NUMERO: 996

DATA: 27/06/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Prone

MATERIA: Geometria + Eserc.

Prof. Cumino

Geometria

MATRICI (reali, complesse)

Si dice matrice una tabella di numeri disposti in righe e colonne.

I singoli numeri si dicono ELEMENTI DELLA MATRICE,

L'insieme delle matrici di numeri reali di m righe e n colonne si indica con $\mathbb{R}^{m,n}$, se i numeri sono complessi si indica con $\mathbb{C}^{m,n}$ e si dicono matrici $m \times n$

ex $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ $\quad a_{1,3} = 1$

Per indicare l'elemento della riga i e della colonna j, diciamo a_{ij}

MATRICE QUADRATA

- Si dice matrice quadrata una matrice nella quale il numero di righe è uguale al numero di colonne
- In una matrice quadrata si dice DIAGONALE PRINCIPALE la diagonale che ha come elementi a_{ii}

ex $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- Due matrici $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dicono UGUALI se a_{ij} è uguale a b_{ij} per ogni i e per ogni j, allora $A = B$

TRASPOSTA DI UNA MATRICE

Si dice trasposta di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, la matrice ${}^tA \in \mathbb{R}^{m,n}$ che si ottiene scambiando le righe con le colonne

ex $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ $\quad {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$

- ogni matrice è formata da n vettori riga e n vettori colonna

Operazioni delle matrici

Date le matrici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

si dice **SOMMA** di A e B la matrice $C = A+B$ che ha come

elementi $c = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

ex

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Proprietà somma

- COMMUTATIVA : $A+B = B+A \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
- ASSOCIATIVA : $A+(B+C) = (A+B)+C$
- esistenza dell' ELEMENTO NEUTRO : la matrice nulla O.

$$\exists O \in \mathbb{R}^{m,n} \mid A+O = A$$

- esistenza dell' OPPOSTO : $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \ \exists -A \in \mathbb{R}^{m,n} \mid A+(-A) = O$
  - la matrice opposta si ottiene cambiando i segni a tutti gli elementi della matrice
- $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

Prodotto di un numero per una matrice

Dato il numero reale $s \in \mathbb{R}$ e la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$,

si dice prodotto di $s \cdot A$ la matrice :

$$B = sA = (s a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$$

- perciò si moltiplicano tutti gli elementi della matrice per quel numero.

ex.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 12 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

- Proprietà **DISTRIBUTIVA** rispetto all'addizione

  sinistra: $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n,p}$ $\quad A(B+C) = AB + AC$

  destra: $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$, $C \in \mathbb{R}^{n,p}$ $\quad (A+B)C = AC + BC$

- La **TRASPOSTA** di AB

  $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ $\quad {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ attenzione!!

- **NON** vale la legge di **ANNULLAMENTO del PRODOTTO**

  ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  due matrici non nulle danno una matrice nulla.

Potenza di matrici

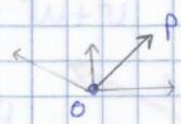
Data la matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $p > 1$, $p \in \mathbb{N}$

si dice potenza di A elevato a p, il prodotto di p fattori uguali ad A

ex $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 19 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

Vettori della geometria

Fisso un punto dello spazio O e considero tutti i segmenti orientati di estremo P e origine O, $\forall P$ dello spazio



Fisso un $\overset{u}{\vdash\!\dashv}$, di lunghezza 1, per convenzione.

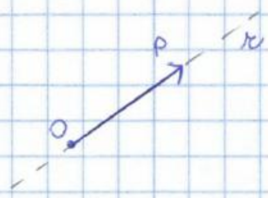
Così misuro ogni segmento, utilizzandolo come unità di misura.

VETTORE: si dice vettore applicato nel punto O, ogni segmento orientato $\vec{OP}$

- caratterizzato da: direzione: retta r che passa per O e P

  verso: da O verso P

  modulo (norma): $|\vec{OP}|$, lunghezza del segmento $\overline{OP}$



vettore $= \vec{OP} = \vec{v} = \underline{v} = \mathbf{v}$

PRODOTTO DI UN VETTORE x UN NUMERO REALE

$m\vec{v}$ è il vettore con direzione di $\vec{v}$, modulo $|m\vec{v}| = |m||\vec{v}|$
e verso di $\vec{v}$ se $m>0$, di $-\vec{v}$ se $m<0$

Caso particolare

1) $\forall \vec{v},\ m=0,\ |0\vec{v}| = 0|\vec{v}| = 0 \Rightarrow 0\vec{v} = \vec{0}$

2) $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$, voglio trovare vers $\vec{v}$

$$\text{vers } \vec{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

una m particolare

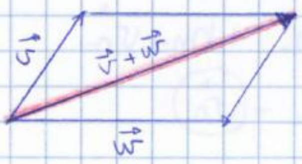
verifica: $\left| \frac{1}{\vec{v}} \cdot \vec{v} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{v}|} \right| |\vec{v}| = \frac{1}{\cancel{|\vec{v}|}} \cancel{|\vec{v}|} = 1$ il modulo è proprio 1, come dato dall' versore.

tolgo xk è >

Proprietà

1) $\forall \vec{v}, \forall a, b \in \mathbb{R}: a(b\vec{v}) = b(a\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
2) $\forall \vec{v}: 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
3) $\forall \vec{v}, \vec{w}, \forall a \in \mathbb{R}: a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$
4) $\forall a, b \in \mathbb{R}: (a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

osservazione



$|\vec{v}+\vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$

disuguaglianza triangolare

Corollari:

1- due vettori non nulli $\vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente dipendenti
$\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R} \mid \vec{v} = m\vec{w}$

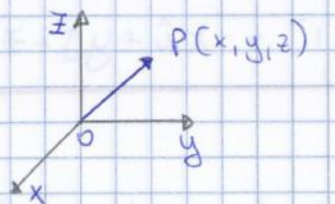
2- $\vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ sono linearmente dipendenti $\forall a \in \mathbb{R}$ e per $b = 0$:
$$\vec{0} = a\vec{0} + b\vec{v}$$

3- $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$ sono linearmente dipendenti se uno di essi è combinazione lineare degli altri
$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ stanno sullo stesso piano

4- $\vec{u}$ è linearmente dipendente? $\vec{0} = a\vec{u}$, $\exists\, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
- se $\vec{u} \neq \vec{0}$, deve essere $a = 0$
- se $\vec{u} = \vec{0}$, $a \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \vec{u}$ è linearmente dipendente $\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

V

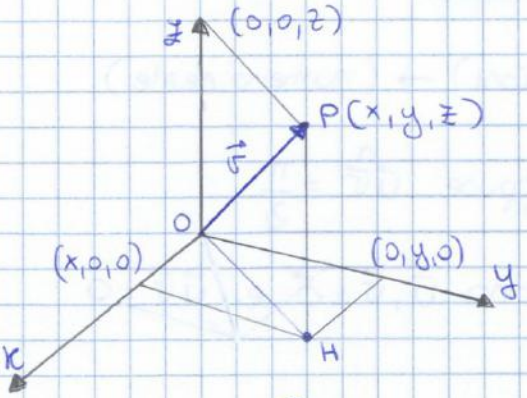


$R(O, x, y, z)$ riferimento cartesiano ortogonale monometrico

$\vec{v} = \vec{OP} \rightarrow (x, y, z)$ = coordinate di P

Teorema Dati $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2) \in V$, dato $m \in \mathbb{R}$

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$m\vec{v} = (mx_1, my_1, mz_1)$$



$\vec{v} = (x, y, z)$
x, y, z si dicono componenti di $\vec{v}$

$$\vec{v} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$$

Proprietà

(1) - COMMUTATIVA $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

(2) - $\forall m \in \mathbb{R}$ $\quad m(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (m\vec{u})\vec{v} = \vec{u}(m\vec{v})$

(3) - $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $\quad \vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$ DISTRIBUTIVA rispetto alla somma

Osservazione

(1) $\forall \vec{u}$, calcolo $\vec{u}\cdot\vec{u}$

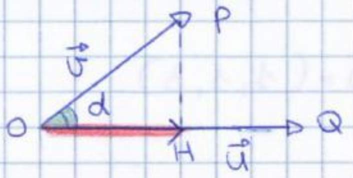
$$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}||\vec{u}|\cos\hat{\vec{u}\vec{u}} = |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

(2) calcolo $|\vec{v}-\vec{w}|^2$

$$|\vec{v}-\vec{w}|^2 = (\vec{v}-\vec{w})(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{v}\vec{v} - \vec{v}\vec{w} - \vec{w}\vec{v} + \vec{w}\vec{w} =$$

$$= |\vec{v}|^2 - 2\vec{v}\vec{w} + |\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\hat{\vec{w}\vec{v}} + |\vec{w}|^2 \quad \text{(Carnot)}$$

(3)



$\vec{v} = \vec{OP} \neq \vec{0}$

$\vec{u} = \vec{OQ} \neq \vec{0}$

■ Cerco il vettore proiezione ortogonale di $\vec{v}$ sulla direzione di $\vec{u}$

Cerco $\vec{OH}$. $\quad |\vec{OH}| = |\vec{OP}|\cos\alpha$

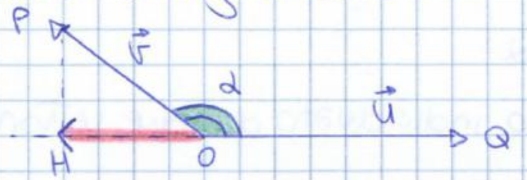
ma $\cos\alpha = \cos\hat{\vec{v}\vec{u}}$ e $|\vec{OP}| = |\vec{v}|$ e so che $\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\hat{\vec{v}\vec{u}}$

perciò:

$$|\vec{OH}| = \frac{|\vec{v}||\vec{u}|\cos\hat{\vec{u}\vec{v}}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\vec{OH} = |\vec{OH}|\ \text{vers}\,\vec{u} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|}\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$$

♡ se prendo un angolo ottuso:



Vale la stessa formula. Infatti $\vec{OH}$ è uguale, ma con verso opposto

Proprietà: 7

1 - **NON** vale la proprietà COMMUTATIVA, perché cambia il verso

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

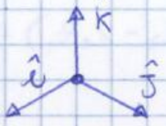
2 - $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ quando:

$\vec{u} = 0$ oppure $\vec{v} = 0$ oppure $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \pi$

3 - $\forall m \in \mathbb{R} \quad m(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (m\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (m\vec{v})$

4 - $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Terna destrorsa:



$\hat{\imath} \wedge \hat{\jmath} = \hat{k}$

$\hat{\jmath} \wedge \hat{k} = \hat{\imath}$

$\hat{\jmath} \wedge \hat{\imath} = -\hat{k}$

$(\hat{\imath} \wedge \hat{\jmath}) \wedge \hat{\imath} = \hat{k} \wedge \hat{\imath} = \hat{\jmath}$

$\hat{\imath} \wedge (\hat{\jmath} \wedge \hat{\imath}) = \hat{\imath} \wedge (-\hat{k}) = -\hat{\jmath}$

$(\hat{\imath} \wedge \hat{\jmath}) \wedge \hat{k} = \hat{k} \wedge \hat{k} = \vec{0}$

Dati $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$ calcolo $\vec{v} \wedge \vec{u}$

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\alpha = (x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}) \wedge (x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k})$$

$$x_1\hat{\imath} \wedge (x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}) + y_1\hat{\jmath} \wedge (\dots) + z_1\hat{k}(\dots)$$

$$= x_1x_2\underbrace{\hat{\imath}^2}_{0} + x_1y_2\underbrace{\hat{\imath}\hat{\jmath}}_{\hat{k}} + x_1z_2\underbrace{\hat{\imath}\hat{k}}_{-\hat{\jmath}} + \dots + \dots =$$

$$= x_1y_2\hat{k} - x_1z_2\hat{\jmath} + \dots + \dots =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} =$$

$$= \hat{\imath}\, y_1z_2 + \hat{\jmath}\, z_1x_2 + \hat{k}\, x_1y_2 - \hat{k}\, y_1x_2 - \hat{\imath}\, z_1y_2 - \hat{\jmath}\, x_1z_2$$

PRODOTTO VETTORIALE IN COMPONENTI

MATRICI

Una matrice di tipo $m \times n$ e' una tabella di numeri disposti su m righe ed n colonne. Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

sono matrici rispettivamente di tipo 2×3, 4×1, 2×2. Quando $m = n$, come nell'ultimo esempio, la matrice si dice quadrata di ordine n.

I singoli numeri si dicono coefficienti o elementi della matrice. Dentro una matrice ogni coefficiente occupa una ben precisa posizione, identificata dalla riga e dalla colonna a cui appartiene: cosi' nella prima matrice dell'esempio il coefficiente 3 si trova nella prima riga e nella terza colonna.

L'insieme delle matrici a coefficienti reali si indica con $\mathbf{R}^{m,n}$, analogamente l'insieme delle matrici a coefficienti complessi si indica con $\mathbf{C}^{m,n}$.

Diremo che due matrici sono uguali se sono uguali i coefficienti che hanno la stessa posizione. Cosi' per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

In generale, data una matrice, si denota con a_{ij} l'elemento che appartiene alla i-esima riga e alla j-esima colonna. La generica matrice di tipo 3×4 si puo' quindi indicare con:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Ancora piu' in generale si puo' indicare una matrice con $A = (a_{ij})$, senza specificarne il tipo.

Definizione. La **trasposta** di una matrice A e' la matrice che si ottiene scambiando tra loro le righe e le colonne; si indica con ${}^tA$.

Se $A \in \mathbf{R}^{n,m}$, si ha ${}^tA \in \mathbf{R}^{m,n}$. In particolare ${}^t({}^tA) = A$.

Esempi.

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad {}^t\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vettori. Sono di particolare importanza le matrici che hanno soltanto una riga oppure soltanto una colonna, si dicono rispettivamente **vettore riga** e **vettore colonna**. Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oppure

$$B = (0, 1, 0, 1)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 190

Esempi. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad N = {}^t M = (1 \quad 2)$$

dalla definizione segue che si possono eseguire i prodotti AB, BA, NA, BM con i seguenti risultati

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 0 & 20 & 16 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, NA = (1 \quad 10 \quad 11), \quad BM = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mentre invece non si puo' eseguire per esempio il prodotto MB.

Proprieta'. Date le matrici A, B, C, per le quali abbia senso eseguire le operazioni indicate, si ha:
- $A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA$;
- $(AB)C = A(BC)$;
- dato un numero k, $k(AB) = (kA)B$;
- ${}^t(AB) = {}^t B^t A$

Osservazione. Non sempre per il prodotto tra matrici vale la proprieta' commutativa: nell'esempio $AB \neq BA$ e, mentre BM si puo' calcolare, addirittura MB non risulta definito.

Definizione. Una matrice quadrata $M = (a_{ij})$ si dice **diagonale** se gli unici coefficienti non nulli sono quelli che appartengono alla diagonale principale, ossia quelli per i quali $i = j$. Una matrice quadrata $M = (a_{ij})$ si dice **triangolare alta** se tutti i suoi coefficienti al di sotto della diagonale principale sono nulli, ossia $a_{ij} = 0$ se $i > j$. Una matrice quadrata di ordine n tale che :
$a_{ij} = 1$ se $i = j$
$a_{ij} = 0$ se $i \neq j$
si dice **matrice identita'** e si denota con I_n.

E' facile verificare che

Proposizione. Data $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, si ha $I_m A = A = A I_n$.

Potenza e inversa di una matrice quadrata. Data una matrice quadrata A di ordine k, possiamo calcolare A^n, per ogni intero positivo n. Per esempio $A^3 = AAA = A^2A = AA^2$. Poniamo, per convenzione, $A^0 = I_k$.

Diversamente da una coppia qualsiasi di matrici, si verifica che le potenze di una data matrice commutano tra di loro:

$$A^m A^n = A^n A^m, \quad m, n \in \mathbf{N}$$

Ricordiamo ora che, dato un numero $a \neq 0$, l'inverso a^{-1} di a e' l'unico numero b tale che $ab = 1$. Nel caso delle matrici quadrate vale una definizione analoga, tenendo pero' conto del fatto che il prodotto non e' commutativo.

Definizione. Data una matrice quadrata A, si dice che A e' **invertibile** se esiste una matrice quadrata B dello stesso ordine tale che

$$AB = BA = I$$

In questo caso B si dice **matrice inversa** di A e si denota con A^{-1}.

Nel caso di matrici di ordine 2, il calcolo dell'inversa segue facilmente dalla definizione e si ha il risultato seguente:

VETTORI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

Fissato un punto O del piano o dello spazio, chiamiamo vettore $\mathbf{v}$ (applicato in O) qualsiasi segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, al variare del punto P nel piano o nello spazio.

Fissata una unità di misura delle lunghezze , il vettore $\mathbf{v}$ è individuato assegnando:

- la direzione (quella della retta che passa per O e P)

- il verso (quello da O verso P)

- il modulo (il numero reale non negativo che esprime la lunghezza del segmento OP rispetto all'unità di misura fissata).

Diremo che due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono uguali se sono uguali in direzione, verso e modulo.
Un vettore di modulo nullo si dice vettore nullo e si indica con il simbolo $\mathbf{0}$.
Il modulo del vettore $\mathbf{v}$ si indica con $|\mathbf{v}|$.
Un vettore $\mathbf{v}$ tale che $|\mathbf{v}| = 1$ si dice **versore**; ad ogni $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$ èassociato un versore che si indica con $vers\mathbf{v}$, cioè un vettore di modulo 1 che la stessa direzione e lo stesso verso di $\mathbf{v}$.

Somma di vettori. Dati due vettori $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}$, il vettore somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è il segmento orientato $\overrightarrow{OR}$ diagonale del parallelogramma che ha per lati OP e OQ (regola del parallelogramma); ne segue in particolare che $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è contenuto nel piano individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e che vale la cosiddetta disegualianza triangolare: $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

Proprietà

1) (commutativa) $\mathbf{u} + \mathbf{v}=\mathbf{v} + \mathbf{u}$;

2) (associativa) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}=\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;

3) $\mathbf{v} + \mathbf{0}=\mathbf{v}$, per ogni vettore $\mathbf{v}$;

4) Per ogni $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$, esiste il vettore $-\mathbf{v}$ avente lo stesso modulo e verso opposto e si ha $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

La somma $\mathbf{v} + (-\mathbf{w})$ si scrive di solito $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (differenza tra due vettori).

Prodotto di un numero per un vettore. Dato un vettore $\mathbf{v}$ e un numero reale m, il vettore $m\mathbf{v}$ è il vettore che ha la stessa direzione di $\mathbf{v}$, lo stesso verso di $\mathbf{v}$ se $m > 0$, verso opposto se $m < 0$ e modulo $|m|\mathbf{v}$.

Casi particolari

Dato $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$, si ha $vers\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$.
Dato $\mathbf{v}$ qualsiasi, si ha $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Proprietà

1) $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ per ogni a, b reali;

2) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$;

3) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$;

4) $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 190

4) dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, il vettore **proiezione ortogonale** di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{u}$ è il vettore $\mathbf{v_u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}$. Si ha infatti: $\mathbf{v_u} = (|\mathbf{v}|cos\widehat{\mathbf{uv}})vers\mathbf{u} = (|\mathbf{v}|cos\widehat{\mathbf{uv}})\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$;

5) $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}||\mathbf{w}|$, in particolare $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|$ se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono paralleli.

Corollari. 1) Dati due vettori $\mathbf{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$, in componenti rispetto a un sistema di riferimento $R(O, x, y, z)$, si ha, per le proprietà del prodotto scalare:

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

2) Per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

sappiamo infatti che si può scrivere in modo unico

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

facendo per esempio il prodotto scalare di ambo i membri per il vettore $\mathbf{i}$ si ottiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + z\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = x$$

Prodotto vettoriale. Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si dice prodotto vettoriale di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ così definito:

- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ ha direzione perpendicolare al piano di $\mathbf{v}$ e di $\mathbf{w}$

- il verso di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è determinato dalla regola della mano destra, ossia $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ (nell'ordine) formano una terna destrorsa di vettori

- il modulo di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|sin\widehat{\mathbf{uv}}$

Osservazioni.

1) dalla definizione segue che se $\mathbf{n}$ è un versore ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = |\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|\mathbf{n}$;

il modulo di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è uguale all'area del parallelogramma avente come lati adiacenti $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Proprietà

1) (anticommutativa) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$;
2) $(m\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge (m\mathbf{w}) = m(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;
3) $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$.

Casi particolari

$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{v}$ o $\mathbf{w}$ sono il vettore nullo oppure $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ hanno la stessa direzione.

I versori fondamentali $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formano una terna ortogonale destrorsa, quindi si ha per esempio: $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$, mentre $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0}$.

In generale non vale una proprietà associativa del prodotto vettoriale, si ha per esempio: $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}) \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}$, mentre $\mathbf{i} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Dalle proprietà del prodotto vettoriale e dalle osservazioni precedenti segue che, dati due vettori $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{w} = (x_2, y_2, z_2)$, in componenti rispetto a un sistema di riferimento $R(O, x, y, z)$, si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \wedge (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}$; ossia (pensando alla nozione di determinante):

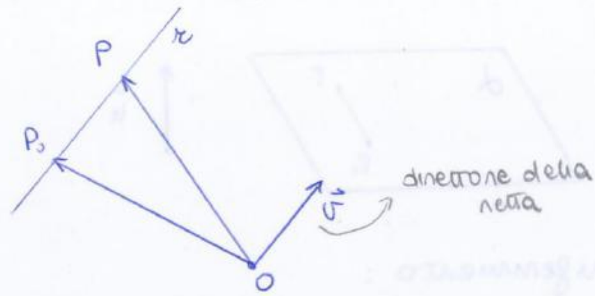
$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 190

Geometria Analitica

RETTA r

r è data, assegnando un punto P_0 e un vettore $\vec{v}$, dalla retta r passante per P_0 e $\parallel$ a $\vec{v}$



$\vec{OP}-\vec{OP_0} \parallel \vec{PP_0} \iff \vec{OP}-\vec{OP_0} \parallel \vec{v} \iff \exists t \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{OP}-\vec{OP_0} = t\vec{v}$

$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{OP}-\vec{OP_0} = t\vec{v}$

↘ Equazione vettoriale della retta

- in un sistema di riferimento:

$R(O, x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v}(l, m, n)$

$\vec{OP}-\vec{OP_0} = t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(l, m, n)$

$$r \begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases}$$ → Equazioni parametriche della retta

Ex. $P_0(1, 2, 0) \parallel \vec{v}(1, -1, 0)$ $r = ?$

eq. vettoriale

$(x, y, z) - (1, 2, 0) = t(1, -1, 0) \rightarrow$

$$\begin{cases} x - 1 = t \\ y - 2 = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

- nel piano (xy) la retta r è rappresentata da $r \begin{cases} x = tl + x_0 \\ y = tm + y_0 \end{cases}$

rappresentazione cartesiana:

Elimino t

$$r: \begin{cases} t = \frac{x - x_0}{l} \\ y = \frac{x - x_0}{l} m + y_0 \\ z = tn + z_0 \end{cases}$$

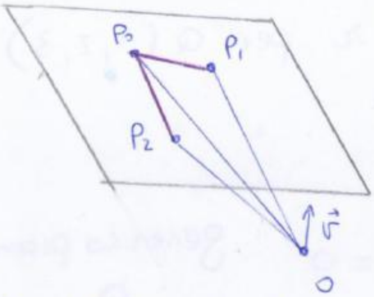
se si ha (l) o (m) o $(n) = 0$, anche $(x - x_0)$ o $(y - y_0)$ o $(z - z_0) = 0$

→ Equazioni cartesiane

2 - devo ricavare un vettore $\vec{v} \perp \alpha$

$(\vec{OP_1} - \vec{OP_0}) \parallel$ segmento $\overline{P_1P_0}$

$(\vec{OP_2} - \vec{OP_0}) \parallel$ segmento $\overline{P_2P_0}$



Sono paralleli ad α

$\Rightarrow \alpha : (\vec{OP} - \vec{OP_0})(\vec{OP_1} - \vec{OP_0}) \wedge (\vec{OP_2} - \vec{OP_0}) = 0$

ES. $P_0(1,2,3)$ $P_1(0,1,-1)$ $P_2(2,1,3)$

$$\alpha : \det\begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$-4(x-1) - 4(y-2) + 2(z-3) = 0$

verificare che non sono allineati

$P_0P_1 \parallel P_1P_2$, sono lin. dip $\Leftrightarrow P_0P_1P_2$ sono allineati

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{OP_1} - \vec{OP_0} = t(\vec{OP_2} - \vec{OP_0})$

$P_1P_0(-1,-1,-4)$ $P_2P_0(1,-1,0)$ NO !!

Sulle rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Ex. retta come intersezione di due piani

trovare una rappresentazione parametrica

passa per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $(l, m, n) = \vec{v} \parallel r$

$\alpha \perp (1,-1,1)$ $\rightarrow P_0(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

$\beta \perp (0,2,-1)$

$\vec{v} = (1,-1,1) \wedge (0,2,-1) \parallel \alpha, \beta \Rightarrow \parallel r$

$$\vec{v} = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (-1, 1, 2)$$

$$r : \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - t \\ y = -\frac{1}{2} + t \\ z = 2t \end{cases}$$

se interseco i due piani : $\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases}$

ottengo una retta

$s: \begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=5-2t \end{cases}$ $\quad s \parallel$ vettore $\vec{w}=(1,-1,-2) \Rightarrow s \parallel r$

$Q \in s$

Data $\quad r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ **FASCIO PROPRIO**

Il fascio di piani di asse r ha equazione cartesiana

$F: m(ax+by+cz+d)+n(a'x+b'y+c'z+d')=0$

al variare di $m, n \in \mathbb{R}$

Insieme dei piani paralleli a **FASCIO IMPROPRIO**

$\pi: ax+by+cz+d=0$

$F: ax+by+cz+K=0$

al variare di $K \in \mathbb{R}$

ex. date $r \parallel s$, trovare il piano α che contiene r ed s

$r: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x=2+2t \\ y=-2t \\ z=0 \end{cases}$

trovare il fascio di s : $\quad y=-x+2$

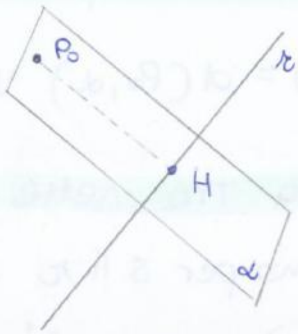
$m(x+y-2)+nz=0$

metto r dentro : $\quad m+3n=0 \quad$ ex. $=(-3,1)$

e tutte le coppie proporzionali

$\alpha: -3(x+y-2)+z=0$

Distanza punto - retta



α = piano
per $P_0 \perp r$
$H = \alpha \cap r$

Ex $P(1,2,3)$ $\quad r: \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases}$

$\alpha = (x-1) + (y-2) + 2(z-3) = 0$

$\alpha \cap r : (t-1) + (t-1) + 4t - 6 = 0$

$t = 4/3 \qquad H(4/3, 7/3, 8/3)$

$d(P_0, H)$ = uso formule $d(A,B)$

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Distanza piano - piano $\parallel \neq$

$d(\alpha, \beta) = d(P_0, \beta) \ \forall P_0 \in \alpha$

Distanze retta - retta $\parallel \neq$

$d(r,s) = d(P_0, s) \ \forall P_0 \in r = d(P_0, H)$

ex. $\quad r \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2 \\ z = 3+t \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 2-u \\ y = 2 \\ z = u \end{cases} \quad P_0(1,2,3)$

$P_0 \in r$

α per P_0, $\perp r$

$\alpha: -(x-1) + 0 + (z-3) = 0$

$\alpha \cap s : -(2-u-1) + (u-3) = 0 \qquad u = 2$

$H \begin{cases} x = 2-2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \qquad H(0,2,2)$

$$d(r,s) = \frac{|q - q_1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

RETTE E PIANI

Piani

Per individuare un piano α nello spazio possiamo assegnare:

(a) un punto P_0 di α e un vettore $\mathbf{v}$ ortogonale ad α
(b) un punto P_0 di α e due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ paralleli ad α
(c) tre punti P_0, P_1, P_2 di α non allineati.

Nel caso (a), sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{v} = (a, b, c)$; se $P = (x, y, z)$ è il generico punto di α, il vettore $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$ è parallelo ad α e quindi è ortogonale a $\mathbf{v}$. Si ha perciò l'equazione vettoriale:

$$\mathbf{v} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0$$

che, passando dai vettori alle componenti, diventa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

da cui l'equazione cartesiana:

$$(1) \qquad \alpha : ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{dove} \qquad d = -(ax_0 + y_0 + cz_0).$$

Un piano α si rappresenta quindi con un'equazione lineare in x, y, z e i coefficienti delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale ad α. Se si moltiplica la (1) per un fattore non nullo, si ottiene un'equazione che rappresenta lo stesso piano, perciò l'equazione cartesiana di α è determinata a meno di un fattore di proporzionalità.

Nel caso (b) è facile ricondursi al caso (a); basta osservare che il piano passante per un punto P_0 e parallelo a due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ è il piano per P_0 ortogonale al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$.

Nel caso (c) si cerca il piano α passante per i punti P_0, P_1, P_2; basta osservare che α è il piano che passa per uno dei punti, per esempio per P_0 ed è parallelo ai vettori $(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0})$ e $(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0})$; perciò applicando il caso (b), basta determinare il piano per P_0 ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) \wedge (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0})$.

Parallelismo tra piani

I piani $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono paralleli se e solo se i vettori $\mathbf{v} = (a, b, c)$ e $\mathbf{v}' = (a', b', c')$ sono paralleli; quindi i due piani sono paralleli se e solo se esiste un coefficiente reale non nullo k tale che $(a, b, c) = k(a', b', c')$. Se inoltre $(a, b, c, d) = k(a', b', c', d')$, i due piani coincidono.

Rette

Per individuare una retta r nello spazio possiamo assegnare:

(a) un punto P_0 della retta e un vettore $\mathbf{v}$ parallelo alla retta
(b) due piani non paralleli di cui la retta è intersezione
(c) due punti distinti della retta.

Nel caso (a) siano $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{v} = (l, m, n)$: un punto $P(x, y, z)$ appartiene ad r se e solo se i vettori $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, ossia se e solo se esiste $t \in \mathbf{R}$ tale che

$$(1) \qquad (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = t\mathbf{v}$$

$$ax + by + c = 0$$

dove il vettore $\mathbf{u} = (a, b)$ è perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (l, m)$.

Fasci di piani

Date le equazioni di due piani distinti $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, diciamo fascio di piani individuato da α e α' l'insieme di tutti i piani individuati da un'equazione del tipo

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{5}$$

al variare di $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Osserviamo che la (5) per ogni coppia di valori $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ è un'equazione lineare in x, y, z e perciò rappresenta (a meno di un fattore di proporzionalità) un ben preciso piano. Distinguiamo due casi:

- se i piani α e α' si intersecano secondo una retta r, ogni piano del fascio passa per la retta r, viceversa si può dimostrare che ogni piano passante per r si può individuare con un'equazione di tipo (5) ; in questo caso si parla di fascio proprio di piani di asse la retta r.
- se i piani α e α' sono paralleli, ogni piano del fascio è parallelo ad α e α' e, viceversa, ogni piano parallelo ad α e α' appartiene al fascio; in questo caso si parla di un fascio improprio di piani. I piani del fascio improprio sono quindi tutti rappresentati da un'equazione del tipo $ax + by + cz + k = 0$, al variare del parametro reale k.

Distanza tra due punti

Dati due punti $P(x, y, z)$ e $P'(x', y', z')$, la distanza di P da P' è il modulo del vettore $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'})$, ossia (per il teorema di Pitagora):

$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Distanza di un punto da un piano

Dato un piano α di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, la distanza di P_0 da α è la distanza di P_0 dal punto H proiezione ortogonale di P_0 sul piano α :

$$d(P_0, \alpha) = d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distanza di un punto da una retta nel piano

Data l'analogia tra l'equazione di una retta nel piano e quella di un piano nello spazio, con un procedimento del tutto simile al precedente, si ottiene la distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta $r : ax + by + c = 0$:

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distanza di un punto da una retta nello spazio

Dati la retta r e il punto P_0 , la distanza di P_0 da r può essere determinata con un procedimento geometrico, che segue dai casi precedenti: basta determinare il piano α passante per il punto P_0 e ortogonale alla retta r e considerare il loro punto di intersezione $H = r \cap \alpha$; si ha infatti $d(P_0, r) = d(P_0, H)$.

Sistemi

Sistema lineare

Sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si può scrivere anche:

chiamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

matrice dei coefficienti — colonna delle incognite — colonna dei termini noti

$\Rightarrow$ sistema diventa $AX = B$ equazione matriciale

Ex. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Un sistema lineare è individuato da $A, B \Rightarrow$ sistema $(A|B)$ matrice completa

Def Soluzione di $(A|B)$ è una n-upla $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $c_i \in K$ t.c. $c_1, c_2, \dots, c_n$ sostituiti contemporaneamente in tutte le equazioni le rendano identità

$\Rightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n)$ sono tali che:

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1a_{11} + c_2a_{12} + \dots + c_na_{1m} \\ c_1a_{21} + \dots \\ \dots \\ c_1a_{m1} + c_2a_{m2} + \dots + c_na_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Lemma di sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + k(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) = b_1 + kb_2 \end{cases}$$

$$\forall k \in K,\ k \neq 0$$

Conseguenze

data $M = (A|B) \in K^{m,n}$ qualsiasi, posso ridurla a scala ottenendo $M' = (A'|B')$ di un sistema equivalente a $(A|B)$ con le operazioni:

1. scambio tra loro 2 righe di M
2. Sostituisco a una riga R_i di M $R_i \to R_i + kR_j$, $k \in K$
3. Sostituisco a $R_i \to kR_i$ $k \neq 0$

ex. $(A|B) = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{A \text{ non è } A \text{ scala}}$ allora riduco a scala con 1 2 3

1) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ faccio $R_2 \to R_2 - R_1$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $R_3 \to R_3 - 2R_2$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$ Sistema equivalente: $\begin{cases} x + z = 2 \\ z = -1 \\ w = 4 \end{cases}$ ∞^1 soluzioni $(3, y, -1, 4)$

Def. Data M ridotta a scala si dice **RANGO** di M il numero delle righe non nulle (= numero degli indicatori)

♥ $M = (A|B)$, a scala è la matrice di un sistema incompatibile quando il rango di A $[rg(A)]$ è minore di $rg(A|B)$, $rg(A) < rg(A|B)$

Operazioni elementari che producono sistemi equivalenti:

1) Scambio di righe in $(A|B) = M$
2) prodotto $R_i \to kR_i$, $k \neq 0$
3) $R_1 \to R_1 + kR_2$

* le colonne con gli indicatori sono incognite vincolate e tra loro lin. INDIPENDENTI
  le colonne SENZA indicatori sono incognite libere e lin. DIPENDENTI dalle colonne precedenti
* le righe non nulle di una matrice a scala M' sono linearmente indipendenti (le colonne non nulle no!)

Def Data la matrice M (anche non a scala)
Si dice RANGO di M, $rg(M)$, il rango che una qualsiasi matrice M' ottenuta da M per riduzione a scala.

Teorema Rouché-Capelli

Dato un sistema lineare qualsiasi di matrice $M = (A|B)$

1) il sistema M è compatibile se e solo se
   $rg(A) = rg(A|B)$, incompatibile per $rg(A) < rg(A|B)$
2) Se il sistema M è compatibile le incognite sono n,
   $rg(A) = rg(A|B) = r$, allora le soluzioni sono ∞^{n-r}

(cioè si possono esprimere in funzione di $n-r$ le incognite libere)

Dim.

1) $(A|B) \xrightarrow{\text{riduz. a scala}} \dots \to (A'|B') = M'$, M' equivalente a M
Se in M' esiste una riga del tipo $(0, 0, \dots, 0 | b)$, $b \neq 0$
$rg(A') < rg(A'|B') \Rightarrow$ no soluzioni!

Oss.

- Dato $AX = 0$ sistema omogeneo e date 2 soluzioni di $AX = 0$ X_1, X_2

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

X_1 è soluzione $\iff AX_1 = 0$
X_2 è soluzione $\iff AX_2 = 0$

- $AX_1 - AX_2 = 0 \rightarrow A(X_1 - X_2) = 0$

$\Rightarrow (X_1 - X_2)$ è ancora soluzione di $AX = 0$

- $\forall k \in K, \; kX_1$

$A(kX_1) = k(AX_1) = k \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ anche $kX_1 = \begin{pmatrix} kc_1 \\ kc_2 \\ \vdots \\ kc_n \end{pmatrix}$ è soluzione di $AX = 0$

- Dato $AX = B$ sistema qualsiasi e date $X_1 \neq X_2$ soluzioni di $AX = B$, vuol dire

$$\begin{matrix} AX_1 = B \\ AX_2 = B \end{matrix} \Rightarrow AX_1 - AX_2 = B - B = 0 \rightarrow A(X_1 - X_2) = 0$$

allora la differenza di due soluzioni è soluzione del sistema associato omogeneo.

$AX = 0$ sistema omogeneo associato a $AX = B$

$\Rightarrow X_1 - X_2 = Z$ è soluzione di $AX = 0$

$X_1 = Z + X_2$

MATRICI E SISTEMI LINEARI

Matrici ridotte a scala, indipendenza lineare

Definizione. Una riga di una matrice M si dice non nulla se possiede almeno un elemento diverso da 0. Il primo elemento diverso da 0 (da sinistra) si chiama **indicatore** della riga.

Definizione. Una matrice M si dice **ridotta per righe** se in ogni sua riga non nulla esiste almeno un elemento non nullo che ha al di sotto solo zeri oppure nessun elemento. Una matrice si dice **ridotta per colonne** se la sua trasposta è ridotta per righe.

Definizione. Una matrice M si dice **ridotta a scala** se in ogni sua riga non nulla esiste un elemento non nullo che ha alla sua sinistra e al di sotto solo zeri oppure nessun elemento, ossia:

- non ci sono due indicatori nella stessa colonna
- percorrendola dall' alto verso il basso, gli indicatori si spostano da sinistra a destra
- eventuali righe nulle sono tutte in basso.

Esempio. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è ridotta per righe ed anche ridotta a scala.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ è ridotta per righe, non è ridotta a scala.

Definizioni.

(a) Dati i vettori riga $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k$ appartenenti a $\mathbf{R}^{1,n}$, una loro **combinazione lineare** è un vettore riga della forma

$$a_1\mathbf{r}_1 + \cdots + a_k\mathbf{r}_k, \quad con\ a_1, \cdots, a_k \in \mathbf{R}$$

Analoga definizione se $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k$ sono vettori colonna appartenenti a $\mathbf{R}^{n,1}$

(b) I vettori riga $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k$ si dicono **linearmente indipendenti** se l'equazione:

$$x_1\mathbf{r}_1 + \cdots + x_k\mathbf{r}_k = \mathbf{0}$$

(dove $\mathbf{0}$ è il vettore riga di $\mathbf{R}^{1,n}$ che ha coefficienti tutti nulli) ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_k = 0$.

(c) I vettori riga $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k$ si dicono **inearmente dipendenti** se non sono linearmente indipendenti, ossia se uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri (basta osservare che, per esempio, scrivere $\mathbf{r}_k = a_1\mathbf{r}_1 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{r}_{k-1}$ equivale a scrivere $a_1\mathbf{r}_1 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{r}_{k-1} + (-1)\mathbf{r}_k = \mathbf{0}$.

Proposizione.

(a) Le righe non nulle di una matrice M ridotta a scala sono linearmente indipendenti; le colonne in generale no, ma sono linearmente indipendenti le colonne dotate di indicatore;

(b) una colonna di M è priva di indicatore se e solo se è combinazione lineare di quelle che la precedono.

Esempio.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione. Dato un sistema lineare non omogeneo $AX = B$, il sistema $AX = \mathbf{0}$ si dice **sistema omogeneo associato**.

Supponiamo di conoscere una soluzione Y del sistema $AX = B$ e una soluzione Z del sistema omogeneo associato $AX = \mathbf{0}$, allora $A(Y + Z) = AY + AZ = B + \mathbf{0} = B$ cioè $Y + Z$ è un'altra soluzione del sistema $AX = B$; viceversa, trovata in qualche modo una soluzione particolare Y di $AX = B$, per ottenerle tutte basta sommarla con le tutte soluzioni del sistema $AX = \mathbf{0}$.

Matrice inversa

Operando formalmente nello stesso modo, si possono applicare il metodo di Gauss e il teorema di Rouchè-Capelli a sistemi lineari del tipo $AX = B$, con $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, $X \in \mathbf{R}^{n,p}$, $B \in \mathbf{R}^{m,p}$; in questo caso si può interpretare $AX = B$ come un sistema le cui incognite sono le righe di X. Consideriamo il caso particolare in cui il sistema è

$$AX = I_n, \qquad A, X \in \mathbf{R}^{n,n}$$

Per definizione la soluzione (se esiste) è la matrice A^{-1}, inversa di A. Inoltre, essendo $rg(I_n) = n$, si ha $rg(A|I_n) = n$, quindi per il teorema di Rouchè-Capelli esistono soluzioni solo se $rg(A) = n$; di conseguenza se il sistema è compatibile, necessariamente ha una sola soluzione.

Esempi.

1) Data

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare (se esiste) A^{-1}.

Applicando il metodo di eliminazione di Gauss al sistema $(A|I)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Nel sistema ridotto a scala si vede che $rg(A') = 3$, quindi A è invertibile. Risolvendo poi per sostituzione e tenendo presente che le incognite sono le righe di X, si ottiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 5/4 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

2) (vedi 00-matrici pag.4) La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se $ad - bc \neq 0$; in tal caso $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Risolviamo il sistema $AX = I$, dove $X \in \mathbf{R}^{2,2}$, $I \in \mathbf{R}^{2,2}$ è la matrice identità e le incognite sono le righe X_1, X_2 della matrice X. Applichiamo il metodo di eliminazione di Gauss al sistema $(A|I)$; supponendo $a \neq 0, c \neq 0$, possiamo eseguire sulla seconda riga l'operazione elementare $R_2 \to aR_2 - cR_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right)$$

omogeneo e ha l'unica soluzione $(x, y) = (0, -1)$, mentre il sistema non omogeneo (4) è incompatibile, cioè non ha soluzione.

Un sistema lineare $AX = B$ può essere riscritto come: $x_1\mathbf{c}_1 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = B$, dove $\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_n$ sono le colonne della matrice dei coefficienti A; perciò risolvere un sistema lineare equivale a cercare di esprimere la colonna dei termini noti B come combinazione lineare delle colonne di A.

Per riconoscere se un sistema lineare è compatibile e, in caso affermativo, per trovarne tutte le soluzioni, si può procedere in molti modi, per esempio con il ben noto metodo di sostituzione. Per i sistemi lineari in cui la matrice dei coefficienti è a scala, risulta particolarmente facile applicare il metodo di sostituzione dal basso verso l'alto.

Proposizione. Un sistema lineare $AX = B$, dove A è una matrice a scala di tipo $r \times n$ di rango r (cioè tutte le r righe non nulle) è compatibile qualunque sia B. Se $r < n$ si hanno ∞^{n-r} soluzioni, se $r = n$ la soluzione è unica.

Un altro metodo per risolvere i sistemi lineari è il procedimento di eliminazione di Gauss, che ha lo scopo di trasformare il sistema dato in un sistema più semplice da risolvere, ma con le stesse soluzioni.

Metodo di eliminazione di Gauss

Definizione. Data una matrice M, diciamo **operazione elementare sulle righe** di M una delle seguenti operazioni:

- scambiare due righe: $R_i \to R_j$
- moltiplicare una riga per un coefficiente non nullo $k \in \mathbf{R}$: $R_i \to kR_i$
- aggiungere ad una riga un multiplo di un'altra riga : $R_i \to R_i + kR_j$

Eseguendo operazioni elementari sulle righe di una matrice M, si ottiene una nuova matrice che ha lo stesso numero di righe e di colonne di M.

Definizione. Due sistemi lineari nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si dicono **equivalenti** se hanno esattamente le stesse soluzioni.

Lemma. Se $M = (A|B)$ è la matrice di un sistema lineare, la matrice $M' = (A'|B')$ ottenuta eseguendo operazioni elementari sulle righe di M, corrisponde a un sistema lineare equivalente.

Dimostrazione. Permutando l'ordine delle equazioni di un sistema, le soluzioni ovviamente non cambiano. È sufficiente quindi mostrare che il sistema

$$(1) \quad \begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \alpha \\ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = \beta \end{cases}$$

è equivalente al sistema

$$(2) \quad \begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \alpha \\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + k(b_1x_1 + \ldots + b_nx_n) = \alpha + k\beta \end{cases}$$

con $k \neq 0$. È chiaro che ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2) (basta sostituire); viceversa se $(c_1, \ldots, c_n)$ è soluzione di (2), vuol dire che $a_1c_1 + \ldots + a_nc_n = \alpha$ e $a_1c_1 + \ldots + a_nc_n + k(b_1c_1 + \ldots + b_nc_n) = \alpha + k\beta$ da cui semplificando $k(b_1c_1 + \ldots + b_nc_n) = k\beta$ e quindi $b_1c_1 + \ldots + b_nc_n = \beta$, da cui la tesi.

Dato un sistema lineare $AX = B$, il metodo di Gauss consiste nell' applicare una opportuna successione di operazioni elementari sulle righe della matrice $M = (A|B) \in \mathbf{R}^{m,n+1}$, in modo da ottenere alla fine del

Applicazione:

Teorema di Cramer

Dati $AX = B$ sistema lineare con A quadrata $m \times m$, $rg(A) = m$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ --- \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ --- \\ b_n \end{pmatrix}$$

c'è una sola soluzione

caso 2×2

$rg(A) = 2$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1}A)\, X = A^{-1}B$$

$$I\, X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} db_1 - bb_2 \\ -cb_1 + ab_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, a_3, ---, a_n)\} \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$$

tutte le n-uple ordinate di numeri reali

Ex. $\mathbb{R}^3 \longleftrightarrow$ vettori dello spazio applicati in O

elenco ordinato di elementi ($\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^{1,n} = \{$matrici a coeff. reali con 1 riga e n colonne$\}$

$\mathbb{R}^{n,1} = \{$matrici a coeff. reali con n righe e 1 colonna$\}$

Insieme chiuso rispetto alla somma e al prodotto è perciò 1 esempio di sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

Def. Un sottoinsieme $V \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $\mathbb{R}^n$ se non è vuoto ed è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per un numero reale

cioè $\forall \vec{u}, \vec{w} \in V$, $\vec{u} + \vec{w} \in V$
$\forall \vec{u} \in V, \forall k \in \mathbb{R}$, $k\vec{u} \in V$

Ex. $\mathbb{R}^3$: cerco tutti i sottospazi

prendo un generico $\vec{v} \in V$, $V = \{k\vec{v}, \forall k \in \mathbb{R}\}$

- Tutte le rette per O sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$
* - se $(a, b, c) = \vec{0}$, $V = \{k\vec{0}, \forall k \in \mathbb{R}\} = \{\vec{0}\}$ è sott. vett. di $\mathbb{R}$
- se prendo un altro generico $\vec{w} \in V$, $V = \{k\vec{v} + m\vec{w}, \forall k, m \in \mathbb{R}\}$; cioè piano per O che contiene $\vec{v}, \vec{w}$. V è sott. vett. di $\mathbb{R}^3$
* - caso limite: $\mathbb{R}^3 = V$ è sott. vett di se stesso

* sottospazi impropri, valgono x ogni sottospazio

- una retta non passante per O è sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$? NO!! poiché $\vec{0} \notin r \Rightarrow r$ non è sott. vett.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $\mathbb{R}^n$

$W \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. :

1) W non vuoto
2) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W$, $\vec{u} + \vec{v} \in W$
3) $\forall \vec{u} \in W, \forall k \in \mathbb{R}$ $k\vec{u} \in W$

Ex. $M = \mathbb{R}^{3,2}$ osservo che $\mathbb{R}^{3,2} \leftrightarrow \mathbb{R}^6$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{22}, a_{31}, a_{32})$$

corrispondenza biunivoca

In generale: dato il sistema $AX=0$ con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ (perciò n incognite)

- Si può dimostrare che se $S=$ soluzioni di $AX=0$, allora S è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

1) So che $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, sta in S

2) $X_1, X_2 \in S \iff AX_1 = 0, \ AX_2 = 0$

$AX_1 + AX_2 = 0 + 0 \to A(X_1 + X_2) = 0$

$\iff X_1 + X_2 \in S$

3) $X_1 \in S \iff AX_1 = 0, \ \forall K \in \mathbb{R}$

$A(KX_1) = K(AX_1) = K0 \Rightarrow A(KX_1) = 0$

$\Rightarrow KX_1 \in S$

N.B. le stesse proprietà non valgono con un sistema qualsiasi (cioè non omogeneo $AX=B$), cioè le soluzioni non sono sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ - x es se non passano x l'origine -

COSTRUZIONE DI SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^n$

1- Assegno $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ qualsiasi
(riprendere la Def. di combinazione lineare e di linearmente indipendenti e dipendenti)

2- Costruisco $W = \{\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_r\vec{v}_r$, al variare dei coeff. $a_i \in \mathbb{R}\}$.
con $W \subseteq \mathbb{R}^n$

W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$,
Notazione: $W = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r)$, cioè W è generato da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ e $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sono i generatori di W

RISULTATO: Se aggiungo ai generatori dei vettori linearm. dipendenti da esso, il sottospazio generato non cambia

Altro modo per assegnare un sottospazio di $\mathbb{R}^n$:
dare delle equazioni, cioè individuare il sottospazio come le soluzioni di un sistema lineare omogeneo

Ex. $\vec{v} = (1,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ Trovare $\mathcal{L}(\vec{v})$, ma come insieme delle soluzioni di un certo $AX = 0$

$\mathcal{L}(\vec{v})$ = retta per O, direzione $\vec{v} = (1,1,-1)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad AX = 0$$

Def $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r)$ insieme ordinato di vettori di $\mathbb{R}^n$ è BASE di un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^n$ se:

1) $W = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r)$
2) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ sono linearmente indipendenti

$$\mathcal{B}_W = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r)$$

Ex. $\vec{u} = (1,0,1,0)$ $\vec{v} = (2,1,0,0) \in \mathbb{R}^4$

$W = \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v})$

$\mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}, 3\vec{u}, \vec{0}, \vec{u}-\vec{v})$

domande: 1. $(\vec{u}, \vec{v})$ è base di W?
2. $(\vec{u}, \vec{v}, 3\vec{u}, \vec{0}, \vec{u}-\vec{v})$ è base di W?

1° vera per ipotesi la 1) - $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sono lin. indip.? 2)

$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ $(a,0,a,0) + (2b, b, 0, 0) = 0 \to (a+2b, b, a, 0)$ $\begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix}$
sì!

Dim. Per assurdo suppongo che

$$\vec{w} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$
$$\vec{w} = b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + \dots + b_n \vec{v}_n$$

siano due modi diversi di esprimere $\vec{w}$ come comb. lineare di vettori di B_W

- Sottraggo membro a membro:

$$\vec{w} - \vec{w} = (a_1 - b_1) w_1 + (a_2 - b_2) w_2 + \dots + (a_n - b_n) w_n = \vec{0}$$

per hp. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ sono lin. indipendenti, poiché B_W è base.

- allora x forza: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$

Una base di $\mathbb{R}^n$ sono: $B_{\mathbb{R}^n} = \{$vettori riga della matrice $I_n\}$

le righe (colonne) di I sono non nulle e con indicatore $\Rightarrow$ sono linearm. indip.

Def la BASE CANONICA di $\mathbb{R}^n$ è data dai vettori riga (colonne) di I_n

Dato W sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e una base $B_W = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ ogni altra base B'_W ha lo stesso numero di vettori n (esso si dice dimensione di W)

Dim. Per assurdo suppongo che di avere 2 basi diverse di W:

$$B_W = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$$
$$B'_W = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_h) \quad \text{con } k > h$$

posso esprimere i vettori di B_W come comb. lineare dei vettori di B'_W:

se $k<h$ rifaccio il ragionamento di prima
e trovo 1 assurdo

Teorema

$\forall$ W, sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, W ha dimensione $\leq n$

Dim Cerco di costruire una B_W. $\exists\ \vec{w} \in W$.
Può succedere che $W = \mathcal{L}(\vec{w})$
allora se $\vec{w} = \vec{0}$, $W = \{\vec{0}\}$, $\dim W = 0$
se $\vec{w} \neq 0$ allora $B_W = (\vec{w})$, $\dim W = 1$
se $W \neq \mathcal{L}(\vec{w})$, vuol dire $W > \mathcal{L}(\vec{w})$
allora esiste $\vec{w}_1 \in W$, $\vec{w}_1 \notin \mathcal{L}(\vec{w})$
Costruisco $\mathcal{L}(\vec{w}, \vec{w}_1)$ ---
Alla fine ho costruito
$\vec{w}, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_r \in W$, linearm. indip. e generatori.
$r+1 \leq n$ perché in $\mathbb{R}^n$ $\exists$ al max n vettori lin. indip.

Come trovare base e dimensione di W

1) Se $W = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_s)$
hp $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_s$ generatori
Cerco di estrarre una base

Se W è assegnato con equazioni, come trovo base e $\dim W$:

EX: $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$

sottospazio di $\mathbb{R}^3$

trovo il generico vettore di W. Esso è soluzione del sist. omogeneo $x - y + 2z = 0$

$(y-2z, y, z)$ al variare di $y, z \in \mathbb{R}$

$A = (1, -1, 2)$ incognite 3, $rg(A) = 1$

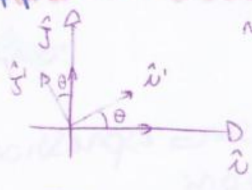
$(y-2z, y, z) = y(1,1,0) + z(-2,0,1)$

al variare di $y, z \in \mathbb{R}$, il vettore generico $(y-2z, y, z) \in W$ è comb. lineare di $(1,1,0), (-2,0,1)$ che sono lin. indip. (sempre)

Conclusioni $B_W = ((1,1,0),(-2,0,1))$ è una base di W

Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

EX. $\mathbb{R}^2$



ruoto $\hat{i}$ e $\hat{j}$

La rotazione di un angolo θ è una $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\hat{i}' = f(\hat{i}) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\, \hat{i} + \operatorname{sen}\theta\, \hat{j}$

$\hat{j}' = f(\hat{j}) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta\, \hat{i} + \cos\theta\, \hat{j}$

considero la matrice:

$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la moltiplico per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \hat{i}$

$= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = f(\hat{i})$ allora $M\hat{i} = f(\hat{i})$

$M\hat{j} = M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = f(\hat{j})$

Proprietà

Data $M \in \mathbb{R}^{m,n}$, se faccio:

$$M(\vec{v}+\vec{u}) = M\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] = M\vec{v} + M\vec{u} =$$

$$= M\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow f_M(\vec{v}+\vec{u}) = f_M(\vec{v}) + f_M(\vec{u})$$

se faccio:

$$M\left[k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] = M(k\vec{v}) = k\left[M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] = k(M\vec{v}) \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longleftrightarrow f_M(k\vec{v}) = k f_M(\vec{v})$$

Def. Data $M \in \mathbb{R}^{m,n}$, $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

dato $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$

si dice insieme delle CONTROIMMAGINI di $\vec{w}$

$$f_M^{-1}(\vec{w}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f_M(\vec{v}) = \vec{w}\}$$

Ex cerco le controimmagine di $\vec{w} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cerco $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\Big|\; M\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

riduco e scalo M: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho(M) = 2$

∞^3 soluz

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_5 - x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 - 2x_5 \end{cases}$$

Soluz. generale $\left(\frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2} + x_5, -x_3 - 2x_5, x_3, x_4, x_5\right)$

$\forall x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ $\quad f_M^{-1}(\vec{0})$ $x_3\left(\frac{1}{2}, -1, 1, 0, 0\right) + x_4\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 1, 0\right) + x_5(1, -2, 0, 0, 1)$

→ Base !! Dim 3

Def Si dice NUCLEO di f^M e si indica con $\operatorname{Ker} f_M$:

$$\operatorname{Ker} f_M = f_M^{-1}(\vec{0}) \text{ con } M \in \mathbb{R}^{m,n},\ f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

— insieme delle controimmagini —

- Se f_M è iniettiva e suriettiva allora f_M è biettiva e si dice ISOMORFISMO
- f_M si dice ENDOMORFISMO se lo spazio di partenza coincide con lo spazio di arrivo

$$f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

- riprendendo: $Ker\, f_M = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f_M(\vec{v}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m \} =$

$=$ sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni di $Mx = 0$

* $\dim Ker\, f_M = n - rg(M)$

$Im\, f_M = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ con } f_M(\vec{v}) = \vec{w} \}$

$=$ Sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di M

* $\dim Im\, f_M = rg(M)$

* **Teorema** Data $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\dim Ker\, f_M + \dim Im\, f_M = n - rg(M) + rg(M) = n$

$=$ dimensione dello spazio di partenza

Teorema Data $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

f_M è iniettiva $\iff Ker\, f_M = \{\vec{0}\}$

Dim 1. hp. f_M iniettiva th. $Ker\, f_M = \{\vec{0}\}$

Per assurdo suppongo $\exists\, \vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} \in Ker\, f_M$

vuol dire $f_M(\vec{v}) = \vec{0}$ per def. di $Ker\, f_M$

$f_M(\vec{v}) = \vec{0}$, $f_M(\vec{0}) = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$ $\Rightarrow f_M$ non può essere iniettiva

2. hp. $Ker\, f_M = \{\vec{0}\}$ th. f_M iniettiva

Per assurdo suppongo f_M non iniettiva. vuol dire $\exists\, \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f_M(\vec{v}_1) = f_M(\vec{v}_2)$. so che f_M è lineare, allora:

Data una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.c. gode delle proprietà dette:

Def f si dice applicazione lineare

Teorema Se fisso una base $B_{\mathbb{R}^n}$ e una base $B_{\mathbb{R}^m}$, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m,n}$ t.c. $f = f_M$

Dim Dare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ dire chi è $f(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Ho fissato $B_{\mathbb{R}^n} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$

So chi sono $f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)$

$f(\vec{u}_1) \in \mathbb{R}^m$, in $\mathbb{R}^m$ ho $B_{\mathbb{R}^m} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots \vec{w}_n)$

$f(\vec{u}_1) = a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \dots + a_{m1}\vec{w}_m$

$\dots$

$f(\vec{u}_m) = a_{1m}\vec{w}_1 + a_{2m}\vec{w}_2 + \dots + a_{mn}\vec{w}_m$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_m) \end{array}$$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + \dots + b_n\vec{u}_n$

$f(\vec{v}) = f_M(\vec{v}) = M \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ verifico

$f(\vec{v}) = f(b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + \dots + b_n\vec{u}_n) =$ applicazione lineare

$= b_1 f(\vec{u}_1) + b_2 f(\vec{u}_2) + \dots + b_n f(\vec{u}_n)$

Date due applicazioni lineari:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$$

$g \circ f$

Def $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $g \circ f(\vec{v}) = g(f(\vec{v}))$ applicazione lineare prodotto o composizione

$$\vec{v} \xmapsto{f} f(\vec{v}) \xmapsto{g} g(f(\vec{v}))$$

$$\vec{v} \longmapsto A\vec{v} \longmapsto B(A\vec{v}) = (BA)\vec{v}$$

$A = M_f$ $\qquad$ $B = M_g$ $\qquad$ si può fare il prodotto

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\qquad$ $B = \mathbb{R}^{p,m}$ $\qquad$ righe x colonne

$M_{g \circ f} = BA = M_g M_f$ riga x colonne

caso particolare:

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{?} \mathbb{R}^n}_{\text{identità}} \qquad ? \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$$

$M_? \cdot M_f = I_n \Rightarrow$ x forza $M_?$ è M_f^{-1} !! matrice inversa

Teorema Un endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è invertibile $\iff$ è associato a una matrice M invertibile. Equivale a dire che $rg(M) = n$. Allora f è un isomorfismo.

Spazio vettoriale V su K qualsiasi

K = campo numerico $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, ---)$

V = insieme non vuoto di elementi che chiamo vettori

definisco 2 operazioni:

Somma di vettori

prodotto di un vettore per un $k \in K$

$\Rightarrow \mathbb{C}^3 \Leftrightarrow \mathbb{C}_2[x]$ data $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

verifico x somme e prodotto

$p(x) + q(x) \longleftrightarrow (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2) = (a_0, a_1, a_2) + (b_0, b_1, b_2)$

$K p(x) \longleftrightarrow (Ka_0, Ka_1, Ka_2) = K(a_0, a_1, a_2)$

è applicazione lineare, isomorfismo

The Dato K-spazio vettoriale V, se esiste una base $\mathcal{B}_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ allora esiste un isomorfismo

$K^n \longleftrightarrow V$

$(k_1, k_2, \dots, k_n) \longleftrightarrow k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \dots + k_n\vec{v}_n$

Applicazioni lineari

Def. V, W K-spazi vettoriali

$f: V \to W$ si dice applicazione lineare se

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

2) $\forall k \in K$, $f(k\vec{u}) = k f(\vec{u})$

[creare la matrice : ex: $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$]

$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} =$

derivata: $f(1) = 0 \to (0,0,0)$

$f(x) = 1 \to (1,0,0)$

$f(x^2) = 2x \to (0,2,0)$

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice diverse associate a f

per esempio prendo una base $\mathcal{C} \neq \mathcal{B} = (x, 1+x^2, 2)$

$M_f^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$

$f(x) = 1 \to (1,0,0)$

$f(x^2+1) = 2x \to (0,2,0)$

$f(2) = 0 \to (0,0,0)$

$$M_f^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS $U+W$ è il più piccolo sottospazio che contiene $U \cup W$

caso particolare

$W \in U \Rightarrow U \cup W = U$
$U + W = U$

Relazione di Grassmann

$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)$

Ex

$\dim W + \dim U = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)$
$\quad 2 \qquad\quad 2 \qquad\qquad\quad 1 \qquad\qquad\quad 3$

Dati $U, W \subset V$ sottospazi

Se $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Def. $U+W = U \oplus W$ si dice somma diretta

per il corollario: $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$

$\Rightarrow$ Per costruire $B_{U \oplus W}$ basta fare unione di B_U e B_W

ES $U = \{(x,y,z) \mid z=0\} \rightarrow$ (piano xy)

$W = \{(x,y,z) \mid x=0,\ y=0\} \rightarrow$ (retta asse z)

$U+W = U \oplus W$?

$U \cap W = \{\vec{0}\}$

$(x,y,0) + (0,0,z) = (x,y,z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow U+W \in \mathbb{R}^3$

SPAZI VETTORIALI $\mathbf{R}^n$

Fissato un intero positivo n, sia $\mathbf{R}^n$ l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali : un elemento $\mathbf{v}$ di $\mathbf{R}^n$ è costituito da n numeri reali $(x_1, \cdots x_n)$, che chiameremo componenti del vettore $\mathbf{v}$. A seconda dei casi identificheremo $\mathbf{v}$ come vettore riga o come vettore colonna, ossia identificheremo $\mathbf{R}^n$ con $\mathbf{R}^{1,n}$ e con $\mathbf{R}^{n,1}$.

Definiamo un'operazione di somma tra due elementi di $\mathbf{R}^n$:

$$(x_1, \cdots x_n) + (y_1, \cdots y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

e un'operazione di prodotto per un numero reale k:

$$k(x_1, \cdots x_n) = (kx_1, \cdots kx_n)$$

È facile verificare, utilizzando le proprietà di calcolo dei numeri reali, che in $\mathbf{R}^n$, dotato di queste operazioni, valgono le seguenti

Proprietà

1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

3) esiste un elemento $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$

4) per ogni $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$, esiste il vettore $-\mathbf{v}$ tale che $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

1) $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ per ogni a, b reali

2) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

3) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

4) $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$

Definizione. Diciamo che $\mathbf{R}^n$ è dotato di una struttura di **spazio vettoriale** su $\mathbf{R}$, in quanto abbiamo definito in $\mathbf{R}^n$ le operazioni di somma e di prodotto per un numero reale che godono delle proprietà sopra elencate.

Sottospazi vettoriali

Definizione. Un sottoinsieme V di $\mathbf{R}^n$ si dice **sottospazio vettoriale** se non è vuoto ed è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per un numero reale, ossia:

1 - $V \neq \Phi$

2 - per ogni coppia di vettori $\mathbf{u} \in V$ e $\mathbf{v} \in V$, risulta $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$

3 - per ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ e ogni numero $k \in \mathbf{R}$, risulta $k\mathbf{u} \in V$

Osservazione. Dalla definizione segue che

(a) ogni sottospazio vettoriale acquisisce da $\mathbf{R}^n$ una struttura di spazio vettoriale;

(b) ogni sottospazio vettoriale contiene il vettore nullo, infatti se $\mathbf{v} \in V$, anche $(-1)\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{0} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} \in V$; osserviamo però che, se un insieme contiene il vettore nullo, non è necessariamente un sottospazio, come mostra il seguente esempio 2).

Esempi.

1) Sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$ il sottospazio costituito dal solo vettore nullo : $V = \{\mathbf{0}\}$, che si dice sottospazio nullo e lo spazio $\mathbf{R}^n$. Questi due sottospazi sono detti impropri, mentre tutti gli altri si dicono sottospazi propri.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 190

Definizioni. Data una matrice $M \in \mathbf{R}^{m,n}$, diremo **spazio delle righe** di M (denotato con $R(M)$) il sottospazio vettoriale $\mathcal{L}(R_1, \cdots, R_m)$ di $\mathbf{R}^{1,n}$ generato dalle righe di M e diremo **spazio delle colonne** di M (denotato con $C(M)$) il sottospazio vettoriale $\mathcal{L}(C_1, \cdots, C_n)$ di $\mathbf{R}^{m,1}$ generato dalle colonne di M.

Definizione. Sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$. Un insieme ordinato di vettori $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) \in V$ si dice una **base** per V se:

1 - $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti;

2 - $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$, cioè i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono generatori di V.

Osservazione. Dalla definizione di base segue che nessuna base può contenere il vettore nullo, in quanto $\mathbf{0}$ non appartiene a nessun insieme di vettori linearmente indipendenti.

Esempio.
1) I vettori riga (o colonna) della matrice I_n (matrice identità $n \times n$) sono una base di $\mathbf{R}^n$ che si dice **base canonica** e si indica con $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$.
2) In $\mathbf{R}^3$ i vettori $(0,2,0), (0,4,0), (0,0,0), (0,2,1)$ non sono una base di $\mathcal{L}((0,2,0),(0,0,1))$, mentre i vettori $(0,2,0), (0,0,1)$ lo sono.

Proposizione. Data una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$ del sottospazio V di $\mathbf{R}^n$, per ogni vettore $\mathbf{w} \in V$, i coefficienti che permettono di esprimerlo come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$ sono unici.

Dimostrazione. Supponiamo che si possa scrivere $\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, ma anche $\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$; sottraendo membro a membro si ottiene

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_k - b_k)\mathbf{v}_k$$

per ipotesi i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, quindi deve essere $(a_1 - b_1) = \cdots = (a_k - b_k) = 0$, da cui la tesi.

Osservazione. I coefficienti che permettono di esprimere un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^n$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica sono le componenti del vettore stesso. Si ha infatti l'equaglianza $\mathbf{w} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1(1,0,\cdots,0) + a_2(0,1,\cdots,0) + \cdots + a_n(0,\cdots,0,1)$.

Dato un sottospazio $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$, per trovarne una base si può applicare il metodo di riduzione a scala delle matrici. Infatti:

Proposizione. Le righe non nulle di una matrice $M \in \mathbf{R}^{m,n}$ ridotta a scala formano una base dello spazio $R(M)$ generato dalle righe di M.

Dimostrazione. È noto che le righe non nulle di una matrice ridotta a scala sono linearmente indipendenti. Inoltre le trasformazioni elementari sulle righe di una matrice permettono di passare da un insieme di generatori dello spazio delle righe un altro insieme di generatori dello stesso spazio.

Quindi per trovare una base di $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ basta costruire una matrice $M \in \mathbf{R}^{k,n}$ che ha per righe (in un ordine qualsiasi) i generatori di V; riducendola a scala con una opportuna successione di operazioni elementari sulle righe si ottiene una matrice M', le cui righe non nulle formano la base cercata. Si può ovviamente ottenere lo stesso risultato scrivendo i generatori per colonne e operando sulle colonne, in questo modo alla fine le colonne non nulle ottenute sono una base di V.

E se invece V è dato come sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo? Vediamo su un esempio come si può trovare una base:

Esempio. Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x + y + z = 0\}$; tutte le soluzioni di $x + y + z = 0$ si possono scrivere per esempio come $(-y-z, y, z)$ al variare di y e z in $\mathbf{R}$; in particolare si può scrivere: $(-y-z,y,z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$, da cui si conclude che una base di V è $(-1,1,0), (-1,0,1)$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 190

APPLICAZIONI LINEARI $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

Ricordiamo che, dati due insiemi C e D, una **funzione** $f : C \to D$ è una legge che associa ad ogni elemento $c \in C$ un ben preciso elemento $d \in D$. Si scrive $f(c) = d$ oppure $c \mapsto d$ e si dice che d è immagine di c.

L'**immagine** di f è l'insieme $Im\, f = \{f(c)|c \in C\}$; $Im\, f$ è contenuta nel codominio D e non coincide necessariamente con D. Dato $b \in D$, l'insieme $\{c \in C|f(c) = b\}$ si dice insieme delle **controimmagini** di b e si denota con $f^{-1}(b)$.

Ricordiamo anche che f si dice **suriettiva** se $Im\, f = D$, quindi f è suriettiva se e solo se $f^{-1}(b)$ è non vuoto per ogni $b \in D$. Inoltre f è **iniettiva** se $f(c_1) = f(c_2)$ implica $c_1 = c_2$. Se f è sia iniettiva che suriettiva si dice **biiettiva** e in questo caso esiste la funzione **inversa** $f^{-1} : D \to C$ tale che $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ sono funzioni identità.

Data una matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, possiamo definire una funzione $f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ponendo

$$f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

al variare di $\mathbf{v}$ in $\mathbf{R}^n$ (con $\mathbf{v}$ pensato come vettore colonna di $\mathbf{R}^{n,1}$), dove $A\mathbf{v}$ è l'usuale prodotto tra matrici riga per colonna.

Esempio. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3,4}$, definiamo $f_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$: per ogni $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

$$f_A(\mathbf{v}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

dove $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$.

In particolare per esempio $f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ricordiamo che per il prodotto tra matrici valgono le

Proprietà. Per ogni $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ $\mathbf{R}^n$ e per ogni $k \in \mathbf{R}$

1) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

2) $k(A\mathbf{v}) = A(k\mathbf{v})$

Ne deduciamo che le funzioni f_A assegnate come sopra sono caratterizzate dalle seguenti

Proprietà.

1) $f_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$

2) $k(f_A(\mathbf{v})) = f_A(k\mathbf{v})$

Definizione. Una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ che gode di tali proprietà si dice **applicazione lineare**. Quando $m = n$, f si dice **endomorfismo**. Se f è una biiezione, si dice che f è un **isomorfismo**.

Dimostrazione. Nell'ipotesi che $ker(A) = \{\mathbf{0}\}$, supponiamo per assurdo che esistano due vettori $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ tali che $f_A(\mathbf{v}_1) = f_A(\mathbf{v}_2)$: si ha allora, per la linearità di f_A, $f_A(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$, cioè, per definizione di $Ker(f_A)$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in Ker(f_A)$ e quindi dall'ipotesi segue che $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, ossia $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Nell'ipotesi che f_A sia iniettiva, sia $\mathbf{v} \in Ker(f_A)$; allora per definizione $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$; sappiamo però che anche $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Poichè f_A è iniettiva, deve essere $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Proposizione. Fissate una base di $\mathbf{R}^n$ e una base di $\mathbf{R}^m$, sia data una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$; allora esiste un'unica matrice $M \in \mathbf{R}^{m,n}$ tale che $f = f_M$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^n} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^m} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ le basi fissate. L'applicazione f è data, quindi si sa come opera su un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^n$, in particolare si sa come opera sui vettori della base $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^n}$; si avrà perciò:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{u}_1) &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{v}_m \\
f(\mathbf{u}_2) &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{v}_m \\
&\ldots \\
f(\mathbf{u}_n) &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{v}_m
\end{aligned}
$$

Sia ora $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n$ un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^n$; per la linearità di f si ha: $f(\mathbf{v}) = b_1 f(\mathbf{u}_1) + \ldots + b_n f(\mathbf{u}_n)$ e quindi, tenendo conto dei dati precedenti, si ottiene

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ossia f è associata alla matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Composizione e prodotto di matrici

Consideriamo le matrici $B \in \mathbf{R}^{m,n}$ e $A \in \mathbf{R}^{n,p}$ e le applicazioni lineari ad esse associate $f_B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ e $f_A : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ definite rispettivamente da $f_B(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}$ e $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. La composizione $f_B \circ f_A$ è data da

$$\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} \mapsto BA\mathbf{v}$$

ed è perciò associata alla matrice prodotto BA.
Un caso particolare è quello delle applicazioni lineari invertibili. Ricordiamo che se una funzione $f : C \to D$ è invertibile, la funzione $f^{-1} : D \to C$ definita da $f^{-1}(y) = x$ è detta inversa di f e si ha $f^{-1} \circ f = Id_C$ e $f \circ f^{-1} = Id_D$.

Proposizione.
(a) L'applicazione lineare associata a una matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$ non è invertibile se $n \neq m$.
(b) Se $n = m$, l'applicazione lineare associata a una matrice $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ è invertibile se e solo se $rg(A) = n$.
(c) Se $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ è invertibile, la matrice associata all'applicazione inversa f_A^{-1} è la matrice A^{-1}.

Dimostrazione. Per definizione di applicazione inversa, f_A è invertibile se e solo se, per ogni vettore $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, l'equazione vettoriale $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ ha una sola soluzione. L'equazione $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ corrisponde a un sistema lineare di m equazioni in n incognite di matrice $(A|\mathbf{b})$. Per il Teorema di Rouchè-Capelli, un sistema del tipo $(A|\mathbf{b})$ ha un'unica soluzione qualunque sia il vettore $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ se e solo se $m = rg(A) = n$. Dalla definizione di composizione di applicazioni segue che la matrice associata all'applicazione inversa f_A^{-1} è la matrice A^{-1}.

a m righe ed n colonne) con le operazioni di somma tra matrici e di prodotto di una matrice per un numero reale.

2) Ricordiamo che un polinomio nell'indeterminata x è un'espressione del tipo

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

dove i coefficienti possono appartenere a qualsiasi campo $\mathbf{K}$. Il polinomio ha grado n se $a_n \neq 0$. Il termine costante del polinomio è il termine $a_0 = p(0)$ che è il valore assunto dalla funzione $x \mapsto p(x)$ nel punto 0; a_0 è nullo se e solo se il polinomio $p(x)$ è divisibile per x.

Sia $\mathbf{K}_n[x]$ l'insieme dei polinomi in x di grado minore o uguale a n a coefficienti nel campo $\mathbf{K}$. Definiamo in $\mathbf{K}_n[x]$ le due operazioni seguenti: per ogni $k \in \mathbf{K}$ e per ogni polinomio di $\mathbf{K}_n[x]$

$$p(x)+q(x) = (a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n;$$

$$kp(x) = k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \cdots + ka_nx^n$$

È facile verificare che per queste operazioni sono soddisfatte le 8 proprietà della definizione, quindi $\mathbf{K}_n[x]$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$.

Combinazioni lineari e sottospazi

Come nel caso dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$, dati i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k$ di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{K}$, denotiamo con $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ l'insieme di tutte le **combinazioni lineari** $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$ al variare dei coefficienti $a_1, \cdots a_k \in \mathbf{K}$.

Analogamente, in uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{K}$

Definizione. Un sottoinsieme W di V si dice **sottospazio vettoriale** se :

1 - W non è vuoto

2 - per ogni coppia di vettori $\mathbf{u} \in W$ e $\mathbf{v} \in W$, risulta $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$

3 - per ogni vettore $\mathbf{u} \in W$ e ogni numero $k \in \mathbf{K}$, risulta $k\mathbf{u} \in W$

Ne segue (come nel caso di $\mathbf{R}^n$) che un sottospazio è in particolare uno spazio vettoriale: infatti le operazioni che vi sono definite soddisfano gli 8 assiomi perchè li soddisfano in V. Analogamente al caso di $\mathbf{R}^n$, i sottospazi vettoriali possono essere descritti assegnando i generatori oppure assegnando opportune equazioni lineari omogenee.

Definizione. In uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{K}$, i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ si dicono **linearmente indipendenti** se l'equazione:

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

(con $x_i \in \mathbf{K}$) ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_k = 0$.

Applicazioni lineari

Siano V, W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbf{K}$

Definizione. Una applicazione $f : V \to W$ si dice **lineare** se:

1 - $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

2 - $f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u})$ per ogni $k \in \mathbf{K}, \mathbf{u} \in V$.

Osservazione. Una conseguenza della definizione è che $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, cioè f manda il vettore nullo di V nel vettore nullo di W.

Questi risultati ci permettono di procedere come per gli spazi $\mathbf{R}^n$, ossia dati due $\mathbf{K}$-spazi vettoriali V e W di dimensione rispettivamente n ed m, possiamo associare una matrice a qualsiasi applicazione lineare $f : V \to W$: basta infatti fissare una base $\mathcal{B}_V$ e una base $\mathcal{B}_W$.

Esempio. Sia $V = W = \mathbf{R}_2[X]$. Sia D l'applicazione lineare definita dalla derivazione rispetto a X: $D(p(X)) = p'(X)$. Se scegliamo la base $(1, X+1, (X+1)^2)$ per V e la base $(1, X, X^2)$ per W, la matrice di D rispetto a queste basi è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre se scegliamo la base $(1, X, X^2)$ sia in V che in W, la matrice di D è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Intersezione, unione e somma di sottospazi

Supponiamo d'ora in avanti che V sia uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbf{R}$ e che U e W siano due suoi sottospazi.

Proposizione. L'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio di V.

Dimostrazione. Se $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U \cap W$, $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ appartiene sia a U che a W, quindi appartiene a $U \cap W$; inoltre per ogni $k \in \mathbf{K}$, se $\mathbf{w} \in U \cap W$, $k\mathbf{w}$ appartiene sia a U che a W, quindi appartiene a $U \cap W$.

Ne segue che l'intersezione di un numero qualunque di sottospazi è un sottospazio e, poichè un sottospazio contiene sempre almeno il vettore $\mathbf{0}$, tale intersezione non è mai vuota.

L'unione $U \cup W$ in generale non è un sottospazio; lo è solo nel caso in cui $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$ (e in questo caso $U \cup W = U$ oppure $U \cup W = W$).

Esempio. Siano U e W due distinte rette vettoriali in $\mathbf{R}^3$: è facile verificare che $U \cup W$ non è chiuso rispetto alla somma di vettori; d'altra parte le due rette vettoriali individuano un piano vettoriale, costituito da tutti e soli i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ tali che $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$.

Questa situazione ha carattere generale:

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi. Si dice **somma** dei sottospazi U e W l'insieme $U + W$ costituito da tutti i vettori del tipo $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, al variare di $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$.

Proposizione. $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V, contenuto in ogni sottospazio che contiene $U \cup W$.

Dimostrazione. Due qualsiasi elementi di $U + W$ sono del tipo $\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1$, $\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2$ con $\mathbf{u}_i \in U$ e $\mathbf{w}_i \in W$. Si ha:

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in U + W$$

e per ogni $k \in \mathbf{K}$

$$k(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) = (k\mathbf{u}_1) + (k\mathbf{w}_1)$$

Inoltre se un sottospazio T contiene $U \cup W$, deve contenere tutti i vettori $\mathbf{u} \in U$ e tutti i vettori $\mathbf{w} \in W$ e perciò deve contenere tutti i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in U + W$, ossia contiene $U + W$.

Ricordiamo che ogni sottospazio U di uno spazio vettoriale V è tale che $dim(U) \leq dim(V)$; infatti una base di U può sempre essere estesa a una base di V; per lo stesso motivo si ha $dim(U) = dim(V)$ se e solo se $U = V$.

Considero le applicazioni lineari

Data un'applicazione lineare $f: V \to W$

V, W K-spazi vettoriali

Data una B_V e una B_W

$\exists!\ M_f^{B_V, B_W} = M$

Volevo che $\forall \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in W$$

Componenti rispetto a B_V

Componenti rispetto a B_W

$$MX = Y$$

Cambio una base, per esempio in V

$B_V \to B_V'$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad M \left[P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$MP = M_f^{B_V', B_W}$$

Cambio una base anche in W

$B_W \to B_W'$, matrice di passaggio Q

$$MP \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

moltiplico per Q^{-1} a sinistra :

$$(Q^{-1}MP) \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \underbrace{(\cancel{Q^{-1}Q})}_{I} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$$M_f^{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to f(2,1) \\ \to f(1,1) \end{array} \to \text{matrice diagonale}$$

$(2,1) \in \text{Ker} f \Rightarrow f(2,1) = (0,0)$

$f(1,1) = (2,2) = a(2,1) + b(1,1)$ $\quad \begin{cases} 2 = 2a + b \\ 2 = a + b \end{cases} \to \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$

$(2,2)_{\mathcal{C} \text{ canonica}} = (0,2)_{\mathcal{B}}$

Trovare: matrice di passaggio a $\mathcal{B}$

$$P\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ $\to$ valori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{C}$

<u>Ex.</u> In $\mathbb{R}^2$ è dato l'endomorfismo f t.c. $f(1,1) = (5,5)$
$f(-1,1) = (1,-1)$

trovare una base di $\mathbb{R}^2$ t.c.
$M_f^{B,B}$ sia diagonale

$(1,1)$ e $(-1,1)$ sono $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$, xk l.i.

$f(1,1) = 5(1,1)$
$f(-1,1) = -1(-1,1)$

- M di f rispetto a $\mathcal{B} = ((1,1),(-1,1))$

$f(1,1) = 5(1,1)$
$a(1,1) + b(-1,1)$
$a = 5 \quad b = 0$

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$\downarrow$
matrice diagonale

$f(-1,1) = -1(-1,1)$
$a(1,1) + b(-1,1)$
$a = 0 \quad b = -1$

Un altra base è, per esempio $M_f^{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\mathcal{B} = ((-1,1)(1,1))$

Teorema

Se $f: V \to V$ ha una matrice diagonale rispetto a una certa Base B, vuol dire che i vettori di B sono autovettori di f

Es $f(1,1) = 5(1,1)$ Calcolo $f(2,2)$:

per linearità $f(2,2) = 2f(1,1) = (10,10)$

Def. autospazio V_n

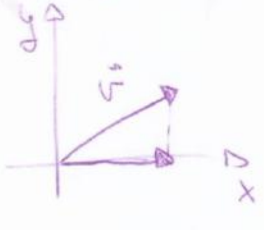
di $f: V \to V$, relativo all'autovalore n

$$V_n = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = n\vec{v}\}$$

V_n contiene tutti gli autovettori relativi a n e il vettore $\vec{0}$

Prop. V_n è sottospazio vettoriale di V

Es. $V = \mathbb{R}^2$ definito dalla proiezione di un vettore sull'asse x
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Trovare autovettori e autovalori di f

quali sono i $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $f(\vec{v}) = n\vec{v}$, $n \in \mathbb{R}$?

$\vec{v} = (x,0)$, $\forall x \neq 0$ $\quad f(x,0) = (x,0) \quad n = 1 \;] \; V_1$

$v = (0,y)$, $\forall y \neq 0$ $\quad f(0,y) = (0,0) \quad n = 0 \;] \; V_0$

Osservaz. Dato $f: V \to V$, se $\ker f \neq \{\vec{0}\}$, allora $\ker f = V_0$

$\Rightarrow$ f non iniettiva ha autovalore 0

ES 1) Dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_f^{b.c, b.c}$$

Trovare autovettori, autovalori, autospazi di f;
dire se f è diagonalizzabile

$\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ è autovettore di f relativo a $h \in \mathbb{R}$
quando $f(\vec{v}) = h\vec{v}$

$M\vec{v} = h\vec{v}$ $\quad (M - hI)\vec{v} = 0$ sistema lineare omogeneo

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 3 incognite $\quad M - hI$ matrice 3x3

polinomio caratteristico

h = parametro reale - Cerco soluz. non nulle $\iff$
$\iff rg(M - hI) < 3 \iff \det(M - hI) = 0$ eq. caratteristica

$$\det(M - hI) = \det \begin{pmatrix} -h & 0 & 1 \\ 0 & 1-h & 0 \\ 1 & 0 & -h \end{pmatrix} = h^2(1-h) - (1-h) = (1-h)(h-1)(h+1)$$

$h = 1 \quad h = -1$

valori reali che annullano l'equaz. caratteristica $\det(M - hI) = 0 \Rightarrow$ gli autovalori sono ± 1

- $h = 1$: soluz del sistema omogeneo $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M - 1I$

riduco $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = z$
soluz (x, y, x) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$V_1 = \{(x, y, x)\}$ autovettori relativi a $h = 1$: (x, y, x) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

- $h = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ riduco $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$ soluz $(x, 0, -x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

autovettori: $(x, 0, -x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Ex. $M_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ trovare autovalori e autovettori

polinomio caratteristico $= \det(M_f - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (2-\lambda)(\lambda^2+1)$

radici: $\lambda = 2$ $\lambda = \pm i$

$\lambda = 2$ reale, solo autovalore

$V_2 =$ soluzioni di $(M_f - 2I) = 0 \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rg(\lambda) = 2$

riduco $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soluz $(0,0,z)$ $V_2 = \{(0,0,z)\}$ $\forall z \in \mathbb{R}$

Dato $f: V \to V$, V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\dim V = n$.

se λ è autovalore di f, allora $\dim V_\lambda = \overset{\text{incog.}}{n} - rg(M_f - \lambda I)$

Prop. In generale $1 \leq \dim V_\lambda \leq m_\lambda$

m_λ: molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico (algebrica)

A proposito di base formata da autovettori di f:

Teorema: autovettori di f relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

Caso particolare del teorema

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ autovettori di f, relativi agli autovalori λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Th $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono lin. indipendenti