cdot a_{21}$$

$$l_{01} \cdot F \cdot \text{sen}\,\varphi + T_{12} \left(l_{01} \cdot \text{sen}\,\alpha_1 - l_{02} \cdot \text{sen}\,\alpha_2 \right) = l_{01} m_1 a_{11}$$

$$+ l_{02} m_2 a_{21}.$$

$$l_{01} \cdot F \cdot \text{sen}\,\varphi = l_{01} \cdot m_1 \cdot a_{11} + l_{02} m_2 a_{21}$$

$$|\vec{l_{01}} \wedge \vec{F}| = l_{01} \cdot m_1 \cdot \frac{dv_{1\perp}}{dx} + l_{02} \cdot m_2 \cdot \frac{dv_{2\perp}}{dx} =$$

$$= \frac{d}{dx} \left(l_{01} \cdot m_1 \cdot v_{1\perp} + l_{02} \cdot m_2 \cdot v_{2\perp} \right)$$

$$|\vec{M}| = \frac{d}{dx} \left(\vec{l_{01}} \wedge \vec{P_1} + \vec{l_{02}} \wedge \vec{P_2} \right) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{L} = l_{01} \cdot m_1 \cdot v_{1\perp} + l_{02} \cdot m_2 \cdot v_{2\perp}$$

$$v_1 = l_{01} \cdot \omega$$

$$v_2 = l_{02} \cdot \omega$$

$$\vec{L} = l_{01}^2 \cdot m_1 + l_{02}^2 \cdot m_2$$

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \qquad \left(\text{con } I = \sum_{1}^{n} m_i r_i^2 \right)$$

"momento di inerzia"

$$[I] = [M \cdot L^2] = kg \cdot m^2$$

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} \left(I \cdot \vec{\omega} \right) = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} \nwarrow \text{accelerat. angolare}$$

↑ momento delle forze

$$\left(\vec{F} = m \cdot \vec{a} \right)$$

↑ forza impressa

↖ accelerat. causata

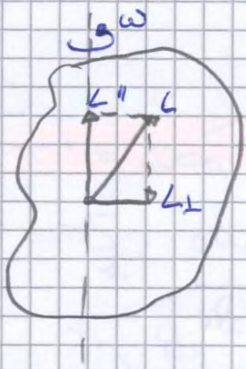
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{M}{I}\cdot t + \omega_0$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega_0\cdot t + \frac{1}{2}\frac{M}{I}\cdot t^2$$

$$\vec{L} = L_{\parallel} + L_{\perp} = I\cdot\omega + L_{\perp}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} M_{\parallel} = \frac{d}{dt}\cdot L = \frac{d}{dt}\cdot I\cdot\omega = I\cdot\alpha \\ M_{\perp} = \frac{d}{dt} L_{\perp} \end{cases}$$

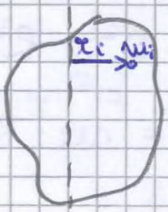
(responsab. dell
acc. angolari



$L_{\parallel}$ tende a far scardinare il sistema.

MOMENTO DI INERZIA

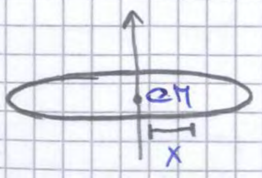
$$I = \sum_{1}^{n}{}_{i}\; m_i r_i^2$$



$$I_i = m_i \cdot r_i^2$$
$$I = \sum m_i \cdot r_i^2$$

Un corpo ha infiniti momenti di inerzia che dipendono dagli infiniti assi di rotazione.

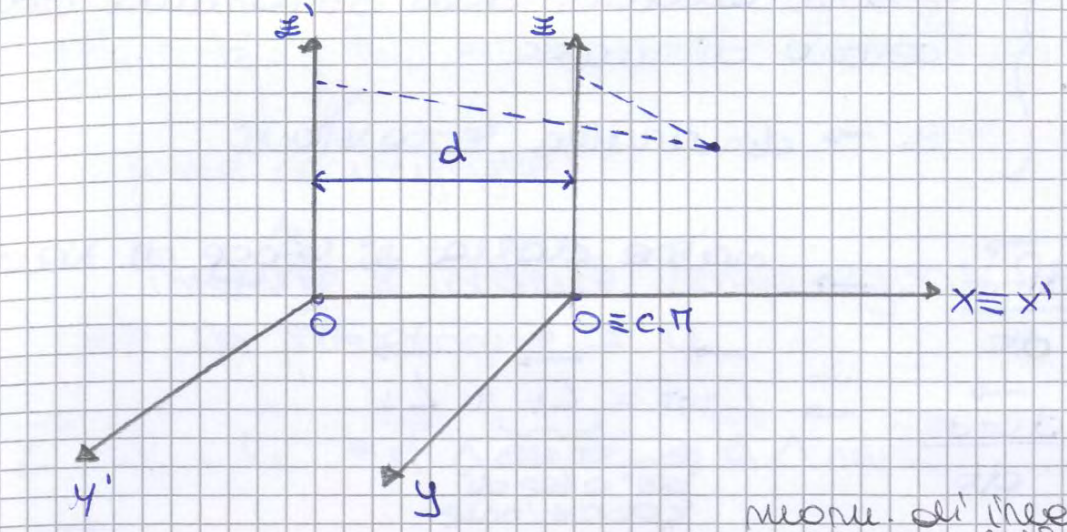
Esempio 1



$$\lambda = \frac{m_{TOT}}{L_{TOT}}$$

$$dI = x^2 dm = \lambda x^2 dx$$

TEOREMA HUYGENS STEINER



I_{cm}

mom. di inerzia del corpo rispetto ad un asse // al 1° e passante per c.m.

$$I' = I_{cm} + M \cdot d^2$$

massa

$$I' = \sum_1^n {}_i\, m_i r_i'^2 = \sum_1^n {}_i\, m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 \right) = \sum_1^n {}_i\, m_i \left[(x_i + dx)^2 + \right.$$

$$\left. + (y_i + dz)^2 \right] =$$

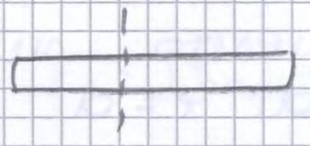
$$= \sum_1^n {}_i\, m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) + \sum_1^n {}_i\, m_i \left(dx^2 + dy^2 \right) + 2 \sum_1^n {}_i\, m_i x_i\, dx +$$

$$+ 2 \sum_1^n {}_i\, m_i y_i\, dy =$$

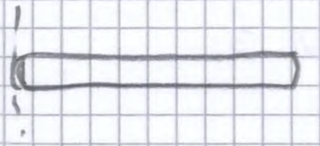
$$= \sum_1^n {}_i\, m_i \cdot r_i'^2 + \sum_1^n {}_i\, m_i d^2 + \underbrace{2 M x_{cm} dx}_{=0} + \underbrace{2 M y_{cm} dy}_{=0}$$

$$\boxed{I' = I_{cm} + Md^2}$$

Per es. per la barra rigida



$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



$$I = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

$2P = R \Rightarrow R = 2mg$

$\rightarrow R_0 = F_{c_1} - F_{c_2} = m_1 d \omega^2 - m_2 d \omega^2 = 0$

risultante

↓ ↙

forze centrifughe

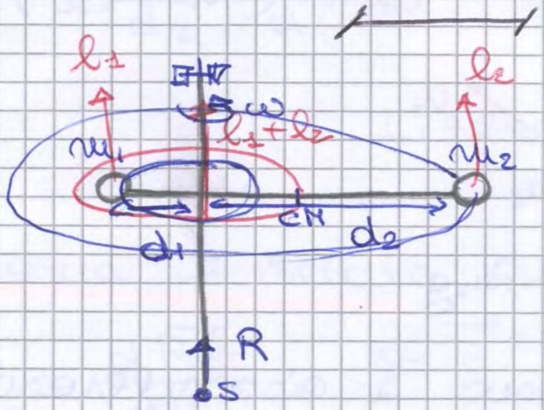
↓

istante x istante sono uguali ed opposte ⇒

⇒ la risultante è 0.

$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2} = \vec{d} \wedge m_1 \vec{v_1} + \vec{d} \wedge m_2 \vec{v_2}$

$|\vec{L}| = 2md^2\omega = I \cdot \omega$



$m_1 = m_2$

$2d = d_1 + d_2$

$R = m_1 g + m_2 g$

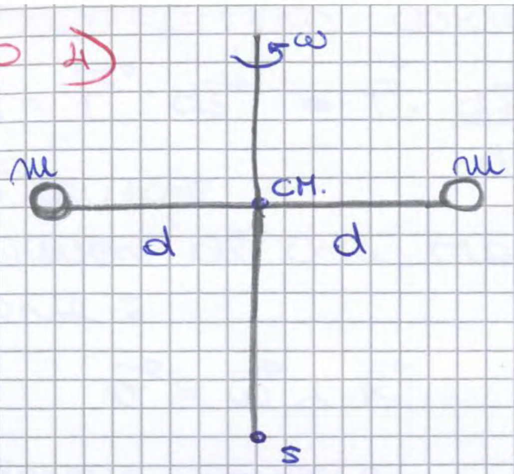
le traiettorie delle masse sono ≠. m_1 ha una traiettoria più piccola di quella di m_2.
Anche il C.M non sarà più fisso, ma descrive una traiettoria circolare.

$$R_0 = \vec{F_{c1}} - \vec{F_{c2}} = m_1 d_1 \omega^2 - m_2 d_2 \omega^2 = (m_1 d_1 - m_2 d_2)\omega^2 \neq 0$$

$$|\vec{R_0}| = m_{TOT} \cdot d_{CM} \cdot \omega^2 \;\; \downarrow$$

è il 2° teorema del centro di massa

ESEMPIO 4)

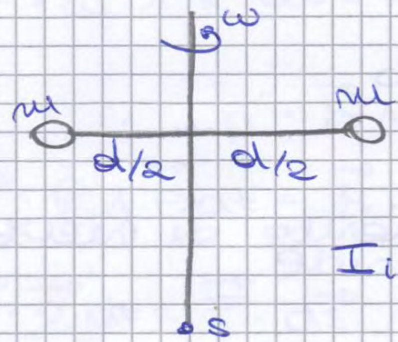


$\vec{L}_i = I\omega$

$I = 2md^2$
↓
"mom. di inerzia"

Supponiamo venga dimezzata d (distanza asse-masse)

↓



- è cambiato il momento di inerzia

$I_i = 2md^2$ $I_f = \frac{1}{2} md^2$

Se il sistema è isolato, dalle 2 eq. cardinali:

$\vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt}$ se $\vec{F}^{ex} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{TOT} = cost$

↓

rimane nul

$\vec{P}_{TOT} = 0$

$\vec{M}^{ex} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt}$ se $\vec{M}^{ex} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{TOT} = cost$

↓ momento angolare totale

$L_i = L_f \Rightarrow \boxed{I_i\omega_i = I_f\omega_f}$

$2md^2\omega_i = \frac{1}{2} md^2\omega_f$

$\omega_f = 4\omega_i$

ASPETTO ENERGETICO CORPO RIGIDO

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{ds} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{ds}}{dt} \cdot dt = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$$

lavoro elementare

velocità nel tempo

Se $\vec{F}$ invece di una traslazione, provoca una rotazione:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

e possiamo scrivere

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{R}\, dt = \longrightarrow \text{prodotto misto}$$

Ricordo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$= \vec{\omega} \cdot \vec{R} \wedge \vec{F}\, dt = \vec{M} \cdot \vec{\omega}\, dt$$

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \vec{F} \cdot \vec{ds} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}\, dt = \vec{M} \cdot \vec{d\alpha}$$

Ricordando che:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{dv}{dt} \Rightarrow \delta \mathcal{L} = m \cdot \vec{v} \cdot \frac{dv}{dt}\, dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

$$\vec{M} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \delta \mathcal{L} = I \cdot \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}\, dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right)$$

energia cinetica:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}$$

E_c nel sistema di laboratorio: $\qquad v_i = r_i \omega$

$$(E_c)_{SL} = E_c + E'_{cr} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 -$$

$$- \frac{1}{2} m v^2 + \sum_i m_i (r_i \omega)^2 =$$

la fune si svolge senza strisciare sulla carrucola ⇒
⇒ non c'è moto relativo.

$$S = R\varphi$$
$$v = R\omega$$
$$a = R\alpha$$

Sostituiamo nella (1)

$$RT = I\frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{I}{R^2}a$$

$$mg - \frac{I}{R^2} \cdot a = m \cdot a$$

$$mg = \left(\frac{I}{R^2} + m\right)a$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

- nota l'a, troviamo la tensione T

$$T = \frac{I}{R^2}\frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

- nota la T, troviamo (3)

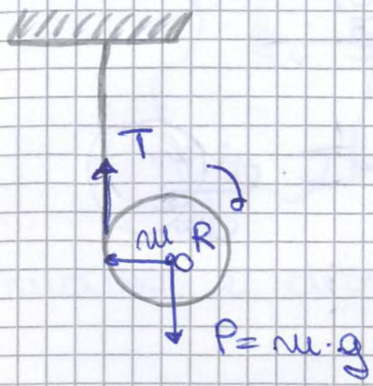
$$R = \frac{1}{2}\left(Mg + \frac{Ig}{R^2\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)}\right)$$

il mom. di inerzia per un cilindro pieno

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{M}{2m}} \qquad T = \frac{\frac{1}{2}Mg}{1 + \frac{M}{2m}}$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{m \cdot R^2}}$$



$$m \cdot g - T = m \cdot a$$

$$\vec{M}_T = I\vec{\alpha}$$

$$RT = I \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow \boxed{T = \frac{I}{R^2} \cdot a}$$

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

$$a = R \cdot \alpha$$

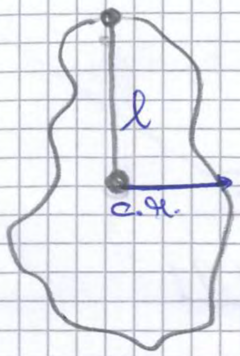
$$m \cdot g = m \cdot a + \frac{I}{R^2} a$$

$$m \cdot g = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a = \left(m + \frac{1}{2} m\right) a$$

$$a = \frac{2}{3} g$$

$$I\omega_i = I\omega_f$$

Pendolo fisico



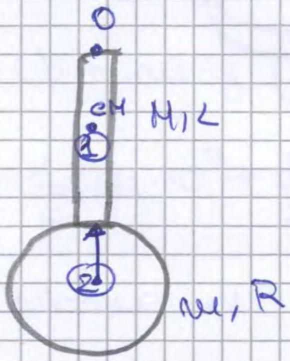
$I = m l^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{l \cdot m \cdot g}{I}}$$

- massa è distribuita

∼ ∼ ∼

ES



$$I = I_1 + I_2$$

$$I_{1cm} = \frac{1}{12} M L^2$$

$$I_{1O} = I_{1cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

$$I_{2cm} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_{2O} = I_{2cm} + m(L+R)^2$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} M L^2 + \frac{1}{2} m R^2 + m(R+L)^2$$

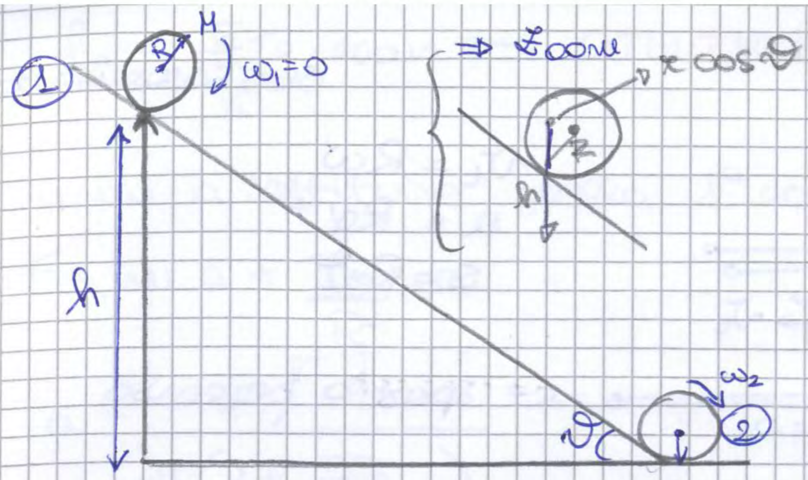
Se R è molto più piccolo di L.
se $R << L$ e $m << M$

il mom. di inerzia diventa:

$$I = \frac{1}{3} M L^2 + m L^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{L}{2} M g}{\frac{1}{3} M L^2 + m L^2}} = \sqrt{\frac{g\, M/2}{\left(\frac{1}{3} M + m\right) L}}$$

ES



il disco rotola
senza strisciar
- accel.
- velocità

Uso il principio di conservaz. dell'energia

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 = U_p = m \cdot g\left(h + R \cdot \cos\vartheta\right)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 + mgR$$

condizione di puro rotolamento ⇒ $v = R \cdot \omega$

$$mg\left(h + R\cos\vartheta\right) = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} v^2 + m \cdot g \cdot R$$

$$mg\left(h - R + R\cos\vartheta\right) = \frac{1}{2} m\left(1 + \frac{I}{R^2}\right) v^2$$

$$v^2 = \frac{2g\left(h - R + R\cos\vartheta\right)}{\boxed{\frac{I}{mR^2} + 1}}$$

aggiunta dovuta
alla rotazione,
alla pura
traslazione

⇒

$$f_a = \frac{I_o}{R^2} \cdot a$$

Andiamo a sostituire nella 1° eq. cardinale

$$F = m \cdot a + \frac{I_o}{R^2} \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I_o}{m \cdot R^2}\right)}$$

$$f_a = \frac{I_o}{R^2} \cdot \frac{F}{m\left(1 + \frac{I_o}{m \cdot R^2}\right)} = \frac{F}{1 + \frac{m \cdot R^2}{I_o}}$$

$\downarrow$

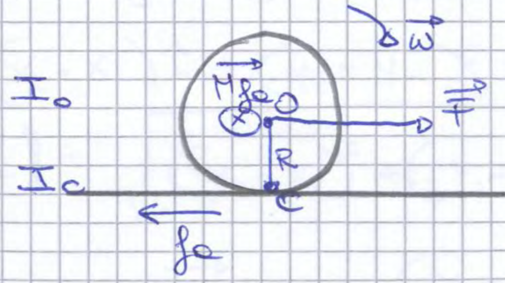
- forza di attrito max
- forza di attrito statico
- $f_a \leq \mu_s N = \mu_s m \cdot g$

$$\frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_o}} \leq \mu_s m g$$

$$F \leq \mu_s m g \left(1 + \frac{m R^2}{I_o}\right)$$

2° MODO PER LA RISOLUZIONE

- Guardo alla rotazione intorno a C.



$$F - f_a = m \cdot a$$

$$M_F = I_c \cdot \alpha$$

9/05/14

INTERAZIONE GRAVITAZIONALE ELETTROSTATICA

cap. 5 Mazzoldi
cap. 3 libro nuo

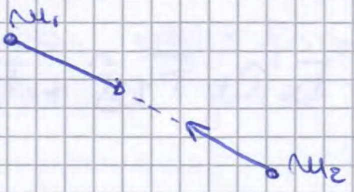
CAMPI DI FORZE CENTRALI del tipo $\vec{F} \propto \frac{1}{r^2} \cdot \hat{u}_r$

- Forza gravitazionale $\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$
- Forza elettrostatica $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \hat{u}_r$

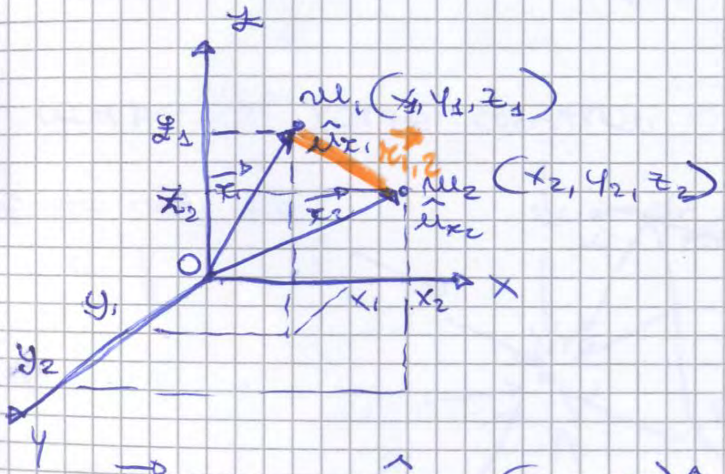
↓

sono:

- forze centrali



intensità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza che le separa



$$\vec{r}_1 = r_1 \qquad \hat{u}_{r_1} = (x_1 - x_0)\hat{\imath} + (y_1 - y_0)\hat{\jmath} + (z_1 - z_0)\hat{k}$$

$$\vec{r}_2 = r_2 \qquad \hat{u}_{r_2} = (x_2 - x_0)\hat{\imath} + (y_2 - y_0)\hat{\jmath} + (z_2 - z_0)\hat{k}$$

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{1,2} \cdot \hat{u}_{r_{1,2}} \rightarrow$$

versore che da la direz. della congiungente tra m_1 e m_2

$$= (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$|\vec{r}_{1,2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\hat{u}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{(x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

forza nucleare debole vale 10^{-7} e per ultimo la forza gravitazionale vale 10^{-38}.

↓

- è la più debole perché attrae le mass
- la forza elettrostatica attrae cariche. È repulsiva o attrattiva.
- la forza gravitaz. è solo attrattiva.

F. elettrom. → raggio d'azione ∞

forza gravitaz ↗

F.E.M → la trovo dove ci sono disomogeneità di carica. ES. • forze di legame negli atomi.

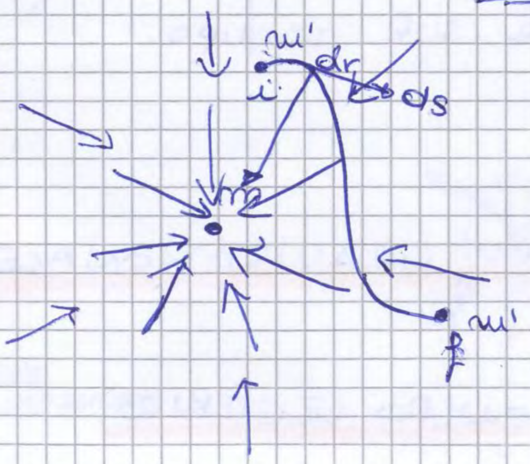
• tutte le forze (attrito ...)

↓

TRANNE forza peso che ha origine gravitazionale

campo di forze centrali è <u>conservativo</u>.

{sposto m, da i a f}



lavoro

$$\mathcal{L} = \int_i^f \delta\mathcal{L}$$

spostamento

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \vec{F} \cdot ds \cdot \cos\vartheta =$$

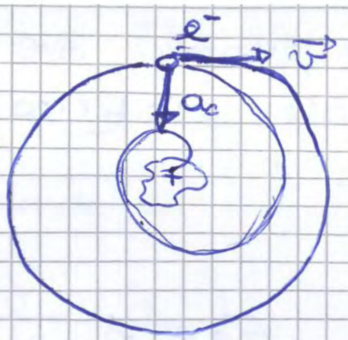
$$= F\,dr$$

$$\delta\mathcal{L} = F\,dx = \frac{K}{x^2}\,dx$$

$$\mathcal{L} = \int_i^f \frac{K}{x^2}\,dx = -\frac{K}{x}\Big|_i^f$$

$$\mathcal{L} = U(f) - U(i) \qquad \boxed{U = -\frac{K}{x}}$$

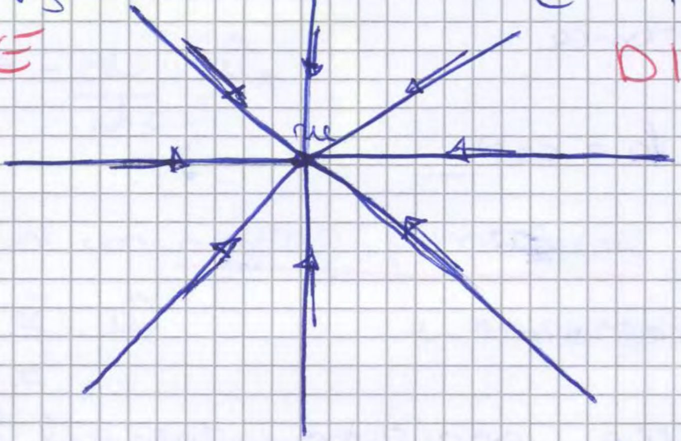
$$U_G = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{x} + c \quad [U_G] = J$$

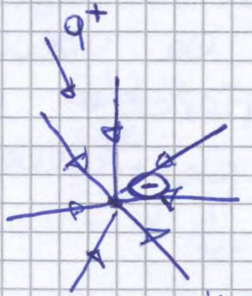


una situazione del genere può essere descritta ma non può esistere.
↓
l'elettrone collassa nel nucleo in pochi secondi
↓
questo avviene per la Terra in tempi molto più lunghi!!

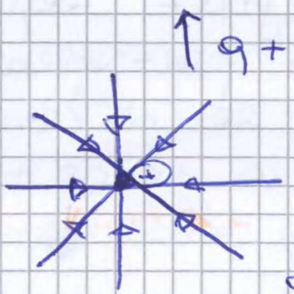
$[\vec{G}] = \frac{N}{kg}$ $[\vec{E}] = \frac{N}{C} = \frac{volt}{m}$

LINEE DI CAMPO

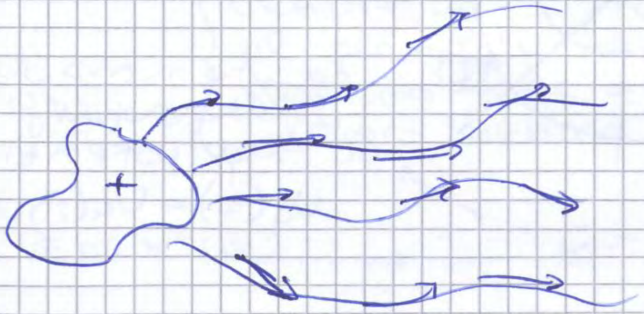




radiale entrante
↓
forza attrattiva



radiale uscente
↓
forza repulsiva



- dove le linee di campo sono più fitte, il campo è più intenso

- $\vec F$ e $d\vec s$ sono $\perp$ tra loro.

$$\underbrace{\vec F = -\nabla U}_{\text{gradiente}} \rightarrow \text{relazione tra forza e potenziale}$$

$$\nabla = \left(\frac{\delta}{dx}, \frac{\delta}{dy}, \frac{\delta}{dz}\right)$$

se conosco U, allora:

$$\vec F = -\frac{dU}{dx}\hat i + \frac{dU}{dy}\hat j - \frac{dU}{dz}\hat k$$

Più in generale:

$$\boxed{\vec F = -\frac{dU}{dr} \cdot \hat u_r}$$

Nel caso di un oggetto puntiforme

$\vec F = \frac{K}{r^2} \cdot \hat u_r$ e il suo potenz. $U = -\frac{K}{r}$

Applicando la relazione

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{K}{r^2} \qquad \vec F = \frac{K}{r^2} \cdot \hat u_r$$

Se $\vec F \propto \frac{1}{r^2} \hat u_r$ e prendo come polo O $\Rightarrow \vec M_O = 0$

$$\vec M = \vec r \wedge \vec F$$

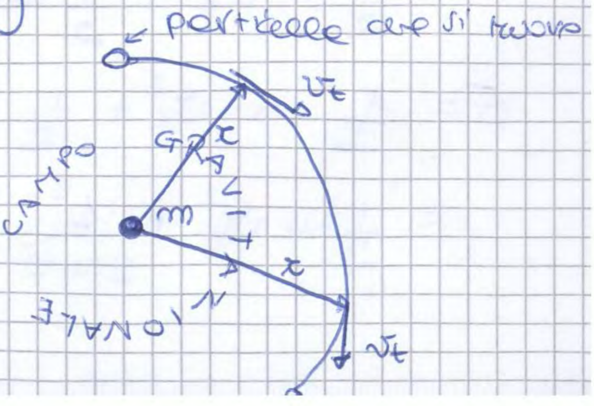
se $\vec M = 0 \Rightarrow \vec L = \text{cost} \rightarrow$ (dalla II eq. cardinale)

$\Downarrow$

TRAIETTORIA PIANA

$\vec L$ ↓ {vettore $\perp$ al piano su cui giaciono forza e raggio vettore}

$|\vec L| = m r^2 \omega \rightarrow$



- più la particella è vicina più alta è la sua velocità.

E (energia meccanica totale) $= \frac{1}{2} m \cdot v_r^2 + U_{eff}(r)$ efficace

$$\boxed{U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}$$

↑ termine che nasce dalla forza centrifuga

il mio problema si è ridotto da 6 gradi di libertà a:

$|\vec{L}| = m \cdot r^2 \cdot \omega \longrightarrow L = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\vartheta}{dr}$

$E = \frac{1}{2} m v_r^2 + U_{eff}(r)$

$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U_{eff}(r)$

$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E - U_{eff}$

$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{E - U_{eff}(r)}$

$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}}}$

$$\boxed{t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}}}} \Rightarrow t = r(t)$$

→ distanza del raggio vettore nel tempo

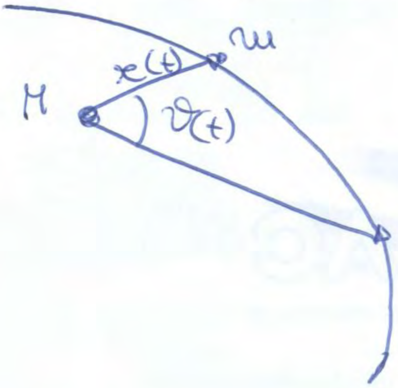
Sostituisco r nella 1ª eq. e mi trovo il risultato finale.

$L = m \cdot r^2(t) \frac{d\vartheta}{dt}$

$$\boxed{\vartheta = \vartheta_0 + \int \frac{L}{m \cdot r^2(t)} dt}$$

→ angolo che il raggio vettore forma nel tempo

legge oraria di r(t)



E_0 è il minimo del potenziale efficace.

derivata

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0$$

$$\frac{|K|}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{m|K|} \Rightarrow E_0 = \cancel{\frac{1}{2}m v_r^2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{|K|}{r} =$$

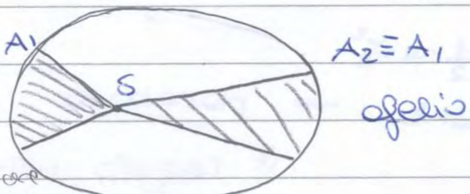
$\cancel{\frac{1}{2}m v_r^2}$ = 0 → perché nella conca è ferma la particella

$$= \frac{L^2}{2m}\left(\frac{m|K|}{L^2}\right)^2 - \frac{|K|}{L^2/m|K|} = \frac{m|K|^2}{2L^2}$$

1) PIANETI ORBITE ELLITTICHE

2) AREE UGUALI PERCORSE IN TEMPI UGUALI

3) $T^2 \propto a^3$ → proporzionale



massa corpo che si muove intorno al pianeta

APROX ⇒ orbite circolari perché l'eccentricità è molto bassa.

$F_G = m \cdot a$

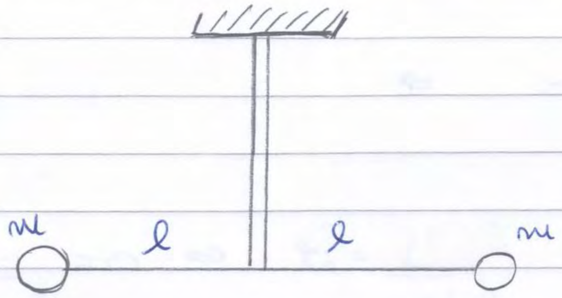
$$F_G = m \cdot \frac{v^2}{r} = m r \omega^2$$

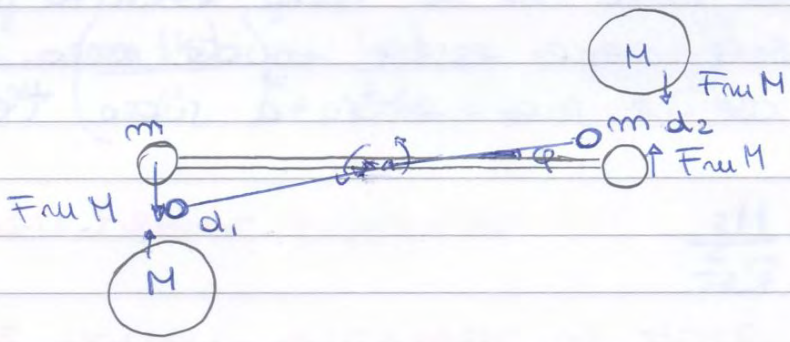
Se l'orbita del pianeta è circolare la velocità è costante.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T → periodo di rivoluzione

BILANCIA DI CAVENDISH





avviciniamo due masse grandi alle masse piccole
↓
il filo inestensibile si storce ⇒ angolo φ
↓
nuovo equilibrio

Condizione di equilibrio:

$$\overrightarrow{MF_G} = \overrightarrow{M_e}$$

$$2lF_G = K\varphi$$

$$2l\gamma\cdot\frac{mM}{d'^2} = K\varphi \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{K\cdot\varphi\cdot d'^2}{2lmM}}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\gamma\cdot\frac{M_S\cdot m_T}{x^2}\cdot\hat{u}_x}$$

$$\gamma = 6{,}6\cdot10^{-11}\,\frac{N}{kg^2}\cdot m^2 = 6{,}6\cdot10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\cdot s^2}$$

velocità fuga

$$E_1 = \frac{1}{2} m \cdot v_f - \gamma \cdot \frac{m \cdot M_T}{R_T}$$

$$E_2 = 0$$

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2} m v_f = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_T}{R_T}$$

$$\boxed{v_f = \sqrt{2\gamma \cdot \frac{M_T}{R_T}}}$$

se $v_f \simeq 11,2$ Km/s è superiore a questo valore, l'oggetto viaggia all'infinito.

$$v_S = \sqrt{2\gamma \cdot \frac{M_S}{R_{ST}}} \simeq 617 \text{ Km/s}$$

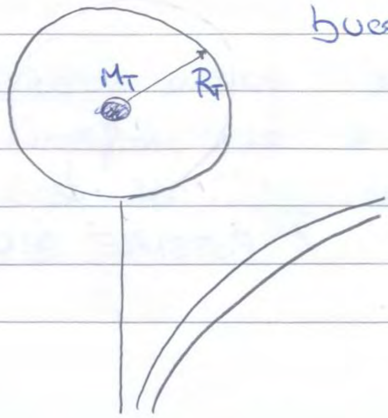
velocità
he un
corpo
eve avere
per uscire dal
sistema
solare

velocità della luce

$$v < c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$R_{\text{orizz. degli eventi}} = \frac{2\gamma M}{c^2} \Rightarrow \text{raggio del buco nero}$$

buco nero nello spazio



$R_T = 6.400$ Km

sostituendo

$R_{\text{orizz. eventi}} = 3$ mm

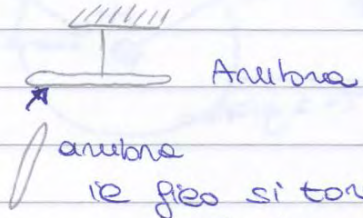
perchè la terra sia buco nero, la massa deve essere contenuta

12/05/14

Campo gravitazionale ≠ Campo elettromagnetico

↓ ↓

è sempre attrattivo   può essere attrattivo o repulsivo



il filo si torce → è come se le bacchette si respingessero

↓

lo stesso accadrebbe se le bacchette fossero di vetro invece che di ambra.

Se prendessi una bacchetta di ambra e una di vetro si attrarrebbero.

⇓

- il vetro si carica positivamente
- l'ambra si carica negativamente

L'oggetto che si utilizza per caricare un altro oggetto prende carica opposta a quella dell'altro oggetto.

↓

nasce l'idea di CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA: la carica elettrica non si crea né si distrugge, ma si sposta.

la forza è attrattiva.

UNITÀ DI MISURA della carica elettrica nel S.I. è il Coulomb.

↓

carica che messa alla distanza di 1m da una forza di 1 N → NON VA BENE

⇓

quantità di carica

1 C = "num. di cariche che attraversa in 1s un conduttore percorso da 1 Ampere di corrente."

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_0} = 8,8 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$ costante dielettrica del vuoto

il coulomb è una grandezza derivata.
l'ampere è una grandezza fondamentale.

Carica elettrica → è discretizzata

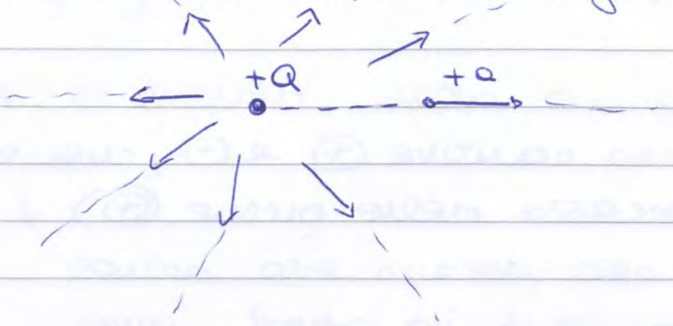
} sfere dello stesso materiale e di stesso raggio

mettendo a contatto una sfera carica e una scarica, la carica si distribuisce uniformemente sulle due sfere.

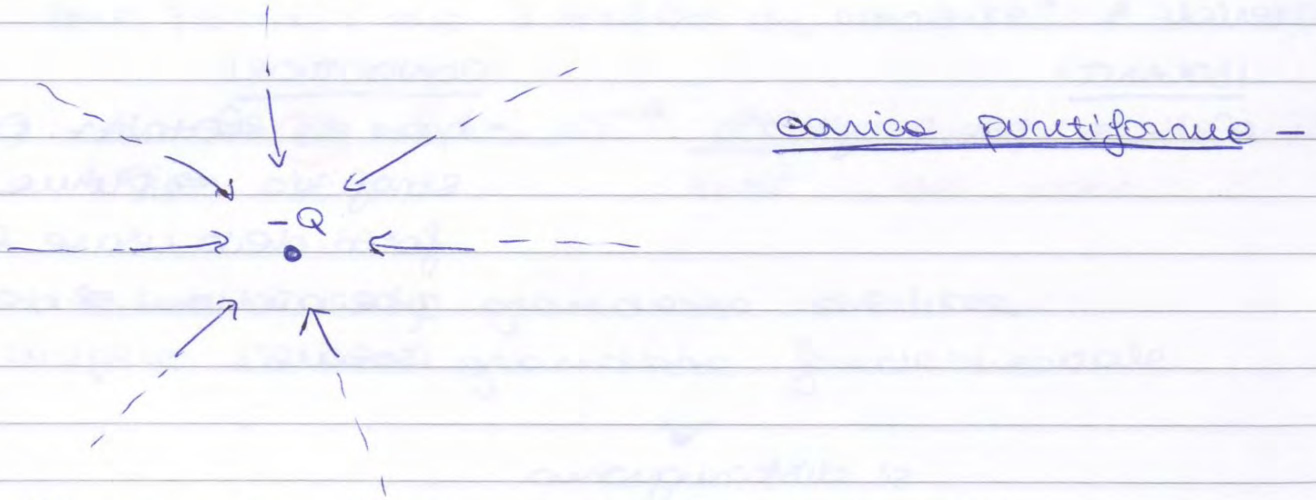
$|e^-| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C → carica minima (carica dell'elettrone)

CAMPO $\vec{E}$ DI UNA CARICA PUNTIFORME

Determinare il campo elettrico di oggetti elettriz. in cui la carica è distribuita uniformemente.



- linee di forza radiali e uscenti



- linee di forza radiali entranti.

Un neutrone non genera un campo elettrico.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{u}_r$$

campo elettrico ($\vec{E}$), forza elettrica ($\vec{F}$), Q carica di prova

Campo elettrico:

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}}$$

→ definiz. più precisa

densità volumica di carica

$$\rho = \frac{dq}{dv}$$

$$\rho = \rho(x,y,z)$$

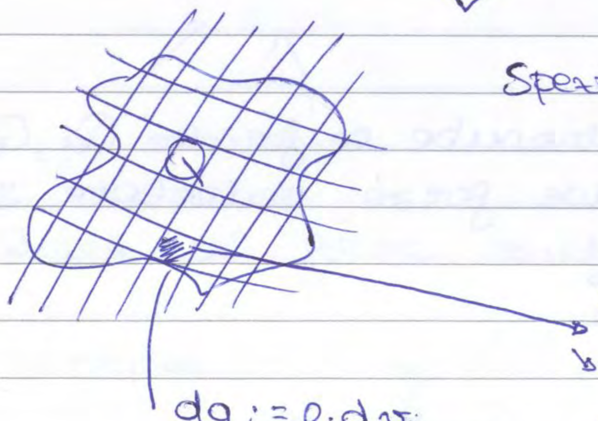
Se il corpo è completam. carico:

$$\rho = \rho(x,y,z) = \frac{Q}{V}$$

$$[\rho] = \frac{C}{m^3}$$ u.d.m

⇓

Spezzetto il corpo carico



$P(x,y,z)$

ciascun elementino produce un campo diretto lungo la radiale:

$dq_i = \rho \cdot dv_i$

$$d\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq_i}{r_i^2} \cdot \hat{u}_r$$

Per il PRINC. DI SOVRAPP. il campo totale sarà dato dalla somma dei campi prodotti dai singoli elementini.

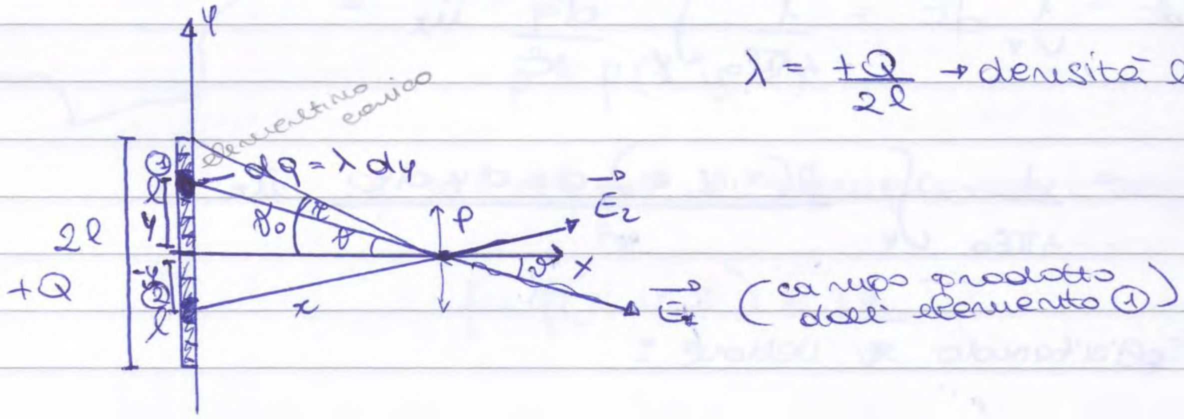
↓

ESEMPIO

barra elettricam. carica di lunghezza 2l e carica ⊕ omogenea.

Calcolare il campo nel punto P(x, 0, 0)

$\lambda = \frac{+Q}{2l}$ → densità lineare



$$d\vec{E}_{12} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = dE_{\parallel}$$

Il campo prodotto dalla barra è diretto lungo x.

$$d\vec{E}_{\parallel} = 2 \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2}}_{} \cdot \cos\vartheta\, \hat{\imath}$$

campo prodotto
dall' elem. puntiforme

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda\, dy}{r^2} \cdot \cos\vartheta\, \hat{\imath}$$

$x = r \cdot \cos\vartheta$

$y = x \cdot \mathrm{sen}\vartheta$

$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\vartheta$

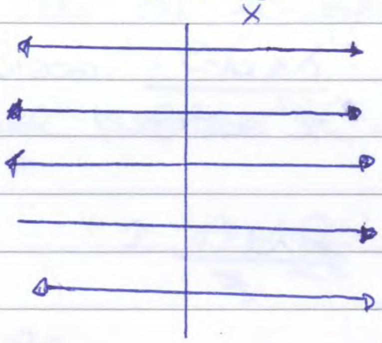
↓

derivando:

$dy = x \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta}$

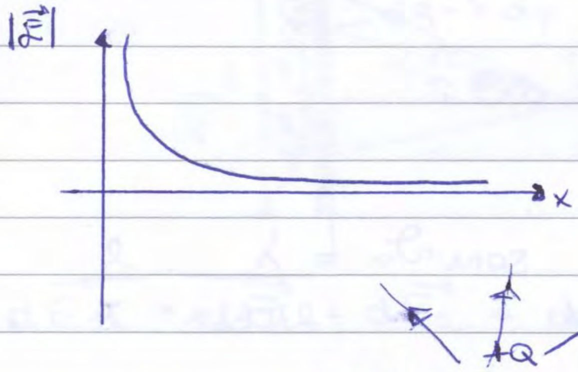
- Per una barra che è lunga ∞:

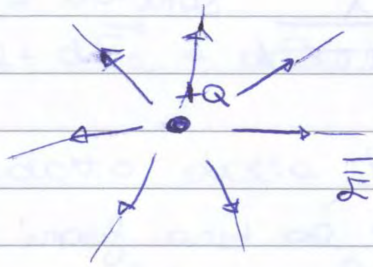
$\vec{E} \propto \frac{1}{x}$



$l \to \infty$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{r}$$

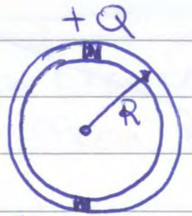


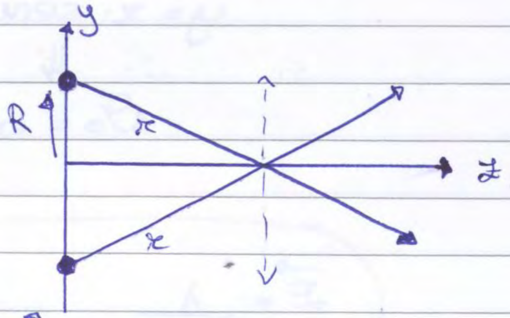


{filo a lunghezza infinita visto dall'alto

$\vec{E} \sim \frac{1}{r}$

- ANELLO

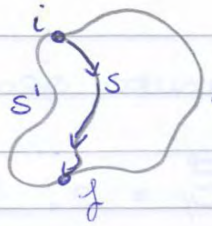




Prendiamo 2 elementini carichi (■) equidistanti dal punto P

$$dq = \lambda ds = \lambda R d\vartheta$$

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$



CAMPI CONSERVATIVI

$\frac{1}{r^2}$

(elettrico)
campo elettrostatico è conservativo.

$$\mathcal{L} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_i^f q\cdot\vec{E}\cdot d\vec{s} = U_e(i) - U_e(f)$$

↓ il lavoro fatto NON dipende dal cammino

$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qQ}{r}$

↓

energia potenziale: lavoro fatto per spostare una carica

$V = \frac{U}{q}$

↓

potenziale

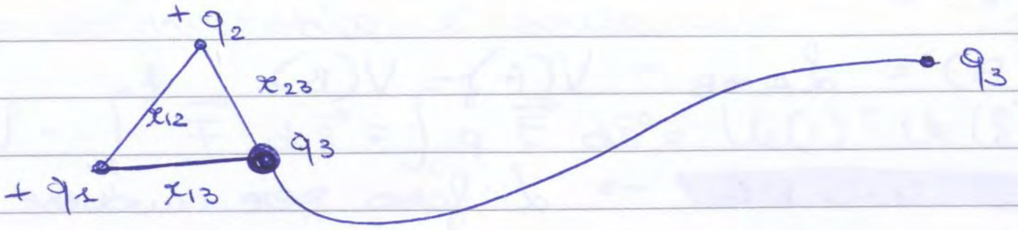
u.d.m. $[U] = J$

$[V] = \frac{J}{C} =$ Volt → energia fornita per ogni coulomb di carica

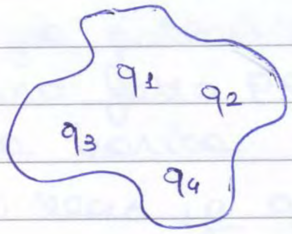
Campo elettrico → $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\vec{Q}}$

u.d.m. $[\vec{E}] = \frac{\overset{J}{\boxed{N\cdot m}}}{C\cdot m} = \overset{Volt}{\boxed{\frac{J}{C}}}\cdot\frac{1}{m} = \frac{Volt}{m}$

Come portare q_3 sul sistema di q_1 e q_2?



$$\mathcal{L}_{123} = \mathcal{L}_{13} + \mathcal{L}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

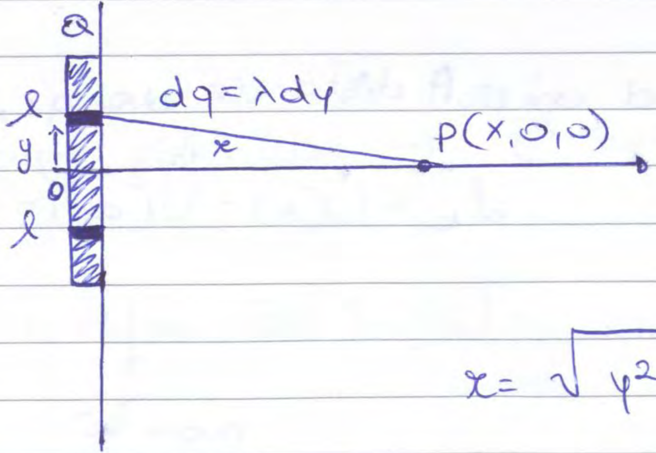


$$U_{elettrostatica} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

∼ ∼ ∼

filo carico Q lungo $2l$

Calcola il potenziale del punto $P(x,0,0)$.



$$\lambda = \frac{Q}{2l}$$

$$r = \sqrt{y^2 + x^2}$$

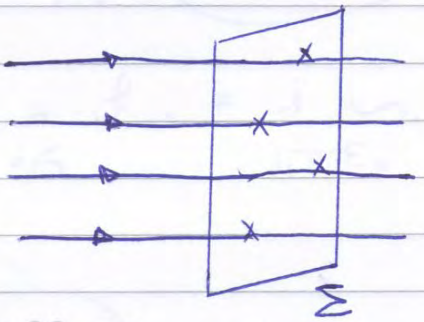
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dy}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

TEOREMA DI GAUSS

risolve il probl. del calcolo dei campi quando la massa ha una forma precisa, semplice.

FLUSSO DI CAMPO VETTORE

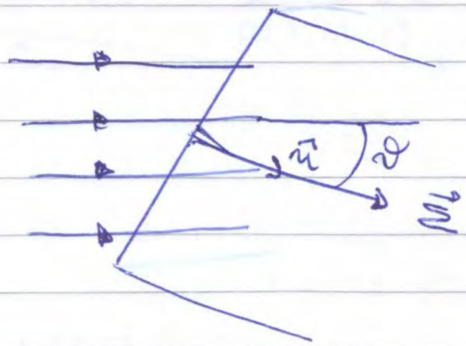
$\Sigma \perp$ linee di campo



flusso attraverso la superficie σ

$$\Phi_E(\Sigma) = |\vec{E}|\,\Sigma$$

Immaginiamo che la superficie sia trasversa alle linee di campo.
La normale forma con le linee di campo un angolo ϑ.



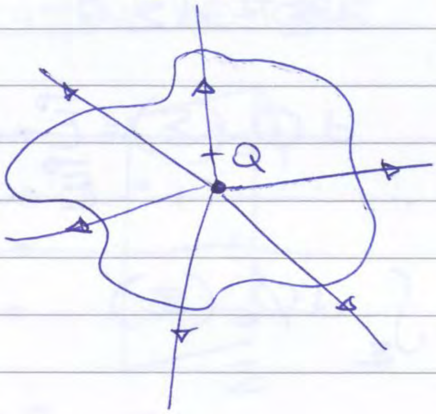
$$\vec{\Sigma} = \Sigma\hat{n}$$

$$\Phi_E(\Sigma) = \vec{E}\cdot\vec{\Sigma} = E\cdot\Sigma\cos\vartheta$$

Attraverso una superficie chiusa tutto ciò che entra, esce. $\phi = 0$

↓

se dentro la superficie c'è una carica elettrica (+) il flusso sarà <u>non</u> null



$\phi \neq 0$

TEOREMA DI GAUSS

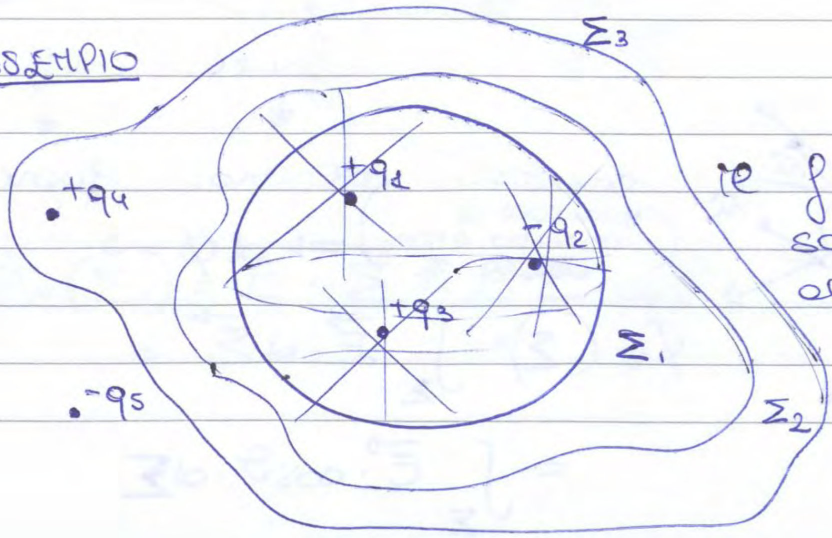
Su qualunque superficie Σ

$$\phi_E(\Sigma) = \frac{\boxed{\Sigma q_i}}{\varepsilon_0}$$ → somma algebrica delle cariche che stanno in Σ

cost. gravitaz.

$$\phi_G(\Sigma) = -4\pi \boxed{\gamma} \cdot \boxed{\Sigma m_i}$$ → somma algebrica delle mass contenute all'interno di Σ

ESEMPIO



il flusso dipende solo dalle cariche che stanno dentro Σ_1

16/05/11

ESERCITAZIONE

① Un satellite artificiale di massa $m = 10^3$ Kg ruota attorno alla Terra descrivendo un' orbita circolare di raggio $r_1 = 6,6 \cdot 10^3$ Km.

1) Calcolare il periodo T_1 dell' orbita.

Per migliorare la trasmissione tra satellite e Terra emerge la necessità di portare il satellite ad un' orbita circolare diversa.

La prima opzione è quella di portarlo su un' orbita circolare di raggio $r_2 = 7,1 \cdot 10^3$ Km.

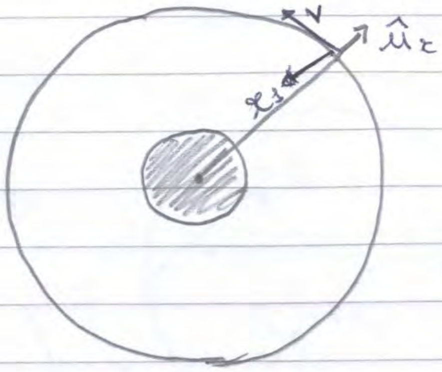
2) Calcolare di quanti minuti e secondi il periodo dell' orbita varia rispetto all' originario.

3) Calcolare il lavoro necessario per eseguire tale operazione.

Una seconda opzione è portarlo ad un' orbita circolare di raggio r_2' e periodo T_2' più lungo di 12 minuti rispetto a T_1.

4) Calcolare la differenza di raggio tra le 2 orbite.

5) Calcolare il lavoro necessario e stabilire quale opzione è più energicamente convenient



Per un' orbita circolare

$$v = \boxed{\omega} \cdot r = (\text{cost})$$

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot r$$

Sostituendo ho:

$$\left(\frac{2\pi}{T} \cdot r\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$ → é la III legge di Keplero

$$\frac{2\pi}{T}^2 = \frac{G \cdot M}{r^3} \longrightarrow \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{r^3}{G . M}}$$

$$\hookrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$ (legame tra periodo e raggio in orbite circolare)

Nell' orbita originaria il periodo vale

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(6{,}6 \cdot 10^{6}\, m)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{\cancel{Kg} \cdot s^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cancel{Kg}}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{6{,}6 \cdot 10^{18}\ s^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} = 5334\ s$$

il potent. gravitaz è sempre attrattivo → ⊖

$$= 2,13\cdot 10^9 \boxed{\frac{kg\cdot m^2}{s^2}} \to J = 2,13\cdot 10^9\ J$$

OPZIONE 2

Dalla formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M}}$ si ottiene

$r = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 G\cdot M}$ dove il periodo T_2' è dato da $T_2' = T_1 + \underbrace{4\ min}_{4\cdot 60 s = 240 s} =$

$= 5'334\ s + 240\ s = 5'574\ s$

$$r_2' = \sqrt[3]{\left(\frac{T_2'}{2\pi}\right)^2 G\cdot M} = \dots = 6,8\cdot 10^6\ m$$

differenza raggi delle 2 orbite:

$$\Delta r = r_2' - r_1 = 6,8\cdot 10^6\ m - 6,6\cdot 10^6\ m = 0,2\cdot 10^6$$

il lavoro nel caso dell'opzione 2 è dato da:

$$W_{ext} = E_m^2 - E_m^0 = -\frac{G\cdot M\cdot m}{2r_2'} - \left(-\frac{G\cdot M\cdot m}{r_1}\right) =$$

$$= -\frac{G\cdot M\cdot m}{2}\left(\frac{1}{r_2'} - \frac{1}{r_1}\right) = \dots = 0,89\cdot 10^9\ J$$

Conviene la OPZIONE 2 perchè impiega meno energia.

Campo elettrico → grandezza vettoriale
Potenziale → grandezza scalare

Dal potenziale $V(\vec{x})$, il campo elettrico si ricava con

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} V(x) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

Osserviamo che:

$$\left(\overset{\nearrow \text{ derivata parziale}}{\frac{\partial}{\partial x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}, \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\overset{\text{derivata dell' argomento della } \sqrt{\ }}{\boxed{\cancel{2}(x-x_i)}}}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{3/2}}, -\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}(y-y_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{3/2}} \right)$$

$$= -\frac{(x-x_i, y-y_i)}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3}$$

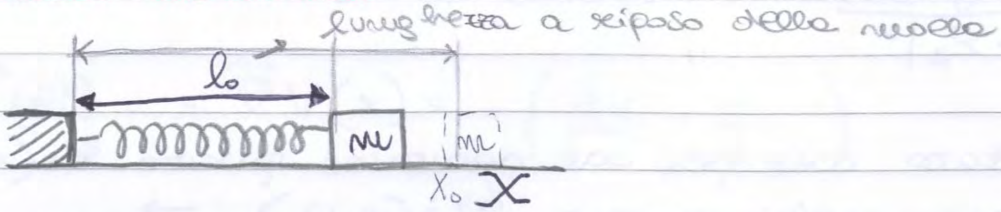
$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{3} q_i \left(\frac{-(x-x_i, y-y_i)}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3} \right) =$$

$$= +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i (x-x_i, y-y_i)}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3} =$$

$$= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x-x_1, y-y_1)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3} - \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x-x_2, y-y_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^3} - \frac{4Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot$$

Oscillatore armonico



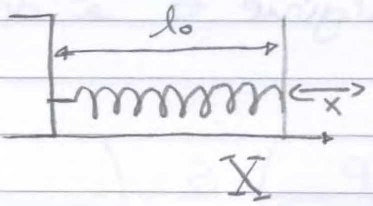
All' istante $t=0$ la molla viene tirata ed il corpo di massa m viene messo nella posizione X_0 e lasciat libero con velocità nulla.

1) MOTO IN ASSENZA DI ATTRITO (oscillatore armonico semplice).

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a} \xrightarrow[\text{lungo } x]{\text{il moto è}} F = m\cdot a$$

$$F = F_{el} = -K(X - l_0)$$

$$\boxed{-K(X - l_0) = m\frac{d^2X}{dt^2}}$$



Indico $x = X - l_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-Kx = m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

eq. differenziale per l' oscillatore armonico semplice

$$\frac{dx}{dt}(t=0) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)\Big|_{t=0} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-A\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0$$

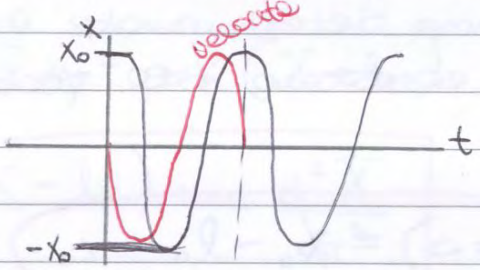
$$\downarrow$$

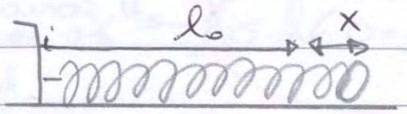
$$\varphi = 0$$

Sostituisco $\varphi = 0$ nella (1) $\Rightarrow$ $A = x_0$

La soluzione che descrive il nostro caso (con quelle condizioni al contorno) è

$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$ → soluzione periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$





$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ equazione omogenea

Se $x(t)$ è soluzione → $\lambda x(t)$ è soluzione

CONCLUSIONE → senza attrito il corpo ne oscilla indefinitam.

Non é più un' equazione omogenea.
La soluzione generale é data da:
- la soluzione generale dell' omogenea associata
- più una soluzione particolare della non omog

Come soluzione particolare posso usare quella

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x + \mu_D g = 0$$

$$\hookrightarrow \quad x(t) = \frac{\mu_D g}{\omega^2} = \text{cost. nel tempo}$$

La soluzione generale è

$$\boxed{x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\mu_D g}{\omega^2}}$$

Le costanti A e φ le determino di nuovo dalle condizioni al contorno (che sono specifiche del problema che sto considerando).

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(t=0) = 0 \end{cases}$$

Impongo condizioni al contorno

$$x(t=0) = A \cos\varphi + \frac{\mu_D g}{\omega^2} = x_0$$

$$\frac{dx}{dt}(t=0) = -A\omega \operatorname{sen}\varphi = 0$$

$$\hookrightarrow \varphi = 0$$

Da $T = \frac{\pi}{\omega}$ in poi l'equazione diventa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \underset{\uparrow}{\frac{\mu_D g}{\omega^2}}$$

cambia segno

Di fatto $x_A \rightarrow -x_A$

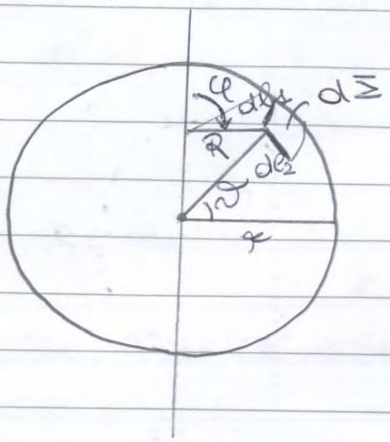
N.B

il modulo della F_{att} è cost, il segno cambia e mi sforza il moto.

Lo smorzamento è lineare → cioè se prendo i massimi sopra e sotto stanno tutti su una retta.

$$\phi_E(\Sigma) = \int_\Sigma E\, d\Sigma$$

↑ integrale di superficie

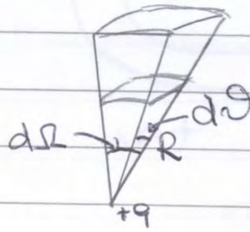


$R = r \cdot \cos\vartheta$

$dl_2 = R \cdot d\vartheta$

$dl_1 = R \cdot \cos\vartheta \cdot d\varphi$

$$d\Sigma = dl_1 \cdot dl_2 = R \cdot d\vartheta \cdot R \cdot \cos\vartheta \cdot d\varphi =$$
$$= R^2 \underbrace{\cos\vartheta\, d\vartheta \cdot d\varphi}_{d\Omega}$$



$$\phi_E(\Sigma) = \int_\Sigma E\, d\Sigma = \int_\Sigma E \cdot R^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\phi_E(\Sigma) = \int_\Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\cancel{R^2}} \cancel{R^2} \cdot \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Sigma \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

Campo prodotto da una sfera carica

1) SFERA CAVA (FUORI)

{distrib. di carica uniforme}

superficie

$\uparrow$

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$r > R$

il campo elettrico è radiale — uscente → se la cari è $\oplus$
\ entrante → se la carica è $\ominus$

Prendendo una sfera concentrica la normale è // al campo elettrico punto per punto.

$$\phi_E(\Sigma) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}\, d\Sigma =$$

Sulla superficie σ il campo è costante.

$$= E(r)\int_\Sigma d\Sigma = E(r)\cdot r^2 \cdot 4\pi$$

Per il Teorema di Gauss: =

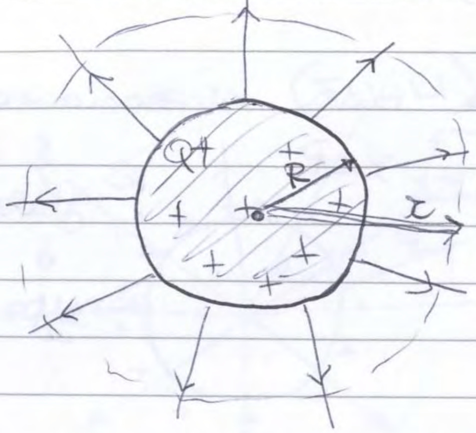
→ è radi

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r}$$

campo elettrico prodotto da una sfera cava fuori. → (con carica distrib uniforme)

3) SFERA PIENA UNIFORMEMENTE CARICA

FUORI



densità volumica

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$r > R$

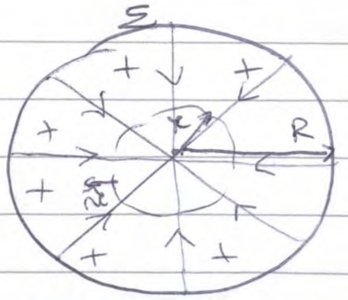
$$\phi_E(\Sigma) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{\Sigma} = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}\, d\Sigma = \Sigma(r)\int d\Sigma$$

$$= 4\pi r^2 E(r)$$

Per Gauss il campo elettrico è uguale alla sfera internamente carica, quindi a Q.

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\hat{u}_r$$

DENTRO



$$\phi_E(\Sigma) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot d\Sigma =$$

$$= \int_\Sigma E\cdot d\Sigma = 4\pi r^2 E(r)$$

Gauss:

$$\cancel{4}\pi \cancel{r^2} E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V_\Sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E(r) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\rho}{\varepsilon_0} r$$

(liquidi e gas)

MECCANICA DEI FLUIDI

STATICA

↓

le grandezze macroscopiche che caratterizzano un fluido sono costanti

DINAMICA

FLUIDI

REALI

- i gas reali hanno attriti interni (viscosità), sono comprimibili e perfettam. elastici

IDEALI

- no attriti interni
- sono incomprimibili
- il lavoro di deformazione è nullo $\mathcal{L}_{def} = 0$

GAS ≠ LIQUIDO

GAS ↓

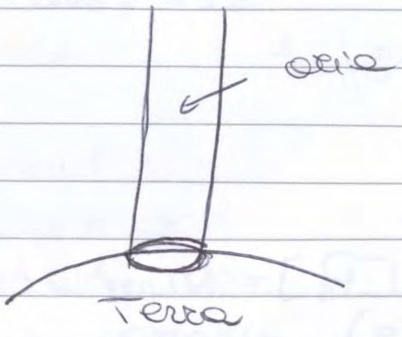
- fortem. comprimib.

LIQUIDO ↓

- incomprimibile

Altre unità di misura della pressione:

{ Pa, mmHg, atm, Barie, Bar, Torr, Psi, cmH$_2$O }



$\rho_a \sim 1,4\ Kg/m^3$

$\sim 1\ atm = 101\ 300\ Pa$

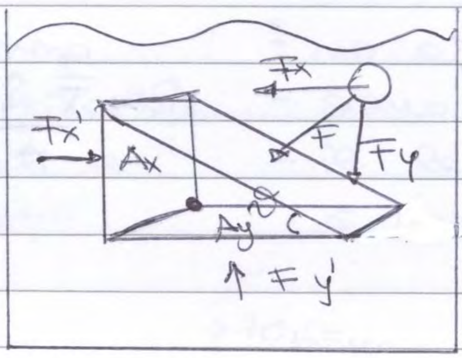
$\Downarrow$

$10130\ Kg$

1) PRIMA LEGGE:

PRINCIPIO DI ISOTOPIA DELLE PRESSIONI

All'interno di un fluido la direzione della pressione è uguale in ogni punto del fluido stesso.



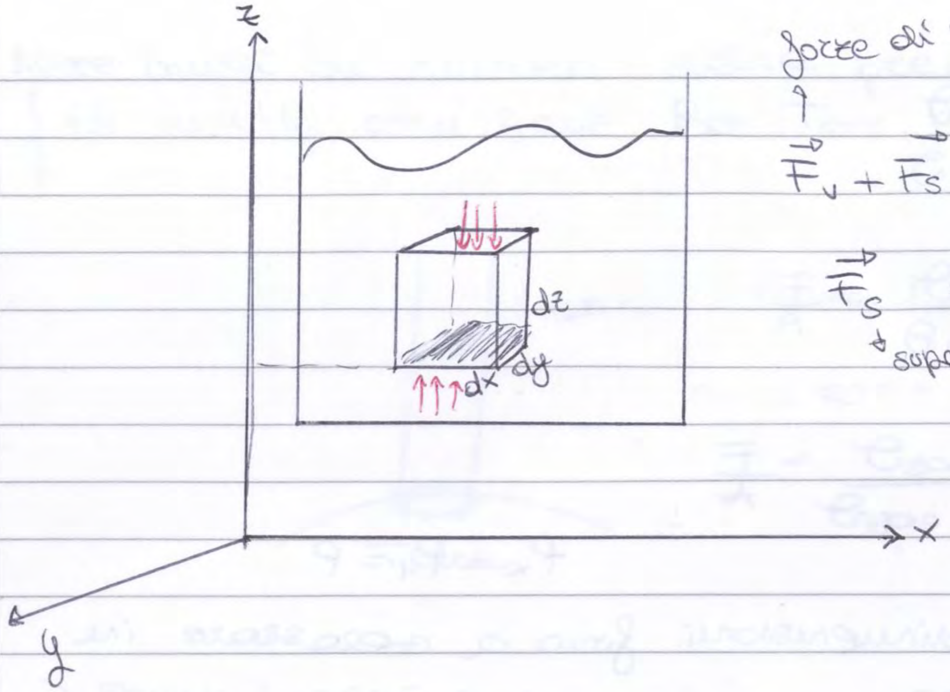
Pressioni → componenti ⊥ alla superficie ÷ la superficie

$F_x = F \cdot sen\vartheta$

$F_y = F \cdot cos\vartheta$

$A_x = A \cdot sen\vartheta$

$A_y = A \cdot cos\vartheta$



forze di volume

$$\vec{F}_v + \vec{F_S} = 0$$

asse z

$$\underset{\text{superficie}}{\vec{F}_S} \Longrightarrow P(z)\,dx\,dy - P(z+dz)\,dx\,dy$$

con Taylor:

$$P(z)\,dx\,dy - \left[P(z) + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right]dx\,dy$$

$$\left(F_s\right)_z = -\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx\,dy = -\frac{\partial P}{\partial z}d\tau$$

$$\vec{F_v} = \left(F_v\right)_x \hat{i} + \left(F_v\right)_y \hat{j} + \left(F_v\right)_z \hat{k}$$

$$\vec{F_v} = \frac{\vec{F_v}}{m} \cdot m = \vec{f}\rho\,d\tau$$

$$\vec{F_v} = \left(f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}\right)\rho\,d\tau$$

Quindi:

$$\vec{F_v} + \vec{F_s} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(-\frac{\partial P}{\partial z} + f_z\rho\right)d\tau = 0$$

Legge di Stevino → densità costante

$$P(h) = P_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

~ ~ ~

IPOTESI:

GAS IDEALE   T = cost

$$PV = \text{cost} \Rightarrow P = \frac{K}{\rho}$$

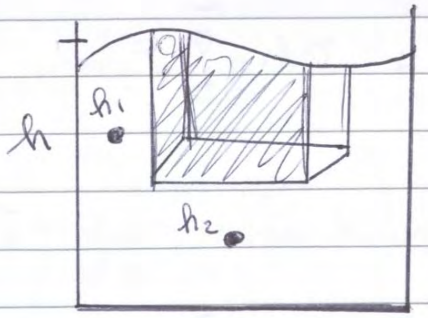
$$\frac{dP}{dz} = -\frac{g}{K}\rho \Rightarrow \frac{dP}{\rho} = \frac{g}{K}\,dz$$

TH: $\boxed{P(z) = P_0 \cdot e^{-\frac{g}{K}dz}}$ → formula ipsometrica

↓

densità non costante.

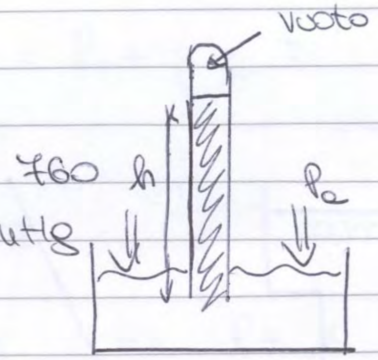
~ ~ ~



due punti nel liquido posti ad altezze diverse risentano di pressioni diverse.

Notiamo che scendo la pressione cresce.

Barometro a Hg (mercurio)

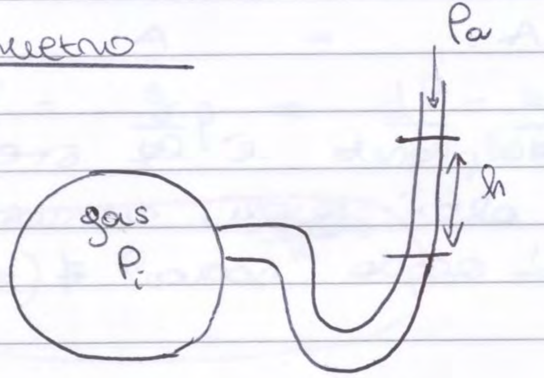


$P_0 = 0$ atm (press. interna)

$$P_a = \underset{\underset{13,6\cdot 10^6 \, Kg/m^3}{\parallel}}{\rho_L} \, \underset{9,8}{g} \cdot \overset{0,76}{h} = 101300 \, Pa$$

1 atm = 760 mmHg

Manometro



$$P_i = P_0 + \rho g h \Rightarrow \Delta P = P_1 - P_0 = \rho g h$$

$$P = \rho \cdot g \cdot h$$

Barometro ≠ manometro

↓ misura la press. effettiva

↓ misura la press interna rispetto alla press esterna

↓ press. relativa

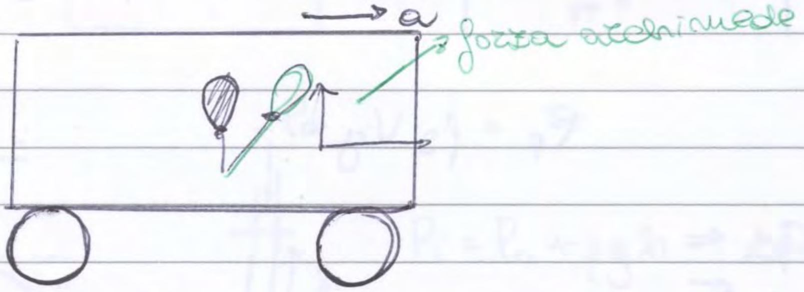
Acqua → nella fase solida ha densità minore che nella fase liquida.

~ ~ ~

ES

$\vec{S} = -\vec{F_V}$ (spinta di archimede)

Treno viaggia ad una certa velocità; Dove va il palloncino?



forza effettiva: forza peso
forza apparente: forza di inerzia
⇓
la spinta di Archimede è opposta al campo di accelerazione.